

经典教材辅导用书·物理系列丛书

# 普通物理学 思考题与习题解答

《普通物理学简明教程》(胡盘新 汤毓骏)  
(程守洙、江之永主编《普通物理学·第五版》改编版)

主 编 黄伯坚  
编 者 黄伯坚 吴 伟 项林川

华中科技大学出版社

## 内 容 简 介

本书是根据高等教育出版社出版的,胡盘新、汤毓骏改编程守洙、江之永《普通物理学》(第五版)所成的《普通物理学简明教程》的内容和系统编写的。全书共十六章,每章分为“知识要点”、“思考题解答”和“习题解答”等部分。在书中对多数题指出了解题思路,复杂的还进行了必要的讨论。

本书可作为工科院校、电视大学、成人高等教育物理课程的辅助教材,也可供其他相关人员参考。

# 前 言

---

---

物理学是工科大学生必修的基础理论课。在学习过程中,辨析容易含混的问题、解答相关的习题,对于理解和掌握基本概念,启发学生思维能力是必不可少的。

程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第五版)是我国高等院校工科专业广泛使用的一种物理教材。在其基础上由胡盘新、汤毓骏改编而成的《普通物理学简明教程》,更是重点突出、内容适度、深入浅出、强化方法,在可教性与可接受性方面有着鲜明特色。为了方便学习,我们编写了本辅导书。本辅导书的章节顺序、所采用的符号均与原教材一致。

由于编者水平有限,书中难免有不恰当、甚至错误之处,敬请读者不吝指正。

编者

2004年11月

# 目 录

---

---

## 第一篇 力 学

第一章 质点的运动	(2)
知识要点	(2)
思考题解答	(3)
习题解答	(10)
第二章 牛顿运动定律	(22)
知识要点	(22)
思考题解答	(23)
习题解答	(28)
第三章 运动的守恒定律	(50)
知识要点	(50)
思考题解答	(51)
习题解答	(55)
第四章 刚体的转动	(74)
知识要点	(74)
思考题解答	(75)
习题解答	(78)
第五章 机械振动	(92)
知识要点	(92)
思考题解答	(93)
习题解答	(106)

---

第六章 机械波	(131)
知识要点	(131)
思考题解答	(133)
习题解答	(142)
第七章 相对论基础	(172)
知识要点	(172)
思考题解答	(173)
习题解答	(176)

## 第二篇 热 学

第八章 气体动理论	(190)
知识要点	(190)
思考题解答	(192)
习题解答	(198)
第九章 热力学基础	(212)
知识要点	(212)
思考题解答	(214)
习题解答	(220)

## 第三篇 电 磁 场

第十章 静电场	(240)
知识要点	(240)
思考题解答	(244)
习题解答	(254)
第十一章 恒定电流的磁场	(294)
知识要点	(294)
思考题解答	(296)

---

习题解答	(303)
第十二章 电磁感应	(345)
知识要点	(345)
思考题解答	(346)
习题解答	(352)
第十三章 电磁场和电磁波	(376)
知识要点	(376)
思考题解答	(377)
习题解答	(379)
第十四章 波动光学	(390)
知识要点	(390)
第一部分 光的干涉	(390)
第二部分 光的衍射	(391)
第三部分 光的偏振	(392)
思考题解答	(393)
第一部分 光的干涉	(393)
第二部分 光的衍射	(399)
第三部分 光的偏振	(402)
习题解答	(407)
第一部分 光的干涉	(407)
第二部分 光的衍射	(419)
第三部分 光的偏振	(428)

#### 第四篇 量子物理

第十五章 早期量子论和量子力学基础	(436)
知识要点	(436)
思考题解答	(438)
习题解答	(443)

第十六章 激光和固体的量子理论.....	(468)
知识要点.....	(468)
思考题和习题解答.....	(469)

# 第一篇

# 力学

# 第一章 质点的运动

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 参考系和坐标系

描述物体运动时用作参考的其他物体称为参考系。

为了定量地说明物体对参考系的位置,需要在该参考系上建立固定的坐标系。

### 2. 位置矢量和位移

位置矢量(位矢):在参考系上选一点 $O$ 向质点所在位置 $P$ 所引的有向线段 $r(=\overrightarrow{OP})$ 。

运动方程:表示质点位置随时间变化的函数式称为运动方程,可以写作

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

位移矢量:  $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$   
一般  $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq |\Delta r|$

运动叠加:在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

### 3. 速度和加速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

自然坐标系中

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{e}_n + \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t$$

(1) 匀加速运动:

$$\boldsymbol{a} = \text{常矢量}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

(2) 抛体运动:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

直角坐标系中

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

(3) 圆周运动:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

匀速圆周运动

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

(4) 角量描述:

$$\text{角速度} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{角加速度} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

#### 4. 相对运动

$$\text{伽利略坐标变换} \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t, \quad t' = t$$

$$\text{速度变换} \quad \boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}_{AK'} + \boldsymbol{v}_{K'K}$$

$$\text{加速度变换} \quad \boldsymbol{a}_K = \boldsymbol{a}_{K'} + \boldsymbol{a}_0$$

## 思考题解答

【1-1】 回答下列问题:

- (1) 一物体具有加速度而其速度为零,是否可能?
- (2) 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度,是否可能?
- (3) 一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率,是否可能?
- (4) 一物体具有沿  $Ox$  轴正方向的加速度而有沿  $Ox$  轴负方向的速度,是否可能?
- (5) 一物体的加速度大小恒定而其速度的方向改变,是否可能?

答 (1) 可能。因为由定义  $a = \frac{dv}{dt}$ , 即加速度是速度的变化率。速度为零但变化率可不为零, 如物体由静止开始运动、单摆在偏离平衡位置最大值时均如此。

(2) 可能。因为速度是矢量, 既有大小又有方向, 其大小不变而方向改变是可以的, 例如匀速圆周运动就是这样。

(3) 不可能。因为由  $v = vi$  可知, 恒定的速度意味着大小  $v$  和方向  $i$  都不变。

(4) 可能。加速度与速度方向相反为减速运动, 即沿  $Ox$  轴负方向的减速运动其加速度沿  $Ox$  轴正方向。

(5) 可能。匀速圆周运动就是如此。

**【1-2】** 回答下列问题:

(1) 位移和路程有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 在什么情况下并不相等?

(2) 平均速度和平均速率有何区别? 在什么情况下两者的量值相等? 瞬时速度和平均速度的关系和区别是怎样的? 瞬时速率和平均速率的关系和区别又是怎样的?

答 (1) 位移是矢量, 路程是标量; 位移为物体初末位置矢量之差, 用起于始点终于末点的有向线段表示, 一般不是物体所经历的实际路径。而路程是物体起于始点终于末点运动所经历的实际路径。

在同一起点至同一终点的情况下, 物体作直线运动且由始点

直达终点时,位移与路程的量值相等。在作曲线运动,以及作直线运动但有反转运动过程时,两者并不相等。

(2) 平均速度是位移除以相应时间间隔,即  $\bar{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ ; 平均速率是路程除以对应时间间隔,即  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 。要  $|\bar{v}| = \bar{v}$ , 则  $\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , 亦即需  $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$ 。只有在直线运动中,且物体始终只朝着一个方向运动时,两者量值才相等。

瞬时速度是平均速度当  $\Delta t \rightarrow 0$  时的极限,即  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 。瞬时速度描述了质点位矢的瞬时变化率,亦即质点在  $t$  时刻附近无限短的一段时间内的位矢变化率。平均速度是一段时间内位矢的平均时间变化率。

瞬时速率  $v = \frac{ds}{dt}$  是平均速率  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时取极限而得。瞬时速率为瞬时速度的大小,描述质点路程的瞬时变化率。平均速率为路程的平均时间变化率。

**【1-3】** 回答下列问题:

(1) 有人说:“运动物体的加速度越大,物体的速度也越大”,你认为对不对?

(2) 有人说:“物体在直线上运动前进时,如果物体向前的加速度减小,物体前进的速度也就减小了”,你认为对不对?

(3) 有人说:“物体加速度的值很大,而物体速度的值可以不变,是不可能的”,你认为如何?

答 (1) 不对。加速度是物体速度的瞬时变化率,它与速度是两个不同的概念。加速度大,物体的速度不一定大。

(2) 不对。物体做加速运动还是减速运动,应根据加速度与速度的方向是否一致判定,而与加速度大小无关。物体在直线上向前加速度减小,但它与速度方向一致,所以速度还是增加,只不过增加的程度较前小了。

(3) 可能。速度是矢量,它的值不变但方向可变。由  $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$  可知,当  $\frac{dv}{dt} = 0$  时,有  $\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$ , 即  $|\boldsymbol{a}| = \frac{v^2}{\rho}$  可以很大。

**【1-4】** 设质点的运动表达式为  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , 在计算质点的速度和加速度时,有人先求出  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 然后根据  $v = \frac{dr}{dt}$  及  $\boldsymbol{a} = \frac{d^2r}{dt^2}$  而求得结果; 又有人先计算速度和加速度的分量, 再合成求得结果, 即

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{及} \quad a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

你认为两种方法哪一种正确? 两者差别何在?

答 后者正确。在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}$$

因而可得后者。

如写成 
$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$

可以方便地看出前者的错误。前者未考虑位矢的矢量性, 只用其值进行计算, 不合定义。后者考虑了其矢量性, 用直角坐标中的分量式计算, 然后合成。

**【1-5】** 试回答下列问题:

- (1) 匀加速运动是否一定是直线运动? 为什么?
- (2) 在圆周运动中, 加速度的方向是否一定指向圆心? 为什么?

解 (1) 不一定。这取决于加速度方向是否与初速度方向一致。两者一致就是直线运动, 如竖直下抛运动; 两者方向不一致就是曲线运动, 如斜抛体运动。若初速度为零, 则是直线运动。

(2) 不一定。匀速圆周运动中,加速度的方向才指向圆心。非匀速圆周运动中,有切向加速度,它与法向加速度合成后的合加速度并不指向圆心。

**【1-6】** 对于物体的曲线运动有下面两种说法:

(1) 物体作曲线运动时,必有加速度,加速度的法向分量一定不等于零;

(2) 物体作曲线运动时速度方向一定在运动轨道的切线方向,法向分速度恒等于零,因此其法向加速度也一定等于零。

试判断上述两种说法是否正确,并讨论物体作曲线运动时速度、加速度的大小、方向及其关系。

答 (1) 正确。根据  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{e}_n$ , 只要  $v \neq 0, \rho \neq \infty$ , 则必有  $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$ 。可见可以有切向和法向加速度,即使  $a_t = 0$ , 曲线运动的加速度法向分量一定不等于零,即必有加速度。

(2) 部分正确。物体作曲线运动时速度方向一定在运动轨道的切线方向,法向分速度恒等于零,此说法正确。由  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  知,法向分速度恒为零,并不一定法向加速度必为零。如匀速圆周运动。

物体作曲线运动时,速度  $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ , 大小为  $\left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|$ , 方向在运动轨道切线方向。加速度  $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$ , 大小为  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{\rho} \right)^2}$ , 与切向夹角为  $\theta = \arctan \left( \frac{a_n}{a_t} \right)$ 。如采用直角坐标,可得出 1-4 思考题中关系。

**【1-7】** 一个作平面运动的质点,它的运动表达式是  $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ , 如果(1)  $\frac{dr}{dt} = 0, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \neq 0$ , 质点作什么运动? (2)  $\frac{dv}{dt} = 0, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \neq 0$ , 质点作什么运动?

答 (1) 由  $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \boldsymbol{e}_r + r \frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \boldsymbol{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{e}_\theta$  可知,  $\frac{dr}{dt} =$

$0, r$  不随时间变, 质点作圆周运动。

(2) 由题意有  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n \neq 0$ , 所以质点作匀速率曲线运动。

**【1-8】** 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直? 任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直?

答 圆周运动中质点的加速度不一定与速度方向垂直。匀速圆周运动中两者垂直, 匀加速圆周运动中两者则不垂直。

任意曲线运动的加速度不一定不与速度方向垂直。如匀速率曲线运动的加速度方向就与速度方向垂直。

**【1-9】** 如图 1-1 所示, 一质点沿轨道  $ABCDEFG$  运动, 试分析图中各点处的运动, 把答案填入表 1-1。

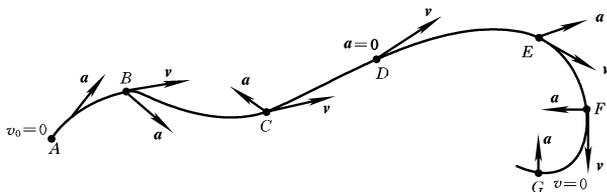


图 1-1

表 1-1

各点情况	A	B	C	D	E	F	G
运动是否可能	可能	可能	可能	不可能	不可能	可能	不可能
速度将增大还是减小	增大	增大	减小			不变	
速度方向将变化否	不变	变	变			变	

答 根据  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$  和  $a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$ , 可作出表 1-1 所示判定, 见表中黑体字。

**【1-10】** 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一石子,此石子能否落回人的手中? 如果石子抛出后,火车以恒定加速度前进,结果又将怎样?

答 以恒定速度在地面上运动的火车是惯性参考系,因此竖直上抛的石子能够回到抛出者手中。以恒定加速度前进的火车是非惯性参考系,上抛石子不能落回抛出者手中。

**【1-11】** 装有竖直遮风玻璃的汽车,在大雨中以速度  $v$  前进,雨滴则以速率  $v'$  竖直下降,问雨滴将以什么角度打击遮风玻璃。

答 根据相对运动速度关系  $v_{\text{雨车}} = v_{\text{雨地}} + v_{\text{地车}} = v_{\text{雨地}} - v_{\text{车地}} = v' - v$ ,可计算出雨滴以与水平方向成角度  $\theta = \arctan\left(\frac{v'}{v}\right)$  打击遮风玻璃。

**【1-12】** 一斜抛物体的水平初速度是  $v_0$ ,它的轨迹在最高点处的曲率半径是多大?

答 设斜抛物体初速度为  $v$ , 抛射角为  $\theta$ , 则有

$$\begin{cases} x = vt\cos\theta \\ y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

对时间求导,可得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta = v_0, & \ddot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= v\sin\theta - gt, & \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

根据曲率半径公式

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$

注意到在轨迹最高点  $\dot{y} = 0$ , 有

$$R = \frac{(v_0^2)^{3/2}}{|v_0(-g)|} = \frac{v_0^2}{g}$$

## 习题解答

**【1-1】** 质点按一定规律沿  $Ox$  轴做直线运动,在不同时刻的位置如下:

$t/s$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$x/m$	3.00	3.14	3.29	3.42	3.57

(1)画出位置对时间的曲线;(2)求质点在  $1.0 \sim 3.0$  s 中的平均速度;(3)求质点在  $t=0$  时的位置。

解 本题由所给数据在坐标纸上作图,从而得到  $x-t$  曲线及其他相关物理量。

(1)  $x-t$  曲线如图 1-2 所示。

(2) 根据平均速度定义

$$\bar{v} = \frac{3.57 - 3.00}{3.0 - 1.0} \text{ m/s} = 0.285 \text{ m/s}$$

(3) 由图知

$$x|_{t=0} = 2.71 \text{ m}$$

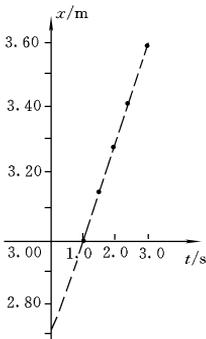


图 1-2

**【1-2】** 一质点沿  $Ox$  轴运动,坐标与时间的变化关系为  $x = 4t - 2t^3$ , 式中  $x$ 、 $t$  分别

以 m、s 为单位,试计算:(1)在最初 2 s 内的平均速度,2 s 末的瞬时速度;(2)1 s 末到 3 s 末的位移、平均速度;(3)1 s 末到 3 s 末的平均加速度;此平均加速度是否可用  $\bar{a} = \frac{a_1 + a_3}{2}$  计算?(4)3 s 末的瞬时加速度。

解 (1) 由  $x = 4t - 2t^3$  有

$$x|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=2} = (4 \times 2 - 2 \times 3^3) \text{ m} = -8 \text{ m}$$

所以 
$$\bar{v} = \frac{-8 - 0}{2 - 0} \text{ m/s} = -4 \text{ m/s}$$

又 
$$v = \frac{dx}{dt} = (4 - 6t^2) \text{ m/s}$$

所以 
$$v|_{t=2} = (4 - 6 \times 2^2) \text{ m/s} = -20 \text{ m/s}$$

(2) 因为 
$$x|_{t=1} = (4 \times 1 - 2 \times 1^2) \text{ m} = 2 \text{ m}$$

$$x|_{t=3} = (4 \times 3 - 2 \times 3^3) \text{ m} = -42 \text{ m}$$

所以位移 
$$-42 \text{ m} - 2 \text{ m} = -44 \text{ m}$$

平均速度 
$$\bar{v} = \frac{-42 - 2}{3 - 1} \text{ m/s} = -22 \text{ m/s}$$

(3) 由  $v|_{t=1} = -2 \text{ m/s}$ ,  $v|_{t=3} = -50 \text{ m/s}$

得 
$$\bar{a} = \frac{-50 - (-2)}{3 - 1} \text{ m/s}^2 = -24 \text{ m/s}^2$$

从平均加速度与瞬时加速度的定义看,是不可的。但本题任设  $t_1, t_2$ , 由  $\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  与  $\frac{a_1 + a_2}{2}$  推出的表达式是相同的, 因此容易迷惑人。如设  $x = 2t^4$ , 则马上可检验出两者的不同。

(4) 由 
$$a = \frac{dv}{dt} = -12t \text{ m/s}^2$$

得 
$$a|_{t=3} = -12 \times 3 \text{ m/s}^2 = -36 \text{ m/s}^2$$

**【1-3】** 一辆汽车沿着笔直的公路行驶, 速度和时间的关系如图 1-3 中折线  $OABCDEF$  所示。(1) 试说明图中  $OA, AB, BC, CD, DE, EF$  等线段各表示什么运动? (2) 根据图中的曲线与数据, 求汽车在整个行驶过程中所走过的路程、位移和平均速度。

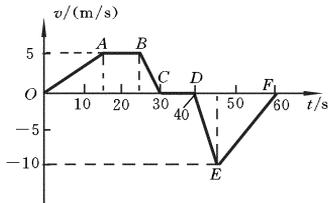


图 1-3

解 (1)

$OA$ : 匀加速直线运动;

$AB$ : 匀速直线运动;

$BC$ : 匀减速直线运动;

$CD$ : 静止;

$DE$ : 反方向匀加速直线运动;

$EF$ : 反方向匀减速直线运动。

(2) 根据路程  $= \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$ , 有

路程 = 梯形  $OABC$  面积 + 三角形  $DEF$  面积

$$= \frac{1}{2} (30+10) \times 5 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 20 \times 10 \text{ m} = 200 \text{ m}$$

由于 梯形  $OABC$  面积 = 三角形  $DEF$  面积

所以 位移 = 0, 平均速度 = 0

**【1-4】** 路灯距地面的高度为  $h$ , 一个身高为  $l$  的人在路上匀速运动, 速度为  $v_0$ , 如图 1-4 所示, 求: (1) 人影中头顶的移动速度; (2) 影子长度增长的速率。

解 本题利用几何关系求导较方便。设人离灯的水平距离为  $x_1$ , 影子长度为  $x_2$ , 人影中头顶离灯的水平距离为  $x$ , 显然  $x = x_1 + x_2$ 。

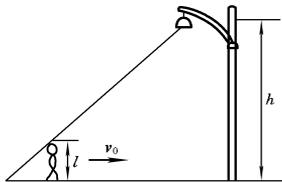


图 1-4

(1) 因为  $\frac{x_1}{x} = \frac{h-l}{h}$

所以  $x = \frac{h}{h-l} x_1$

两边对时间求导, 得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{h-l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{h}{h-l} v_0$$

(2) 同理, 由  $\frac{l}{h} = \frac{x_2}{x}$

可得 
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{l}{h} \frac{dx}{dt} = \frac{l}{h-l} v_0$$

**【1-5】** 一长为 5 m 的梯子,顶端斜靠在竖直的墙上。设  $t=0$  时,顶端离地面 4 m,当顶端以 2 m/s 的速度沿墙面匀速下滑时,求:(1)梯子下端的运动表达式和速度;并画出  $x-t$  和  $v-t$  图(设梯子下端与上端离墙角的距离分别为  $x$  和  $y$ )。(2)在  $t=1$  s 时,下端的

解 本题有几何约束关系。

(1) 据题意,梯子顶端作匀速下滑直线运动,其运动表达式为

$$y = 4 - 2t$$

由直角三角形边长关系,有

$$x = \sqrt{l^2 - y^2} = \sqrt{5^2 - (4 - 2t)^2} = \sqrt{9 + 16t - 4t^2}$$

将  $l^2 = y^2 + x^2$  两边对时间求导,可得

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt} = 2 \frac{y}{x} = \frac{8 - 4t}{\sqrt{9 + 16t - 4t^2}}$$

当  $t=2$  s 时,  $y=0$ ,  $x=5$  m,  $v=0$ , 因此可在  $0 \sim 2$  s 内按上述表达式作出  $x-t$  图和  $v-t$  图, 图略。

(2) 在  $t=1$  s 时,  $v=0.87$  m/s。

**【1-6】** 在离水面高度为  $h$  的岸边,有人用绳子拉船靠岸,船在离岸边  $s$  距离处。当人以  $v_0$  的匀速率收绳时,试求船的速率与加速度。

解 本题中船受到约束,不能离开水面。根据约束几何关系可以很方便地求解。设人与船之间的绳长为  $l$ , 则

$$l^2 = h^2 + s^2$$

上式对时间求导,得 
$$2l \frac{dl}{dt} = 2s \frac{ds}{dt}$$

因为  $\frac{dl}{dt} < 0$ ,  $\frac{ds}{dt} < 0$ , 所以收绳速率  $v_0 = -\frac{dl}{dt}$ , 船的速率大小为

$$v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{l}{s} \frac{dl}{dt} = \frac{l}{s} v_0 = \frac{(h^2 + s^2)^{1/2}}{s} v_0$$

船的加速度大小为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{s \frac{dl}{dt} - l \frac{ds}{dt}}{s^2} v_0 = \frac{-sv_0 + lv}{s^2} v_0 = \frac{h^2 v_0^2}{s^3}$$

【1-7】在质点运动中,已知  $x = ae^{kt}$ ,  $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ ,  $y|_{t=0} = b$ 。

求质点的加速度和它的轨迹方程。

解 因为  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = ak^2e^{kt}$ ,  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = bk^2e^{-kt}$

所以  $\mathbf{a} = ak^2e^{kt}\mathbf{i} + bk^2e^{-kt}\mathbf{j}$

由  $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$ , 得

$$\int dy = \int (-bke^{-kt}) dt, \quad y = be^{-kt} + C$$

据初始条件  $y|_{t=0} = b + C = b$  知  $C = 0$ , 即

$$y = be^{-kt}$$

所以  $xy = ab$

【1-8】一质点的运动表达式为  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ , 式中  $r$ 、 $t$  分别以 m、s 为单位。试求: (1) 它的速度与加速度; (2) 它的轨迹方程。

解 (1)  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (8t\mathbf{j} + \mathbf{k})$  m/s,  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{j}$  m/s<sup>2</sup>

(2) 由运动表达式有

$$x = 1, \quad y = 4t^2, \quad z = t$$

所以轨迹方程为  $x = 1, \quad y = 4z^2$

【1-9】一质点的运动表达式为  $x = 3t + 5, y = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 4$ 。

(1) 以  $t$  为变量, 写出位矢的表达式; (2) 描绘它的轨迹; (3) 式中  $t$  以 s 为单位,  $x$ 、 $y$  以 m 为单位, 求质点在  $t = 4$  s 时的速度的大小和方向。

解 (1)  $\mathbf{r} = (3t + 5)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & t=0, x=5, y=-4 \\
 & t=1, x=8, y=-0.5 \\
 & t=2, x=11, y=4 \\
 & t=3, x=14, y=9.5 \\
 & t=4, x=17, y=16
 \end{aligned}$$

据此可作图 1-5。

(3)  $v_x = \frac{dx}{dt} = 3 \text{ m/s}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = (t+3) \text{ m/s}$ , 当  $t=4 \text{ s}$  时,  $v_x = 3 \text{ m/s}$ ,  $v_y = 7 \text{ m/s}$ , 所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7.6 \text{ m/s}$$

与  $x$  轴成角

$$\theta = \arctan \frac{7}{3} = 66.8^\circ$$

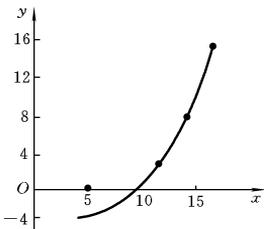


图 1-5

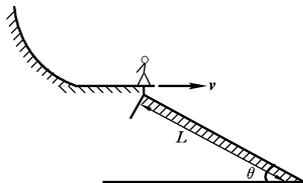


图 1-6

**【1-10】** 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率  $v = 110 \text{ km/h}$ , 着陆的斜坡与水平面成  $\theta = 45^\circ$  角, 如图 1-6 所示。(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移  $L$  (忽略起飞点到斜面的距离); (2) 在实际的跳跃中, 运动员所达到的距离  $L = 165 \text{ m}$ , 此结果为何与计算结果不符?

解 此题为平抛运动。

(1) 以斜面顶端为坐标原点建立直角坐标系, 水平向右为  $x$  轴正向, 竖直向上为  $y$  轴正向。设着陆时坐标为  $x, y$ , 时刻为  $t$ , 则

$$x = vt, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2$$

又  $x = L\cos\theta, \quad y = -L\sin\theta$

联解可得  $t = \frac{2v}{g}\tan\theta$

所以  $L = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{v}{\cos\theta} \frac{2v}{g}\tan\theta$

$$= \frac{2 \times \left( \frac{110 \times 1\,000}{3\,600} \right)^2}{\cos 45^\circ \times 9.8} \tan 45^\circ \text{ m} = 269 \text{ m}$$

(2) 由于空气阻力的存在,实际所达距离要小于上述计算值。

**【1-11】** 一个人扔石头的最大出手速率为  $v=25 \text{ m/s}$ ,他能击中一个与他的手水平距离为  $L=50 \text{ m}$  而高  $h=13 \text{ m}$  的一个目标吗? 在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少?

解 设初速度与水平面成  $\theta$  角,则

$$x = v_x t = v\cos\theta \cdot t$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

当水平距离  $x=L$  时,有

$$t = \frac{L}{v\cos\theta}$$

代入  $y$  式中,得

$$y = L\tan\theta - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{v^2\cos^2\theta} = L\tan\theta - \frac{gL^2}{2v^2}(\tan^2\theta + 1)$$

整理可得  $\tan^2\theta - \frac{2v^2}{gL}\tan\theta + \frac{y2v^2}{gL^2} + 1 = 0$

以  $\tan\theta$  为变量,一元二次方程的判别式

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left( \frac{2v^2}{gL} \right)^2 - 4 \left( \frac{y \cdot 2v^2}{gL^2} + 1 \right)$$

如令  $y=h=13 \text{ m}$ ,代入上式得

$$\Delta = \left( \frac{2 \times 25^2}{9.8 \times 50} \right)^2 - 4 \left( \frac{13 \times 2 \times 25^2}{9.8 \times 50^2} + 1 \right)$$

$$= 6.51 - 6.65 = -0.14$$

$\tan\theta$  无实数解,即不能击中题设目标。

使判别式  $\Delta=0$  的  $y$  值为能击中目标的最高高度,据此有

$$\left(\frac{2v^2}{gL}\right)^2 = 4\left(\frac{y \cdot 2v^2}{gL^2} + 1\right)$$

解之得

$$y = \frac{v^4 - g^2L^2}{2gv^2} = \frac{25^4 - 9.8^2 \times 50^2}{2 \times 9.8 \times 25^2} \text{ m} = 12.3 \text{ m}$$

**【1-12】** 在篮球运动员作立定投篮时,如以出手时球的中心为坐标原点,作坐标系  $Oxy$  如图 1-7 所示。设篮圈中心坐标为  $(x, y)$ , 出手高度为  $H_1$ , 球的出手速度为  $v_0$ , 试证球的出手角度  $\alpha$  应满足下式才能投入:

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left( y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

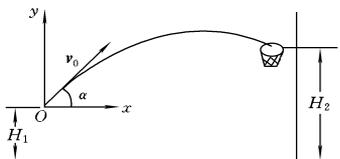


图 1-7

证 设出手后需时  $t$  入篮, 则

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

消去  $t$ , 得

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 \\ &= x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2\alpha} = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (\tan^2\alpha + 1) \end{aligned}$$

即 
$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx} \tan \alpha + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0$$

解之得 
$$\tan \alpha = \frac{\frac{2v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(-\frac{2v_0^2}{gx}\right)^2 - 4\left(\frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1\right)}}{2}$$

$$= \frac{v_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left( y + \frac{gx^2}{2} \right)} \right]$$

**【1-13】** 如图 1-8 所示,一直立的雨伞,其边缘的半径为  $R$ ,离地面的高度为  $h$ 。当伞绕伞柄以匀角速度  $\omega$  旋转时,试证沿边缘飞出的水滴将落在地面上半径为  $r = R \sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$  的圆周上。请构思一种旋转式洒水器的方案。

证 水滴飞出后作平抛运动,由

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

得 
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

又因为

$$x = vt = R\omega t = R\omega \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

所以

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = R \sqrt{1 + \frac{2h\omega^2}{g}}$$

随着伞的旋转,水滴落在地面上半径为  $r$  的圆周上。

构思一种旋转式洒水器的方案为:张开成伞状形,如漏斗倒置。双层、中空,下层旋转,上层固定。水从上层之环形槽注入层间。改变下层角速度即可调节洒出水的距离。也可考虑改变  $R$ 。

**【1-14】** 一列车以  $5 \text{ m/s}$  的速度沿  $Ox$  轴正方向行驶,某旅客在车厢中观察一个站在站台上的小孩竖直向上抛出的一个球。相对于站台上的坐标系来说,球的运动表达式为  $x=0, y=v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

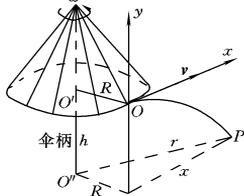


图 1-8

( $v_0, g$  是常量)。(1)如果旅客用随车一起运动的坐标系  $O'x'y'$  来描写小球的运动,已知  $O'x'$  轴与  $Ox$  轴同方向,  $O'y'$  轴与  $Oy$  轴相平行,方向向上,且在  $t=0$  时,  $O'$  与  $O$  相重合,则  $x'$  和  $y'$  的表达式将是怎样的呢? (2)在  $O'x'y'$  坐标系中,小球的运动轨迹又是怎样的? (3)从车上的旅客与站在车站上的观察者看来,小球的加速度各为多少? 方向是怎样的?

解 本题为相对运动中不同参考系间的变换问题。

$$(1) \text{ 因为 } \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ t' = t \end{cases}$$

而

$$v = 5 \text{ m/s}$$

所以

$$\begin{cases} x' = -5t \\ y' = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(2) 在  $O'x'y'$  坐标系中

$$y' = v_0 \cdot \left(\frac{-x'}{5}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{-x'}{5}\right)^2 = -\frac{v_0}{5}x' - \frac{g}{50}x'^2$$

(3) 车上观察者看:

$$a'_x = \frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \quad a'_y = \frac{d^2y'}{dt^2} = -g$$

即

$$\mathbf{a}' = -gj \quad (\text{方向向下})$$

车站上观察者看:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

即

$$\mathbf{a} = -gj \quad (\text{方向向下})$$

**【1-15】** 甲乙两船同时航行,甲以 10 km/h 的速度向东,乙以 5 km/h 的速度向南。问从乙船的人看来,甲的速度是多大? 方向如何? 反之,从甲船的人看来,乙的速度又是多大? 方向如何?

解 乙船的人看:

$$\mathbf{v}_{\text{甲对乙}} = \mathbf{v}_{\text{甲对水}} + \mathbf{v}_{\text{水对乙}}$$

作图 1-9, 有

$$v_{\text{甲对乙}}^2 = v_{\text{甲对水}}^2 + v_{\text{水对乙}}^2$$

所以

$$v_{\text{甲对乙}} = \sqrt{10^2 + 5^2} \text{ km/h} = \sqrt{125} \text{ km/h} \approx 11.2 \text{ km/h}$$

$$\tan \varphi = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \varphi = 26.6^\circ$$

即东偏北  $26.6^\circ$ 。



图 1-9

甲船的人看:

$$v_{\text{乙对甲}} = v_{\text{乙对水}} + v_{\text{水对甲}}$$

所以  $v_{\text{乙对甲}} = \sqrt{5^2 + 10^2} \text{ km/h} = 11.2 \text{ km/h}$

$$\tan \theta = \frac{10}{5} = 2, \quad \theta = 63.4^\circ$$

方向为南偏西。

**【1-16】** 设河面宽  $l = 1 \text{ km}$ , 河水由北向南流动, 流速  $v = 2 \text{ m/s}$ , 有一船相对于河水以  $v' = 1.5 \text{ m/s}$  的速率从西岸驶向东岸。(1) 如果船头与正北方向成  $\alpha = 15^\circ$  角, 船到达对岸要花多少时间? 到达对岸时, 船在下游何处? (2) 如果船到达对岸的时间为最短, 船头与河岸应成多大角度? 最短时间等于多少? 到达对岸时, 船在下游何处? (3) 如果船相对于岸走过的路程为最短, 船头与岸应成多大角度? 到对岸时, 船又在下游何处? 要花多少时间?

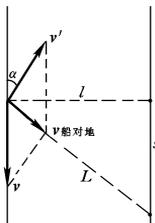
**解** 由  $v_{\text{船对地}} = v_{\text{船对水}} + v_{\text{水对地}} = v' + v$  可作图(图 1-10)。

(1) 如图 1-10 所示, 根据余弦定理可求出  $v_{\text{船对地}}$ , 然后将其沿岸与垂直岸方向分解, 从而计算到达对岸的时间等。

仔细分析图可以看到  $v_{\text{船对地}}$  垂直岸的分量为  $v' \sin \alpha$ , 平行岸的分量为  $v - v' \cos \alpha$ , 所以

$$t = \frac{l}{v' \sin \alpha} = \frac{1\,000}{1.5 \times \sin 15^\circ} \text{ s} = 2\,576 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} s &= (v - v' \cos \alpha)t \\ &= (2 - 1.5 \cos 15^\circ) \times 2\,576 \text{ m} \\ &= 1\,420 \text{ m} \end{aligned}$$



(2) 由  $t = \frac{1\,000}{1.5 \sin \alpha}$  可知, 当  $\alpha$  最大时  $t$  最小,

图 1-10

即有  $\alpha = 90^\circ$ 。此时

$$t = \frac{1\,000}{1.5} \text{ s} = 667 \text{ s}$$

$$s = vt = 2 \times 667 \text{ m} = 1.33 \text{ km}$$

(3) 因为

$$L^2 = l^2 + s^2 = l^2 + \left( \frac{v - v' \cos \alpha}{v' \sin \alpha} \right)^2 l^2$$

所以要  $L$  最小, 需  $f(\alpha) = \frac{v - v' \cos \alpha}{v' \sin \alpha}$  为最小。取极值

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{v' \sin^2 \alpha - (v - v' \cos \alpha) \cos \alpha}{v' \sin^2 \alpha} = 0$$

$$\text{有} \quad v' - v \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = \frac{v'}{v} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

$$\alpha = 41.41^\circ$$

$$\text{可得} \quad t = \frac{l}{v' \sin \alpha} = \frac{1\,000}{1.5 \sin 41.41^\circ} \text{ s} = 1\,008 \text{ s}$$

$$s = (v - v' \cos \alpha)t = (2 - 1.5 \cos 41.41^\circ) \times 1\,008 \text{ m} = 0.88 \text{ km}$$

## 第二章 牛顿运动定律

### 知识要点

#### 1. 牛顿三定律

第一定律  $F=0$  时,  $v=$  常矢量。

第二定律  $F=\frac{dp}{dt}$ ,  $p=mv$ 。当  $m$  为常量时,  $F=ma$ 。

第三定律  $F_{AB}=-F_{BA}$

用牛顿定律解题的基本思路: 察明题意, 隔离物体, 分析受力, 列出方程(一般用分量式), 求解, 讨论。

#### 2. 力学中常见的几种力

万有引力  $F=G_0 \frac{m_1 m_2}{r^2}$

重力  $G=G_0 \frac{m_E m}{R^2}=mg$

弹力  $F=-kx$

摩擦力  $\begin{cases} \text{滑动摩擦力} & F_{fk}=\mu_k F_N \\ \text{静摩擦力} & F \leq F_{fs}=\mu_s F_N \end{cases}$

力的叠加原理  $F=F_1+F_2+\dots$

#### 3. 动量定理

冲量  $I=\int_{t_1}^{t_2} F dt$

动量定理 物体在运动过程中所受合外力的冲量, 等于该物体动量的增量。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = p_2 - p_1$$

## 4. 动能定理

$$\text{功} \quad dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad A_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\text{动能定理} \quad A_{ab} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = E_{kb} - E_{ka}$$

## 5. 非惯性系

非惯性系中的力学定律 引入惯性力后,有

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{惯}} = m\mathbf{a}'$$

平动加速参考系中

$$\mathbf{F}_{\text{惯}} = -m\mathbf{a}$$

匀角速转动参考系中 惯性离心力

$$\mathbf{F}_{\text{惯}} = -m\mathbf{a}_n = mR\omega^2\mathbf{e}_r$$

## 思考题解答

【2-1】 回答下列问题:

- (1) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同?
- (2) 物体受到几个力的作用,是否一定产生加速度?
- (3) 物体运动的速率不变,所受合外力是否为零?
- (4) 物体速度很大,所受到的合外力是否也很大?

答 (1) 不一定相同。如斜抛物体的运动方向和合外力方向就不同。

(2) 不一定。物体受到的几个力如果其合力为零,就不产生加速度。

(3) 不一定。如匀速圆周运动的物体,其速率不变,但作为向心力的合外力不为零。

(4) 不是。合外力的大小决定物体加速度的大小,而加速度与速度是两个不同的概念,速度大并不意味着加速度一定大。

【2-2】 物体所受摩擦力的方向是否一定和它的运动方向相反? 试举例说明。

答 物体所受摩擦力的方向不一定和它的运动方向相反。如在地面上拖动一物体时,物体所受地面的摩擦力与其前进方向相反;而在加速前进的平板车上随车运动的物体,它所受摩擦力的方向就与其运动方向相同。

**【2-3】** 用绳子系一物体,在竖直平面内作圆周运动,当这物体达到最高点时,(1)有人说:“这时物体受到三个力:重力、绳子的拉力以及向心力”;(2)又有人说:“因为这三个力的方向都是向下的,但物体不下落,可见物体还受到一个方向向上的离心力和这些力平衡着”。这两种说法对吗?

答 两种说法均不对。物体达到最高点时,受到两个力:重力与绳子的拉力,两者均向下,它们的合力提供了物体作圆周运动的向心力。离心力是物体作用于绳子的力,它与向心力是作用力与反作用力关系。

**【2-4】** 绳子的一端系着一金属小球,另一端用手握着使其在竖直平面内作匀速圆周运动,问球在哪一点时绳子的张力最小?在哪一点时绳子的张力最大?为什么?

答 由于重力在法向的分力与绳子对球的拉力(绳子的张力)两者的合力提供了小球作匀速圆周运动的向心力,根据它们的方向可知:球在最高点时绳中张力最小,球在最低点时绳中张力最大。

设张力的大小为 $T$ ,小球质量为 $m$ ,向心加速度为 $a_n = \frac{v^2}{R}$ ,匀速则 $a_n$ 不变。因而

$$\text{在最高点 } T + mg = ma_n, \quad T = m(a_n - g)$$

$$\text{在最低点 } T - mg = ma_n, \quad T = m(a_n + g)$$

**【2-5】** 在弹簧测力计的下面挂着一个物体,如图2-1所示,试判别在下列两种情况下,测力计所指出的读数是否相同? 如果不同,则在哪种情况下读数较大?(1)物体竖直地静止悬挂;(2)物体在一水平面内作匀速圆周运动。

答 不同,第二种情况下读数较大。理由如下。

(1) 设弹性力为  $F$  (测力计读数), 物体质量为  $m$ , 则有

$$F = mg$$

(2) 设弹性力为  $F'$ , 物体作匀速圆周运动的向心加速度为  $a_n$ , 偏离竖直位置夹角为  $\theta$ , 则在竖直与水平方向有

$$\begin{cases} F' \cos\theta = mg \\ F' \sin\theta = ma_n \end{cases}$$

因为  $\cos\theta < 1$ , 所以  $F' > F$ 。

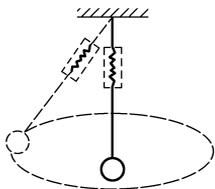


图 2-1

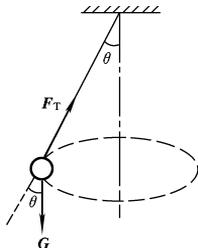


图 2-2

**【2-6】** 如图 2-2 所示, 一个用绳子悬挂着的物体在水平面上作匀速圆周运动, 有人在重力的方向上求合力, 写出

$$F_T \cos\theta - G = 0$$

另有人沿绳子拉力  $F_T$  的方向求合力, 写出

$$F_T - G \cos\theta = 0$$

显然两者不能同时成立, 试指出哪一个式子是错的, 为什么?

答 前者对, 后者错。

小球受到两个力: 沿绳子的拉力  $F_T$  和重力  $G$ , 它们的合力决定了小球的运动。小球在水平面内作匀速圆周运动, 合力提供了其向心力, 合力就是  $F_T \sin\theta$ 。题中前一个式子反映的是竖直方向上受力平衡。因而牛顿运动定律在竖直与水平方向的分量方程为

$$F_T \cos\theta - G = 0$$

$$F_T \sin\theta = ma_n = m \frac{v^2}{R}$$

由于合力产生的水平面内的向心加速度在沿绳方向有分量 $a_n \sin\theta$ , 因而在绳方向运动方程应为

$$F_T - G \cos\theta = ma_n \sin\theta$$

即有

$$F_T > G \cos\theta$$

**【2-7】** 一物体可否只具有机械能而无动量? 一物体可否只有动量而无机械能? 试举例说明。

答 一物体可以只具机械能而无动量。因为机械能是动能和势能之和, 可以动能为零而势能不为零, 即有机械能而无动量。如静止于地面上方某处的物体、拉伸而静止的弹簧振子均是这种例子。

物体可以只有动量而无机械能。因为物体有动量就有速度, 也就有动能 $E_k$ 。又由于物体的势能零点可以任意确定, 因而可以适当选取零点使其值为负, 且量值与动能相等, 即 $E_p = -E_k$ , 从而机械能 $E = E_k + E_p = 0$ 。如在地面上以速度 $v$ 运动的物体, 其动量为 $p = mv$ , 动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 。如选其高度 $h$ 处为势能零点,  $h$ 满足 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ , 则地面上该物体的势能为 $E_p = -mgh$ , 机械能 $E = E_k + E_p = 0$ 。

**【2-8】** 两质量不等的物体具有相等的动能, 哪个物体的动量较大? 两质量不等的物体具有相等的动量, 哪个物体的动能较大?

答 由 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2$ 可知, 在具有相等动能时, 质量大的物体动量大。在具有相等的动量时, 质量小的物体动能较大。

**【2-9】** 用锤压钉, 很难把钉压入木块, 如用锤击钉, 钉就很容易进入木块, 这是为什么?

答 因为钉子要进入木块中, 它所受到木块的阻力很大, 而徒

手产生的压力不大,所以很难把钉压入木块。根据  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$  可知,挥锤击钉时,锤子在极短时间内速度从很大突然变为零,动量变化很大而时间很短,因而冲力很大。根据牛顿第三定律,锤对钉的冲力也就很大,因此钉就很容易克服阻力而进入木块。

**【2-10】** 用细线把球挂起来,球下系一同样的细线。拉球下细线,逐渐加大力量,哪段细线先断?为什么?如用较大分量突然拉球下细线,哪段细线先断,为什么?

答 拉球下细线,逐渐加大力量,上面的线先断。因为逐渐加大力量,细线具有弹性,作用力会传到上面的线。忽略线的重量,上、下两线中的张力相等。但上面的线还受到球的作用,所以上面的线受到的合力大于下面的线受到的合力,上面线先断。

用较大力量突然拉球下细线,下面的线先断。因为突然拉线,拉力是冲力。作用时间短而冲力大,足以拉断细线。但由于球的惯性大,在一刹那间它还来不及运动,亦即下面线受的冲力来不及传到上面的线,下面的线已被拉断。

**【2-11】** 有两只船与堤岸的距离相同,为什么人从小船跳上岸比较难,而从大船跳上岸却比较容易?

答 假定人向岸跳时,在两种情况下所用的力相等,由于小船质量小、容易运动,而大船质量大、不容易运动,因而对小船而言人用足蹬船的作用时间相对较短,人从小船向岸跳时获得的冲量就较小,也就不易跳上岸。从大船起跳获得的冲量较大,就容易跳上岸。

**【2-12】** 一物体沿粗糙斜面下滑。试问在这过程中哪些力做正功?哪些力做负功?哪些力不做功?

答 沿粗糙斜面下滑的物体受到三个力:重力、支撑力、摩擦力。根据功的定义,物体下滑过程中,下滑力(重力沿斜面的分力)做正功,摩擦力做负功,垂直于斜面的重力分量和支撑力不做功。

**【2-13】** 外力对质点不做功时,质点是否一定作匀速运动?

答 不一定。根据元功定义  $dA = F \cdot dr$ , 要  $dA = 0$ , 可以  $F = 0$ 、 $dr = 0$ 、 $F \perp dr$ , 因此质点静止也是可以的。由动能定理可知合外力对物体做的功等于物体动能的增量。不做功时动能不变, 若  $F = 0$ , 则质点可作匀速直线运动; 若  $F \perp dr$ , 则质点可作匀速圆周运动。

**【2-14】** 两个相同的物体处于同一位置, 其中一个水平抛出, 另一个沿斜面无摩擦地自由滑下, 问哪一个物体先到达地面? 到达地面时两者速率是否相等?

答 设物体离地面高度为  $h$ , 斜面长为  $s$ , 与地面夹角为  $\theta$ 。

设平抛物体到地时间为  $t$ , 则有

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

设沿斜面下滑物体到地时间为  $t'$ , 下滑力为  $mg\sin\theta$ , 下滑加速度为  $g\sin\theta$ , 则有

$$s = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2}at'^2 = \frac{1}{2}g\sin\theta \cdot t'^2$$

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\theta}}$$

可得

$$t' > t$$

即平抛物体先到地面。

两者开始时势能相同, 最后都转化为动能。但水平抛出的物体开始时有动能, 所以到达地面时两者速率不等, 平抛物体速率较大。

## 习题解答

**【2-1】** 质量为  $m$  的物体沿斜面向下滑动。当斜面的倾角为  $\alpha$  时, 物体正好匀速下滑。问: 当斜面的倾角增大到  $\beta$  时, 物体从高为  $h$  处由静止滑到底部需要多少时间?

解 本题有摩擦。

设斜面的倾角为 $\theta$ ,重力 $mg$ 可分解为下滑力 $mg\sin\theta$ 和正压力 $mg\cos\theta$ 。当 $\theta=\alpha$ 时物体匀速下滑,则有

$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = 0$$

因而

$$\mu_k = \tan\alpha$$

当倾角增大为 $\theta=\beta$ 时,有

$$mg\sin\beta - F_{fk} = mg\sin\beta - \tan\alpha \cdot mg\cos\beta = ma$$

所以

$$a = (\sin\beta - \tan\alpha \cdot \cos\beta)g$$

可以看出 $a$ 为恒量,即物体沿斜面作匀加速直线运动。

由斜面长 $\frac{h}{\sin\beta} = \frac{1}{2}at^2$ 可得

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{2h}{\sin\beta} \frac{1}{(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)g} \\ &= \frac{2h}{g\sin\beta} \frac{\cos\alpha}{(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)} = \frac{2h}{g} \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

所以

$$t = \sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}$$

**【2-2】** A、B两个物体,质量分别为 $m_A=100\text{ kg}$ , $m_B=60\text{ kg}$ ,装置如图2-3所示。两斜面的倾角分别为 $\alpha=30^\circ$ 和 $\beta=60^\circ$ 。如果物体与斜面间无摩擦,滑轮和绳的质量忽略不计,问:(1)系统将向哪边运动?(2)系统的加速度是多大?(3)绳中的张力多大?

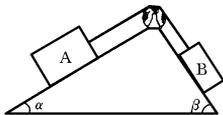


图 2-3

解 (1) 比较两边下滑力。因为

$$m_A g \sin\alpha = 100 \times 9.8 \times \sin 30^\circ \text{ N} = 490 \text{ N}$$

$$m_B g \sin\beta = 60 \times 9.8 \times \sin 60^\circ \text{ N} = 509 \text{ N}$$

所以系统将向右边运动。

(2) 设绳子张力为 $T$ ,物体沿斜面的加速度为 $a$ ,则

$$m_B g \sin\beta - T = m_B a$$

$$T - m_A g \sin\alpha = m_A a$$

所以

$$a = \frac{m_B g \sin \beta - m_A g \sin \alpha}{m_A + m_B} = \frac{509 - 490}{100 + 60} \text{ m/s}^2 = 0.12 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} (3) T &= m_A a + m_A g \sin \alpha \\ &= (100 \times 0.12 + 100 \times 9.8 \times \sin 30^\circ) \text{ N} = 502 \text{ N} \end{aligned}$$

**【2-3】** 一辆铁路平车装有货物,货物与车底板之间的静摩擦系数为0.25,如果火车以30 km/h的速度行驶。问要使货物不发生滑动,火车从刹车到完全静止所经过的最短路程是多少?

解 本题要注意静摩擦力使货物对地运动。

因为对货物  $m$ , 最大静摩擦力

$$F_{fs} = \mu_s mg = ma$$

即货物的最大加速度为

$$a = \mu_s g$$

刹车时,静摩擦力使货物随之减速。要使货物不滑动,火车的最大加速度只能是

$$a_{\text{车}} = -\mu_s g$$

$$\text{由 } v_t^2 - v_0^2 = 2a_{\text{车}} s, \quad v_t = 0$$

$$\text{可得 } s = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{\left(\frac{30\,000}{3\,600}\right)^2}{2 \times 0.25 \times 9.8} \text{ m} = 14.2 \text{ m}$$

**【2-4】** 用一种钳子夹住一块质量  $M=50 \text{ kg}$  的混凝土砌块起吊(图2-4)。已知钳子与砌块接触处的最大静摩擦系数  $\mu=0.4$ 。如果(1)钳子匀速上升,(2)钳子以  $0.2 \text{ m/s}^2$  的加速度上升,(3)钳子在沿水平方向以  $4 \text{ m/s}$  的速度行驶时,上端悬挂点突然停止运动(设悬挂点到砌块重心之间的距离  $l=4 \text{ m}$ ),为使砌块不从钳子口滑出,至少必须对砌块施加多大正压力?

解 (1) 由图2-5,有

$$2f_s - Mg = Ma$$

$$\text{因为 } f_s = \mu N, \quad a = 0$$

$$\text{所以 } N = \frac{Mg}{2\mu} = \frac{50 \times 9.8}{2 \times 0.4} \text{ N} = 613 \text{ N}$$

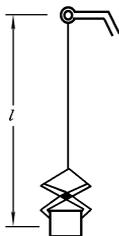


图 2-4

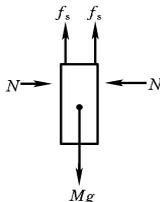


图 2-5

(2) 由  $a = 0.2 \text{ m/s}^2$ , 如上分析可得

$$N = \frac{M(g + a)}{2\mu} = \frac{50(9.8 + 0.2)}{2 \times 0.4} \text{ N} = 625 \text{ N}$$

(3) 砌块以  $4 \text{ m/s}$  的速率作半径为  $l$  的圆周运动, 有

$$2\mu N - Mg = Ma_n = M \frac{v^2}{l}$$

所以 
$$N = \frac{M(g + v^2/l)}{2\mu} = \frac{50(9.8 + 4^2/4)}{2 \times 0.4} \text{ N} = 863 \text{ N}$$

**【2-5】** 一滑轮两边分别挂着 A 和 B 两物体, 它们的质量分别为  $m_A = 20 \text{ kg}$ ,  $m_B = 10 \text{ kg}$ , 今用力  $F$  将滑轮提起 (图 2-6), 当  $F$  分别等于 (1) 98 N, (2) 196 N, (3) 392 N, (4) 784 N 时, 求物体 A 和 B 的

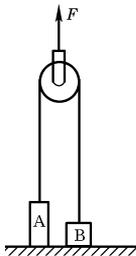


图 2-6

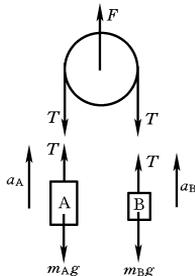


图 2-7

加速度以及两边绳中的张力(滑轮的质量与摩擦不计)。

解 本题注意两边绳子张力相等。两物体加速度不等。

作受力图(图 2-7),能提起,则有

$$T - m_A g = m_A a_A > 0$$

$$T - m_B g = m_B a_B > 0$$

$$F = 2T$$

所以  $a_A = \frac{F}{2m_A} - g > 0$ ,  $a_B = \frac{F}{2m_B} - g > 0$

(1) 当  $F = 98 \text{ N}$  时

$$a_A = \left( \frac{98}{2 \times 20} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = -7.35 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \left( \frac{98}{2 \times 10} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = -4.9 \text{ m/s}^2$$

负号表示两者均向下,显然不合理,即表示根本提不起。此时

$$T = F/2 = 49 \text{ N}$$

(2) 当  $F = 196 \text{ N}$  时

$$a_A = \left( \frac{196}{2 \times 20} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = -4.9 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \left( \frac{196}{2 \times 10} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = 0$$

仍不合理,表示未提起,此时

$$a_A = 0, \quad a_B = 0, \quad T = 98 \text{ N}$$

(3) 当  $F = 392 \text{ N}$  时

$$a_A = \left( \frac{392}{2 \times 20} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = 0$$

$$a_B = \left( \frac{392}{2 \times 10} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$$

表示 A 不动, B 以  $9.8 \text{ m/s}^2$  加速度上升,此时

$$T = 196 \text{ N}$$

(4) 当  $F = 784 \text{ N}$  时

$$a_A = \left( \frac{784}{2 \times 20} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \left( \frac{784}{2 \times 10} - 9.8 \right) \text{ m/s}^2 = 29.4 \text{ m/s}^2$$

$$T = 392 \text{ N}$$

**【2-6】** 图2-8中A为定滑轮,B为动滑轮,三个物体 $m_1 = 200 \text{ g}$ ,  $m_2 = 100 \text{ g}$ ,  $m_3 = 50 \text{ g}$ ,求:(1)每个物体的加速度;(2)两根绳子中的张力 $F_{T1}$ 与 $F_{T2}$ 。假定滑轮及绳的质量以及摩擦均可忽略不计。

解 地参(地面参考系)为惯性系,滑轮B为非惯性系。

(1) 由题可知, $m_1 > m_2 + m_3$ ,  $m_1$ 的加速度 $a_1$ 的方向就是向下的; $m_2 > m_3$ ,相对于滑轮B来说, $m_2$ 的加速度 $a_{2B}$ 的方向是向下的, $m_3$ 的加速度 $a_{3B}$ 的方向是向上的。设 $m_2$ 相对于地面的加速度 $a_2$ 的方向向下, $m_3$ 相对于地面的加速度 $a_3$ 的方向向上。取方向向下的力和加速度的值为正值。 $a_{2B}$ 和 $a_{3B}$ 的大小是相同的,以 $a'$ 表示。根据相对运动的加速度关系有

$$a_2 = a_{2B} + a_B \quad \text{图 2-8}$$

式中 $a_B$ 是滑轮B相对于地面的加速度,显然, $a_B = -a_1$ 。因此

$$a_2 = a' - a_1 \quad \text{①}$$

又

$$a_3 = a_{3B} + a_B$$

因此

$$-a_3 = -a' - a_1$$

或

$$a_3 = a' + a_1 \quad \text{②}$$

对 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ 分别应用牛顿第二定律有

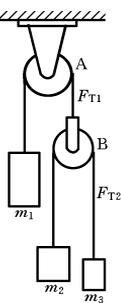
$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a_1 \quad \text{③}$$

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a_2 = m_2 (a' - a_1) \quad \text{④}$$

$$m_3 g - F_{T2} = -m_3 a_3$$

即

$$F_{T2} - m_3 g = m_3 a_3 = m_3 (a' + a_1) \quad \text{⑤}$$



不计滑轮 B 的质量,则有

$$F_{T1} = 2F_{T2} \quad (6)$$

由式③~⑥即可解得

$$a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}g = 1.96 \text{ m/s}^2$$

$$a' = \frac{(m_1 + 2m_2)a_1 - (m_1 - 2m_2)g}{2m_2} = 3.92 \text{ m/s}^2$$

将所得结果代入式①和式②,得到

$$a_2 = 1.96 \text{ m/s}^2, \quad a_3 = 5.88 \text{ m/s}^2$$

(2) 由式③和式④可解得

$$F_{T1} = m_1(g - a_1) = 1.57 \text{ N}$$

$$F_{T2} = m_2(g - a_2) = 0.785 \text{ N}$$

**【2-7】** 将质量为 10 kg 的小球挂在倾角  $\alpha = 30^\circ$  的光滑斜面上(图 2-9)。(1)当斜面以加速度  $a = \frac{1}{3}g$  沿如图所示的方向运动时,求绳中的张力及小球对斜面的正压力。(2)当斜面的加速度至少为多大时,小球对斜面的正压力为零?

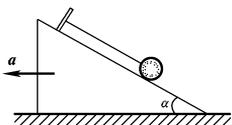


图 2-9

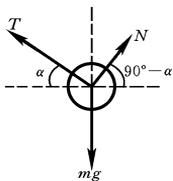


图 2-10

解 本题注意选取合适的方向列分量方程。

受力分析如图 2-10 所示,取地参,有

$$\text{水平方向} \quad T \cos \alpha - N \cos(90^\circ - \alpha) = ma$$

$$\text{竖直方向} \quad T \sin \alpha + N \sin(90^\circ - \alpha) = mg$$

(1) 当  $a = \frac{g}{3}$  时, 上两式为

$$T \times \frac{\sqrt{3}}{2} - N \times \frac{1}{2} = m \cdot \frac{g}{3}$$

$$T \times \frac{1}{2} + N \times \frac{\sqrt{3}}{2} = mg$$

联解, 得

$$T = \frac{mg}{6}(3 + \sqrt{3}) = \frac{10}{6} \times 9.8 \times 4.73 \text{ N} = 77.3 \text{ N}$$

$$N = \frac{mg}{6}(3\sqrt{3} - 1) = \frac{10}{6} \times 9.8 \times 4.19 \text{ N} = 68.4 \text{ N}$$

(2) 若  $N=0$ , 则有

$$T \cos \alpha = ma, \quad T \sin \alpha = mg$$

所以

$$\tan \alpha = \frac{g}{a}$$

$$a = \frac{g}{\tan \alpha} = \sqrt{3}g = 1.73 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \approx 17.0 \text{ m/s}^2$$

**【2-8】** 利用一挂在车顶的摆长为  $l$  的单摆和附在下端的米尺 (图 2-11), 怎样测出车厢的加速度? (单摆的偏角很小。)

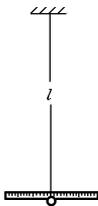


图 2-11

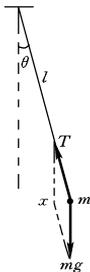


图 2-12

解 设车厢加速度为  $a$ , 向左。因为单摆受张力  $T$  与重力  $mg$

二力作用(图 2-12),其合力为  $mg \cdot \tan\theta$ ,所以

$$mg \cdot \tan\theta = ma$$

又因为  $\theta$  很小,所以

$$a = g \tan\theta \approx g \sin\theta = g \frac{x}{l}$$

在米尺上读出  $x$  值,即可计算车厢的加速度。若取  $l=1$  m,则摆线偏转 cm 数  $x$  就等于车厢加速度对  $g$  的百分数。

**【2-9】** 一质点的质量为 1 kg,沿  $Ox$  轴运动,所受的力如图 2-13 所示。 $t=0$  时,质点静止在坐标原点,试求此质点第 7 s 末的速度和坐标。

解 本题由  $F-t$  曲线求速度和坐标。注意 5 s 后力的表示式及积分限。由图 2-13 知两线段的斜率分别为  $k_1=2, k_2=-5$ 。

在  $0\sim 5$  s 区间:

$$F_1 = ma = k_1 t = 2t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{m} t = 2t$$

$$\text{积分 } \int_{v_0}^v dv = \int_0^t 2t dt, \quad v - v_0 = t^2$$

取  $t=0$  时  $v_0=0$ ,则有

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2$$

$$\text{再积分 } \int_{x_0}^x dx = \int_0^t t^2 dt, \quad x - x_0 = \frac{t^3}{3}$$

因为  $t=0$  时,  $x_0=0$ ,所以

$$x = \frac{t^3}{3}$$

当  $t=5$  s 时,有

$$v_1 = 25 \text{ m/s}, \quad x_1 = 41.67 \text{ m}$$

在  $5\sim 7$  s 区间:

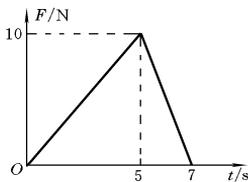


图 2-13

$$F_2 = ma = k_2(t - 7) = -5 \times (t - 7) = 5(7 - t)$$

即 
$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{m}(7-t) = 5(7-t)$$

$$dv = 5(7-t)dt$$

积分 
$$\int_{v_1}^v dv = \int_5^t 5(7-t)dt$$

$$v = v_1 + 35t - 2.5t^2 - 112.5$$

又 
$$dx = (v_1 + 35t - 2.5t^2 - 112.5)dt$$

$$= (35t - 2.5t^2 - 87.5)dt$$

再积分 
$$\int_{x_1}^x dx = \int_5^t (35t - 2.5t^2 - 87.5)dt$$

可得 
$$x = x_1 - 87.5t + 17.5t^2 - 0.83t^3 + 104.17$$

当  $t=7$  s 时,有

$$v_2 = 35 \text{ m/s}, \quad x_2 = 106.2 \text{ m}$$

如果后段积分限换为  $0 \sim 2$  s, 则计算较简便。速度也可直接求三角形面积得出, 读者不妨试试。

**【2-10】** 一圆台可绕其轴在水平面内转动, 圆台半径为  $R$ , 甲、乙两物体质量分别为  $m_1$  与  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), 它们与台面间的静摩擦系数都是  $\mu$ , 现用一根长度  $l < R$  的绳子将它们连接。(1) 将甲放在圆心, 乙放在距圆心为  $l$  处, 要使物体与圆台不发生相对滑动, 圆台旋转的最大角速度是多少? (2) 如将甲与乙互换位置, (1) 的结果又将如何? (3) 如果两物体均不放在圆心但连线经过转轴, 又将如何?

解 本题为转动问题, 注意向心力与绳的拉力、摩擦力的关系。注意静摩擦力的方向。取地参。

(1)  $m_1$  在圆心,  $m_2$  转动, 如图 2-14 所示。

对  $m_1$ :  $T - f_{\mu 1} = T - \mu m_1 g = 0$

对  $m_2$ :  $T + f_{\mu 2} = T + \mu m_2 g = m_2 \omega^2 l$

所以 
$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_2 l}}$$

(2)  $m_1$  与  $m_2$  互换

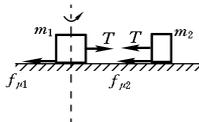


图 2-14

对  $m_2$ :  $T - f_{\mu 2} = T - \mu m_2 g = 0$

对  $m_1$ :  $T + f_{\mu 1} = T + \mu m_1 g = m_1 \omega'^2 l$

所以 
$$\omega' = \sqrt{\frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$$

由于  $m_1 > m_2$ , 可见  $\omega' < \omega$ 。

(3) 如图 2-15 所示, 假定  $m_1$  和  $m_2$  构成的系统有向右运动的趋势时, 有

$$T - f_{\mu 1} = T - \mu m_1 g = m_1 \omega^2 x$$

$$T + f_{\mu 2} = T + \mu m_2 g = m_2 \omega^2 (l - x)$$

所以 
$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_2 l - (m_1 + m_2)x}}$$

此时  $m_2 l > (m_1 + m_2)x$ 。

假定  $m_1$  和  $m_2$  构成的系统有向左运动的趋势时, 有

$$T + \mu m_1 g = m_1 \omega^2 x$$

$$T - \mu m_2 g = m_2 \omega^2 (l - x)$$

所以 
$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(m_1 + m_2)g}{(m_1 + m_2)x - m_2 l}}$$

此时  $(m_1 + m_2)x > m_2 l$ 。

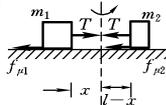


图 2-15

**【2-11】** (1) 试证长度不同的圆锥摆只要其高度相等, 则其周期也相等。(2) 如果某圆锥摆的高度为 1.5 m, 求其周期。

解 (1) 如图 2-16 所示, 张力的水平分量作为向心力。

因为  $T \sin \theta = m \omega^2 r$

而  $T \cos \theta = mg$

所以 
$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{r}} = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{r}{h}} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

可见  $\omega$  与  $l$  无关, 只要  $h$  相等,  $\omega$  便相等。

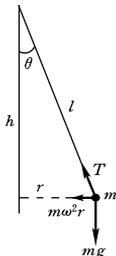


图 2-16

$$(2) \omega = \sqrt{\frac{9.8}{1.5}} \text{ rad/s} = 2.56 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{2.56} \text{ s} = 2.45 \text{ s}$$

**【2-12】** 质量为  $m$  的小球沿半球形碗的光滑的内面, 正以角速度  $\omega$  在一水平面内做匀速圆周运动, 碗的半径为  $R$ , 求该小球做匀速圆周运动的水平面离碗底的高度。

解 碗对小球的支持力的方向如图 2-17 所示。

水平方向

$$N \sin \theta = m \omega^2 R' = m \omega^2 R \sin \theta$$

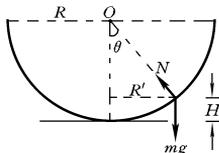
$$N = m \omega^2 R$$

竖直方向

$$N \cos \theta = mg$$

所以 
$$\cos \theta = \frac{mg}{N} = \frac{g}{\omega^2 R}$$

图 2-17



离碗底高度 
$$H = R(1 - \cos \theta) = R \left( 1 - \frac{g}{\omega^2 R} \right)$$

**【2-13】** 三艘质量相等的小船鱼贯而行, 速度均等于  $v$ 。如果从中间船上同时以速度  $u$  把两个质量均为  $m$  的物体分别抛到前后两船上, 速度  $u$  的方向和  $v$  在同一直线上。问抛掷物体后, 这三艘船的速度如何变化?

解 将每艘船和其抛出或接到的物体作为一个系统, 各系统水平方向动量守恒。注意动量中速度的相对性。

设题中  $u$  为对地参的速度。又设原小船质量均为  $M$ , 抛物后或接物后的速度为  $v'$ 。则

中间船 
$$Mv = (M - 2m)v' + mu - mu$$

$$v' = \frac{M}{M - 2m}v$$

$$v' > v$$

前船 
$$Mv + mu = (M + m)v'$$

$$v' = \frac{Mv + mu}{M + m} = v + \frac{m(u - v)}{M + m}$$

$m$  要落到前船上, 必须  $u > v$ , 所以

$$v' > v$$

后船

$$Mv - mu = (M + m)v'$$

$$v' = \frac{Mv - mu}{M + m} = v - \frac{m(v + u)}{M + m}$$

$$v' < v$$

如  $u$  为相对速度, 换为地参同上法讨论, 可得

前船

$$v' = v + \frac{m}{M + m}u$$

中间船

$$v' = v$$

后船

$$v' = v - \frac{m}{M + m}u$$

**【2-14】** 质量为  $m$  的小球在水平面内做速率为  $v_0$  的匀速圆周运动, 试求小球在经过: (1)  $\frac{1}{4}$  圆周, (2)  $\frac{1}{2}$  圆周, (3)  $\frac{3}{4}$  圆周, (4) 整个圆周的过程中的动量改变。试从冲量的计算得出结果。

解 注意速度值不变, 但方向在不断变化。

如图 2-18 所示取坐标, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -F \cos \omega t \mathbf{i} - F \sin \omega t \mathbf{j} \\ &= -m \frac{v_0^2}{R} (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p} &= \mathbf{I} = \int_0^t \mathbf{F} dt \\ &= -m \frac{v_0^2}{R \omega} (\sin \omega t \mathbf{i} - \cos \omega t \mathbf{j}) \Big|_0^t \\ &= m v_0 [(-\sin \omega t) \mathbf{i} + (\cos \omega t - 1) \mathbf{j}] \end{aligned}$$

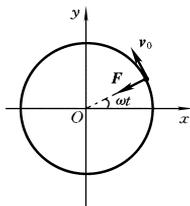


图 2-18

(1) 当  $t = \frac{T}{4}$  时, 有

$$\Delta \mathbf{p} = m v_0 (-\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad |\Delta \mathbf{p}| = \sqrt{2} m v_0$$

(2) 当  $t = \frac{T}{2}$  时, 有

$$\Delta \boldsymbol{p} = mv_0(-2\boldsymbol{j}) = -2mv_0\boldsymbol{j}$$

(3) 当  $t = \frac{3T}{4}$  时, 有

$$\Delta \boldsymbol{p} = mv_0(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}), \quad |\Delta \boldsymbol{p}| = \sqrt{2}mv_0$$

(4) 当  $t = T$  时, 有

$$\Delta \boldsymbol{p} = 0$$

**【2-15】** 一颗子弹从枪口飞出的速度是 300 m/s, 在枪管内子弹所受合力的大小由下式给出:

$$F = 400 - \frac{4 \times 10^5}{3}t$$

其中  $F$  以 N 为单位,  $t$  以 s 为单位。(1) 画出  $F-t$  图。(2) 计算子弹行经枪管长度所花费的时间, 假定子弹到枪口时所受的力变为零。(3) 求该力冲量的大小。(4) 求子弹的质量。

解 (1)  $F-t$  图如图 2-19 所示。

(2) 因为  $F=0$ , 所以

$$t = 400 \times \frac{3}{4 \times 10^5} \text{ s} = 3 \times 10^{-3} \text{ s}$$

(3)  $I = \int_0^t F dt$

$$= \int_0^t \left( 400 - \frac{4 \times 10^5}{3}t \right) dt$$

$$= \left( 400t - \frac{4 \times 10^5}{6}t^2 \right) \Big|_0^{3 \times 10^{-3}}$$

$$= 6 \times 10^{-1} \text{ N} \cdot \text{s}$$

(4) 由  $\int_0^t F dt = mv - mv_0 = mv$

得 
$$m = \frac{6 \times 10^{-1}}{300} \text{ kg} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

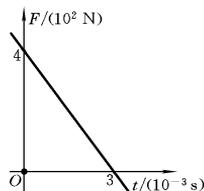


图 2-19

**【2-16】** 水力采煤, 是用高压水枪喷出的强力水柱冲击煤层, 如图 2-20 所示。设水柱直径  $D=30 \text{ mm}$ , 水速  $v=56 \text{ m/s}$ , 水柱垂直

射在煤层表面上,冲击煤层后的速度为零,求水柱对煤层的平均冲力。

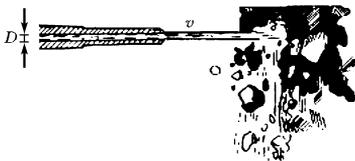


图 2-20

解 本题注意作用力与反作用力。以水为对象研究动量的变化。

选取坐标  $x$  向右为正。由题知每秒内有质量为  $m = \frac{1}{4}\pi D^2 v \rho$  的水柱射在煤层表面上,因而每秒内沿  $x$  方向动量变化为

$$\Delta p = mv' - mv = -mv$$

据此,煤层对水柱的平均冲力为

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-mv}{\Delta t} = \frac{-\frac{1}{4}\pi D^2 v^2 \rho}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{3.14 \times (3 \times 10^{-2})^2 \times 56^2 \times 10^3}{1} \text{ N} \\ &= -2.22 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

所以水柱对煤层的平均冲力为  $2.22 \times 10^3 \text{ N}$ 。

**【2-17】** 将一空盒放在秤盘上,并将秤的读数调整到零。然后从高出盒底  $h=4.9 \text{ m}$  处,将小石子流以每秒  $n=100$  个的速率注入盒中。假设每一石子的质量  $m=0.02 \text{ kg}$ ,都从同一高度落下,且落到盒内后就停止运动,求石子从开始注入盒内到  $t=10 \text{ s}$  时秤的读数。

解 以一定量石子为对象研究其动量变化及平均冲力。

因为石子刚落到秤盘时的速度

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} \text{ m/s} = 9.8 \text{ m/s}$$

石子落到秤盘后的速度

$$v_2 = 0$$

每秒落下石子的质量为

$$M = nm = 100 \times 0.02 \text{ kg/s} = 2 \text{ kg/s}$$

所以每秒落下的石子给秤盘的平均冲力为

$$\bar{F} = nmv_1 = 2 \times 9.8 \text{ N} = 19.6 \text{ N}$$

又因为 10 s 内落下石子的总重量

$$G = Mgt = 2 \times 9.8 \times 10 \text{ N} = 196 \text{ N}$$

所以秤盘的读数为

$$N = G + \bar{F} = 196 \text{ N} + 19.6 \text{ N} = 215.6 \text{ N}$$

**【2-18】** 一辆装煤车以 3 m/s 的速率从煤斗下面通过,煤粉通过煤斗以每秒 5 t 的速率竖直注入车厢。如果车厢的速率保持不变,车厢与钢轨间摩擦忽略不计,求牵引力的大小。

解 本题注意煤粉落入车厢前水平速率为零。

$$\text{因为} \quad F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}v$$

$$\text{所以} \quad F = \frac{dm}{dt}v = 5 \times 10^3 \times 3 \text{ N} = 1.5 \times 10^4 \text{ N}$$

如果以车厢和落入的一定量煤粉为研究对象,则牵引力为外力,应用动量定理也可求解。

**【2-19】** (1)以 5 m/s 的速度匀速提升一质量为 10 kg 的物体,问在 10 s 内提升力做功若干? (2)又若以比(1)快 1 倍的速度把该物体匀速提高同样的高度,试问所做的功是否比前一种情况大?为什么? (3)在(1)、(2)两种情况下,它们的功率是否一样? (4)若用一大小不变的力将该物体从静止加速提高到同一高度,使物体最后获得的速度为 5.0 m/s,问提升力做功多少?平均功率为多少?开始时和结束时的瞬时功率又各为多少?

解 本题为恒力功问题。

$$(1) \text{ 因为 } F - G = ma = 0, \quad F = G = mg$$

$$\text{所以 } A = Fh = Fvt = 10 \times 9.8 \times 5 \times 10 \text{ J} = 4.9 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 不比第一种大。因为  $v' = 2v, t' = t/2, h' = h$ , 而  $F$  不变, 所以功相同。

(3) 在(1)中  $P = Fv$ , 在(2)中  $P' = Fv' = 2Fv$ , 可见  $P' = 2P$ , 即功率不一样。

(4) 将物体提到  $h$  高度, 物体的加速度为

$$a = \frac{v^2}{2h} = \frac{5^2}{2 \times 5 \times 10} \text{ m/s}^2 = 0.25 \text{ m/s}^2$$

$$\text{因为 } F - mg = ma$$

$$F = m(g + a) = 10 \times (9.8 + 0.25) \text{ N} = 100.5 \text{ N}$$

$$\text{所以 } A = Fh = 100.5 \times 50 \text{ J} = 5\,025 \text{ J}$$

$$\text{又 } t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{0.25}} \text{ s} = 20 \text{ s}, \text{ 所以平均功率}$$

$$\bar{P} = \frac{A}{t} = \frac{5\,025}{20} \text{ W} = 251.3 \text{ W}$$

$$\text{开始时的功率 } P_0 = Fv_0 = 0$$

$$\text{结束时的功率 } P_t = Fv_t = 100.5 \times 5 \text{ W} = 502.5 \text{ W}$$

**【2-20】** 一地下蓄水池, 面积为  $50 \text{ m}^2$ , 贮水深度为  $1.5 \text{ m}$ 。假定水平面低于地面的高度是  $5.0 \text{ m}$ 。问要将这池水全部吸到地面, 需做多少功? 若抽水机的效率为  $80\%$ , 输入功率为  $35 \text{ kW}$ , 则需多少时间可以抽完?

解 本题为变力功问题, 注意元功和积分元的选取。

以地面为坐标原点, 向下为  $x$  轴正向, 则将离地面  $x$  处  $dx$  厚度的水抽到地面所做元功为

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dm gx = \rho S g x dx$$

所以将池水全部吸到地面

$$A = \int_{h_0}^{h_0+h_1} \rho S g x \cdot dx = \frac{1}{2} \rho S g [(h_0 + h_1)^2 - h_0^2]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \rho S g (h_1^2 + 2h_0 h_1) \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3 \times 50 \times 9.8 \times (1.5^2 + 2 \times 5.0 \times 1.5) \text{ J} \\
 &= 4.23 \times 10^6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

因为  $\eta = \frac{P_{\text{出}}}{P_{\lambda}}$ , 而  $P_{\text{出}} = \frac{A_{\text{出}}}{t}$ , 所以

$$t = \frac{A_{\text{出}}}{\eta P_{\lambda}} = \frac{4.23 \times 10^6}{0.80 \times 35 \times 10^3} \text{ s} = 1.51 \times 10^2 \text{ s}$$

**【2-21】** 以铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比。在铁锤击第一次时, 能将小钉击入木板内 1 cm, 问击第二次时能击入多深。假定铁锤两次打击铁钉时的速度相同。

解 如图 2-21 所示选坐标向下为正。设铁锤的质量为  $M$ , 铁钉的质量为  $m$ , 铁锤第二次与钉接触前的速度为  $v_0$ 。因为铁锤与钉碰撞时动量守恒, 即

$$Mv_0 = (M + m)v$$

$$v = \frac{M}{M + m}v_0$$

由于  $m \ll M$ , 所以铁钉向下的速度

$$v = v_0$$

由题意知铁钉受到的摩擦阻力  $f = -kx$ , 如第一次击入深度为  $s_1$ , 则由动能定理得

$$A = - \int_0^{s_1} kx dx = - \frac{1}{2} k s_1^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

所以  $k = \frac{m v_0^2}{s_1^2}$

第二次从  $s_1$  深击到  $s_2$  深, 又由动能定理得

$$A = - \int_{s_1}^{s_2} kx dx = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

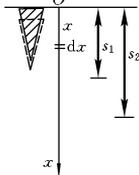


图 2-21

$$\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

所以

$$s_2 = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k} + s_1^2} = \sqrt{2}s_1$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (\sqrt{2} - 1)s_1 = 0.41 \text{ cm}$$

**【2-22】** 质量  $m = 6 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的小球, 系于绳的一端, 绳的另一端固结在  $O$  点, 绳长为  $1 \text{ m}$  (图 2-22)。今将小球拉升至水平位置  $A$ , 然后放手, 求当小球经过圆弧上  $B$ 、 $C$ 、 $D$  点时的 (1) 速度; (2) 加速度; (3) 绳中的张力。假定空气阻力不计,  $\theta = 30^\circ$ 。

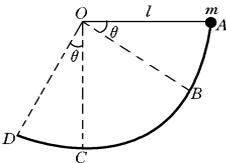


图 2-22

**解** 注意本题为圆周运动, 切向变力做功。

(1) 设圆弧上某点距  $A$  的弧长为  $s$ , 对应半径与  $OA$  夹角为  $\theta$ , 则有

$$s = l\theta, \quad ds = l d\theta$$

当小球在上述点位置时, 受力情况为

$$\text{法线方向} \quad T - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{l}$$

$$\text{切线方向} \quad F = mg \cos \theta$$

小球转动时只有切向力做功, 元功为

$$dA = F \cdot ds = mg \cos \theta \cdot l d\theta$$

$$\text{所以} \quad A = \int_0^\theta mg \cos \theta \cdot l d\theta = mgl \sin \theta$$

$$\text{又由动能定理, 有} \quad A = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\text{即} \quad v = \sqrt{2gl \sin \theta}$$

则

$$v_B = \sqrt{2gl \sin \theta} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1 \times \sin 30^\circ} \text{ m/s} = 3.13 \text{ m/s}$$

$$v_C = \sqrt{2gl \sin 90^\circ} = 4.43 \text{ m/s}$$

$$v_D = \sqrt{2gl\sin 120^\circ} = 4.12 \text{ m/s}$$

(2) 加速度既有切向分量又有法向分量,为

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 2g\sin\theta, \quad a_t = g\cos\theta$$

即

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = g \sqrt{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$

$a$  与切线夹角

$$\varphi = \arctan\left(\frac{a_n}{a_t}\right) = \arctan(2\tan\theta)$$

代入  $\theta$  值可得

$$a_B = 9.8 \times \sqrt{4 \times \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ} \text{ m/s}^2 = 13.4 \text{ m/s}^2$$

$$\varphi_B = \arctan(2\tan 30^\circ) = 49^\circ 6'$$

$$a_C = 9.8 \sqrt{4 \times \sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ} \text{ m/s}^2 = 19.6 \text{ m/s}^2$$

$$\varphi_C = 90^\circ \quad (\text{沿法向})$$

$$a_D = 9.8 \times \sqrt{4 \times \sin^2 120^\circ + \cos^2 120^\circ} \text{ m/s}^2 = 17.7 \text{ m/s}^2$$

$$\varphi_D = 16^\circ 6'$$

$$(3) \text{ 由张力 } T = mg\sin\theta + m \frac{v^2}{l} = 3mg\sin\theta$$

$$\text{可得 } T_B = 3 \times 6 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \sin 30^\circ \text{ N} = 8.82 \times 10^{-2} \text{ N}$$

$$T_C = 3 \times 6 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \sin 90^\circ \text{ N} = 0.176 \text{ N}$$

$$T_D = 3 \times 6 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \sin 120^\circ \text{ N} = 0.153 \text{ N}$$

**【2-23】** 某汽车启动后,牵引力的变化如图2-23所示,若两坐标轴的单位长度分别为100 N和1 m,则曲线OA恰好是个1/4的圆周。问汽车运动7 m,牵引力所做的功有多大?(此功也可由图中曲线OB对s轴覆盖的面积求出,这种图叫做示功图。)

解 本题注意圆弧线力的函数表示。

$$\text{因为 } F^2 + (4-s)^2 = R^2 = 16$$

$$\text{所以 } F = \sqrt{8s - s^2}$$

考虑纵轴单位长度表示100 N,0~4 m 做功

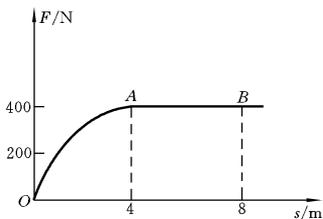


图 2-23

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 100 \int_0^4 F ds = 100 \int_0^4 \sqrt{8s - s^2} ds \\
 &= 100 \left[ \frac{s-4}{2} \sqrt{8s - s^2} + \frac{4^2}{2} \arccos \left( 1 - \frac{s}{4} \right) \right] \Big|_0^4 \\
 &= 100 \times 4\pi \text{ J} = 400\pi \text{ J}
 \end{aligned}$$

4~7 m 做功

$$A_2 = 400 \times 3 \text{ J} = 1200 \text{ J}$$

所以

$$A = A_1 + A_2 = 2.46 \times 10^3 \text{ J}$$

**【2-24】** 设作用在质量为 2 kg 的质点上的力是  $F = (3i + 5j)$  N。当质点从原点移动到位矢为  $r = (2i - 3j)$  m 处时,此力所做的功有多大? 它与路径有无关系? 如果此力是作用在质点上唯一的力,则质点的动能将变化多少?

解 因为

$$\begin{aligned}
 dA &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\
 &= (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = 3dx + 5dy
 \end{aligned}$$

所以 
$$A = \int_0^2 3dx + \int_0^{-3} 5dy = 6 \text{ J} - 15 \text{ J} = -9 \text{ J}$$

从以上积分可知,功与路径无关。

由动能定理可得  $\Delta E_k = A = -9 \text{ J}$ 。

**【2-25】** 质量为 2 kg 的物体,在沿  $x$  方向的变力作用下,在  $x = 0$  处由静止开始运动。设变力与  $x$  的关系如图 2-24 所示。试由动

能定理求物体在  $x=5, 10, 15$  m 处的速率。

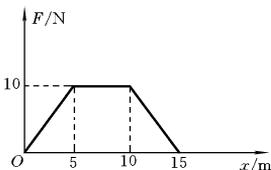


图 2-24

解 三段力的表达式分别为

$$F_1 = k_1 x = 2x$$

$$F_2 = 10$$

$$F_3 = k_3(x - 15) = -2(x - 15) = 2(15 - x)$$

所以 
$$A_1 = \int_0^5 F_1 dx = \int_0^5 2x dx = 25 \text{ J}$$

$$A_2 = 10 \times (10 - 5) \text{ J} = 50 \text{ J}$$

$$A_3 = \int_{10}^{15} F_3 dx = \int_{10}^{15} 2(15 - x) dx = 25 \text{ J}$$

由 
$$A = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

可得 
$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$$

所以 
$$v_{x=5} = \sqrt{\frac{2A_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 25}{2}} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

$$v_{x=10} = \sqrt{\frac{2(A_1 + A_2)}{m}} = 5\sqrt{3} \text{ m/s} = 8.66 \text{ m/s}$$

$$v_{x=15} = \sqrt{\frac{2(A_1 + A_2 + A_3)}{m}} = \sqrt{100} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

# 第三章 运动的守恒定律

---

---

## 知识要点

### 1. 势能

**保守力** 一对力所做的功与相对路径的形状无关,而只取决于相互作用的质点的始末相对位置,这对力就叫保守力。

**势能** 对保守内力,可以引进势能  $E_p$ ,

$$A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

**万有引力势能**  $E_p = -G_0 \frac{mm_0}{r}$ ,以  $m$  与  $m_0$  相距无限远时的势能为零势能参考位置。

**重力势能**  $E_p = mgh$ ,以物体  $m$  在地面为势能零点。

**弹簧弹性势能**  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ,以弹簧的自然长度为势能零点。

由势能函数求保守力  $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

### 2. 功能原理

**质点系动能定理** 系统的外力和内力做功总和等于系统动能的增量

$$A_e + A_i = \Delta E_k$$

**系统的功能原理**

$$\Delta E_k = A_{\text{外力}} + A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}} = A_e + A_{ic} + A_{id}$$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = A_e + A_{id}$$

### 3. 机械能守恒与能量守恒

**机械能守恒定律** 如果  $A_e + A_{id} = 0$ ,则

$$\Delta E = 0$$

**能量守恒定律** 一个孤立系统经历任何变化时,该系统的所有能量的总和不变。

#### 4. 动量守恒定律

**动量守恒定律** 如  $\sum F_i = 0$ , 则  $\sum m_i v_i = \text{常矢量}$ 。

**火箭速度** 
$$v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2}$$

#### 5. 碰撞

**动量守恒** 
$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

**恢复系数** 
$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

**碰撞中损失的机械能**

$$\Delta E = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{10} - v_{20})^2$$

#### 6. 质点的角动量和角动量守恒

对于某一定点 
$$L = r \times p = m r \times v$$

**角动量定理** 
$$M = r \times F = \frac{dL}{dt}$$

$M$  为合外力矩,它与角动量  $L$  均为对同一定点而定义的。

**角动量守恒定律** 如  $M = 0$ , 则  $L = \text{恒矢量}$ 。

## 思考题解答

**【3-1】** 非保守力做的功总是负的,对吗? 举例说明之。

答 不对。对一个物体而言,如果静摩擦力使其运动,则静摩擦力与物体运动方向一致,就可以做正功。例如用一水平力拉动平板车,只要力不太大,则平板车上的物体就会由于静摩擦力而与车一起运动,此非保守力做正功。

**【3-2】** 为什么重力势能有正负,弹性势能只有正值,而引力势能只有负值?

答 对于势能而言,只有相对意义,因而其参考位置(即零点)

的选择具有随意性。

为了方便,一般重力势能的零位置选在地面。这样,高于地面的物体其重力势能为正值,低于地面的物体其重力势能为负值。

弹性势能的零位置选在没有形变时的平衡位置,其表示式为  $E_p = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ , 无论离平衡位置距离  $\Delta x$  为正还是为负,弹性势能都为正。

对于引力势能,如果其零位置选在无穷远处,则其表示式为  $E_p = -G_0 \frac{mm_0}{r}$ , 显然为负。

**【3-3】** 回答下列问题:

(1) 重力势能是怎样认识的? 又是怎样计算的? 重力势能的量值是绝对的吗?

(2) 引力势能是怎样认识的? 又是怎样计算的? 引力势能的量值是绝对的吗?

(3) 重力是引力的一个特例,你能从引力势能公式推算出重力势能的公式吗?

(4) 物体在高空中时,势能到底是正值还是负值?

答 (1) 质量为  $m$  的物体在地面以上  $h$  高处具有能量,谓之重力势能。重力势能既和物体与地球间的相互作用有关,又和这两者的相对位置有关。其计算公式为  $E_p = mgh$ 。重力势能的量值是相对的,与零点的选择有关,上面的表示式是以地面为重力势能零点。

(2) 质量为  $m$  和  $m_0$  的系统,有万有引力作用。引力是保守力,可以做功,因而可引入引力势能,它与两者的相对位置有关。引力势能的一般表示式为  $E_p = -G_0 \frac{mm_0}{r}$ 。它的量值不是绝对的,是相对的。以上表示式选择的是以  $r = \infty$  处为引力势能零点。

(3) 质量为  $m$  的物体在质量为  $m_0$  的物体的引力场中从  $a$  运动到  $b$  处,引力功为

$$A = \int_{r_a}^{r_b} -G_0 \frac{mm_0}{r^2} dr = -G_0 mm_0 \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \\ = - (E_{pb} - E_{pa})$$

$m_0$  如为地球, 半径为  $R$ , 则  $r_a = R + h_a$ ,  $r_b = R + h_b$ , 代入上式有

$$A = -G_0 mm_0 \frac{h_b - h_a}{(R + h_a)(R + h_b)} \\ \approx -G_0 \frac{m_0}{R^2} m (h_b - h_a) \\ = -mg(h_b - h_a) = - (E_{pb} - E_{pa})$$

取地面为势能零点, 则有

$$E_p = mgh$$

(4) 取无穷远处为势能零位置, 则物体在高空时势能为负。如取地面为势能零点, 则物体在高空时势能为正。

**【3-4】** 两个质量相等的小球, 分别从两个高度相同、倾角不同的光滑斜面的顶端由静止滑到底部, 它们的动量是否相同? 动能是否相同?

答 动量不相同。因为动量是矢量, 它的方向就是速度的方向。倾角不同的斜面, 小球到底部速度方向是不同的。

动能相同。因为小球质量相同、高度相同, 按机械能守恒定律, 相同的势能转化为相同的动能。

**【3-5】** 能否利用装在小船上的风扇扇动空气使小船前进?

答 可以。把风扇对着船后吹风, 从而风扇得到一个向前的冲量, 可以带着船一起前进。不过, 要阻力相对很小时, 实际上才可能。

**【3-6】** 在地面的上空停着一气球, 气球下面吊着软梯, 梯上站着一个人。当这人沿软梯上爬时, 气球是否运动?

答 气球将向下运动。在竖直方向, 浮力与重力平衡, 动量守恒。初始动量为零, 人向上爬有向上动量, 要总动量为零, 则气球有向下动量, 即向下运动。

如用质心运动定理,质心位置不变也很容易解释气球将向下运动。

**【3-7】** 在匀速圆周运动中,质点的动量是否守恒?角动量呢?

答 在匀速圆周运动中,质点的动量不守恒。因为动量是矢量,匀速圆周运动中的质点,速度的值不变,但方向不断变化,因而动量值不变,而方向变化,动量不守恒。

角动量守恒。根据  $L=r \times p$  知,对匀速圆周运动的质点, $L$  的大小和方向都不变,即角动量守恒。

**【3-8】** 物体  $m$  被放在斜面  $m'$  上,如把  $m$  与  $m'$  看成一个系统,问在下列何种情形下,系统的水平方向分动量是守恒的?

- (1)  $m$  与  $m'$  间无摩擦,而  $m'$  与地面间有摩擦;
- (2)  $m$  与  $m'$  间有摩擦,而  $m'$  与地面间无摩擦;
- (3) 两处都没有摩擦;
- (4) 两处都有摩擦。

答 (1) 对于系统而言,地面摩擦力是水平方向的外力。由于它的存在,系统的水平方向分动量不守恒。

(2) 不论滑动还是不滑动, $m$  与  $m'$  间的摩擦力都是系统的内力,它不改变系统的动量。对系统,无水平方向的外力,因而系统的水平方向动量守恒。

(3) 对系统,水平方向无外力,水平方向系统的分动量守恒。

(4) 不动,显然动量为零且不变。如下滑,水平方向摩擦力为外力,系统水平方向分动量不守恒。

**【3-9】** 质点的动量守恒与角动量守恒的条件各是什么?质点动量与角动量能否同时守恒?试说明之。

答 由  $F = \frac{dp}{dt}$  可知,当  $F=0$  时  $p$  为恒量,即质点所受到的外力为零时,质点的动量保持不变。

又由角动量  $L=r \times p$ ,力矩  $M=r \times F$ ,由角动量定理  $M = \frac{dL}{dt}$  可知,当  $M=0$  时  $L$  为恒量,即作用在质点上的外力对某定点  $O$  的力

矩为零,则质点对 $O$ 的角动量在运动中保持不变。

因为 $M=r \times F$ ,所以只要 $F=0$ 或者 $r \parallel F$ 均有 $M=0$ 。由此看出质点动量与角动量可以同时守恒,例如一个自由质点的运动。当 $F \neq 0$ 时,动量不会守恒,但角动量可以守恒,如受有心力作用的质点。

**【3-10】** 对于变质量系统,能否应用 $F = \frac{d}{dt}(mv)$ ,为什么?

答 不能。

牛顿第二定律 $F = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$ ,这里的 $\frac{dm}{dt}$ 仅表示物体的惯性质量随时间的变化,构成物体的原子、分子的数量并没有改变。在狭义相对论中容易理解这点。

题中所说的变质量系统,是指经典物理中所涉及的一类质量变化问题,如火箭在飞行中不断向后喷出气体,火箭的质量不断减少;运行的装煤车上方有一运动着的装料车不断向装煤车厢倾漏煤,装煤车的质量不断增加等。这些问题,系统的总质量并未变化,只是有一部分质量发生了流动。对这类问题可用动量定理处理,推出的动力学方程是密歇尔斯基方程。对火箭,方程为

$$\frac{d(mv)}{dt} - v' \frac{dm}{dt} = F$$

式中 $F$ 为系统所受合外力, $v'$ 为喷出的气体 $-dm$ 对地的速度。

## 习题解答

**【3-1】** 有一保守力 $F = (-Ax + Bx^2)i$ ,沿 $Ox$ 轴作用于质点上,式中 $A$ 、 $B$ 为常量, $x$ 以m计, $F$ 以N计。(1)取 $x=0$ 处 $E_p=0$ ,试计算与此力相应的势能;(2)求质点从 $x=2$  m运动到 $x=3$  m时势能的变化。

解 保守力的功等于势能增量的负值。

$$\begin{aligned}
 A' &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b (-Ax + Bx^2) dx = \left( -\frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{3}x^3 \right) \Big|_a^b \\
 &= \frac{A}{2}(a^2 - b^2) + \frac{B}{3}(b^3 - a^3) = -(E_{pb} - E_{pa})
 \end{aligned}$$

(1) 因为  $x=a=0$  处  $E_p=0$ , 所以取以上  $b$  为  $x$ , 有

$$E_p = \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{3}x^3$$

(2) 由  $a=2$  m,  $b=3$  m 可得

$$\Delta E_p = -A' = \frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B$$

**【3-2】** 一质量为  $m$  的质点做平面运动, 其位矢为  $\mathbf{r} = a\cos\omega t \mathbf{i} + b\sin\omega t \mathbf{j}$ , 式中  $a, b$  为正值常量, 且  $a > b$ 。问: (1) 此质点做的是什运动? 其轨迹方程怎样? (2) 质点在  $A$  点  $(a, 0)$  和  $B$  点  $(0, b)$  时的动能有多大? (3) 质点所受作用力  $\mathbf{F}$  是怎样的? 当质点从  $A$  点运动到  $B$  点时, 求  $\mathbf{F}$  的分力  $F_x \mathbf{i}$  和  $F_y \mathbf{j}$  所做的功; (4)  $\mathbf{F}$  是保守力吗? 为什么?

解 (1) 由  $\mathbf{r}$  可知此质点做匀角速椭圆运动。

因为  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a\cos\omega t \mathbf{i} + b\sin\omega t \mathbf{j}$

所以

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

(2) 因为  $v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = b\omega\cos\omega t$

所以

$$v = \sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

由于在  $A$  点  $(a, 0)$  时  $\omega t = 0$ , 所以

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

而在  $B$  点  $(0, b)$  时  $\omega t = \pi/2$ , 所以

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

(3)  $\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + m \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j}$

$$= -m\omega^2 \cos\omega t \mathbf{i} - m\omega^2 \sin\omega t \mathbf{j} = -m\omega^2 \mathbf{r}$$

又 
$$F_x = -m\omega^2 x, \quad F_y = -m\omega^2 y$$

所以 
$$A_x = \int_a^0 F_x dx = - \int_a^0 m\omega^2 x dx = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

$$A_y = \int_0^b F_y dy = - \int_0^b m\omega^2 y dy = - \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$$

(4)  $F$  是保守力。从(3)中可以看到质点从  $A$  点运动到  $B$  点, 功的大小与路径无关, 只与物体始末位置有关。

**【3-3】** 一根原长  $l_0$  的弹簧, 当下端悬挂质量为  $m$  的重物时, 弹簧长  $l = 2l_0$ 。现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端  $A$  点。设环的半径  $R = l_0$ , 把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的  $B$  点, 如图 3-1 所示。已知  $AB$  长为  $1.6R$ 。当重物在  $B$  无初速地沿圆环滑动时, 试求: (1) 重物在  $B$  点的加速度和对圆环的正压力; (2) 重物滑到最低点  $C$  时的加速度和对圆环的正压力。

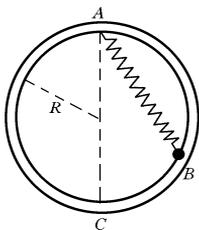


图 3-1

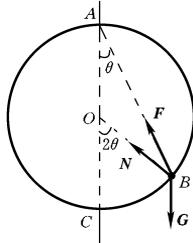


图 3-2

**解** 本题注意受力分析及机械能守恒。

物体受力情况如图 3-2 所示。

(1) 由题意知  $v_0 = 0, a_n = 0$ , 在法向有

$$N = mg \cos 2\theta - F \cos \theta$$

因为

$$F = kx = \frac{mg}{l_0} x = \frac{mg}{R} \times 0.6R = 0.6mg$$

$$\cos \theta = 0.8, \quad \sin \theta = 0.6$$

所以 
$$N = mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 0.6mg\cos\theta$$

$$= 0.28mg - 0.48mg = -0.20mg$$

负号表示  $N$  的方向与图示方向相反, 物在圆环外部, 对圆环的正压力为  $0.20mg$ 。

此时加速度  $a = a_t$ , 在切向有

$$F_t = mg\sin 2\theta - F\sin\theta = ma_t$$

所以

$$a_t = g\sin 2\theta - \frac{g}{R} \times 0.6R\sin\theta$$

$$= g\sin\theta(2\cos\theta - 0.6) = 0.6g = 5.88 \text{ m/s}^2$$

(2) 在  $B$ 、 $C$  两处, 由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}kx_B^2 + mg(2R - 1.6R\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{mg}{R}(0.6R)^2 + mgR(2 - 1.6 \times 0.8) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{R}R^2$$

$$0.36gR + 1.44gR = v_C^2 + gR$$

$$v_C^2 = 0.8gR$$

而在  $C$  处 
$$a_n = \frac{v_C^2}{R} = \frac{0.8gR}{R} = 0.8g = 7.84 \text{ m/s}^2$$

由 
$$N + F - G = m \frac{v_C^2}{R}$$

得 
$$N = G - F + m \frac{v_C^2}{R} = mg - \frac{mg}{R}R + 0.8mg = 0.8mg$$

物对圆环的正压力向下。

由解题结果可知, 重物应套在圆环上。想想为什么?

**【3-4】** 一根特殊弹簧, 在伸长  $x$  m 时, 沿它伸长的反方向的作用力为  $(52.8x + 38.4x^2)$  N。(1) 试求把弹簧从  $x = 0.50$  拉长到  $x = 1.00$  时, 外力克服弹簧力所需做的总功。(2) 将弹簧的一端固定, 在其另一端拴一质量为  $2.17$  kg 的物体。然后把弹簧拉到  $x = 1.00$ , 开始无初速地释放物体, 试求弹簧缩回到  $x = 0.50$  时物体的速率。

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1) } A &= \int_{0.50}^{1.00} F dx = \int_{0.50}^{1.00} (52.8x + 38.4x^2) dx \\
 &= \left( 52.8 \times \frac{1}{2} x^2 + 38.4 \times \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{0.50}^{1.00} \\
 &= [26.4 + 12.8 - (6.6 + 1.6)] \text{ J} = 31 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由 } A = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{得 } v = \sqrt{\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 31}{2.17}} \text{ m/s} = 5.34 \text{ m/s}$$

**【3-5】** 一质点沿  $Ox$  轴运动, 势能为  $E_p(x)$ , 总能量为  $E$  恒定不变, 开始时位于原点, 试证明当质点到达坐标  $x$  处所经历的时间为

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

证明 由机械能守恒定律

$$E = E_p(x) + E_k = E_p(x) + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{可得 } v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}$$

$$\text{又 } v = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{所以 } dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

根据已知条件: 当  $t=0$  时,  $x=0$ ; 当  $t=t$  时,  $x=x$ 。可得

$$\int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p(x)]}}$$

**【3-6】** 一双原子分子的势能函数为

$$E_p(r) = E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$$

式中  $r$  为二原子间的距离, 试证明: (1)  $r_0$  为分子势能极小时的原子间距; (2) 分子势能的极小值为  $-E_0$ ; (3) 当  $E_p(r) = 0$  时, 原子间距为  $r_0 / \sqrt[6]{2}$ ; (4) 画出势能曲线简图。

解 本题注意极值条件。

(1) 分子势能极小的条件为  $\frac{dE_p(r)}{dr} = 0$ , 由

$$\begin{aligned} \frac{dE_p(r)}{dr} &= \frac{d}{dr} E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \\ &= E_0 \left[ 12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{11} \left( -\frac{r_0}{r^2} \right) - 12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^5 \left( -\frac{r_0}{r^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

得 
$$-12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{11} \frac{r_0}{r^2} + 12 \left( \frac{r_0}{r} \right)^5 \frac{r_0}{r^2} = 0$$

所以 
$$\left( \frac{r_0}{r} \right)^5 = \left( \frac{r_0}{r} \right)^{11}, \quad r^6 = r_0^6, \quad r = r_0$$

(2) 将  $r = r_0$  代入  $E_p(r)$ , 可求得分子势能的极小值

$$E_p(r_0) = E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r_0} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r_0} \right)^6 \right] = -E_0$$

(3) 当  $E_p(r) = 0$  时, 即

$$E_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right] = 0$$

$$\left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 = 0$$

所以 
$$\left( \frac{r}{r_0} \right)^6 = \frac{1}{2}, \quad r = r_0 / \sqrt[6]{2}$$

(4) 势能曲线如图 3-3 所示。

**【3-7】** 小球的质量为  $m$ , 沿着光滑的弯曲轨道滑下, 轨道的形状如图 3-4 所示。(1) 要使小球沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道, 问小球至少应从多高的地方  $H$  滑下? (2) 小球在圆圈的最高点

$A$  受到哪几个力的作用。(3)如果小球由  $H=2R$  的高处滑下,小球的运动将如何?

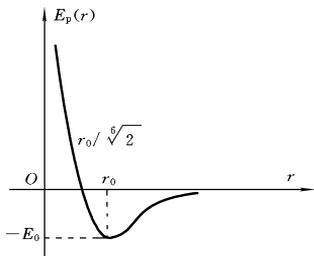


图 3-3

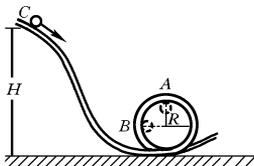


图 3-4

解 本题注意不脱离轨道的条件。

(1) 要使小球能沿圆形轨道运行一周而不脱离轨道,则小球上升到  $A$  点时圆圈对小球的正压力  $N \geq 0$ 。以  $A$  点为参考位置,根据机械能守恒定律有

$$mg(H - 2R) = \frac{1}{2}mv_A^2$$

设  $A$  处圆圈对小球的正压力为  $N$ ,则

$$N + mg = m \frac{v_A^2}{R}$$

由于  $N \geq 0$  可得  $v_A^2 \geq gR$ ,即

$$mg(H - 2R) \geq \frac{1}{2}mgR$$

$$H \geq \frac{1}{2}R + 2R = \frac{5}{2}R$$

(2) 小球受到重力  $mg$  与圆圈对小球的正压力  $N$  的作用,两者均向下。

(3) 当小球从  $H=2R$  处滑下,它将在到达  $A$  点前的某一点脱离圆圈沿抛物线落下。

**【3-8】** 一弹簧,原长为 $l_0$ ,劲度系数为 $k$ ,上端固定,下端挂一质量为 $m$ 的物体,先用手托住,使弹簧不伸长。(1)如将物体托住慢慢放下,达静止(平衡位置)时,弹簧的最大伸长和弹性力是多少?(2)如将物体突然放手,物体到达最低位置时,弹簧的伸长和弹性力各是多少?物体经过平衡位置时的速度是多少?

解 本题注意势能参考位置的选取。

(1) 此种情况,达静止时,物体受弹性力 $F$ 与重力 $G$ 作用,两力平衡。即

$$F - mg = 0, \quad F = mg$$

此时弹簧的最大伸长设为 $x_0$ ,则有

$$F = kx_0, \quad x_0 = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$$

(2) 选最低点为参考位置,弹簧伸长最大为 $x_{\max}$ ,由机械能守恒定律,有

$$mgx_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$$

$$x_{\max} = \frac{2mg}{k}, \quad F = kx_{\max} = 2mg$$

由(1)知物体在平衡位置 $F = mg = kx_0$ ,选此平衡位置为参考点,根据机械能守恒定律,有

$$mgx_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

代入 $x_0 = \frac{mg}{k}$ ,得

$$mg \frac{mg}{k} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k \left( \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$v_0^2 = \frac{m}{k}g^2$$

所以

$$v_0 = g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**【3-9】** 一小船质量为100 kg,船头到船尾共长3.6 m。现有一

质量为 50 kg 的人从船尾走到船头时,船头将移动多少距离? 假定水的阻力不计。

解 以地面为参考系。设船的质量为  $M$ , 速度为  $V$ ; 人的质量为  $m$ , 速度为  $v$ , 则根据动量守恒定律, 有

$$MV + mv = 0$$

$$V = -\frac{m}{M}v$$

负号表明船的运动方向和人的运动方向相反。

上式两边同乘  $dt$ , 则  $Vdt = -\frac{m}{M}vdt$ , 其中  $Vdt = dS$  为船在  $dt$  时间内走过的路程,  $vdt = ds$  为人在  $dt$  时间内走过的路程。在  $t$  时间内他们走过的路程分别为

$$S = \int_0^t Vdt, \quad s = \int_0^t vdt$$

所以

$$S = \left| -\frac{m}{M}s \right| = \frac{m}{M}s$$

$$\frac{S}{s} = \frac{m}{M} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

又因为

$$S + s = 3.6 \text{ m}$$

所以

$$S = 1.2 \text{ m}$$

即船头相对岸边移动 1.2 m。

**【3-10】** 如图 3-5 所示, 一浮吊, 质量  $m' = 20 \text{ t}$ , 由岸上吊起  $m = 2 \text{ t}$  的重物后, 再将吊杆  $OA$  与竖直方向间的夹角  $\theta$  由  $60^\circ$  转到  $30^\circ$ 。设杆长  $l = OA = 8 \text{ m}$ , 水的阻力与杆重忽略不计, 求浮吊在水平方向移动的距离, 并指明朝哪边移动。

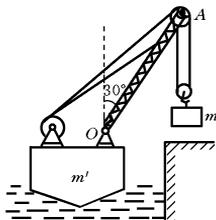


图 3-5

解 本题注意坐标系的选取和相对速度问题。

选取地参。因水的阻力不计, 因此浮吊

在水平方向动量守恒。设浮吊 $m'$ 以速度 $V$ 向岸边靠拢,重物 $m$ 相对 $m'$ 以速度 $u$ 向左运动, $m$ 对岸的速度为 $u-V$ 。根据动量守恒定律,有

$$m'V - m(u - V) = 0, \quad V = \frac{m}{m' + m}u$$

由 $V = \frac{dS}{dt}$ ,  $u = \frac{ds}{dt}$ , 可得

$$dS = \frac{m}{m' + m}ds$$

积分有

$$S = \frac{m}{m' + m}s$$

其中 $S$ 为 $m'$ 对岸移动距离, $s$ 为 $m$ 对 $m'$ 移动距离,即有

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{m' + m}l(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) \\ &= \frac{2 \times 10^3}{(20 + 2) \times 10^3} \times 8 \times \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ m} \\ &= 0.266 \text{ m} \end{aligned}$$

**【3-11】** 一炮弹, 竖直向上发射, 初速度为 $v_0$ , 在发射后经时间 $t$ 在空中自动爆炸, 假定分成质量相同的A、B、C三块碎片。其中A块的速度为零; B、C两块的速度大小相同, 且B块速度方向与水平成 $\alpha$ 角, 求B、C两碎块的速度(大小和方向)。

解 本题注意动量的分量式。

选取直角坐标, 水平方向为 $x$ 轴, 竖直向上为 $y$ 轴。设B块与 $x$ 轴正向成 $\alpha$ 角, C块与 $x$ 轴负向成 $\theta$ 角。由题意设 $v_B = v_C = V$ , 根据动量守恒定律, 有

$$x \text{ 方向} \quad mV \cos \alpha - mV \cos \theta = 0$$

$$\cos \alpha = \cos \theta, \quad \theta = \alpha$$

$$y \text{ 方向} \quad 3mv_t = mV \sin \alpha + mV \sin \theta = 2mV \sin \alpha$$

$$V = \frac{3v_t}{2 \sin \alpha}$$

因为炮弹竖直发射, 做匀减速运动, 经时间 $t$ 后速度

$$v_t = v_0 - gt$$

所以 
$$V = \frac{3(v_0 - gt)}{2\sin\alpha}, \quad \theta = \alpha$$

**【3-12】** 质量为  $7.2 \times 10^{-23} \text{ kg}$ 、速率为  $6.0 \times 10^6 \text{ m/s}$  的粒子 A, 与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰, 假定碰撞是完全弹性碰撞, 碰撞后粒子 A 的速率为  $5 \times 10^6 \text{ m/s}$ , 求: (1) 粒子 B 的速率及偏转角; (2) 粒子 A 的偏转角。

解 应用动量守恒分量式。

选取直角坐标系  $Oxy$ ,  $x$  轴正向为粒子 A 初速方向。碰后粒子 A 与  $x$  轴正向成  $\alpha_A$  角, 与  $y$  轴正向成  $90^\circ - \alpha_A$  角; 粒子 B 与  $x$  轴正向成  $\alpha_B$  角, 与  $y$  轴负向成  $90^\circ - \alpha_B$  角。

(1) 碰前粒子 A 的速率  $v_{A0} = 6.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ ; 碰后粒子 A 的速率  $v_A = 5 \times 10^6 \text{ m/s}$ , 粒子 B 的速率为  $v_B$ 。因为是弹性碰撞, 所以由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

而  $m_B = \frac{1}{2}m_A$ , 解之得

$$v_B^2 = 2(v_{A0}^2 - v_A^2)$$

$$v_B = \sqrt{2[(6.0 \times 10^6)^2 - (5 \times 10^6)^2]} \text{ m/s} = 4.69 \times 10^6 \text{ m/s}$$

根据动量守恒定律, 有

$$x \text{ 方向} \quad m_A v_{A0} \cos\alpha_A + \left(\frac{m_A}{2}\right) v_B \cos\alpha_B = m_A v_{A0}$$

$$2v_A \cos\alpha_A + v_B \cos\alpha_B = 2v_{A0}$$

$$y \text{ 方向} \quad m_A v_A \sin\alpha_A - \frac{m_A}{2} v_B \sin\alpha_B = 0$$

$$2v_A \sin\alpha_A = v_B \sin\alpha_B$$

联解得

$$\begin{aligned} 4v_A^2 &= (2v_{A0} - v_B \cos\alpha_B)^2 + (v_B \sin\alpha_B)^2 \\ &= 4v_{A0}^2 - 4v_{A0}v_B \cos\alpha_B + v_B^2 \end{aligned}$$

所以 
$$\cos\alpha_B = \frac{4v_{A0}^2 - 4v_A^2 + v_B^2}{4v_{A0}v_B}$$

$$\alpha_B = \arccos \left[ \frac{4 \times (6.0 \times 10^6)^2 - 4 \times (5 \times 10^6)^2 + (4.69 \times 10^6)^2}{4 \times 6.0 \times 10^6 \times 4.69 \times 10^6} \right]$$

$$= 54^\circ 6'$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin \alpha_A = \frac{v_B}{2v_A} \sin \alpha_B$$

$$\text{所以 } \alpha_A = \arcsin \left( \frac{4.69 \times 10^6}{2 \times 5 \times 10^6} \sin 54^\circ 6' \right) = 22^\circ 20'$$

**【3-13】** 一质量为  $m$  的中子与一质量为  $m'$  的原子核作完全弹性碰撞, 如中子的初始动能为  $E_0$ , 试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为  $4mm'E_0/(m'+m)^2$ 。

证明 本题注意对心碰撞情况下失去的动能有最大值。

设碰撞前原子核静止, 碰撞后其速度为  $V$ ; 中子碰撞前后的速度分别为  $v_0$ 、 $v$ 。由动量守恒定律, 有

$$mv_0 = mv + m'V$$

由机械能守恒定律, 有

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'V^2$$

$$\text{联解得 } V = \frac{2m}{m' + m}v_0$$

中子在碰撞时损失的最大动能, 也即原子核获得的最大动能, 为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m'V^2 &= \frac{1}{2}m' \left( \frac{2m}{m' + m}v_0 \right)^2 = \frac{4m'm}{(m' + m)^2} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{4mm'E_0}{(m' + m)^2} \end{aligned}$$

**【3-14】** 一个球从  $h$  高处自由落下, 掉在地板上。设球与地板碰撞的恢复系数为  $e$ 。试证: (1) 该球停止回跳需经过的时间为  $t =$

$$\frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}}; (2) \text{ 在上述时间内, 球经过的路程是 } s = \frac{1+e^2}{1-e^2} h。$$

证明 根据恢复系数的定义, 有

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

式中下角标 1 代表球,下角标 2 代表地板,可见  $v_{20} = v_2 = 0$ , 所以有

$$e = \frac{-v_1}{v_{10}}$$

取其值则有

$$v_1 = ev_{10}$$

(1) 球下落,弹起再下落, … 经过的时间分别是  $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ,  $t_1 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2ev_{10}}{g}$ ,  $t_2 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2e^2v_{10}}{g}$ , …, 而  $v_{10} = gt_0 = \sqrt{2gh}$ , 所以

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + \cdots = \frac{v_{10}}{g}(1 + 2e + 2e^2 + \cdots) \\ &= \frac{v_{10}}{g} \left( 1 + 2 \cdot \frac{e}{1-e} \right) = \frac{1+e}{1-e} \frac{v_{10}}{g} = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad s &= s_0 + s_1 + s_2 + \cdots = h + \frac{v_1^2}{g} + \frac{v_2^2}{g} + \cdots \\ &= h + \frac{v_{10}^2}{g}(e^2 + e^4 + e^6 + \cdots) \\ &= h + 2he^2/(1-e^2) = \frac{1+e^2}{1-e^2}h \end{aligned}$$

**【3-15】** 一电梯以 1.5 m/s 匀速上升,一静止于地上的观察者自某点将球自由释放。释放处比电梯的底板高 6.4 m。球和地板间的恢复系数为 0.5。问球第一次回跳的最高点离释放处有多少距离?

**解** 本题注意恢复系数中的分离速度与接近速度均为相对速度。

设小球下落  $h_1$  与底板相碰,下落  $h_1$  后速度为  $v_{10} = \sqrt{2gh_1}$ , 需时为  $t = \frac{v_{10}}{g}$ , 根据题意有

$$\begin{aligned} h_1 + v_{20}t &= 6.4 \\ \frac{v_{10}^2}{2g} + 1.5 \times \frac{v_{10}}{g} &= 6.4 \\ v_{10}^2 + 3v_{10} - 12.8g &= 0 \end{aligned}$$

所以  $v_{10} = 9.8 \text{ m/s}$ ,  $t = 1 \text{ s}$

由恢复系数定义, 有

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

$$v_1 = v_2 - e(v_{10} - v_{20})$$

$$= [1.5 - 0.5 \times (-9.8 - 1.5)] \text{ m/s} = 7.15 \text{ m/s}$$

小球以  $v_1$  反弹, 反弹高度

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{7.15^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 2.6 \text{ m}$$

所以离释放点距离为

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= 6.4 - v_{20}t - h_2 \\ &= (6.4 - 1.5 \times 1 - 2.6) \text{ m} = 2.3 \text{ m} \end{aligned}$$

**[3-16]** 如图3-6所示的是一种测定子弹速度的方法。子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内, 由弹簧压缩的距离求出子弹的速度。已知子弹质量是  $0.02 \text{ kg}$ , 木块质量是  $8.98 \text{ kg}$ 。弹簧的劲度系数是  $100 \text{ N/m}$ , 子弹射入木板后, 弹簧被压缩  $10 \text{ cm}$ 。设木块与平面间的动摩擦系数为  $0.2$ , 求子弹的速度。

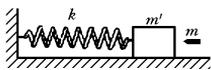


图 3-6

解 本题应用动量守恒和功能原理。

设子弹的速度为  $v_0$ , 射入后在木块内的速度为  $v$ , 根据动量守恒定律, 有

$$mv_0 = (m' + m)v, \quad v = \frac{mv_0}{m' + m}$$

假定弹簧被压缩距离为  $l$ , 则弹性势能为  $\frac{1}{2}kl^2$ , 此过程中摩擦阻力的功为  $A_f = -\mu_k(m' + m)gl$ 。由功能原理  $A_f = \Delta E$ , 有

$$-\mu_k(m' + m)gl = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}(m' + m)\left(\frac{mv_0}{m' + m}\right)^2$$

整理可得

$$\begin{aligned}
 v_0^2 &= \frac{\frac{1}{2}kl^2 + \mu_k(m' + m)gl}{\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m' + m}\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \times 100 \times 0.1^2 + 0.2 \times (8.98 + 0.02) \times 9.8 \times 0.1}{0.5 \times \frac{0.02^2}{8.98 + 0.02}} \text{ m}^2/\text{s}^2 \\
 &= 10.18 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2
 \end{aligned}$$

所以  $v_0 = 3.19 \times 10^2 \text{ m/s}$

**【3-17】** 一质量为  $m$  的铁块静止在质量为  $m'$  的劈尖上, 劈尖本身又静止在水平桌面上。设所有接触都是光滑的。当铁块位于高出桌面  $h$  处时, 这个铁块-劈尖系统由静止开始运动。当铁块落到桌面上时, 劈尖的速度有多大? 劈尖与桌面的夹角为  $\alpha$ 。

解 本题注意基于动量的相对性, 应用守恒定律时选取合适的参考系。题中铁块在直角劈尖斜面上运动。

选取地面参考系, 竖直方向为  $y$  方向, 水平方向为  $x$  方向, 且  $m'$  向  $x$  轴负方向运动。

当铁块落到桌面上时, 设劈尖对地参的速度值为  $V$ , 铁块对地参的速度为  $v$ , 铁块对劈尖的速度为  $v'$ , 其水平分量  $v'_x = v' \cos \alpha$ , 竖直分量  $v'_y = v' \sin \alpha$ , 则有

$$v_x = v'_x - V = v' \cos \alpha - V$$

$$v_y = v'_y = v' \sin \alpha$$

因为系统开始静止, 所以由动量守恒定律在水平方向有

$$mv_x - m'V = 0$$

$$m(v' \cos \alpha - V) = m'V$$

$$v' = \frac{(m' + m)V}{m \cos \alpha}$$

根据机械能守恒定律, 有

$$mgh = \frac{1}{2}m'V^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m'V^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

$$= \frac{1}{2}m'V^2 + \frac{1}{2}m[(v'\cos\alpha - V)^2 + v'^2\sin^2\alpha]$$

将前面  $v'$  表示式代入上式,整理可得

$$2mgh = V^2 \frac{(m' + m)[m'\cos^2\alpha + (m' + m)\sin^2\alpha]}{m\cos^2\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad V &= \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\alpha}{(m' + m)(m' + m\sin^2\alpha)}} \\ &= m\cos\alpha \sqrt{\frac{2gh}{(m' + m)(m' + m\sin^2\alpha)}} \end{aligned}$$

**【3-18】** 在图 3-7 所示系统中,两个摆球并列悬挂,其中摆球 A 质量为  $m_1=0.4 \text{ kg}$ ,摆球 B 质量为  $m_2=0.5 \text{ kg}$ 。摆线竖直时, A 和 B 刚好相接触。现将 A 拉过  $\theta_1=40^\circ$  后释放,当它和 B 碰撞后恰好静止。求:(1)当 B 再次与 A 相碰后, A 能摆升的最高位置  $\theta_2$ ; (2)碰撞的恢复系数。

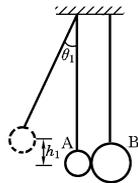


图 3-7

解 (1) 设  $m_1$  下落到垂直位置时的速度为  $v_1$ , 碰后  $m_2$  的速度为  $v_2$ , 则由机械能守恒定律, 有

$$m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2, \quad v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

又由动量守恒定律, 有

$$m_1v_1 = m_2v_2, \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{2gh_1}$$

损失的机械能为

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2 \end{aligned}$$

因为 B 再次与 A 相碰时的速度为  $v_2$ , 碰后损失的机械能为  $\frac{1}{2}m_2v_2^2$  的  $\frac{1}{5}$ , 碰后  $m_1$  的最大能量为

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{4}{5} \left( \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \right)$$

其中  $v_1'$  为B再次与A相碰后A的最大速度,摆升的最高位置  $\theta_2$  满足

$$v_1' = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_2)}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \frac{1}{2}m_1 \cdot 2gl(1 - \cos\theta_2) &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 2gh_1 \\ &= \frac{4}{5} \frac{m_1^2}{m_2} gl(1 - \cos\theta_1) \end{aligned}$$

$$(1 - \cos\theta_2) = \frac{4}{5} \frac{m_1}{m_2} (1 - \cos\theta_1) = 0.64(1 - \cos\theta_1)$$

$$\cos\theta_2 = 1 - 0.64(1 - \cos 40^\circ) = 0.8503$$

$$\theta_2 = 31^\circ 46'$$

(2) 应用非弹性碰撞公式

$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$

由于  $v_1 = 0, v_{20} = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} v_{10} &= \frac{(1+e) \times 0.5}{0.4 + 0.5} v_{10} \\ e &= 0.8 \end{aligned}$$

**[3-19]** 如图3-8所示, A、B两木块, 质量各为  $m_A$  与  $m_B$ , 由弹簧连接, 开始静止于水平光滑的桌面上, 现将两木块拉开(弹簧被拉长), 然后由静止释放, 求两木块的动能之比。



解 本题注意对地面参考系。

由动量守恒定律, 有

图 3-8

$$m_A v_A + m_B v_B = 0, \quad v_A = -\frac{m_B}{m_A} v_B$$

$$\text{又} \quad E_{kA} = \frac{1}{2}m_A v_A^2, \quad E_{kB} = \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

所以

$$\frac{E_{kA}}{E_{kB}} = \frac{\frac{1}{2} m_A \left( -\frac{m_B}{m_A} v_B \right)^2}{\frac{1}{2} m_B v_B^2} = \frac{m_B}{m_A}$$

**【3-20】** 火箭起飞时,从尾部喷出的气体的速度为 3 000 m/s,每秒喷出的气体质量为 600 kg。若火箭的质量为 50 t,求火箭得到的加速度。

解 本题应用火箭飞行公式。

因为

$$dv = -u \frac{dm}{m}$$

所以

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{3\,000}{50 \times 10^3} \times (-600) \text{ m/s}^2 = 36 \text{ m/s}^2$$

以上计算忽略重力。如从地面起飞,考虑重力,则

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{u}{m} \frac{dm}{dt} - g = 26.2 \text{ m/s}^2$$

**【3-21】** 电子质量为  $9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,在半径为  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  的圆周上绕氢核做匀速运动,已知电子的角动量为  $h/(2\pi)$ ,求它的角速度。(  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  )

解 根据角动量定义知,电子绕氢核做圆周运动时,其角动量为

$$L = pr = mvr = mr^2\omega$$

因为

$$L = \frac{h}{2\pi}$$

所以

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{h}{2\pi mr^2} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (5.3 \times 10^{-11})^2} \text{ rad/s} \\ &= 4.13 \times 10^{22} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

**【3-22】** 当地球处于远日点时,到太阳的距离为  $1.52 \times 10^{11} \text{ m}$ ,轨迹速度为  $2.93 \times 10^4 \text{ m/s}$ 。半年后,地球处于近日点,到太阳的距离为  $1.47 \times 10^{11} \text{ m}$ 。求:(1)地球在近日点时的轨迹速度;(2)两种情况下,地球的角速度。

解 (1) 根据角动量定义  $L = r \times mv$  可知, 在远日点与近日点位矢与速度之间垂直。在远日点有  $L_1 = r_1 m v_1$ , 在近日点有  $L_2 = r_2 m v_2$ 。因为有心力角动量守恒, 所以

$$\begin{aligned} r_1 m v_1 &= r_2 m v_2 \\ v_2 &= \frac{r_1 v_1}{r_2} = \frac{1.52 \times 10^{11} \times 2.93 \times 10^4}{1.47 \times 10^{11}} \text{ m/s} \\ &= 3.03 \times 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 远日点 } \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{2.93 \times 10^4}{1.52 \times 10^{11}} \text{ rad/s} = 1.93 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$\text{近日点 } \omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{3.03 \times 10^4}{1.47 \times 10^{11}} \text{ rad/s} = 2.06 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$$

**【3-23】** 角动量为  $L$ , 质量为  $m$  的人造卫星, 在半径为  $r$  的圆轨迹上运行。试求它的动能、势能和总能量。

解 由于  $L = rmv$ , 所以

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

又

$$E_p = -G_0 \frac{m_0 m}{r}$$

而

$$G_0 \frac{m_0 m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = \frac{L^2}{mr^3}$$

所以

$$E_p = -\frac{L^2}{mr^2}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2}{mr^2} = -\frac{L^2}{2mr^2}$$

# 第四章 刚体的转动

---

---

## 知识要点

### 1. 刚体的定轴转动

角速度  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

线速度与角速度关系  $v = \omega \times r$

### 2. 转动惯量

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i, \quad J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

### 3. 刚体定轴转动定律

对  $O$  点力矩  $M_O = r \times F$

定轴转动定律  $M_z = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$

其中  $M_z$  为外力对轴上任一点  $O$  的力矩  $M_O$  在该轴上的分量,  $J$  为刚体对该轴的转动惯量。

### 4. 定轴转动的动能定理

转动动能  $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$

力矩的功  $A = \int M d\theta$

动能定理  $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$

### 5. 机械能守恒定律

刚体的重力势能  $E_p = mgh_c$

机械能守恒 只有保守内力做功时

$$E_k + E_p = \text{常量}$$

6. 刚体的角动量定理与角动量守恒

对一定点 
$$M = \frac{dL}{dt}$$

其中力矩  $M = r \times F$ , 角动量  $L = r \times p$ 。

对于定轴  $z$  
$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

角动量守恒定律 若  $M = 0$ , 则  $L = \text{恒矢量}$ 。对定轴, 当  $M_z = 0$  时,  $L_z = J\omega = (J\omega)_0 = \text{常量}$ 。转动系统由两个物体组成, 则当  $M_z = 0$  时,  $L_z = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{常量}$ 。

7. 进动

进动角速度 
$$\omega_p = \frac{M}{J\omega \sin\theta}$$

## 思考题解答

【4-1】 火车在拐弯时所作运动是不是平动?

答 是平动。根据定义, 刚体运动时, 如果刚体内任何一条给定的直线在运动中方向始终保持不变, 谓之平动。火车拐弯, 车厢是刚体, 它作平动。

【4-2】 地球自西向东自转, 它的自转角速度矢量指向什么方向? 试作图说明。

答 地球自转轴是南北向的, 上北下南, 地球自西向东自转, 角速度矢量沿自转轴由南指向北。根据右手螺旋可作出图来。

【4-3】 假定一次内部爆炸在地面上开出巨大的洞穴, 它的表面被向外推出, 这对地球绕自身轴的转动和绕太阳的转动有何影响?

答 根据转动惯量定义  $J = \int r^2 dm$  可知, 爆炸后质量分布发生变化, 地球绕自身轴的转动惯量会变大。爆炸是内部作用, 不影响

系统的角动量,亦即角动量守恒。由 $L=J\omega$  = 恒量知,当 $J$ 变大时 $\omega$ 减小,因此地球绕自身轴的转动会有所减慢。

设地球的半径为 $R$ ,因地球到太阳的距离 $r \gg R$ ,所以地球可以看作质点,爆炸对地球绕太阳的转动可认为没有影响。

**【4-4】** 对静止的刚体施以外力作用,如果合外力为零,刚体会不会运动?

答 可能运动。如果合外力为零,且对质心的合外力矩也为零,则刚体不会运动。如对质心的合外力矩不为零,则刚体会转动。例如一飞轮,在其一直径两端的边缘处沿切向施以等值反向的一对力 $F$ ,刚体转动;如是等值同向的一对力,再考虑轴刚体的作用力,刚体不会运动。

**【4-5】** 如果刚体转动的角速度很大,那么(1)作用在它上面的力是否一定很大?(2)作用在它上面的力矩是否一定很大?

答 (1)不一定。因为刚体的转动只与力矩有关,而与力无直接关系。作用在刚体上的力可以很大,但当力矩为零时,刚体只会平动,无转动。

(2)不一定。根据转动定律知 $M=J\alpha$ ,作用在刚体上的力矩只与它转动的角加速度 $\alpha$ 有关,而与角速度 $\omega$ 无直接关系。由 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ 可以看出,力矩反映的是角速度的时间变化率,因而可以力矩很大,但角速度为零,也可以力矩很小,但角速度很大。

**【4-6】** 为什么在研究刚体转动时,要研究力矩的作用?力矩和哪些因素有关?

答 因为刚体是否转动,不仅与力的大小、方向有关,而且还与力的作用点和作用线有关,而力矩正是全面反映力的这三要素的一个重要概念。转动问题,离不开力矩的作用。转动有角动量 $L$ ,它的变化由力矩决定, $M = \frac{dL}{dt}$ 。

由力矩定义 $M = r \times F$ 可知,力矩是对点定义的,它与该点到力的作用点的位矢 $r$ 、力 $F$ 以及两者间的夹角 $\varphi$ 有关。大小为 $M =$

$rF\sin\varphi$ , 方向为右手螺旋法则确定的矢积方向。

**【4-7】** 两个同样大小的轮子, 质量也相同。一个轮子的质量均匀分布, 另一个轮子的质量主要集中在轮缘。问: (1) 如果作用在它们上面的外力矩相同, 哪个轮子转动的角加速度较大? (2) 如果它们的角加速度相等, 作用在哪个轮子上的力矩较大? (3) 如果它们的角动量相等, 哪个轮子转得快?

答 根据  $J = \int r^2 dm$  可知, 质量主要集中在轮缘的轮子转动惯量大。

(1) 由转动定律  $M = J\alpha$  可知,  $M$  相同,  $J$  小的  $\alpha$  大, 即轮子质量均匀分布的那个角加速度较大。

(2)  $\alpha$  相等,  $J$  大的  $M$  也大, 即质量主要集中在轮缘的轮子上的力矩较大。

(3) 由角动量定理  $L = J\omega$  知,  $L$  相等时,  $J$  小的  $\omega$  大, 即质量均匀分布的轮子转得快。

**【4-8】** 一个转动着的飞轮, 如不供给它能量, 最终将停下来。试用转动定律解释这个现象。

答 刚体的定轴转动定律为  $M = J\alpha$ 。转动着的飞轮, 不供给能量, 它只受阻力矩  $M$  的作用, 角加速度  $\alpha < 0$ , 即做减速转动, 从而最终停止下来。

**【4-9】** 将一个生鸡蛋和一个熟鸡蛋放在桌上使它旋转, 如何判定哪个是生的, 哪个是熟的? 为什么?

答 旋转时比较平稳, 转动时间长的是生鸡蛋。旋转时摇晃不稳, 转动时间短的是熟鸡蛋。

因为生鸡蛋的蛋黄、蛋白未凝固, 可以自由移动。一旋转其重心移至转轴, 对转轴外力矩为零, 所以角动量守恒。这样就可以旋转相当长的时间才停下来, 而且转动也比较平稳。而熟鸡蛋蛋黄、蛋白已经凝固, 重心位置一般不会在轴心上。由于偏心, 转动起来不稳、会摇晃, 而且重力矩作为外力矩不等于零, 角动量也不守恒,

很快就会停下来。

**【4-10】** 两个同样的小孩,分别抓住跨过定滑轮绳子的两端,一个用力往上爬,另一个不动,问哪一个先到达滑轮处?如果小孩重量不相等,情况又将如何?(滑轮和绳子的质量可以忽略。)

答 两小孩开始均在地面,滑轮两边绳长一样。因两小孩重量相等,二者对滑轮轴的合外力矩为零。用力上爬的小孩施于绳的力对系统来说是内力,所以此过程中系统的角动量守恒。

设用力的小孩相对于绳上升的速度为 $v$ ,另一小孩相对于地面向上的速度为 $u$ ,则用力的小孩相对于地的速度为 $v-u$ 。由角动量守恒定律可知,对转轴有

$$0 = muR - m(v - u)R$$

所以

$$u = \frac{v}{2}, \quad v - u = \frac{v}{2}$$

即两小孩同时到达滑轮处。

小孩重量不等,则合外力矩不为零,系统的角动量不守恒。如上升过程是匀速,则根据受力分析,重量大的小孩在地面,重量轻的小孩升至滑轮处。

## 习题解答

**【4-1】** 一飞轮直径为 0.30 m,质量为 5.00 kg,边缘绕有绳子,现用恒力拉绳子的一端,使其由静止均匀地加速,经 0.50 s 转速达 10 r/s。假定飞轮可看作实心圆柱体,求:(1)飞轮的角加速度及在这段时间内转过的转数;(2)拉力及拉力所做的功;(3)从拉动后  $t=10$  s 时飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度。

解 本题注意角量与线量的关系,匀加速转动。

飞轮质量  $m=5.00$  kg,半径  $R=0.15$  m。作为实心圆柱体,其转动惯量为  $J=\frac{m}{2}R^2=5.63\times 10^{-2}$  kg·m<sup>2</sup>。

(1) 由题意知,本题为匀加速转动问题。因为

$$\omega = at, \quad \theta = \frac{1}{2}at^2$$

所以 
$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi \times 10}{0.50} \text{ rad/s}^2 = 1.26 \times 10^2 \text{ rad/s}^2$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2} \times 1.26 \times 10^2 \times 0.50^2}{2 \times 3.14} \text{ r} = 2.5 \text{ r}$$

(2) 由转动定律  $M = FR = J\alpha$ , 有

$$F = \frac{J\alpha}{R} = \frac{5.63 \times 10^{-2} \times 1.26 \times 10^2}{0.15} \text{ N} = 47.3 \text{ N}$$

$$A = M\theta = J\alpha\theta$$

$$= 5.63 \times 10^{-2} \times 1.26 \times 10^2 \times 2\pi \times 2.5 \text{ J} = 111 \text{ J}$$

(3)  $t = 10 \text{ s}$  时

$$\omega = at = 1.26 \times 10^2 \times 10 \text{ rad/s} = 1.26 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$v = R\omega = 0.15 \times 1.26 \times 10^3 \text{ m/s} = 1.89 \times 10^2 \text{ m/s}$$

$$a_n = R\omega^2 = 0.15 \times (1.26 \times 10^3)^2 \text{ m/s}^2 = 2.38 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = R\alpha = 0.15 \times 1.26 \times 10^2 \text{ m/s}^2 = 18.9 \text{ m/s}^2$$

**【4-2】** 飞轮的质量为  $60 \text{ kg}$ , 直径为  $0.50 \text{ m}$ , 转速为  $1\,000 \text{ r/min}$ , 现要求在  $5 \text{ s}$  内使其制动, 求制动力  $F$ 。假定闸瓦与飞轮之间的摩擦系数  $\mu = 0.4$ , 飞轮的质量全部分布在轮的外周上。尺寸如图 4-1 所示。

解 本题为匀减速转动, 应用定轴转动定律。注意制动力  $F$  与对轮的摩擦力之间的关系。水平摩擦力之力矩使飞轮制动。

由于飞轮质量全部分布在圆周上, 所以其转动惯量为

$$J = mR^2 = 60 \times (0.25)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

根据定义可知, 角加速度

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - \frac{2\pi \times 1\,000}{60}}{5} \text{ rad/s}^2 = -20.9 \text{ rad/s}^2$$

杆及飞轮受力如图 4-2 所示,  $N' = N$ 。以杆作研究对象, 它保持静止, 所以对  $A$  点合力矩应为零, 即

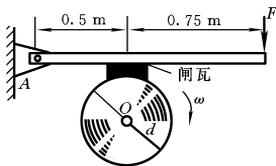


图 4-1

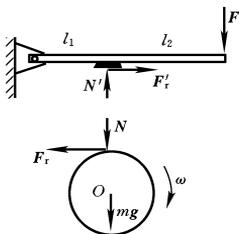


图 4-2

$$F(l_1 + l_2) - N'l_1 = 0$$

以飞轮为研究对象,  $F_r$  对它的摩擦力矩为

$$M = -F_r R$$

其中  $F_r = \mu N = \mu N' = \mu F \frac{l_1 + l_2}{l_1}$

根据转动定律  $M = J\alpha$ , 可得

$$\begin{aligned} F &= -\frac{l_1}{l_1 + l_2} \frac{J\alpha}{\mu R} \\ &= -\frac{0.5}{0.5 + 0.75} \times \frac{3.75 \times (-20.9)}{0.4 \times 0.25} \text{ N} = 314 \text{ N} \end{aligned}$$

**【4-3】** 如图4-3所示, 两物体1和2的质量分别为  $m_1$  与  $m_2$ , 滑轮的转动惯量为  $J$ , 半径为  $r$ 。(1) 如物体2与桌面间的摩擦系数为  $\mu$ , 求系统的加速度  $a$  及绳中的张力  $F_{T1}$  与  $F_{T2}$  (设绳子与滑轮间无相对滑动); (2) 如物体2与桌面间为光滑接触, 求系统的加速度  $a$  及绳中的张力  $F_{T1}$  与  $F_{T2}$ 。

解 注意  $F_{T1} \neq F_{T2}$ , 以及线量与角量的关系。

(1) 对  $m_1$  有  $m_1 g - F_{T1} = m_1 a$

对  $m_2$  有  $F_{T2} - \mu m_2 g = m_2 a$

由上两式可得

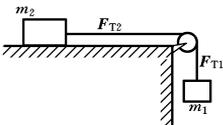


图 4-3

$$F_{T_2} - F_{T_1} + (m_1 - \mu m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

对滑轮,根据转动定律,有

$$(F_{T_1} - F_{T_2})r = J\alpha = J \frac{a}{r}$$

所以 
$$-J \frac{a}{r^2} + (m_1 - \mu m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

可得 
$$F_{T_1} = m_1(g - a) = \frac{m_1(m_2 + \mu m_2 - J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T_2} = m_2(a + \mu g) = \frac{m_2(m_1 + \mu m_1 + \mu J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

(2) 光滑无摩擦  $\mu = 0$ , 则

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T_1} = \frac{m_1(m_2 - J/r^2)g}{m_1 + m_2 + J/r^2}, \quad F_{T_2} = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

**【4-4】** 电动机带动一个转动惯量为  $J = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  的系统做定轴转动。在  $0.5 \text{ s}$  内由静止开始最后达到  $120 \text{ r/min}$  的转速。假定在这一过程中转速是均匀增加的,求电动机对转动系统施加的力矩。

解 因为 
$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi \times \frac{120}{60} - 0}{0.5} \text{ rad/s}^2 = 8\pi \text{ rad/s}^2$$

所以 
$$M = J\alpha = 50 \times 8\pi \text{ N} \cdot \text{m} = 1.26 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**【4-5】** 求题 4-2 中制动力矩在制动过程中所做的功。

解 由转动的动能定理,有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \left[ 0 - \frac{1}{2} \times 3.75 \times \left( \frac{100\pi}{3} \right)^2 \right] \text{ J} \\ &= -2.60 \times 10^2 \text{ J} \end{aligned}$$

负号表示制动力矩做负功,转动动能的增量为负值,即飞轮反抗阻

力矩做功。

**【4-6】** 某冲床上飞轮的转动惯量为  $4.00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。当它的转速达到  $30 \text{ r/min}$  时, 它的转动动能是多少? 每冲一次, 其转速降为  $10 \text{ r/min}$ 。求每冲一次飞轮对外所做的功。

解 本题应用转动动能定理。

冲前飞轮具有转动动能

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left( \frac{30 \times 2\pi}{60} \right)^2 \text{ J} \\ &= 1.97 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

冲后飞轮具有转动动能

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2} J \omega_2^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left( \frac{10 \times 2\pi}{60} \right)^2 \text{ J} \\ &= 2.19 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

所以每冲一次飞轮所做的功为

$$A' = -A = -(E_{k2} - E_{k1}) = 1.75 \times 10^4 \text{ J}$$

**【4-7】** 如图 4-4 所示, 一圆柱体质量为  $m$ , 长为  $l$ , 半径为  $R$ , 用两根轻软的绳子对称地绕在圆柱两端, 两绳的另一端分别系在天花板上。现将圆柱体从静止释放, 试求: (1) 它向下运动的线加速度; (2) 它向下加速运动时, 两绳的张力。

解 (1) 设每绳中张力为  $T$ 。由质心运动定理, 有

$$mg - 2T = ma_c$$

对过质心的轴应用转动定律, 有

$$2TR = J_c \alpha = J_c \frac{a_c}{R}$$

联解两式可得

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{mg}{m + J/R^2} = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}mR^2/R^2} \\ &= \frac{2}{3}g \end{aligned}$$

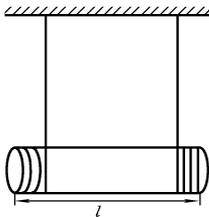


图 4-4

$$(2) T = \frac{mg - ma_c}{2} = \frac{m \left( g - \frac{2}{3}g \right)}{2} = \frac{mg}{6}$$

**【4-8】** 在自由旋转的水平圆盘边上, 站一质量为  $m$  的人。圆盘的半径为  $R$ , 转动惯量为  $J$ , 角速度为  $\omega$ 。如果这人由盘边走到盘心, 求角速度的变化及此系统动能的变化。

解 对轴的外力矩为零, 人与圆盘系统角动量守恒。人在盘边时,  $J_\lambda = mR^2$ , 设人走到盘心时盘的角速度为  $\omega'$ , 则

$$J_0 \omega = (J + J_\lambda) \omega' = J \omega'$$

$$\omega' = \frac{J + mR^2}{J} \omega$$

动能变化

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2} J \omega'^2 - \frac{1}{2} J_0 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} J \left( \frac{J + mR^2}{J} \omega \right)^2 - \frac{1}{2} (J + mR^2) \omega^2 \\ &= \frac{J + mR^2}{2J} mR^2 \omega^2 \end{aligned}$$

**【4-9】** 在半径为  $R_1$ 、质量为  $m$  的静止水平圆盘上, 站一质量为  $m$  的人。圆盘可无摩擦地绕通过圆盘中心的竖直轴转动。当这人开始沿着与圆盘同心、半径为  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ) 的圆周匀速地走动时, 设他相对于圆盘的速度为  $v$ , 问圆盘将以多大的角速度旋转?

解 本题注意参考系问题。

对于转轴, 人与盘系统角动量守恒。盘的转动惯量  $J = \frac{1}{2} m R_1^2$ , 人的转动惯量  $J_\lambda = m R_2^2$ 。取地面参考系, 有

$$v_{\text{人对盘}} + v_{\text{盘对地}} = v_{\text{人对地}}$$

根据角动量守恒定律, 有

$$J \omega + J_\lambda \omega_{\text{人对地}} = 0$$

而  $v_{\text{人对地}} = v + R_2 \omega$ ,  $\omega_{\text{人对地}} = \frac{v_{\text{人对地}}}{R_2}$ , 所以

$$\frac{1}{2}mR_1^2\omega + mR_2^2\left(\frac{v + R_2\omega}{R_2}\right) = 0$$

$$\omega = -\frac{2R_2}{R_1^2 + 2R_2^2}v$$

**【4-10】** 如图4-5所示,转台绕中心竖直轴以角速度 $\omega_0$ 做匀速转动。转台对该轴的转动惯量 $J = 5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。现有砂粒以 $1 \text{ g/s}$ 的速度落到转台,并粘在台面形成一半径 $r = 0.1 \text{ m}$ 的圆。试求砂粒落到转台,使转台角速度变为 $\frac{1}{2}\omega_0$ 所花的时间。

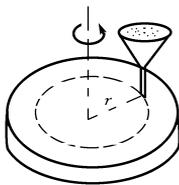


图4-5

**解** 本题注意转动惯量随砂粒的增加而变化。

因为砂粒垂直落入转台,砂粒对竖直轴的角动量原为零,落下后随转台转动。对转台和下落砂粒这一系统,角动量守恒,所以有

$$J_1\omega = J\omega_0$$

$$\text{而} \quad J_1 = J + \int r^2 dm = J + r^2 \int_0^t \lambda dt = J + r^2 \lambda t$$

令 $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$ ,代入可得

$$(J + r^2 \lambda t) \frac{1}{2}\omega_0 = J\omega_0$$

$$t = \frac{J}{\lambda r^2} = \frac{5 \times 10^{-5}}{0.001 \times 0.1^2} \text{ s} = 5 \text{ s}$$

**【4-11】** 在一半径为 $R$ 、质量为 $m$ 的水平圆盘的边上,站着一个质量为 $m'$ 的人。此圆盘可绕通过中心的竖直轴转动,转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计。当人沿盘的边缘走一周回到盘上原有位置时,此圆盘将转过多大的角度?

**解** 注意相对量问题。

设对转轴,人的转动惯量为 $J_1$ ,圆盘的转动惯量为 $J_2$ 。取地面作参考系,人的角速度为 $\omega_1$ ,圆盘的角速度为 $\omega_2$ ,则根据角动量守

恒定律,有

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\omega_1$$

人相对于转台的角速度为

$$\omega' = \omega_1 - \omega_2 = \left(1 + \frac{J_1}{J_2}\right)\omega_1$$

人绕圆盘一周的时间

$$t = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi \frac{J_2}{(J_1 + J_2)\omega_1}$$

所以转台此时转过的角度为

$$\theta = \omega_2 t = -2\pi \frac{J_1}{J_1 + J_2} = -2\pi \frac{m'R^2}{m'R^2 + \frac{1}{2}mR^2} = -2\pi \frac{2m'}{2m' + m}$$

负号表示圆盘和人转动方向相反。

**【4-12】** 一脉冲星质量为  $1.5 \times 10^{30}$  kg, 半径为 20 km。自旋转速为  $2.1$  r/s, 并且以  $1.0 \times 10^{-15}$  r/s 的变化率减慢。问它的转动动能以多大的变化率减小? 如果这一变化率保持不变, 这个脉冲星经过多长时间就会停止自旋? 设脉冲星可看作匀质球体。

解 由  $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$  可得

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= J\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5}mr^2\omega \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{2}{5} \times 1.5 \times 10^{30} \times (2 \times 10^4)^2 \times 2.1 \\ &\quad \times 2\pi \times 1.0 \times 10^{-15} \times 2\pi \text{ J/s} \\ &= 1.99 \times 10^{25} \text{ J/s} \end{aligned}$$

即以以上变化率减小。

而

$$E_k = \frac{dE_k}{dt} \cdot t$$

所以

$$t = \frac{E_k}{\frac{dE_k}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}J\omega^2}{J\omega \frac{d\omega}{dt}} = \frac{\omega}{2 \frac{d\omega}{dt}} = \frac{2.1 \times 2\pi}{2 \times 1.0 \times 10^{-15} \times 2\pi} \text{ s}$$

$$= 1.05 \times 10^{15} \text{ s}$$

**【4-13】** 如图4-6所示的打桩装置,半径为 $R$ 的带齿轮转盘绕中心轴的转动惯量为 $J$ ,转动角速度为 $\omega_0$ ,夯锤的质量为 $M$ ,开始处于静止状态,在转盘与夯锤碰撞后,问夯锤的速度能有多大?

解 注意夯锤角动量的表示。

转盘与夯锤系统角动量守恒。碰撞后,转盘角速度为 $\omega$ ,夯锤的速度为 $v$ ,夯锤对转轴角动量为 $RMv$ ,则有

$$J\omega_0 = J\omega + RMv$$

代入 $\omega=v/R$ ,可得

$$v = \frac{J\omega_0}{MR + J/R}$$

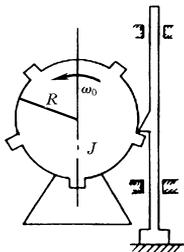


图 4-6

**【4-14】** 一个人站在一竹筏的一端用力向垂直于筏身方向水平跳出去。筏由于受到反冲作用就要旋转起来。假定人的质量 $m=60 \text{ kg}$ ,筏的质量 $m'=500 \text{ kg}$ ,人相对于岸的起跳速度为 $3 \text{ m/s}$ 。求竹筏所获得的角速度(假定竹筏的转动惯量近似地可以用细杆的公式来计算,水的摩擦可以忽略不计)。筏长 $10 \text{ m}$ 。

解 本题应用角动量守恒定律。

由人和筏所组成的系统,对通过筏的中心且垂直水面的轴,合外力矩为零,所以角动量守恒

$$J\omega - J_\lambda \omega_\lambda = 0$$

$$\omega = \frac{J_\lambda \omega_\lambda}{J} = \frac{mvL/2}{m'L^2/12} = \frac{6mv}{m'L}$$

$$= \frac{6 \times 60 \times 3}{500 \times 10} \text{ rad/s} = 0.212 \text{ rad/s}$$

**【4-15】** 如图 4-7 所示, 弹簧的劲度系数  $k=2.0 \text{ N/m}$ , 轮子的转动惯量为  $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 轮子半径  $r=30 \text{ cm}$ 。当质量为  $60 \text{ kg}$  的物体落下  $40 \text{ cm}$  时的速率是多大? 假设开始时物体静止而弹簧无伸长。

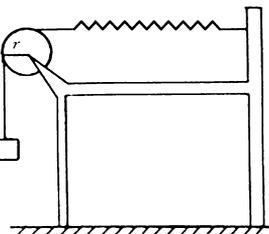


图 4-7

**解** 本题应用机械能守恒定律。

已知轮子  $J=0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 物体  $m=60 \text{ kg}$ , 设物体下落  $h=40 \text{ cm}$  时的速率为  $v$ 。因为以弹簧、定滑轮、物体和地球为一系统, 机械能守恒, 所以有

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kh^2 = mgh$$

代入  $\omega = \frac{v}{r}$ , 可得

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + J/r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 60 \times 9.8 \times 0.4 - 2.0 \times 0.4^2}{60 + 0.5/0.3^2}} \text{ m/s} \\ &= 2.68 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**【4-16】** 如图 4-8 所示, 滑轮的转动惯量  $J=0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 半径  $r=30 \text{ cm}$ , 弹簧的劲度系数  $k=2.0 \text{ N/m}$ , 重物的质量  $m=2.0 \text{ kg}$ 。当此滑轮-重物系统从静止开始启动, 开始时弹簧没有伸长。如摩擦可忽略, 问物体能沿斜面滑下多远?

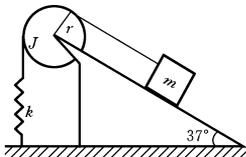


图 4-8

**解** 忽略摩擦, 系统机械能守恒。当物体沿斜面滑下  $x$  距离时停止, 则有

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgx\sin 37^\circ$$

$$x = \frac{2mg\sin 37^\circ}{k} = \frac{2 \times 2.0 \times 9.8 \times \sin 37^\circ}{2.0} \text{ m} = 11.8 \text{ m}$$

**【4-17】** 在上题中,当物体沿斜面滑下 1.00 m 时,它的速率有多大?

解 忽略摩擦,系统机械能守恒。设物体沿斜面滑下  $x$  距离时其速率为  $v$ , 则

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = mgx\sin\theta$$

考虑关系式  $v=r\omega$ , 有

$$\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{J}{r^2}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = mgx\sin\theta$$

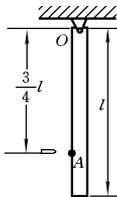
所以

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2mgx\sin\theta - kx^2}{m + J/r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 2.0 \times 9.8 \times 1.00 \times \sin 37^\circ - 2.0 \times 1.00^2}{2.0 + 0.5/0.3^2}} \text{ m/s} \\ &= 1.69 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**【4-18】** 一长  $l=0.40 \text{ m}$  的均匀木棒,质量  $m'=1.00 \text{ kg}$ , 可绕水平轴  $O$  在竖直平面内转动,开始时棒自然地竖直悬垂。现有质量  $m=8 \text{ g}$  的子弹以  $v=200 \text{ m/s}$  的速率从  $A$  点射入棒

中,假定  $A$  点与  $O$  点的距离为  $\frac{3}{4}l$ , 如图 4-9 所示。

求:(1)棒开始运动时的角速度;(2)棒的最大偏转角。



解 本题注意碰撞过程角动量守恒。

木棒绕  $O$  点的转动惯量为

$$J_O = \frac{1}{3}m'l^2$$

图 4-9

子弹射入木棒后绕  $O$  点的总转动惯量为

$$J = \frac{1}{3}m'l^2 + m\left(\frac{3}{4}l\right)^2$$

(1) 由角动量守恒有

$$mv \cdot \frac{3}{4}l = \left[\frac{1}{3}m'l^2 + m\left(\frac{3}{4}l\right)^2\right]\omega$$

所以

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{3mvl}{4\left(\frac{1}{3}m'l^2 + \frac{9}{16}ml^2\right)} \\ &= \frac{3 \times 0.008 \times 200 \times 0.40}{4\left[\frac{1}{3} \times 1.00 \times 0.40^2 + \frac{9}{16} \times 0.008 \times 0.40^2\right]} \text{ rad/s} \\ &= 8.89 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

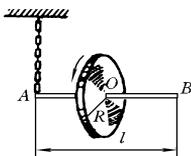
(2) 棒开始运动后,机械能守恒。设棒的最大偏转角为  $\theta$ ,则

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = m'g \cdot \frac{l}{2}(1 - \cos\theta) + mg \frac{3}{4}l(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{m'gl + \frac{3}{2}mgl - J\omega^2}{m'gl + \frac{3}{2}mgl} = -0.073$$

$$\theta = 94^\circ 12'$$

**【4-19】** 半径  $R$  为 30 cm 的轮子,装在一根长  $l$  为 40 cm 的轴的中部,并可绕其转动,轮和轴的质量共 5 kg,系统对该轴的转动惯量相当于一个半径为 25 cm 的圆环,轴的一端  $A$  用一根链条挂起,如果原来轴在水平位置,并使轮子以  $\omega_{\text{自}} = 12 \text{ rad/s}$  的角速度旋转,方向如图 4-10 所示,求:(1)该轮自转的角动量;(2)作用于轴上的外力矩;(3)系统的进动角速度,并判断进动方向。



解 注意本题非定轴转动,属进动问

图 4-10

题。

(1) 因为轮和轴系统的回转半径为  $R_{\text{回}} = 0.25 \text{ m}$ , 所以其转动惯量  $J = mR_{\text{回}}^2$ , 自转角动量则为

$$\begin{aligned} J\omega_{\text{自}} &= mR_{\text{回}}^2 \omega_{\text{自}} = 5 \times 0.25^2 \times 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ &= 3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

(2) 以  $A$  点计算力矩为

$$\begin{aligned} M_A &= G \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2} \\ &= 5 \times 9.8 \times \frac{0.40}{2} \text{ N} \cdot \text{m} = 9.8 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$(3) \omega_{\text{进}} = \frac{M_A}{J\omega_{\text{自}}} = \frac{9.8}{3.75} \text{ rad/s} = 2.61 \text{ rad/s}$$

进动方向俯视为逆时针方向。

**【4-20】** 为稳定船身而装在船上的一种陀螺仪, 其质量为  $50 \text{ t}$ , 回转半径为  $2 \text{ m}$ , 以  $900 \text{ r/min}$  的转速绕竖直轴旋转, 问: (1) 如用  $736 \text{ kW}$  的输入功率使其从静止开始转动, 要经多长时间才能达到这个稳定转速? (2) 要加多大力矩才可使它在船的竖直纵断面内产生  $1^\circ/\text{s}$  的进动角速度?

解 注意陀螺仪原理。

由题知  $m = 50 \text{ t} = 5 \times 10^4 \text{ kg}$ ,  $R_{\text{回}} = 2 \text{ m}$ ,  $\omega_{\text{自}} = \frac{900 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 30\pi \text{ rad/s}$ , 转动惯量  $J = mR_{\text{回}}^2 = 2.0 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

(1) 设在  $t$  秒内输入功全部转化为陀螺仪的转动动能, 即

$$Pt = \frac{1}{2} J\omega_{\text{自}}^2$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } t &= \frac{J\omega_{\text{自}}^2}{2P} = \frac{2.0 \times 10^5 \times (30 \times 3.14)^2}{2 \times 736 \times 10^3} \text{ s} \\ &= 1.21 \times 10^3 \text{ s} \end{aligned}$$

(2) 因为  $\omega_{\text{进}} = 1^\circ/\text{s} = 0.0175 \text{ rad/s}$

而

$$\omega_{\text{进}} = \frac{M}{J\omega_{\text{自}}}$$

所以

$$M = J\omega_{\text{自}} \omega_{\text{进}} = 2.0 \times 10^5 \times 30\pi \times 0.0175 \text{ N} \cdot \text{m} \\ = 3.30 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**【4-21】** 在如图4-11所示的回转仪中,转盘的质量为  $0.15 \text{ kg}$ ,绕其轴线的转动惯量为  $1.50 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,架子的质量为  $0.03 \text{ kg}$ 。由转盘与架子组成的系统被支持在一个支柱的尖端  $O$  上,尖端  $O$  到转盘中心的距离为  $0.04 \text{ m}$ ,当转盘以一定角速度  $\omega$  绕其轴旋转时,它便在

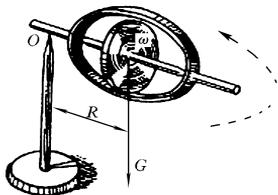


图4-11

水平面内以  $\frac{1}{6} \text{ r/s}$  的转速进动。(1)求尖端对支架的作用力。(2)求转盘自转的角速度。(3)画出自转角动量矢量、进动角速度矢量和架子转盘系统所受到的力矩矢量图。

解 注意回转仪原理。

(1) 尖端对支架的竖直向上的作用力

$$N = (m_1 + m_2)g = (0.15 + 0.03) \times 9.8 \text{ N} = 1.76 \text{ N}$$

(2) 因为进动的角速度

$$\omega_{\text{进}} = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1}{6} \text{ rad/s} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

设转盘自转的角速度为  $\omega_{\text{自}}$ , 所以

$$\omega_{\text{自}} = \frac{M}{J\omega_{\text{进}}} = \frac{GR}{J\omega_{\text{进}}} \\ = \frac{(0.15 + 0.03) \times 9.8 \times 0.04}{1.50 \times 10^{-4} \times \frac{3.14}{3}} \text{ rad/s}$$

$$= 4.49 \times 10^2 \text{ rad/s}$$

(3) 三矢量如图4-12所示。

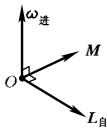


图4-12

# 第五章 机械振动

---

---

## 知识要点

### 1. 简谐运动

#### (1) 简谐运动的表达式

位移表达式  $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$

速度表达式  $v = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0)$

加速度表达式  $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0)$

#### (2) 简谐运动的振幅、圆频率及初相

振幅  $A$  决定于质点运动的初始条件

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$

圆频率 决定于振动系统的性质,对谐振子

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

初相  $\phi_0$  决定于运动的初始条件

$$\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

(若给出振幅  $A$ 、初始位置  $x_0$  及初速度  $v_0$  的方向,初相  $\phi_0$  也可由位移表达式及速度表达式求得。)

#### (3) 简谐运动的能量

动能  $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$

势能  $E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$

总能量  $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

## (4) 单摆

$$\text{振动表达式} \quad \theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{周期} \quad T = 2\pi \sqrt{l/g}$$

## 2. 阻尼振动

$$\text{周期} \quad T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \left( \beta = \frac{\gamma}{2m} \right)$$

## 3. 受迫振动 共振

$$\text{位移共振角频率} \quad \omega_{\text{共振}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\text{速度共振角频率} \quad \omega_{\text{共振}} = \omega_0$$

## 4. 两个简谐运动的合成

(1) 同方向同频率简谐运动的合成: 合成后仍为该方向该频率的简谐运动, 振幅取决于两分振动的振幅及相位差。当

$$\Delta\phi = \begin{cases} 2k\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\text{时} \quad A = \begin{cases} A_1 + A_2 \\ |A_1 - A_2| \end{cases}$$

(2) 同方向不同频率简谐运动的合成: 两振动的频率差与它们的频率相比很小时, 合成后产生拍的现象, 拍频为  $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$ 。

(3) 相互垂直的同频率简谐运动的合成: 合运动的轨迹一般为椭圆, 具体形状取决于二分振动的相位差和振幅。

(4) 相互垂直的不同频率简谐运动的合成: 二分振动的频率为简单整数比时, 合运动轨迹为李萨如图形。

## 思考题解答

**【5-1】** 试说明下列运动是不是简谐运动:

- (1) 小球在地面上做完全弹性的上下跳动。
- (2) 小球在半径很大的光滑凹球面底部做小幅度的摆动。

(3) 曲柄连杆机构使活塞做往复运动。

(4) 小磁针在地磁的南北方向附近摆动。

答 (1) 不是谐运动。因为小球一直受重力作用,在与地面碰撞的瞬间又受到一向上的冲力,力的大小不是与位移成正比,方向也不是始终与位移方向相反。

(2) 是谐运动。设凹球面半径为 $R$ ,小球质量为 $m$ ,小球在光滑凹球面上来回滑动。当小球所在位置的凹球面半径与竖直方向成 $\theta$ 角时,小球所受的切向分力为 $F = -mg\sin\theta$ ,运动方程为

$$F = ma_t = mR \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

即 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

当摆动幅度很小时, $\sin\theta \approx \theta$ ,则有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

这正是简谐运动方程。所以是简谐运动。

(3) 满足一定条件时,可看作简谐运动。设曲柄长为 $r$ ,它以匀角速 $\omega$ 绕轴 $O'$ 旋转。连杆长 $l$ 。当曲柄转到竖直位置时,取连杆另一端所在位置为原点 $O$ 。曲柄在位置 $A$ 时,如图5-1所示,有

$$\overline{O'B} = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - (r\sin\varphi)^2}$$

而

$$\overline{O'O} = \sqrt{l^2 - r^2}$$

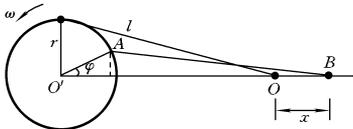


图5-1

连杆另一端的活塞的位移为

$$x = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - (r\sin\varphi)^2} - \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$= r\cos\varphi + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2} - l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}$$

当  $r \ll l$  时, 上式可近似为

$$x \approx r\cos\varphi = r\cos\omega t$$

即当曲柄长  $r$  比连杆长  $l$  小得多时, 活塞的运动可看作简谐运动。

(4) 是简谐运动。设小磁针的磁矩为  $m$ , 该处地磁场在磁针平衡位置方向分量为  $B$ 。当  $m$  与  $B$  方向一致时, 磁矩所受力矩为零。当小磁针转动微小角度  $\theta$  时, 所受力矩大小为

$$M = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = mB\sin\theta \approx mB\theta$$

根据转动定律, 有

$$M = J\alpha = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由于  $M$  与角位移  $\theta$  反向, 所以可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{M}{J} = -\frac{mB}{J}\theta = -\omega^2\theta$$

此正是角度的简谐运动方程。

**【5-2】** 简谐运动的速度和加速度在什么情况下是同号的? 在什么情况下是异号的? 加速度为正值时, 振动质点的速率是否一定在增加? 反之, 加速度为负值时, 速率是否一定在减小?

答 当作简谐运动的物体从最大位移处向平衡位置运动的过程中, 速度和加速度是同号的。在从平衡位置向最大位移处运动的过程中, 速度与加速度是异号的。

加速度为正值时, 振动质点的速率不一定增加。如当质点从平衡位置向负方向最大位移处运动时, 加速度为正, 但质点速率在减少。

加速度为负值时, 振动质点的速率也不一定减少。如当质点从正的最大位移处向平衡位置运动时, 加速度为负, 速率增加。

**【5-3】** 分析下列表述是否正确, 为什么?

(1) 若物体受到一个总是指向平衡位置的合力, 则物体必然

作振动,但不一定是简谐运动。

(2) 简谐运动过程是能量守恒的过程,因此,凡是能量守恒的过程就是简谐运动。

答 (1) 正确。按振动的定义可知物体必然作振动。但满足条件的振动不一定是简谐运动。如单摆小角摆动时,是简谐运动,但摆角过大时,虽是振动,但不是简谐运动。

(2) 不正确。能量守恒是一种普遍的规律,适用于各种物理过程,而简谐运动只是诸多物理过程中的一种。

**【5-4】** 一劲度系数为  $k$  的弹簧和一质量为  $m$  的物体组成一振动系统,若弹簧本身的质量不计,弹簧的自然长度为  $l_0$ ,物体与平面以及斜面间的摩擦不计。在如图 5-2 所示的三种情况中,振动周期是否相同?

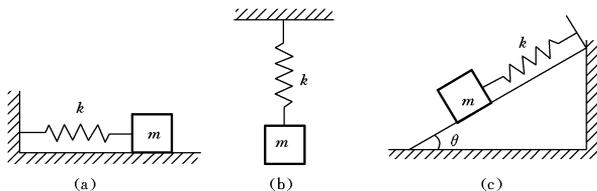


图 5-2

答 相同。

$$\text{图 5-2(a): } \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

图 5-2(b): 以平衡位置为原点  $O$ , 取  $x$  轴向下为正, 平衡时弹簧伸长  $\Delta l_0$ , 有

$$k\Delta l_0 = mg$$

当  $m$  在  $x$  处时, 运动方程为

$$F = -k(x + \Delta l_0) + mg = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

可见有 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

图5-2(c): 以平衡位置为原点 $O$ , 沿斜面向下为 $x$ 轴正向。设平衡位置处弹簧伸长 $\Delta l_0$ , 则有

$$k\Delta l_0 = mg\sin\theta$$

当 $m$ 在坐标 $x$ 处时, 运动方程为

$$F = -k(x + \Delta l_0) + mg\sin\theta = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

所以 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**【5-5】** 两个劲度系数均为 $k$ 的相同弹簧, 按图5-3所示的不同方式连接一质量为 $m$ 的物体, 组成一振动系统。试分析物体受到沿弹簧长度方向的初始扰动后是否作简谐运动。如是简谐运动, 比较它们的周期。

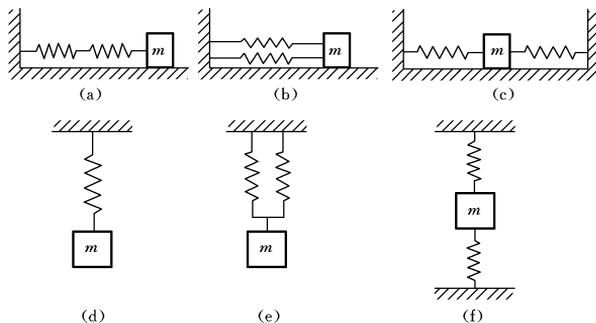


图 5-3

答 受回复力作用, 沿弹簧长度方向扰动后物体均作简谐运动。

均设平衡位置为原点 $O$ , 图5-3(a)、(b)、(c)取 $Ox$ 轴向右为正,

图 5-3(d)、(e)、(f)取  $Ox$  轴向下为正。

图 5-3(a):  $m$  在  $x$  处, 两弹簧分别伸长为  $x_1, x_2$ , 则有

$$x = x_1 + x_2, \quad F_1 = -kx_1, \quad F_2 = -kx_2$$

因

$$F_1 = F_2$$

所以

$$x_1 = x_2 = \frac{x}{2}$$

运动方程为

$$F = F_1 = -kx_1 = -k \frac{x}{2} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

可得

$$\omega^2 = \frac{k}{2m}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

此为串联情况, 相当于劲度系数减半。

图 5-3(b):  $m$  在  $x$  处, 两弹簧弹性力为

$$F_1 = -kx, \quad F_2 = -kx$$

运动方程为

$$F = F_1 + F_2 = -2kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

可得

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

此为两相同弹簧并联情况, 相当于劲度系数为单根的 2 倍。

图 5-3(c):  $m$  在  $x$  处, 分析可得

$$F_1 = -kx, \quad F_2 = -kx$$

$$F = 2F_1 = -2kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

有

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

与图 5-3(b)情况相同。

图 5-3(d): 恒力  $mg$  不影响物体作简谐运动的周期, 周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

图 5-3(e): 两根相同弹簧并接, 有

$$mg = 2k\Delta x$$

$$F = -2k(x + \Delta x) + mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

可得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

与图 5-3(b)中的周期相同。

图 5-3(f): 分析类同图 5-3(e), 有

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

**【5-6】** 三个完全相同的单摆, 在下列各种情况下, 它们的周期是否相同? 如不相同, 哪个大? 哪个小?

(1) 第一个在教室里, 第二个在匀速前进的火车上, 第三个在匀加速水平前进的火车上。

(2) 第一个在匀速上升的升降机中, 第二个在匀加速上升的升降机中, 第三个在匀减速上升的升降机中。

(3) 第一个在地球上, 第二个在绕地球的同步卫星上, 第三个在月球上。

答 (1) 三种情况周期相同。

设单摆摆长为  $l$ , 摆球质量为  $m$ 。在教室里, 惯性参考系, 周期  $T_1 = 2\pi \sqrt{l/g}$ 。

在匀速前进的火车上, 惯性参考系, 周期  $T_2 = 2\pi \sqrt{l/g}$ 。

在匀加速水平前进的火车上, 设火车加速度为  $a$ , 取火车为参考系, 在切线方向有

$$-mg\sin\theta - ma\cos\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

当  $\theta$  很小时, 近似有  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ , 则可得

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta - a$$

令  $\varphi = \theta + \frac{a}{g}$ , 上式可变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

此为简谐运动, 其周期  $T_3 = 2\pi\sqrt{l/g}$ 。相当于原点的变化, 即类似于简谐弹簧振子受沿弹簧方向的恒力作用情况。

(2) 三种情况周期不同。

匀速上升, 单摆重量  $mg$  不变, 单摆所受切向分力也与静止时一样, 所以周期为  $T_1 = 2\pi\sqrt{l/g}$ 。

在匀加速上升的升降机中的物体处于“超重”状态, 重量从  $mg$  升至  $m(g+a)$ , 因而单摆所受的切向分力增大。单摆的运动方程则为

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m(g+a)\theta$$

其周期比匀速时小, 为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

匀减速上升的升降机, 其加速度方向向下, 与上面情况相反, 运动方程为

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -m(g-a)\theta$$

周期为

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

它比匀速上升时大。

(3) 三种情况周期不同。

在地球上, 其重力加速度

$$g_E = G_0 \frac{m_E}{R_E^2} = 9.81 \text{ m/s}^2$$

单摆的周期为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_E}}$$

在绕地球同步卫星上,由于卫星的质量小,所以单摆可认为只受地球引力作用。卫星到地球中心距离  $r > R_E$ , 因而单摆周期  $T_2$  较  $T_1$  要长一些。

在月球上,其重力加速度为

$$g_m = G_0 \frac{m_m}{R_m^2} = 1.62 \text{ m/s}^2$$

单摆周期 
$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_m}}$$

它较  $T_1$  大。

**【5-7】** 在单摆实验中,如把摆球从平衡位置拉开,使悬线与竖直方向成一小角  $\varphi$ , 然后放手任其摆动。若以放手之时为计时起点,试问此  $\varphi$  角是否就是振动的初相位? 摆球绕悬点转动的角速度是否就是振动的角频率?

答  $\varphi$  角不是振动的初相位。此小角  $\varphi$  是初始时刻的摆角,而不是初相位。按题条件,根据

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

有  $t=0, \theta=\theta_m$ , 则

$$\cos \phi_0 = 1$$

$\phi_0$  可取 0 或  $\pi$ , 它才是初相位。在题中如从静止放手, 则  $\varphi = \theta_m$ 。

摆球绕悬点转动的角速度不是振动的角频率。角频率是  $\omega$ , 它与摆长  $l$ 、重力加速度  $g$  有关,

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

而转动角速度为

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_m \sin(\omega t + \phi_0)$$

**【5-8】** 有两个摆长不同的单摆作简谐运动, 设  $l_A = 2l_B$ 。把这两个单摆向右拉开一个相同的小角度  $\varphi$ , 然后释放任其自由摆动。

(1) 这两个单摆在刚释放时相位是否相同? (2) 当单摆 B 到达平衡位置并向左运动时, 单摆 A 大致在什么位置和向什么方向运动? A 比 B 的相位超前还是落后? 超前或落后多少? (3) 自释放后, A、B 经过多长时间后以相反的相位相遇? A、B 经过多长时间后以同相位相遇?

答 对于单摆, 有  $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi_0)$ , 其中  $\omega = \sqrt{g/l}$ 。题中  $\omega_A = \sqrt{g/l_A}$ ,  $\omega_B = \sqrt{g/l_B}$ 。

(1) 相位相同。刚释放,  $t=0$ , 初相位相同, 均为零。

(2) 因为  $l_A > l_B$ , 所以  $\omega_A < \omega_B$ 。当  $\omega_B t = \frac{\pi}{2}$  时,  $\omega_A t < \frac{\pi}{2}$ , 可见单摆 A 大致在  $\varphi$  到平衡位置之间, 向左方平衡位置处运动。

单摆 A 比单摆 B 的相位落后。落后

$$\begin{aligned}\omega_B t - \omega_A t &= (\omega_B - \omega_A)t = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\omega_B t \\ &= \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \pi\end{aligned}$$

(3) 自释放后两单摆以相反相位相遇, 应满足

$$\omega_B t + \omega_A t = 2\pi$$

解得

$$t = \frac{2\pi}{\omega_B + \omega_A} = \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{2})\omega_A} = 2\pi(\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{2l_B}{g}}$$

两单摆以同相位相遇, 应满足

$$\omega_B t - \omega_A t = 2k\pi$$

取  $k=1$ , 有

$$t = \frac{2\pi}{\omega_B - \omega_A} = \frac{2\pi}{(\sqrt{2} - 1)\omega_A} = 2\pi(\sqrt{2} + 1) \sqrt{\frac{2l_B}{g}}$$

**【5-9】** 物体作简谐运动的  $x-t$  图如图 5-4 所示。分别写出这些简谐运动的表达式。

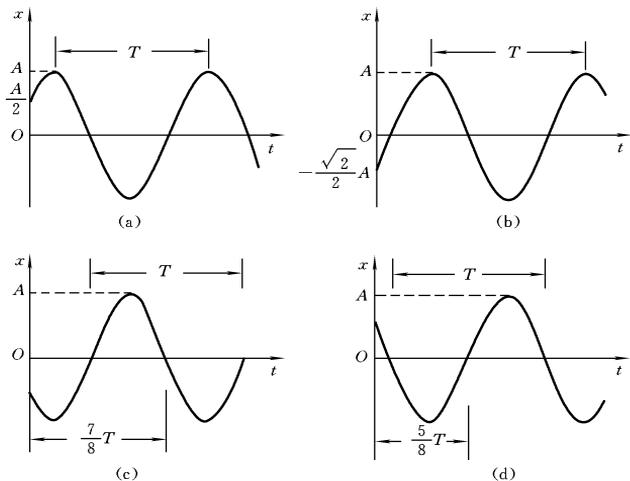


图 5-4

答 由  $x-t$  曲线写出简谐运动表示式,关键是确定初相位。设

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right)$$

图 5-4(a): 当  $t=0$  时,  $x = \frac{A}{2}$ , 有

$$\frac{1}{2} = \cos\phi_0, \quad \phi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$$

由  $x-t$  曲线知物体将向  $x$  轴正向运动,由旋转矢量法可判定  $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$ , 所以

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

图 5-4(b): 当  $t=0$  时, 有

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\phi_0, \quad \phi_0 = \pm \frac{3\pi}{4}$$

由图 5-4(b) 知, 当  $t$  刚大于零时, 物体将向  $x$  轴正向运动, 由旋转矢量法可判定  $\phi_0 = -\frac{3\pi}{4}$  (或  $\frac{5\pi}{4}$ ), 所以

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

图 5-4(c): 由图 5-4(c) 的图形和所标时间可推知, 当时间大于零而物体第一次到达  $x = -A$  时的时间  $t$  为

$$t = \frac{7}{8}T - \frac{3}{4}T = \frac{1}{8}T$$

即有  $-A = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{8} + \phi_0\right)$

$$-1 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \phi_0\right)$$

可得  $\frac{\pi}{4} + \phi_0 = \pi, \quad \phi_0 = \frac{3}{4}\pi$

所以  $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3}{4}\pi\right)$

图 5-4(d): 对应时间正轴物体在曲线上第一个最低点的时间为

$$t = \frac{5}{8}T - \frac{T}{4} = \frac{3}{8}T$$

可得  $-1 = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{3}{8}T + \phi_0\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \phi_0\right)$

$$\phi_0 = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

所以  $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$

**【5-10】** 对于频率不同的两个简谐运动, 初相位相等, 能否说这两个简谐运动是同相的? 如图 5-5 中各图内的两条曲线表示两个简谐运动, 试说明其频率、振幅、初相位三个量中哪个相等, 哪个

不相等。

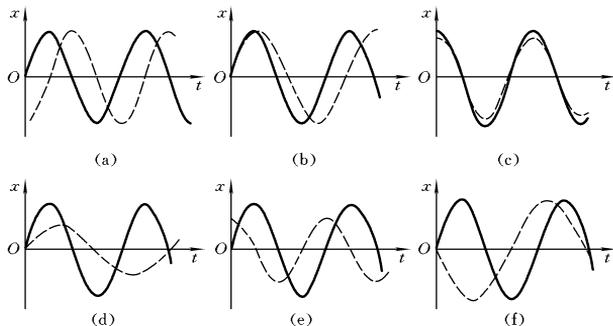


图 5-5

答 不能说这两个简谐运动是同相的。因为相位定义为  $\omega t + \phi_0$ ， $\phi_0$  虽同但  $\omega$  不同，任意时刻  $t$  并不同相。

图 5-5(a)：频率、振幅相等，初相位不等。

图 5-5(b)：振幅、初相位相等，频率不等。

图 5-5(c)：频率、初相位相等，振幅不等。

图 5-5(d)：初相位相等，频率、振幅不等。

图 5-5(e)：频率相等，振幅、初相位不等。

图 5-5(f)：振幅相等，频率、初相位不等。

**【5-11】** 在电梯中并排悬挂一弹簧振子和一单摆，在它们的振动过程中，电梯突然从静止开始自由下落。试分别讨论两个振动系统的运动情况。

答 弹簧振子在自由下落的电梯中以电梯为参考系，振子除受重力  $mg$  作用外，还受惯性力  $-mg$ 、弹性力  $-kx$  的作用。以弹簧原长处为坐标原点， $x$  轴向下为正，运动方程为

$$mg - mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{即} \quad -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

可见弹簧振子作频率不变的简谐运动,平衡位置在弹簧原长处。

对于单摆,若电梯作自由落体运动时,单摆摆动但并未达到最高点,则单摆具有一定的速度 $v$ ,也有一定的向心加速度 $a_n = \frac{v^2}{l}$ 。以电梯为参考系,摆球受三个力:重力 $mg$ ,惯性力 $-mg$ ,绳的张力 $F_T$ 。合力为 $F_T$ ,沿绳子方向。摆球此时具有切向速度,又受到与运动方向垂直的合力 $F_T$ 的作用,所以摆球不再相对电梯作来回摆动,而是作圆周运动。

若电梯作自由落体运动时,单摆摆球正好达到最大角位移处,此时摆球相对电梯的速度为零,因此向心加速度 $a_n = 0$ ,所以绳上的张力 $F_T = 0$ 。这样,摆球只受到两个力:重力 $mg$ ,方向向下;惯性力 $-mg$ ,方向向上;合力则为零。相对电梯而言,摆球处于静止状态。

**【5-12】** 弹簧振子的无阻尼自由振动是简谐运动,同一弹簧振子在简谐策动力持续作用下的稳态受迫振动也是简谐运动,这两种简谐运动有什么不同?

答 无阻尼自由振动角频率、周期由系统本身性质所决定。振幅 $A$ 、初相位 $\phi_0$ 由初始条件,即由振子初始状态决定。

稳态受迫振动角频率为外来简谐策动力角频率。振幅和初相位不取决于振子的初始状态,而是依赖于振子性质、阻尼大小和策动力的特征。

## 习 题 解 答

**【5-1】** 质量为 $10\text{ g}$ 的小球与轻弹簧组成的系统,按

$$x = 0.5 \times 10^{-2} \cos\left(8\pi t/s + \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$$

的规律而振动,式中 $t$ 以 $\text{s}$ 为单位。试求:(1)振动的角频率、周期、振幅、初相、速度及加速度的最大值;(2) $t = 1\text{ s}$ 、 $2\text{ s}$ 、 $10\text{ s}$ 等时刻的相

位各为多少? (3) 分别画出位移、速度、加速度与时间的关系曲线。

解 (1) 将  $x = 0.5 \times 10^{-2} \cos\left(8\pi t/s + \frac{\pi}{3}\right)$  m 与简谐运动位移的一般表达式  $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$  比较, 可得振动的振幅  $A = 0.5 \times 10^{-2}$  m, 角频率  $\omega = 8\pi \text{ s}^{-1} = 25.1 \text{ s}^{-1}$ , 初相  $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ , 周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8\pi} \text{ s} = 0.25 \text{ s}$$

从而有速度最大值

$$v_m = \omega A = 25.1 \times 0.5 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 0.126 \text{ m/s}$$

加速度最大值

$$a_m = \omega^2 A = 25.1^2 \times 0.5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 = 3.16 \text{ m/s}^2$$

(2) 相位  $(\omega t + \phi_0) = \left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ 。将  $t = 1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 10 \text{ s}$  分别代入, 得相位分别为  $\frac{25}{3}\pi, \frac{49}{3}\pi, \frac{241}{3}\pi$ 。

(3) 振动的位移、速度、加速度与时间的关系曲线如图 5-6 所示。

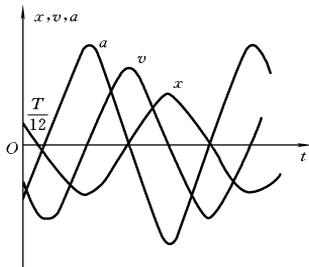


图 5-6

**【5-2】** 有一个和轻弹簧相连的小球, 沿  $Ox$  轴作振幅为  $A$  的简谐运动, 其表达式用余弦函数表示。当  $t = 0$  时, 球的运动状态

为：(1)  $x_0 = -A$ ；(2) 过平衡位置向  $x$  正方向运动；(3) 过  $x = \frac{A}{2}$  处向  $x$  负方向运动；(4) 过  $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$  处向  $x$  正方向运动。试用矢量图示法确定相应的初相的值，并写出振动表达式。

解 确定相应初相值的矢量图及振动表达式如图 5-7 所示。

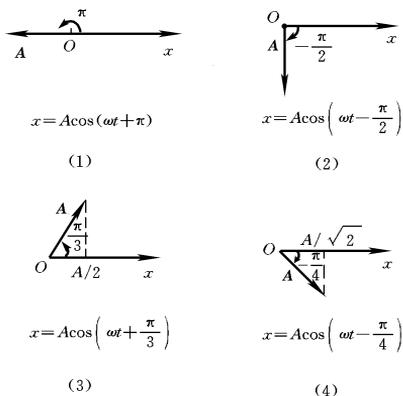


图 5-7

**【5-3】** 一质量为 10 g 的物体作简谐运动，其振幅为 24 cm，周期为 4.0 s，当  $t=0$  时，位移为 +24 cm。求：(1)  $t=0.5$  s 时，物体所在位置；(2)  $t=0.5$  s 时，物体所受力的方向与大小；(3) 由起始位置运动到  $x=12$  cm 处所需的最少时间；(4) 在  $x=12$  cm 处，物体的速度、动能以及系统的势能和总能量。

解 已知  $A=0.24$  m,  $T=4.0$  s, 角频率

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.0} \text{ s}^{-1} = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$$

简谐运动可表示为

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0.24\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \phi_0\right)$$

$t=0$  时,  $x_0=0.24$  m, 因此有

$$0.24 = 0.24\cos\phi_0, \quad \phi_0 = 0$$

简谐运动表达式即为

$$x = 0.24\cos\frac{\pi}{2}t$$

(1)  $t=0.5$  s 时, 物体的坐标为

$$x = 0.24\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 0.5\right) \text{ m} = 0.17 \text{ m}$$

(2) 根据简谐运动加速度与位移的关系可得  $t=0.5$  s 时的加速度为

$$\begin{aligned} a &= -\omega^2 x = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x = -\left(\frac{3.14}{2}\right)^2 \times 0.17 \text{ m/s}^2 \\ &= -0.42 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

物体所受力的大小

$$F = m|a| = 10 \times 10^{-3} \times 0.42 \text{ N} = 4.2 \times 10^{-3} \text{ N}$$

方向与  $x$  轴方向相反。

(3) 将  $x=0.12$  m 代入位移表达式, 有

$$0.12 = 0.24\cos\frac{\pi}{2}t, \quad \cos\frac{\pi}{2}t = \frac{1}{2}$$

最小相位为  $\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{3}$

最短时间为  $t = \frac{2}{3} \text{ s} = 0.67 \text{ s}$

(4) 物体的速度

$$\begin{aligned} v &= -\omega A\sin(\omega t + \phi_0) \\ &= -\frac{3.14}{2} \times 0.24 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{3}\right) \text{ m/s} = -0.326 \text{ m/s} \end{aligned}$$

物体的动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times (-0.326)^2 \text{ J} = 5.31 \times 10^{-4} \text{ J}$$

由  $\omega = \sqrt{k/m}$  得系统的势能

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times \left( \frac{3.14}{2} \right)^2 \times 0.12^2 \text{ J} = 1.77 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

系统的总能量

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = (5.31 \times 10^{-4} + 1.77 \times 10^{-4}) \text{ J} \\ &= 7.08 \times 10^{-4} \text{ J} \end{aligned}$$

**【5-4】** 一物体放在水平木板上,此板沿水平方向作简谐运动,频率为 2 Hz,物体与板面间的静摩擦系数为 0.50。问:(1)要使物体在板上不致滑动,振幅的最大值为若干?(2)若令此板改作竖直方向的简谐运动,振幅为 0.05 m,要使物体一直保持与板接触的最大频率是多少?

解 (1) 因为物体是在静摩擦力  $f$  作用下作简谐运动的,所以有

$$f = ma = -m\omega^2 x$$

而最大静摩擦力

$$f_{\max} = \mu mg$$

要物体不致在木板上滑动,必须满足条件  $ma_{\max} \leq f_{\max}$ , 所以

$$m\omega^2 A \leq \mu mg$$

$$A \leq \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{4\pi^2 \nu^2} = \frac{0.50 \times 9.8}{4 \times 3.14^2 \times 2^2} \text{ m} = 0.031 \text{ m}$$

(2) 物体运动到最高点时,加速度最大,方向向下。由牛顿第二定律有

$$ma_{\max} = mg - N$$

$N$  是木板对物体的支持力。从而得

$$N = m(g - a_{\max}) = m(g - \omega^2 A) = m(g - 4\pi^2 \nu^2 A)$$

要使物体保持与板接触,则需  $N > 0$ , 所以

$$g - 4\pi^2 \nu^2 A > 0$$

$$\nu < \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2 \times 3.14} \sqrt{\frac{9.8}{0.05}} \text{ Hz} = 2.2 \text{ Hz}$$

**【5-5】** 在一平板上放质量  $m=1.0\text{ kg}$  的物体, 平板在竖直方向上下作简谐运动, 周期  $T=0.5\text{ s}$ , 振幅  $A=0.02\text{ m}$ 。试求: (1) 在位移最大时物体对平板的正压力; (2) 平板应以多大振幅作振动才能使重物开始跳离平板。

解 (1) 如题 5-4 所述, 物体运动到最高点时, 平板对物体的支持力

$$\begin{aligned} N &= m(g - A\omega^2) = m\left(g - \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \\ &= 1.0 \times \left(9.8 - \frac{4 \times 3.14^2 \times 0.02}{0.5^2}\right) \text{ N} = 6.64 \text{ N} \end{aligned}$$

物体对平板的正压力与  $N$  大小相等, 方向相反。

物体运动到最低点时, 加速度也是最大的, 但方向向上, 由牛顿第二定律得

$$ma_{\max} = N' - mg$$

所以

$$\begin{aligned} N' &= m(g + a_{\max}) = m(g + \omega^2 A) = m\left(g + \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \\ &= 1.0 \left(9.8 + \frac{4 \times 3.14^2 \times 0.02}{0.5^2}\right) \text{ N} = 12.96 \text{ N} \end{aligned}$$

物体对平板的正压力与  $N'$  大小相等, 方向相反。

(2) 当  $N=0$  时, 物体开始跳离平板, 所以这时的振幅满足条件

$$\begin{aligned} N &= m\left(g - \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right) = 0 \\ A &= \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{0.5^2 \times 9.8}{4 \times 3.14^2} \text{ m} = 0.062 \text{ m} \end{aligned}$$

**【5-6】** 图 5-8 所示的提升运输设备, 重物的质量为  $1.5 \times 10^4\text{ kg}$ , 当重物以速度  $v=15\text{ m/min}$  匀速下降时, 机器发生故障, 钢丝绳突然被轧住。此时, 钢丝绳相当于劲度系数  $k=5.78 \times 10^6\text{ N/m}$  的弹簧。求因重物的振动而引起钢丝绳内的最大张力。

解 钢丝绳被轧住后, 重物在弹性力的作用下, 以它在钢丝绳

被轧住时的位置为平衡位置,在竖直方向上作简谐运动。它在钢丝绳被轧住时的速度为振动的速度幅值,因此有

$$v = v_{\max} = \omega A$$

当重物振动到最低点时,钢丝绳内张力最大,设为  $F_{\max}$ , 则

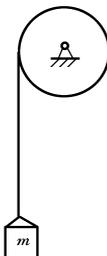
$$F_{\max} - mg = ma_{\max} = m\omega^2 A$$

$$F_{\max} = mg + m\omega^2 A = mg + m\omega^2 \frac{v}{\omega} = mg + m\omega v$$

将  $\omega = \sqrt{k/m}$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} F_{\max} &= mg + \sqrt{mk}v \\ &= \left( 1.5 \times 10^4 \times 9.8 + \sqrt{1.5 \times 10^4 \times 5.78 \times 10^6} \times \frac{15}{60} \right) \text{ N} \\ &= 2.21 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

图 5-8



**【5-7】** 如图 5-9 所示, 两轮的轴互相平行, 相距为  $2d$ , 其转速相同, 转向相反。将质量为  $m$  的匀质木板放在两轮上, 木板与两轮间的摩擦系数均为  $\mu$ 。当木板偏离对称位置后, 它将如何运动? 如果是作简谐运动, 其周期是多少?

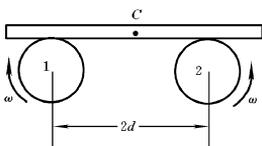


图 5-9

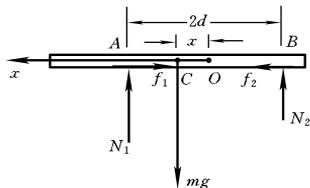


图 5-10

**解** 以两轮和木板的两切点连线  $AB$  的中点为坐标原点, 平行于板的运动方向作  $x$  轴(图 5-10)。设某一时刻木板重心的坐标为  $x$ , 其受力情况如图 5-10 所示。木板在竖直方向没有运动, 因此

$$N_1 + N_2 = mg$$

木板也没有转动,诸力对通过  $A$  点且与  $x$  轴垂直的水平轴的合力矩为零,因此

$$2dN_2 = mg(d - x), \quad N_2 = \frac{d - x}{2d}mg$$

$$N_1 = mg - N_2 = mg - \frac{d - x}{2d}mg = \frac{d + x}{2d}mg$$

作用于  $A$  和  $B$  的摩擦力分别为

$$f_1 = \mu N_1 = \frac{d + x}{2d}\mu mg, \quad f_2 = \mu N_2 = \frac{d - x}{2d}\mu mg$$

木板在水平方向上受到的合力

$$f = -f_1 + f_2 = -\frac{d + x}{2d}\mu mg + \frac{d - x}{2d}\mu mg = -\frac{\mu mg}{d}x$$

它的加速度

$$a = \frac{f}{m} = -\frac{\mu g}{d}x$$

木板的加速度与它的重心相对于原点(平衡位置)的位移成正比,而方向相反,因而它是作简谐运动,角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$$

周期即为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

**【5-8】** 如图 5-11 所示,轻质弹簧的一端固定,另一端系一轻绳,轻绳绕过滑轮连接一质量为  $m$  的物体,绳在轮上不打滑,使物体上下自由振动。已知弹簧的劲度系数为  $k$ ,滑轮的半径为  $R$ ,转动惯量为  $J$ 。(1)证明物体作简谐运动;(2)求物体的振动周期;(3)设  $t=0$  时,弹簧无伸缩,物体也无初速,写出物体的振动表达式。(设向下为坐标正方向。)

解 (1) 物体和滑轮的受力情况如图 5-12 所示。设某时刻物体加速度为  $a$ ,滑轮角加速度为  $\beta$ 。对物体应用牛顿第二定律,对滑轮应用转动定律,则有

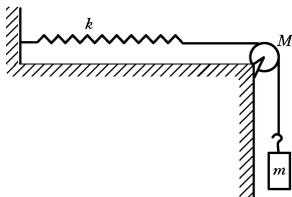


图 5-11

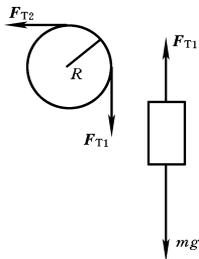


图 5-12

$$mg - F_{T1} = ma \quad (1)$$

$$(F_{T1} - F_{T2})R = J\beta = \frac{J}{R}a \quad (2)$$

设物体位于平衡位置时, 弹簧伸长量为  $l$ , 则因为这时  $a=0$ , 可得

$$mg = F_{T1} = F_{T2} = kl$$

当物体对平衡位置向下的位移为  $x$  时,

$$F_{T2} = k(l + x) = mg + kx \quad (3)$$

由式①、②、③解得

$$a = -\frac{k}{m + J/R^2}x$$

物体加速度与位移成正比, 方向相反, 所以它是作简谐运动。

(2) 物体振动的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + J/R^2}}$$

其振动周期即为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m + J/R^2}{k}}$$

(3)  $t=0$  时, 弹簧无伸长, 物体的位移  $x_0 = -l$ ; 物体无初速,  $v_0 = 0$ 。物体的振幅

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(-l)^2} = l = \frac{mg}{k}$$

因为  $\cos\phi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{-kl}{mg} = -1$

所以  $\phi_0 = \pi$

物体的振动表达式即为

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m + J/R^2}}t + \pi\right)$$

**【5-9】** 设想沿地球直径凿一隧道,并设地球为密度  $\rho=5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  的均匀球体。试证:(1)当无阻力时,一物体落入此隧道后将作简谐振动;(2)物体由地球表面落至地心的时间为  $t =$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 21 \text{ min}, \text{ 式中 } G \text{ 是引力常量。 (提示:物体在地球内部距}$$

球心  $r$  处所引力  $F = -G \frac{4\pi\rho m}{3}r$ 。)

解 (1) 质量为  $m$  的物体在地球内与地心相距为  $r$  时,它受到的引力

$$F = -G \frac{mM}{r^2}$$

负号表示物体受力方向与它相对于地心的位移方向相反。式中  $M$  是以地心为中心,以  $r$  为半径的球体内的质量,其值为

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

因此  $F = -\frac{4\pi G \rho m}{3}r$

物体的加速度  $a = \frac{F}{m} = -\frac{4\pi G \rho}{3}r$

$a$  与  $r$  的大小成正比,而方向相反,故物体在隧道内作简谐运动。

(2) 物体由地球表面向地心落去时,速度

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dv} \frac{dv}{dt} = a \frac{dr}{dv}$$

$$vdv = a dr = -\frac{4\pi G\rho}{3} r dr$$

$$\int_0^v v dv = -\frac{4\pi G\rho}{3} \int_R^r r dr$$

$$v = -\sqrt{\frac{4\pi}{3} G\rho(R^2 - r^2)}$$

由  $dr = v dt = -\sqrt{\frac{4\pi}{3} G\rho(R^2 - r^2)} dt$

有  $-\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{4\pi}{3} G\rho(R^2 - r^2)}} = \int_0^t dt$

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3 \times 3.14}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.5 \times 10^3}} \text{ s}$$

$$= 1\ 267 \text{ s} \approx 21 \text{ min}$$

**【5-10】** 一半径为  $R$  的光滑圆环以恒定的角速度  $\omega$  绕其竖直的直径旋转,圆环上套有一小珠。试求在  $R\omega^2 > g$  的情形下, (1) 小珠相对圆环的平衡位置(以小珠与圆心的连线同竖直直径之间的夹角  $\theta_0$  表示); (2) 小珠在平衡位置附近作微小振动的角频率。

解 (1) 小珠处于平衡位置时,受力情况如图5-13所示。 $N$  的竖直分量与小珠所受重力平衡,即

$$N \cos \theta_0 = mg$$

$N$  的水平分量提供小珠以  $r$  为半径在水平面上作匀速圆周运动所需之向心力。

$$N \sin \theta_0 = m r \omega^2 = m \omega^2 R \sin \theta_0, \quad N = m \omega^2 R$$

因此  $\cos \theta_0 = \frac{mg}{N} = \frac{mg}{m \omega^2 R} = \frac{g}{\omega^2 R}$

$$\theta_0 = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$$

(2) 假定小珠与圆心的连线同竖直直径之间的夹角增加一微小角度  $\theta$ , 忽略圆环对小珠作用力的变化, 则在竖直方向上小珠受

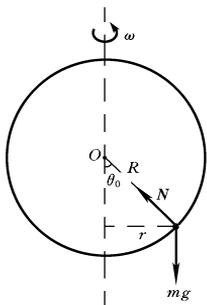


图 5-13

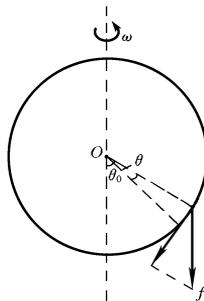


图 5-14

到方向向下的合力

$$f = mg - N\cos(\theta_0 + \theta)$$

因为  $\cos\theta \approx 1$ ,  $\sin\theta \approx \theta$ , 因此

$$\begin{aligned} f &= mg - N\cos\theta_0 + N\sin\theta_0 \cdot \theta \\ &= N\sin\theta_0 \cdot \theta = m\omega^2 R\sin\theta_0 \cdot \theta \end{aligned}$$

$f$  沿切向分力与  $\theta$  反向(图 5-14)。根据牛顿运动定律, 有

$$\begin{aligned} -f\sin(\theta_0 + \theta) &= mR \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ -m\omega^2 R\sin\theta_0 \cdot \theta \cdot \sin(\theta_0 + \theta) &= mR \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

展开  $\sin(\theta_0 + \theta)$ , 略去等号左方  $\theta^2$  项后得到

$$-\omega^2 \sin^2\theta_0 \cdot \theta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

因此小珠在平衡位置附近作微小振动的角频率为

$$\omega_0 = \omega \sin\theta_0 = \omega \sqrt{1 - \cos^2\theta_0} = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}} = \sqrt{\frac{\omega^4 R^2 - g^2}{\omega^2 R^2}}$$

**【5-11】** 一质量为  $m'$  的盘子系于竖直悬挂的轻弹簧下端, 弹簧的劲度系数为  $k$ (图 5-15)。现有一质量为  $m$  的物体自离盘  $h$  高处

自由落下掉在盘上,没有反弹,以物体掉在盘上的瞬时作为计时起点,求盘子的振动表达式。(取物体掉在盘子后的平衡位置为坐标原点,位移以向下为正。)

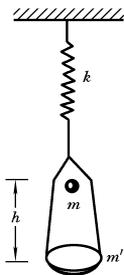


图 5-15

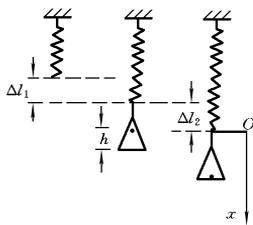


图 5-16

解 设空盘静止时,弹簧伸长  $\Delta l_1$ (图 5-16),则

$$m'g = k\Delta l_1 \quad (1)$$

物体与盘粘合后且处于平衡位置时,弹簧再伸长  $\Delta l_2$ ,则

$$(m + m')g = k(\Delta l_1 + \Delta l_2) \quad (2)$$

将式①代入式②得

$$mg = k\Delta l_2$$

物体从高度  $h$  处落到盘上时的速度

$$v = \sqrt{2gh}$$

与盘粘合时,服从动量守恒定律:

$$mv = (m + m')v'$$

此时盘的速度

$$v' = \frac{m}{m + m'}v = \frac{m}{m + m'}\sqrt{2gh}$$

取此时作为计时零点,物体与盘粘合后的平衡位置作为坐标原点,

坐标轴方向竖直向下。则  $t = 0$  时,  $x_0 = -\Delta l_2 = -\frac{mg}{k}$ ,  $v_0 = v' =$

$\frac{m}{m+m'}\sqrt{2gh}$ , 盘的振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}$$

所以振幅

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh/(m+m')^2}{k/(m+m')}} \\ &= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+m')g}} \end{aligned}$$

初相  $\phi_0$  满足

$$\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} = \sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

又由

$$x_0 < 0, \quad v_0 > 0$$

有

$$\pi < \phi_0 < \frac{3}{2}\pi$$

$$\phi_0 = \pi + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}}$$

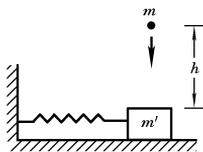
将已得出的  $A$ 、 $\omega$ 、 $\phi_0$  代入  $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$  中, 即可得出盘子的振动表达式为

$$\begin{aligned} x &= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m+m')g}} \\ &\quad \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+m'}}t + \arctan \sqrt{\frac{2kh}{(m+m')g}} + \pi\right) \end{aligned}$$

**【5-12】** 一个水平面上的弹簧振子, 弹簧的劲度系数为  $k$ , 所系物体的质量为  $m'$ , 振幅为  $A$ 。有一质量为  $m$  的小物体从高度  $h$  处自由下落(图 5-17)。当振子在最大位移处时, 物体正好落在  $m'$  上, 并粘在一起, 这时系统的振动周期、振幅和振动能量有何变化? 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在  $m'$  上, 这些量又怎样变化?

解 (1) 小物体落在大物体上以前, 振子的振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{k}}$$



小物体落在大物体上后, 振子的振动周期变为

图 5-17

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m + m'}{k}}$$

显然,  $T_1 > T$ 。

小物体落在大物体上以前, 在水平方向上的速度为零。如果小物体是在大物体位于最大位移处落在大物体上, 这时大物体在水平方向上的速度也为零。小物体落在大物体上后, 按动量守恒定律, 两个物体的速度仍为零。取这时为计时零点, 系统的初始状态为

$$|x_0| = A, \quad v_0 = 0$$

系统的振幅

$$A_1 = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_1^2} = |x_0| = A$$

小物体落下对系统振幅没有影响。系统振动能量与振幅平方成正比, 因而振动能量也不变。

(2) 如果小物体是在振子到达平衡位置时落在大物体上, 系统振动周期仍变为

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m + m'}{k}}$$

这时大物体在水平方向上的速度的绝对值

$$|v| = v_m = A\omega$$

在两物体的碰撞过程中, 系统水平方向动量守恒。设碰撞后两物体的共同速度为  $v_2$ , 则

$$(m + m')v_2 = m'v$$

所以 
$$|v_2| = \frac{m'}{m+m'}|v| = \frac{m'}{m+m'}A\omega$$

取这时为计时零点,则系统的初始状态为

$$x_0 = 0, \quad |v_0| = |v_2| = \frac{m'}{m+m'}A\omega$$

所以系统的振幅

$$\begin{aligned} A_2 &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_2^2}} = \frac{|v_0|}{\omega_2} = \frac{m'}{m+m'} \frac{\omega}{\omega_2} A = \frac{m'}{m+m'} \frac{T_2}{T} A \\ &= \frac{m'}{m+m'} \sqrt{\frac{m+m'}{m'}} A = \sqrt{\frac{m'}{m+m'}} A < A \end{aligned}$$

可见振幅变小了。振动能量

$$E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}k \frac{m'}{m+m'} A^2 = \frac{m'}{m+m'} E < E$$

可见振动能量也变小了。

**【5-13】** 一单摆的摆长  $l=1\text{ m}$ , 摆球质量  $m=0.01\text{ kg}$ 。开始时处在平衡位置。(1)若给小球一个向右的水平冲量  $I=2.5 \times 10^{-3}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 。设摆角向右为正。如以刚打击后为  $t=0$ , 求振动的初相位及振幅;(2)若冲量是向左的, 则初相位为多少?

解 (1) 根据动量定理, 小球被打击后的速度

$$v_0 = \frac{I}{m} = \frac{2.5 \times 10^{-3}}{0.01} \text{ m/s} = 0.25 \text{ m/s}$$

根据初始条件  $x_0=0, v_0>0$  可知

$$\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \rightarrow -\infty$$

初相位  $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 。

设小球所达最大高度为  $h$ 。根据机械能守恒定律, 有

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{0.25^2}{2 \times 9.8} \text{ m} = 0.32 \times 10^{-2} \text{ m}$$

由图 5-18 可知

$$\cos\theta_m = \frac{l-h}{l} = \frac{1-0.32 \times 10^{-2}}{1} = 0.9968$$

$$\theta_m = 4.58^\circ = 0.08 \text{ rad}$$

(2) 若冲量是向左的, 则  $v_0 < 0$ ,

$$\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \rightarrow \infty$$

初相位  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ 。

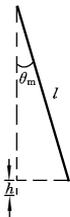


图 5-18

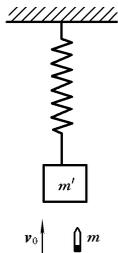


图 5-19

**【5-14】** 一弹簧振子由劲度系数为  $k$  的弹簧和质量为  $m'$  的物块组成, 将弹簧一端与顶板相连, 如图 5-19 所示。开始时物块静止, 一颗质量为  $m$ 、速度为  $v_0$  的子弹由下而上射入物块, 并留在物块中。(1) 求振子以后的振动振幅与周期。(2) 求物块从初始位置运动到最高点所需的时间。

解 (1) 子弹射入并留在物块中后, 系统的振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+m'}{k}}$$

设物块静止时, 弹簧伸长  $\Delta l_1$ , 则

$$m'g = k\Delta l_1$$

①

子弹射入物块中后且处于平衡位置时, 弹簧再伸长  $\Delta l_2$ , 则

$$(m + m')g = k(\Delta l_1 + \Delta l_2) \quad (2)$$

将式①代入式②得

$$mg = k\Delta l_2$$

子弹射入物块前后,服从动量守恒定律,即

$$mv_0 = (m + m')v'$$

此时物块的振动速度

$$v' = \frac{m}{m + m'}v_0$$

取此时作为计时零点,子弹射入物块后的平衡位置作为坐标原点,

坐标轴方向竖直向上,则  $t = 0$  时,  $x_0 = \Delta l_2 = \frac{mg}{k}$ ,  $v'_0 = v' =$

$\frac{m}{m + m'}v_0$ 。系统的振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m'}}$$

所以振幅

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v'}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{m^2v_0^2/(m + m')^2}{k/(m + m')}} \\ &= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{(m + m')g^2}} \end{aligned}$$

(2) 子弹射入后,系统振动的初相  $\phi_0$  满足

$$\tan\phi_0 = -\frac{v'}{\omega x_0} = -\sqrt{\frac{kv_0^2}{(m + m')g^2}} = -\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m + m'}}$$

因为  $x_0 > 0, v' > 0$ , 故

$$-\frac{\pi}{2} < \phi_0 < 0$$

$$\phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m + m'}}\right) = -\arctan\left(\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m + m'}}\right)$$

当物体运动到最高点时,相位

$$(\omega t + \phi_0) = 0$$

所以所需时间为

$$t = -\frac{\phi_0}{\omega} = \sqrt{\frac{m+m'}{k}} \arctan\left(\frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{k}{m+m'}}\right)$$

**【5-15】** 一弹簧振子作简谐运动, 振幅  $A=0.20$  m, 如弹簧的劲度系数  $k=2.0$  N/m, 所系物体的质量  $m=0.50$  kg, 试求: (1) 当动能和势能相等时, 物体的位移是多少? (2) 设  $t=0$  时, 物体在正方向最大位移处, 达到动能和势能相等处所需的时间是多少? (在一个周期内。)

解 (1)  $E_k + E_p = E = \frac{1}{2}kA^2$

当  $E_k = E_p$  时,  $E_p = \frac{1}{2}E$ 。即

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}kA^2$$

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0.20}{1.41} \text{ m} = \pm 0.14 \text{ m}$$

(2) 振子的角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.0}{0.50}} \text{ s}^{-1} = 2.0 \text{ s}^{-1}$$

$t=0$  时,  $x_0=A$ , 故  $\phi_0=0$ 。动能和势能相等时, 物体的坐标

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$$

即  $A\cos\omega t = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos\omega t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

在一个周期内, 相位变化为  $2\pi$ 。故

$$\omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

时间则为  $t_1 = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{3.14}{4 \times 2.0} \text{ s} = 0.39 \text{ s}$

$$t_2 = \frac{3\pi}{4\omega} = 3t_1 = 3 \times 0.39 \text{ s} = 1.2 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{5\pi}{4\omega} = 5t_1 = 5 \times 0.39 \text{ s} = 2.0 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{7\pi}{4\omega} = 7t_1 = 7 \times 0.39 \text{ s} = 2.7 \text{ s}$$

**【5-16】** 一水平放置的弹簧振子, 已知物体经过平衡位置向右运动时速度  $v=1.0 \text{ m/s}$ , 周期  $T=1.0 \text{ s}$ 。求再经过  $1/3 \text{ s}$  时间, 物体的动能是原来的多少倍。弹簧的质量不计。

解 取  $x_0=0, v_0=v=1.0 \text{ m/s}$  时为计  
零点, 由矢量图示法可以确定(图 5-20)

初相  $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 。物体的动能可表示为

图 5-20

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{2} m v_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) \\ &= \frac{1}{2} m v_m^2 \sin^2\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$t=0$  时,  $E_{k0} = \frac{1}{2} m v_m^2$ 。  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时,

$$E_k = \frac{1}{2} m v_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} m v_m^2 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} E_{k0}$$

**【5-17】** 质量为  $m=5.88 \text{ kg}$  的物体, 挂在弹簧上, 让它在竖直方向上作自由振动。在无阻尼情况下, 其振动周期为  $T_0 = 0.4\pi \text{ s}$ ; 在阻力与物体运动速度成正比的某一介质中, 它的振动周期为  $T=0.5\pi \text{ s}$ 。求当速度为  $0.01 \text{ m/s}$  时, 物体在阻尼介质中所受的阻力。

解 在阻力与运动速度成正比的阻尼振动中, 角频率为

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$$

由此解得  $\gamma = 4\pi m \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$

物体速度为  $v$  时, 所受阻力的大小为

$$f = \gamma v = 4\pi m v \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

$$= 4\pi \times 5.88 \times 0.01 \sqrt{\frac{1}{(0.4\pi)^2} - \frac{1}{(0.5\pi)^2}} \text{ N} = 0.353 \text{ N}$$

**【5-18】** 一摆在空中振动,某时刻,振幅为  $A_0 = 0.03 \text{ m}$ ,经  $t_1 = 10 \text{ s}$  后,振幅变为  $A_1 = 0.01 \text{ m}$ 。问:由振幅为  $A_0$  时起,经多长时间,其振幅减为  $A_2 = 0.003 \text{ m}$ ?

解 在摆的阻尼振动中,振幅随时间衰减的规律为

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

因此

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$

由此解得

$$\beta = \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{10} \ln \frac{0.03}{0.01} \text{ s}^{-1} = 0.11 \text{ s}^{-1}$$

又

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$

所以 
$$t_2 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{A_0}{A_2} = \frac{1}{0.11} \ln \frac{0.03}{0.003} \text{ s} = 21 \text{ s}$$

**【5-19】** 试用最简单的方法求出下列两组简谐运动合成后所得合振动的振幅(式中  $t$  以 s 计,  $x$  以 m 计):

$$\text{第一组} \begin{cases} x_1 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \\ x_2 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{7}{3}\pi\right) \end{cases}$$

$$\text{第二组} \begin{cases} x_1 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \\ x_2 = 0.05 \cos\left(3t + \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}$$

解 这两组简谐运动都是同方向、同频率的简谐运动,合成的结果与每组简谐运动的相位差有关。

第一组: 
$$\Delta\phi = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

合振动振幅为

$$A = A_1 + A_2 = (0.05 + 0.05) \text{ m} = 0.10 \text{ m}$$

第二组: 
$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$$

合振动振幅为

$$A = A_1 - A_2 = (0.05 - 0.05) \text{ m} = 0$$

**【5-20】** 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动:

$$x_1 = 0.04\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2 = 0.03\cos\left(2t - \frac{5}{6}\pi\right)$$

试求其合振动的振幅和初相位(式中  $x$  以 m 计,  $t$  以 s 计)。

解 两振动的频率相同, 它们的相位差

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = -\pi$$

因而合振动的振幅

$$A = A_1 - A_2 = (0.04 - 0.03) \text{ m} = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

合振动的初相为  $\phi_0$ , 则

$$\begin{aligned} \tan\phi_0 &= \frac{A_1\sin\phi_{01} + A_2\sin\phi_{02}}{A_1\cos\phi_{01} + A_2\cos\phi_{02}} \\ &= \frac{0.04\sin\frac{\pi}{6} + 0.03\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}{0.04\cos\frac{\pi}{6} + 0.03\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)} = 0.581 \\ \phi_0 &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

**【5-21】** 有两个同方向的简谐运动, 它们的表达式如下:

$$x_1 = 0.05\cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right), \quad x_2 = 0.06\cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

(1) 求它们合成振动的振幅和初相位。(2) 若另有一振动  $x_3 = 0.07\cos(10t + \phi_0)$ , 问  $\phi_0$  为何值时,  $x_1 + x_3$  的振幅为最大;  $\phi_0$  为何值时,  $x_2 + x_3$  的振幅为最小。(式中  $x$  以 m 计,  $t$  以 s 计。)

解 (1) 它们合成振动的振幅

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})} \\
 &= \sqrt{0.05^2 + 0.06^2 + 2 \times 0.05 \times 0.06\cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi\right)} \text{ m} \\
 &= 0.078 \text{ m}
 \end{aligned}$$

合成振动的初相  $\phi_0$  可由下式求出

$$\begin{aligned}
 \tan\phi_0 &= \frac{A_1\sin\phi_{10} + A_2\sin\phi_{20}}{A_1\cos\phi_{10} + A_2\cos\phi_{20}} \\
 &= \frac{0.05\sin\frac{3}{4}\pi + 0.06\sin\frac{1}{4}\pi}{0.05\cos\frac{3}{4}\pi + 0.06\cos\frac{1}{4}\pi} = 11 \\
 \phi_0 &= 84^\circ 48'
 \end{aligned}$$

(2) 当  $\phi_0 - \phi_{01} = \pm 2k\pi$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 时, 即

$$\phi_0 = \pm 2k\pi + \phi_{01} = \pm 2k\pi + \frac{3}{4}\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

时,  $x_1 + x_3$  的振幅为最大, 取  $k=0$ , 则  $\phi_0 = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$ 。

当  $\phi_0 - \phi_{02} = \pm (2k+1)\pi$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 时, 即

$$\phi_0 = \pm (2k+1)\pi + \phi_{02} = \pm (2k+1)\pi + \frac{1}{4}\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

时,  $x_2 + x_3$  的振幅为最小。取  $k=0$ , 则  $\phi_0 = \frac{5}{4}\pi = 225^\circ$  (或  $\phi_0 = -\frac{3}{4}\pi = -135^\circ$ )。

**【5-22】** 两个同方向的简谐运动, 周期相同, 振幅为  $A_1=0.05$  m,  $A_2=0.07$  m, 组成一个振幅为  $A=0.09$  m 的简谐运动。求两个分振动的相位差。

解  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$

$$\cos\Delta\phi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = \frac{0.09^2 - 0.05^2 - 0.07^2}{2 \times 0.05 \times 0.07} = 0.1$$

$$\Delta\phi = 84^\circ 16'$$

**【5-23】** 当两个同方向的简谐运动合成为一个振动时, 其振

动表达式为  $x = A \cos 2.1t \cos 50.0t$ , 式中  $t$  以  $s$  为单位。求各分振动的角频率和合振动的拍的周期。

解 两个同方向不同频率的简谐运动合成后的振动表达式为

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \phi_0\right)$$

与

$$x = A \cos 2.1t \cos 50.0t$$

比较, 可得

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2.1 \text{ s}^{-1}, \quad \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 50.0 \text{ s}^{-1}$$

由此两方程可解得两分振动的角频率为

$$\omega_1 = 47.9 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 52.1 \text{ s}^{-1}$$

合振动的拍的频率为

$$\nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

拍的周期则为

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2 \times 3.14}{52.1 - 47.9} \text{ s} = 1.5 \text{ s}$$

**【5-24】** 一质点同时参与两个互相垂直的简谐运动, 其表达式分别为

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{及} \quad y = 2A \cos(2\omega t + 2\phi_0)$$

若  $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ , 试用消去法求出合振动的轨迹方程, 并判断这是一条什么曲线。

解 由  $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$  得

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{x}{A}$$

$$y = 2A \cos(2\omega t + 2\phi_0) = 2A \cos 2(\omega t + \phi_0)$$

$$= 2A [2\cos^2(\omega t + \phi_0) - 1] = 2A \left( \frac{2x^2}{A^2} - 1 \right) = \frac{4x^2}{A} - 2A$$

这是一条抛物线。

**【5-25】** 一质点同时作两个相互垂直的振动。设此两振动的

振幅相同, 频率为 2 : 3, 初相都为零, 求该质点的运动轨迹。

解 设两个相互垂直的振动为

$$x = A\cos 2\omega t, \quad y = A\cos 3\omega t$$

于是有

$$\cos 2\omega t = x/A$$

$$\sin 2\omega t = (1 - \cos^2 2\omega t)^{1/2} = (1 - x^2/A^2)^{1/2}$$

又

$$\cos 2\omega t = 2\cos^2 \omega t - 1 = \frac{x}{A}$$

所以

$$\cos \omega t = \left( \frac{A+x}{2A} \right)^{1/2}$$

$$\sin \omega t = (1 - \cos^2 \omega t)^{1/2} = \left( 1 - \frac{A+x}{2A} \right)^{1/2} = \left( \frac{A-x}{2A} \right)^{1/2}$$

于是可得

$$\begin{aligned} y &= A\cos 3\omega t = A\cos(2\omega t + \omega t) \\ &= A(\cos 2\omega t \cos \omega t - \sin 2\omega t \sin \omega t) \\ &= A \left[ \frac{x}{A} \left( \frac{A+x}{2A} \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{x^2}{A^2} \right)^{1/2} \left( \frac{A-x}{2A} \right)^{1/2} \right] \\ &= \left( \frac{A+x}{2A} \right)^{1/2} (2x - A) \end{aligned}$$

此方程描述的轨迹如图 5-21 所示。

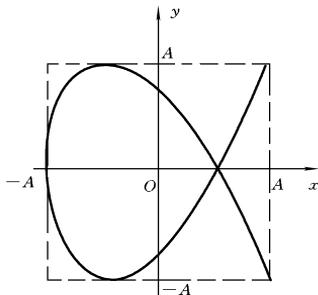


图 5-21

# 第六章 机械波

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 机械波的产生

机械振动在介质中的传播形成机械波。机械波产生的条件是存在波源和介质。

### 2. 波速、波长、波的周期和频率

波速  $u$ : 振动的传播速度, 其值取决于介质的性质。

液体和气体中的波速  $u = \sqrt{B/\rho}$

理想气体中的声速  $u = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/M}$

固体中的波速

$$u = \sqrt{G/\rho} \quad (\text{横波}), \quad u = \sqrt{Y/\rho} \quad (\text{纵波})$$

弦线中的波速  $u = \sqrt{F/\mu}$

波长  $\lambda$ : 波线上相位差为  $2\pi$  的两个质点间的距离。

波的周期  $T$ : 一个完整的波通过波线上某点所需的时间。

波的频率  $\nu$ : 单位时间内通过波线上某点的完整波的数目。

这四个量的关系是  $u = \lambda/T = \lambda\nu$

### 3. 平面简谐波的波动表达式

$$y(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

#### 4. 波的能量

波的能量密度  $w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$

平均能量密度  $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$

平均能流  $\bar{P} = \bar{w} u S$

波的强度  $I = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$

#### 5. 波的吸收

平面波振幅衰减规律  $A = A_0 e^{-\alpha x}$

平面波强度衰减规律  $I = I_0 e^{-2\alpha x}$

#### 6. 声波

声压振幅  $p_m = \rho u \omega A$

声强级  $I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$

#### 7. 波的干涉

(1) 相干波源 频率相同、振动方向相同、相位差恒定的波源。

(2) 合振幅最大、最小的条件

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \\ &= \begin{cases} \pm 2k\pi & \text{最大} \\ \pm (2k+1)\pi & \text{最小} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$\phi_{10} = \phi_{20}$  时,

$$\delta = r_1 - r_2 = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{最大} \\ \pm (k + 1/2)\lambda & \text{最小} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

#### 8. 驻波

驻波方程  $y = \left( 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \cos \frac{2\pi}{T} t$

波腹位置  $x = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

波节位置  $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k=0,1,2,\dots)$

### 9. 多普勒效应

(1) 波源不动, 观察者以速度  $v_R$  相对于介质运动

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_S$$

(2) 观察者不动, 波源以速度  $v_S$  相对于介质运动

$$\nu_R = \frac{u}{u - v_S} \nu_S$$

(3) 观察者与波源同时相对于介质运动

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

## 思考题解答

**【6-1】** 设某一时刻的横波波形曲线如图 6-1 所示, 水平箭头表示该波的传播方向, 试分别用矢号表明图中 A、B、C、D、E、F、G、H、I 各质点在该时刻的运动方向, 并画出经过  $T/4$  后的波形曲线。

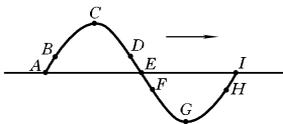


图 6-1

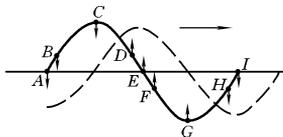


图 6-2

答 将波形曲线向右稍微推进, 可判明各点在竖直方向的位置, 即知各点的运动方向。A、B、C、H、I 处向下, D、E、F、G 处向上。如图 6-2 所示。

沿波行进方向推进  $\lambda/4$  即为经过  $T/4$  后的波形曲线, 如图 6-2 中虚线所示。

**【6-2】** 试判断下列几种关于波长的说法是否正确：

- (1) 在波传播方向上相邻两个位移相同点的距离；
- (2) 在波传播方向上相邻两个运动速度相同点的距离；
- (3) 在波传播方向上相邻两个振动相位相同点的距离。

答 (1) 不正确。在相邻位移为零的两个点之间有位移相同点,而相邻位移为零的两点间距离是半波长。

(2) 不正确。在相邻位移为零的两点之间运动速度相同的两点距离小于  $\lambda/2$ 。

(3) 正确。一个波长对应相位变化  $2\pi$ ,而相位相差  $2\pi$  的两个质点振动状态相同,可认为相位也相同。

**【6-3】** 根据波长、频率、波速的关系式  $u = \lambda\nu$ ,有人认为频率高的波传播速度大,你认为对否?

答 不对。波速的大小只取决于介质的性质,与频率无关。当提高频率  $\nu$  时,其波长  $\lambda$  必然减小,其积不变。

**【6-4】** 当波从一种介质透入另一介质时,波长、频率、波速、振幅各量中,哪些量会改变? 哪些量不会改变?

答 波速、波长、振幅会改变。频率不会改变。

因为波速  $u$  只取决于介质的性质,所以当波从一种介质透入另一种介质时,其波速会改变。

由于波动是波源振动状态的传播,所以波动的频率在数值上等于波源振动的频率,它与介质无关。当进入不同介质时,频率不变。

根据  $u = \lambda\nu$  可知,波从一种介质进入另一种介质时,波长  $\lambda$  会随  $u$  的变化而改变。

由波的平均能量密度  $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$  可知,如  $\bar{w}$  在不同介质中不变时, $\rho$  不同则振幅  $A$  也就不同。

**【6-5】** 为什么说  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  是平面简谐波的

表达式? 波动表达式  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  中,  $\frac{x}{u}$  表示什么?  $\phi_0$  表示什么? 如果把上式改写成  $y = A \cos \left[ \omega t - \frac{\omega x}{u} + \phi_0 \right]$ , 则  $\frac{\omega x}{u}$  表示什么? 式中  $x=0$  的点是否一定是波源?  $t=0$  表示什么时刻?

答 在平面简谐波传播过程中, 在垂直于波行进方向的平面上的各点, 相同时刻相位均相同, 位移也相同。即在这样的平面上, 各介质质点作同频率、同振幅的简谐运动, 且任意时刻相位相同。同相面随波的传播而推进, 用与波面垂直的任意一条波线上波的传播即可表示整个平面波的传播。此即为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

式中  $\frac{x}{u}$  表示波从  $x=0$  传播到  $x$  处所需时间,  $\phi_0$  表示原点处质点振动的初相位,  $\frac{\omega x}{u}$  表示  $x$  处质点的简谐运动落后于原点处的质点简谐运动的相位值。

坐标原点的选择具有随意性,  $x=0$  的点不一定是波源。  $t=0$  表示原点处质点振动的初始时刻。

**【6-6】** 波的传播是否使介质质点“随波逐流”? “长江后浪推前浪”这句话从物理上说, 是否有根据?

答 不是。因为波的传播是质点振动状态的传播, 而不是质点随波行进。

“长江后浪推前浪”从物理上说, 有根据。浪尖即为波峰, 后浪推前浪即波形的传播。

**【6-7】** 利用  $\omega$ 、 $\nu$ 、 $T$ 、 $\lambda$ 、 $u$ 、 $k$  间的关系, 变换波的各种表达式:

$$y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y = A \cos k(x - ut)$$

答 根据  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ ,  $u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 有

$$\begin{aligned}
 y &= A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
 &= A\cos(\omega t - kx) = A\cos(kx - \omega t) \\
 &= A\cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) = A\cos k(x - ut)
 \end{aligned}$$

**【6-8】** 若一平面简谐波在均匀介质中以速度  $u$  传播, 已知  $a$  点的振动表达式为  $y = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ , 试分别写出在以下各图所示(图 6-3)的坐标系中的波动表达式以及  $b$  点的振动表达式。

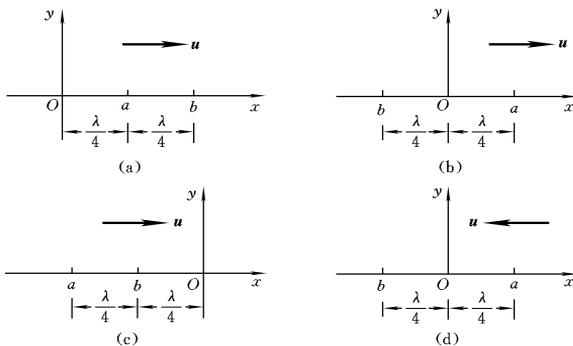


图 6-3

**答** 注意先写出原点的振动方程, 再写出波动表达式。波动的传播也就是振动相位的传播。

图 6-3(a):  $O$  点振动方程

$$y_0 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{\lambda/4}{u}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

波的表达式为

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \omega\frac{\lambda/4}{u} + \frac{\pi}{2}\right] = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \pi\right]$$

将  $x = \lambda/2$  代入上式, 即得  $b$  点的振动表达式

$$y_b = A \cos \omega t$$

图 6-3(b): 波的表达式同上, 为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$$

将  $x = -\lambda/4$  代入上式, 可得  $b$  点的振动表达式

$$y_b = A \cos \left( \omega t + \frac{3\pi}{2} \right)$$

图 6-3(c):  $O$  点振动方程

$$y_0 = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\lambda/2}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

波的表达式为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

将  $x = -\lambda/4$  代入上式, 可得  $b$  点的振动表达式

$$y_b = A \cos \omega t$$

图 6-3(d):  $O$  点振动方程

$$y_0 = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\lambda/4}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = A \cos \omega t$$

波的表达式为

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) \right]$$

将  $x = -\lambda/4$  代入上式, 得  $b$  点的振动表达式

$$y_b = A \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

**【6-9】** (1) 在波的传播过程中, 每个质元的能量随时间而变, 这是否违反能量守恒定律? (2) 在波的传播过程中, 动能密度与势能密度相等的结论, 对非简谐波是否成立? 为什么?

答 (1) 不违反能量守恒定律。在波的传播过程中, 能量随波而传播。每个质元的能量瞬时值周期变化, 既可接收又可传出。

(2) 动能密度与势能密度相等的结论, 对非简谐波也应成立。因为按傅里叶分析, 一列任意的非简谐波均可分解为许多简谐波。

每列传播的简谐波既然动能密度与势能密度相等,许多列的合成自然也应如此。

**【6-10】** (1)两简谐声波,一在水中,一在空气中,其强度相等,两者声压振幅之比为多少?(2)若声压振幅相等,其强度之比为多少?

答 声压振幅  $p_m = \rho u \omega A$ , 声强  $I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2$ 。

(1) 当  $I_{\text{水}} = I_{\text{空}}$  时, 由  $I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u}$ , 有

$$\frac{p_{m\text{水}}}{p_{m\text{空}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{水}} u_{\text{水}}}{\rho_{\text{空}} u_{\text{空}}}}$$

(2) 由  $p_{m\text{水}} = p_{m\text{空}}$  可得

$$\frac{I_{\text{水}}}{I_{\text{空}}} = \frac{\rho_{\text{空}} u_{\text{空}}}{\rho_{\text{水}} u_{\text{水}}}$$

**【6-11】** 两简谐声波的声强级差 1 dB, 问: (1) 它们的强度之比如何? (2) 声压幅之如何?

答 (1) 由定义有

$$I_{L_2} - I_{L_1} = 10 \left( \lg \frac{I_2}{I_0} - \lg \frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \lg \frac{I_2}{I_1} = 1$$

所以  $\frac{I_2}{I_1} = 10^{0.1} = 1.2589$

(2) 因为  $I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u}$ , 所以

$$\frac{p_{m2}}{p_{m1}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{0.05} = 1.1220$$

**【6-12】** 有两列简谐波在同一直线上, 向相同方向传播, 它们的波速为  $u_1$  和  $u_2$ , 频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$ , 振幅为  $A_1$  和  $A_2$ , 在原点  $x=0$  处的振动初相位为  $\phi_{10}$  和  $\phi_{20}$ , 写出下列几种情况下合成波的表达式, 并说明它们的特点。(1)  $A_1 \neq A_2$ , 其他各量相同; (2)  $\nu_1 \neq \nu_2$ , 其他各量相同; (3)  $\phi_{10} \neq \phi_{20}$ , 其他各量相同; (4)  $u_1 = -u_2$ , 其他各量相同。

答 两列简谐波为

$$y_1 = A_1 \cos \left[ 2\pi\nu_1 \left( t - \frac{x}{u_1} \right) + \phi_{10} \right]$$

$$y_2 = A_2 \cos \left[ 2\pi\nu_2 \left( t - \frac{x}{u_2} \right) + \phi_{20} \right]$$

(1) 由  $\nu_1 = \nu_2 = \nu, u_1 = u_2 = u, \phi_{10} = \phi_{20} = \phi_0$ , 可得

$$y = y_1 + y_2 = (A_1 + A_2) \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

上式表明合成波振幅最大,  $A = A_1 + A_2$ 。合成波余弦函数同单个波的余弦函数。

(2) 由  $A_1 = A_2 = A, u_1 = u_2 = u, \phi_{10} = \phi_{20} = \phi_0$ , 可得

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[ 2\pi\nu_1 \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] + A \cos \left[ 2\pi\nu_2 \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] \\ &= 2A \cos \left[ \pi(\nu_2 - \nu_1) \left( t - \frac{x}{u} \right) \right] \cos \left[ \pi(\nu_2 + \nu_1) \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] \end{aligned}$$

式中第一项因子随时间变化较之第二项因子随时间变化缓慢。在波传播方向空间某确定点处 ( $x$  为某一定值), 在  $\nu_2 - \nu_1$  远小于  $\nu_1$  或  $\nu_2$  时, 会形成拍现象。

(3) 由  $A_1 = A_2 = A, u_1 = u_2 = u, \nu_1 = \nu_2 = \nu$ , 可得

$$\begin{aligned} y &= 2A \cos \left( \frac{\phi_{20} - \phi_{10}}{2} \right) \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) + \frac{\phi_{20} + \phi_{10}}{2} \right] \\ &= A' \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] \end{aligned}$$

合成波也是与原单个波传播方向相同的简谐波, 频率、波速与单个波相同, 但振幅、初相位不同, 与原两个波初相位有关。

(4) 由  $A_1 = A_2 = A, \nu_1 = \nu_2 = \nu, \phi_{10} = \phi_{20} = \phi_0, u_1 = -u_2 = u$ , 可得合成波

$$\begin{aligned} y &= A \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] + A \cos \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] \\ &= 2A \cos 2\pi\nu \frac{x}{u} \cos (2\pi\nu t + \phi_0) \end{aligned}$$

此合成波为驻波。

**【6-13】** 两列简谐波叠加时,讨论下列各种情况:

(1) 若两波的振动方向相同,初相位也相同,但频率不同,能不能发生干涉?

(2) 若两波的频率相同,初相位也相同,但振动方向不同,能不能发生干涉?

(3) 若两波的频率相同,振动方向也相同,但相位差不能保持恒定,能不能发生干涉?

(4) 若两波的频率相同,振动方向相同,初相位也相同,但振幅不同,能不能发生干涉?

答 (1) 不能。频率不同,在空中不可能形成稳定的振幅分布。此即上题中(2)的情况。

(2) 可能发生。虽然振动方向不同,但只要一个在另一个振动方向上有平行分量,其他条件又满足,就能发生干涉。

(3) 不能。由合振动振幅公式  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi}$  可知,如果  $\Delta\phi$  不能保持恒定,在空中某处合成波的振幅不为定值,则不能形成稳定的加强或减弱。

(4) 能。由上面合振动振幅公式可知。不过要注意两振幅不能相差太多,否则就难以形成振幅在空间不同位置的大小分布。

**【6-14】** (1)为什么有人认为驻波不是波?(2)驻波中,两波节间各个质点均作同相位的简谐运动,那么,每个振动质点的能量是否保持不变?

答 (1) 因为驻波进行过程中没有振动状态(相位)和波形的定向传播。能量在波腹与波节之间来回转移,能流为零。所以有人就认为驻波不是波。

(2) 不保持不变。如波腹处质点位移达最大值时,其速度为零、动能为零,而此时该处介质相对形变为零、势能为零,所以质点能量为零。这时波节处相对形变最大,该处质点势能最大。各质点

在平衡位置时,波腹处质点速度最大、动能最大,而波节处质点势能为零、动能也为零。

**【6-15】** 我国古代有一种称为“鱼洗”的铜面盆,如图 6-4 所示。盆底雕刻着两条鱼。在盆中盛水,用手轻轻摩擦盆边两环,就能在两条鱼的嘴上方激起很高的水柱。试从物理上解释这一现象。

答 两手同步摩擦,作为外界的驱动源,可使“鱼洗”驻波系统形成驻波。由于一个驻波系统往往有许多个固有频率,所以当手以某一频率摩擦激起系统振动,而这一频率又与系统的某个固有频率相同(或相近)时,会激起强驻波。这种共振现象就会在水面相应处激起很高的水柱。

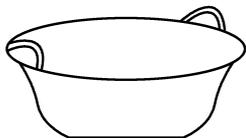


图 6-4

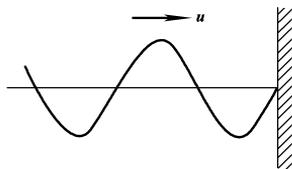


图 6-5

**【6-16】** 一平面简谐波向右传播,在波密介质面上发生完全发射,在某一时刻入射波的波形如图 6-5 所示。试画出同一时刻反射波的波形曲线,再画出经  $T/4$  时间后的入射波和反射波的波形曲线( $T$  为波的周期)。

答 这类问题注意在入射点处反射前后有  $\pi$  的相位突变。

如按波动表达式作图,可确定坐标原点  $O$ ,写出波的表达式

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

设入射点(反射点)的坐标为  $x_0$ ,则入射处振动方程为

$$y_{\lambda x_0} = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_0}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

反射处振动方程为

$$y_{\text{反}x_0} = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_0}{u} \right) + \phi_0 + \pi \right]$$

反射波的表达式则为

$$\begin{aligned} y_{\text{反}} &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{d}{u} - \frac{x_0}{u} \right) + \phi_0 + \pi \right] \\ &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_0 - x}{u} - \frac{x_0}{u} \right) + \phi_0 + \pi \right] \\ &= A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) - \omega \frac{2x_0}{u} + \phi_0 + \pi \right] \end{aligned}$$

其中  $d = x_0 - x$ , 为反射波波线上任一点到反射点的距离。给出图中所示数据, 即可绘出所要求的波形曲线。

更简单的方法是考虑反射点处反射前后的位相突变  $\pi$ 。如此题中在反射点, 要是无介面, 该处质点原该向上运动, 但反射后有  $\pi$  的相移, 就变成有介面反射后向下运动, 再沿反射方向前进就可绘出反射波波形曲线。

图6-6(a)为同一时刻反射波波形曲线, 图6-6(b)、(c)为经  $T/4$  时间后的入射波和反射波的波形曲线。

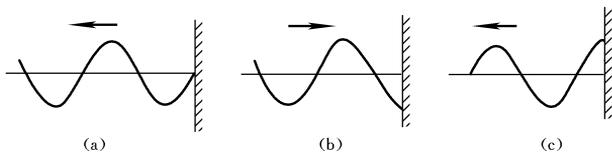


图 6-6

## 习题解答

**【6-1】** (1) 试计算在  $27^\circ\text{C}$  时氦和氢中的声速各为多少, 并与

同温度时在空气中的声速比较(空气的平均摩尔质量为  $29 \times 10^{-3}$  kg/mol)。(2)在标准状态下,声音在空气中的速率为 331 m/s,空气的比热容比  $\gamma$  是多少?(3)在钢棒中声速为 5 100 m/s,求钢的杨氏模量(钢的密度  $\rho = 7.8 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>)。

解 (1) 27 °C 时氦中的声速为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{5 \times 8.31 \times (27 + 273)}{3 \times 4 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1.02 \times 10^3 \text{ m/s}$$

27 °C 时氦中的声速为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{7 \times 8.31 \times (27 + 273)}{5 \times 2 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1.32 \times 10^3 \text{ m/s}$$

同温度下空气中的声速为

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{7 \times 8.31 \times (27 + 273)}{5 \times 29 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 347 \text{ m/s}$$

(2) 根据公式 
$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

可解得 
$$\gamma = \frac{u^2 M}{RT} = \frac{331^2 \times 29 \times 10^{-3}}{8.31 \times 273} = 1.40$$

(3) 根据公式  $u = \sqrt{Y/\rho}$  可得

$$Y = u^2 \rho = 5\,100^2 \times 7.8 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 2.03 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

**【6-2】** (1) 已知在室温下空气中的声速为 340 m/s, 水中的声速为 1 450 m/s, 能使人耳听到的声波频率在 20 至 20 000 Hz 之间, 求这两极限频率的声波在空气中和水中的波长。(2) 人眼所能见到的光(可见光)的波长范围为 400 nm(属于紫光)至 760 nm(属于红光)。求可见光的频率范围(1 nm =  $10^{-9}$  m)。

解 (1)  $\nu_1 = 20$  Hz 时

$$\lambda_{\text{空气}} = \frac{u_{\text{空气}}}{\nu_1} = \frac{340}{20} \text{ m} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{水}} = \frac{u_{\text{水}}}{\nu_1} = \frac{1\,450}{20} \text{ m} = 72.5 \text{ m}$$

$\nu_2 = 20\,000\text{ Hz}$  时

$$\lambda_{\text{空气}} = \frac{u_{\text{空气}}}{\nu_2} = \frac{340}{20\,000}\text{ m} = 0.017\text{ m}$$

$$\lambda_{\text{水}} = \frac{u_{\text{水}}}{\nu_2} = \frac{1\,450}{20\,000}\text{ m} = 0.072\,5\text{ m}$$

$$(2) \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8}{400 \times 10^{-9}}\text{ Hz} = 7.5 \times 10^{14}\text{ Hz}$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \times 10^8}{760 \times 10^{-9}}\text{ Hz} = 3.9 \times 10^{14}\text{ Hz}$$

可见光的频率范围是

$$3.9 \times 10^{14}\text{ Hz} \leq \nu \leq 7.5 \times 10^{14}\text{ Hz}$$

**【6-3】** 一横波沿绳子传播时的波动表达式为  $y = 0.05 \cdot \cos(10\pi t - 4\pi x)$ ,  $x$ 、 $y$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s。(1) 求此波的振幅、波速、频率和波长; (2) 求绳子上各质点振动的最大速度和最大加速度; (3) 求  $x = 0.2\text{ m}$  处的质点在  $t = 1\text{ s}$  时的相位, 它是原点处质点在哪一时刻的相位? (4) 分别画出  $t = 1\text{ s}$ 、 $1.25\text{ s}$ 、 $1.50\text{ s}$  各时刻的波形。

解 (1) 将题设绳波表达式

$$y = 0.05 \cos(10\pi t - 4\pi x) = 0.05 \cos 2\pi \left( 5t - \frac{x}{0.5} \right)$$

与一般波动表达式  $y = A \cos 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$  比较, 得振幅  $A = 0.05\text{ m}$ , 频率  $\nu = 5\text{ Hz}$ , 波长  $\lambda = 0.5\text{ m}$ 。波速

$$u = \lambda \nu = 0.5 \times 5\text{ m/s} = 2.5\text{ m/s}$$

(2) 绳上各质点振动时的最大速度

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \omega A = 2\pi \nu A = 2 \times 3.14 \times 5 \times 0.05\text{ m/s} \\ &= 1.57\text{ m/s} \end{aligned}$$

绳上各质点振动时的最大加速度

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \omega^2 A = 4\pi^2 \nu^2 A \\ &= 4 \times 3.14^2 \times 5^2 \times 0.05\text{ m/s}^2 = 49.3\text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(3) 将  $x = 0.2\text{ m}$ ,  $t = 1\text{ s}$  代入  $(10\pi t - 4\pi x)$  得所求相位为

$$10\pi \times 1 - 4\pi \times 0.2 = 9.2\pi$$

$x=0.2\text{ m}$  处质点的振动比原点处质点的振动在时间上落后

$$\frac{x}{u} = \frac{0.2}{2.5} \text{ s} = 0.08 \text{ s}$$

所以它是原点处质点在  $t_0 = (1 - 0.08) \text{ s} = 0.92 \text{ s}$  时的相位。

(4)  $t=1\text{ s}$ 、 $1.25\text{ s}$  和  $1.50\text{ s}$  各时刻的波形如图 6-7 所示。

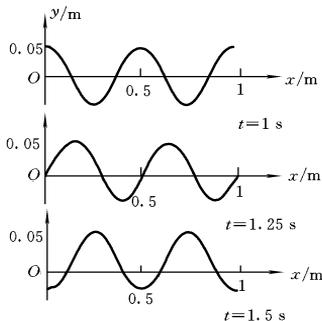


图 6-7

**【6-4】** 设有一平面简谐波  $y = 0.02\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.3}\right)$ ,  $x$ 、 $y$  以 m 计,  $t$  以 s 计。(1) 求振幅、波长、频率和波速; (2) 求  $x=0.1\text{ m}$  处质点振动的初相位。

解 (1) 将题设平面简谐波的表达式

$$y = 0.02\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{x}{0.3}\right)$$

与一般表达式

$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

比较, 可得振幅  $A=0.02\text{ m}$ , 波长  $\lambda=0.3\text{ m}$ , 周期  $T=0.01\text{ s}$ 。因此频率

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01} \text{ Hz} = 100 \text{ Hz}$$

波速  $u = \lambda\nu = 0.3 \times 100 \text{ m/s} = 30 \text{ m/s}$

(2) 将  $x=0.1 \text{ m}$  代入波动表达式, 得到位于该处的质点的振动表达式

$$y = 0.02\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.01} - \frac{0.1}{0.3}\right) = 0.02\cos\left(\frac{2\pi}{0.01}t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

因而该处质点振动的初相位  $\phi_0 = -\frac{2\pi}{3}$ 。

**【6-5】** 一平面简谐纵波沿线圈弹簧传播。设波沿着  $Ox$  轴正向传播, 弹簧中某圈的最大位移为  $3.0 \text{ cm}$ , 振动频率为  $2.5 \text{ Hz}$ , 弹簧中相邻两疏部中心的距离为  $24 \text{ cm}$ 。当  $t=0$  时, 在  $x=0$  处质元的位移为零并向  $Ox$  轴正向运动。试写出该波的波动表达式。

解 已知振幅  $A=3.0 \text{ cm}=3.0\times 10^{-2} \text{ m}$ , 频率  $\nu=2.5 \text{ Hz}$ , 波长  $\lambda=24 \text{ cm}=0.24 \text{ m}$ 。当  $t=0$  时, 原点处质点的位移  $y_0=0$ , 速度  $v_0>0$ , 故该质点的初相  $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 。将上式诸值代入平面简谐波的波动表达式

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

中, 即可得该波的波动表达式为

$$\begin{aligned} y &= 3.0 \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(2.5t - \frac{x}{0.24}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 3.0 \times 10^{-2} \cos\left[5\pi\left(t - \frac{x}{0.6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

式中  $t$  以 s 计,  $x, y$  以 m 计。

**【6-6】** 一平面简谐波沿  $Ox$  轴正向传播, 振幅  $A=0.1 \text{ m}$ , 频率  $\nu=10 \text{ Hz}$ , 当  $t=1.0 \text{ s}$  时,  $x=0.1 \text{ m}$  处的质点  $a$  的振动状态为  $y_a=0$ , 而  $v_a = \left(\frac{dy}{dt}\right)_a < 0$ ; 此时  $x=20 \text{ cm}$  处的质点  $b$  的振动状态为  $y_b=5.0 \text{ cm}$ ,  $v_b > 0$ 。若  $\lambda > 0.1 \text{ m}$ , 求波的表达式。

解 将已知参量  $A$  和  $\nu$  的值代入平面简谐波的波动表达式

$$y = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

中, 得到  $y = 0.1 \cos \left[ 2\pi \left( 10t - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$  ①

将  $t = 1.0 \text{ s}$ ,  $x = 0.1 \text{ m}$  代入式①中, 得到

$$y_a = 0.1 \cos \left[ 2\pi \left( 10 \times 1.0 - \frac{0.1}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] = 0$$

因为此时  $v_a < 0$ , 质点  $a$  在此时的相位为

$$2\pi \left( 10 \times 1.0 - \frac{0.1}{\lambda} \right) + \phi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$
 ②

将  $t = 1.0 \text{ s}$ ,  $x = 0.2 \text{ m}$  代入式①中, 得到

$$y_b = 0.1 \cos \left[ 2\pi \left( 10 \times 1.0 - \frac{0.2}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] = 0.05$$

因此  $\cos \left[ 2\pi \left( 10 \times 1.0 - \frac{0.2}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2}$

波长  $\lambda > 0.1 \text{ m}$ , 则  $a$ 、 $b$  两点的相位差小于  $2\pi$ 。因为  $v_b > 0$ , 质点  $b$  此时的相位为

$$2\pi \left( 10 \times 1.0 - \frac{0.2}{\lambda} \right) + \phi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$
 ③

由式②和式③联立求解, 得到

$$\lambda = 0.24 \text{ m}, \quad \phi_0 = 2k\pi - \frac{56}{3}\pi$$

取  $k = 9$ , 则  $\phi_0 = -\frac{2}{3}\pi$ 。将  $\lambda$  及  $\phi_0$  之值代入式①中, 即得波的表达式为

$$y = 0.1 \cos \left[ 2\pi \left( 10t - \frac{x}{0.24} \right) - \frac{2}{3}\pi \right]$$

式中  $t$  以  $\text{s}$  计,  $x$ 、 $y$  以  $\text{m}$  计。

**【6-7】** 已知一沿  $Ox$  轴正向传播的平面余弦波在  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时的波形如图 6-8 所示, 且周期  $T = 2 \text{ s}$ 。(1) 写出  $O$  点和  $P$  点的振动表

达式。(2)写出该波的波动表达式。(3)求  $P$  点离  $O$  点的距离。

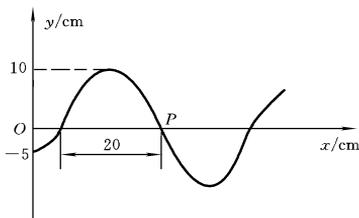


图 6-8

解 (1) 由图可知, 振幅  $A = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ , 波长  $\lambda = 20 \times 2 \text{ cm} = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$ 。原点处质点在  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时的位移  $y_0 = -5 \text{ cm} = -0.05 \text{ m}$ , 且  $v_0 < 0$ 。又知  $T = 2 \text{ s}$ 。将已知参量代入平面简谐波的波动表达式

$$y = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

中, 得到 
$$y = 0.10 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{0.40} \right) + \phi_0 \right]$$

$$= 0.10 \cos \left( \pi t - \frac{\pi x}{0.20} + \phi_0 \right) \quad \text{①}$$

令  $x = 0$ , 即得到  $O$  点振动表达式

$$y_0 = 0.10 \cos(\pi t + \phi_0)$$

因  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时,  $y_0 = -0.05 \text{ m}$ , 所以

$$\cos \left( \frac{1}{3} \pi + \phi_0 \right) = -\frac{0.05}{0.10} = -\frac{1}{2}$$

又  $v_0 < 0$ , 故有

$$\frac{1}{3} \pi + \phi_0 = \frac{2}{3} \pi, \quad \phi_0 = \frac{1}{3} \pi$$

$O$  点振动表达式即为

$$y_0 = 0.10\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

令  $P$  点坐标为  $x_P$ , 则  $P$  点振动表达式为

$$y_P = 0.10\cos\left(\pi t - \frac{\pi x_P}{0.20} + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2)$$

由图可知,  $t = \frac{1}{3}$  s 时,  $y_P = 0, v_P > 0$ 。因此  $P$  点相位为  $-\frac{\pi}{2}$ , 即

$$\frac{1}{3}\pi - \frac{\pi x_P}{0.20} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

由此解得  $\frac{\pi x_P}{0.20} = \frac{7}{6}\pi$

将此结果代入式(2)中, 即得  $P$  点振动表达式为

$$y_P = 0.10\cos\left(\pi t - \frac{5}{6}\pi\right)$$

(2) 将  $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$  代入式(1)中, 即得该波的波动表达式为

$$y = 0.10\cos\left(\pi t - \frac{\pi x}{0.20} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.10\cos\left[\pi\left(t - \frac{x}{0.20}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$$

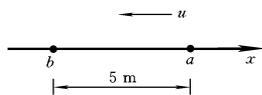
(3) 在(1)中已得出

$$\frac{\pi x_P}{0.20} = \frac{7}{6}\pi$$

由此得出  $P$  点离  $O$  点距离

$$x_P = \frac{7}{6} \times 0.20 \text{ m} = 0.233 \text{ m}$$

**【6-8】** 一平面波在介质中以速度  $u = 20$  m/s 沿  $Ox$  轴负方向传播, 如图 6-9 所示, 已知  $a$  点的振动表达式为  $y_a = 3\cos 4\pi t$ ,  $t$  的单位为 s,  $y$  的单位为 m。(1) 以  $a$  为坐标原点写出波动表达式; (2) 以距  $a$  点 5 m 处的  $b$  点为坐标原点, 写出波动表达式。



解 (1) 以  $a$  点为坐标原点的波动表达式为

图 6-9

$$y = 3\cos 4\pi\left(t + \frac{x}{20}\right) \quad \text{①}$$

(2) 以  $a$  点为坐标原点时,  $b$  点的坐标为  $x = -5 \text{ m}$ , 代入式①, 得  $b$  点的振动表达式为

$$y_b = 3\cos 4\pi\left(t - \frac{5}{20}\right) = 3\cos(4\pi t - \pi)$$

若以  $b$  点为坐标原点, 则波动表达式为

$$y = 3\cos\left[4\pi\left(t + \frac{x}{20}\right) - \pi\right]$$

**【6-9】** 一平面简谐波在  $t=0$  时的波形曲线如图 6-10 所示, 波速  $u=0.08 \text{ m/s}$ 。(1) 写出该波的波动表达式; (2) 画出  $t=T/8$  时的波形曲线。

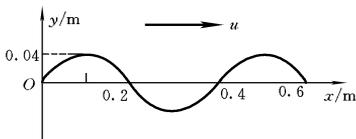


图 6-10

**解** (1) 由图 6-10 可知, 振幅  $A=0.04 \text{ m}$ , 波长  $\lambda=0.4 \text{ m}$ , 在坐标原点,  $t=0$  时,  $y_0=0, v_0<0$ 。因此,  $O$  点初相  $\phi_0=\frac{\pi}{2}$ 。又已知波速  $u=0.08 \text{ m/s}$ , 因此波的周期

$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.4}{0.08} \text{ s} = 5 \text{ s}$$

将已知参量代入平面简谐波的波动表达式

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

中, 即得该波的波动表达式为

$$y = 0.04\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{5} - \frac{x}{0.4}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 0.04 \cos\left(0.4\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 将  $t = \frac{T}{8} = \frac{5}{8}$  s 代入波动表达式中, 即得此时的波形方程为

$$y = 0.04 \cos\left(5\pi x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

波形曲线如图 6-11 所示。

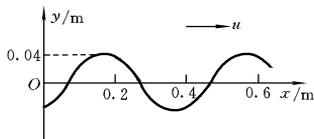


图 6-11

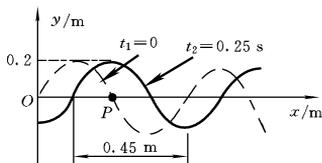


图 6-12

**【6-10】** 一列沿  $Ox$  轴正向传播的简谐波, 已知  $t_1=0$  和  $t_2=0.25$  s 时的波形如图 6-12 所示。试求: (1)  $P$  点的振动表达式; (2) 此波的波动表达式; (3) 画出  $O$  点的振动曲线。

解 (1) 由图 6-12 可知, 振幅  $A=0.2$  m,  $\frac{3}{4}\lambda=0.45$  m, 所以波长  $\lambda=0.6$  m。在  $\Delta t=0.25$  s 的时间里, 波形传播了  $\frac{1}{4}\lambda$  (假定  $\Delta t < T$ ), 因此

$$\frac{1}{4}T = 0.25 \text{ s}, \quad T = 0.25 \times 4 \text{ s} = 1.0 \text{ s}$$

从图 6-12 上还可看出,  $t=0$  时,  $y_P=0$ ,  $v_P > 0$ , 因此  $P$  点的初相  $\phi_{P0} = -\frac{\pi}{2}$ 。于是  $P$  点的振动表达式为

$$y_P = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_{P0}\right) = 0.2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 波的传播速度

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.6}{1.0} \text{ m/s} = 0.6 \text{ m/s}$$

以  $P$  点为坐标原点时,波动表达式为

$$y = 0.2 \cos \left[ 2\pi \left( t - \frac{x'}{0.6} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (1)$$

由图 6-12 可以看出,  $P$  点坐标为

$$x_P = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2} \times 0.6 \text{ m} = 0.3 \text{ m}$$

因此,  $x' = x - x_P = x - 0.3$ , 代入式①中, 即得所求波动表达式为

$$\begin{aligned} y &= 0.2 \cos \left[ 2\pi \left( t - \frac{x - 0.3}{0.6} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 0.2 \cos \left[ 2\pi \left( t - \frac{x}{0.6} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

另一种解法: 原点与  $P$  点相距  $\frac{\lambda}{2}$ , 原点振动相位比  $P$  点超前  $\pi$ , 因此原点的初相

$$\phi_0 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

原点处的振动表达式为

$$y_0 = 0.2 \cos \left( 2\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

波动表达式即为

$$y = 0.2 \cos \left[ 2\pi \left( t - \frac{x}{0.6} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

(3)  $O$  点的振动表达式为

$$y_0 = 0.2 \cos \left( 2\pi t + \frac{\pi}{2} \right)$$

振动曲线如图 6-13 所示。

**【6-11】** 已知一沿  $Ox$  轴负方向传播的平面余弦波, 在  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时的波形如图 6-14 所示, 且周期  $T = 2 \text{ s}$ 。(1) 写出  $O$  点的振动表达式; (2) 写出此波的波动表达式; (3) 写出  $Q$  点的振动表达式; (4)  $Q$  点离  $O$  点的距离多大?

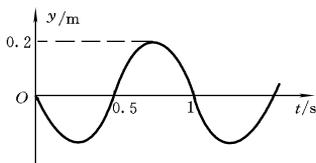


图 6-13

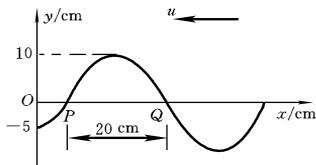


图 6-14

解 (1) 由图 6-14 可知, 振幅  $A = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ , 当  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时,  $y_0 = -5 \text{ cm} = -0.05 \text{ m}$ ,  $v_0 > 0$ 。又已知周期  $T = 2 \text{ s}$ 。可先将  $O$  点的振动表达式写为

$$y_0 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right) = 0.10 \cos(\pi t + \phi_0) \quad (1)$$

当  $t = \frac{1}{3} \text{ s}$  时,  $y_0 = -0.05 \text{ m} = -\frac{A}{2}$ , 且  $v_0 > 0$ , 由旋转矢量图示法, 可以判定此时  $O$  点的相位为  $-\frac{2}{3}\pi$ , 即

$$\pi t + \phi_0 = \frac{\pi}{3} + \phi_0 = -\frac{2}{3}\pi$$

由此可得  $\phi_0 = -\pi$ , 代入式 (1) 中, 即得  $O$  点振动表达式为

$$y_0 = 0.10 \cos(\pi t - \pi)$$

(2) 由图 6-14 可以看出, 波长  $\lambda = 20 \times 2 \text{ cm} = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}$ 。波速即为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.40}{2} \text{ m/s} = 0.20 \text{ m/s}$$

此波的波动表达式为

$$y = 0.10 \cos\left[\pi\left(t + \frac{x}{0.20}\right) - \pi\right] \quad (2)$$

(3) 令  $Q$  点坐标为  $x_Q$ , 代入式 (2), 则  $Q$  点振动表达式为

$$y_Q = 0.10 \cos\left(\pi t + \frac{\pi x_Q}{0.20} - \pi\right) \quad (3)$$

由图可知,  $t = \frac{1}{3}$  s 时,  $y_Q = 0, v_Q < 0$ 。因此  $Q$  点相位为  $\frac{\pi}{2}$ , 即

$$\frac{1}{3}\pi + \frac{\pi x_Q}{0.20} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

由此解得 
$$\frac{\pi x_Q}{0.20} = \frac{7}{6}\pi$$

将上式代入式③, 即得  $Q$  点振动表达式为

$$y_Q = 0.10\cos\left(\pi t + \frac{1}{6}\pi\right)$$

(4) 在(3)中已得出

$$\frac{\pi x_Q}{0.20} = \frac{7}{6}\pi$$

由此得出  $Q$  点离  $O$  点的距离为

$$x_Q = \frac{7}{6} \times 0.20 \text{ m} = 0.233 \text{ m}$$

**【6-12】** 一正弦式声波, 沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进, 波的强度为  $9.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$ , 频率为 300 Hz, 波速为 300 m/s。问:

(1) 波中的平均能量密度和最大能量密度是多少? (2) 每两个相邻的、相位差为  $2\pi$  的同相面间有多少能量?

解 (1) 波中的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9.0 \times 10^{-3}}{300} \text{ J/m}^3 = 3.0 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3$$

最大能量密度

$$w_{\max} = 2\bar{w} = 2 \times 3.0 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3 = 6.0 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3$$

(2) 波长 
$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{300}{300} \text{ m} = 1.0 \text{ m}$$

相位差为  $2\pi$  的两个同相面间的距离就等于波长, 因此, 两相邻同相面间的体积

$$V = S\lambda = \frac{1}{4}\pi d^2 \lambda$$

两相邻同相面间波的能量即为

$$\begin{aligned}
 W &= \bar{w}V = \frac{1}{4}\pi d^2 \lambda \bar{w} \\
 &= \frac{1}{4} \times 3.14 \times 0.14^2 \times 1.0 \times 3.0 \times 10^{-5} \text{ J} \\
 &= 4.62 \times 10^{-7} \text{ J}
 \end{aligned}$$

**【6-13】** 一平面简谐声波的频率为 500 Hz, 在空气中以速度  $u = 340 \text{ m/s}$  传播。到达人耳时, 振幅  $A = 10^{-4} \text{ cm}$ , 试求人耳接收到声波的平均能量密度和声强(空气的密度  $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ )。

解 人耳接收到的声波的平均能量密度为

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 \\
 &= 2 \times 3.14^2 \times 1.29 \times (10^{-6})^2 \times 500^2 \text{ J/m}^3 \\
 &= 6.36 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3
 \end{aligned}$$

声强  $I = \bar{w}u = 6.36 \times 10^{-6} \times 340 \text{ W/m}^2 = 2.16 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$

**【6-14】** 两人轻声说话时的声强级为 40 dB, 闹市中的声强级为 80 dB, 问闹市中的声强是轻声说话时声强的多少倍?

解 设两种声强级分别为  $I_{L1}$  和  $I_{L2}$ , 两种声强分别为  $I_1$  和  $I_2$ , 则

$$I_{L1} = 10 \lg \frac{I_1}{I_0}, \quad I_1 = I_0 10^{I_{L1}/10}$$

同理  $I_2 = I_0 10^{I_{L2}/10}$

因此  $\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{1}{10}(I_{L2} - I_{L1})} = 10^{\frac{1}{10} \times (80 - 40)} = 10^4$

$$I_2 = 10^4 I_1$$

**【6-15】** 一波源以 35 000 W 的功率向空间均匀发射球面电磁波。在某处测得波的平均能量密度为  $7.8 \times 10^{-15} \text{ J/m}^3$ 。求该处离波源的距离。电磁波的传播速度为  $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

解 设该处离波源的距离为  $r$ , 在以波源为球心, 以  $r$  为半径的球面上的能流等于波源的功率, 即

$$P = \bar{w}uS = 4\pi \bar{w}ur^2$$

由此可得

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi\bar{v}u}} = \sqrt{\frac{35\,000}{4 \times 3.14 \times 7.8 \times 10^{-15} \times 3.0 \times 10^8}} \text{ m}$$

$$= 3.45 \times 10^4 \text{ m} = 34.5 \text{ km}$$

**【6-16】** 一扬声器的膜片,半径为 0.1 m,使它产生 1 kHz、40 W 的声辐射,则膜片的振幅应多大? 已知该温度下空气的密度为  $1.29 \text{ kg/m}^3$ ,声速为  $344 \text{ m/s}$ 。

解 以  $P$  表示扬声器功率, $S$  表示膜片面积,则扬声器辐射的声强为

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi r^2}$$

声强又可表示为  $I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho u \nu^2 A^2$

因此  $2\pi^2 \rho u \nu^2 A^2 = \frac{P}{\pi r^2}$

$$A = \sqrt{\frac{P}{2\pi^3 r^2 \rho u \nu^2}} = \frac{1}{\pi r \nu} \sqrt{\frac{P}{2\pi \rho u}}$$

$$= \frac{1}{3.14 \times 0.1 \times 10^3} \sqrt{\frac{40}{2 \times 3.14 \times 1.29 \times 344}} \text{ m}$$

$$= 3.8 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.38 \text{ mm}$$

**【6-17】** 一弹性波在介质中以速度  $u = 10^3 \text{ m/s}$  传播,振幅  $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,频率  $\nu = 10^3 \text{ Hz}$ ,若该介质的密度为  $800 \text{ kg/m}^3$ 。求:  
(1) 该波的平均能流密度;(2) 1 分钟内垂直通过面积  $S = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$  的总能量。

解 (1) 该波的平均能流密度(波的强度)为

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho u \nu^2 A^2$$

$$= 2 \times 3.14^2 \times 800 \times 10^3 \times (10^3)^2 \times (1.0 \times 10^{-4})^2 \text{ W/m}^2$$

$$= 1.58 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

(2) 所求总能量为

$$W = Ist = 1.58 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-4} \times 60 \text{ J} = 3.79 \times 10^3 \text{ J}$$

**【6-18】** 距一点声源10 m的地方,声音的声强级是20 dB。若不计介质对声波的吸收,求:(1)距离声源5.0 m处的声强级;(2)距声源多远,声音就听不见了。

解 (1) 声强级与声强的关系是

$$I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

因此有

$$I_{L_2} - I_{L_1} = 10 \left( \lg \frac{I_2}{I_0} - \lg \frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \lg \frac{I_2}{I_1} \quad (1)$$

声源是点状的,发出球面波。不计介质吸收时,球面波的振幅与到波源的距离成反比,强度则与到波源的距离的平方成反比,即

$$I_2 : I_1 = r_1^2 : r_2^2 \quad (2)$$

将式②代入式①中,即得

$$\begin{aligned} I_{L_2} - I_{L_1} &= 10 \lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \\ I_{L_2} &= I_{L_1} + 10 \lg \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = I_{L_1} + 20 \lg \frac{r_1}{r_2} \\ &= \left( 20 + 20 \lg \frac{10}{5} \right) \text{ dB} = 26 \text{ dB} \end{aligned}$$

(2) 设距声源 $r_3$ 处,声音就听不见了,该处声强级 $I_{L_3}=0$ 。根据(1)中的讨论,可得

$$I_{L_3} = I_{L_1} + 20 \lg \frac{r_1}{r_3} = 0$$

由此解得

$$r_3 = r_1 \cdot 10^{I_{L_1}/20} = 10 \times 10^{20/20} \text{ m} = 100 \text{ m}$$

**【6-19】** 一扬声器发出的声波,在6 m远处的强度为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$ ,频率是2 000 Hz,设没有反射,而且扬声器向各方向均匀地发射。(1)在30 m处的声强为多大?(2)6.0 m处的位移振幅为多大?(3)6.0 m处的压强振幅为多大?

解 (1) 扬声器发出球面波,某处声强与该处到扬声器的距离的平方成反比,即

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

所以 
$$I_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 I_1 = \left(\frac{6}{30}\right)^2 \times 1.0 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

$$= 4.0 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

(2) 声强与位移振幅  $A$  的关系为

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho u \nu^2 A^2$$

$$A = \frac{1}{\pi \nu} \sqrt{\frac{I}{2\rho u}}$$

已知空气密度  $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ , 空气中声速  $u = 331 \text{ m/s}$ 。代入上式得

$$A = \frac{1}{3.14 \times 2000} \sqrt{\frac{1.0 \times 10^{-3}}{2 \times 1.29 \times 331}} \text{ m} = 1.72 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(3) 压强振幅

$$p_m = \rho u \omega A = 2\pi \rho u \nu A$$

$$= 2 \times 3.14 \times 1.29 \times 331 \times 2000 \times 1.72 \times 10^{-7} \text{ N/m}^2$$

$$= 0.922 \text{ N/m}^2$$

**【6-20】** 天线  $P$ 、 $Q$  为两个以同相位、同频率、同振幅振动的相干波源,它们在同一介质中。设频率为  $\nu$ , 波长为  $\lambda$ ,  $P$ 、 $Q$  间距离为  $\frac{3}{2}\lambda$ ,  $R$  为  $PQ$  延长线上离  $Q$  很远的一点;两波在该点的振幅可视为相等。试求:(1)自  $P$  发出的波在  $R$  点的振动与自  $Q$  发出的波在  $R$  点的振动的相位差;(2) $R$  点的合振动的振幅。

解 (1) 在  $R$  点两波引起的振动的相位差为

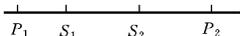
$$\Delta\phi = 2\pi \frac{PR - QR}{\lambda} = 2\pi \frac{PQ}{\lambda} = 2\pi \frac{\frac{3}{2}\lambda}{\lambda} = 3\pi$$

(2) 因为  $\Delta\phi = 3\pi$ , 合振动振幅

$$A = |A_1 - A_2| = 0$$

**【6-21】** 设  $S_1$  和  $S_2$  为两相干波源, 相距  $\frac{1}{4}\lambda$ ,  $S_1$  的相位比  $S_2$  的相位超前  $\frac{\pi}{2}$ 。若两波在  $S_1$ 、 $S_2$  连线方向上的强度相同, 均为  $I_0$ , 且不随距离变化, 问  $S_1$ 、 $S_2$  连线上在  $S_1$  外侧各点的合成波的强度如何? 又在  $S_2$  外侧各点的强度如何?

解 已知  $S_1S_2 = \frac{\lambda}{4}$ ,  $\phi_{10} - \phi_{20} = \frac{\pi}{2}$ 。



设  $P_1$  为  $S_1$  外侧之任意点(图6-15)。令

$$P_1S_1 = r_1, \quad P_1S_2 = r_2 \quad \text{图 6-15}$$

从两相干波源  $S_1$ 、 $S_2$  发出的波在  $P_1$  点引起的振动的相位差

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{\lambda/4}{\lambda} = -\pi$$

表明在  $P_1$  点两振动反相, 而且与  $P_1$  点位置无关, 故在  $S_1$  外侧任一点都有

$$A = |A_1 - A_2| = |A_0 - A_0| = 0$$

因为波的强度  $I \propto A^2$

所以合成波的强度为零, 即  $S_1$  外侧诸点无振动。

设  $P_2$  为  $S_2$  外侧任意点, 令

$$P_2S_1 = r_1, \quad P_2S_2 = r_2$$

从  $S_1$ 、 $S_2$  发出的波在  $P_2$  引起的振动的相位差

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{-\lambda/4}{\lambda} = 0$$

表明在  $P_2$  点两振动同相, 故在  $S_2$  外侧任一点都有

$$A = A_1 + A_2 = A_0 + A_0 = 2A_0$$

合成波的强度  $I$  与单一波源发出的波的强度  $I_0$  的比

$$I : I_0 = A^2 : A_0^2 = (2A_0)^2 : A_0^2 = 4$$

即在  $S_2$  外侧各点波的强度是单一波源发出的波的强度的 4 倍。

**【6-22】** 同一介质中的两个波源位于  $A$ 、 $B$  两点,其振幅相等,频率都是  $100\text{ Hz}$ ,相位差为  $\pi$ 。若  $A$ 、 $B$  两点相距为  $30\text{ m}$ ,波在介质中的传播速度为  $400\text{ m/s}$ ,试求  $AB$  连线上因干涉而静止的各点位置。

解 如图 6-16 所示,取点  $A$  为坐标原点,沿  $AB$  方向作  $x$  轴。设  $A$ 、 $B$  两点距离为  $l$ ,  $P$  为  $A$ 、 $B$  间的一点,坐标为  $x$ 。在点  $P$ ,两波源引起的振动的相位差

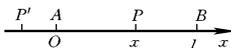


图 6-16

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pi - 2\pi \frac{(l-x) - x}{\lambda} \\ &= \pi - 2\pi \frac{l-2x}{\lambda}\end{aligned}$$

已知  $l=30\text{ m}$ , 波长  $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{400}{100}\text{ m} = 4\text{ m}$ , 代入上式得

$$\Delta\phi = \pi - 2\pi \frac{30-2x}{4} = -14\pi + \pi x$$

当  $\Delta\phi = (2k+1)\pi$

时,  $P$  点振幅  $A = |A_1 - A_2| = 0$ , 即  $P$  点静止。故静止各点的坐标可由方程

$$-14\pi + \pi x = (2k+1)\pi$$

求得为  $x = (2k+15)\text{ m}$

因为  $0 < x < 30\text{ m}$ , 故取  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7$ , 即

$$x = 1, 3, 5, \dots, 27, 29\text{ m}$$

各点静止。

设  $P'$  点是  $A$  点外侧一点, 在该点, 两波源引起的振动的相位差

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pi - 2\pi \frac{30}{4} = -14\pi$$

因此  $P'$  点的振幅  $A = A_1 + A_2 = 2A_1$ 。在  $A$  点外侧各点振动都是最大振幅, 无静止点。同理, 在  $B$  点外侧也没有静止点。

**【6-23】** 地面上波源  $S$  与高频率波探测器  $D$  之间的距离为  $d$

(图 6-17), 从  $S$  直接发出的波与从  $S$  发出经高度为  $H$  的水平层反射后的波, 在  $D$  处加强, 反射线及入射线与水平层所成的角度相同。当水平层逐渐升高  $h$  距离时, 在  $D$  处测不到讯号。不考虑大气的吸收。试求此波源  $S$  发出波的波长。

解 设从  $S$  点到高为  $H$  的反射点的距离为  $r$ , 则因在  $D$  点处, 反射波与直接发出的波振动加强, 波程差

$$\delta_1 = 2r - d = k\lambda$$

在反射点升高  $h$  时,  $D$  处测不到讯号, 反射波与直接发出的波振动相消, 波程差

$$\delta_2 = 2r' - d = k\lambda + \lambda/2$$

$$\delta_2 - \delta_1 = 2(r' - r) = \lambda/2$$

式中  $r = \sqrt{H^2 + (d/2)^2}$ ,  $r' = \sqrt{(H+h)^2 + (d/2)^2}$

代入后, 得所求波长

$$\lambda = 2 \left[ \sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - \sqrt{4H^2 + d^2} \right]$$

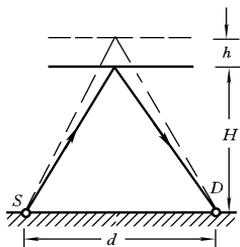


图 6-17

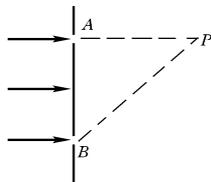


图 6-18

**【6-24】** 有一平面波  $y = 2\cos 600\pi \left( t - \frac{x}{330} \right)$  (SI), 传到隔板上的两个小孔  $A$ 、 $B$  上,  $A$ 、 $B$  相距  $1\text{ m}$ ,  $PA \perp AB$ , 如图 6-18 所示。若从  $A$ 、 $B$  传出的子波到达  $P$  点时恰好相消, 求  $P$  点到  $A$  点的距离。

解 将所给平面波的表达式

$$y = 2\cos 600\pi\left(t - \frac{x}{330}\right)$$

与简谐平面波的一般表达式

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

比较,可得  $\omega = 600\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $u = 330 \text{ m/s}$ , 因此

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{600\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 300 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{330}{300} \text{ m} = 1.1 \text{ m}$$

设  $AB = d$ ,  $AP = x$ ,  $BP = r$ 。小孔  $A$ 、 $B$  是两个相位相同的相干子波源, 它们的子波在  $P$  点恰好相消, 则两子波在  $P$  点的程差

$$\delta = BP - AP = r - x = \lambda/2$$

因为

$$r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

则有

$$\sqrt{d^2 + x^2} - x = \lambda/2$$

由此方程解得

$$x = \frac{4d^2 - \lambda^2}{4\lambda} = \frac{4 \times 1^2 - 1.1^2}{4 \times 1.1} \text{ m} = 0.634 \text{ m}$$

**【6-25】** 如图 6-19 所示, 三个同频率、振动方向相同(垂直纸面)的简谐波, 在传播过程中于  $P$  点相遇。若三个简谐波各自单独在  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  的振动表达式分别为

$$y_1 = A\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$y_2 = A\cos\omega t$$

$$y_3 = A\cos(\omega t - \pi/2)$$

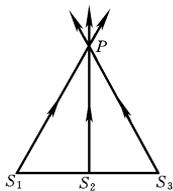


图 6-19

如  $S_2P = 4\lambda$ ,  $S_1P = S_3P = 5\lambda$  ( $\lambda$  为波长)。求  $P$  点的合振动表达式(设传播过程中各波的振幅不变)。

解  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  三点的振动具有相同的方向、相同的频率和恒定的相位差, 它们可以被看成是三个相干波源。它们在  $P$  点引起的

振动的表达式分别为

$$\begin{aligned}
 y_{P_1} &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{S_1 P}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= A \cos \left( \omega t - 2\pi \frac{5\lambda}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \left( \omega t - \frac{19}{2}\pi \right) \\
 y_{P_2} &= A \cos \omega \left( t - \frac{S_2 P}{u} \right) = A \cos \left( \omega t - 2\pi \frac{4\lambda}{\lambda} \right) \\
 &= A \cos (\omega t - 8\pi) \\
 y_{P_3} &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{S_3 P}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = A \cos \left( \omega t - 2\pi \frac{5\lambda}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= A \cos \left( \omega t - \frac{21}{2}\pi \right)
 \end{aligned}$$

$P$  点的合振动为

$$y_P = y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3}$$

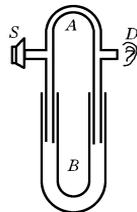
$S_1$  和  $S_3$  在  $P$  点引起的振动的相位差为

$$\Delta\phi = -\frac{19}{2}\pi - \left( -\frac{21}{2}\pi \right) = \pi$$

因此这两个分振动相互抵消,  $P$  点合振动表达式即为

$$y_P = y_{P_2} = A \cos(\omega t - 8\pi)$$

**【6-26】** 图 6-20 为声音干涉仪,用以演示声波的干涉。 $S$  为扬声器。 $D$  为声音探测器,如耳或话筒。路径  $SBD$  的长度可以变化,但路径  $SAD$  是固定的。干涉仪内有空气,且知声音强度在  $B$  的第一位置时为极小值 100 单位。而渐增至  $B$  距第一位置为 0.016 5 m 的第二位置时,有极大值 900 单位。求: (1) 声源发出的声波频率; (2) 抵达探测器的两波的相对振幅(设声波在传播过程中振幅不变)。



**解** (1) 相干波的合成从极小到相邻的极大之间的相位差的变化为  $\pi$ , 相应的波程差的变化为  $\lambda/2$ 。以  $h$  表示  $B$  从第一位置到第二位置移动的距离, 则

图 6-20

$$2h = \lambda/2$$

所以  $\lambda = 4h = 4 \times 0.0165 \text{ m} = 0.066 \text{ m}$   
声波的频率(设声速  $u = 331 \text{ m/s}$ )为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{331}{0.066} \text{ Hz} = 5015 \text{ Hz}$$

(2) 假定前后两次合成波的强度分别为  $I_1$  和  $I_2$ , 相应的振幅分别为  $A'_1$  和  $A'_2$ , 则

$$\frac{A'_1}{A'_2} = \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{900}} = \frac{1}{3}$$

设两波的振幅分别为  $A_1$  和  $A_2$ , 则

$$A'_1 = A_1 - A_2, \quad A'_2 = A_1 + A_2$$

解此二方程得

$$A_1 = \frac{1}{2}(A'_1 + A'_2) = 2A'_1, \quad A_2 = \frac{1}{2}(A'_2 - A'_1) = A'_1$$

所以  $A_1 : A_2 = 2 : 1$

**【6-27】** 两个波在一很长的弦线上传播。设其波动表达式为

$$y_1 = 0.06 \cos \frac{\pi}{2} (2.0x - 8.0t)$$

$$y_2 = 0.06 \cos \frac{\pi}{2} (2.0x + 8.0t)$$

用SI单位。(1)求各波的频率、波长、波速;(2)求节点的位置;(3)在哪些位置上,振幅最大?

解 (1) 两个波的波动表达式可以改写为

$$y_1 = 0.06 \cos 4\pi \left( t - \frac{x}{4} \right), \quad y_2 = 0.06 \cos 4\pi \left( t + \frac{x}{4} \right)$$

与简谐平面波波动表达式的一般形式

$$y = A \cos \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right)$$

比较,得  $\omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $u = 4 \text{ m/s}$ 。所以频率

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$$

波长  $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{4}{2} \text{ m} = 2 \text{ m}$

第一个波沿  $x$  轴正方向传播, 第二个波则相反。

(2) 弦线上质点的合振动

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 0.06\cos\pi(x - 4t) + 0.06\cos\pi(x + 4t) \\ &= 0.12\cos\pi x \cos 4\pi t \end{aligned}$$

这是一个驻波方程, 弦线作驻波式振动。在节点位置

$$\cos\pi x = 0, \quad \pi x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}(2k + 1) \text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(3) 振幅最大处是波腹。在腹点位置

$$|\cos\pi x| = 1, \quad \pi x = k\pi$$

$$x = k \text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**【6-28】** 一弦上驻波的表达式为

$$y = 0.02\cos 16\pi x \cos 750\pi t \quad (\text{SI})$$

(1) 组成此驻波的分行波的波幅及波速为多少? (2) 节点间的距离为多大? (3)  $t = 2.0 \times 10^{-3} \text{ s}$  时, 位于  $x = 0.05 \text{ m}$  处的质点速度为多少?

解 (1) 将弦上驻波表达式

$$y = 0.02\cos 16\pi x \cos 750\pi t$$

与驻波的一般表达式

$$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{T} t$$

比较, 可得

$$2A = 0.02 \text{ m}, \quad A = 0.01 \text{ m}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 16 \text{ m}^{-1}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{16} \text{ m} = \frac{\pi}{8} \text{ m}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 750 \text{ s}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{750} \text{ s} = \frac{\pi}{375} \text{ s}$$

波速 
$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\pi/8}{\pi/375} \text{ m/s} = 47 \text{ m/s}$$

(2) 相邻节点间的距离为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{16} \text{ m} = 0.2 \text{ m}$$

(3) 由弦上驻波表达式可得坐标为  $x$  的质点在时刻  $t$  的速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = -15\cos 16\pi x \sin 750t$$

将  $t = 2.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ ,  $x = 0.05 \text{ m}$  代入, 即得所求速度

$$\begin{aligned} v &= -15\cos(16 \times 0.05)\sin(750 \times 2.0 \times 10^{-3}) \text{ m/s} \\ &= -10.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**【6-29】** 在一根线密度  $\mu = 10^{-3} \text{ kg/m}$  和张力  $F = 10 \text{ N}$  的弦线上, 有一列沿  $Ox$  轴正方向传播的简谐波, 其频率  $\nu = 50 \text{ Hz}$ , 振幅  $A = 0.04 \text{ m}$ 。已知弦线上离坐标原点  $x_1 = 0.5 \text{ m}$  处的质点在  $t = 0$  时刻的位移为  $+\frac{A}{2}$ , 且沿  $Oy$  轴负方向运动。当传播到  $x_2 = 10 \text{ m}$  处固定端时, 被全部反射。试写出: (1) 入射波和反射波的波动表达式; (2) 入射波与反射波叠加的合成波在  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$  区间内波腹和波节处各点的坐标; (3) 合成波的平均能流。

解 (1) 弦线上波速为

$$u = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{10^{-3}}} \text{ m/s} = 100 \text{ m/s}$$

波长 
$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{100}{50} \text{ m} = 2.0 \text{ m}$$

由旋转矢量图可以确定坐标为  $x_1 = 0.5 \text{ m}$  的质点振动的初相为  $\phi = \frac{\pi}{3}$ 。该点与原点相距

$$\Delta x = x_1 = 0.5 \text{ m} = \frac{2.0}{4} \text{ m} = \frac{\lambda}{4}$$

因此,原点处质点与该点处质点振动的相位差

$$\phi_0 - \phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{\lambda/4}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

原点处初相即为  $\phi_0 = \phi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi$

于是入射波的波动表达式为

$$\begin{aligned} y_{\lambda} &= A \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right] \\ &= 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t - \frac{x}{100} \right) + \frac{5}{6}\pi \right] \end{aligned}$$

反射波与入射波传播方向相反;入射波被固定端反射时,出现半波损失,反射波相位增加 $\pi$ 。因此反射波的波动表达式为

$$y_{\text{反}} = 0.04 \cos \left[ 100\pi \left( t + \frac{x}{100} \right) + \frac{11}{6}\pi \right]$$

(2) 入射波与反射波叠加后形成驻波。驻波方程为

$$y = 0.08 \cos \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( 100\pi t + \frac{4}{3}\pi \right)$$

波腹处满足条件  $\pi x + \frac{\pi}{2} = k\pi$

即  $x = \left( k - \frac{1}{2} \right) \text{ m}$

因为  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$ , 在此区间波腹位置为

$$x = 0.5, 1.5, \dots, 9.5 \text{ m}$$

波节处满足条件  $\pi x + \frac{\pi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

即  $x = k \text{ m}$

在区间  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$ , 波节坐标为  $x = 0, 1, 2, \dots, 10 \text{ m}$ 。

(3) 在驻波中没有能量的定向传播,因而平均能流为零。

**【6-30】** 在图 6-21 所示的驻波演示实验中,电动音叉的频率为 400 Hz, 设弦线 AB 上形成 3 个波腹,其振幅为 0.30 cm,波在弦线上的速度为 320 m/s。(1)求此弦线的长度;(2)若以弦线中点为坐标原点,试写出驻波的表达式。

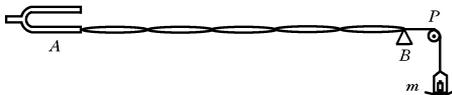


图 6-21

解 (1) 波长  $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{320}{400} \text{ m} = 0.80 \text{ m}$ 。由图 6-21 可知, 弦线上若有三个波腹, 则有四个节点。相邻波节间距离为  $\lambda/2$ , 因此弦线的长度

$$AB = 3 \times \frac{\lambda}{2} = 3 \times \frac{0.80}{2} \text{ m} = 1.2 \text{ m}$$

(2) 弦线中点为一波腹。取中点为坐标原点时,  $x$  的定义域为  $-0.6 \text{ m} \leq x \leq 0.6 \text{ m}$ 。因此驻波表达式为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{T} t = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi \nu t \\ &= 0.30 \times 10^{-2} \cos \frac{2\pi}{0.8} x \cos (2\pi \times 400t) \\ &= 3.0 \times 10^{-3} \cos \frac{5\pi}{2} x \cos 800\pi t \quad (-0.6 \text{ m} \leq x \leq 0.6 \text{ m}) \end{aligned}$$

式中  $x, y$  以 m 计,  $t$  以 s 计。

**【6-31】** (1) 火车以 90 km/h 的速度行驶, 其汽笛的频率为 500 Hz。一个人站在铁轨旁, 当火车从他身边驶过时, 他听到的汽笛声的频率变化是多大? 设声速为 340 m/s。(2) 若此人坐在汽车里, 而汽车在铁轨旁的公路上以 54 km/h 的速率迎着火车行驶。试问此人听到汽笛声的频率为多大?

解 (1) 当火车向站立者驶近时, 他听到的汽笛声频率为

$$\nu_{R1} = \frac{u}{u - v_s} \nu_s$$

当火车驶离站立者时, 他听到的汽笛声频率为

$$\nu_{R2} = \frac{u}{u + v_S} \nu_S$$

因此,当火车从站立者身边驶过时,他听到的汽笛声的频率的变化为

$$\Delta\nu = \nu_{R1} - \nu_{R2} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S - \frac{u}{u + v_S} \nu_S = \frac{2uv_S\nu_S}{u^2 - v_S^2}$$

已知  $u = 340 \text{ m/s}$ ,  $v_S = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$ ,  $\nu_S = 500 \text{ Hz}$ , 代入上式, 则

$$\Delta\nu = \frac{2 \times 340 \times 25 \times 500}{340^2 - 25^2} \text{ Hz} = 74 \text{ Hz}$$

(2) 在这种情况下,此人听到的汽笛声频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

已知  $v_R = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$ , 代入上式得

$$\nu_R = \frac{340 + 15}{340 - 25} \times 500 \text{ Hz} = 563.5 \text{ Hz}$$

**【6-32】** 正在报警的警钟,每隔 0.5 s 钟响一声,一声接一声地响着。有一个人坐在以 60 km/h 的速度向警钟行驶的火车中,问这个人在 1 min 内听到几响?

**解** 警钟报警频率  $\nu_S = \frac{1}{0.5} \text{ s}^{-1} = 2 \text{ s}^{-1}$ , 火车(人)的速度  $v_R = 60 \text{ km/h} = 16.7 \text{ m/s}$ 。设声速  $u = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 则火车中的人在 1 min 内听到的响声数为

$$n = 60\nu_R = 60 \frac{u + v_R}{u} \nu_S = 60 \times \frac{340 + 16.7}{340} \times 2 = 126$$

**【6-33】** 一声源的频率为 1 080 Hz,相对于地以 30 m/s 的速率向右运动。在其右方有一反射面相对于地以 65 m/s 的速率向左运动。设空气中的声速为 331 m/s。求:(1)声源在空气中发出声音的波长;(2)每秒钟到达反射面的波数;(3)反射波的速率;(4)反射波的波长。

**解** (1) 运动声源在空气中发出声音的波长为

$$\lambda_1 = \frac{u - v_S}{\nu_S} = \frac{331 - 30}{1\,080} \text{ m} = 0.28 \text{ m}$$

(2) 每秒到达反射面的波数也就是反射面“接收”到的声音的频率,其值为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S = \frac{331 + 65}{331 - 30} \times 1\,080 \text{ Hz} = 1\,421 \text{ Hz}$$

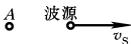
(3) 反射波的速率与反射面的运动无关,只取决于空气的状态,故仍为  $u = 331 \text{ m/s}$ 。

(4) 反射波的波长为

$$\lambda_2 = \frac{u}{\nu_R} = \frac{331}{1\,421} \text{ m} = 0.233 \text{ m}$$

**【6-34】** 试计算:(1)一波源(振动的频率为  $2\,040 \text{ Hz}$ )以速度  $v_S$  向一反射面接近(图 6-22),观察者在  $A$  点听得拍音的频率为  $\Delta\nu = 3 \text{ Hz}$ ,求波源移动的速度  $v_S$ ,设声速为  $340 \text{ m/s}$ 。(2)若(1)中波源没有运动,而反射面以速度  $v = 0.20 \text{ m/s}$  向观察者  $A$  接近,所听得的拍音频率为  $\Delta\nu = 4 \text{ Hz}$ ,求波源的频率。

解 (1) 观察者在  $A$  点接收到的来自波源的声音频率为



$$\nu_{R1} = \frac{u}{u + v_S} \nu_S$$

观察者接收到的来自反射面的声音频率为

图 6-22

$$\nu_{R2} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S$$

这两列声波在  $A$  点叠加后产生拍音,拍音频率

$$\Delta\nu = \nu_{R2} - \nu_{R1} = \frac{u}{u - v_S} \nu_S - \frac{u}{u + v_S} \nu_S = \frac{2u\nu_S v_S}{u^2 - v_S^2}$$

由此可得关于  $v_S$  的方程

$$\Delta\nu v_S^2 + 2u\nu_S v_S - \Delta\nu u^2 = 0$$

代入数据后即为

$$3v_S^2 + 2 \times 340 \times 2\,040 v_S - 3 \times 340^2 = 0$$

$$3v_s^2 + 1.39 \times 10^6 v_s - 3.47 \times 10^5 = 0$$

解此方程得到波源移动速度为

$$v_s = 0.25 \text{ m/s}$$

(2) 对于波源来说,反射面相当于接收器,它接收到的声音频率为

$$\nu' = \frac{u + v}{u} \nu$$

对于观察者来说,反射面相当于另一波源,观察者接收到的来自反射面的声音频率为

$$\nu_{R1} = \frac{u}{u - v} \nu' = \frac{u}{u - v} \cdot \frac{u + v}{u} \nu = \frac{u + v}{u - v} \nu$$

观察者接收到的直接来自波源的声音频率为

$$\nu_{R2} = \nu$$

这两列声波叠加后产生的拍频

$$\Delta\nu = \nu_{R1} - \nu_{R2} = \frac{u + v}{u - v} \nu - \nu = \frac{2v}{u - v} \nu$$

因此波源的频率为

$$\nu = \frac{(u - v)\Delta\nu}{2v} = \frac{(340 - 0.20) \times 4}{2 \times 0.20} \text{ Hz} = 3\,398 \text{ Hz}$$

**【6-35】** 一固定的超声波探测器,在海水中发出一束频率  $\nu = 30\,000 \text{ Hz}$  的超声波,被向着探测器驶来的潜艇反射回来,反射波与原来的波合成后,得到频率为  $241 \text{ Hz}$  的拍。求潜艇的速率。设超声波在海水中的波速为  $1\,500 \text{ m/s}$ 。

解 本题解法与前题(2)的解法完全相同。由16-34题(2)的结果

$$\nu = \frac{(u - v)\Delta\nu}{2v}$$

解得潜艇速率

$$v = \frac{u\Delta\nu}{2\nu + \Delta\nu} = \frac{1\,500 \times 241}{2 \times 30\,000 + 241} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

# 第七章 相对论基础

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 伽利略相对性原理

在一个惯性系的内部所作的任何力学的实验都不能够确定这一惯性系本身是在静止状态,还是在作匀速直线运动。

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}', \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$$

### 2. 狭义相对论基本原理

(1) 爱因斯坦相对性原理。

(2) 光速不变原理。

### 3. 洛伦兹变换

坐标变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

速度变换式

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$
$$u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

#### 4. 同时性的相对性

$$\text{时间膨胀 } \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left( \tau_0 \text{ 为原时, } \beta = \frac{v}{c} \right)$$

$$\text{长度缩短 } l' = l \sqrt{1-\beta^2} \quad (l \text{ 为原长})$$

#### 5. 相对论力学的基本方程

$$\text{相对论质量 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (m_0 \text{ 为静止质量})$$

$$\text{相对论动量 } \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\boldsymbol{v}$$

$$\text{基本方程 } \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

#### 6. 相对论能量

$$\text{质能关系 } E = mc^2, \quad E_0 = m_0c^2$$

$$\text{相对论动能 } E_k = mc^2 - m_0c^2$$

#### 相对论动量能量

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

## 思考题解答

**【7-1】** 相对论中运动物体长度缩短与物体线度的热胀冷缩是否是一回事？

答 不是一回事。物体线度的热胀冷缩是由于温度变化而引起的物体体积变化所致。相对论中运动物体沿运动方向的长度收缩表明长度的量度与参考系有关，相对静止的参考系和相对运动的参考系沿运动方向测出的长度数值是不一样的，动尺较短。

**【7-2】** 有一枚接近于光速相对于地球飞行的宇宙火箭，在地球上的观察者将测得火箭上的物体长度缩短，过程的时间延长，有

人因此得出结论说：火箭上观察者将测得地球上的物体比火箭上同类物体更长，而同一过程的时间缩短。这个结论对吗？

答 不对。火箭上的观察者观察到地球相对自己在运动，因而上面的物体也相对自己运动，从而火箭上的观察者测得物体的长度缩短，而同一过程的时间延长。

**【7-3】** 化学家经常说：“在化学反应中，反应前的质量等于反应后的质量”。以 2 g 氢与 16 g 氧燃烧成水为例，注意到在这个反应过程中大约放出了  $2.5 \times 10^7$  J 热量，如考虑到相对论效应，则上面的说法有无修正的必要？

答 氢与氧燃烧成水的化学反应方程式为  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$ ，并释放出热量。根据相对论，由  $\Delta E = \Delta mc^2$  知，释放出的热量相应的质量为  $\Delta m = \frac{\Delta \varepsilon}{c^2} = \frac{2.5 \times 10^7}{c^2}$ 。因而严格地说其说法应修正为：反应后的质量小于反应前的质量。不过由于  $\Delta m = \frac{2.5 \times 10^7}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} = 2.78 \times 10^{-16} \text{ kg}$  太小，因而在实际中无修正的必要。

**【7-4】** 下面两种论断是否正确？(1) 在某个惯性系中同时、同地发生的事件，在所有其他惯性系中也一定是同时、同地发生的。(2) 在某个惯性系中有两个事件，同时发生在不同地点，而在对该系有相对运动的其他惯性系中，这两个事件却一定不同时。

答 设两事件分别为 1、2，在 K 惯性系中为  $1(x_1, t_1)$ 、 $2(x_2, t_2)$ ，在 K' 惯性系中为  $1(x'_1, t'_1)$ 、 $2(x'_2, t'_2)$ 。应用洛伦兹变换可得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} [(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)]$$

(1) 如  $x_2 = x_1, t_2 = t_1$ ，有  $x'_2 = x'_1, t'_2 = t'_1$ 。可见论断正确。

(2) 由  $t_2 = t_1, x_2 \neq x_1$  知  $t'_2 \neq t'_1$ ，可见这一论断也正确。

**【7-5】** 两只相对运动的标准时钟 A 和 B，从 A 所在惯性系观察，哪个钟走得快？从 B 所在惯性系观察，又是如何呢？

答 根据时间膨胀即动钟变慢效应知,从A所在惯性系观察,A钟走得快。从B所在惯性系观察,B钟走得快。

**【7-6】** 洛伦兹变换与伽利略变换的本质差别是什么?如何理解洛伦兹变换的物理意义?

答 其本质差别在于,伽利略变换的时空观是绝对时空观,认为时间和空间是绝对的,它们的测量与运动无关。洛伦兹变换的时空观是相对论时空观,认为时间和空间以及运动物质之间,是不可分割地联系着的。测量与运动有关。

洛伦兹变换集中反映了时间、空间和物质运动三者的紧密联系,它对高速运动和低速运动都成立。经典力学是它在 $v \ll c$ 时的极限。洛伦兹变换中 $v$ 不能大于 $c$ ,则表明物体的速度不能超过真空中的光速。

**【7-7】** 长度的量度和同时性有什么关系?为什么长度的量度和参考系有关?

答 长度的量度与相对观察者是静止还是运动,其操作会有所区别。当棒对观察者静止时,观察者对两个端点坐标的测量,同时与否均有相同结果。但当棒相对观察者运动时,观察者对棒两个端点坐标的测量必须同时进行,否则不能测出其长度。

根据洛伦兹变换可知,如在 $K'$ 参考系中静止的棒, $K'$ 参考系中测得其长 $l' = x'_2 - x'_1$ ,则由于在 $K$ 参考系中测一定要求同时( $t_2 = t_1$ ),因而有

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

可见同样的物体,在不同的参考系 $K'$ 与 $K$ 中测得的长度是不一样的,即长度的量度与参考系有关。

**【7-8】** 在相对论中,对动量定义 $p = mv$ 和公式 $F = dp/dt$ 的理解,与在牛顿力学中的有何不同?在相对论中, $F = ma$ 一般是否成立?为什么?

答 牛顿力学中质量是恒量, $m$ 为 $m_0$ ,它与运动与否无关。在

相对论中,  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , 在  $p = mv$  和  $F = \frac{dp}{dt}$  中的  $m$  均如此。

在相对论中,  $F = ma$  一般不成立。因为

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} = v \frac{dm}{dt} + ma$$

比较即可知。只有在  $v \ll c$  时,  $\frac{dm}{dt} = 0$ ,  $F = ma$  才成立。

**【7-9】** 什么叫质量亏损? 它和原子能的释放有何关系?

答 当质子和中子结合组成原子核时, 组合前它们的总静质量为  $m$ , 组合成原子核的静质量为  $m'$ , 这两者不等, 其差额  $\Delta m = m - m'$  称为原子核的质量亏损。

当质量亏损为  $\Delta m$  时, 相应的有能量  $\Delta E = \Delta mc^2$  放出。也就是说当质子和中子组成原子核时, 将释放出大量能量——原子核的结合能, 亦即原子能。

**【7-10】** 相对论的能量与动量的关系式是什么? 相对论的质量与能量的关系式是什么? 静止质量与静止能量的物理意义是什么?

答 相对论能量与动量关系式为

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

相对论质量与能量关系式为

$$E = mc^2, \quad E_0 = m_0 c^2$$

静止质量  $m_0$  是物体在相对静止的惯性系中测出的质量。静止能量  $m_0 c^2$  是静止质量所对应的能量。

## 习题解答

(下列各题中光速均以  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s 计算)

**【7-1】** 一个质点, 在惯性系  $K'$  中作匀速圆周运动, 轨道方程为

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad z' = 0$$

试证: 在惯性系  $K$  中的观察者测得该质点作椭圆运动, 椭圆的中心

以速度  $v$  移动。

解 据题意知质点作平面运动。将洛伦兹变换公式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y$$

代入圆方程  $x'^2 + y'^2 = a^2$  可得

$$\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 = a^2$$

即有 
$$\frac{(x - vt)^2}{a^2(1 - \beta^2)} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

上式表明,在惯性系K中的观察者测得此质点作椭圆运动,椭圆长半轴为 $a$ ,短半轴为 $a\sqrt{1-\beta^2}$ 。椭圆中心坐标为 $(vt, 0)$ ,说明它以速度 $v$ 运动。

**【7-2】** 一观察者测得运动着的米尺长0.5 m,问此尺以多大的速度接近观察者?

解 本题注意米尺的静止长度。

根据长度缩短公式

$$l' = l \sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}$$

可得

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{1 - \left( \frac{l'}{l} \right)^2} = 3.0 \times 10^8 \sqrt{1 - \left( \frac{0.5}{1} \right)^2} \text{ m/s} \\ &= 2.6 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**【7-3】** 一张宣传画5 m见方,平行地贴于铁路旁边的墙上,一高速列车以 $2 \times 10^8$  m/s速度接近此宣传画,这张画由司机测量将成为什么样子?

解 本题注意收缩仅沿运动方向发生。

司机看来,此宣传画高度不变,宽度收缩为

$$l' = l \sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2} = 5 \sqrt{1 - \left( \frac{2 \times 10^8}{3 \times 10^8} \right)^2} \text{ m} = 3.7 \text{ m}$$

即宣传画成了  $5\text{ m} \times 3.7\text{ m}$  的长方形。

**【7-4】** 远方的一颗星以  $0.8c$  的速度离开我们, 接受到它辐射出来的闪光按 5 昼夜的周期变化, 求固定在此星上的参考系测得的闪光周期。

解 注意原时概念。

设固定在星体上的参考系测得的闪光周期为  $\tau_0$ , 这是固有时。对于地球参考系而言, 相应的运动时为

$$t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

因为星体以速度  $v$  远离地球, 在时间  $t$  内星体运动路程为  $s = vt$ , 所以以后一次闪光到达地球时比前一次闪光多运动了路程  $s$ , 相应地, 也多经历了时间  $\Delta t = \frac{s}{c} = \frac{v}{c}t$ 。在地球上测得的闪光周期则为

$$T = t + \Delta t = (1 + v/c)t = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\tau_0$$

由此方程可解得  $\tau_0 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}T = \frac{5}{3}\text{ d}$

事实上, 不仅星体上闪光周期  $\tau_0$  和地球接收到的闪光周期  $T$  具有上述关系, 而且如果以  $\tau_0$  和  $T$  分别表示星体上光本身的周期和地球接收到的光本身的周期, 则  $\tau_0$  和  $T$  也具有上述关系。这种由于光源的纵向运动而导致的光的周期(因而光的波长)的变化称为相对论性纵向多普勒效应。由于这种效应, 星体上光的颜色和地球上看到的光颜色是不同的。

**【7-5】** 假设宇宙飞船从地球射出, 沿直线到达月球, 距离是  $3.84 \times 10^8\text{ m}$ , 它的速率在地球上被量得为  $0.30c$ 。根据地球上的时钟, 这次旅行花多长时间? 根据宇宙飞船所做的测量, 地球和月球的距离是多少? 怎样根据这个算得的距离, 求出宇宙飞船上时钟所读出的旅行时间?

解 地球作为 K 系, 宇宙飞船作为 K' 系。K 系中测量所花时

间为

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{3.84 \times 10^8}{0.30 \times 3.0 \times 10^8} \text{ s} = 4.27 \text{ s}$$

对于  $K'$  系, 由于长度收缩, 即它测得的地球和月球间距离较之固有长度短, 为

$$\begin{aligned} l' &= l \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 3.84 \times 10^8 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0.30c}{c}\right)^2} \text{ m} \\ &= 3.66 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

飞船认为月球相对它以速度  $0.30c$  靠近, 所以它读出的旅行时间为

$$\Delta t' = \frac{l'}{0.30c} = \frac{3.66 \times 10^8}{0.30 \times 3.0 \times 10^8} \text{ s} = 4.07 \text{ s}$$

读者可由固有时的概念算算飞船上时钟所读出的时间。

**【7-6】** 在  $K$  系中观察到两个事件同时发生在  $Ox$  轴上, 其间距离是  $1 \text{ m}$ , 在  $K'$  系中观察这两个事件之间的空间距离是  $2 \text{ m}$ , 求在  $K'$  系中这两个事件的时间间隔。

解 两事件在  $K$  系中的空间时间坐标分别设为  $x_1, t_1$  和  $x_2, t_2$ ; 在  $K'$  系中的空间时间坐标分别设为  $x'_1, t'_1$  和  $x'_2, t'_2$ , 则据洛伦兹变换有

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

由题意知  $t_1 = t_2$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 \text{ m}$ , 而  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 2 \text{ m}$ , 所以代入得

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \Delta t' = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

联解可得

$$\Delta t' = \frac{-\frac{1}{c} \sqrt{3/4}}{\sqrt{1 - 3/4}} \text{ s} = -\frac{\sqrt{3}}{c} \text{ s} = -5.77 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$|\Delta t'| = 5.77 \times 10^{-9} \text{ s}$$

**【7-7】** 在K系中观察到的两事件发生在空间同一地点,第二事件发生在第一事件以后2 s。在另一相对K系运动的K'系中观察到第二事件是在第一事件3 s之后发生的,求在K'系中测量两事件之间的位置距离。

解 本题应用洛伦兹变换。

设 $x_1, t_1$ 和 $x'_1, t'_1$ 分别为事件1在K和K'系中的空间时间坐标;  
 $x_2, t_2$ 和 $x'_2, t'_2$ 分别为事件2在K系和K'系中的空间时间坐标,则有

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

据题意 $x_1 = x_2, t_2 - t_1 = 2 \text{ s}, t'_2 - t'_1 = 3 \text{ s}$ ,代入可得

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \frac{-v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 3 \text{ s} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

将后式之 $v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$ 代入前式,有

$$\Delta x' = -\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}c \times 2}{\frac{2}{3}} \text{ m} = -6.71 \times 10^8 \text{ m}$$

$$|\Delta x'| = 6.71 \times 10^8 \text{ m}$$

**【7-8】**  $\pi^+$ 介子是一不稳定粒子,平均寿命是 $2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ (在

它自己参考系中测得)。(1)如果此粒子相对于实验室以  $0.8c$  的速度运动,那么实验室坐标系中测量的  $\pi^+$  介子寿命为多长?(2)  $\pi^+$  介子在衰变前运动了多长距离?

解 注意固有时。

(1) 在相对于过程发生的地点为静止的参考系中测得的时间间隔为固有时,即题中  $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。由时间膨胀公式有

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2.6 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}} \text{ s} = 4.3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

(2) 在实验室参考系中

$$s = v\tau = 0.8 \times 3.0 \times 10^8 \times 4.3 \times 10^{-8} \text{ m} = 10.3 \text{ m}$$

**【7-9】** 地球上一观察者,看见一飞船 A 以速度  $2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$  从他身边飞过,另一飞船 B 以速度  $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  跟随 A 飞行。求:(1) A 上的乘客看到 B 的相对速度;(2) B 上的乘客看到 A 的相对速度。

解 本题应用相对论速度变换公式。注意参考系的选取。

(1) 选取地球为 K 系,飞船 A 为 K' 系,则在相对论速度变换公式

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

中,飞船 B 对地的速度  $u_x = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ , A 对地(即 K' 对 K)的速度  $v = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。所以有

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{2.0 \times 10^8 - 2.5 \times 10^8}{1 - \frac{2.5 \times 10^8}{(3.0 \times 10^8)^2} \times 2.0 \times 10^8} \text{ m/s} \\ &= -1.125 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(2) 选取地球为 K 系,飞船 B 为 K' 系,则在上述公式中  $u_x = 2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $v = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,代入可得

$$u'_x = 1.125 \times 10^8 \text{ m/s}$$

**【7-10】** 两只宇宙飞船相对某遥远的恒星以  $0.8c$  的速率向相反方向移开。试用速度变换法则证明,两飞船的相对速度是  $\frac{1.6}{1.64}c$ , 并与伽利略变换所得的结果进行比较。

解 选取恒星为  $K$  参考系,一只飞船为  $K'$  参考系,飞船飞行方向为  $x$  轴。由相对论速度变换式有

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

代入  $u_x = -0.8c, v = 0.8c$ , 得

$$u'_x = \frac{-0.8c - 0.8c}{1 + \frac{0.8c}{c^2} \times 0.8c} = -\frac{1.6c}{1.64}$$

$$|u'_x| = \frac{1.6}{1.64}c$$

伽利略变换

$$u'_x = u_x - v = -0.8c - 0.8c = -1.6c$$

$$|u'_x| = 1.6c > c$$

超过光速,结果错误。

**【7-11】** 一原子核以  $0.5c$  的速度离开一观察者而运动。原子核在它运动方向上向前发射一电子,该电子相对于原子核有  $0.8c$  的速度;此原子核又向后发射了一光子指向观察者。对静止观察者来讲,(1)电子具有多大的速度;(2)光子具有多大的速度。

解 (1) 选取观察者为  $K$  系,原子核为  $K'$  系,则相对论速度变换公式可用

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \quad (1)$$

将  $u'_x = 0.8c, v = 0.5c$  代入式①,得

$$u_x = \frac{0.8c + 0.5c}{1 + \frac{0.5c}{c^2} \times 0.8c} = \frac{1.3}{1.4}c = 0.93c$$

(2) 将  $u'_x = -c, v = 0.5c$  代入式①, 得

$$u_x = \frac{-c + 0.5c}{1 - \frac{0.5c}{c^2}c} = -c$$

负号表示向着观察者, 可见光速不变。

**【7-12】** 一光源在  $K'$  坐标系的原点  $O'$  发出一光线。光线在  $x'y'$  平面内与  $O'x'$  轴的交角为  $\theta'$ 。设  $K'$  相对  $K$  以速度  $u$  沿  $Ox$  轴运动。试求在  $K$  坐标系中看到此光线的传播方向。

解 光速在  $K'$  坐标系中的两个分量分别为

$$v'_x = c \cos \theta', \quad v'_y = c \sin \theta'$$

由相对论速度变换公式

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

将  $v'_x, v'_y$  式代入上两式, 可得

$$v_x = \frac{c \cos \theta' + u}{1 + \frac{u}{c^2}c \cos \theta'}, \quad v_y = \frac{c \sin \theta' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2}c \cos \theta'}$$

设在  $K$  坐标系中光线与  $x$  轴的交角为  $\theta$ , 则

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{c \sin \theta' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{c \cos \theta' + u}$$

**【7-13】** 如一观察者测出电子质量为  $2m_0$ , 问电子速度为多少? ( $m_0$  为电子的静止质量。)

解 相对论质量

$$m = 2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

所以

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c$$

**【7-14】** 某人测得一静止棒长为 $l$ ,质量为 $m$ ,于是求得此棒线密度为 $\rho = m/l$ 。假定此棒以速度 $v$ 在棒长方向上运动,此人再测棒的线密度应为多少?若棒在垂直长度方向上运动,它的线密度又为多少?

解 注意长度与质量的变化。

当棒沿棒长方向运动时,由

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

可得 
$$\rho' = \frac{m'}{l'} = \frac{m}{l(1 - v^2/c^2)} = \frac{\rho}{1 - v^2/c^2}$$

当棒在垂直方向上运动时,由于 $l$ 不变,质量变为 $m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,所以

$$\rho'' = \frac{m'}{l} = \frac{m}{l \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

**【7-15】** 设有一静止质量为 $m_0$ 、带电荷量为 $q$ 的粒子,其初速为零,在均匀电场 $E$ 中加速,在时刻 $t$ 时它所获得的速度是多少?如果不考虑相对论效应,它的速度又是多少?这两个速度间有什么关系?讨论之。

解 注意质量有无变化。

考虑相对论效应,质量与速度有关。由

$$v = at = \frac{qE}{m}t = \frac{qE}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}t$$

可得 
$$v = \frac{qEct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2}}$$

不考虑相对论效应

$$V = \frac{qE}{m_0}t$$

考虑相对论效应时,质量随速度增大而增大。在相同电场力作用下,粒子的加速度将变小,因而速度将比不考虑相对论效应时小些。二者关系为

$$v = \frac{qEct}{m_0c \sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}}} = \frac{V}{\sqrt{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

当电场强度  $E$  不太大,时间  $t$  不太长时,  $V \ll c$ , 则有  $v = V$ 。

**【7-16】** 设电子的速度为(1)  $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ ; (2)  $2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 试计算电子的动能各是多少? 如用经典力学公式计算电子动能又各为多少?

解 注意相对论动能的表达式与经典力学的动能表达式不同。

$$\begin{aligned} (1) E_{\text{k相}} &= mc^2 - m_0c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) m_0c^2 \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{9} \times 10^{-4}}} - 1 \right] \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \text{ J} \\ &= 4.55 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

$$E_{\text{k非}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 10^{12} \text{ J} = 4.55 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} (2) E_{\text{k相}} &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (2/3)^2}} - 1 \right) \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \text{ J} \\ &= 28 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

$$E_{\text{k非}} = \frac{1}{2} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 4 \times 10^{16} \text{ J} = 18.2 \times 10^{-15} \text{ J}$$

**【7-17】** 两个氦核组成质量数为 4、原子量为 4.001 5 u 的氦核。试计算氦核放出的结合能。

解 因为质量亏损对应的能量即为结合能,所以

$$\begin{aligned} \Delta E &= (\Delta m)c^2 \\ &= (2 \times 2.01355 - 4.0015) \times 1.66 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

$$= 3.82464 \times 10^{-12} \text{ J} = \frac{3.82464 \times 10^{-12}}{1.60219 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 23.9 \text{ MeV}$$

**【7-18】** 太阳由于向四面空间辐射能量,每秒损失了质量  $4 \times 10^9 \text{ kg}$ 。求太阳的辐射功率。

解 根据辐射功率的定义,有

$$P = \frac{E}{t} = \frac{(\Delta m)c^2}{t} = 4 \times 10^9 \times 9 \times 10^{16} \text{ W} = 3.6 \times 10^{26} \text{ W}$$

**【7-19】** 在什么速度下粒子的动量比非相对论动量大两倍? 在什么速度下的动能等于它的静止能量?

解 因为  $p_{\text{相}} = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $p_{\text{非}} = m_0 v$

所以由  $\frac{p_{\text{相}}}{p_{\text{非}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2$

可得  $v > \frac{\sqrt{3}}{2}c = 2.60 \times 10^8 \text{ m/s}$

又由  $E_{\text{k}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2$

可得  $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 2.60 \times 10^8 \text{ m/s}$

**【7-20】** 一个电子从静止开始加速到  $0.1c$  的速度,需要对它做多少功? 速度从  $0.9c$  加速到  $0.99c$  又要做多少功?

解  $A_1 = \Delta E_{\text{k}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (0.1c/c)^2}} - m_0 c^2$   
 $= 0.005 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \text{ J}$   
 $= 4.095 \times 10^{-16} \text{ J} = 2.57 \text{ keV}$

$$A_2 = \Delta E_{\text{k}} = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99c}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.9c}{c}\right)^2}} \right] m_0 c^2$$

$$= \frac{4.80 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$= 2.46 \times 10^3 \text{ keV}$$

**【7-21】** 设有一  $\pi^+$  介子, 在静止下来后, 衰变为  $\mu^+$  子和中微子  $\nu$ , 三者的静止质量分别为  $m_\pi, m_\mu$  和 0。求  $\mu^+$  子和中微子  $\nu$  的动能。

解 根据能量守恒

$$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu$$

对  $\mu^+$  子, 有

$$E_\mu^2 = m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2$$

对中微子  $\nu$ , 有

$$E_\nu^2 = m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2 = p_\nu^2 c^2$$

又由动量守恒

$$0 = p_\mu + p_\nu$$

联解上述四式, 可得

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}, \quad E_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

所以 
$$E_{k\mu} = E_\mu - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$$

$$E_{k\nu} = E_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

**【7-22】** 一中性  $\pi$  介子相对于观察者以速度  $v = kc$  运动, 后衰变为两个光子。两光子的运动轨迹与  $\pi$  介子原来方向成相等的角度  $\theta$  (图 7-1)。证明: (1) 两光子有相等的能量; (2)  $\cos\theta = k$ 。

解 (1) 设两光子的能量分别为  $E_1$  和  $E_2$ , 则其动量分别为  $p_1 = E_1/c$  和  $p_2 = E_2/c$ , 由竖直方向动量守恒有

$$p_1 \sin\theta - p_2 \sin\theta = 0$$

即 
$$\frac{E_1}{c} \sin\theta - \frac{E_2}{c} \sin\theta = 0$$

所以 
$$E_1 = E_2$$

(2) 水平方向动量守恒, 有

$$\frac{m_{\pi 0} v}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{E_1}{c} \cos\theta + \frac{E_2}{c} \cos\theta$$

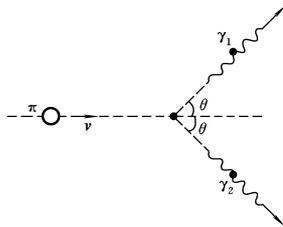


图 7-1

又据能量守恒,有 
$$\frac{m_{\pi_0}c^2}{\sqrt{1-k^2}} = E_1 + E_2$$

联解可得 
$$\frac{m_{\pi_0}v}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{2E_1}{c}\cos\theta = \frac{m_{\pi_0}c}{\sqrt{1-k^2}}\cos\theta$$

所以 
$$\cos\theta = \frac{v}{c} = k$$

**【7-23】** 质量为  $m_0$  的一个受激原子,静止在参考系 K 中,因发射一个光子而反冲,原子的内能减少了  $\Delta E$ ,而光子的能量为  $h\nu$ 。

试证:  $h\nu = \Delta E \left( 1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2} \right)$ 。

证 本题应用动量守恒、能量守恒及能量动量关系式。注意原子内能减少的含义。

设反冲原子质量为  $m'$ ,其相应静质量为  $m'_0$ ,则原子内能减少量  $\Delta E = m_0c^2 - m'_0c^2$ ,它为原子发射前后对应静能之差。

又设反冲原子速度为  $v$ ,根据动量守恒定律有

$$p = m'v = \frac{m'_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h\nu}{c}$$

由能量守恒定律有

$$m_0c^2 = h\nu + m'c^2$$

将上面的  $m'v$  和  $m'c^2$  代入反冲原子的能量动量关系式

$$(m'c^2)^2 = (m'v)^2c^2 + (m'_0c^2)^2$$

可得 
$$(m_0^2 - m'^2)c^2 = 2m_0h\nu$$

即 
$$\Delta E(m_0 + m'_0) = 2m_0h\nu$$

从而有

$$\begin{aligned} h\nu &= \frac{\Delta E}{2m_0}(m_0 + m'_0) = \frac{\Delta E}{2m_0} \left( m_0 + \frac{m_0c^2 - \Delta E}{c^2} \right) \\ &= \Delta E \left( 1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2} \right) \end{aligned}$$

# 第二篇

热

学

# 第八章 气体动理论

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 平衡态和平衡过程

**平衡态** 在不受外界影响的条件下,一个系统的宏观性质不随时间改变的状态。

**平衡过程** 进展十分缓慢,使所经历的一系列中间状态,都无限接近平衡状态的过程。

### 2. 理想气体状态方程

在平衡态下 
$$pV = \frac{m}{M}RT$$

### 3. 理想气体压强公式

平均平动动能 
$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}m_0\bar{v}^2$$

压强公式 
$$p = \frac{1}{3}nm_0\bar{v}^2 = \frac{2}{3}n\bar{\omega}$$

### 4. 理想气体温度公式

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}m_0\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT$$

### 5. 能量均分定理

每一个自由度的平均动能为 
$$\frac{1}{2}kT$$

一个分子的总平均动能为 
$$\frac{i}{2}kT$$

1 mol 理想气体的内能 
$$E_0 = \frac{i}{2}RT$$

质量为  $m$  (摩尔质量为  $M$ ) 的理想气体内能

$$E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT$$

### 6. 麦克斯韦速率分布

速率分布函数  $f(v) = \frac{\Delta N}{N \Delta v}$

麦克斯韦速率分布函数

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2$$

分子速率的三个统计值

算术平均速率

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

### 7. 玻耳兹曼分布律

平衡态下某状态区间(粒子能量为  $E$ )的粒子数正比于  $e^{-\frac{E}{kT}}$ 。

重力场中粒子按高度的分布

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$$

### 8. 气体分子的平均自由程

平均碰撞次数  $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n$

平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$

### 9. 气体内的迁移现象

粘滞现象  $F_v = \pm \eta \frac{du}{dy} \Delta S, \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$

$$\text{热传导} \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa \frac{dT}{dx} \Delta S, \quad \kappa = \frac{1}{3} \frac{C_{V,m}}{M} \rho \bar{v} \lambda$$

$$\text{扩散} \quad \frac{\Delta M}{\Delta t} = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S, \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda$$

## 10. 范德瓦耳斯方程

有吸引力的刚性球分子模型

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

$$\left( p + \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT$$

## 思考题解答

**【8-1】** 试解释气体为什么容易压缩,却又不能无限地压缩。

答 因为气体分子间有较大距离,往往远大于其线度,所以很容易压缩。

又由于气体分子本身有大小,所以气体不能无限压缩。

**【8-2】** 气体在平衡状态时有何特征?这时气体中有分子热运动吗?热力学中的平衡与力学中的平衡有何不同?

答 气体处于平衡状态时,它与外界没有能量交换、内部没有任何形式的能量转换(如没有发生化学变化或原子核的变化等)、也没有外场作用,气体各部分将达到相同的温度和压强,温度和压强也不随时间变化。

气体在平衡状态时,组成系统的分子仍在不停地运动着,亦即有分子热运动。只不过分子运动的平均效果不随时间变化,表现为在宏观上的密度均匀、温度均匀和压强均匀。

热力学中的平衡与力学中的平衡是两个不同的概念。力学中的平衡是指系统所受合外力为零的静止或匀速运动问题。如整个气体在外场不存在时处于均匀的压强之下,该气体就处于力学平衡之中。热力学中的平衡是指系统在一定条件下,其宏观性质不随

时间变化,但组成系统的分子却不断处于运动之中,从而与运动有关的统计平均量不随时间改变,它是一种热动平衡。

**【8-3】** 对一定量的气体来说,当温度不变时,气体的压强随体积的减小而增大;当体积不变时,压强随温度的升高而增大。就微观来看,它们是否有区别?

答 就微观来看,它们有区别。

从分子动理论分析,对一定量的气体,当温度不变时,体积的减小会使单位体积内的分子数增多。这样一来,单位时间内与器壁碰撞的分子数就增多,器壁所受的平均冲力就增大,因而压强增大。

当体积不变时,单位体积内的分子数也不变。但由于温度升高,分子的热运动加剧,热运动速度增大。这样,一方面在单位时间内,每个分子与器壁的平均碰撞次数增多;另一方面,每一次碰撞施于器壁的冲力也加大,结果使压强增大。

**【8-4】** 如果气体由几种类型的分子组成,写出混合气体的压强公式。

答 道尔顿分压定律:混合气体(不发生化学变化)总压强等于组成该混合气体的各种成分气体单独占有该容器的分压强之和。

设各种成分气体的质量和相应摩尔质量分别为  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i; M_1, M_2, M_3, \dots, M_i$ 。根据压强公式知,混合气体的压强为

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i \\ &= \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \frac{m_3}{M_3} + \dots + \frac{m_i}{M_i} \right) \frac{RT}{V} \end{aligned}$$

**【8-5】** 给汽车轮胎打气,使达到所需要的压强。问在夏天与冬天,打入轮胎内的空气质量是否相同?为什么?

答 不相同。冬天打入的空气质量较多。

根据理想气体状态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  可知,把空气近似视为理

想气体,  $M$  为空气的平均摩尔质量。当压强  $p$  和体积  $V$  相同时, 温度  $T$  越低,  $m$  越大。由于冬天的气温比夏天的低, 所以冬天打入轮胎内的空气质量  $m$  比夏天打入的多。

**【8-6】** 试用气体的分子热运动说明为什么大气中氢的含量极少。

答 地球表面的逃逸速度为逃逸地球引力所需要的从地面出发的最小速度, 其值为

$$v = \sqrt{\frac{2G_0 m_E}{R}} = \sqrt{2Rg} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

假设地球上温度为 300 K, 根据气体分子热运动理论可知, 氢的方均根速率为

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{2 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1.93 \times 10^3 \text{ m/s}$$

比较上述两种速度, 可以知道有相当多的氢从地球逃逸掉了, 所以在地球大气中氢的含量极少。

**【8-7】** 回答下列问题:

(1) 气体中一个分子的速率在  $v \sim v + \Delta v$  间隔内的概率是多少?

(2) 一个分子具有最概然速率的概率是多少?

(3) 气体中所有分子在某一瞬时速率的平均值是  $\bar{v}$ , 则一个气体分子在较长时间内的平均速率应如何考虑?

答 气体分子速率分布函数为

$$f(v) = \frac{\Delta N}{N \Delta v}$$

它表示在速率  $v$  附近单位速率间隔内气体分子数占总分子数的百分数; 或对单个分子来说, 表示分子具有速率在该单位速率间隔内的概率。据此, 有

$$(1) f(v) \Delta v = \frac{\Delta N}{N}$$

$$(2) f(v_p) = \frac{\Delta N}{N \Delta v}$$

(3) 由  $\bar{v} = \int_0^{\infty} f(v)v dv$  中分布函数的意义, 一个气体分子在较长时间内的平均速率应与气体中所有分子在某一瞬时速率的平均值一样, 均为  $\bar{v}$ 。当然, 其前提是保持温度不变。

**【8-8】** 气体分子的最概然速率、平均速率以及方均根速率各是怎样定义的? 它们的大小由哪些因素决定? 各有什么用处?

答 在气体分子的速率分布曲线上有一个最大值, 与这个最大值相应的速率值  $v_p$ , 叫做最概然速率。

分子速率大小的算术平均值, 叫做算术平均速率, 简称平均速率, 表示为  $\bar{v}$ 。

气体分子速率的平方的平均值再开方, 称做方均根速率, 表示为  $v_{\text{rms}} = \sqrt{\bar{v}^2}$ 。

计算可得三种速率大小为

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

它们均由气体的摩尔质量和温度所决定。

在讨论速率分布时, 要用到大量分子的最概然速率; 计算分子运动的平均距离, 即平均自由程时, 要用算术平均速率; 计算分子的平均平动动能时, 要用方均根速率。

**【8-9】** 在同一温度下, 不同气体分子的平均平动动能相等。因氧分子的质量比氢分子的为大, 则氢分子的速率是否一定大于氧分子的呢?

答 不一定。由于气体分子运动的速率遵循统计规律, 并不是每个分子每时每刻都以同样的速率运动。在平均平动动能公式  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2$  中,  $\bar{v}^2$  是对大量分子而言的, 它包含了速率从 0 到  $\infty$ 。因此, 同一温度下就平均平动动能相同的氢和氧来说, 只能说氢分子的速率平方的平均比氧分子速率平方的平均大, 而不能说每个氢

分子的速率一定比氧分子的速率大。

**【8-10】** 如盛有气体的容器相对于某坐标系从静止开始运动,容器内的分子速度相对于这坐标系也将增大,则气体的温度会不会因此升高呢?

答 不会。因为温度所反映的运动,是在质心参考系中表现的分子的无规则运动,即热运动。温度与物体的整体运动无关,物体的整体运动是其中所有分子的一种有规则运动的表现。盛有气体的容器相对某坐标系运动,只是在大量分子的热运动上附加了一个定向运动,这个有规则的定向运动并没有加剧分子的热运动。与这个整体定向运动速度相联系的动能是其轨道动能,温度和轨道动能无关。

**【8-11】** 速率分布函数的物理意义是什么? 试说明下列各量的意义:(1)  $f(v)dv$ ; (2)  $Nf(v)dv$ ; (3)  $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$ ; (4)  $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$ ; (5)  $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv$ ; (6)  $\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv$ 。

答 速率分布函数  $f(v) = \frac{\Delta N}{N\Delta v}$  的物理意义为:在速率  $v$  附近单位速率间隔内的气体分子数占总分子数的百分比,或对单个分子而言,表示该分子速率在  $v$  附近单位速率间隔内的概率。

(1)  $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ , 速率在  $v \sim v+dv$  区间里的分子数占总分子数的百分比,或一个分子速率在  $v \sim v+dv$  区间里的概率。

(2)  $Nf(v)dv = dN$ , 分子速率在  $v \sim v+dv$  区间里的分子数。

(3)  $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dN}{N} = \frac{1}{N} \int_{v_1}^{v_2} dN$ , 分子速率在  $v_1 \sim v_2$  区间里的分子数占总分子数的百分比,或一气体分子速率在  $v_1 \sim v_2$  区间的概率。

(4)  $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \int_{v_1}^{v_2} dN$ , 表示分子速率在  $v_1 \sim v_2$  区间里的分子数。

(5)  $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv = \frac{1}{N} \int_{v_1}^{v_2} v dN$ , 其中  $\int_{v_1}^{v_2} v dN$  表示在  $v_1 \sim v_2$  区间内所有分子的速率的总和,  $N$  是系统的总分子数。

(6)  $\int_{v_1}^{v_2} N v f(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} v dN$ , 表示在速率  $v_1 \sim v_2$  区间内所有分子的速率的总和。

**【8-12】** 何谓起伏现象?

答 在实验中对表征大量分子集体特征的宏观量可以进行测量, 但各次测量可能结果会略有差别, 例如测量某体积中的气体密度, 各次测得的分子数都有小的差别。根据多次的测量值可以得到一个测量平均值, 相对这个平均值而言, 个别测量值都有微小的偏差。这种相对于平均值所出现的偏离, 就是起伏现象。布朗运动即为起伏现象之一例。

**【8-13】** 一定质量的气体, 保持容器的容积不变。当温度增加时, 分子运动更趋剧烈, 因而平均碰撞次数增多, 平均自由程是否也因而减小呢?

答 不会。

根据平均自由程计算公式  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$  可知, 对于一定质量的气体, 体积不变  $n$  就不变, 所以  $\bar{\lambda}$  不会减小。

再考虑  $n = \frac{p}{kT}$ ,  $n$  不变则  $\frac{p}{T}$  不变, 温度升高则  $p$  变大, 其比值不变。当温度升高时, 由于分子运动加剧致使平均碰撞次数增加、两次碰撞之间的平均间隔时间  $\overline{\Delta t}$  减小, 但平均速率  $\bar{v}$  却增加, 因而平均自由程  $\bar{\lambda} = \bar{v} \overline{\Delta t}$  并不会减少。

实验证明, 当气体密度一定时, 分子有效直径  $d$  会随温度增加而减小, 所以当  $\frac{p}{T}$  不变时,  $\bar{\lambda}$  将随温度增加而略有增加。

**【8-14】** 平均自由程与气体的状态以及分子本身的性质有何关系? 在计算平均自由程时, 什么地方体现了统计平均?

答 由  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$  可知, 平均自由程与气体的状态参量  $T$  成正比, 与压强  $p$  成反比。与分子本身的性质关系表现在  $\bar{\lambda}$  与分子的有效直径  $d$  成反比, 不同种类的气体分子其有效直径不一样。

根据  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$ , 平均速率  $\bar{v}$  和平均碰撞频率  $\bar{Z}$  体现了统计平均。

**【8-15】** 分子热运动与分子间的碰撞, 在迁移现象中各起什么作用? 哪些物理量体现了它们的作用?

答 分子热运动在迁移现象中使分子不断相互掺和, 使气体宏观物理性质原来不均匀的各部分(例如流速、温度或密度)交换分子, 因而净迁移动量、热运动能量、质量。在迁移现象中碰撞使分子间交换动量、热运动能量, 迁移过程进行的快慢取决于分子相互碰撞的频繁程度。

平均速率  $\bar{v}$  体现了分子热运动的作用, 平均自由程  $\bar{\lambda}$  体现了分子间的碰撞的作用。

## 习题解答

**【8-1】** 有一水银气压计, 当水银柱为 0.76 m 高时, 管顶离水银柱液面为 0.12 m。管的截面积为  $2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。当有少量氦气混入水银管内顶部时, 水银柱高下降为 0.60 m。此时温度为 27°C, 试计算有多少质量氦气在管顶?(氦的摩尔质量为 0.004 kg/mol, 0.76 m 水银柱压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。)

解 据题意可知, 水银柱两次的高度分别为  $h_1 = 0.76 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0.60 \text{ m}$ 。可查知水银的重度  $d_{\text{汞}} = 1.33 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ 。

对于混入管顶内部氦气, 其压强为

$$\begin{aligned} p &= (h_1 - h_2) d_{\text{汞}} = (0.76 - 0.60) \times 1.33 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 2.13 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

体积为  $V = 0.28 \times 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 5.6 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

温度为  $T = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$

根据理想气体状态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$

可得 
$$m = \frac{pVM}{RT} = \frac{0.004 \times 5.6 \times 10^{-5} \times 2.13 \times 10^4}{8.31 \times 300} \text{ kg}$$

$$= 1.91 \times 10^{-6} \text{ kg}$$

**【8-2】** 一体积为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器中, 含有  $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$  的氦气和  $4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}$  的氢气, 它们的温度为  $30^\circ\text{C}$ , 试求容器中混合气体的压强。

解 注意应用道尔顿定律。

根据道尔顿定律, 相互不起反应的混合气体的总压强, 等于混合气体中各成分分子单独占据整个容积的分压强的和。则

$$p = p_1 + p_2$$

据题意, 体积  $V = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 温度  $T = (273 + 30) \text{ K} = 303 \text{ K}$ , 氦气对容器的分压强

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} = \frac{4.0 \times 10^{-5} \times 8.31 \times 303}{4.0 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 2.52 \times 10^4 \text{ Pa}$$

氢气对容器的分压强

$$p_2 = \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V} = \frac{4.0 \times 10^{-5} \times 8.31 \times 303}{2.0 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 5.04 \times 10^4 \text{ Pa}$$

所以  $p = p_1 + p_2 = 7.56 \times 10^4 \text{ Pa}$

**【8-3】** 一个封闭的圆筒, 内部被导热的、不漏气的可移动活塞隔为两部分。最初, 活塞位于筒中央, 圆筒两侧的长度  $l_1 = l_2$ 。当两侧各充以  $T_1, p_1$  与  $T_2, p_2$  的相同气体后, 问平衡时活塞将在什么位置上(即  $l_1/l_2$  是多少)? 已知  $p_1 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = 680 \text{ K}$ ,  $p_2 = 2.026 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_2 = 280 \text{ K}$ 。

解 注意题中两侧相同气体的含义。

设平衡时两侧体积分别为  $V_1, V_2$ , 圆筒横截面积为  $S$ , 则有  $V_1 = Sl_1, V_2 = Sl_2$ 。平衡时压强、温度相同, 设为  $p, T$ , 有

$$\frac{p_1 V_0}{T_1} = \frac{p V_1}{T}, \quad \frac{p_2 V_0}{T_2} = \frac{p V_2}{T}$$

所以 
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1 T_2}{T_1 p_2} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 280}{680 \times 2.026 \times 10^5} = \frac{7}{34}$$

**【8-4】** 20 个质点的速率如下: 2 个具有速率  $v_0$ , 3 个具有速率  $2v_0$ , 5 个具有速率  $3v_0$ , 4 个具有速率  $4v_0$ , 3 个具有速率  $5v_0$ , 2 个具有速率  $6v_0$ , 1 个具有速率  $7v_0$ 。试计算: (1) 平均速率; (2) 方均根速率; (3) 最概然速率。

解 根据定义, 有

$$\begin{aligned} (1) \quad \bar{v} &= \frac{2 \times v_0 + 3 \times 2v_0 + 5 \times 3v_0 + 4 \times 4v_0 + 3 \times 5v_0 + 2 \times 6v_0 + 7v_0}{20} \\ &= \frac{73}{20} v_0 = 3.65 v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{\bar{v^2}} &= \left[ \frac{2 \times v_0^2 + 3 \times (2v_0)^2 + 5 \times (3v_0)^2 + 4 \times (4v_0)^2 + 3 \times (5v_0)^2 + 2 \times (6v_0)^2 + (7v_0)^2}{20} \right]^{1/2} \\ &= \left( \frac{319v_0^2}{20} \right)^{1/2} = 3.99 v_0 \end{aligned}$$

(3) 因为有 5 个质点速率  $3v_0$ , 所以

$$v_p = 3v_0$$

**【8-5】** 计算在 300 K 温度下, 氢、氧和水银蒸气分子的方均根速率和平均平动动能。

解 由方均根速率公式  $\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  可知,

对氢分子  $M = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,

$$\sqrt{\bar{v_{H_2}^2}} = 1.73 \times \sqrt{\frac{8.31 \times 300}{2 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 1931 \text{ m/s}$$

对氧分子  $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,

$$\sqrt{\bar{v_{O_2}^2}} = 1.73 \times \sqrt{\frac{8.31 \times 300}{32 \times 10^{-3}}} \text{ m/s} = 483 \text{ m/s}$$

对水银蒸气分子  $M = 0.201 \text{ kg/mol}$ ,

$$\sqrt{\bar{v_{Hg}^2}} = 1.73 \times \sqrt{\frac{8.31 \times 300}{0.201}} \text{ m/s} = 193 \text{ m/s}$$

因为平均平动动能只和温度有关,所以三种分子的平均平动动能相等,均为

$$\bar{w} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \text{ J} = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

**【8-6】** 求速度大小在  $v_p$  与  $1.01v_p$  之间的气体分子数占总分子数的百分之几。

解 根据  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$ , 可以将麦克斯韦速率分布函数公式改写为

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \Delta x$$

式中  $x = \frac{v}{v_p}$ ,  $\Delta x = \frac{\Delta v}{v_p}$ 。据题意  $v = v_p$ , 所以

$$x = 1, \quad \Delta v = 0.01v_p, \quad \Delta x = 0.01$$

代入, 有  $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \times 0.01 = 0.83\%$

**【8-7】** 求: (1) 速度大小在 0 与  $v_p$  之间的气体分子的平均速率; (2) 速度大小比  $v_p$  大的气体分子的平均速率。

(提示:  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.8427$ ;  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1$ 。)

解 根据定义计算。

(1) 设在 0 与  $v_p$  之间的气体分子的算术平均速率为  $\bar{v}$ , 则

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_p} v dN}{\int_0^{v_p} dN} = \frac{\int_0^{v_p} v^3 e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} dv}{\int_0^{v_p} v^2 e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} dv}$$

令  $x = \frac{v}{v_p}$ , 有  $dv = v_p dx$ , 所以

$$\bar{v} = \frac{v_p \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx}{\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx} = \frac{v_p \int_0^1 x^2 de^{-x^2}}{\int_0^1 x de^{-x^2}} = v_p \frac{(e^{-1} + e^{-1} - 1)}{(e^{-1} - 0.84 \sqrt{\pi/2})}$$

$$= 0.705v_p$$

(2) 设比  $v_p$  大的气体分子的平均速率为  $\bar{v}'$ , 同上可得

$$\begin{aligned}\bar{v}' &= \frac{v_p \int_1^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx}{\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx} = v_p \frac{\int_1^{\infty} x^2 d(e^{-x^2})}{\int_1^{\infty} x d(e^{-x^2})} \\ &= v_p \frac{(0 - e^{-1} - e^{-1})}{0 - e^{-1} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - 0.84)} = 1.4v_p\end{aligned}$$

**【8-8】** 遵守麦克斯韦速率分布的分子的最概然能量  $E_p$  等于什么量值? 它就是  $\frac{1}{2}m_0v_p^2$  吗?

解 本题注意最概然能量满足的条件。应用麦克斯韦速率分布的能量分布形式。

由  $E = \frac{1}{2}m_0v^2$  可得  $v^2 = \frac{2E}{m_0}$ ,  $dv = \frac{dE}{\sqrt{2m_0E}}$ 。代入麦克斯韦速率

分布函数中, 可得

$$dN_E = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

$$\frac{dN_E}{dE} = \frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}$$

最概然能量必须满足  $\frac{d}{dE} \left( \frac{dN_E}{dE} \right) = 0$

$$\text{即有} \quad \frac{1}{2}(\sqrt{E})^{-1} e^{-\frac{E}{kT}} - \sqrt{E} \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} = 0$$

$$\text{所以} \quad E_p = \frac{1}{2}kT$$

当分子速率为  $v_p$  时, 它具有的能量为

$$\frac{1}{2}m_0v_p^2 = \frac{1}{2}m_0 \left[ \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \right]^2 = kT$$

$$\text{显然} \quad E_p \neq \frac{1}{2}m_0v_p^2$$

**【8-9】** 设  $N$  个粒子系统的速率分布函数为

$$dN_v = Kdv \quad (v' > v > 0, K \text{ 为常量})$$

$$dN_v = 0 \quad (v > v')$$

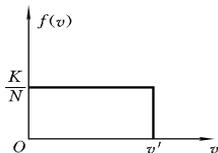
(1) 画出分布函数图; (2) 用  $N$  和  $v'$  定出常量  $K$ ; (3) 用  $v'$  表示出算术平均速率和方均根速率。

解 注意本题给出的分布函数形式。

(1) 因为  $dN_v = Kdv$ , 所以

$$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv} = \frac{K}{N} \quad (v' > v > 0)$$

$$f(v) = 0 \quad (v > v')$$



其函数图如图 8-1 所示。

$$(2) \text{ 由 } \int_0^{v'} f(v)dv = \int_0^{v'} \frac{K}{N}dv = 1$$

图 8-1

可得 
$$K = \frac{N}{v'}$$

(3) 因为  $f(v)$  已经归一化, 所以

$$\bar{v} = \int_0^{v'} v f(v)dv = \frac{K}{N} \int_0^{v'} v dv = \frac{K}{N} \cdot \frac{1}{2} v'^2 = \frac{1}{2} v'$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \left( \int_0^{v'} v^2 f(v)dv \right)^{1/2} = \left( \frac{K}{N} \frac{1}{3} v'^3 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} v'$$

**【8-10】** 设氢气的温度为  $300\text{ C}$ 。求速度大小在  $3\ 000\text{ m/s}$  到  $3\ 010\text{ m/s}$  之间的分子数  $n_1$  与速度大小在  $v_p$  到  $(v_p+10)\text{ m/s}$  之间的分子数  $n_2$  之比。

解 见题 8-6, 可将麦克斯韦速率分布函数公式改写为

$$\Delta N = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \Delta x$$

所以速度在  $3\ 000\text{ m/s}$  到  $3\ 010\text{ m/s}$  间的分子数

$$n_1 = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3\ 000}{v_p} \right)^2 e^{-\left( \frac{3\ 000}{v_p} \right)^2} \cdot \frac{10}{v_p}$$

速度大小在  $v_p$  到  $(v_p+10)\text{ m/s}$  间的分子数

$$n_2 = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \times \frac{10}{v_p}$$

相除可得 
$$\frac{n_1}{n_2} = \left( \frac{3\,000}{v_p} \right)^2 e^{-\left( \frac{3\,000}{v_p} \right)^2} \cdot e$$

又因氢气在温度  $T = (273 + 300) \text{ K} = 573 \text{ K}$  时的最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 573}{0.002}} \text{ m/s} = 2\,182 \text{ m/s}$$

所以代入计算得 
$$\frac{n_1}{n_2} = 0.78$$

**【8-11】** 求氢气在  $300 \text{ K}$  时分子速率在  $(v_p - 10) \text{ m/s}$  与  $(v_p + 10) \text{ m/s}$  之间的分子数所占百分比。

解 本题与上题属同一类型。原则上这类题均可由麦克斯韦速率分布函数进行积分运算求出。但当速率区间较小时,采用上述办法更简便。下面不用前述技巧,直接近似计算。

当  $T = 300 \text{ K}$  时,氢气的最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{0.002}} \text{ m/s} = 1\,579 \text{ m/s}$$

根据麦克斯韦速率分布律,在  $v \sim v + \Delta v$  区间内的分子数占分子总数的比率为

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0}{2kT}v^2} \cdot v^2 \cdot \Delta v$$

按题意,  $v = v_p - 10$ ,  $\Delta v = (v_p + 10) - (v_p - 10) = 20 \text{ m/s}$ 。而  $v_p \gg 10$

$\text{m/s}$ , 所以可取  $v \approx v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$ , 代入可得

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \times \frac{20}{v_p} = \frac{4}{1.772 \times 2.718} \frac{20}{1\,579} = 1.05\%$$

**【8-12】** 试求温度为  $T$ 、分子质量为  $m$  的气体中分子速率倒数的平均值  $\left( \frac{1}{v} \right)$ , 它是否等于  $\frac{1}{v}$ ? (提示:  $\int_0^{\infty} e^{-bu^2} u du = \frac{1}{2b}$ 。)

解 根据分布函数求平均值。

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{v}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{1}{v} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 dv \\
 &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\
 &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2 \times \frac{m}{2kT}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\bar{v}}
 \end{aligned}$$

显然  $\left(\frac{1}{v}\right) \neq \frac{1}{\bar{v}}$ 。

**【8-13】** 1 mol 氢气, 在温度为 27°C 时, 它的分子的平均动能和转动动能各为多少?

解 注意理想气体的内能只是分子各种运动能量的总和。

据题意  $T = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$ , 对 1 mol 的氢气有  $E_0 = \frac{i}{2} RT$ , 平动  $i = 3$ , 则

$$E_{0t} = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \times 8.31 \times 300 \text{ J} = 3.74 \times 10^3 \text{ J}$$

转动  $i = 2$ , 则

$$E_{0r} = \frac{2}{2} RT = 8.31 \times 300 \text{ J} = 2.49 \times 10^3 \text{ J}$$

**【8-14】** 求上升到什么高度处, 大气压强减到地面的 75%。设空气的温度为 0°C, 空气的摩尔质量为 0.028 9 kg/mol。

解 本题属重力场中粒子按高度分布问题。

已知  $T = 273 \text{ K}$ , 设在地面时压强为  $p_0$ , 当上升到高度为  $Z$  时压强为  $p$ 。按气压公式

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g Z}{kT}} = p_0 e^{-\frac{MgZ}{RT}}$$

可得

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{MgZ}{RT}$$

又因为  $\frac{p}{p_0} = 75\%$ , 大气的  $M = 0.028 9 \text{ kg/mol}$ , 所以

$$Z = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{p}{p_0} = \left( -\frac{8.31 \times 273}{0.0289 \times 9.8} \times \ln 0.75 \right) \text{ m}$$

$$= 2300 \text{ m} = 2.3 \text{ km}$$

**【8-15】** 求压强为  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、质量为  $2 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 、容积为  $1.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的氧气的分子平均平动动能。

解 由  $p = \frac{2}{3} n \bar{w}$  可得

$$\bar{w} = \frac{3p}{2} \frac{1}{n}$$

而

$$n = \frac{\frac{m}{M} N_A}{V} = \frac{m N_A}{MV}$$

所以

$$\bar{w} = \frac{3p}{2} \cdot \frac{MV}{m N_A}$$

$$= \frac{3 \times 1.013 \times 10^5 \times 0.032 \times 1.54 \times 10^{-3}}{2 \times 2 \times 10^{-3} \times 6.022 \times 10^{23}} \text{ J}$$

$$= 6.22 \times 10^{-21} \text{ J}$$

**【8-16】** 容器内储有  $1 \text{ mol}$  的某种气体,今从外界输入  $2.09 \times 10^2 \text{ J}$  的热量,测得其温度升高  $10 \text{ K}$ ,求该气体分子的自由度。

解 由  $E_0 = \frac{i}{2} RT$  有  $\Delta E_0 = \frac{i}{2} R \Delta T$ , 所以

$$i = \frac{2\Delta E}{R\Delta T} = \frac{2 \times 2.09 \times 10^2}{8.31 \times 10} = 5$$

**【8-17】** 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动。设导体中共有  $N$  个自由电子。电子气中电子的最大速率  $v_F$  叫做费米速率。电子的速率在  $v$  与  $v+dv$  之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

式中  $A$  为常量。(1) 由归一化条件求  $A$ 。(2) 证明电子气中电子的平均动能  $\bar{w} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} m v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F$ , 此处  $E_F$  叫做费米能。

解 (1) 据题意有  $f(v)dv = \frac{dN}{N}$ , 而归一化条件为

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

也即

$$\int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = \frac{4\pi A}{3N} v_F^3 = 1$$

所以

$$A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } \bar{v^2} &= \int_0^{\infty} v^2 f(v)dv = \int_0^{v_F} v^2 \frac{4\pi v^2 A}{N} dv \\ &= \frac{4\pi A}{N} \int_0^{v_F} v^4 dv = \frac{4\pi A}{5N} v_F^5 = \frac{3}{5} v_F^2 \end{aligned}$$

所以 
$$\bar{w} = \frac{1}{2} m \bar{v^2} = \frac{3}{5} \left( \frac{1}{2} m v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F$$

**[8-18]** 无线电所用的真空管的真空度为  $1.33 \times 10^{-3}$  Pa, 试求在  $27^\circ\text{C}$  时单位体积中的分子数及分子平均自由程。设分子的有效直径为  $3.0 \times 10^{-10}$  m。

解 已知  $T = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$ , 由  $p = nkT$  可得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.33 \times 10^{-3}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \text{ 个/m}^3 = 3.21 \times 10^{17} \text{ 个/m}^3$$

分子平均自由程

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \\ &= \frac{1}{1.41 \times 3.14 \times (3.0 \times 10^{-10})^2 \times 3.21 \times 10^{17}} \text{ m} \\ &= 7.82 \text{ m} \end{aligned}$$

**[8-19]** 在标准状态下氦气(He)的粘度  $\eta = 1.89 \times 10^{-5}$  Pa·s, 又摩尔质量  $M = 0.004 \text{ kg/mol}$ , 算术平均速率  $\bar{v} = 1.20 \times 10^3$  m/s, 试求:(1)在标准状态下氦原子的平均自由程;(2)氦原子的半径。

解 (1) 由公式  $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$  可得  $\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}}$ 。而气体密度  $\rho =$

$\frac{4 \times 10^{-3}}{22.4 \times 10^{-3}} \text{ kg/m}^3 = 0.179 \text{ kg/m}^3$ , 所以

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho v} = \frac{3 \times 1.89 \times 10^{-5}}{0.179 \times 1.20 \times 10^3} \text{ m} = 2.64 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(2) 因为  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$ , 所以

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \bar{\lambda} \pi p}} \\ &= \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{1.41 \times 2.64 \times 10^{-7} \times 3.14 \times 1.013 \times 10^5}} \text{ m} \\ &= 1.79 \times 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

氮原子半径为  $r = \frac{d}{2} = 0.90 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

**【8-20】** 设氮分子的有效直径为  $10^{-10} \text{ m}$ , (1) 求氮气在标准状态下的平均碰撞次数; (2) 如果温度不变, 气压降到  $1.33 \times 10^{-4} \text{ Pa}$ , 则平均碰撞次数又为多少?

解 (1) 在标准状态下, 氮气分子的平均速度为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{3.14 \times 0.028}} \text{ m/s} = 454 \text{ m/s}$$

由公式  $p = nkT$ , 可得单位体积内分子数

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} \text{ 个/m}^3 = 2.69 \times 10^{25} \text{ 个/m}^3$$

平均自由程

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \\ &= \frac{1}{1.41 \times 3.14 \times (10^{-10})^2 \times 2.69 \times 10^{25}} \text{ m} \\ &= 8.40 \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

所以平均碰撞次数

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{4.54 \times 10^2}{8.40 \times 10^{-7}} \text{ 次/s} = 5.40 \times 10^8 \text{ 次/s}$$

(2) 温度不变, 则  $\bar{v}$  不变。由  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$  可知,  $p$  减小,  $\bar{\lambda}$  增大, 所以平均碰撞次数减小。设气压降低之后的平均碰撞次数为  $\bar{Z}'$ , 气压为  $p'$ , 则

$$\frac{\bar{Z}'}{\bar{Z}} = \frac{p'}{p}$$

所以

$$\bar{Z}' = \frac{p'}{p} \bar{Z} = \frac{1.33 \times 10^{-4}}{1.013 \times 10^5} \times 5.40 \times 10^8 \text{ 次/s} = 0.71 \text{ 次/s}$$

**【8-21】** 在温度  $0^\circ\text{C}$  和压强  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  下, 空气密度是  $1.293 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{v} = 4.6 \times 10^2 \text{ m/s}$ ,  $\bar{\lambda} = 6.4 \times 10^{-8} \text{ m}$ , 求粘度。

解 按公式, 有

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{1}{3} \times 1.293 \times 6.4 \times 10^{-8} \times 4.6 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ &= 1.27 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

**【8-22】** 由实验测定在标准状态下, 氧气的扩散系数为  $1.87 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , 根据这数据计算氧分子的平均自由程和分子的有效直径。

解 对于氧气,  $M = 0.032 \text{ kg/mol}$ , 在温度  $T = 273 \text{ K}$  时, 其平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{3.14 \times 0.032}} \text{ m/s} = 425 \text{ m/s}$$

由公式  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$

可得  $\bar{\lambda} = \frac{3D}{\bar{v}} = \frac{3 \times 1.87 \times 10^{-5}}{425} \text{ m} = 1.32 \times 10^{-7} \text{ m}$

又因为  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$

所以  $d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \bar{\lambda} p}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{1.41 \times 3.14 \times 1.32 \times 10^{-7} \times 1.013 \times 10^5}} \text{ m} \\
 &= 2.52 \times 10^{-10} \text{ m}
 \end{aligned}$$

**【8-23】** 设有遵守范德瓦耳斯方程的1 mol 气体, 试建立起临界点温度与压强、体积之间的关系。

解 1 mol 气体的范德瓦耳斯方程为

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

整理可得 
$$V_m^3 - \left(\frac{pb + RT}{p}\right)V_m^2 + \frac{a}{p}V_m - \frac{ab}{p} = 0$$

在临界点( $p_k, V_m, T_k$ )时, 上式为

$$V_m^3 - \left(\frac{p_k b + RT_k}{p_k}\right)V_m^2 + \frac{a}{p_k}V_m - \frac{ab}{p_k} = 0$$

又因上面  $V_m$  的三次方程在临界点时  $V_m$  的三个根均为同一值  $V_k$ , 所以

$$(V_m - V_k)^3 = 0$$

展开为 
$$V_m^3 - 3V_k V_m^2 + 3V_k^2 V_m - V_k^3 = 0$$

将上式与临界点的三次方程相比较, 取对应项系数相等, 可得

$$\begin{cases}
 b + \frac{RT_k}{p_k} = 3V_k \\
 \frac{a}{p_k} = 3V_k^2 \\
 \frac{ab}{p_k} = V_k^3
 \end{cases}$$

所以 
$$\frac{RT_k}{p_k V_k} = \frac{8}{3}$$

**【8-24】**  $\text{CO}_2$  的临界温度为  $31^\circ\text{C}$ , 临界压强为  $73 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 求 1 mol 的  $\text{CO}_2$  的临界体积。

解 已知  $T_k = (273 + 31) \text{ K} = 304 \text{ K}$ ,  $p_k = 73 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。由上题结论可得

$$V_k = \frac{3RT_k}{8p_k} = \frac{3 \times 8.31 \times 304}{8 \times 73 \times 10^5} \text{ m}^3 = 1.30 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

**【8-25】**  $m = 10^{-3} \text{ kg}$  的氮气, 体积从  $0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  增大到  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 。求氮分子间引力所做的功。已知氮  $a = 1.408 \times 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$ 。

解 本题注意内压强概念。

在范德瓦耳斯方程中, 内压强  $p_i = \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2}$ , 它表示真实气体表面层所受到的内部分子的引力压强。当体积变化  $dV$  时, 它做的元功为  $dA = p_i dV$ , 所以当氮气体积从  $V_1 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  增加到  $V_2 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  时, 内压强  $p_i$  所做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p_i dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} dV = \left( \frac{m}{M} \right)^2 a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \\ &= \left( \frac{10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \right)^2 \times 1.408 \times 10^{-1} \times \left( \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} - \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \right) \text{ J} \\ &= 0.32 \text{ J} \end{aligned}$$

所以引力所做的功为  $A' = -0.32 \text{ J}$ 。

**【8-26】** 已知氮的临界压强  $p_k = 3.4 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_k = 0.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$ , 求它的范德瓦耳斯修正量  $a$  及  $b$ 。

解 在 8-23 题的解中已求出在临界点

$$\begin{cases} b + \frac{R \cdot T_k}{p_k} = 3V_k \\ \frac{a}{p_k} = 3V_k^2 \\ \frac{ab}{p_k} = V_k^3 \end{cases}$$

因而可求得

$$\begin{aligned} a &= 3V_k^2 p_k = 3 \times (0.9 \times 10^{-4})^2 \times 3.4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2 \\ &= 8.26 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2 \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{3} V_k = \frac{1}{3} \times 0.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol} = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$$

# 第九章 热力学基础

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 功

功是过程量。

准静态过程系统的体积功

$$dA = p dV, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

### 2. 热量与热容

热量是过程量。热容也是过程量。

摩尔定体热容 
$$C_{V,m} = \frac{(dQ)_V}{\frac{m}{M} dT}$$

定体过程热量 
$$(Q)_V = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_{V,m} dT$$

摩尔定压热容 
$$C_{p,m} = \frac{(dQ)_p}{\frac{m}{M} dT}$$

等压过程热量 
$$(Q)_p = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_{p,m} dT$$

理想气体摩尔热容

$$C_{V,m} = \frac{i}{2} R, \quad C_{p,m} = \frac{i+2}{2} R$$

迈耶公式

$$C_{p,m} = C_{V,m} + R$$

### 3. 内能

内能是状态量。

理想气体内能  $E = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT$

理想气体内能变化  $E_2 - E_1 = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_{v,m} dT$

#### 4. 热力学第一定律

$$Q = E_2 - E_1 + A, \quad dQ = dE + dA$$

#### 5. 等温过程

过程方程  $p_1 V_1 = p_2 V_2$

吸热等于对外做功

$$(Q)_T = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

#### 6. 绝热过程与多方过程

准静态绝热过程

$$pV^\gamma = \text{常量}, \quad V^{\gamma-1}T = \text{常量}, \quad p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{常量}$$

多方过程  $pV^n = \text{常量}$

#### 7. 循环过程

热循环 系统从高温热源吸热  $Q_1$ , 对外做功  $A$ , 向低温热源放热  $Q_2$  (放热量值), 效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

致冷循环 系统从低温热源吸热  $Q_2$ , 接受外界做功  $A$ , 向高温热源放热  $Q_1$ , 致冷系数为

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

#### 8. 卡诺循环

系统只和两个恒温热源 (高温  $T_1$ 、低温  $T_2$ ) 进行热交换的准静态循环过程。

正循环效率  $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

逆循环致冷系数  $w_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

### 9. 热力学第二定律

可逆过程与不可逆过程。

第二定律 一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的。

克劳修斯表述(热传导);开尔文表述(热功转换)。

### 10. 熵

克劳修斯熵公式

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left( \frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}, \quad dS = \left( \frac{dQ}{T} \right)_{\text{可逆}}$$

玻尔兹曼熵公式

$$S = k \ln W$$

熵增加原理 在封闭系统中发生的任何不可逆过程都有

$$\Delta S > 0$$

## 思考题解答

**【9-1】** 怎样区别内能与热量?下面哪种说法是正确的?(1)物体的温度愈高,则热量愈多;(2)物体的温度愈高,则内能愈大。

答 内能是状态量。在一定状态下,物体的内能有确定值,它是状态的单值函数。

热量是过程量。它与过程有关,离开热交换过程是无意义的。它是与传热过程相对应的能量交换的一种量度。

(1) 不对。因为物体温度愈高,物体内分子运动就愈剧烈,但并不一定表明它向其他系统放出很多能量。所以不能说温度愈高,热量愈多。例如绝热压缩过程,温度可以很高,但热量为零。

(2) 对理想气体才正确。对一定量的理想气体,内能是温度的单值函数,温度愈高,则内能愈大。如果不是理想气体,必须考虑分子间的相互作用势能。温度升高,虽然热运动动能增加,但体积变化也可使分子间的势能降低,因而内能仍可能减少。

**【9-2】** 说明在下列过程中热量、功与内能变化的正负：(1)用气筒打气；(2)水沸腾变成水汽。

答 (1) 气筒内的空气可作为一个系统，打气过程一般很快，系统和外界来不及进行热交换，因而视为绝热过程，有 $Q=0$ 。外界对气体做正功，气体对外做负功， $A<0$ 。由热力学第一定律 $Q=\Delta E+A$ ，有 $\Delta E>0$ ，即内能增加。

(2) 水沸腾变成水汽，是一个吸热过程，系统吸热为正，所以 $Q>0$ 。水汽体积较同质量的水大，即有 $dV>0$ ， $A=\int p dV$ ，对外做正功， $A>0$ 。水沸腾变成水汽过程中，温度不变。水分子间距离增大，分子间相互作用力做负功，使分子间的相互作用势能增大，因此内能也增大， $\Delta E>0$ 。

**【9-3】** 为什么气体热容的数值可以有无穷多个？什么情况下，气体的摩尔热容是零？什么情况下，气体的摩尔热容是无穷大？什么情况下是正值？什么情况下是负值？

答 通常把单位质量的某种气体温度升高 $1\text{ K}$  (或 $1\text{ }^\circ\text{C}$ )所吸收的热量称为该气体的比热容。一个系统温度升高 $1\text{ K}$ 所吸收的热量为系统的热容 $C=\frac{dQ}{dT}$ 。由定义知气体的热容与热量一样是过程量。对一定量的气体，从一个状态变化到另一状态，其变化过程可以不同，因而吸收的热量也不同，从而热容不同。由于变化过程可以有无穷多个，所以热容也就有无穷多个数值。

当系统物质的量为 $1\text{ mol}$ 时，它的热容为摩尔热容。对于绝热过程， $dQ=0$ ，不论气体温度升高还是降低，它都不与外界交换热量，因而气体的摩尔热容为零。

对于等温过程，无论气体吸收多少热量，气体温度不变，摩尔热容为无穷大。如果等温膨胀，从外界吸热，摩尔热容为正无穷大；如果是等温压缩，对外放热，摩尔热容为负无穷大。

在多方过程中，气体热容公式为

$$C = \frac{mR(n-\gamma)}{M(\gamma-1)(n-1)}$$

式中  $n$  为多方指数,  $\gamma$  为比热容比。因为  $\gamma > 1$ , 所以当  $n > \gamma$  或  $n < 1$  时, 热容  $C$  为正, 即系统温度升高时, 从外界吸热; 如果  $1 < n < \gamma$ , 热容  $C$  为负, 即系统温度升高时, 向外界放出热量。

**【9-4】** 一理想气体经图 9-1 所示的各过程, 试讨论其摩尔热容的正负: (1) 过程 I - II; (2) 过程 I' - II (沿绝热线); (3) 过程 II' - II。

答 在  $p$ - $V$  图中, 功

$$A = \int p dV$$

其值为曲线下的面积, 可正可负。

对理想气体, 两等温线之间的不同过程, 其内能变化相同。

图 9-1

根据热力学第一定律, 对 I' - II 过程, 有

$$Q' = \Delta E + A' = 0$$

可得

$$\Delta E = -A'$$

(1) 对 I - II 过程, 有

$$Q = \Delta E + A = -A' + A$$

由图 9-1 知  $|A| > |A'|$ , 可得

$$Q = -A' + A < 0$$

所以

$$C_m < 0$$

(2) 对 I' - II 过程, 由  $Q' = 0$  得  $C_m = 0$ 。

(3) 由图 9-1 知  $|A''| < |A'|$ , 对 II' - II 过程, 有

$$Q'' = \Delta E + A'' = -A' + A'' > 0$$

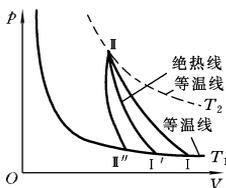
所以

$$C_m > 0$$

**【9-5】** 对物体加热而其温度不变, 有可能吗? 没有热交换而系统的温度发生变化, 有可能吗?

答 对物体加热而其温度不变, 有可能。例如等温膨胀, 温度不变, 吸热全部用来对外做功。

没有热交换而系统的温度发生变化也有可能。例如理想气体



绝热膨胀,内能减少而对外做功,系统温度降低。

**【9-6】** 为什么卡诺循环是最简单的循环过程?任意可逆循环需要多少个不同温度的热源?

答 卡诺循环只有两个热源,其过程是平衡过程,所以它是理想的可逆循环,也最简单。

任意一个循环,要做到过程可逆,系统所经过的中间状态必须无限缓慢,才能接近于平衡态。要做到这一点,需要有无限多个温差微小的恒温热源。

**【9-7】** 有两个可逆机分别用不同热源作卡诺循环,在  $p$ - $V$  图上,它们的循环曲线所包围的面积相等,但形态不同,如图 9-2 所示,它们吸热和放热的差值是否相同? 对外所做的净功是否相同? 效率是否相同?

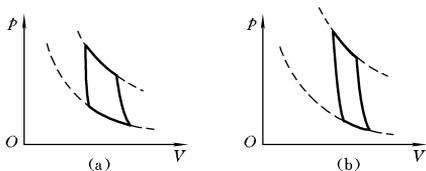


图 9-2

答 对一个循环,内能不变,所以吸热和放热的差值等于系统对外做的净功。因为两循环曲线包围的面积相等,即两循环对外做的净功相等,所以它们吸热和放热的差值相同。

根据卡诺热机效率  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ , 效率取决于高、低温热源温度比值。图 9-2 中所示两可逆机的  $T_2$  与  $T_1$  比值是不相同的,所以效率不同。

**【9-8】**  $p$ - $V$  图中表示循环过程的曲线所包围的面积,代表热机在一个循环中所做的净功。如图 9-3 所示,如果体积膨胀得大些,面积就大了(图中面积  $S_{abc'd'} > S_{abcd}$ ),所做的净功就多了,因此

热机效率也就可以提高了,这种说法对吗?

答 不对。由热机效率公式  $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  可知,效率取决于净功与吸热的比值,或放热与吸热的比值。即使净功增加,但如吸热也相应增加,热机效率也不会提高。

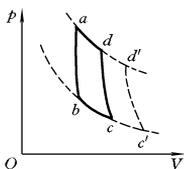


图 9-3

**【9-9】** 有一可逆的卡诺机,它作热机使用时,如果工作的两热源的温度差愈大,则对于做功就愈有利。当作致冷机使用时,如果两热源的温度差愈大,对于致冷是否也愈有利?为什么?

答 对于致冷不利。致冷机的功效常用从低温热源吸取的热量  $Q_2$  与所消耗的外功  $A$  的比值来衡量,即致冷系数

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

卡诺机的致冷系数为  $w = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

可见,可逆的卡诺机用作致冷机时,温差越大,  $w$  越小。这就意味着从低温热源吸取同样的热量时,消耗的外功越大,显然不利。

**【9-10】** 一条等温线与一条绝热线能否相交两次,为什么?

答 不能。用过程方程可以证明。假设可以相交两点  $A(p_1, V_1)$  和  $B(p_2, V_2)$ 。因为同在一条等温线和一条绝热线上,所以有

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

联立解得

$$V_1 = V_2, \quad p_1 = p_2$$

即  $A, B$  是同一点,等温线与绝热线不能相交两次。

也可利用热力学第二定律来证明。假设可以相交两次,则将形成一个循环过程。这样就可同一热源中吸取热量变成有用功而其他物体又不发生任何变化,显然这是违背热力学第二定律的。

**【9-11】** 两条绝热线与一条等温线能否构成一个循环,为什么?

答 不能。由于每一条绝热线上各点都具有确定的斜率,因此任意两条绝热线不能相交。而等温线又只能与绝热线相交一次,所以两条绝热线与一条等温线不能构成一个循环。

**【9-12】** 从原理上如何计算物体在始末状态之间进行不可逆过程所引起的熵变?

答 由于熵是状态函数,因而熵的变化只取决于始态和末态,而与所经历的过程无关。据此,我们可以在始态和末态之间任意设想一个可逆过程,从而计算这一可逆过程中的熵变,它也就是不可逆过程所引起熵变的量值。

**【9-13】** 在日常生活中,经常遇到一些单方向的过程,如:(1)桌上热餐变凉;(2)无支持的物体自由下落;(3)木头或其他燃料的燃烧。它们是否都与热力学第二定律有关?在这些过程中熵变是否存在?如果存在,是增大还是减小?

答 (1)与热力学第二定律有关。通过热传导,热量从热餐传到空气中,最后两者温度一致。在自然状态下,绝不会自发出现与此相反的过程。伴随此不可逆过程,熵变存在,是增大。

(2)如不考虑摩擦,与热力学第二定律无关。物体自由下落只是机械运动,机械能守恒,其熵不变。如考虑空气的摩擦,部分机械能转化为热能,则与热力学第二定律有关。有熵变,且增大。

(3)与热力学第二定律有关。燃料燃烧释放出的热能只是燃料的化学能,它们被排放进入周围环境(空气、水、大气)中,可用程度降低。这个过程熵变存在,熵增大。

**【9-14】** 一杯热水放在空气中,它总是冷却到与周围环境相同的温度,因为处于比周围温度高或低的概率都较小,而与周围同温度的平衡却是最概然状态,但是这杯水的熵却是减小了,这与熵增加原理有无矛盾?

答 熵增加原理指的是,一个封闭系统中发生的任何不可逆

过程都导致熵增加。但当系统与外界发生能量交换时,情况就有所不同,有熵流,导致水的熵减少。不过把周围环境和这杯热水一起作为一个封闭系统看待,则整个系统的熵仍是增加的。

**【9-15】** 一定量的气体,初始压强为  $p_1$ , 体积为  $V_1$ , 今把它压缩到  $V_1/2$ , 一种方法是等温压缩, 另一种方法是绝热压缩。问哪种方法最后的压强较大? 这两种方法中气体的熵改变吗?

答 过同一点  $(p_1, V_1)$  的绝热线与等温线, 在  $(p_1, V_1)$  点绝热线斜率绝对值比等温线斜率绝对值大, 即绝热线较陡。由于斜率均为负, 且体积由  $V_1$  压缩到  $V_1/2$  时压强均增大, 所以绝热压缩后的压强  $p_Q$  较大。

在等温压缩过程中, 由于放热, 有  $\frac{dQ}{T} < 0$ , 所以熵减少。绝热压缩过程中, 熵不变。

**【9-16】** 判别下面说法是否正确?

- (1) 功可以全部转化为热, 但热不能全部转化为功;
- (2) 热量能从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体。

答 (1) 不正确。当外界条件发生变化时, 热可以全部转化为功。如等温膨胀过程中, 系统吸收的热量全部转化为对外做功, 只不过体积发生了变化。

(2) 不正确。当通过外力对系统做功时, 可以使系统从低温物体吸取热量传到高温物体上, 致冷机(如冰箱)就是这样的装置。只不过热量不能自动地从低温物体传到高温物体。

## 习题解答

**【9-1】** 1 mol 单原子理想气体从 300 K 加热至 350 K, (1) 体积保持不变; (2) 压强保持不变。问在这两过程中各吸收了多少热量? 增加了多少内能? 对外做了多少功?

解 (1) 热力学第一定律

$$Q = \Delta E + A$$

因为体积不变,  $A = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} Q = \Delta E &= C_{V,m} \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T \\ &= \frac{3}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) \text{ J} = 623 \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 因为内能仅与温度有关, 所以

$$\begin{aligned} \Delta E &= C_{V,m} \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T \\ &= \frac{3}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) \text{ J} = 623 \text{ J} \end{aligned}$$

$$A = p \Delta V = R \Delta T = 8.31 \times (350 - 300) \text{ J} = 416 \text{ J}$$

$$Q = \Delta E + A = (623 + 416) \text{ J} = 1039 \text{ J}$$

**【9-2】** 在 1 g 氦气中加进 1 J 的热量, 若氦气压强并无变化, 它的初始温度为 200 K, 求它的温度升高多少?

解 等压过程。

因为  $Q = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$ , 所以

$$T_2 - T_1 = \frac{QM}{mC_{p,m}} = \frac{1 \times 4 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3} \times \frac{5}{2} \times 8.31} \text{ K} = 0.19 \text{ K}$$

**【9-3】** 压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为  $0.0082 \text{ m}^3$  的氮气, 从初始温度 300 K 加热到 400 K, 如加热时 (1) 体积不变; (2) 压强不变, 问各需热量多少? 哪一个过程所需热量大? 为什么?

解 等体与等压过程。

(1) 由  $p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1$  有

$$\frac{m}{M} = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{1.0 \times 10^5 \times 0.0082}{8.31 \times 300} = 0.33$$

所以

$$\begin{aligned}
 Q_V &= \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) \\
 &= 0.33 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (400 - 300) \text{ J} = 686 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad Q_p &= \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) \\
 &= 0.33 \times \frac{7}{2} \times 8.31 \times (400 - 300) \text{ J} = 960 \text{ J}
 \end{aligned}$$

由上述计算结果可知  $Q_p > Q_V$ 。因为两过程内能变化相等,但等压过程还要对外做功,所以等压过程需要吸取更多的能量。

**【9-4】** 2 mol 氮气,在温度为 300 K、压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  时,等温地压缩到  $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。求气体放出的热量。

解 等温过程  $\Delta E = 0$ , 所以  $Q = A$ 。而

$$\begin{aligned}
 A &= - \frac{m}{M} RT \ln \frac{P_2}{P_1} \\
 &= - 2 \times 8.31 \times 300 \times \ln \frac{2.0 \times 10^5}{1.0 \times 10^5} \text{ J} \\
 &= - 3.15 \times 10^3 \text{ J}
 \end{aligned}$$

所以  $Q = -3.15 \times 10^3 \text{ J}$

负号表示放热。

**【9-5】** 质量为 1 kg 的氧气,其温度由 300 K 升高到 350 K。若温度升高是在下列 3 种不同情况下发生的:(1)体积不变;(2)压强不变;(3)绝热。问其内能改变各为多少?

解 理想气体内能是温度的单值函数,所以 3 种情况的内能改变相同,均为

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T = \frac{m}{M} \times \frac{5}{2} R \Delta T \\
 &= \frac{1}{32 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) \text{ J} \\
 &= 3.25 \times 10^4 \text{ J}
 \end{aligned}$$

**【9-6】** 将 500 J 的热量传给标准状态下 2 mol 的氢。(1)若体

积不变,问这热量变为什么?氢的温度变为多少?(2)若温度不变,问这热量变为什么?氢的压强及体积各变为多少?(3)若压强不变,问这热量变为什么?氢的温度及体积各变为多少?

解 (1) 在  $Q = \Delta E + A$  中  $A = 0$ , 所以吸热全部用以增加内能。因为  $Q = \Delta E = 2C_{V,m}\Delta T$ , 所以

$$\Delta T = \frac{Q}{2C_{V,m}} = \frac{500}{2 \times \frac{5}{2} \times 8.31} \text{ K} = 12 \text{ K}$$

$$T = T_1 + \Delta T = (273 + 12) \text{ K} = 285 \text{ K}$$

(2) 温度不变, 则  $\Delta E = 0, Q = A$ 。即热量全部用于对外做功。

因为  $Q = A = \frac{m}{M}RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ , 所以

$$V_2 = V_1 e^{\frac{QM}{mRT_1}} = 44.8 \times 10^{-3} \times e^{2 \times 8.31 \times 273 / 500} \text{ m}^3 = 0.05 \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{V_1}{V_2} p_1 = \frac{44.8 \times 10^{-3}}{0.05} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 0.908 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

(3) 据  $Q = \Delta E + A, Q > 0$ , 热量用于增加内能和对外做功。因

为  $Q_p = \frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T = 2 \times \frac{7}{2}R\Delta T$ , 所以

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{Q_p}{7R} = \frac{500}{7 \times 8.31} \text{ K} = 8.6 \text{ K}$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T = (273 + 8.6) \text{ K} = 281.6 \text{ K}$$

而等压过程  $p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T = 2R\Delta T$

所以

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \Delta V = V_1 + \frac{2R\Delta T}{p} \\ &= \left( 44.8 \times 10^{-3} + \frac{2 \times 8.31 \times 8.6}{1.013 \times 10^5} \right) \text{ m}^3 \\ &= 0.046 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

**【9-7】** 有一定量的理想气体, 其压强按  $p = \frac{c}{V^2}$  的规律变化,  $c$

是个常量。求气体从体积  $V_1$  增加到  $V_2$  所做的功。该理想气体的温度是升高还是降低？

解 应用体积功的定义计算。

由定义有

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = c \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = c \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

又因为  $pV = \frac{c}{V} = \frac{m}{M}RT$ , 而  $V_2 > V_1$ , 所以  $T_2 < T_1$ , 即温度降低。

**【9-8】** 1 mol 氢, 在压强为  $1.0 \times 10^5$  Pa, 温度为  $20^\circ\text{C}$  时, 其体积为  $V_0$ 。今使它经以下两种过程达同一状态: (1) 先保持体积不变, 加热使其温度升高到  $80^\circ\text{C}$ , 然后令它作等温膨胀, 体积变为原体积的 2 倍; (2) 先使它作等温膨胀至原体积的 2 倍, 然后保持体积不变, 加热到  $80^\circ\text{C}$ 。试分别计算以上两种过程中吸收的热量、气体对外做的功和内能的增量; 并作出  $p$ - $V$  图。

解 等值过程问题。

(1) 设等体为过程 1, 等温为过程 2, 则

$$\Delta E = \Delta E_1 = C_{V,m} \Delta T = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 60 \text{ J} = 1\,246 \text{ J}$$

$$A = A_2 = RT \ln \frac{V}{V_0} = 8.31 \times (273 + 80) \times \ln 2 \text{ J} = 2\,033 \text{ J}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \Delta E_1 + A_2 = (1\,246 + 2\,033) \text{ J} = 3\,279 \text{ J}$$

(2) 设等温为过程 1, 等体为过程 2, 则

$$\begin{aligned} A &= A_1 = RT_0 \ln \frac{V}{V_0} \\ &= 8.31 \times (273 + 20) \times \ln 2 \text{ J} = 1\,687 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\Delta E = \Delta E_2 = C_{V,m} \Delta T = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 60 \text{ J} = 1\,246 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E + A = \Delta E_2 + A_1 \\ &= (1\,246 + 1\,687) \text{ J} = 2\,933 \text{ J} \end{aligned}$$

$p$ - $V$  图如图 9-4 所示。

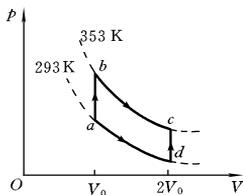


图 9-4

**【9-9】** 理想气体作绝热膨胀,由初状态 $(p_0, V_0)$ 至末状态 $(p, V)$ 。(1) 试证明在此过程中气体所做功为 $A = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}$ ; (2) 设 $p_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_0 = 0.001 \text{ m}^3$ ,  $p = 2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V = 0.00316 \text{ m}^3$ , 气体的 $\gamma = 1.4$ , 试计算气体所做的功。

解 (1) 绝热过程 $Q = 0$ , 所以 $A = -\Delta E$ 。其微分形式为

$$dA = -dE = -\frac{m}{M} C_{V,m} dT$$

积分上式可得

$$A = -\frac{m}{M} C_{V,m} (T - T_0) \quad (1)$$

初态和末态的状态方程分别为

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} R T_0, \quad pV = \frac{m}{M} R T$$

解出 $T_0$ 与 $T$ 代入式①中有

$$A = \frac{C_{V,m} (p_0 V_0 - pV)}{R}$$

又因为 $R = C_{p,m} - C_{V,m}$ ,  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}$ , 所以

$$A = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}$$

$$(2) A = \frac{1.0 \times 10^6 \times 0.001 - 2.0 \times 10^5 \times 0.00316}{1.4 - 1} \text{ J} = 920 \text{ J}$$

**【9-10】** 在一密闭的抽空气缸中,有个劲度系数为  $k$  的弹簧,下面吊着一个质量不计且没有摩擦的滑动活塞,如图9-5所示。弹簧下活塞的平衡位置位于气缸的底部。当活塞下面的空间引进一定量的摩尔定容热容为  $C_{V,m}$  的理想气体时,活塞上升到高度  $h$ ,如图示。弹簧作用在活塞上的力正比于活塞的位移。如果该气体从原来的温度  $T$  升高到  $T_1$  并吸热  $Q$ ,问活塞所在的高度  $h'$  等于多少?

解 本题应用热力学第一定律,注意分析过程。

设气缸横截面积为  $S$ ,当活塞上升到高度  $h$  时,气体压强为  $p$ 、体积为  $V$ 、温度为  $T$ ,则据题意有

$$p = \frac{F}{S} = \frac{kh}{S}, \quad V = Sh$$

因为 
$$pV = \frac{m}{M}RT = kh^2$$

所以 
$$\frac{m}{M} = \frac{kh^2}{RT}$$

当温度  $T$  升高到  $T_1$  时

$$\Delta E = \frac{m}{M}C_{V,m}(T_1 - T) = \frac{kh^2}{RT}C_{V,m}(T_1 - T) \quad \text{图 9-5}$$

$$A = \int_h^{h'} dA = \int_h^{h'} kx dx = \frac{1}{2}k(h'^2 - h^2)$$

由热力学第一定律

$$Q = \Delta E + A = \frac{kh^2}{RT}C_{V,m}(T_1 - T) + \frac{1}{2}k(h'^2 - h^2)$$

可解得 
$$h' = \sqrt{\frac{2Q}{k} + h^2 - \frac{2h^2}{RT}C_{V,m}(T_1 - T)}$$

**【9-11】** 气缸内有单原子理想气体,若绝热压缩使其容积减半,问气体分子的平均速率变为原来速率的几倍?若为双原子理想气体,又为几倍。

解 注意绝热过程方程。

因为 
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

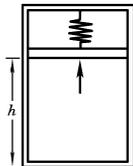


图 9-5

所以

$$\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \frac{\sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}}}{\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}} = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

由绝热过程方程  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  有

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

所以

$$\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = 2^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

对单原子理想气体,  $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = (2)^{\frac{1}{3}} = 1.26$$

对双原子理想气体,  $\gamma = \frac{7}{5}$

$$\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = (2)^{\frac{1}{5}} = 1.15$$

**【9-12】** 一高压容器中含有未知气体,可能是  $N_2$  或  $Ar$ 。在 298 K 时取出试样,从  $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  绝热膨胀到  $6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ , 温度降到 277 K。试判断容器中是什么气体?

解 由绝热过程方程

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2$$

可得

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} = \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2}$$

取对数有

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\ln \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2}}{\ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{\ln \frac{277 \times 5 \times 10^{-3}}{298 \times 6 \times 10^{-3}}}{\ln \frac{5 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-3}}} \\ &= \frac{\ln 0.7746}{\ln 0.8333} = \frac{-0.2554}{-0.1823} = 1.40 \end{aligned}$$

所以容器中为双原子分子  $N_2$ 。

**【9-13】** (1) 有  $10^{-6} \text{ m}^3$  的  $373 \text{ K}$  的纯水, 在  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  的压强下加热, 变成  $1.671 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的同温度的水蒸气。水的汽化热是  $2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$ 。问水变成汽后, 内能改变多少? (2) 在标准状态下  $1.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$  的冰化为同温度的水, 试问内能改变多少? 标准状态下水与冰的比体积各为  $10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$  与  $\frac{11}{10} \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ 。冰的熔解热为  $3.34 \times 10^5 \text{ J/kg}$ 。

解 (1) 由题意知为等压过程。有

$$A = p\Delta V = 1.013 \times 10^5 \times 1.671 \times 10^{-3} \text{ J} = 1.69 \times 10^2 \text{ J}$$

$$Q = 2.26 \times 10^6 \times 10^{-3} \text{ J} = 2.26 \times 10^3 \text{ J}$$

所以 
$$\Delta E = Q - A = (2.26 \times 10^3 - 1.69 \times 10^2) \text{ J}$$

$$= 2.09 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 由题意知为等压过程, 有

$$A = p\Delta V = 1.013 \times 10^5 \times \left(1 - \frac{11}{10}\right) \times 10^{-3} \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$= -1.013 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$Q = 3.34 \times 10^5 \times 10^{-3} \text{ J} = 3.34 \times 10^2 \text{ J}$$

所以

$$\Delta E = Q - A = 3.34 \times 10^2 - (-1.013 \times 10^{-2}) \text{ J}$$

$$= 3.34 \times 10^2 \text{ J}$$

**【9-14】** 声音在空气中的传播可以看作是一绝热过程。它的速度可按公式  $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  计算, 式中  $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}}$ ,  $p$  为空气的压强,  $\rho$  为空气的密度。试证明声音在空气中的传播速度仅是温度的函数。

解 由状态方程有

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V} = \frac{\rho}{M} RT$$

代入速度公式, 可得

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{C_{p,m}R}{C_{v,m}M}T}$$

可见  $v$  仅随温度  $T$  变化而变化。

**【9-15】** 如果在  $0^\circ\text{C}$ 、 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  下空气中的声速  $v = 332 \text{ m/s}$ ，空气的密度  $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 。求空气的  $\gamma$ 。

解 根据上题公式

$$v = \sqrt{\gamma p / \rho}$$

可得 
$$\gamma = \frac{v^2 \rho}{p} = \frac{332^2 \times 1.29}{1.0 \times 10^5} = 1.42$$

**【9-16】** 设有一以理想气体为工作物质的热机循环,如图 9-6 所示,试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1}$$

证明  $a \rightarrow b$  为等体过程,  $A=0$ , 吸热为

$$(\Delta Q)_V = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_b - T_a)$$

$$= C_{V,m} \left( \frac{p_1 V_2}{R} - \frac{p_2 V_2}{R} \right) > 0$$

$b \rightarrow c$  过程为绝热过程,  $Q=0$ , 与外界无热交换。

$c \rightarrow a$  为等压过程, 放出热量

$$(\Delta Q)_p = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_a - T_c)$$

$$= C_{p,m} \left( \frac{p_2 V_2}{R} - \frac{p_2 V_1}{R} \right) < 0$$

所以

$$\eta = \frac{(\Delta Q)_V - |(\Delta Q)_p|}{(\Delta Q)_V} = 1 - \frac{C_{p,m}(p_2 V_1 - p_2 V_2)}{C_{V,m}(p_1 V_2 - p_2 V_2)}$$

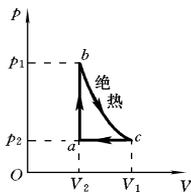


图 9-6

$$= 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1}$$

**【9-17】** 1 mol 理想气体在 400 K 与 300 K 之间完成一卡诺循环, 在 400 K 的等温线上, 起始体积为  $0.0010 \text{ m}^3$ , 最后体积为  $0.0050 \text{ m}^3$ , 试计算气体在此循环中所做的功, 以及从高温热源吸收的热量和传给低温热源的热量。

解 本题为卡诺循环问题。

从高温热源吸热为

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.31 \times 400 \times \ln \frac{0.005}{0.001} \text{ J} = 5.35 \times 10^3 \text{ J}$$

传给低温热源的热量为

$$Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.31 \times 300 \times \ln 5 \text{ J} = 4.01 \times 10^3 \text{ J}$$

循环中所做的功为

$$A = Q_1 - Q_2 = (5.35 \times 10^3 - 4.01 \times 10^3) \text{ J} = 1.34 \times 10^3 \text{ J}$$

**【9-18】** 一热机在 1 000 K 和 300 K 的两热源之间工作。如果 (1) 高温热源提高到 1 100 K, (2) 低温热源降到 200 K, 求理论上的热机效率各增加多少? 为了提高热机效率, 哪一种方案更好?

解 本题为卡诺循环问题。

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{1\,000} = 70\%$$

$$(1) \eta_1 = 1 - \frac{300}{1\,100} = 72.7\%$$

$$\eta_1 - \eta_0 = 72.7\% - 70\% = 2.7\%$$

$$(2) \eta_2 = 1 - \frac{200}{1\,000} = 80\%$$

$$\eta_2 - \eta_0 = 80\% - 70\% = 10\%$$

计算表明, 理论上降低低温热源温度可以更多地提高热机效率。但实际中所用低温热源往往是周围的空气或流水, 要降低它们的温

度是困难的,所以提高高温热源温度以提高热机效率是更行得通的办法。

**【9-19】** 有 25 mol 的某种气体, 作图 9-7 所示循环过程 ( $ac$  为等温过程)。  $p_1 = 4.15 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ ,  $V_2 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 。求: (1) 各过程中的热量、内能改变以及所做的功; (2) 循环的效率。

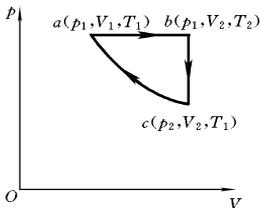


图 9-7

解 设为单原子气体。

(1)  $a \rightarrow b$  过程为等压膨胀。根据状态方程有

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{Rm/M} = \frac{4.15 \times 10^5 \times 2.0 \times 10^{-2}}{8.31 \times 25} \text{ K} = 40 \text{ K}$$

又由等压过程得

$$T_2 = \frac{T_1 V_2}{V_1} = \frac{40 \times 3.0 \times 10^{-2}}{2.0 \times 10^{-2}} \text{ K} = 60 \text{ K}$$

所以

$$\begin{aligned} (Q)_p &= \frac{m}{M} C_{p,m} \Delta T \\ &= 25 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (60 - 40) \text{ J} = 1.04 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m}{M} C_{v,m} \Delta T = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T \\ &= 25 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (60 - 40) \text{ J} = 6.23 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= p_1 (V_2 - V_1) \\ &= 4.15 \times 10^5 \times (3.0 \times 10^{-2} - 2.0 \times 10^{-2}) \text{ J} \\ &= 4.15 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

$b \rightarrow c$  过程为等体过程。压强减小, 对外放热, 内能减小。有

$$A = 0$$

$$\begin{aligned} (Q)_V &= \Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} \Delta T \\ &= 25 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (40 - 60) \text{ J} = -6.23 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

$c \rightarrow a$  为等温过程。等温压缩有

$$\Delta E = 0$$

$$\begin{aligned} (Q)_T &= A = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= 25 \times 8.31 \times 40 \times \ln \frac{2}{3} = -3.37 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \eta &= \frac{Q_{\text{吸}} - Q_{\text{放}}}{Q_{\text{吸}}} = \frac{(Q)_p - |(Q)_V + (Q)_T|}{(Q)_p} \\ &= \frac{1.04 \times 10^4 - (6.23 \times 10^3 + 3.37 \times 10^3)}{1.04 \times 10^4} = 7.7\% \end{aligned}$$

注意：本题如设为双原子分子气体，计算结果有所不同。

**【9-20】** 两部可逆机串联起来，如图9-8所示。可逆机1工作于温度为 $T_1$ 的热源1与温度为 $T_2=400\text{ K}$ 的热源2之间。可逆机2吸入可逆机1放给热源2的热量 $Q_2$ ，转而放热给 $T_3=300\text{ K}$ 的热源3。在(1)两部热机效率相等，(2)两部热机做功相等的情况下求 $T_1$ 。

解 由题意可知两部可逆机的效率分别为

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_3}{Q_2} = 1 - \frac{Q_3}{Q_2} = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

(1) 因 $\eta_1 = \eta_2$ ，而 $T_2 = 400\text{ K}$ ， $T_3 = 300\text{ K}$

$$\eta_2 = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

所以  $T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta_1} = \frac{400}{1 - 25\%} \text{ K} = 533\text{ K}$

(2) 由 $A_1 = A_2$ 可得

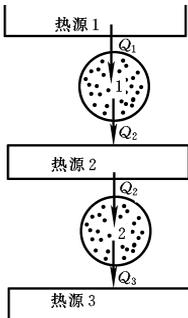


图 9-8

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2} \times \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

而

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

所以

$$\frac{T_2 - T_3}{T_2} \times \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

即

$$T_2 - T_3 = T_1 - T_2$$

$$T_1 = 2T_2 - T_3 = (2 \times 400 - 300) \text{ K} = 500 \text{ K}$$

**【9-21】** 一热机每秒从高温热源( $T_1 = 600 \text{ K}$ )吸取热量  $Q_1 = 3.34 \times 10^4 \text{ J}$ , 做功后向低温热源( $T_2 = 300 \text{ K}$ )放出热量  $Q_2 = 2.09 \times 10^4 \text{ J}$ 。(1)问它的效率是多少? 它是不是可逆机?(2)如果尽可能地提高了热机的效率,问每秒从高温热源吸热  $3.34 \times 10^4 \text{ J}$ ,则每秒最多能做多少功?

解 注意一般热机与卡诺热机的关系。

(1) 由题意及效率的定义,有

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{2.09 \times 10^4}{3.34 \times 10^4} = 37\%$$

若是卡诺热机,则有

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{600} = 50\%$$

由以上计算可知,它不是可逆机。

(2) 热机的最高效率是对应两热源的卡诺热机的效率,所以当  $\eta = 50\%$  时,有

$$\frac{Q'_2}{Q'_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

可得 
$$A = Q'_1 - Q'_2 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q'_1 = \eta_c Q'_1$$

$$= 50\% \times 3.34 \times 10^4 \text{ J} = 1.67 \times 10^4 \text{ J}$$

**【9-22】** 一绝热容器被铜片分成两部分,一边盛  $80^\circ\text{C}$  的水,另一边盛  $20^\circ\text{C}$  的水,经过一段时间后,从热的一边向冷的一边传递了

4 186 J的热量,问在这个过程中的熵变是多少?假定水足够多,传递热量后的温度没有明显变化。

解 由熵的克劳修斯定义有

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{\Delta Q}{T_1} + \frac{\Delta Q}{T_2}$$

据题意  $T_1 = (273 + 80) \text{ K} = 353 \text{ K}$ ,  $T_2 = (273 + 20) \text{ K} = 293 \text{ K}$ ,  $\Delta Q = 4 186 \text{ J}$ , 可得

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \\ &= 4 186 \times \left( \frac{1}{293} - \frac{1}{353} \right) \text{ J/K} = 2.43 \text{ J/K} \end{aligned}$$

**【9-23】** 把质量为 5 kg、比热容(单位质量物质的热容)为 544 J/(kg·°C)的铁棒加热到 300°C,然后浸入一大桶 27°C 的水中。求在这冷却过程中铁的熵变。

解 一大桶水的含义是,铁棒入水后,可忽略水温的变化。

据题意已知  $T_1 = (273 + 300) \text{ K} = 573 \text{ K}$ ,  $T_2 = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$ 。又  $dQ = 5 \times 544 dT$ , 所以铁的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = 5 \times 544 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \\ &= 5 \times 544 \times \ln \frac{T_2}{T_1} \text{ J/K} \\ &= 5 \times 544 \times \ln \frac{300}{573} \text{ J/K} = -1 760 \text{ J/K} \end{aligned}$$

**【9-24】** 一固态物质,质量为  $m$ ,熔点为  $T_m$ ,熔解热为  $L$ ,比热容(单位质量物质的热容)为  $c$ 。如对它缓慢加热,使其温度从  $T_0$  上升为  $T_m$ ,试求熵的变化。假设供给物质的热量恰好使它全部熔化。

解 注意全过程分两阶段。

设温度上升时熵变为  $\Delta S_1$ , 熔化过程熵变为  $\Delta S_2$ , 则

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_m} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_m} \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_m}{T_0}$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_m} = \frac{1}{T_m} mL$$

所以 
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_m}{T_0} + \frac{mL}{T_m}$$

**【9-25】** 两个体积相同的容器盛有不同的理想气体,一种气体质量为  $m_1$ , 摩尔质量为  $M_1$ ; 另一种气体质量为  $m_2$ , 摩尔质量为  $M_2$ , 它们的压强与温度都相同。两者相互连通起来, 开始了扩散, 求这个系统总的熵变。

解 本题注意扩散体积的变化。

由于温度不变, 对第一种气体,  $dE_1 = 0, dQ_1 = dA_1 = p_1 dV_1$ ; 对第二种气体,  $dE_2 = 0, dQ_2 = dA_2 = p_2 dV_2$ 。再注意开始时两种气体体积相同, 设为  $V_1$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta Q_1}{T} + \frac{\Delta Q_2}{T} \\ &= \int_{V_1}^{2V_1} \frac{p_1 dV_1}{T} + \int_{V_1}^{2V_1} \frac{p_2 dV_2}{T} \end{aligned}$$

再应用理想气体状态方程, 用  $dV$  表示  $dV_1, dV_2$ , 可得

$$\Delta S = \frac{m_1}{M_1} R \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} + \frac{m_2}{M_2} R \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) R \ln 2$$

又因为开始时两容器的  $p, V, T$  均相同, 所以  $\frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$ , 即有

$$\Delta S = 2 \frac{m_1}{M_1} R \ln 2$$

**【9-26】** 一房间有  $N$  个气体分子, 半个房间的分子数为  $n$  的概率为

$$W(n) = \sqrt{\frac{2}{N\pi}} e^{-2\left(n - \frac{N}{2}\right)^2 / N}$$

(1) 写出这种分布的熵的表达式  $S = k \ln W$ ; (2)  $n=0$  状态与  $n = \frac{1}{2}N$  状态之间的熵变是多少? (3) 如果  $N = 6 \times 10^{23}$ , 计算这个熵差。

解 本题为玻耳兹曼熵问题。

$$\begin{aligned}
 (1) S &= k \ln W = k \ln \left[ \sqrt{\frac{2}{N\pi}} e^{-2\left(n-\frac{N}{2}\right)^2/N} \right] \\
 &= k \left[ \ln \sqrt{\frac{2}{N\pi}} - 2\left(n-\frac{N}{2}\right)^2/N \right]
 \end{aligned}$$

(2) 当  $n=0$  时, 有

$$S_0 = k \left( \ln \sqrt{\frac{2}{N\pi}} - \frac{N}{2} \right)$$

当  $n = \frac{1}{2}N$  时, 有

$$S_{\frac{1}{2}} = k \ln \sqrt{\frac{2}{N\pi}}$$

所以

$$\Delta S = S_{\frac{1}{2}} - S_0 = \frac{N}{2}k$$

$$(3) \Delta S = \frac{N}{2}k = \frac{6 \times 10^{23}}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 4.14 \text{ J/K}$$

**【9-27】** 1 kg 水银, 初始温度为  $-100^\circ\text{C}$ 。如果加足够的热量使其温度升到  $100^\circ\text{C}$ , 问水银的熵变有多大? 水银的熔点为  $-39^\circ\text{C}$ , 熔解热为  $1.17 \times 10^4 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , 而比热容为  $138 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ 。

解 整个过程分为三个阶段: 升温、熔解、再升温。

由题已知  $T_1 = (273 - 100) \text{ K} = 173 \text{ K}$ ,  $T_2 = (273 - 39) \text{ K} = 234 \text{ K}$ ,  $T_3 = (273 + 100) \text{ K} = 373 \text{ K}$ 。因为

$$\begin{aligned}
 \Delta S_1 &= mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} \\
 &= 1 \times 138 \times \ln \frac{234}{173} \text{ J/K} = 42 \text{ J/K}
 \end{aligned}$$

$$\Delta S_2 = \frac{mL}{T_2} = \frac{1 \times 1.17 \times 10^4}{234} \text{ J/K} = 50 \text{ J/K}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta S_3 &= mc \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_3}{T_2} \\
 &= 1 \times 138 \times \ln \frac{373}{234} \text{ J/K} = 64 \text{ J/K}
 \end{aligned}$$

所以  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 156 \text{ J/K}$

**【9-28】** 有2 mol 的理想气体,经过可逆的等压过程体积从 $V_0$ 膨胀到 $3V_0$ 。求在这一过程中的熵变。提示:设理想气体从初始状态到最终状态是先沿等温曲线,然后沿绝热曲线(在这个过程中熵没有变化)进行的。

解 注意熵是状态量,与过程无关。

设气体从初始状态1经等温过程到达状态2,再经绝热过程到达最终状态3,如图9-9所示。其压强与体积在1态为 $p_1, V_1$ ,在2态为 $p_2, V_2$ ,在3态为 $p_3, V_3$ 。

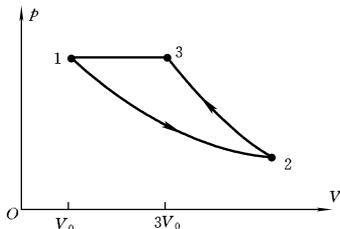


图 9-9

1→2 为等温过程,有  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ 。

2→3 为绝热过程,有  $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$ 。又因为  $p_1 = p_3, V_1 = V_0, V_3 = 3V_0$ ,所以

$$V_2^\gamma = \frac{p_3 V_3^\gamma}{p_2} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{p_2} = \frac{V_2 V_3^\gamma}{V_1^\gamma}$$

可得  $V_2 = (3^\gamma V_0^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma-1}} = 3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} V_0$

由熵的克劳修斯定义,1→3 的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{12} + \Delta S_{23} = \Delta S_{12} \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{dQ}{T} = \int_{V_0}^{V_2} \frac{p dV}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m}{M} R \int_{V_0}^{V_2} \frac{dV}{V} = 2R \ln \frac{V_2}{V_0} \\
 &= 2R \ln 3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 2R \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln 3 \\
 &= 2R \frac{C_{p,m}/C_{V,m}}{C_{p,m}/C_{V,m} - 1} \ln 3 \\
 &= 2R \frac{C_{p,m}}{C_{p,m} - C_{V,m}} \ln 3 = 2C_{p,m} \ln 3
 \end{aligned}$$

本题也可直接由可逆等压过程从 1 态膨胀到 3 态, 利用  $dQ_p =$

$$\frac{m}{M} C_{p,m} dT \text{ 和 } \Delta S_{12} = \int_1^3 \frac{dQ_p}{dT} \text{ 计算而得。}$$

# 第三篇

## 电 磁 场

# 第十章 静 电 场

## 知 识 要 点

### 1. 电荷守恒定律

在一个与外界没有电荷交换的系统内,无论进行怎样的物理过程,系统内正、负电荷量的代数和总是保持不变。

### 2. 真空中的库仑定律

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

### 3. 电场强度

电场强度定义 
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

点电荷的场强 
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

### 4. 场强叠加原理

场强叠加原理 
$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

用叠加法求电荷系统的场强。

#### (1) 点电荷系统

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \mathbf{r}_i$$

#### (2) 连续分布电荷

体分布 
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\text{面分布} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\text{线分布} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^3} \mathbf{r}$$

5. 电场强度通量( $E$  通量)

$$\Psi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{任一曲面})$$

$$\Psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{任一闭合曲面})$$

## 6. 高斯定理

$$\Psi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

## 7. 几种特殊电荷系统的电场

## (1) 均匀带电球面

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & (r > R) \end{cases}$$

## (2) 均匀带电球体

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} & (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

## (3) 无限大均匀带电平面

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$

## (4) 无限长均匀带电圆柱面

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & (r < R) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} & (r > R) \end{cases}$$

(5) 无限长均匀带电圆柱体

$$E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r & (r \leq R) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} r & (r \geq R) \end{cases}$$

8. 场强环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

9. 电势

电势定义 
$$V_A = \frac{W_A}{q_0} = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

点电荷电场中的电势 
$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

点电荷系电场中的电势 
$$V_P = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

连续分布电荷电场中的电势 
$$V_P = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

电场力所做的功与电势差的关系

$$A_{AB} = q_0(V_A - V_B)$$

10. 电场强度与电势梯度的关系

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{E} = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

11. 静电场中的导体

(1) 导体静电平衡条件: 导体内任一点的电场强度都等于零。

推论: ① 导体是等势体, 其表面是等势面; ② 导体表面的场强垂直于导体表面。

(2) 导体上的电荷分布: 静电平衡时, 电荷只能分布于导体的表面上。

带电导体表面附近的场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_n$$

式中  $e_n$  是表面的外法线单位矢量。

(3) 静电屏蔽: 在静电平衡状态下, 空腔导体外面的带电体不会影响空腔内部的电场分布; 一个接地的空腔导体, 空腔内的带电体对腔外的物体不会产生影响。

### 12. 电介质中的静电场

(1) 电介质的极化: 在外电场作用下, 在电介质中出现极化电荷的现象。

#### (2) 电极化强度

定义 
$$P = \frac{\sum p}{\Delta V}$$

$P$  与  $E$  的关系 
$$P = \chi_e \epsilon_0 E$$

$P$  与  $\sigma'$  的关系 
$$\sigma' = |P| \cos \theta = P \cdot e_n$$

#### (3) 电位移

定义 
$$D = \epsilon_0 E + P$$

$D$  与  $E$  的关系 
$$D = \epsilon E$$

### 13. 静电场的能量

#### (1) 点电荷间的相互作用能

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

#### (2) 电荷连续分布时的静电能

体分布 
$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \varphi dV$$

面分布 
$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS$$

式中  $\varphi$  是  $dV$  (或  $dS$ ) 处的电势。

#### (3) 静电场的能量

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} D E dV$$

## 14. 电容器

## (1) 孤立导体的电容

定义  $C = \frac{q}{V}$

## (2) 电容器的电容

定义  $C = \frac{q}{V_A - V_B}$

平行板电容器的电容  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

圆柱形电容器的电容  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$

球形电容器的电容  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$

## (3) 电容器的串联和并联

串联电容器的电容  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

并联电容器的电容  $C = \sum_{i=1}^n C_i$

## 思考题解答

**【10-1】** 一个金属球带上正电荷后,该球的质量是增大、减小还是不变?

答 减小。因为金属球的自由电子数减少了。

**【10-2】** 判断下列说法是否正确,并说明理由。

(1) 电场中某点电场强度的方向就是将点电荷放在该点处所受电场力的方向;

(2) 电荷在电场中某点受到的电场力很大,该点的电场强度  $E$  一定很大;

(3) 在以点电荷为中心、 $r$  为半径的球面上,电场强度  $E$  处处相等。

答 (1) 错。负点电荷受力方向就与电场强度方向相反。

(2) 错。由  $E=F/q$  知, 电场力大时, 若点电荷电量也大, 则  $E$  不一定很大。

(3) 错。球面上电场强度的方向处处不同。

**【10-3】** 根据点电荷的电场强度公式

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

当所考察的场点和点电荷的距离  $r \rightarrow 0$  时, 电场强度  $E \rightarrow \infty$ , 这是没有物理意义的, 对这似是而非的问题应如何解释?

答 点电荷是带电体的一个理想模型, 当场点到带电体的距离  $r \gg$  带电体的线度时, 该带电体可视为点电荷。在  $r \rightarrow 0$  时, 不能用该模型, 因为此时点电荷模型的假定已失效。

**【10-4】** 在一个带正电的金属球附近, 放一个带正电的点电荷  $q_0$ , 测得  $q_0$  所受的力为  $F$ 。试问  $\frac{F}{q_0}$  是大于、等于还是小于该点的电场强度  $E$ ? 如果金属球带负电, 则又如何?

答  $E=F/q_0$  的条件, 是  $q_0$  不能影响导体球上的电荷分布, 亦即电荷均匀分布, 电荷中心在球心。若  $q_0$  不是足够小, 对于带正电的导体球来说, 离  $q_0$  远的电荷密度大, 致使正电荷中心离  $q_0$  距离增加,  $q_0$  受力减小。故  $F/q_0 < E$ 。对带负电的导体,  $F/q_0 > E$ 。

**【10-5】** 点电荷  $q$  如只受电场力的作用而运动, 电力线是不是点电荷  $q$  在电场中运动的轨迹?

答 否。点电荷的运动轨迹不仅与力有关, 还与点电荷的初始状态相关。电力线不是点电荷在电场中的运动轨迹, 它上面的任一点的切线方向只代表电荷  $q$  获得的加速度方向。

**【10-6】** 在正四边形的四个顶点上, 放置四个带相同电荷量的同号点电荷, 试定性地画出其电场线图。

答 电场线图如图 10-1 所示。

**【10-7】** 如果在高斯面上的  $E$  处处为零, 能否肯定此高斯面

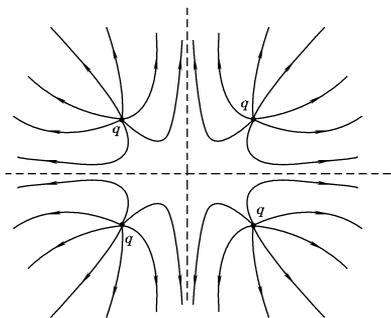


图 10-1

内一定没有净电荷？反过来，如果高斯面内没有净电荷，能否肯定面上所有各点的  $E$  都等于零。

答 由  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n q_i / \epsilon_0$  可知：如  $E=0$ ，则  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ ，即净电荷为零。如  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ ，则  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，但  $E$  可不为零。因为积分为零并不意味被积函数一定为零。

**【10-8】** 在高斯定理  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q / \epsilon_0$  中，在任何情况下，式中的  $E$  是否完全由电荷  $q$  所激发？

答  $E$  是由高斯面内和面外的电荷共同激发的。

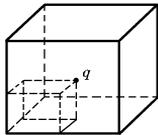
**【10-9】** (1) 一点电荷  $q$  位于一立方体的中心，立方体边长为  $l$ 。试问通过立方体一面的  $E$  通量是多少？(2) 如果把这个点电荷移到立方体的一个角上，这时通过立方体每一面的  $E$  通量各是多少？

答 (1) 由对称性知立方体六个面上的电通量相同，设为

$$\oiint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \text{ 则}$$

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 6 \iint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0$$

所以 
$$\iint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$



(2) 对点电荷在其面内的三个正方形面, 因  $\mathbf{E}$  与  $d\mathbf{S}$  垂直, 有  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 通量  $\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。另三个面(图10-2), 类同(1), 每个面的通量为  $\iint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4} \cdot \frac{q}{6\epsilon_0} = \frac{q}{24\epsilon_0}$ 。

图 10-2

**【10-10】** 一根有限的均匀带电直线, 其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性, 能否利用高斯定理算出电场强度来?

答 不能。找不到可用于计算出电场强度的高斯面, 只能用叠加原理计算电场强度。

**【10-11】** 静电场强度沿一闭合回路的积分  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 表明了电场线的什么性质?

答 (1) 电场线不形成闭合曲线, 两根电场线在无静电荷处不可相交。

(2) 可找到位置函数  $V(\mathbf{r})$ , 使  $\int_{a \rightarrow b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(b) - V(a)$ , 亦即  $\mathbf{E}$  是保守场。

**【10-12】** 比较下列几种情况下  $A$ 、 $B$  两点电势的高低。

- (1) 正电荷由  $A$  移到  $B$  时, 外力克服电场力做正功;
- (2) 正电荷由  $A$  移到  $B$  时, 电场力做正功;
- (3) 负电荷由  $A$  移到  $B$  时, 外力克服电场力做正功;
- (4) 负电荷由  $A$  移到  $B$  时, 电场力做正功;
- (5) 电荷顺着电场线方向由  $A$  移动到  $B$ ;
- (6) 电荷逆着电场线方向由  $A$  移动到  $B$ 。

答 (1) 电场力做功  $A_{AB} = q_0(V_A - V_B)$ , 由  $q_0 > 0$ 、 $A < 0$  得  $V_A < V_B$ 。

(2) 由  $q_0 > 0, A > 0$  得  $V_A > V_B$ 。

(3) 由  $q_0 < 0, A < 0$  得  $V_A > V_B$ 。

(4) 由  $q_0 < 0, A > 0$  得  $V_A < V_B$ 。

(5) 电场强度与电势有关系,  $E \cdot d\mathbf{l} = -dV = V_A - V_B$ , 又根据  $E \cdot d\mathbf{l} = Edl\cos\theta$ , 当  $\theta < \frac{\pi}{2}$  时  $E \cdot d\mathbf{l} > 0$ , 所以  $V_A > V_B$ 。

(6) 与(5)类似, 由  $E \cdot d\mathbf{l} = Edl\cos\theta$  知  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时  $E \cdot d\mathbf{l} < 0$ , 所以  $V_A < V_B$ 。

**【10-13】** 一人站在绝缘地板上, 用手紧握静电起电机的金属电极, 同时使电极带电产生  $10^5$  V 的电势。试问此人是否安全? 这时, 如果另一人去接触已带电的电极, 是否安全? 为什么?

答 第一种情况安全, 人与电极的电势差为 0; 第二种情况危险, 电势差为  $10^5$  V, 人体将被电击穿。

**【10-14】** (1) 已知电场中某点的电势, 能否计算出该点的电场强度? (2) 已知电场中某点附近的电势分布, 能否算出该点的电场强度?

答 由  $E = -\text{grad } V$  可判知: (1) 不能; (2) 能。

**【10-15】** 根据电场强度与电势梯度的关系分析下列问题。

(1) 在电势不变的空间, 电场强度是否为零?

(2) 在电势为零处, 电场强度是否一定为零?

(3) 电场强度为零处, 电势是否一定为零?

(4) 在均匀电场中, 各点的电势梯度是否相等? 各点的电势是否相等?

答 根据  $E = -\text{grad } V$  可知: (1) 为零; (2) 不一定; (3) 不一定; (4) 电场强度相等, 电势梯度相等, 电势不相等。

**【10-16】** 将一电中性的导体放在静电场中, 在导体上感应出来的正负电荷量是否一定相等? 这时导体是否是等势体? 如果在电场中把导体分开为两部分, 则一部分导体上带正电, 另一部分导体上带负电, 这时两部分导体的电势是否相等?

答 根据电荷守恒定律,正负电荷量相等;静电平衡,导体是等势体;此两部分相当于两个各带正、负电荷的导体,两导体电势不相等。

**【10-17】** 一个孤立导体球带有电荷量 $Q$ ,其表面附近的电场强度沿什么方向?当我们把另一带电体移近这个导体球时,球表面附近的电场强度将沿什么方向?其上电荷分布是否均匀?其表面是否等电势?电势有没有变化?球体内任一点的电场强度有无变化?

答 其表面附近的电场强度沿外法向;当另一带电体移近此导体球时,球表面附近的电场强度仍沿外法向;导体表面电荷分布不均匀;但等势;电势有变化;导体内电场强度不变,为零。

**【10-18】** 如何能使导体(1)净电荷为零而电势不为零;(2)有过剩的正或负电荷,而其电势为零;(3)有过剩的负电荷而其电势为正;(4)有过剩的正电荷而其电势为负。

答 (1) 导体周围有带电体。

(2) 导体接地,旁边有带电体。

(3) 先使导体带有少量负电荷,然后在其附近放上带较多正电荷的带电体。

(4) 先使导体带有少量正电荷,然后在其附近放上带较多负电荷的带电体。

**【10-19】** 如图10-3所示,在金属球A内有两个球形空腔,此金属球体上原来不带电,在两空腔中心各放置一点电荷 $q_1$ 和 $q_2$ ,求金属球A的电荷分布。此外,在金属球外很远处放置一点电荷 $q$ ( $r \gg R$ ),问 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q$ 各受力多少?

答 金属球外表面上的电荷量为 $q_1 + q_2$ ,由于 $q$ 离金属球很远,忽略其对金属球表面电荷分布的影响,金属球外表面电荷均匀分布。

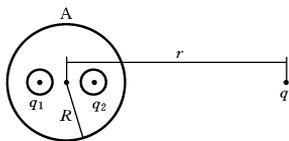


图 10-3

由于静电屏蔽,点电荷 $q_2$ 及 $q$

不能在  $q_1$  所在的空间内产生电场,故  $q_1$  只受腔内表面电荷  $-q_1$  的电场作用,由于  $q_1$  在空腔中心上,故腔内表面电荷均匀分布,因此  $q_1$  受的作用力  $f_1=0$ 。同理,  $f_2=0$ 。而  $q$  受力只由金属球外表面电荷产生,故

$$f = \frac{(q_1 + q_2)q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r$  为球心到点电荷  $q$  的距离。

**【10-20】** 离点电荷  $q$  为  $r$  的  $P$  点的电场强度为  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}r$ , 现将点电荷用一金属球壳包围起来, 分别讨论  $q$  在球心或不在球心时  $P$  点的电场强度是否改变? 若改用金属圆筒包围电荷,  $P$  点的电场强度是否改变? (只讨论  $P$  点在金属球壳及在金属圆筒外的情况。)

答 导体壳的外表面荷电量为  $q$ , 对于孤立导体壳, 其外表面的电荷分布只与其外表面形状相关, 与空腔内电荷分布无关。无论点电荷是否在球心, 都不影响壳外表面电量及电荷分布, 故对于球壳, 壳外空间的电场由均匀带电的球面决定, 该电场分布与点电荷在球心的电场分布一致。

若改用圆筒, 壳外空间的电场分布由均匀带电的柱面决定, 该电场分布不同于点电荷激发的电场分布。

**【10-21】** 一带电导体放在封闭的金属壳内部, (1) 若将另一带电导体从外面移近金属壳, 壳内的电场是否会改变? 金属壳及壳内带电体的电势是否会改变? 金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变? (2) 若将金属壳内部的带电导体在壳内移动或与壳接触时, 壳外部的电场是否会改变? (3) 如果壳内有两个带异号等值电荷的带电体, 则壳外的电场如何?

答 (1) 由于静电屏蔽, 壳内电场强度只与壳内电荷分布有关, 与壳外电荷分布无关, 故壳内电场不会改变。壳外表面的电势与壳外电荷分布有关, 故带电体移近壳, 壳外表电势会变; 又由于

金属壳是等势体,故壳内表面电势亦会变;又因腔内电场强度不变,故腔内带电体电势也会变。电场强度不变,则电势差不会变。

(2) 壳外的电场强度由壳外表面电荷分布决定,带电体在壳内移动或与壳接触都不改变壳外表面的荷电量及电荷分布,故壳外电场强度不变。

(3) 对于孤立导体壳,外电场强度为 0。

**【10-22】** (1) 一导体球上不带电,其电容是否为零? (2) 当平行板电容器的两极板上分别带上等值同号电荷时,其电容值是否改变? (3) 当平行板电容器的两极板上分别带上同号不等值的电荷时,其电容值是否改变?

答 (1) 电容只与导体(组)的几何因素及介质有关,与导体荷电量无关。电容不为零。

(2) 电容值不变。

(3) 电容值不变。

**【10-23】** 有两个彼此远离的金属球,一大一小,所带电荷同号等量,问这两个球的电势是否相等? 其电容是否相等? 如果用一根细导线把两球相连接,是否会有电荷流动?

答 由电势计算公式  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$  可知,两球电势不等;根据电容定义,两球(相当于孤立导体,  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ) 电容不等;由于两导体球有电势差,会产生电荷流动。

**【10-24】** 有一平板电容器,保持板上电荷量不变(充电后切断电源),现在使两极板间的距离  $d$  增大。试问:两极板的电势差有何变化? 极板间的电场强度有何变化? 电容是增大还是减小?

答 由  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$  和  $C = \frac{Q}{U}$  知,两极板的电势差增加;由于  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , 故  $E$  不变;根据  $C = \frac{Q}{U}$  可知,电势差增加且电量不变,故电容减小。

**【10-25】** 平板电容器如保持电压不变(接上电源),增大极板间距离,则极板上的电荷、极板间的电场强度、平板电容器的电容

有何变化?

答 由  $E = \frac{U}{d}$ ,  $\sigma = \epsilon_0 E$ ,  $Q = S\sigma$ ,  $C = \frac{Q}{U}$  得,  $d$  增加,  $E$  减小, 电荷密度减小, 电量下降, 电容减小。

**【10-26】** 一对相同的电容器, 分别串联、并联后连接到相同的电源上后, 问哪一种情况用手去触及极板较为危险? 说明其原因。

答 根据电容串联、并联的公式知  $C_{\text{串}} < C_{\text{并}}$ 。在电容器上电压不变的情况下, 由电容器电容定义公式知  $Q_{\text{串}} < Q_{\text{并}}$ , 因而  $E_{\text{串}} < E_{\text{并}}$ , 故并联电容后的危险大。

**【10-27】** 在一均匀电介质球外放一点电荷  $q$ , 分别作如图 10-4 所示的两个闭合曲面  $S_1$  和  $S_2$ , 求通过两闭合曲面的  $E$  通量、 $D$  通量。在这种情况下, 能否找到一合适的闭合曲面, 可应用高斯定理求出闭合曲面上各点的电场强度?

答 由高斯定理知  $\oiint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ,  $S_1$  面上  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , 所以  $\oiint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。同理,

$$\oiint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0, \quad \oiint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q。$$

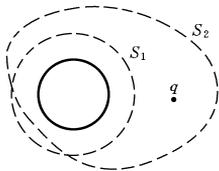


图 10-4

因为电场强度由自由电荷和面束缚电荷产生, 题中的这些电荷不具有利用高斯定理求出  $E$  的对称性, 所以找不到合适的闭合曲面应用高斯定理求  $E$ 。

**【10-28】** (1) 将平行板电容器的两极板接上电源以维持其电压不变, 用相对电容率为  $\epsilon_r$  的均匀电介质填满极板间, 极板上的电荷量为原来的几倍? 电场为原来的几倍? (2) 若充电后切断电源, 然后再填满电介质, 情况又如何?

答 (1) 设  $C'$  为充电介质后的电容, 则  $C' = \epsilon_r C$ , 故  $Q' = \epsilon_r Q$ , 为原来的  $\epsilon_r$  倍。  $E' = U' / d = U / d = E$ , 电场不变。

(2)  $C' = \epsilon_r C, Q' = Q$ , 则  $U' = \frac{1}{\epsilon_r} U$ , 有  $E' = \frac{1}{\epsilon_r} E$ 。

**【10-29】** 在球壳形的均匀电介质中心放置一点电荷  $q$ , 试画出电介质球壳内外的  $E$  和  $D$  线的分布。在电介质球壳内外的电场强度和没有介质球壳时是否相同? 为什么?

答 设  $q > 0, \epsilon_r > 1$ 。电介质球壳内外的  $E$  和  $D$  线分布如图10-5所示。

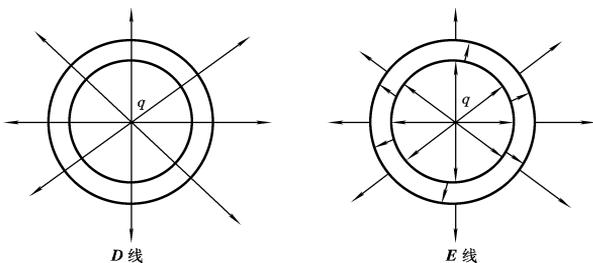


图 10-5

壳外:  $E = \frac{1}{\epsilon_0} D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , 电场强度不变

壳内:  $E = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$ , 电场强度改变

**【10-30】** (1) 一个带电的金属球壳里充填了均匀电介质, 球外是真空, 此球壳的电势是否为  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R}$ ? 为什么? (2) 若球壳内为真空, 球壳外充满无限大均匀电介质, 这时球壳的电势为多少? ( $Q$  为球壳上的自由电荷,  $R$  为球壳半径,  $\epsilon_r$  为介质的相对电容率。)

答 (1) 否。

由

$$\begin{cases} D = \frac{Q}{4\pi r^2} & (r \geq R) \\ D = 0 & (r < R) \end{cases}$$

$$\text{有} \quad \begin{cases} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \geq R) \\ E = 0 & (r < R) \end{cases}$$

则球壳的电势为

$$V_R = \int_R^{+\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$(2) \text{ 由于} \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (r > R)$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r = R)$$

$$D = 0, \quad E = 0, \quad (r < R)$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad V_R &= \int_R^{+\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^{R+\delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{R+\delta}^{+\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\delta \rightarrow 0) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+\delta} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R+\delta} - 0 \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} \end{aligned}$$

## 习题解答

**【10-1】** 在真空中,两个带等值同号的点电荷相距 0.01 m 时的作用力为  $10^{-5}$  N,它们相距 0.1 m 时的作用力多大? 两点电荷所带的电荷量是多少?

解 根据库仑定律知,两个点电荷间作用力的大小为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

可见  $F \propto r^{-2}$ , 因此

$$\frac{F_2}{F_1} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

已知  $r_1 = 0.01$  m,  $r_2 = 0.1$  m,  $F_1 = 10^{-5}$  N, 所以

$$F_2 = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 F_1 = \left( \frac{0.01}{0.1} \right)^2 \times 10^{-5} \text{ N} = 10^{-7} \text{ N}$$

因为两个点电荷等值同号,  $q_1 = q_2 = q$ 。于是

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r_1^2 F_1} = \sqrt{\frac{0.01^2 \times 10^{-5}}{9 \times 10^9}} \text{ C} = 3.3 \times 10^{-10} \text{ C}$$

**【10-2】** 在平面直角坐标系中, 在  $x=0, y=0.1 \text{ m}$  处和在  $x=0, y=-0.1 \text{ m}$  处分别放置一电荷量  $q=10^{-10} \text{ C}$  的点电荷。求: (1) 在  $x=0.2 \text{ m}, y=0$  处一电荷量为  $Q=10^{-8} \text{ C}$  的点电荷所受力的方向和大小; (2)  $Q$  受力最大时的位置。

解 (1) 题中所述三点电荷的位置如图10-6所示。由图可知, 点电荷  $Q$  所受另两点电荷的作用力  $F_1, F_2$  大小相等, 方向相对于  $x$  轴对称。因此, 合力  $F$  沿  $x$  轴方向。合力的大小是

$$F = 2F_1 \cos\theta = 2 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{b}{r} = \frac{qQb}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2)^{3/2}}$$

已知  $q=10^{-10} \text{ C}$ ,  $Q=10^{-8} \text{ C}$ ,  $a=0.1 \text{ m}$ ,  $b=0.2 \text{ m}$ 。代入上式得

$$F = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 10^{-10} \times 10^{-8} \times 0.2}{(0.1^2 + 0.2^2)^{3/2}} \text{ N} = 3.22 \times 10^{-7} \text{ N}$$

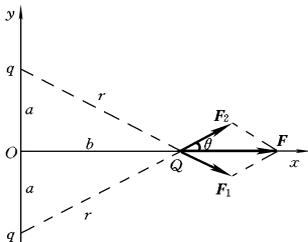


图 10-6

(2) 点电荷  $Q$  在  $x$  轴上不同位置时, 它受力的大小是不同的。在受力最大处, 应有

$$\frac{dF}{db} = 0$$

即 
$$\frac{qQ(a^2 - 2b^2)}{2\pi\epsilon_0(a^2 + b^2)^{5/2}} = 0, \quad 2b^2 = a^2$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0.7 \times 0.1 \text{ m} = 0.07 \text{ m}$$

**【10-3】** 两个相同的小球,质量都是  $m$ ,带等值同号的电荷量  $q$ ,各用长为  $l$  的细线挂在同一点,如图10-7所示。设平衡时两线间夹角  $2\theta$  很小,试证下列的近似等式

$$x = \left( \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$

式中  $x$  为两球平衡时的距离。(1)如果  $l = 1.20 \text{ m}$ ,  $m = 10 \text{ g}$ ,  $x = 5.0 \text{ cm}$ ,则每个小球上的电荷量  $q$  是多少?(2)如果每个球以  $1.0 \times 10^{-9} \text{ C/s}$  的变化率失去电荷,求两球彼此趋近的瞬时相对速率  $\frac{dx}{dt}$  是多少?

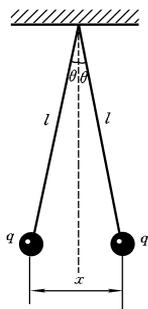


图 10-7

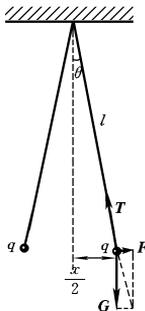


图 10-8

解 右方小球在平衡时的受力情况如图10-8所示,其中  $T$  为张力, $F$  为库仑力, $G$  为小球重力, $F$  与  $G$  方向相互垂直。当这三个共点力平衡时有

$$F = G \tan \theta$$

由于  $\theta$  很小, 可作近似

$$\tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta, \quad \theta \approx \frac{x/2}{l}$$

又  $G = mg$

所以  $F = mg \tan\theta \approx mg\theta \approx mg \frac{x/2}{l} = \frac{mgx}{2l}$

$F$  是两个带电小球相互作用的库仑力, 因此又有

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

所以  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \approx \frac{mgx}{2l}$

$$x \approx \left( \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3} \quad \text{①}$$

(1) 由式①可得

$$\begin{aligned} q &\approx \left( \frac{2\pi\epsilon_0 mg x^3}{l} \right)^{1/2} \\ &= \left[ \frac{10 \times 10^{-3} \times 9.8 \times (5.0 \times 10^{-2})^3}{2 \times 9 \times 10^9 \times 1.20} \right]^{1/2} \text{ C} \\ &= \pm 2.38 \times 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad v &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dq} \frac{dq}{dt} = \left( \frac{l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3} \cdot \frac{2}{3} q^{-\frac{1}{3}} \frac{dq}{dt} = \frac{2x}{3q} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{2 \times 5.0 \times 10^{-2}}{3 \times 2.38 \times 10^{-8}} \times (-1.0 \times 10^{-9}) \text{ m/s} \\ &= -1.40 \times 10^{-3} \text{ m/s} \end{aligned}$$

负号表示  $x$  减小, 即两球彼此趋近。

**【10-4】** 试求边长为  $l$  的正方形中心处的电场强度, 若(1)四个相同的同号点电荷  $q$  放置在四个顶点上; (2)两个正号、两个负号的相同点电荷任意放置在四个顶点上。

解 (1) 正方形四个顶点上具有相同的同号点电荷, 则处于对角的两个点电荷在正方形中心产生的电场强度大小相等, 方向相反, 相互抵消, 故中心处电场强度为零。

(2) 若两个正电荷和两个负电荷分别处于对角位置, 正方形中心处电场强度仍为零。

若同号电荷处于相邻位置(图 10-9), 则异号电荷处于对角位置, 它们在正方形中心的场强相等且同向, 都是指向负电荷, 因此

$$E_1 = E_2 = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

中心  $O$  点实际电场强度

$$E = \sqrt{2} E_1 = \frac{\sqrt{2} q}{\pi\epsilon_0 l^2}$$

$E$  的方向垂直且指向两负电荷的连线。

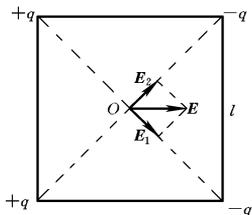


图 10-9

**【10-5】** 三个点电荷  $q_1$ 、 $q_2$  和  $q_3$  放在正方形的三个顶点上, 已知  $q_1 = 10 \times 10^{-9} \text{C}$ ,  $q_2 = 28 \times 10^{-9} \text{C}$ , 在正方形的第四个顶点上电场强度  $E$  的方向沿水平方向向右, 如图 10-10 所示。求: (1)  $q_3$  等于多少。(2) 第四个顶点上电场强度的大小。

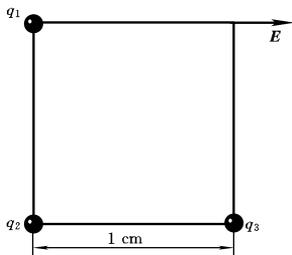


图 10-10

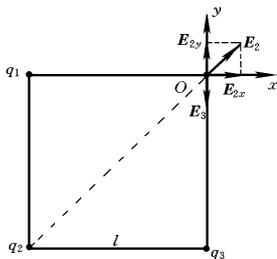


图 10-11

**解** (1) 在正方形的第四个顶点  $O$  建立坐标系(图 10-11)。点电荷  $q_1$  在  $O$  点的电场强度大小为

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9}}{0.01^2} \text{ V/m} = 9 \times 10^5 \text{ V/m}$$

$E_1$  的方向向右(与  $x$  轴同向)。点电荷  $q_2$  在  $O$  点的电场强度大小为

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}l)^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 28 \times 10^{-9}}{2 \times 0.01^2} \text{ V/m} \\ &= 1.26 \times 10^6 \text{ V/m} \end{aligned}$$

方向沿对角线。它在两个坐标轴上的分量

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_{2y} = E_2 \cos 45^\circ \\ &= 1.26 \times 10^6 \cos 45^\circ \text{ V/m} = 8.9 \times 10^5 \text{ V/m} \end{aligned}$$

要使  $O$  点电场强度方向向右,点电荷  $q_3$  必须是负电荷,且其值满足  $E_3 = -E_{2y}$ , 即

$$\frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 l^2} = -E_{2y}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } q_3 &= -4\pi\epsilon_0 l^2 E_{2y} = -\frac{0.01^2 \times 8.9 \times 10^5}{9 \times 10^9} \text{ C} \\ &= -9.9 \times 10^{-9} \text{ C} \end{aligned}$$

(2) 在  $O$  点电场强度大小为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_{2x} = (9 \times 10^5 + 8.9 \times 10^5) \text{ V/m} \\ &= 1.79 \times 10^6 \text{ V/m} \end{aligned}$$

**【10-6】** 在平面直角坐标系中,  $q_1 = 25 \times 10^{-9} \text{ C}$  放置在原点  $(0, 0)$ ,  $q_2 = -25 \times 10^{-9} \text{ C}$  放置在  $(6 \text{ m}, 0)$  的点上。计算  $(3 \text{ m}, 0)$  处和  $(3 \text{ m}, 4 \text{ m})$  处的电场强度。

解 设  $P$  点坐标为  $(3 \text{ m}, 0)$ , 则电荷  $q_1, q_2$  在  $P$  点的电场强度均沿  $x$  轴方向, 又因两电荷电量相等, 与  $P$  点距离也相等, 因此

$$\begin{aligned} E_P &= 2 \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 OP^2} \\ &= \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 25 \times 10^{-9}}{3^2} \text{ V/m} = 50 \text{ V/m} \end{aligned}$$

$E_P$  方向沿  $x$  轴方向。

设  $Q$  点坐标为  $(3 \text{ m}, 4 \text{ m})$ , 则  $q_1, q_2$  在  $Q$  点的电场强度方向如图 10-12 所示。  $Q$  点位于  $q_1, q_2$  连线的中垂线上, 因此

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 OQ^2} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 25 \times 10^{-9}}{5^2} \text{ V/m} \\ &= 9 \text{ V/m} \end{aligned}$$

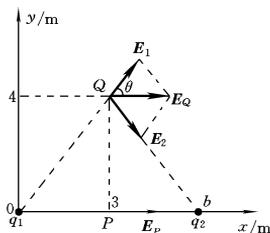


图 10-12

不难看出,  $E_1$  与  $E_2$  的合矢量  $E_Q$  的方向沿  $x$  轴方向, 其值为

$$E_Q = 2E_1 \cos\theta = 2 \times 9 \times \frac{3}{5} \text{ V/m} = 10.8 \text{ V/m}$$

**【10-7】** 两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  相距为  $d$ , 若(1)两电荷同号; (2)两电荷异号。求两点电荷连线上电场强度为零的一点的位置。

解 (1) 两电荷同号, 则电场强度为零的位置一定位于两点电荷之间的一点, 设该点与  $q_1$  相距为  $x$ , 则有

$$\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2}$$

由此方程解得 
$$x = \frac{\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_1|} + \sqrt{|q_2|}} d$$

(2) 两电荷异号, 则电场强度为零的位置一定位于  $x > d$  或  $x < 0$  (图 10-13) 的某一点。若  $x > d$ , 则有

$$\frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 (x-d)^2}$$

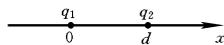


图 10-13

由此方程解得

$$x = \frac{\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_1|} - \sqrt{|q_2|}} d$$

式中  $q_1, q_2$  皆取绝对值。显然,只有  $|q_1| > |q_2|$ , 电场强度为零的位置才位于此区域。

$$\text{若 } x < 0, \text{ 则有 } \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 (d-x)^2}$$

$$\text{由此方程解得 } x = \frac{\sqrt{|q_1|}}{\sqrt{|q_1|} - \sqrt{|q_2|}} d$$

显然,只有  $|q_1| < |q_2|$ , 电场强度为零的位置才位于此区域。

**【10-8】**  $\alpha$  粒子快速通过氢分子中心, 其轨迹垂直于两核的连线, 两核的距离为  $d$ , 如图 10-14 所示。问  $\alpha$  粒子在何处受到的力最大? 假定  $\alpha$  粒子穿过氢分子中心时两核无多大移动, 同时忽略分子中电子的电场。

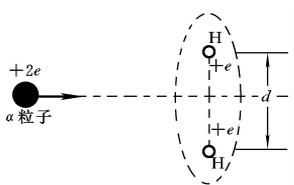


图 10-14

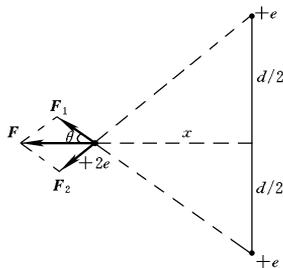


图 10-15

解  $\alpha$  粒子总是位于两核连线的中垂线上。当它与连线的距离为  $x$  时, 受力情况如图 10-15 所示。  $F_1$  与  $F_2$  的方向相对于中垂线对称, 且

$$F_1 = F_2 = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 \left( x^2 + \frac{d^2}{4} \right)}$$

$\alpha$  粒子所受合力

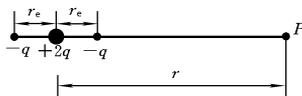
$$\begin{aligned}
 F &= 2F_1 \cos\theta = \frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}} \\
 &= \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

在 $\alpha$ 粒子受力最大处, $x$ 满足 $\frac{dF}{dx}=0$ ,即

$$\begin{aligned}
 \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{d^2/4 - 2x^2}{\left(x^2 + d^2/4\right)^{5/2}} &= 0 \\
 2x^2 &= \frac{d^2}{4}, \quad x = \pm \frac{d}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

**【10-9】** 如图10-16所示的电荷分布称为电四极子,它由两个相同的电偶极子组成。证明在电四极子轴线的延长线上离中心为 $r$ ( $r \gg r_e$ )的 $P$ 点处的电场强度为

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$



式中 $Q = 2qr_e^2$ 称为这种电荷分布的电四极矩。

图 10-16

解 电四极子在 $P$ 点的电场强度等于组成它的两个电矩方向相反的电偶极子在该点的电场强度的代数和,即

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2qr_e}{4\pi\epsilon_0 (r - r_e/2)^3} - \frac{2qr_e}{4\pi\epsilon_0 (r + r_e/2)^3} \\
 &= \frac{2qr_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{r_e}{2r}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_e}{2r}\right)^3} \right]
 \end{aligned}$$

略去 $\frac{r_e}{2r}$ 的高次项,则

$$E \approx \frac{2qr_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( \frac{1}{1 - \frac{3r_e}{2r}} - \frac{1}{1 + \frac{3r_e}{2r}} \right) = \frac{2qr_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\frac{3r_e}{r}}{1 - \left(\frac{3r_e}{2r}\right)^2}$$

$$\approx \frac{3(2qr_e^2)}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

**【10-10】** 长  $l=15\text{ cm}$  的直导线  $AB$  上均匀地分布着线密度为  $\lambda=5\times 10^{-9}\text{ C/m}$  的电荷(图10-17)。求:(1)在导线的延长线上与导线一端  $B$  相距  $d=5\text{ cm}$  处  $P$  点的电场强度;(2)在导线的垂直平分线上与导线中点相距  $d=5\text{ cm}$  处  $Q$  点的电场强度。

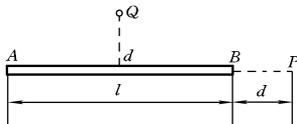


图 10-17



图 10-18

**解** (1) 取  $AB$  的中点为坐标原点, 从  $A$  到  $B$  的方向为  $x$  轴方向(图10-18)。在导线上坐标为  $x$  处取一线元  $dx$ , 其上电荷为  $\lambda dx$ , 它在  $P$  点产生的电场强度的大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(l/2 + d - x)^2}$$

方向沿  $x$  轴方向。导线上所有线元在  $P$  点产生的电场强度方向一致, 因此  $P$  点电场强度大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(l/2 + d - x)^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(l/2 + d - x)} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{l+d} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-9} \left( \frac{1}{5 \times 10^{-2}} - \frac{1}{20 \times 10^{-2}} \right) \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$= 6.75 \times 10^2 \text{ V/m}$$

方向沿  $x$  轴方向。

(2) 取  $AB$  的中点为原点, 沿  $AB$  方向的轴为  $x$  轴, 垂直于  $AB$  的轴为  $y$  轴。导线上坐标为  $x$  处取一线元, 其上电荷为  $\lambda dx$ , 它在  $Q$  点产生的电场强度大小为

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)}$$

方向如图 10-19 所示。

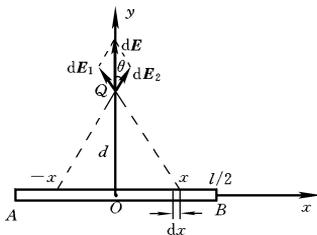


图 10-19

在导线  $AB$  上坐标为  $-x$  处取另一电荷元, 电量亦为  $\lambda dx$ , 它在  $Q$  点产生的电场强度  $dE_2$  的大小与  $dE_1$  相同, 方向与  $dE_1$  的方向相对于  $y$  轴对称。因此,

$$dE_{1x} + dE_{2x} = 0$$

$dE_1$  与  $dE_2$  的合电场强度  $dE$  的大小为

$$\begin{aligned} dE &= dE_{1y} + dE_{2y} = 2dE_1 \cos\theta \\ &= \frac{2\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)} \frac{d}{(x^2 + d^2)^{1/2}} = \frac{\lambda d dx}{2\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

方向沿  $y$  轴方向。由于导线上的电荷相对于  $O$  点的分布是对称的, 因此  $Q$  点电场强度大小为

$$E = \int dE = \int_0^{l/2} \frac{\lambda d dx}{2\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 d^2} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^{l/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{l}{(l^2/4 + d^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-9} \times 0.15}{0.05(0.15^2/4 + 0.05^2)^{1/2}} \text{ V/m} \\
 &= 1.50 \times 10^3 \text{ V/m}
 \end{aligned}$$

**【10-11】** 一根很长的绝缘棒,均匀带电(图 10-20),单位长度上的电荷量为 $\lambda$ 。试求距棒的一端垂直距离为 $d$ 的 $P$ 点处的电场强度。

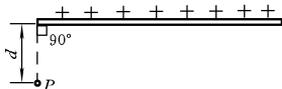


图 10-20

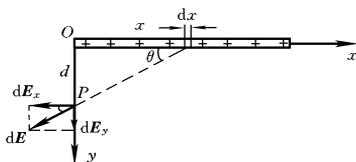


图 10-21

**解** 以棒的该端为原点建立如图 10-21 所示的平面直角坐标系。在棒上坐标为 $x$ 处取一棒元 $dx$ ,它的电荷为 $\lambda dx$ 。它在 $P$ 点产生的电场强度方向如图所示,大小为

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)}$$

$dE$  在两个坐标轴的分量分别为

$$dE_x = -dE \cos\theta = -\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)} \frac{x}{(x^2 + d^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{\lambda x dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = dE \sin\theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

棒上全部电荷在  $P$  点的电场强度  $E$  的  $x$  分量为

$$E_x = \int dE_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$E$  的  $y$  分量为

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{d^2(x^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

所以  $P$  点电场强度为

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \mathbf{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \mathbf{j}$$

$|E_x| = E_y$ , 电场强度大小即为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2} |E_x| = \frac{\sqrt{2} \lambda}{4\pi\epsilon_0 d}$$

其方向与  $x$  轴夹角为  $135^\circ$ , 与  $y$  轴夹角为  $45^\circ$ 。

**【10-12】** 一半径为  $r$  的半球面均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ 。求球心处的电场强度。

解 以球心  $O$  为原点建立坐标系(图 10-22), 使  $x$  轴与半球面的底面垂直。在半球面上  $P$  点(坐标为  $R, \theta, \varphi$ )取一面积元  $dS$ , 则

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

面积元上电量为

$$dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

它在  $O$  点的电场强度  $dE_1$  的方向如图所示, 与  $x$  轴的夹角为  $\pi - \theta$ 。

$dE_1$  的大小为

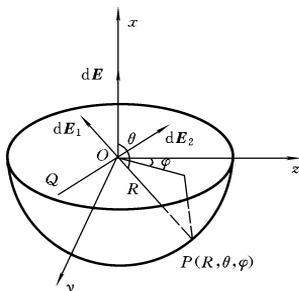


图 10-22

$$dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\varphi$$

半球面上电荷相对于  $x$  轴是对称分布的, 在  $P$  点的对称点  $Q$  (坐标为  $R, \theta, \varphi + \pi$ ) 取另一面积元  $dS$ , 面积元上电荷在  $O$  点的电场强度  $dE_2$  的大小与  $dE_1$  相等, 方向与  $dE_1$  的方向相对于  $x$  轴对称。它们的合矢量  $dE$  的方向与  $x$  轴方向相同, 大小为

$$dE = 2dE_1 \cos(\pi - \theta) = -\frac{\sigma \sin\theta}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta d\theta d\varphi$$

半球面上每一电荷元都存在与之对称的相同电荷元, 因此整个半球面上电荷在  $O$  点产生的电场强度的方向沿  $x$  轴方向, 大小为

$$E = \int dE = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

**【10-13】** 用很细的不导电的塑料棒弯成半径为 50 cm 的圆弧, 两端空隙为 2 cm, 电荷量为  $3.12 \times 10^{-9}$  C 的正电荷均匀分布在细棒上。求圆心处电场强度的大小和方向。

**解** 本题可先将带电系统看成一个完整的均匀带电圆环计算电场强度, 然后扣除空隙处的电荷产生的电场强度; 空隙的宽度与圆半径相比是很小的, 可以把空隙处电荷看成点电荷。

已知空隙宽度  $d = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 圆弧半径  $r = 0.50 \text{ m}$ , 塑料棒长  
 $l = 2\pi r - d = (2 \times 3.14 \times 0.50 - 0.02) \text{ m} = 3.12 \text{ m}$   
 电荷线密度

$$\lambda = \frac{q}{l} = \frac{3.12 \times 10^{-9}}{3.12} \text{ C/m} = 1.00 \times 10^{-9} \text{ C/m}$$

按照上述解题思路, 当把带电系统看成一个完整的均匀带电圆环时, 由于电荷对于圆心对称分布, 相互对称的任两个电荷元在圆心处产生的电场强度相互抵消, 因而整个均匀带电圆环在圆心处产生的电场强度

$$E_1 = 0$$

将塑料棒空隙处电荷看成点电荷  $q'$ , 它在圆心处的电场强度

$$E_2 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

方向与从空隙到圆心的方向相同。

空隙处电荷实际上是不存在的, 因此圆心处电场强度

$$\begin{aligned} E &= E_1 - E_2 = -\frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= -\frac{9 \times 10^9 \times 1.00 \times 10^{-9} \times 0.02}{0.50^2} \text{ V/m} \\ &= -0.72 \text{ V/m} \end{aligned}$$

负号表示电场强度方向为从圆心指向空隙。

**【10-14】** 设点电荷分布的位置是: 在  $(0, 0)$  处为  $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ 、在  $(3 \text{ m}, 0)$  处为  $4 \times 10^{-8} \text{ C}$ 、在  $(0, 4 \text{ m})$  处为  $-6 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。计算通过以  $(0, 0)$  为球心, 半径等于  $5 \text{ m}$  的球面上的总  $E$  通量。

解 三点电荷均位于所给球面内, 根据高斯定理, 球面上的  $E$  通量

$$\begin{aligned} \Psi_E &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 q_i \\ &= \frac{1}{8.85 \times 10^{-12}} (5 \times 10^{-8} + 4 \times 10^{-8} - 6 \times 10^{-8}) \text{ V} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$= 3.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}$$

**【10-15】** 如图10-23所示,  $d=0.4 \text{ m}$ ,  $d'=0.6 \text{ m}$  的长方闭合面处在一不均匀电场  $E=(3+2x^2)\mathbf{i}$  中,  $E$  和  $x$  的单位为  $\text{V/m}$  和  $\text{m}$ , 计算通过此闭合面的净  $E$  通量及包围在闭合面内的净电荷量。

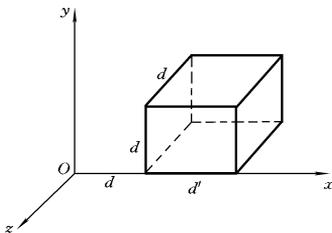


图 10-23

**解** 电场强度沿  $x$  轴方向,  $E$  线只通过左、右两侧面。

$$\begin{aligned}\Psi_{E_{\text{左}}} &= -ES = -Ed^2 = -(3+2d^2)d^2 \\ &= -(3+2 \times 0.4^2) \times 0.4^2 \text{ V} \cdot \text{m} = -0.531 \text{ V} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{E_{\text{右}}} &= Ed^2 = [3+2(d+d')^2]d^2 \\ &= [3+2(0.4+0.6)^2]0.4^2 \text{ V} \cdot \text{m} = 0.8 \text{ V} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

$$\Psi_E = \Psi_{E_{\text{右}}} + \Psi_{E_{\text{左}}} = (0.8 - 0.531) \text{ V} \cdot \text{m} = 0.269 \text{ V} \cdot \text{m}$$

闭合面内净电荷量

$$q = \epsilon_0 \Psi_E = 8.85 \times 10^{-12} \times 0.269 \text{ C} = 2.38 \times 10^{-12} \text{ C}$$

**【10-16】** (1) 地球表面附近的电场强度近似为  $200 \text{ V/m}$ , 方向指向地球中心。试计算地球带的总电荷量, 地球的半径为  $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ; (2) 在离地面  $1400 \text{ m}$  处, 电场强度降为  $20 \text{ V/m}$ , 方向仍指向地球中心。试计算这  $1400 \text{ m}$  厚的大气层里的平均电荷密度。

**解** (1) 把地球看成均匀带电球体。它在地表附近产生的电场强度指向地球中心, 说明地球带负电。地球表面附近电场强度为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

式中  $q$  是地球电量,  $R$  是地球半径。所以

$$q = 4\pi\epsilon_0 ER^2 = \frac{200 \times (6.37 \times 10^6)^2}{9 \times 10^9} \text{ C} = 9.02 \times 10^5 \text{ C}$$

(2) 在高为 1 400 m 处, 电场强度方向虽然仍然指向地心, 但数值减小了, 说明在这个高度内的大气层带有正电。

设地球所带电量为  $q$ , 大气层所带电量为  $q_0$ , 高度用  $h$  表示, 则高度为  $h$  处的电场强度大小为

$$E_0 = \frac{q - q_0}{4\pi\epsilon_0(R + h)^2}$$

所以

$$\begin{aligned} q_0 &= q - 4\pi\epsilon_0 E_0 (R + h)^2 \\ &= \left[ 9.02 \times 10^5 - \frac{20 \times (6.37 \times 10^6 + 1.4 \times 10^3)^2}{9 \times 10^9} \right] \text{ C} \\ &= 8.12 \times 10^5 \text{ C} \end{aligned}$$

因为  $h \ll R$ , 大气层的体积近似为

$$\begin{aligned} V &= 4\pi R^2 h = 4 \times 3.14 \times (6.37 \times 10^6)^2 \times 1.4 \times 10^3 \text{ m}^3 \\ &= 7.14 \times 10^{17} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

故大气层的平均电荷密度

$$\bar{\rho} = \frac{q_0}{V} = \frac{8.12 \times 10^5}{7.14 \times 10^{17}} \text{ C/m}^3 = 1.14 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$$

**【10-17】** 在半径分别为 10 cm 和 20 cm 的两层假想同心球面中间, 均匀分布着电荷体密度为  $\rho = 10^{-9} \text{ C/m}^3$  的正电荷。求离球心 5 cm、15 cm、50 cm 处的电场强度。

解 以  $r$  表示到球心的距离。当  $r = 5 \text{ cm}$  时, 以  $r$  为半径作的同心球面(高斯面)内没有电荷, 球面上各处电场强度均为零。

$r = 15 \text{ cm}$  时, 以  $r$  为半径的高斯面内的电量为

$$\begin{aligned} q &= \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) \quad (R_1 \text{ 为内球面半径}) \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - R_1^3) \end{aligned}$$

高斯面上各点电场强度大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4}{3}\pi\rho(r^3 - R_1^3) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(r^3 - R_1^3)$$

$$= \frac{10^{-9} \times (0.15^3 - 0.10^3)}{3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.15^2} \text{ V/m} = 4.0 \text{ V/m}$$

$r=50 \text{ cm}$  时,以  $r$  为半径的高斯面内的电量为

$$q = \rho \left( \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 \right) \quad (R_2 \text{ 为外球面半径})$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

高斯面上各点场强大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}(R_2^3 - R_1^3)$$

$$= \frac{10^{-9} \times (0.20^3 - 0.10^3)}{3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.50^2} \text{ V/m} = 1.05 \text{ V/m}$$

**【10-18】** 一个半径为  $R$  的球体内,分布着电荷体密度  $\rho=kr$ , 式中  $r$  是径向距离,  $k$  是常量。求空间的场强分布,并画出  $E$  对  $r$  的关系曲线。

解 电荷密度仅是  $r$  的函数,这种电荷分布具有球对称性,它的电场分布也具有球对称性。

在球内距球心为  $r$  的高斯面内包围的电量为

$$q = \iiint \rho dV = \int_0^r kr 4\pi r^2 dr = \pi k r^4$$

距球心为  $r$  处的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\pi k r^4}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{k}{4\epsilon_0} r^2 \quad (r \leq R)$$

在球外距球心为  $r$  的高斯面包围的电量为

$$q = \int_0^R kr 4\pi r^2 dr = \pi k R^4$$

距球心为  $r$  处的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\pi k R^4}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{k R^4}{4\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

$E$  对  $r$  的关系曲线如图 10-24 所示。

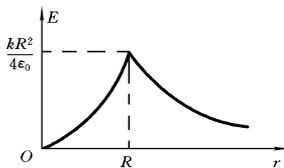


图 10-24

**【10-19】** 一层厚度为 0.5 cm 的无限大平板, 均匀带电, 电荷体密度为  $1.0 \times 10^{-4} \text{ C/m}^3$ 。求: (1) 这平板中央的电场强度; (2) 平板内与其表面相距 0.1 cm 处的电场强度; (3) 平板外的电场强度。

**解** (1) 对平板中央平面来说, 电荷是对称分布的, 平面两侧的电荷在平面上任一点产生的场强大小相等、方向相反, 相互抵消。故平板中央的电场强度为零。

(2) 对平板内距表面 0.1 cm 的平面(图 10-25)来说, 其一侧电荷面密度为

$$\sigma_1 = 1.0 \times 10^{-4} \times 0.1 \times 10^{-2} \text{ C/m}^2 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

在平面上的场强为

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}$$

右侧电荷面密度为

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 1.0 \times 10^{-4} \times 0.4 \times 10^{-2} \text{ C/m}^2 \\ &= 4.0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

在平面上的场强为

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$$

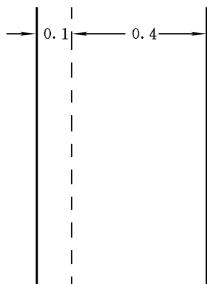


图 10-25

$E_1$  与  $E_2$  的方向是相反的, 平面上合场强为

$$\begin{aligned} E &= E_2 - E_1 = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma_2 - \sigma_1) \\ &= \frac{4.0 \times 10^{-7} - 1.0 \times 10^{-7}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 1.69 \times 10^4 \text{ V/m} \end{aligned}$$

(3) 对平板外来说, 平板上电荷面密度为

$$\sigma = 1.0 \times 10^{-4} \times 0.5 \times 10^{-2} \text{ C/m}^2 = 5.0 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

在平板外产生的场强为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{5.0 \times 10^{-7}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \text{ V/m} = 2.82 \times 10^4 \text{ V/m}$$

**【10-20】** 点电荷 $q_1, q_2, q_3, q_4$ 的电荷量各为 $4 \times 10^{-9} \text{ C}$ , 放置在一正方形的四个顶点上, 各顶点距正方形中心 $O$ 点的距离均为 $5 \text{ cm}$ 。(1) 计算 $O$ 点处的场强和电势; (2) 将一试探电荷 $q_0 = 10^{-9} \text{ C}$ 从无穷远移到 $O$ 点, 电场力做功多少? (3) 问(2)中所述过程中 $q_0$ 的电势能的改变为多少?

解 (1) 位于对角的两相同点电荷在 $O$ 点处的场强相互抵消, 故 $O$ 点场强为零。四点电荷在 $O$ 点电势相同, 故 $O$ 点电势为

$$V_0 = 4 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 r}$$

已知 $q = 4 \times 10^{-9} \text{ C}$ ,  $r = 0.05 \text{ m}$ , 代入上式后有

$$V_0 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 r} = \frac{4 \times 10^{-9}}{3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.05} \text{ V} = 2.88 \times 10^3 \text{ V}$$

(2) 无穷远处电势为零( $V_\infty = 0$ )。将 $q_0$ 从无穷远处移到 $O$ 点, 电场力做的功

$$\begin{aligned} A &= q_0(V_\infty - V_0) = 10^{-9}(0 - 2.88 \times 10^3) \text{ J} \\ &= -2.88 \times 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

(3) 在移动 $q_0$ 过程中要克服电场力做功, 它使 $q_0$ 的电势能增加了 $2.88 \times 10^{-6} \text{ J}$ 。

**【10-21】** 如图 10-26 所示, 已知 $r = 6 \text{ cm}$ ,  $d = 8 \text{ cm}$ ,  $q_1 = 3 \times 10^{-8} \text{ C}$ ,  $q_2 = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。求: (1) 将电荷量为 $2 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的点电荷从 $A$ 点移到 $B$ 点, 电场力做功多少? (2) 将此点电荷从 $C$ 点移到 $D$ 点, 电场力做功多少?

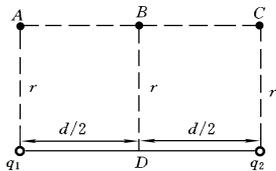


图 10-26

解 (1)  $A$  点电势为

$$\begin{aligned}
 V_A &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1A}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \\
 &= 9 \times 10^9 \left( \frac{3 \times 10^{-8}}{0.06} - \frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{0.06^2 + 0.08^2}} \right) \text{ V} \\
 &= 1.8 \times 10^3 \text{ V}
 \end{aligned}$$

$B$  点电势为

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1B}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{2B}}$$

$r_{1B} = r_{2B}$ ,  $q_1 + q_2 = 0$ , 故  $V_B = 0$ 。将电荷  $q_0 = 2 \times 10^{-9} \text{ C}$  从  $A$  点移到  $B$  点, 电场力做功为

$$\begin{aligned}
 A &= q_0(V_A - V_B) = 2 \times 10^{-9} \times (1.8 \times 10^3 - 0) \text{ J} \\
 &= 3.6 \times 10^{-6} \text{ J}
 \end{aligned}$$

(2)  $C$  点电势为

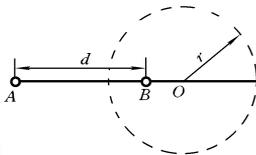
$$\begin{aligned}
 V_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{1C}} + \frac{q_2}{r_{2C}} \right) \\
 &= 9 \times 10^9 \left( \frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{0.06^2 + 0.08^2}} - \frac{3 \times 10^{-8}}{0.06} \right) \text{ V} \\
 &= -1.8 \times 10^3 \text{ V}
 \end{aligned}$$

显然,  $V_D = 0$ 。将  $q_0$  从  $C$  点移到  $D$  点, 电场力做功为

$$\begin{aligned}
 A &= q_0(V_C - V_D) = 2 \times 10^{-9}(-1.8 \times 10^3 - 0) \text{ J} \\
 &= -3.6 \times 10^{-6} \text{ J}
 \end{aligned}$$

**【10-22】** 点电荷  $q_1$  与  $-q_2$  放置在相距为  $d$  的  $A$ 、 $B$  两点(图 10-27)。试证电势为零的等势面是一球面, 球心在  $AB$  的延长线上,  $AO =$

$\frac{q_1^2 d}{q_1^2 - q_2^2}$ , 半径  $r = \frac{q_1 q_2 d}{q_1^2 - q_2^2}$ 。



证 建立以  $A$  为原点, 沿  $AB$  方向为  $x$  轴的空间直角坐标系。则  $q_1$  的坐标为  $(0, 0, 0)$ ,  $q_2$  的坐标为  $(d, 0, 0)$ 。空间

图 10-27

任意点  $P$  的坐标为  $(x, y, z)$ , 该点电势为

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}$$

电势为零的点的坐标满足方程

$$\begin{aligned} q_1^2[(x-d)^2 + y^2 + z^2] &= q_2^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ (q_1^2 - q_2^2)x^2 - 2q_1^2dx + q_1^2d^2 + (q_1^2 - q_2^2)y^2 + (q_1^2 - q_2^2)z^2 &= 0 \\ x^2 - 2\frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}xd + \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d^2 + y^2 + z^2 &= 0 \\ x^2 - 2\frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}xd + \left(\frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d\right)^2 + y^2 + z^2 & \\ = \left(\frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d\right)^2 - \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d^2 & \\ \left(x - \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q_1q_2}{q_1^2 - q_2^2}d\right)^2 & \end{aligned}$$

这是一个球面方程, 球心坐标为  $\left(\frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}d, 0, 0\right)$ , 即图 10-27 上  $O$  点, 半径为

$$r = \frac{q_1q_2}{q_1^2 - q_2^2}d$$

此球面方程即是零势面方程。

**【10-23】** 一边长为  $4d$  和  $3d$  的长方形的对角上放置电荷量为  $q_1 = 4 \mu\text{C}$  的两个点电荷, 在边长为  $2d$  和  $d$  的较小长方形的长边两端放置电荷量为  $q_2 = 6 \mu\text{C}$  的两个点电荷。求当小长方形绕大长方形的长边转到图中虚线所示位置时, 外力反抗电场力所做的功。设  $d = 0.1 \text{ m}$ 。

解 当两个电量为  $q_2$  的点电荷移动到虚线位置时, 它们各自相对于图 10-28 中左上角点电荷  $q_1$  的距离没有变化, 因此, 它们在该电荷的电场中的电势没有变

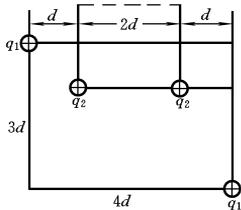


图 10-28

化。它们之间的距离也没有变化,它们只是在右下角点电荷  $q_1$  的电场中的电势发生了变化。在移动前,两点电荷所在处电势分别为

$$V_{1左} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{13}d)}, \quad V_{1右} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{5}d)}$$

移动后,两点电荷所在处电势分别为

$$V_{2左} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(5d)}, \quad V_{2右} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{17}d)}$$

移动过程中外力做的功为

$$\begin{aligned} A &= q_2(V_{2左} - V_{1左}) + q_2(V_{2右} - V_{1右}) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6} \times 6 \times 10^{-6}}{0.1} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \text{ J} \\ &= -0.61 \text{ J} \end{aligned}$$

**【10-24】** 一半径  $R=8 \text{ cm}$  的圆盘,其上均匀带有面密度为  $\sigma = 2 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$  的电荷,求:(1)轴线上任一点的电势(用该点与盘心的距离  $x$  来表示);(2)从场强和电势的关系求该点的场强;(3)计算  $x=6 \text{ cm}$  处的电势和场强。

解 (1) 如图 10-29 所示,取盘的中心为原点,它的轴线为  $x$  轴。在圆盘上作半径为  $r$ ,宽为  $dr$  的圆环,环上长为  $dl$  的一段上电量  $dq = \sigma dl dr$ 。此电荷在轴线上  $P$  点产生的电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{\sigma dl dr}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{1/2}}$$

故  $P$  点电势

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} \frac{\sigma dl}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{1/2}} \\ &= \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(x^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \end{aligned}$$

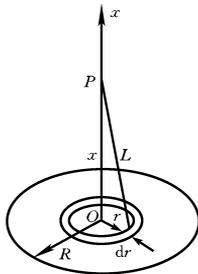


图 10-29

(2)  $P$  点电场强度

$$E = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

方向沿  $x$  轴方向。

(3) 在  $x = 6 \times 10^{-2} \text{ m}$  处，

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x) \\ &= \frac{2 \times 10^{-5}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} (\sqrt{(6 \times 10^{-2})^2 + (8 \times 10^{-2})^2} \\ &\quad - 6 \times 10^{-2}) \text{ V} \\ &= 4.52 \times 10^4 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \\ &= \frac{2 \times 10^{-5}}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \left( 1 - \frac{6 \times 10^{-2}}{\sqrt{(6 \times 10^{-2})^2 + (8 \times 10^{-2})^2}} \right) \text{ V/m} \\ &= 4.52 \times 10^5 \text{ V/m} \end{aligned}$$

**【10-25】** 一带电粒子经过加速电压加速后，其速度增大。已知电子的质量  $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，电荷量绝对值  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。(1) 假设电子质量与速度无关，把静止电子加速到光速要多高的电压？(2) 若考虑电子质量随速度而变化，那么静止电子经过上述电压加速后，其速度是多少？它是光速  $c$  的百分之几？

解 (1) 设所需电压为  $U$ ，则

$$eU = \frac{1}{2} mc^2$$

$$U = \frac{mc^2}{2e} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ V} = 2.56 \times 10^5 \text{ V}$$

(2) 电子经加速后，能量增加  $eU$ 。设这时质量为  $m'$ ，速度为  $v$ ，则

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

且  $m'c^2 = mc^2 + eU$

$$\text{即 } \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + eU = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2 = \frac{3}{2}mc^2$$

由此方程解得  $v = 0.745c = 74.5\%c$ 。

**【10-26】** 设 X 射线管中的一个电子, 通过 180 kV 加速电压从阴极飞向阳极。如果电子离开阴极时初速为零, 试求电子到达阳极时的(1)动能及总能量;(2)速度;(3)按经典理论计算的速度。

解 (1) 电子到达阳极时的动能为

$$E_k = eU = 1.8 \times 10^5 \text{ eV}$$

总能量为

$$\begin{aligned} E &= mc^2 + E_k \\ &= 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 + 1.8 \times 10^5 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= 1.11 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

(2) 因  $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = E$ , 由此方程解得

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} c \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{1.11 \times 10^{-13}}\right)^2} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \\ &= 2.02 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(3) 按经典理论有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= E_k \\ v &= \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.8 \times 10^5 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} \text{ m/s} \\ &= 2.5 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**【10-27】** 一块很大的带电金属薄板, 其电荷面密度为  $\sigma$ , 离金属板为  $d$  处有一质量为  $m$ 、电荷量为  $-q$  的点电荷从静止释放, 计算电荷的加速度及落到板上时的速度和时间。(忽略重力和  $-q$  对

金属板上电荷分布的影响。)

解 带电金属薄板在板外产生的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

点电荷所受力的的大小为

$$F = qE = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0}$$

方向指向金属板。电荷的加速度为

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0 m}$$

它是恒量,电荷做匀加速直线运动,落到板上时的速度为  $v$ , 则

$$v^2 = 2ad, \quad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{\sigma q d}{\epsilon_0 m}}$$

落到板上的时间为

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{4\epsilon_0 m d}{\sigma q}}$$

**【10-28】** 有一块很大的带电金属板及一小球,已知小球的质量为  $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ g}$ , 带有电荷量  $q = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。小球悬挂在一丝线的下端,平衡时悬线与金属板面间的夹角为  $30^\circ$ , 如图10-30所示。试计算带电金属板上的电荷面密度  $\sigma$ 。

解 两个平行的、电荷面密度均为  $\sigma$  的无限大均匀带电金属板在小球处产生的合场强为

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

小球受到的电场力为

$$F = qE = \frac{q\sigma}{\epsilon_0}$$

$F$  的方向垂直于板面(图10-31),与小球的重力  $G$ 、丝线对小球的拉力  $T$  达到平衡。 $F$  与  $G$  相互垂直,因此

$$\tan\theta = \frac{F}{G} = \frac{\sigma q}{\epsilon_0 m g}$$

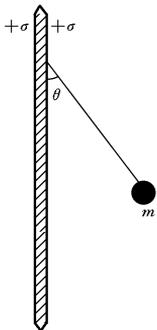


图 10-30

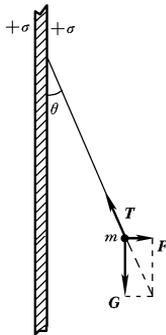


图 10-31

**【10-29】** 证明在静电平衡时,导体表面某面元  $\Delta S$  所受的静电力为  $F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S e_n$

证 对于紧靠导体表面某有限面元  $\Delta S$  的点来说,这一面元也可看成无限大均匀带电平面,面元的电荷在该点产生的场强为

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

然而静电平衡时,带电导体表面附近的场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e_n$$

说明带电导体上除了面元  $\Delta S$  上的电荷外,其余电荷在该面元附近产生的场强为

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

面元上的电量为  $q = \sigma \Delta S$ , 该面元受到的作用力即为

$$F = qE_2 = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S e_n$$

**【10-30】** 一质量为 $m$ 、面积为 $S$ 的均质薄金属盘,放置在一无限大导体平板上,平板水平放置。最初盘和平板都不带电,然后逐渐使它们带电。问电荷面密度增加到何值时,金属盘将离开平板。

解 当将金属盘置于无限大导体平板上,并使它们带电时,盘和平板具有相同的电荷面密度 $\sigma$ ,平板将对盘产生斥力。当斥力随着 $\sigma$ 的增加而增大到足以与盘的重力平衡时,盘将离开平板,这时平板在金属盘上产生的场强为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

盘上电量为 $q = \sigma S$ ,受到的斥力

$$F = qE = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S$$

金属盘离开平板时有 $F > mg$ ,即

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S > mg$$

所以

$$\sigma > \sqrt{\frac{2\epsilon_0 mg}{S}}$$

**【10-31】** 在一无限大接地导体平板附近有一点电荷 $q$ ,它离板面的距离为 $d$ (图10-32)。求导体表面上各点的感应电荷面密度 $\sigma$ 。

解 设 $P$ 点感应电荷面密度为 $\sigma$ (若 $q > 0$ ,则 $\sigma < 0$ ),该点场强大小为

$$E_P = \frac{-\sigma}{\epsilon_0}$$

$E_P$ 的方向水平向左。

设想在平板的另一侧与电荷 $q$ 对称的位置存在另一点电荷 $-q$ ,则这两个点电荷在平板所在平面上形成的电势为零,在平板右侧无限远处形成的电势为零,这与图10-33中平板右侧空间边

界电势完全相同。根据唯一性定理,这两个点电荷在板的右侧空间

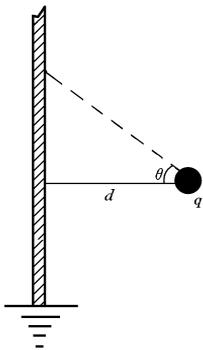


图 10-32

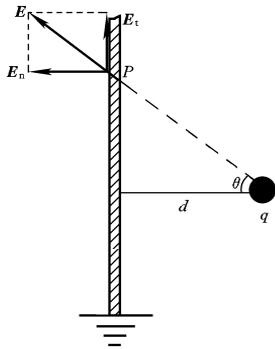


图 10-33

形成的电场与图 10-33 中右侧空间的电场是相同的。于是可以撤去导体平板,计算两点电荷在  $P$  点产生的场强。显然,两点电荷在  $P$  点的合场强的方向是水平向左的,其大小为

$$E_P = 2E\cos\theta = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2} \cos\theta = \frac{q\cos^3\theta}{2\pi\epsilon_0 d^2}$$

根据

$$\frac{-\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q\cos^3\theta}{2\pi\epsilon_0 d^2}$$

可得导体板上各点感应电荷面密度为

$$\sigma = -\frac{q\cos^3\theta}{2\pi d^2}$$

**【10-32】** 半径为  $r_1, r_2 (r_1 < r_2)$  的两个同心导体球壳互相绝缘, 现把  $+q$  的电荷量给予内球, 如图 10-34 所示。求: (1) 外球的电荷量及电势; (2) 把外球接地后再重新绝缘, 外球的电荷量及电势; (3) 然后把内球接地, 内球的电荷量及外球的电势的改变。

解 (1) 外球内表面的感应电荷量为  $-q$ , 由于外球原来没有

电荷,根据电荷守恒定律知,其外表面感应电荷量为 $+q$ 。外球的电势是内球电荷电场在外球壳处的电势

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

(2) 外球壳接地时,其外表面电荷消失。重新绝缘后,外球的电荷量为 $-q$ ,电势为

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0$$

(3) 内球接地后,它的电势为零。设内球电量为 $q'$ ,则有

$$\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 0$$

由此解得  $q' = \frac{r_1}{r_2}q$

此时外球电势为

$$V_3 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{(r_1 - r_2)q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

外球电势增量为

$$\Delta V = V_3 - V_1 = \frac{(r_1 - r_2)q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{(r_1 - 2r_2)q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

**【10-33】** 点电荷 $q=4.0 \times 10^{-10} \text{ C}$ ,处在导体球壳的中心,壳的内外半径分别为 $R_1=2.0 \text{ cm}$ 和 $R_2=3.0 \text{ cm}$ ,求:(1)导体球壳的电势;(2)离球心 $r=1.0 \text{ cm}$ 处的电势;(3)把点电荷移开球心 $1.0 \text{ cm}$ 后导体球壳的电势。

解 (1) 球壳上感应电荷 $-q$ 和 $+q$ 分别均匀分布于它的内外表面(图10-35)。点电荷电场及内表面电荷电场在

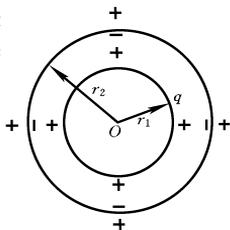


图 10-34

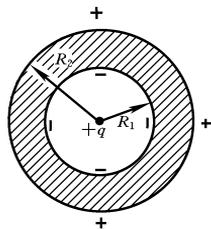


图 10-35

球壳上电势的代数和为零,故球壳电势为外表面电荷电场在球壳上的电势,即

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{9 \times 10^9 \times 4.0 \times 10^{-10}}{3.0 \times 10^{-2}} \text{ V} = 120 \text{ V}$$

(2) 离球心  $r=1.0 \text{ cm}$  (位于球壳与点电荷之间) 处的电势为

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times 4.0 \times 10^{-10} \left( \frac{1}{1.0 \times 10^{-2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2.0 \times 10^{-2}} + \frac{1}{3.0 \times 10^{-2}} \right) \text{ V} \\ &= 300 \text{ V} \end{aligned}$$

(3) 球壳两表面上的电荷不在球壳内产生电场。点电荷  $q$  在球壳内移动时,球壳上电荷对它不做功,故电势无变化,仍为  $120 \text{ V}$ 。

**【10-34】** 有直径为  $16 \text{ cm}$  及  $10 \text{ cm}$  的非常薄的两个铜制球壳,同心放置时,内球的电势为  $2700 \text{ V}$ ,外球带有电荷量为  $8.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ ,现把内球和外球接触,两球的电势各变化多少?

解 设内球半径为  $R_1$ ,电荷量为  $q_1$ ,外球半径为  $R_2$ ,电荷量为  $q_2$ 。在两球接触前,内球电势为

$$V_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

由此方程解得

$$\begin{aligned} q_1 &= R_1 \left( 4\pi\epsilon_0 V_1 - \frac{q_2}{R_2} \right) \\ &= 0.050 \times \left( \frac{2700}{9 \times 10^9} - \frac{8.0 \times 10^{-9}}{0.080} \right) \text{ C} = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}$$

于是可算得外球电势为

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{(1.0 \times 10^{-8} + 8.0 \times 10^{-9}) \times 9 \times 10^9}{0.080} \text{ V} \\ &= 2.03 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

两球接触后,电荷都分布在外球壳上。这时内外球壳电势相等,都是

$$V' = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 2.03 \times 10^3 \text{ V}$$

对内球来说,电势增量为

$$\Delta V = V' - V_1 = (2.03 \times 10^3 - 2700) \text{ V} = -6.7 \times 10^2 \text{ V}$$

对于外球,电势无变化。

**【10-35】** 半径为  $R_1=1.0 \text{ cm}$  的导体球,带有电荷  $q_1=1.0 \times 10^{-10} \text{ C}$ ,球外有一个内、外半径分别为  $R_2=3.0 \text{ cm}$ 、 $R_3=4.0 \text{ cm}$  的同心导体球壳,壳上带有电荷  $Q=11 \times 10^{-10} \text{ C}$ ,试计算:(1)两球的电势  $V_1$  和  $V_2$ ; (2)用导线把球和壳连接在一起后  $V_1$  和  $V_2$  分别是多少? (3)若外球接地,  $V_1$  和  $V_2$  为多少?

解 导体球及球壳上电荷分布情况如图 10-36 所示。

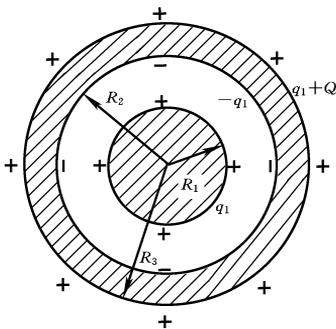


图 10-36

(1) 导体球的电势为

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{-q_1}{R_2} + \frac{q_1 + Q}{R_3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 9 \times 10^9 \left( \frac{1.0 \times 10^{-10}}{1.0 \times 10^{-2}} - \frac{1.0 \times 10^{-10}}{3.0 \times 10^{-2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1.0 \times 10^{-10} + 11 \times 10^{-10}}{4.0 \times 10^{-2}} \right) \text{ V} \\
 &= 3.3 \times 10^2 \text{ V}
 \end{aligned}$$

球壳的电势为

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1 + (-q_1)}{R_2} + \frac{q_1 + Q}{R_3} \right] \\
 &= \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.0 \times 10^{-10} + 11 \times 10^{-10})}{4.0 \times 10^{-2}} \text{ V} \\
 &= 2.7 \times 10^2 \text{ V}
 \end{aligned}$$

(2) 用导线把球和壳连接在一起后,它们构成一个等势体,且

$$V_1 = V_2 = \frac{q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 2.7 \times 10^2 \text{ V}$$

(3) 若外球接地,外球电势  $V_2 = 0$ ,内球电势为

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\
 &= 9 \times 10^9 \times 1.0 \times 10^{-10} \left( \frac{1}{1.0 \times 10^{-2}} - \frac{1}{3.0 \times 10^{-2}} \right) \text{ V} \\
 &= 60 \text{ V}
 \end{aligned}$$

**【10-36】** 一块相对电容率  $\epsilon_r = 5$  的扁平电介质,垂直放置于  $D = 1 \text{ C/m}^2$  的均匀电场中,已知电介质的体积为  $0.1 \text{ m}^3$ ,并且是均匀极化,求:(1)电介质里的电极化强度;(2)电介质总的电偶极矩。

解 (1) 电介质里的电极化强度为

$$\begin{aligned}
 P &= \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D \\
 &= \frac{5 - 1}{5} \times 1 \text{ C/m}^2 = 0.8 \text{ C/m}^2
 \end{aligned}$$

(2) 电介质总的电偶极矩

$$\sum p = P \Delta V = 0.8 \times 0.1 \text{ C} \cdot \text{m} = 0.08 \text{ C} \cdot \text{m}$$

**【10-37】** 一扁平的电介质板( $\epsilon_r=4$ )垂直放在一均匀电场里,如果电介质表面上的极化电荷面密度为 $\sigma'=0.5\text{ C/m}^2$ ,求:(1)电介质里的电极化强度和电位移;(2)电介质板外的电位移;(3)电介质板里和板外的场强。

解 (1) 电介质里电极化强度方向与电介质表面垂直,因此电极化强度

$$P = P_n = \sigma' = 0.5\text{ C/m}^2$$

上题已证 
$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D$$

因此,电介质里的电位移

$$D = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} P = \frac{4}{4 - 1} \times 0.5\text{ C/m}^2 = 0.67\text{ C/m}^2$$

(2) 电场是均匀的,在电介质板外也有

$$D = 0.67\text{ C/m}^2$$

(3) 电介质板内的场强为

$$\begin{aligned} E &= \frac{D}{\epsilon} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{0.67}{8.85 \times 10^{-12} \times 4}\text{ V/m} \\ &= 1.89 \times 10^{10}\text{ V/m} \end{aligned}$$

电介质板外的场强为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{0.67}{8.85 \times 10^{-12}}\text{ V/m} = 7.57 \times 10^{10}\text{ V/m}$$

**【10-38】** 平板电容器极板间的距离为 $d$ ,保持极板上的电荷不变,把相对电容率为 $\epsilon_r$ 、厚度为 $\delta(<d)$ 的玻璃板插入极板间,求无玻璃板时和插入玻璃板后极板间电势差的比。

解 设极板上电荷面密度为 $\sigma$ ,无论电容器内是否插入玻璃板,电位移都是

$$D = \sigma$$

因此电容器内真空部分的场强为

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

插入玻璃板前,极板间电势差为

$$U_0 = E_0 d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

插入玻璃板后,玻璃板内场强为

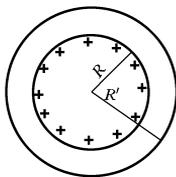
$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

极板间电势差为

$$\begin{aligned} U &= E\delta + E_0(d - \delta) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \delta + \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - \delta) \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} d - \frac{\sigma \delta}{\epsilon_0} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \end{aligned}$$

于是可得 
$$\frac{U}{U_0} = 1 - \frac{\delta(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r d}$$

**【10-39】** 在半径为  $R$  的金属球之外包有一层均匀电介质层(图10-37),外半径为  $R'$ 。设电介质的相对电容率为  $\epsilon_r$ ,金属球的电荷量为  $Q$ ,求:(1)电介质层内、外的场强分布;  
(2)电介质层内、外的电势分布;(3)金属球的电势。



解 (1) 应用有电介质时的高斯定理可得电介质层内、外的电位移的分布为

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (r > R)$$

因此,电介质层内的场强分布为

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (R < r < R')$$

电介质层外的场强分布为

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (r > R')$$

(2) 介质层内某点  $P$  的电势为

$$V_1 = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R'} E_1 dr + \int_{R'}^\infty E_2 dr$$

图 10-37

$$\begin{aligned}
 &= \int_r^{R'} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} dr + \int_{R'}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R'} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) \quad (R \leq r \leq R')
 \end{aligned}$$

电介质外的电势分布为

$$V_2 = \int_r^{\infty} E_2 dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R')$$

(3) 令  $V_1$  的表达式中的  $r=R$ , 即得金属球的电势为

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right)$$

**【10-40】** 半径为  $R_0$  的导体球带有电荷  $Q$ , 球外有一层均匀电介质的同心球壳, 其内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 相对电容率为  $\epsilon_r$  (图 10-38), 求: (1) 电介质内外的电场强度  $E$  和电位移  $D$ ; (2) 电介质内的极化强度  $P$  和表面上的极化电荷面密度  $\sigma'$ 。

解 (1) 根据有电介质时的高斯定理, 电介质内外的电位移都是

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{r} \quad (r > R_0)$$

在电介质内的电场强度

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在电介质外的电场强度

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (R_0 < r < R_1, r > R_2)$$

(2) 电介质内的极化强度

$$P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_1 = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r r^2} \mathbf{r}$$

电介质球壳内表面上的极化电荷面密度为

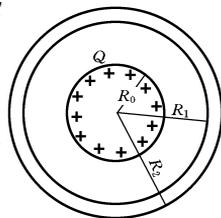


图 10-38

$$\sigma'_1 = P_{n1} = -P_1 = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R_1^2}$$

外表面上的极化电荷面密度为

$$\sigma'_2 = P_{n2} = P_2 = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R_2^2}$$

**【10-41】** 一平行板电容器有两层电介质,  $\epsilon_{r1}=4$ ,  $\epsilon_{r2}=2$ , 厚度为  $d_1=2.0$  mm,  $d_2=3.0$  mm, 极板面积为  $S=40$  cm<sup>2</sup>, 两极板间电压为 200 V。计算:(1)每层电介质中的电场能量密度;(2)每层电介质中的总电能;(3)用式  $\frac{1}{2}qU$  计算电容器的总电能。

解 (1) 两层电介质中的场强关系为

$$\epsilon_{r1}E_1 = \epsilon_{r2}E_2$$

又因  $U=E_1d_1+E_2d_2$ , 于是可解得

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\epsilon_{r2}U}{\epsilon_{r2}d_1 + \epsilon_{r1}d_2} \\ &= \frac{2 \times 200}{2 \times 2.0 \times 10^{-3} + 4 \times 3.0 \times 10^{-3}} \text{ V/m} \\ &= 2.5 \times 10^4 \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}E_1 = \frac{4}{2} \times 2.5 \times 10^4 \text{ V/m} = 5.0 \times 10^4 \text{ V/m}$$

电容器内的电位移

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0\epsilon_{r1}E_1 = 8.85 \times 10^{-12} \times 4 \times 2.5 \times 10^4 \text{ C/m}^2 \\ &= 8.85 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

两层电介质中的电场能量密度分别为

$$\begin{aligned} w_{e1} &= \frac{1}{2}DE_1 = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-7} \times 2.5 \times 10^4 \text{ J/m}^3 \\ &= 1.11 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{e2} &= \frac{1}{2}DE_2 = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-7} \times 5.0 \times 10^4 \text{ J/m}^3 \\ &= 2.22 \times 10^{-2} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

(2) 两层电介质中的总电能分别为

$$W_1 = w_{e1} S d_1 = 1.11 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-4} \times 2.0 \times 10^{-3} \text{ J} \\ = 8.88 \times 10^{-8} \text{ J}$$

$$W_2 = w_{e2} S d_2 = 2.22 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-4} \times 3.0 \times 10^{-3} \text{ J} \\ = 2.66 \times 10^{-7} \text{ J}$$

(3) 电容器的总电能

$$W = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} \sigma S U = \frac{1}{2} D S U \\ = \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-7} \times 40 \times 10^{-4} \times 200 \text{ J} \\ = 3.54 \times 10^{-7} \text{ J}$$

显然,  $W = W_1 + W_2$ 。

**【10-42】** 电容  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  的电容器在  $800 \text{ V}$  的电势差下充电, 然后切断电源, 并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为  $C_2 = 6 \mu\text{F}$  的两极板相连, 求: (1) 每个电容器极板所带电荷量; (2) 连接前后的静电场能。

解 (1) 电容器的总电荷量为

$$q = C_1 U_1 = 4 \times 10^{-6} \times 800 \text{ C} = 3.2 \times 10^{-3} \text{ C}$$

两个电容器极板所带电荷量分别为

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q = \frac{4}{4 + 6} \times 3.2 \times 10^{-3} \text{ C} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_2 = q - q_1 = (3.2 \times 10^{-3} - 1.28 \times 10^{-3}) \text{ C} \\ = 1.92 \times 10^{-3} \text{ C}$$

(2) 连接前的静电场能即是连接前第一个电容器的能量, 即

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times 800^2 \text{ J} = 1.28 \text{ J}$$

连接后的静电场能即并联后电容器的能量, 即

$$W_2 = \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{(3.2 \times 10^{-3})^2}{2 \times (4 \times 10^{-6} + 6 \times 10^{-6})} \text{ J} = 0.512 \text{ J}$$

**【10-43】** 两个同轴的圆柱, 长度都是  $l$ , 半径分别为  $R_1$  及  $R_2$ , 这两个圆柱带有等值异号电荷  $Q$ , 两圆柱之间充满电容率为  $\epsilon$  的电

介质。(1)在半径为 $r$  ( $R_1 < r < R_2$ )、厚度为 $dr$ 的圆柱壳中任一点的电场能量密度是多少?(2)这柱壳中的总电场能是多少?(3)电介质中的总电场能是多少?(4)从电介质中的总电场能求圆柱形电容器的电容。

解 (1) 圆柱面上沿轴长方向的电荷线密度

$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

在两圆柱之间的场强分布为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

因此,在半径为 $r$ 、厚度为 $dr$ 的圆柱壳中的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon r^2} = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon r^2 l^2}$$

(2) 这柱壳中的总电场能为

$$dW = w_e dV = w_e 2\pi r l dr = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon r^2 l^2} 2\pi r l dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} dr$$

(3) 电介质中的总电场能是

$$W = \int dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l r} dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(4) 圆柱形电容器的能量为

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

因此

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = 2\pi\epsilon l / \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**【10-44】** 两个半径都是 $R$ 、电荷量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的金属小球相距 $r$ ,设 $r \gg R$ ,计算系统的静电能。在释放两球后,两球相互吸引而相碰时的速率多大?如果(1)两球的质量相等;(2)带正电荷小球的质量比带负电荷小球的质量大很多(按经典理论计算)。

解 电荷量为 $+q$ 的金属球的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

金属球的电势为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

此球的静电能为

$$W_1 = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \varphi dS = \frac{1}{2} \sigma \varphi \iint_S dS = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} 4\pi R^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

同理,电荷量为 $-q$ 的金属球的静电能

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

两球相距为 $r$ 时,它们的相互作用能为

$$W_3 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

整个系统的静电能即是

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

两球相互吸引以至碰撞时,等量异号的自由电荷中和,电场消失,静电能全部转化为两球的动能。

(1) 两球质量相等,则

$$2 \times \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$v = \left[ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]^{1/2}$$

(2) 一个球的质量比另一球的质量大得多,则该球加速度小得多,作为近似,视作静止,另一球的动能即为

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

$$v = \left[ \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]^{1/2}$$

# 第十一章 恒定电流的磁场

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

### 2. 毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

### 3. 运动电荷的磁场

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

### 4. 安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

### 5. 几种特殊形状载流导体的磁场

#### (1) 载流直导线的磁场

一段载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

无限长载流直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

#### (2) 载流圆线圈轴线上的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

线圈中心处的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

轴线上远离中心处的磁场

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{r^3}$$

式中  $m = I S e_n$  是线圈的磁矩。

(3) 载流直螺线管内部的磁场

有限长直螺线管:  $B = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$

无限长直螺线管:  $B = \mu_0 n I$

(4) 长直圆柱形载流导线内外的磁场

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I r}{R^2} & (r \leq R) \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} & (r \geq R) \end{cases}$$

(5) 载流螺绕环内的磁场

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

6. 洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

7. 洛伦兹关系式

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

8. 安培定律

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

9. 载流线圈在匀强磁场中所受的力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

10. 平行载流直导线单位长度上的相互作用力

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$

## 11. 磁力的功

$$A = I\Delta\Phi$$

## 12. 磁化强度与磁化电流

$$M = \frac{\sum m + \sum \Delta m}{\Delta V}$$

$$M = \alpha_s, \quad \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_s$$

## 13. 磁场强度

$$\text{定义} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

磁场强度与磁化强度

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

磁场强度与磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

## 14. 有介质时的安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

## 思考题解答

**【11-1】** 一正电荷在磁场中运动, 已知其速度  $v$ , 沿着  $Ox$  轴方向, 若它在磁场中所受力有下列几种情况, 试指出各种情况下磁感应强度  $B$  的方向。(1) 电荷不受力; (2)  $F$  的方向沿  $Oz$  轴方向, 且此时磁力的值最大; (3)  $F$  的方向沿  $-Oz$  轴方向, 且此时磁力的值是最大值的一半。

答 根据  $F = qv \times B$  可知(1)与  $x$  轴平行; (2)与  $y$  轴同向; (3)与  $y$  轴负向成  $60^\circ$  夹角。

**【11-2】** 如果一带电粒子做匀速直线运动通过某区域, 是否能断定该区域的磁场为零?

答 不能。  $B$  与  $v$  平行即可使带电粒子做匀速直线运动。

**【11-3】** 如图 11-1 所示,穿过以闭合曲线  $C$  为边界的任意曲面  $S_1$  和  $S_2$  的磁通量是否相等。

答 相等。设以  $C$  为边界,且在  $S_1$  与  $S_2$  左边有一曲面为  $S_3$ ,则  $S_1+S_3$  或者  $S_2+S_3$  为闭合曲面,由高斯定理有

$$\iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

故 
$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

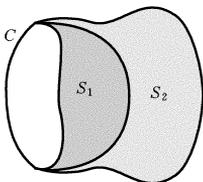


图 11-1

**【11-4】** 在载有电流  $I$  的圆形线圈中,线圈平面内各点磁感应强度的方向是否相同? 线圈内各点的  $B$  是否均匀?

答 由毕奥-萨伐尔定律矢量积方向可知,磁感应强度的方向都相同,垂直于线圈平面。但线圈内各点的  $B$  大小不等,即非均匀。

**【11-5】** 一个半径为  $R$  的假想球面中心有一运动电荷。问:  
(1) 在球面上哪些点的磁场最强?  
(2) 在球面上哪些点的磁场为零?  
(3) 穿过球面的磁通量是多少?

答 由运动电荷磁场公式  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$  可知

- (1) 与电荷运动方向垂直的大圆上各点的磁场最强。
- (2) 与电荷运动方向在同一面上的大圆各点的磁场为零。
- (3) 根据高斯定理,穿过球面的磁通量为 0。

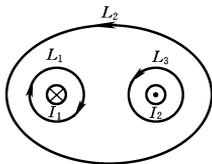
**【11-6】** 载流长螺线管中部的磁感应强度是  $\mu_0 n I$ , 边缘部分轴线上是  $\frac{\mu_0 n I}{2}$ , 这是不是说螺线管中部的磁感应线比边缘部分的磁感应线多? 或说在螺线管内部某处有  $1/2$  磁感应线突然中断了?

答 说螺线管中部的磁感应线比边缘部分的多是对的。但说在螺线管内部某处有  $1/2$  磁感应线突然中断则是不对的, 因磁感应线部分穿过螺线管表面。

**【11-7】** 用安培环路定理能否求出一段有限长载流直导线周围的磁场?

答 不能。磁感应强度虽具有轴对称性,但在离导线 $r$ 远的不同圆周上, $B$ 一般不等,因而无法用安培环路定理得到所需要的 $B$ 的表示式。

**【11-8】** 设图中两导线中的电流 $I_1$ 、 $I_2$ 均为 $8\text{ A}$ ,试分别求如图11-2所示的三个闭合线 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 的环路积分 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 值。并讨论:(1)在每个闭合线上各点的磁感应强度 $B$ 是否相等?(2)在闭合线 $L_2$ 上各点的 $B$ 是否为零?为什么?



答  $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 8\mu_0$ ,  $\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ,

$$\oint_{L_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 8\mu_0$$

图 11-2

(1) 不等。因为环路内外电流均对 $B$ 有贡献。

(2) 不为0。 $I_1$ 与 $I_2$ 在 $L_2$ 上产生的磁感应强度一般不为0。

**【11-9】** 一电荷 $q$ 在均匀磁场中运动,判断下列的说法是否正确,并说明理由。

(1) 只要电荷速度的大小不变,它朝任何方向运动时所受的洛伦兹力都相等;

(2) 在速度不变的前提下,电荷量 $q$ 改变为 $-q$ ,它所受的力将反向,而力的大小不变;

(3) 电荷量 $q$ 改变为 $-q$ ,同时其速度反向,则它所受的力也反向,而大小则不变;

(4)  $v$ 、 $B$ 、 $F$ 三个矢量,已知任意两个矢量的大小和方向,就能确定第三个矢量的大小和方向;

(5) 质量为 $m$ 的运动带电粒子,在磁场中受洛伦兹力后动能和动量不变。

答 (1) 错。洛伦兹力的大小和方向都可变。

- (2) 对。  
 (3) 所受的力的方向不变,大小不变。  
 (4) 对。  
 (5) 动能不变,动量改变方向。

以上结论,皆可由  $F=qv \times B$  获得。

**【11-10】** 一束质子发生了侧向偏转,造成这个偏转的原因可否是(1)电场?(2)磁场?(3)若是电场或者是磁场在起作用,如何判断是哪一种场?

答 (1) 由  $F=qE$  可知,电场可以造成质子偏转。

(2) 由  $F=qv \times B$  可知,磁场可以造成质子偏转。

(3) 磁场:质子发生回旋运动;

电场:质子只偏转,无回旋运动。

**【11-11】** 如图 11-3 所示,一对正、负电子同时在同一点射入一均匀磁场中,已知它们的速率分别为  $2v$  和  $v$ ,方向都和磁场垂直,指出它们的偏转方向;经磁场偏转后,哪个电子先回到出发点?

答 正电子向左;负电子向右;正负电子同时到达出发点。其角速度为

$$\omega = \frac{e}{m} B$$

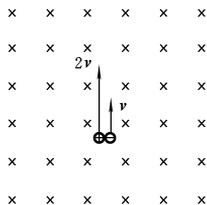


图 11-3

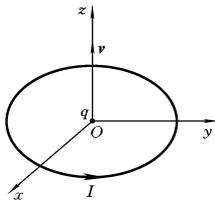


图 11-4

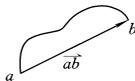
**【11-12】** 如图 11-4 所示,一载流圆形线圈放置在  $x-y$  平面内,电流流向如图所示,另一带正电荷的粒子以速度  $v$  沿  $Oz$  轴方

向通过线圈中心,试讨论作用在粒子和载流线圈上的力。

答 线圈轴线上的磁感沿  $z$  轴,则  $v \parallel B$ ,则粒子受力  $F=0$ ,其反作用力、粒子对线圈的作用力亦为 0。

【11-13】 一个弯曲的载流导线在均匀磁场中应如何放置才不受磁力的作用?

答 如图 11-5 所示,使  $\overrightarrow{ab}$  与  $B$  平行或者反向平行于  $B$ 。



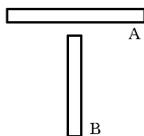
【11-14】 在一均匀磁场中,有两个面积相等、  
图 11-5  
通有相同电流的线圈,一个是三角形,一个是圆形。  
这两个线圈所受的磁力矩是否相等?所受的最大磁力矩是否相等?  
所受磁力的合力是否相等? 两线圈的磁矩是否相等? 当它们在磁  
场中处于稳定位置时,由线圈中电流所激发的磁场的方向与外磁  
场的方向是相同、相反还是相互垂直?

答 只要两者的法线与  $B$  的夹角相同,则两个线圈所受的磁力矩相同;所受的最大磁力矩相同;所受磁力的合力  $F_{\text{合}}=0$ ;因

$$|m_{\text{三角形}}| = IS_{\text{三角形}} = IS_{\text{圆}} = |m_{\text{圆}}|,$$

故  $M=m \times B = m_{\text{圆}} \times B$  相同;稳定时  $M=0, m \parallel B, m$  的方向是线圈磁场方向,故由线圈中电流所激发的磁场方向与外磁场的方向相同。

【11-15】 有两根铁棒,其外形完全相同,其中一根为磁铁,而另一根则不是,你怎样辨别它们? 不准将任一根棒作为磁针而悬挂起来,亦不准使用其他的仪器。



答 如图 11-6 所示放置,若 B 为磁铁,则 A、B 相互吸引;若 A 为磁铁,则 A、B 不吸引。

图 11-6

【11-16】 试说明  $B$  与  $H$  的联系和区别。

答  $H$  与  $B$  都是描述磁场的矢量;一般  $H$  是辅助量,两者的联系为  $H=B/\mu_0 - M$ 。

由安培定理可知,  $H$  只由传导电流激发, 而  $B$  既可由传导电流激发, 也可由磁化电流激发。

真空中  $\mu_r = 1$ ,  $H$  与  $B$  的场线完全相似; 非真空中, 两者的场线可相去甚远, 其大小和方向一般不同。

【11-17】 下面的几种说法是否正确, 试说明理由。

- (1) 若闭合曲线内不包围传导电流, 则曲线上各点的  $H$  必为零;
- (2) 若闭合曲线上各点的  $H$  为零, 则该曲线所包围的传导电流的代数和为零;
- (3) 不论抗磁质与顺磁质,  $B$  总是和  $H$  同方向;
- (4) 通过以闭合回路  $L$  为边界的任意曲面的  $B$  通量均相等;
- (5) 通过以闭合回路  $L$  为边界的任意曲面的  $H$  通量均相等。

答 (1) 错。  $\oint H \cdot dl = 0$ , 但  $L$  上各点  $H$  可以不为 0。

(2) 正确。由于  $L$  上各点  $H$  为 0, 故  $\oint_L H \cdot dl = 0$ , 根据安培环路定理  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ 。

(3) 对各向同性均匀线性介质, 该命题正确。  $\mu_r = 1 + \chi_m > 0$  ( $\chi_m \ll 1$ ),  $H = B / (\mu_0 \mu_r)$ ,  $B$  与  $H$  同向。

(4) 正确。由高斯定理知, 对于图 11-7 有

$$\iint_S B \cdot dS = - \iint_{S_0} B \cdot dS。$$

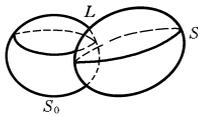


图 11-7

(5) 不正确。因为  $\iint_S M \cdot dS$  不总为 0, 故

$\oint_S H \cdot dS$  不总为 0。由图 11-7 知,  $\iint_{S_0} H \cdot dS$  不总是与  $\iint_S H \cdot dS$  相等。

【11-18】 一细长磁棒沿轴向均匀磁化, 磁化强度为  $M$ , 如图 11-8 所示, 分别求图中所标各点的磁场强度  $H$  和磁感应强度  $B$ 。

答 棒可看成由磁化电流形成的螺线管。

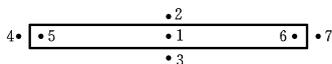


图 11-8

$$B_1 = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{L} = \mu_0 \alpha_s = \mu_0 M$$

$$B_5 = \frac{1}{2} \mu_0 n I = \frac{1}{2} \mu_0 M$$

$$B_6 = \frac{1}{2} \mu_0 n I = \frac{1}{2} \mu_0 M$$

$$B_4 = B_5, \quad B_7 = B_6, \quad B_2 = B_3 = 0$$

由  $H = \frac{B}{\mu_0} - M$  得棒内磁场强度:

$$H_1 = 0, \quad H_5 = -\frac{1}{2}M \text{ (与 } M \text{ 方向相反)}$$

$$H_6 = -\frac{1}{2}M$$

棒外  $M=0$ , 故棒内磁场强度:

$$H_4 = H_7 = \frac{1}{2}M, \quad H_2 = H_3 = 0$$

**【11-19】** 如果一闭合曲面包围条形磁棒的一个磁极,问通过该闭合曲面的磁通量是多少?

答  $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  在任何情况下都成立。

**【11-20】** 在强磁铁附近的光滑桌面上的一枚铁钉由静止释放,铁钉被磁铁吸引,试问当铁钉撞击磁铁时,其动能从何而来?

答 铁钉在强磁场的作用下,其所有磁矩都沿外场方向排列,相当于磁针,其磁矩方向与强磁场方向一致。将此磁矩看做载流线圈的磁矩。由于强磁铁附近磁场非均匀,存在磁场梯度,故线圈在此磁场中受的磁力在磁场梯度方向的分量不为0。该分力将推动线圈向磁场较强的方向移动进而做功,宏观上使铁钉的动能增加。

## 习题解答

**【11-1】** 在地球北半球的某区域,磁感应强度的大小为  $4 \times 10^{-5} \text{T}$ ,方向与铅直线成  $60^\circ$ 角。求(1)穿过面积为  $1 \text{m}^2$  的水平平面的磁通量;(2)穿过面积为  $1 \text{m}^2$  的竖直平面的磁通量的最大值和最小值。

解 (1) 铅直线与水平平面的法线是重合的。因此该区域穿过  $1 \text{m}^2$  水平平面的磁通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= BS \cos \theta = 4 \times 10^{-5} \times 1 \times \cos 60^\circ \text{ Wb} \\ &= 2 \times 10^{-5} \text{ Wb}\end{aligned}$$

(2) 过地球上一点的竖直平面是无穷的,任一竖直平面的法线都在水平面上,与该区域磁场方向的夹角  $\theta$  的变化范围是  $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ ,因此穿过  $1 \text{m}^2$  竖直平面的磁通量的最大值

$$\begin{aligned}\Phi_{\max} &= BS \cos 30^\circ = 4 \times 10^{-5} \times 1 \times \cos 30^\circ \text{ Wb} \\ &= 3.46 \times 10^{-5} \text{ Wb}\end{aligned}$$

磁通量的最小值

$$\begin{aligned}\Phi_{\min} &= BS \cos 150^\circ = 4 \times 10^{-5} \times 1 \times \cos 150^\circ \text{ Wb} \\ &= -3.46 \times 10^{-5} \text{ Wb}\end{aligned}$$

**【11-2】** 一边长为  $l=0.15 \text{m}$  的立方体如图 11-9 所示放置,有一均匀磁场  $B = (6i + 3j + 1.5k) \text{T}$  通过立方体所在区域,计算:(1)通过立方体上阴影面积的磁通量;(2)通过立方体六面的总磁通量。

解 (1) 立方体上阴影面积

$$S = l^2 = 0.15^2 \text{m}^2 = 2.25 \times 10^{-2} \text{m}^2$$

阴影面积法线方向单位矢量  $e_n = i$ 。因

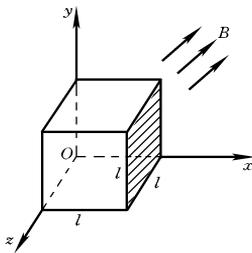


图 11-9

此通过阴影面积的磁通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \cdot (2.25 \times 10^{-2} \mathbf{i}) \text{ Wb} \\ &= 0.135 \text{ Wb}\end{aligned}$$

(2) 根据磁场的高斯定理, 通过立方体六面的总磁通量

$$\Phi = \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

**【11-3】** 两根长直导线互相平行地放置在真空中, 如图 11-10 所示, 其中通以同向的电流  $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$ 。试求  $P$  点的磁感应强度。已知  $PI_1 = PI_2 = 0.5 \text{ m}$ ,  $PI_1$  垂直于  $PI_2$ 。

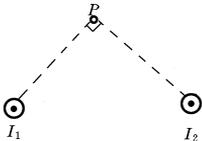


图 11-10

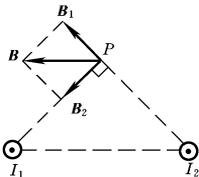


图 11-11

**解** 两根长直载流直导线在  $P$  点产生的磁场方向如图 11-11 所示。因为  $I_1 = I_2$ ,  $PI_1 = PI_2$ , 故有

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(P I_2)} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 10}{0.5} \text{ T} = 4.0 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$P$  点磁感应强度的大小为

$$B = \sqrt{2} B_1 = 1.41 \times 4.0 \times 10^{-6} \text{ T} = 5.64 \times 10^{-6} \text{ T}$$

方向与  $I_1 I_2$  平行, 且从  $I_2$  指向  $I_1$ 。

**【11-4】** 如图 11-12 所示的被折成钝角的长导线中通有  $20 \text{ A}$  的电流。求  $A$  点的磁感应强度。设  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 120^\circ$ 。

**解**  $A$  点位于长导线的  $PO$  段的延长线上, 该段导线中的电流在  $A$  点不产生磁场。

设  $A$  点至导线的  $OQ$  段的垂直距离为  $r$ , 此垂线与  $AO$  的夹角为  $\beta$  (图 11-13), 则

$$\beta = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$$r = d \cos \beta = 2 \times 10^{-2} \times \cos 30^\circ \text{ m} = 1.73 \times 10^{-2} \text{ m}$$

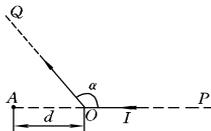


图 11-12

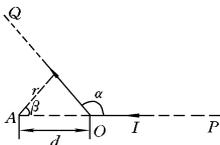


图 11-13

A 点磁感应强度的大小为

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\beta) \right] \\ &= \frac{10^{-7} \times 20}{1.73 \times 10^{-2}} (1 + \sin 30^\circ) \text{ T} = 1.73 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

磁场方向垂直纸面向外。

**【11-5】** 高为  $h$  的等边三角形的回路载有电流  $I$ , 试求该三角形的中心处的磁感应强度。

解 在图 11-14 所示等边三角形载流回路中, 中心  $O$  至  $BC$  边的距离  $d = OH = \frac{1}{3}h$ ,  $\beta_1 = -60^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ 。  $BC$  边上的电流产生的磁场在  $O$  点的磁感应强度的大小为

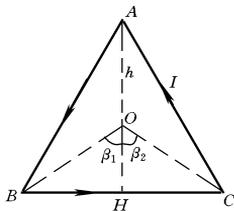


图 11-14

方向垂直纸面向外。另外两条边上的电流的磁场在  $O$  点的磁感应强度的大小及方向都与  $B$  相同。因此,  $O$  点的磁感应强度大小为

$$B_0 = 3B = \frac{3\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

$$= \frac{3\mu_0 I}{4\pi h/3} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \frac{9\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi h}$$

**【11-6】** 如图 11-15 所示,一无限长导线,其中部分被弯成半圆环形状,环的半径  $R=10\text{ cm}$ ,当导线中通有电流  $4\text{ A}$  时,求:(1)环心  $O$  处的磁感应强度;(2)垂直于环面的轴线上距  $O$  点为  $40\text{ cm}$  处  $P$  点的磁感应强度。

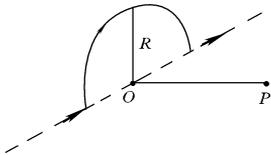


图 11-15

**解** (1) 环心  $O$  位于直线电流的延长线上,电流的直线部分在  $O$  点不产生磁场。半圆环状电流在  $O$  点产生的磁场的磁感应强度大小为

$$B_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{4 \times 0.10} \text{ T} = 1.26 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$B_0$  的方向垂直于半圆环面,由  $P$  指向  $O$  的方向。

(2) 取半圆环的圆心  $O$  为坐标原点建立空间直角坐标系,其中  $x$  轴垂直于环面, $y$  轴沿半圆环二端点的连线(图 11-16)。在半圆环电流的任一点  $A$  取一电流元,设  $OA$  与  $z$  轴夹角为  $\varphi$ ,  $\vec{AP} = \vec{r}$ ,  $AP$  与  $x$  轴夹角为  $\theta$ 。根据毕奥-萨伐尔定律,此电流元在  $P$  点产生的磁感应强度

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

因为  $Id\mathbf{l}$  与  $\mathbf{r}$  的方向垂直, $d\mathbf{B}$  的大小为

$$dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}$$

$d\mathbf{B}$  的方向与  $AP$  垂直,且在  $AOP$  平面上。

$d\mathbf{B}$  沿  $x$  轴的分量为

$$dB_x = dB_1 = -dB \sin\theta = -\frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \sin\theta \quad (1)$$

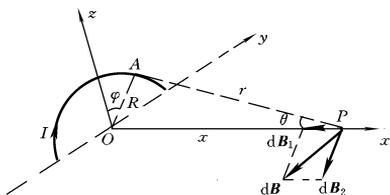


图 11-16

$d\mathbf{B}$  与  $x$  轴垂直的分量  $d\mathbf{B}_2$  的大小为

$$dB_2 = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta \quad (2)$$

可以将  $d\mathbf{B}_2$  进一步沿  $y$  轴和  $z$  轴分解。 $d\mathbf{B}_2$  的方向实际上与  $\vec{OA}$  的方向是相反的, 因此

$$dB_y = -dB_2 \sin \varphi = -\frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta \sin \varphi \quad (3)$$

$$dB_z = -dB_2 \cos \varphi = -\frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta \cos \varphi \quad (4)$$

考虑到

$$dl = R d\varphi$$

式③、④可变为

$$dB_y = -\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^2} \cos \theta \sin \varphi d\varphi \quad (5)$$

$$dB_z = -\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^2} \cos \theta \cos \varphi d\varphi \quad (6)$$

对式①积分得

$$\begin{aligned} B_x &= \int dB_x = - \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dl = - \frac{\mu_0 IR}{4r^2} \sin \theta \\ &= - \frac{\mu_0 IR^2}{4r^3} = - \frac{\mu_0 IR^2}{4(R^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

对式⑤积分得

$$\begin{aligned}
 B_y &= \int dB_y = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^2} \cos\theta \sin\varphi \, d\varphi \\
 &= - \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^2} \cos\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi = 0
 \end{aligned}$$

对式⑥积分得

$$\begin{aligned}
 B_z &= \int dB_z = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^2} \cos\theta \cos\varphi \, d\varphi = - \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2} \cos\theta \\
 &= - \frac{\mu_0 IRx}{2\pi r^3} = - \frac{\mu_0 IRx}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

图 11-15 中的直线部分在  $P$  点产生的磁场方向均沿  $z$  轴反方向。 $O$  点左侧直线电流在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$B'_{z1} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left[ \sin(-\beta) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

式中  $\beta$  是左侧直线右端与  $P$  点的连线和  $OP$  的夹角，

$$\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

所以 
$$B'_{z1} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

右侧直线电流在  $P$  点产生的磁感应强度  $B'_{z2} = B'_{z1}$ 。因此，全部直线电流在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$B'_z = 2B'_{z1} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

将题中数据代入  $B_x$ 、 $B_z$ 、 $B'_z$  的表示式中，可得

$$B_x = - \frac{3.14 \times 10^{-7} \times 4 \times 0.10^2}{(0.10^2 + 0.40^2)^{3/2}} \text{T} = - 1.79 \times 10^{-7} \text{T}$$

$$B_z = - \frac{2 \times 10^{-7} \times 4 \times 0.10 \times 0.40}{(0.10^2 + 0.40^2)^{3/2}} \text{T} = - 4.56 \times 10^{-7} \text{T}$$

$$\begin{aligned}
 B'_z &= - \frac{2 \times 10^{-7} \times 4}{0.40} \left( 1 - \frac{0.10}{\sqrt{0.10^2 + 0.40^2}} \right) \text{T} \\
 &= - 1.51 \times 10^{-6} \text{T}
 \end{aligned}$$

部分被弯成半圆环的无限长直导线在  $P$  点产生的磁感应强度

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + (B_z + B'_z)^2} \\ &= \sqrt{(-1.79 \times 10^{-7})^2 + (-4.56 \times 10^{-7} - 1.51 \times 10^{-6})^2} \text{T} \\ &= 1.98 \times 10^{-6} \text{T} \end{aligned}$$

**【11-7】** 两根长直导线沿半径方向引到铁环上  $A$ 、 $B$  两点, 并与很远的电源相连。如图 11-17 所示, 求环中心的磁感应强度。

解 环中心  $O$  位于直线电流的延长线上, 电流的直线部分在该点不产生磁场。

设铁环的优弧长为  $l_1$ , 其电流强度为  $I_1$ ; 劣弧长为  $l_2$ , 其电流强度为  $I_2$ 。因为优弧与劣弧两端电压相等, 所以

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

铁环是均匀的, 因此电阻与长度成正比, 于是有

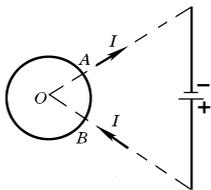


图 11-17

$$I_1 l_1 = I_2 l_2 \quad (1)$$

优弧上任一电流元在  $O$  点产生磁感应强度

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I_1 dl}{4\pi R^2}$$

方向垂直纸面向内。优弧上电流在  $O$  点产生的磁感应强度

$$B_1 = \int dB_1 = \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 I_1 dl}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2}$$

方向垂直纸面向内。同理, 劣弧在  $O$  点产生的磁感应强度

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}$$

方向垂直纸面向外。

$O$  点总的磁感应强度

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2} - \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} (I_1 l_1 - I_2 l_2) \quad (2)$$

将式①代入式②得

$$B = 0$$

**【11-8】** 一段导线先弯成图 11-18(a) 所示的形状, 然后将同样长的导线再弯成图 11-18(b) 所示的形状。在导线中通以电流  $I$  后, 求  $P_1$  和  $P_2$  两点磁感应强度之比  $B_1/B_2$ 。

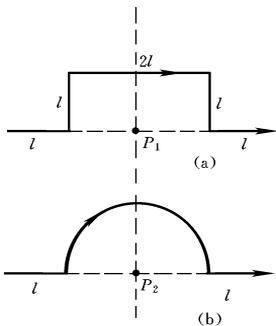


图 11-18

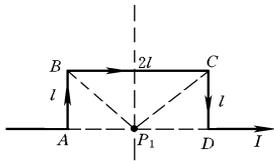


图 11-19

解 在图 11-19 中, 延长线过点  $P_1$  的直线上的电流在点  $P_1$  不产生磁场。  $AB$  段电流在点  $P_1$  产生的磁感应强度

$$B_{11} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} (\sin 45^\circ - \sin 0^\circ) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{8\pi l}$$

方向垂直纸面向内。  $CD$  段电流在点  $P_1$  产生的磁感应强度的大小和方向与  $B_{11}$  相同。  $BC$  段电流在点  $P_1$  产生的磁感应强度方向也与  $B_{11}$  相同, 大小为

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} [\sin 45^\circ - \sin(-45^\circ)] = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{4\pi l}$$

因此在图 11-18(a) 中, 点  $P_1$  的磁感应强度为

$$B_1 = 2B_{11} + B_{12} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{4\pi l} + \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{4\pi l} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi l}$$

在图 11-18(b) 中, 半圆弧长为  $4l$ , 其半径则为

$$r = \frac{4l}{\pi}$$

点  $P_2$  的磁感应强度

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4r} = \frac{\pi \mu_0 I}{16l}$$

$P_1$  和  $P_2$  两点磁感应强度之比

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\sqrt{2}/(2\pi)}{\pi/16} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$$

**【11-9】** 一密绕的圆形线圈,直径是 0.4 m,线圈中通有电流 2.5 A 时,在线圈中心处的  $B = 1.26 \times 10^{-4}$  T。问线圈有多少匝?

解 设线圈有  $N$  匝,则线圈中心处

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2R}$$

因此 
$$N = \frac{2RB}{\mu_0 I} = \frac{2 \times 0.2 \times 1.26 \times 10^{-4}}{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 2.5} = 16$$

**【11-10】** A 和 B 为两个正交放置的圆形线圈,其圆心相重合。A 线圈半径  $R_A = 0.2$  m,  $N_A = 10$  匝,通有电流  $I_A = 10$  A。B 线圈半径为  $R_B = 0.1$  m,  $N_B = 20$  匝,通有电流  $I_B = 5$  A。求两线圈公共中心处的磁感应强度。

解 圆形线圈圆心处磁感应强度方向与圆平面垂直。A、B 两个载流线圈同心正交地放置,它们各自在圆心处产生的磁感应强度  $B_A$  和  $B_B$  的方向必然正交,如图 11-20 所示。因此,公共中心  $O$  点的磁感应强度

$$B = \sqrt{B_A^2 + B_B^2}$$

其中

$$B_A = \frac{N_A \mu_0 I_A}{2R_A}, \quad B_B = \frac{N_B \mu_0 I_B}{2R_B}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{\left(\frac{N_A I_A}{R_A}\right)^2 + \left(\frac{N_B I_B}{R_B}\right)^2}$$

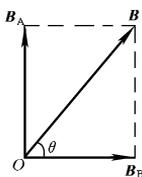


图 11-20

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7}}{2} \sqrt{\left(\frac{10 \times 10}{0.2}\right)^2 + \left(\frac{20 \times 5}{0.1}\right)^2} \text{ T} \\
 &= 7.0 \times 10^{-4} \text{ T}
 \end{aligned}$$

设  $B$  的方向与  $B_B$  的方向的夹角为  $\theta$ , 则

$$\begin{aligned}
 \theta &= \arctan \frac{B_A}{B_B} = \arctan \frac{N_A I_A R_B}{N_B I_B R_A} \\
 &= \arctan \frac{10 \times 10 \times 0.1}{20 \times 5 \times 0.2} = 26^\circ 34'
 \end{aligned}$$

**【11-11】** 电流均匀地流过宽为  $b$  的无限长平面导体薄板, 电流为  $I$ , 沿板长方向流动。求: (1) 在薄板平面内, 距板的一边为  $b$  的  $P$  点处的磁感应强度(图 11-21(a)); (2) 通过板的中线并与板面垂直的直线上一点  $Q$  处的磁感应强度,  $Q$  点到板面的距离为  $x$ (图 11-21(b))。

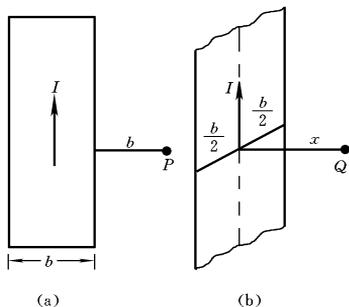


图 11-21

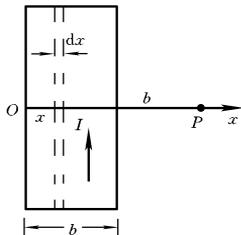


图 11-22

**解** (1) 过  $P$  点作薄板的垂线, 以垂线和板的左边缘的交点  $O$  为坐标原点, 沿  $OP$  方向作  $x$  轴(图 11-22)。在板上坐标为  $x$  处取宽为  $dx$  且与边缘平行的窄条。窄条上的电流为

$$dI = \frac{I}{b} dx$$

此电流在  $P$  点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(2b-x)} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi b(2b-x)}$$

方向垂直于纸面向内。 $P$  点的总的磁感应强度为

$$B = \int_0^b \frac{\mu_0 I dx}{2\pi b(2b-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln 2$$

方向垂直于纸面向内。

(2) 以从  $Q$  点到薄板的垂线的垂足  $O$  为原点, 以薄板上垂直于电流的方向为  $y$  轴。在与板的中线相距为  $y$  ( $y < b/2$ ) 处, 对称地取二宽为  $dy$ , 且与板的边缘平行的窄条(图 11-23(a)),  $Q$  点到二窄条的距离均为  $r$ 。每一窄条上的电流为

$$dI = \frac{I}{b} dy$$

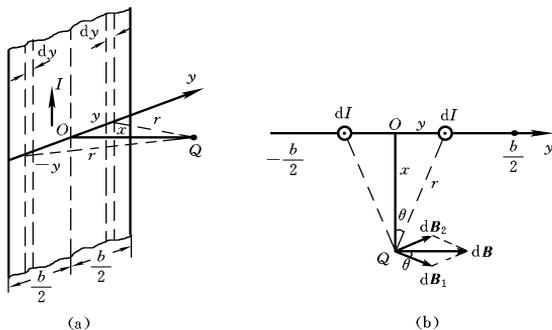


图 11-23

二窄条电流在  $Q$  点产生的磁场方向都在过  $y$  轴与板面垂直的平面上(图 11-23(b)), 而且

$$dB_1 = dB_2 = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I dy}{2\pi b(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$dB_1$  与  $dB_2$  的合矢量  $dB$  的大小为

$$dB = 2dB_1 \cos\theta$$

$$= 2 \cdot \frac{\mu_0 I dy}{2\pi b(x^2 + y^2)^{1/2}} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I x dy}{\pi b(x^2 + y^2)}$$

方向与  $y$  轴同向。

薄板上电流相对于板的中心对称分布,因此, $Q$  点的磁感应强度的大小为

$$B = \int_0^{b/2} \frac{\mu_0 I x dy}{\pi b(x^2 + y^2)} = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \arctan \frac{b}{x}$$

$B$  的方向与板面平行且与电流方向垂直。

**【11-12】** 在半径  $R=1\text{ cm}$  的“无限长”半圆柱形金属薄片,有电流  $I=5\text{ A}$  自下而上通过,如图11-24所示,试求圆柱轴线上一点  $P$  的磁感应强度。

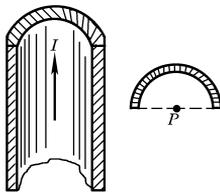


图 11-24

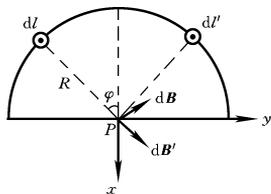


图 11-25

解 在金属片的横截面(半圆弧)上,单位长度上的电流强度

$$\lambda = \frac{I}{\pi R}$$

在半圆柱形薄片上取一平行于轴线、宽为  $dl$  的无限长金属条(图11-25),其中电流强度

$$dI = \lambda dl = \frac{I}{\pi R} dl$$

此电流在  $P$  点产生的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} dl$$

方向如图 11-25 所示(薄片在其横截平面上的投影图)。

在金属片的横截面上,电流相对于  $x$  轴是对称分布的。与  $dl$  对称的宽为  $dl'$  ( $dl'=dl$ ) 的无限长金属条中的电流在  $P$  点产生的磁感应强度  $dB'$  的大小与  $dB$  的大小相等,方向与  $dB$  的方向相对于  $y$  轴对称,因此它们的  $x$  分量相互抵消:

$$dB_x + dB'_x = 0$$

它们的  $y$  分量的方向是一致的:

$$dB_y = dB'_y = dB \cos \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} \cos \varphi dl$$

因为  $dl = R d\varphi$

所以  $dB_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \cos \varphi d\varphi$

整个无限长半圆柱形金属薄片中的电流在其轴线上任一点产生的磁感应强度大小为

$$\begin{aligned} B &= \int dB_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 5}{3.14^2 \times 0.01} \text{ T} = 6.37 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

方向沿  $y$  轴正方向。

**【11-13】** 半径为  $R$  的木球上绕有细导线,所绕线圈很紧密,相邻的线圈彼此平行地靠着,以单层盖住半个球面共有  $N$  匝,如图 11-26 所示。设导线中通有电流  $I$ ,求在球心  $O$  处的磁感应强度。

解 以球心  $O$  为坐标原点,沿半球的轴线作  $x$  轴(图 11-27)。考虑圆心坐标从  $x \rightarrow x+dx$  的那些线圈,它们的匝数为

$$dN = \frac{N}{\pi R/2} ds = \frac{2N}{\pi R} R d\theta = \frac{2N}{\pi} d\theta$$

它们的电流在  $O$  点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

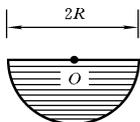


图 11-26

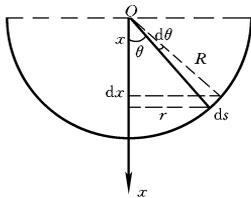


图 11-27

由图可知,  $r = R \sin \theta$ ,  $r^2 + x^2 = R^2$ 。又

$$dI = IdN = \frac{2NI}{\pi} d\theta$$

因此 
$$dB = \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \sin^2 \theta d\theta$$

球心  $O$  处总的磁感应强度则为

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 NI}{\pi R} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 NI}{4R}$$

**【11-14】** 一个塑料圆盘, 半径为  $R$ , 电荷  $q$  均匀分布于表面, 圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动, 角速度为  $\omega$ 。求圆盘中心处的磁感应强度。

解 圆盘上电荷面密度为

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

在圆盘上取半径为  $r$ , 宽为  $dr$ , 与圆盘同心的圆环。圆环上电荷量

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

当圆盘以角速度  $\omega$  匀速转动时, 此圆环就等效于一个载流圆线圈, 其中电流

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq = \sigma \omega r dr$$

它在圆心处产生的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2r} dI = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2r} r dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

圆心处总的磁感应强度为

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R}$$

**【11-15】** 两平行长直导线相距  $d=40$  cm, 每根导线载有电流  $I_1=I_2=20$  A, 电流流向如图 11-28 所示。求: (1) 两导线所在平面内与该两导线等距的一点  $A$  处的磁感应强度。(2) 通过图中斜线所面积的磁通量 ( $r_1=r_3=10$  cm,  $l=25$  cm)。

解 (1) 两载流导线在  $A$  点产生的磁场方向相同, 都是垂直于纸面向外。它们在  $A$  点的磁感应强度也相等, 即

$$\begin{aligned} B_1 = B_2 &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{d}{2}} = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d} = \frac{4 \times 10^{-7} \times 20}{0.40} \text{ T} \\ &= 2.0 \times 10^{-5} \text{ T} \end{aligned}$$

$A$  点总的磁感应强度为

$$B = 2B_1 = 4.0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

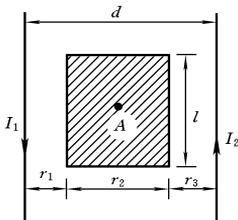


图 11-28

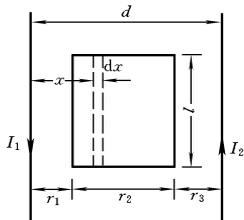


图 11-29

(2) 在图 11-29 所示矩形面积内, 距电流  $I_1$  为  $x$  处取一宽为  $dx$  且与  $I_1$  平行的条形面积。该面积上磁感应强度为

$$B' = B'_1 + B'_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-x)}$$

该面积的磁通量

$$d\Phi = B'dS = B'ldx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$

矩形面积的磁通量

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{r_1}^{d-r_3} \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \left( \ln \frac{d-r_3}{r_1} - \ln \frac{r_3}{d-r_1} \right) \end{aligned}$$

因为  $r_1 = r_3$ , 所以

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi} \ln \frac{d-r_1}{r_1} \\ &= 4 \times 10^{-7} \times 20 \times 0.25 \times \ln \frac{0.40 - 0.10}{0.10} \text{ Wb} \\ &= 2.2 \times 10^{-6} \text{ Wb} \end{aligned}$$

**【11-16】** 一根很长的铜导线, 载有电流 10 A, 在导线内部通过中心线作一平面  $S$ , 如图 11-30 所示。试计算通过导线 1 m 长的  $S$  平面内的磁感应通量。

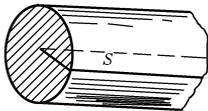


图 11-30

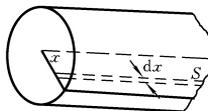


图 11-31

**解** 在平面  $S$  上, 距轴线  $x$  处, 平行于轴线取宽为  $dx$ , 长为 1 m 的条形面积 (图 11-31)。根据无限长载流圆柱导体内的磁感应强度计算公式, 可知条形面积上各点磁感应强度相同, 其值为

$$B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2}$$

方向与条形面积垂直。因此, 条形面积上的磁通量

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2} \cdot 1 \cdot dx = \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2} dx$$

$S$  平面上长为  $l$  m 的面积上的磁通量即为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^R \frac{\mu_0 I x}{2\pi R^2} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \\ &= 10^{-7} \times 10 \text{ Wb} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ Wb}\end{aligned}$$

**【11-17】** 如图 11-32 所示的空心柱形导体半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 导体内载有电流  $I$ , 设电流  $I$  均匀分布在导体的横截面上。求证导体内部各点 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的磁感应强度  $B$  由下式给出

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}$$

试以  $R_1 = 0$  的极限情形来检验这个公式。  $r = R_2$  时又怎样?

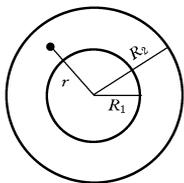


图 11-32

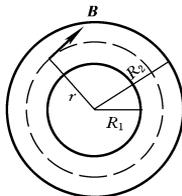


图 11-33

证 导体横截面上的电流密度为

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

在导体的横截面上, 以  $r$  为半径作同心圆, 由于电流分布的轴对称性, 磁场也具有轴对称性, 在圆上任一点  $B$  的量值都相等, 方向与圆相切(图 11-33), 因此, 以此圆为路径的积分

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = 2\pi r B$$

在圆内包围的电流

$$I' = \delta \pi(r^2 - R_1^2) = \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} I$$

根据安培环路定理有

$$2\pi r B = \mu_0 I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

所以 
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

当  $R_1=0$  时,空心柱体变成了实心柱体,这时距轴线为  $r$  ( $r < R_2$ ) 的一点的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_2^2}$$

这与已知的计算无限长载流圆柱导体内的磁感应强度公式是一致的。当  $r=R_2$  时,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

说明柱体表面的磁感应强度与电流集中在轴线上时所产生的磁感应强度是相同的。

**【11-18】** 有一根很长的同轴电缆,由一圆柱形导体和一同轴圆筒状导体组成,圆柱的半径为  $R_1$ ,圆筒的内外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$ ,如图 11-34 所示。在这两导体中,载有大小相等而方向相反的电流  $I$ ,电流均匀分布在各导体的截面上。(1)求圆柱导体内各点( $r < R_1$ )的磁感应强度  $B$ ; (2)

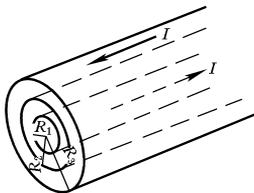


图 11-34

求两导体之间( $R_1 < r < R_2$ )的  $B$ ; (3)求外圆筒导体内( $R_2 < r < R_3$ )的  $B$ ; (4)求电缆外( $r > R_3$ )各点的  $B$ 。

**解** (1) 圆筒状导体内的电流在圆柱形导体内不产生磁场,因此,圆柱导体内距轴线  $r$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \quad (r \leq R_1)$$

(2) 圆筒状导体内的电流在两导体之间也不产生磁场,因此,两导体之间距轴线  $r$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

(3) 外圆筒导体横截面上的电流密度为

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

设横截面上某点与轴线距离为  $r$ , 以  $r$  为半径作一圆(圆心在轴线上)。由于磁场的轴对称性, 以此圆为积分路径时有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$$

在此圆内的电流为

$$I' = I - \delta\pi(r^2 - R_2^2) = I - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} I = I \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

根据安培环路定理有

$$2\pi r B = \mu_0 I' = \mu_0 I \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

故外圆筒导体内距轴线  $r$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \quad (R_2 \leq r \leq R_3)$$

(4) 在电缆外, 圆柱导体中电流的磁场与圆筒导体中电流的磁场相互抵消, 故在电缆外

$$B = 0 \quad (r \geq R_3)$$

**【11-19】** 在半径为  $R$  的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为  $r$  的无限长圆柱体, 两柱体的轴线平行, 相距为  $d$ , 如图 11-35 所示。今有电流沿空心柱体的轴线方向流动, 电流  $I$  均匀分布在空心柱体的截面上。(1) 分别求圆柱轴线上和空心部分轴线上的磁感应强度的大小; (2) 当  $R=1.0 \text{ cm}$ ,  $r=0.5 \text{ mm}$ ,  $d=5.0 \text{ mm}$  和  $I=31 \text{ A}$  时, 计算上述两处磁感应强度的值。

解 (1) 空心柱体横截面上电流密度为

$$\delta = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$$

若柱体是实心的, 电流均匀分布在横截面上, 电流密度为  $\delta$ , 则根据圆柱内磁感应强度计算公式有

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

因为圆柱轴线上  $r=0$ , 轴线上磁感应强度  $B_1=0$ 。

半径为  $r$  的圆柱体在大圆柱轴线上产生的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

式中  $I_1$  是半径为  $r$  的圆柱体内的电流, 其值为

$$I_1 = \delta \pi r^2 = \frac{r^2 I}{R^2 - r^2}$$

所以

$$B_2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)}$$

实际上, 半径为  $r$  的圆柱体已被挖去, 大圆柱轴线上磁感应强度的大小应为

$$B_0 = |B_1 - B_2| = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d (R^2 - r^2)} \quad \textcircled{1}$$

实心载流圆柱体内距轴线  $d$  处的磁感应强度

$$B'_1 = \frac{\mu_0 I_2 d}{2\pi R^2}$$

式中  $I_2$  是实心圆柱体内电流, 其值为

$$I_2 = \delta \pi R^2 = \frac{R^2 I}{R^2 - r^2}$$

所以

$$B'_1 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi (R^2 - r^2)}$$

半径为  $r$  的圆柱体在自身轴线上不产生磁场, 即  $B'_2=0$ 。故空心部分轴线上的磁感应强度

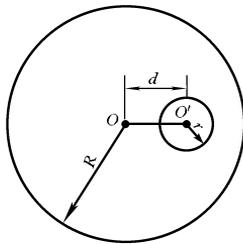


图 11-35

$$B_O = B'_1 - B'_2 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2 - r^2)} \quad (2)$$

(2) 将题中所列数据分别代入式①和式②得

$$\begin{aligned} B_O &= \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2 - r^2)} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7} \times 31 \times (0.5 \times 10^{-3})^2}{5.0 \times 10^{-3} [(1.0 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2]} \text{ T} \\ &= 3.1 \times 10^{-6} \text{ T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_O &= \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2 - r^2)} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7} \times 31 \times 5.0 \times 10^{-3}}{(1.0 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-3})^2} \text{ T} = 3.1 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

**【11-20】** 在一个电视显像管的电子束中,电子能量为 12 000 eV,这个显像管的取向使电子水平地由南向北运动,该处地球磁场的垂直分量向下,大小为  $B=5.5 \times 10^{-5} \text{ T}$ 。问:(1)电子束受地磁场的影响将偏向什么方向?(2)电子的加速度是多少?(3)电子束在显像管内南北方向上通过 20 cm 时将偏转多远?

解 (1) 电子所受磁场力  $F = -ev \times B$ , 由此可判断,电子在地磁场影响下向东偏转(图 11-36)。

(2) 电子的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\begin{aligned} \text{速度 } v &= \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 1.2 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} \text{ m/s} \\ &= 6.5 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

电子受到的磁场力

$$F = evB$$

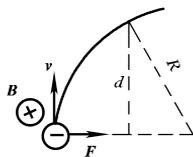


图 11-36

电子的加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m_e} = \frac{evB}{m_e} \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 6.5 \times 10^7 \times 5.5 \times 10^{-5}}{9.1 \times 10^{-31}} \text{ m/s}^2 \\ &= 6.3 \times 10^{14} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(3) 电子运动的轨道半径

$$R = \frac{m_e v}{eB} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 6.5 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 5.5 \times 10^{-5}} \text{ m} = 6.7 \text{ m}$$

在图11-36中以 $d$ 表示电子南北方向飞行的路程,电子向东偏转距离即为 $x$ 。由图可知

$$x = R - \sqrt{R^2 - d^2} = R - R \left[ 1 - \left( \frac{d}{R} \right)^2 \right]^{1/2}$$

因为 $d \ll R$ ,所以

$$x \approx R - R \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{R} \right)^2 \right] = \frac{d^2}{2R} = \frac{0.20^2}{2 \times 6.7} \text{ m} = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

**【11-21】** 一电子以 $1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$ 的速度进入一均匀磁场,其速度方向与磁场方向垂直。已知电子在磁场中作半径为 $0.1 \text{ m}$ 的圆周运动,求磁感应强度的大小和电子的旋转角速度。

解 电子在方向与其速度方向垂直的均匀磁场中作圆周运动时,圆半径为

$$R = \frac{m_e v}{eB}$$

因此磁感应强度的大小为

$$B = \frac{m_e v}{eR} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 1.0 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} \text{ T} = 5.69 \times 10^{-5} \text{ T}$$

电子的旋转角速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1.0 \times 10^6}{0.1} \text{ rad/s} = 1.0 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

**【11-22】** 一质子以 $1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的速度射入磁感应强度 $B = 1.5 \text{ T}$ 的均匀磁场中,其速度方向与磁场方向成 $30^\circ$ 角。计算:

(1) 质子作螺旋运动的半径; (2) 螺距; (3) 旋转频率。

解 (1) 质子速度在垂直于  $B$  的方向的分量为

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

质子作螺旋运动的半径即为

$$\begin{aligned} R &= \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} \\ &= \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 1.0 \times 10^7 \times \sin 30^{\circ}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.5} \text{ m} = 3.48 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 质子速度在平行于  $B$  的方向的分量为

$$v_{\parallel} = v \cos \theta$$

螺旋线的螺距为

$$\begin{aligned} h &= \frac{2\pi m v_{\parallel}}{eB} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{eB} \\ &= \frac{2 \times 3.14 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 1.0 \times 10^7 \times \cos 30^{\circ}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.5} \text{ m} \\ &= 0.38 \text{ m} \end{aligned}$$

(3) 旋转频率为

$$\begin{aligned} n &= \frac{v_{\perp}}{2\pi R} = \frac{v \sin \theta}{2\pi R} = \frac{1.0 \times 10^7 \times \sin 30^{\circ}}{2 \times 3.14 \times 3.48 \times 10^{-2}} \text{ s}^{-1} \\ &= 2.28 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

**【11-23】** 一电子在  $B = 2.0 \times 10^{-3} \text{ T}$  的均匀磁场中作半径  $R = 20 \text{ cm}$  的螺旋线运动, 螺距  $h = 50 \text{ cm}$ 。已知电子的比荷  $\frac{e}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ , 求这个电子的速度。

解 设电子速度方向与磁场方向夹角为  $\theta$ , 则速度在垂直于磁场方向的分量

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

速度在平行于磁场方向的分量

$$v_{\parallel} = v \cos \theta$$

电子作螺旋运动的螺距

$$h = v_{\parallel} \frac{2\pi m_e}{eB} = \frac{2\pi m_e v \cos\theta}{eB}$$

$$v \cos\theta = \frac{eBh}{2\pi m_e} \quad (1)$$

电子作螺旋运动的半径

$$R = \frac{m_e v_{\perp}}{eB} = \frac{m_e v \sin\theta}{eB}$$

$$v \sin\theta = \frac{eBR}{m_e} \quad (2)$$

式①与式②平方相加得

$$v^2 = \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 B^2 \left[ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + R^2 \right]$$

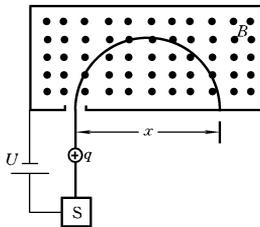
于是

$$v = \left(\frac{e}{m_e}\right) B \left[ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + R^2 \right]^{1/2}$$

$$= 1.76 \times 10^{11} \times 2.0 \times 10^{-3} \times \left[ \left(\frac{0.50}{2 \times 3.14}\right)^2 + 0.20^2 \right]^{1/2} \text{ m/s}$$

$$= 7.6 \times 10^7 \text{ m/s}$$

**【11-24】** 图11-37所示为测定离子质量所用的装置。离子源S产生一质量为 $m$ 、电荷量为 $+q$ 的离子，离子从源出来时的速度很小，可以看作是静止的。离子经电势差 $U$ 加速后进入磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场，在这磁场中，离子沿一半圆周运动后射到离入口缝隙 $x$ 远处的感光底片上，并予以记录。试证明离子的质量 $m$ 为 $m = \frac{B^2 q}{8U} x^2$ 。



证 离子进入磁场时的速度满足

$$\frac{1}{2} m v^2 = qU$$

图11-37

所以 
$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

离子进入磁场后作匀速圆周运动,轨道半径

$$\frac{x}{2} = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}$$

所以 
$$m = \frac{qB^2}{8U}x^2$$

**【11-25】** 设电子质量为  $m_e$ , 电荷量为  $e$ , 以角速度  $\omega$  绕带正电的质子作圆周运动, 当加上外磁场  $B$  ( $B$  的方向与电子轨道平面垂直) 时, 设电子轨道半径不变, 而角速度则变为  $\omega'$ 。证明: 电子角速度的变化近似等于

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \pm \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} B$$

证 在加外磁场前, 电子在库仑力  $f_1$  作用下作圆周运动。设圆半径为  $R$ , 则

$$f_1 = m_e R \omega^2 \quad (1)$$

加外磁场后, 如果作用于电子的洛仑兹力  $f_2$  与  $f_1$  同方向, 则

$$f_1 + f_2 = m_e R \omega'^2 \quad (2)$$

式②—式①后得到

$$f_2 = m_e R (\omega'^2 - \omega^2) = m_e R (\omega' + \omega) \Delta\omega$$

达到稳定时  $f_2 = ev'B = eR\omega'B$

因此  $m_e R (\omega' + \omega) \Delta\omega = eR\omega'B \quad (3)$

一般情形下  $f_2 \ll f_1, \omega' \approx \omega$ , 故有

$$\omega' + \omega \approx 2\omega$$

代入式③可得  $\Delta\omega \approx \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} B$

如果  $f_2$  与  $f_1$  反方向, 则可得

$$\Delta\omega \approx -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e} B$$

**【11-26】** 在霍尔效应实验中, 宽 1.0 cm、长 4.0 cm、厚 1.0 ×

$10^{-3}\text{cm}$  的导体沿长度方向载有  $3.0\text{A}$  的电流,当磁感应强度  $B=1.5\text{T}$  的磁场垂直地通过该薄导体时,产生  $1.0\times 10^{-5}\text{V}$  的霍尔电压(在宽度两端)。试由这些数据求:(1)载流子的漂移速度;(2)每立方厘米的载流子数;(3)假设载流子是电子,试就一给定的电流和磁场方向在图上画出霍尔电压的极性。

解 (1) 设导体宽度为  $b$ ,霍尔电压为  $U$ ,则霍尔电场的场强

$$E_{\text{H}} = \frac{U}{b}$$

载流子的漂移速度

$$\bar{v} = \frac{E_{\text{H}}}{B} = \frac{U}{bB} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{1.0 \times 10^{-2} \times 1.5} \text{ m/s} = 6.7 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

(2) 导体单位体积内载流子数

$$n = \frac{IB}{edU} = \frac{3.0 \times 1.5}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-5} \times 1.0 \times 10^{-5}} \text{ m}^{-3}$$

$$= 2.8 \times 10^{29} \text{ m}^{-3} = 2.8 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

(3) 霍尔电压的极性如图 11-38 所示。

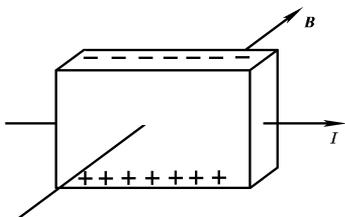


图 11-38

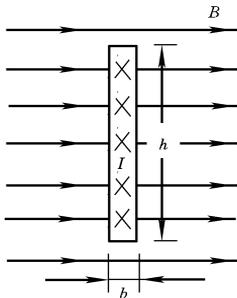


图 11-39

**【11-27】** 高  $h$  宽  $b$  的铜条内有电流  $I$  (电流方向在图 11-39 中以  $\times$  表示),在这铜片的垂直方向上施加磁感应强度为  $B$  的均匀磁

场。(1) 试计算铜片中电子的漂移速率  $v_d$ 。(2) 作用在电子上磁力  $F$  的大小和方向为何? (3) 为了抵消磁场的效应, 铜片中应加均匀电场  $E$  的大小和方向为何? (4) 为了产生此电场  $E$ , 那铜片导体两侧之间电压应为多少? 电压应加于导体的哪两边? (5) 如果外界不施加电场, 则有些电子将被推到铜片的一边, 因而在铜片的高度方向上将产生一均匀电场  $E_H$ , 直到这个静电场  $E_H$  的力与在(2)中磁力达到平衡为止,  $E_H$  这个电场的大小和方向为何? 设单位体积内传导电子的数目  $n = 1.1 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ ,  $h = 0.02 \text{ m}$ ,  $b = 0.1 \text{ cm}$ ,  $I = 50 \text{ A}$ ,  $B = 2 \text{ T}$ 。

解 (1) 铜条内电流密度

$$j = \frac{I}{bh}$$

又

$$j = nev_d$$

所以

$$nev_d = \frac{I}{bh}$$

$$v_d = \frac{I}{nebh}$$

$$= \frac{50}{1.1 \times 10^{29} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.1 \times 10^{-2} \times 0.02} \text{ m/s}$$

$$= 1.4 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

(2) 作用在电子上磁力  $F$  的大小为

$$F = ev_d B = 1.6 \times 10^{-19} \times 1.4 \times 10^{-4} \times 2 \text{ N}$$

$$= 4.5 \times 10^{-23} \text{ N}$$

$F$  的方向向下。

(3) 为抵消磁场效应, 外电场  $E$  的大小应为

$$E = v_d B = 1.4 \times 10^{-4} \times 2 \text{ V/m} = 2.8 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$E$  的方向也应向下

(4) 为了产生此电场, 电压应加在上、下两侧, 且上侧电势较高。电压的大小为

$$U = hE = 0.02 \times 2.8 \times 10^{-4} \text{ V} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ V}$$

(5) 如果外界不施加电场, 则铜条内产生霍尔电场, 且  $E_H = E$ , 即其大小为  $2.8 \times 10^{-4} \text{ V/m}$ , 方向向下。

【11-28】 任意形状的一段导线  $AB$  如图 11-40 所示, 其中通有电流  $I$ , 导线放在和匀强磁场  $B$  垂直的平面内。试证明导线  $AB$  所受的力等于  $A$  到  $B$  间载有同样电流的直导线所受的力。

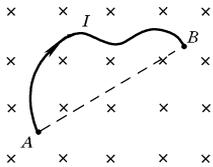


图 11-40

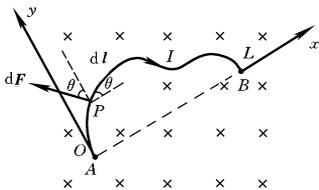


图 11-41

解 建立如图 11-41 所示的平面直角坐标, 考虑载流导线上任一电流元, 该电流元在磁场中受力的大小为

$$dF = BIdl$$

方向如图所示。由图可知,

$$dF_x = dF \cos(90^\circ + \theta) = -BIdl \sin\theta = -BIdy$$

$$dF_y = dF \cos\theta = BIdl \cos\theta = BIdx$$

载流导线  $AB$  所受磁场力的  $x$  分量

$$F_x = - \int_{APB} BIdy = 0$$

磁场力的  $y$  分量

$$F_y = \int_{APB} BIdx = BIL$$

因此载流导线所受磁场力的大小

$$F = F_y = BIL$$

$F$  的方向与  $y$  轴同向,  $L$  为  $A$ 、 $B$  间直线距离。

若在  $A$ 、 $B$  间有一段直导线, 同样电流从  $A$  流向  $B$ , 则该直线电

流所受安培力  $F'$  的大小是  $F' = BIL$ , 方向也是指向  $y$  轴方向。因此

$$F = F'$$

**【11-29】** 截面积为  $S$ 、密度为  $\rho$  的铜导线被弯成正方形的三边, 可以绕水平轴转动, 如图 11-42 所示。导线放在方向为竖直向上的匀强磁场中, 当导线中的电流为  $I$  时, 导线离开原来的竖直位置偏转一角度  $\theta$  而平衡。求磁感应强度。如  $S = 2 \text{ mm}^2$ ,  $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$ ,  $\theta = 15^\circ$ ,  $I = 10 \text{ A}$ ,  $B$  应为多少?

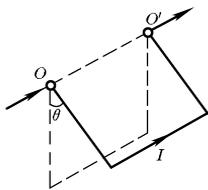


图 11-42

**解** 相对于  $OO'$  轴, 铜导线的重力矩

$$M_1 = 2\rho gsa \cdot \frac{1}{2}a\sin\theta + \rho gsa \cdot a\sin\theta = 2\rho gsa^2\sin\theta$$

式中  $a$  为正方形一边的长度。铜导线受到的磁力矩

$$M_2 = BIa \cdot a\cos\theta = BIa^2\cos\theta$$

铜导线平衡时,  $M_1$  与  $M_2$  大小相等, 方向相反。因此

$$2\rho gsa^2\sin\theta = BIa^2\cos\theta$$

$$B = \frac{2\rho gs}{I}\tan\theta$$

代入题设各项数据, 可得

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \times 8.9 \times 10^3 \times 9.8 \times 2 \times 10^{-6}}{10} \times \tan 15^\circ \text{ T} \\ &= 9.35 \times 10^{-3} \text{ T} \end{aligned}$$

**【11-30】** 如图 11-43 所示, 在长直导线旁有一矩形线圈, 导线中通有电流  $I_1 = 20 \text{ A}$ , 线圈中通有电流  $I_2 = 10 \text{ A}$ 。已知  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ , 求矩形线圈上受到的合力是多少?

**解** 磁场对  $CD$  边(图 11-44)的作用力; 在  $CD$  边上磁感应强度是相同的, 其值为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

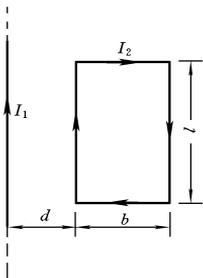


图 11-43

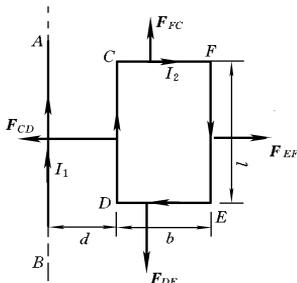


图 11-44

方向垂直纸面向内。因此  $CD$  边受到的安培力

$$\begin{aligned} F_{CD} &= BI_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7} \times 20 \times 10 \times 0.20}{0.01} \text{ N} = 8.0 \times 10^{-4} \text{ N} \end{aligned}$$

方向向左。

同理可算得磁场对  $EF$  边的作用力大小为

$$\begin{aligned} F_{EF} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 20 \times 10 \times 0.20}{0.01 + 0.09} \text{ N} \\ &= 8.0 \times 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

方向向右。

取  $DE$  边上任一电流元,则在  $CF$  边上存在一对应电流元,它们大小相等,方向相反,它们所在处与电流  $I_1$  距离相等,因而磁感应强度  $B$  相同。这样两个电流元受到的安培力大小相等,方向相反,合力为零。因此,  $DE$  边所受安培力与  $CF$  边所受安培力大小相等,方向相反,合力为零。

矩形线圈所受合力大小为

$$F = F_{CD} - F_{EF} = (8.0 \times 10^{-4} - 8.0 \times 10^{-5}) \text{ N}$$

$$= 7.2 \times 10^{-4} \text{ N}$$

方向向左。

**【11-31】** 半径为  $R$  的平面圆形线圈中载有电流  $I_2$ , 另一无限长直导线  $AB$  中载有电流  $I_1$ 。(1) 设  $AB$  通过圆心, 并和圆形线圈在同一平面内(图 11-45), 求圆形线圈所受的磁力;(2) 若  $AB$  与圆心相距  $d(d > R)$ , 仍在同一平面内, 求圆形线圈所受的磁力。

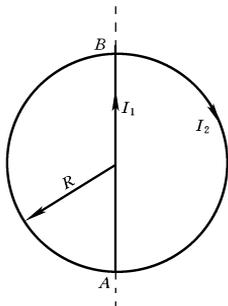


图 11-45

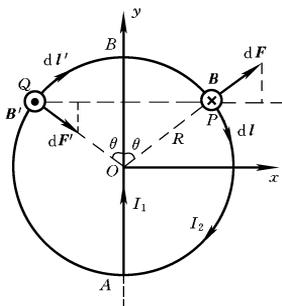


图 11-46

解 (1) 在电流  $I_1$  右侧半圆形线圈上任一点  $P$  处取一电流元(图 11-46), 电流  $I_1$  在该电流元所在处磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R \sin\theta}$$

方向垂直纸面向内。该电流元所受安培力大小为

$$dF = I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \sin\theta} dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \sin\theta} d\theta$$

方向沿半径向外, 它的  $x$  分量

$$dF_x = dF \sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta$$

它的  $y$  分量

$$dF_y = dF \cos\theta$$

相对于电流  $I_1$ , 左侧半圆形线圈上存在  $P$  点的对称点  $Q$ 。在  $Q$

点取一电流元,且使 $dl' = dl$ 。该电流元所在处磁感应强度的大小 $B' = B$ ,方向与 $B$ 方向相反。该电流元所受安培力的大小 $dF' = dF$ ,方向沿半径向内,它的 $x$ 分量 $dF'_x = dF_x$ , $y$ 分量 $dF'_y = -dF_y$ 。因此,整个圆形线圈受到的磁力的大小为

$$f = \int dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} d\theta = \mu_0 I_1 I_2$$

方向沿 $x$ 轴方向。

(2) 如图 11-47 所示建立直角坐标系,在圆形线圈上任一点 $P$ 处取一电流元,该电流元所在处磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + R\cos\theta)}$$

方向垂直纸面向内。该电流元所受安培力大小为

$$dF = I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi(d + R\cos\theta)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi(d + R\cos\theta)} d\theta$$

方向沿半径向外,它的 $x$ 分量

$$dF_x = dF \cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos\theta}{2\pi(d + R\cos\theta)} d\theta$$

它的 $y$ 分量

$$dF_y = dF \sin\theta$$

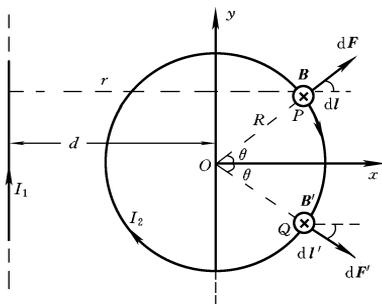


图 11-47

相对于  $x$  轴, 下方半圆线圈上存在  $P$  点的对称点  $Q$ 。在  $Q$  点取一电流元, 使  $dl' = dl$ 。该电流元所在处磁感应强度的大小  $B' = B$ , 方向也是与  $B$  同方向。该电流元所受安培力的大小  $dF' = dF$ , 方向沿半径向外, 它的  $x$  分量  $dF'_x = dF_x$ ,  $y$  分量  $dF'_y = -dF_y$ 。因此, 整个圆形线圈受到的磁力的大小为

$$\begin{aligned} f &= \int dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R \cos\theta}{2\pi(d + R \cos\theta)} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{d}{d + R \cos\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left( 2\pi - \frac{2\pi d}{\sqrt{d^2 - R^2}} \right) = \mu_0 I_1 I_2 \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} \right) \end{aligned}$$

$f < 0$ , 表示  $f$  的方向与  $x$  轴方向相反, 即方向向左。

**【11-32】** 有一根 U 形导线, 质量为  $m$ , 两端浸没在水银槽中, 导线的上段长  $l$ , 处在磁感应强度为  $B$  的均匀磁场中, 如图 11-48 所示。当接通电源时, 这导线就会从水银槽中跳起来。假定电流脉冲的时间同导线上升时间相比非常小。(1) 试由导线跳起所达到的高度  $h$  计算电流脉冲的电荷量  $q$ ; (2) 如  $B = 0.1 \text{ T}$ ,  $m = 10 \text{ g}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 0.3 \text{ m}$ , 计算  $q$  的值。(提示: 利用

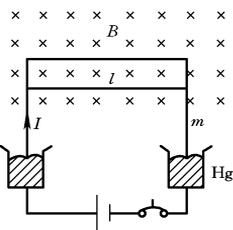


图 11-48

动量原理, 找出  $\int Idt$  与  $\int Fdt$  的关系。)

**解** (1) 瞬时电流为  $I$  时, 长为  $l$  的导线段受到的磁场力  $F = BIl$ , 此力在时间  $dt$  内的冲量为  $BIl dt$ 。从接通电源到 U 形导线端点离开水银槽的这段时间内, 磁场力的冲量为

$$\int F dt = \int BIl dt = Bl \int Idt = Blq$$

忽略重力, 则这力的冲量使 U 形导线获得动量。设导线端点离开水银槽时的速度为  $v$ , 根据动量原理有

$$Blq = mv$$

所以

$$v = \frac{Blq}{m}$$

导线动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{B^2 l^2 q^2}{2m}$$

导线所达高度为  $h$ , 其势能  $E_p = mgh$ 。根据机械能守恒定律,  $E_p = E_k$ , 因此

$$mgh = \frac{B^2 l^2 q^2}{2m}$$

$$q = \frac{m}{Bl} \sqrt{2gh}$$

(2) 将题设数据代入上式, 得到

$$q = \frac{1.0 \times 10^{-2}}{0.1 \times 0.20} \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.3} \text{ C} = 1.2 \text{ C}$$

**【11-33】** 如图 11-49 所示, 一矩形线圈可绕  $y$  轴转动, 线圈中载有电流  $0.10 \text{ A}$ , 放在磁感应强度  $B = 0.50 \text{ T}$  的均匀磁场中,  $B$  的方向平行于  $x$  轴, 求维持线圈在图示位置时的力矩。

解 线圈磁矩方向与磁场方向的夹角为  $60^\circ$ , 磁场对线圈施加的力矩为

$$\begin{aligned} M &= mB \sin 60^\circ = ISB \sin 60^\circ \\ &= 0.10 \times 6 \times 10^{-2} \times 8 \times 10^{-2} \\ &\quad \times 0.50 \times \sin 60^\circ \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 2.09 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

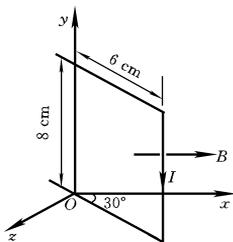


图 11-49

$M$  的方向与  $y$  轴方向相反。为维持线圈

在图示位置, 须施加与  $M$  大小相等而方向相反的力矩。

**【11-34】** 一边长为  $l$  的正方形线圈载有电流  $I$ , 处在均匀外磁场  $B$  中,  $B$  垂直图面向外, 线圈可以绕通中心的竖直轴  $OO'$  转动 (图 11-50), 其转动惯量为  $J$ 。求线圈在平衡位置附近作微小摆动的

周期  $T$ 。

解 当线圈从平衡位置偏转一微小角度  $\theta$  时, 因为  $\sin\theta \approx \theta$ , 所以线圈受到的磁力矩

$$M = -mB\sin\theta = -BIS\theta$$

负号表示力矩方向与角位移方向相反。

根据转动定律

$$M = J\beta$$

可得方程

$$J\beta = -BIS\theta = -BI^2\theta$$

$$\beta = -\frac{BI^2}{J}\theta$$

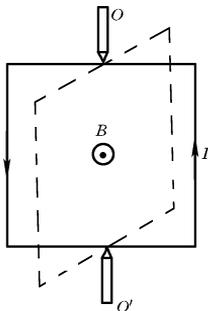


图 11-50

线圈摆动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{BI^2}{J}}$$

摆动周期即为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{BI^2}}$$

**【11-35】** 一半径为  $R=0.1\text{ m}$  的半圆形闭合线圈, 载有电流  $I=10\text{ A}$ , 放在均匀磁场中, 磁场方向与线圈面平行, 如图 11-51 所示。已知  $B=0.5\text{ T}$ 。求: (1) 线圈所受力矩的大小和方向 (以直径为转轴); (2) 若线圈受力矩的作用转到线圈平面与磁场垂直的位置, 则力矩做功多少?

解 (1) 线圈所受力矩的大小为

$$\begin{aligned} M &= BIS\sin\varphi = \frac{1}{2}\pi R^2 BI\sin\varphi \\ &= \frac{1}{2} \times 3.14 \times 0.1^2 \\ &\quad \times 0.5 \times 10 \times \sin 90^\circ \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= 7.85 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

方向向上。

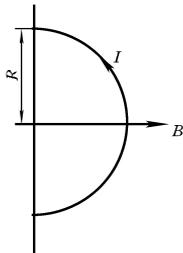


图 11-51

(2) 当线圈处于图示位置时,  $\Phi_1=0$ ; 当

线圈平面与磁场垂直时,  $\Phi_2 = BS$ 。因此, 转动过程中力矩做的功为

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = IBS = \frac{1}{2}\pi R^2 BI = 7.85 \times 10^{-2} \text{ J}$$

**【11-36】** 一均匀磁化棒, 直径为 2 cm, 长为 50 cm, 它的磁矩为  $10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。求棒表面上磁化面电流线密度。

解 磁化棒的磁化强度

$$\begin{aligned} M &= \frac{|\sum m|}{V} = \frac{4|\sum m|}{\pi d^2 l} \\ &= \frac{4 \times 10^4}{3.14 \times 0.02^2 \times 0.50} \text{ A/m} = 6.37 \times 10^7 \text{ A/m} \end{aligned}$$

磁化面电流线密度

$$\alpha_s = M = 6.37 \times 10^7 \text{ A/m}$$

**【11-37】** 根据测量, 地球的磁矩为  $8.0 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。(1) 如果在地球赤道上绕一单匝导线的线圈, 则导线上需通多大的电流才能产生如此大的磁矩?(2) 此装置能否用来正好抵消地面上空各点处的地磁场?(3) 能否抵消地球表面处的磁场?

解 (1) 单匝载流线圈的磁矩

$$m = IS = \pi R^2 I$$

$$\text{所以 } I = \frac{m}{\pi R^2} = \frac{8.0 \times 10^{22}}{3.14 \times (6.4 \times 10^6)^2} \text{ A} = 6.2 \times 10^8 \text{ A}$$

(2) 在地面上空远处, 赤道上的载流线圈和地球都可被看成磁偶极子, 如果它们的磁矩方向相反, 则彼此产生的磁场能相互抵消。

(3) 在地面附近, 地球和赤道上的载流线圈都不能被看成磁偶极子, 它们的磁场分布情况是不同的, 并非正好相反, 不能相互抵消。

**【11-38】** 一罗盘针长 2.0 cm, 其形状似均匀的细棒, 驱动轴过中点, 可以在水平面内自由转动。罗盘针的质量为 0.12 g, 磁矩为  $3.2 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。如果罗盘针处在方向指北、水平分量为  $2.9 \times$

$10^{-5}$  T 的地磁场中相对正北方向作小角摆动, 求其摆动频率。

解 罗盘针对过中点的轴线的转动惯量

$$J = \frac{1}{12}ml^2$$

当罗盘针偏离平衡位置微小角度  $\theta$  时, 它受到磁场作用的恢复力矩。因为  $\sin\theta \approx \theta$ , 所以恢复力矩

$$M = -P_m B \sin\theta \approx -P_m B \theta$$

设摆动时的角加速度为  $\beta$ , 根据转动定律

$$\beta = \frac{M}{J} = -\frac{P_m B}{\frac{1}{12}ml^2}\theta = -\frac{12P_m B}{ml^2}\theta$$

由此可得摆动时的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{12P_m B}{ml^2}} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{3P_m B}{m}}$$

频率则为

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi l} \sqrt{\frac{3P_m B}{m}} \\ &= \frac{1}{3.14 \times 2.0 \times 10^{-2}} \sqrt{\frac{3 \times 3.2 \times 10^{-4} \times 2.9 \times 10^{-5}}{0.12 \times 10^{-3}}} \text{ Hz} \\ &= 0.24 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**【11-39】** 螺绕环中心周长  $l = 10$  cm, 环上均匀密绕线圈  $N = 200$  匝, 线圈中通有电流  $I = 100$  mA。(1) 求管内的磁感应强度  $B_0$  和磁场强度  $H_0$ ; (2) 若管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4$  200 的磁性物质, 则管内的  $B$  和  $H$  是多少? (3) 磁性物质内由导线中电流产生的  $B_0$  和电磁化电流产生的  $B'$  各是多少?

$$\text{解 (1) } B_0 = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 200 \times 0.10}{0.10} \text{ T}$$

$$= 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{2.5 \times 10^{-4}}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} \text{ A/m} = 200 \text{ A/m}$$

$$(2) B = \mu_r B_0 = 4\ 200 \times 2.5 \times 10^{-4} \text{ T} = 1.05 \text{ T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mu_r B_0}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_0}{\mu_0} = H_0 = 200 \text{ A/m}$$

$$(3) B_0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$B' = B - B_0 = (1.05 - 2.5 \times 10^{-4}) \text{ T} \approx 1.05 \text{ T}$$

**【11-40】** 一铁制的螺绕环平均圆周长 30 cm, 截面积为  $1 \text{ cm}^2$ , 在环上均匀绕以 300 匝导线, 当绕组内的电流为 0.032 A 时, 环内的磁通量为  $2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ , 试计算: (1) 环内的磁通量密度; (2) 磁场强度; (3) 磁化面电流; (4) 环内材料的磁导率、相对磁导率及磁化率; (5) 环芯内的磁化强度。

解 (1) 环内磁通量密度为

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-4}} \text{ T} = 0.02 \text{ T}$$

(2) 当环内无铁芯时, 相同电流条件下环内磁感应强度

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

设铁芯相对磁导率为  $\mu_r$ , 则有铁芯时,  $B = \mu_r B_0$ , 磁场强度

$$\begin{aligned} H &= \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\mu_r B_0}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{N I}{l} \\ &= \frac{300 \times 0.032}{0.30} \text{ A/m} = 32 \text{ A/m} \end{aligned}$$

(3) 磁化面电流线密度

$$\alpha_s = M = B/\mu_0 - H$$

磁化面电流则为

$$\begin{aligned} I_s &= l \alpha_s = l (B/\mu_0 - H) \\ &= 0.30 \times \left( \frac{0.02}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} - 32 \right) \text{ A} \\ &= 4.77 \times 10^3 \text{ A} \end{aligned}$$

与每匝导线相应的磁化面电流为

$$i_s = \frac{I_s}{N} = \frac{4.77 \times 10^3}{300} \text{ A} = 15.9 \text{ A}$$

## (4) 环内材料的磁导率

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.02}{32} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 6.25 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

## 相对磁导率

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{6.25 \times 10^{-4}}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} = 498$$

## 磁化率

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 498 - 1 = 497$$

## (5) 环内磁化强度

$$M = \alpha_s = \frac{I_s}{l} = \frac{4.77 \times 10^3}{0.30} \text{ A/m} = 1.59 \times 10^4 \text{ A/m}$$

**【11-41】** 在螺绕环上密绕线圈共 400 匝, 环的平均周长是 40 cm, 当导线内通有电流 20 A 时, 利用冲击电流计测得环内磁感应强度是 1.0 T, 计算: (1) 磁场强度; (2) 磁化强度; (3) 磁化率; (4) 磁化面电流和相对磁导率。

解 (1) 设螺绕环芯磁导率为  $\mu$ , 则环内磁感应强度

$$B = \frac{\mu NI}{l}$$

## 磁场强度

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{l} = \frac{400 \times 20}{0.40} \text{ A/m} = 2.0 \times 10^4 \text{ A/m}$$

## (2) 磁化强度

$$\begin{aligned} M = \frac{B}{\mu_0} - H &= \left( \frac{1.0}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} - 2.0 \times 10^4 \right) \text{ A/m} \\ &= 7.76 \times 10^5 \text{ A/m} \end{aligned}$$

## (3) 磁化率

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{7.76 \times 10^5}{2.0 \times 10^4} = 38.8$$

## (4) 磁化面电流

$$I_s = \alpha_s l = Ml = 7.76 \times 10^5 \times 0.40 \text{ A} = 3.1 \times 10^5 \text{ A}$$

与每匝导线相应的磁化面电流

$$i_s = \frac{I_s}{N} = \frac{3.1 \times 10^5}{400} \text{ A} = 775 \text{ A}$$

相对磁导率

$$\mu_r = \chi_m + 1 = 38.8 + 1 = 39.8$$

**【11-42】** 一磁导率为  $\mu_1$  的无限长圆柱形直导线, 半径为  $R_1$ , 其中均匀地通有电流  $I$ , 在导线外包一层磁导率为  $\mu_2$  的圆柱形不导电的磁介质, 其外半径为  $R_2$ , 如图 11-52 所示。试求: (1) 磁场强度和磁感应强度的分布; (2) 半径为  $R_1$  和  $R_2$  处表面上磁化面电流线密度。

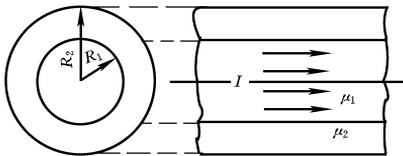


图 11-52

解 (1) 导线内电流面密度

$$j = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

在导线内作半径为  $r$  ( $r < R_1$ ), 圆心在轴线上, 圆平面与轴线垂直的圆, 由于磁场分布的轴对称性, 磁场强度  $H$  沿此圆的积分

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H$$

在此圆内包围的电流

$$I' = \pi r^2 j = \frac{r^2}{R_1^2} I$$

根据有介质时的安培环路定理

$$2\pi rH = \frac{r^2}{R_1^2}I$$

因此

$$H = \frac{rI}{2\pi R_1^2} \quad (r \leq R_1)$$

磁感应强度

$$B = \mu_1 H = \frac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2} \quad (r < R_1)$$

在介质内作一半径为  $r$  ( $R_1 < r < R_2$ ) 的共轴圆, 此圆内包围的电流为  $I$ , 于是有

$$2\pi rH = I$$

距轴线  $r$  处的磁场强度即为

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

磁感应强度

$$B = \mu_2 H = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在介质外距轴线  $r$  ( $r > R_2$ ) 处, 磁导率为  $\mu_0$ , 磁场强度仍可表示为

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (r \geq R_2)$$

磁感应强度则为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R_2)$$

(2) 在距轴线  $R_1$  处, 导线表面的磁化面电流线密度

$$\alpha_{s1} = M_1 = B_1/\mu_0 - H_1$$

磁化电流方向与电流  $I$  的方向相反。磁介质表面的磁化面电流线密度

$$\alpha_{s2} = M_2 = B_2/\mu_0 - H_2$$

磁化电流方向与电流  $I$  方向相同。  $H_1 = H_2$ , 在半径为  $R_1$  处表面上磁化面电流线密度

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_{s_2} - \alpha_{s_1} = \frac{1}{\mu_0} (B_2 - B_1) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_2 I}{2\pi R_1} - \frac{\mu_1 I}{2\pi R_1} \right) = \frac{(\mu_2 - \mu_1) I}{2\pi \mu_0 R_1} \end{aligned}$$

在距轴线  $R_2$  处, 磁介质表面的磁化面电流线密度

$$\begin{aligned} \alpha'_{s_2} &= M'_2 = \frac{B'_2}{\mu_0} - H'_2 \\ &= \frac{\mu_2 I}{2\pi \mu_0 R_2} - \frac{I}{2\pi R_2} = \frac{(\mu_2 - \mu_0) I}{2\pi \mu_0 R_2} \end{aligned}$$

# 第十二章 电磁感应

## 知 识 要 点

### 1. 楞次定律

闭合回路中产生的感应电流具有确定的方向,它总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量,去补偿或者反抗引起感应电流的磁通量的变化。

### 2. 法拉第电磁感应定律

法拉第电磁感应定律  $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

通过导线的感生电荷量  $q = \frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$

### 3. 动生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

### 4. 感生电动势与感生电场

长直螺线管内磁场均匀变化时的感生电场

$$E = \begin{cases} -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} & (r \leq R) \\ -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} & (r \geq R) \end{cases}$$

感生电动势  $\mathcal{E}_i = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

### 5. 自感

自感系数  $L = \frac{\Phi_N}{I}$

自感电动势  $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$

### 6. 互感

互感系数  $M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$

互感电动势  $\mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$ ,  $\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$

### 7. $RL$ 电路的暂态过程

电流增长规律  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{t}{L}})$

电流衰变规律  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{L}}$

### 8. $RC$ 电路的暂态过程

电容器充电过程

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

电容器放电过程

$$q = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I = I_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}$$

### 9. 磁场的能量

磁场的能量密度  $w_m = \frac{1}{2} BH$

磁场的能量  $W_m = \frac{1}{2} \iiint_V BH dV$

自感为  $L$  的回路周围空间磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

## 思考题解答

**【12-1】** 在下列各情况下,线圈中是否会产生感应电动势?何故?若产生感应电动势,其方向如何确定?

(1) 线圈在载流长直导线激发的磁场中平动,图 12-1(a)、

(b);

- (2) 线圈在均匀磁场中旋转,图 12-1(c)、(d)、(e);  
 (3) 在均匀磁场中线圈变形,图 12-1(f),从圆形变成椭圆形;  
 (4) 在磁铁产生的磁场中线圈向右移动,图 12-1(g);  
 (5) 两个相邻近的螺线管 1 与 2,当 1 中电流改变时,试分别讨论在增加与减少的情况下,2 中的感应电动势,图 12-1(h)。

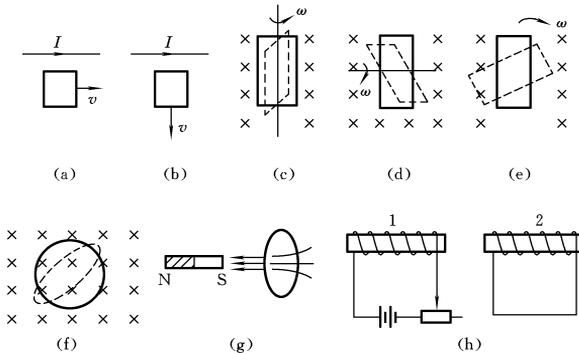


图 12-1

答 (1) 图 12-1(a)不产生感应电动势,因回路的磁通不变。

图 12-1(b)产生感应电动势。因回路的磁通随时间变化。感应电动势的方向为顺时针。

(2) 图 12-1(c)产生感应电动势。感应电动势的方向为顺时针。

图 12-1(d)产生感应电动势。感应电动势的方向为顺时针。

图 12-1(e)不产生感应电动势。因线圈中的磁通量不变。

(3) 图 12-1(f)产生感应电动势,因其面积减小,故磁通量变少。感应电动势的方向为顺时针。

(4) 图 12-1(g)产生感应电动势,因通过线圈的磁感强度增

加,其磁通量增加。感应电动势的方向从线圈右边看,为逆时针。

(5) 图12-1(h)当1中电流 $I$ 增加时,2中电动势产生的电流逆时针;当1中电流 $I$ 减少时,2中的电流顺时针。

**【12-2】** 将一磁铁插入一个由导线组成的闭合线圈中,一次迅速插入,另一次缓慢地插入。问:(1)两次插入时在线圈中的感生电荷量是否相同?(2)两次手推磁铁的力所做的功是否相同?(3)若将磁铁插入一不闭合的金属环中,在环中将发生什么变化?

答 (1) 感生电荷量相同。由 $q = \frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$ 知 $q$ 与插入快慢无关,只要两次的 $\Delta\Phi$ 相同, $q$ 就相同。

(2) 两次所做功不同。因为电流的功 $\Delta A = i^2 R \Delta t = \frac{\epsilon^2}{R} \Delta t = \frac{1}{R} \left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right)^2 \Delta t = \frac{1}{R} \left( \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right) \Delta\Phi$ ,若两次 $\Delta\Phi$ 相等,则迅速插入时 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 大, $\Delta A$ 也就大。由能量转换定律即可知迅速插入时手推磁铁所做的功大。

(3) 环两端将分别堆积正、负电荷。因两端之间有电势差。

**【12-3】** 让一块很小的磁铁在一根很长的竖直铜管内下落,若不计空气阻力,试定性说明磁铁进入铜管上部、中部和下部的运动情况,并说明理由。

答 铜管可看成是无数平行的线圈。磁铁下落,在铜管上产生感应电流,该感应电流的磁场对磁铁产生向上的斥力,阻碍磁铁下落。磁铁加速下落,此斥力愈来愈大,使磁铁向下的加速度越来越小,最终该斥力与重力平衡。

在铜管上部,磁铁向下的加速度从开始的重力加速度逐渐减小,磁铁向下的速度从开始的零逐渐增大;在铜管中部,磁铁向下的速度越来越大,加速度越来越小;在铜管下部,磁铁的加速度为0,速度达到最大值,匀速下落。

**【12-4】** 如果我们使图12-2左边电路中的电阻 $R$ 增加,则在右边电路中感应电流的方向如何?

答 右边电路中感应电流的方向为顺时针。当电阻 $R$ 增加时,左边电路中的逆时针电流减小,从而使其在右边电路中向内的磁通减少。为反抗这种变化,右边电路中产生顺时针方向的感应电流。

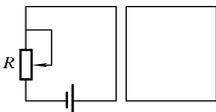


图 12-2

【12-5】 将尺寸完全相同的铜环和木环适当放置,使通过两环内的磁感应通量变化量相等。问这两个环中的感生电动势及感生电场是否相等?

答 由于铜环与木环的面积相同,依题意可知,两环的感应电动势相同。故感生电场的环量相同。但并未告知磁场形态,所以各对应点的感生电场不一定相同。

【12-6】 铜片放在磁场中,如图12-3所示。若将铜片从磁场中拉出或推进,则受到一阻力的作用,试解释这个阻力的来源。

答 铜片在拉出过程中,在磁场中的一部分铜片,由于洛伦兹力的作用形成向上的电流,该电流受磁场的力的作用向左,此力阻止向右的拉动。铜片在推进过程中,磁力的作用向右,阻止向左推进。

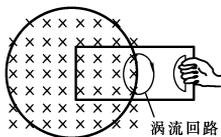


图 12-3

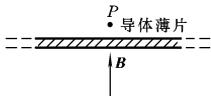


图 12-4

【12-7】 有一导体薄片位于与磁场 $B$ 垂直的平面内,如图12-4所示。如果 $B$ 突然变化,在 $P$ 点附近 $B$ 的变化不能立即检查出来,试解释之。

答  $B$ 的变化引起导体内产生涡流。该涡流在 $P$ 点产生的磁场与 $B$ 的变化方向正好相反,故 $P$ 点的磁场变化甚少,因此不能立即检查出来。

**【12-8】** 如图 12-5 所示,一均匀磁场被限制在半径为  $R$  的圆柱面内,磁场随时间作线性变化。问图中所示闭合回路  $L_1$  和  $L_2$  上每一点的  $\frac{\partial B}{\partial t}$  是否为零? 感生电场  $E_i$  是否为零?  $\oint_{L_1} E_i \cdot dI$  和  $\oint_{L_2} E_i \cdot dI$  是否为零? 若回路是导线环,问环中是否有感应电流?  $L_1$  环上任意两点的电势差是多大?  $L_2$  环上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  点的电势是否相等?

答 对于  $L_1$ :  $\frac{\partial B}{\partial t} \neq 0; E_i \neq 0; \oint_{L_1} E_i \cdot dI \neq 0; L_1$  中有感应电流; 在导线是均匀的情况下,任意两点的电势差为 0。

对于  $L_2$ :  $\frac{\partial B}{\partial t} = 0; E_i \neq 0; \oint_{L_2} E_i \cdot dI = 0$ ; 最终电流为 0;  $V_A = V_B$ ;  $V_C = V_D \neq V_A$ , 因为在  $AD$  段和  $BC$  段有相等且同绕行方向的感生电动势。

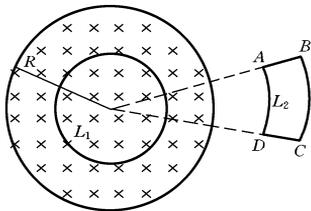


图 12-5

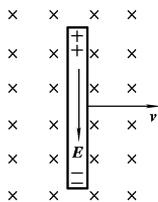


图 12-6

**【12-9】** 如图 12-6 所示,当导体棒在均匀磁场中运动时,棒中出现稳定的电场  $E = vB$ ,这是否和导体中  $E = 0$  的静电平衡的条件相矛盾? 为什么? 是否需要外力来维持棒在磁场中作匀速运动?

答 不矛盾。在棒的两端有电荷堆积,形成静电场,该场与  $E = vB$  大小相等,方向相反,故  $E_{\text{合}} = 0$ 。需要外力来维持棒在磁场中作匀速运动。

**【12-10】** 用电阻丝绕成的标准电阻要求没有自感,问怎样绕

制方能使线圈的自感为零,试说明其理由。

答 如图 12-7 所示绕制即可。

因为不同流向电流产生的磁通相互抵消,所以无自感现象,也即线圈的自感为零。

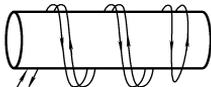


图 12-7

**【12-11】** 两螺线管 A、B,其长度与直径都相同,都只有一层线圈,相邻各匝紧密相靠,绝缘层厚度可忽略。螺线管 A 由细导线绕成,螺线管 B 则由粗导线绕成。问:(1)哪个螺线管的自感较大?(2)哪个螺线管的时间常数较大?

答 设螺线管长为  $l$ ,截面积为  $S$ ,导线直径为  $d$ ,导线的电阻率为  $\rho$ 。则匝数  $N = \frac{l}{d}$ 。

$$(1) \text{ 因为 } L = \mu n S N = \mu \frac{N^2}{l} \cdot S$$

所以  $L_{\text{细}} > L_{\text{粗}}$

$$(2) R = N R_0 \quad (R_0 \text{ 为单匝电阻})$$

$$\text{由 } R_0 = \rho \frac{2 \sqrt{\pi S}}{\pi d^2 / 4}, \quad N = \frac{l}{d}$$

$$\text{得 } R = 8\rho \sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{l}{d^3}$$

$$\text{又 } \tau = \frac{L}{R} = \frac{\mu \sqrt{\pi S}}{8\rho} \cdot d$$

所以  $\tau_{\text{粗}} > \tau_{\text{细}}$

**【12-12】** 在一个线圈(自感为  $L$ ,电阻为  $R$ )和电动势为  $\mathcal{E}$  的电源的串联电路中,当开关接通的那个时刻,线圈中还没有电流,自感电动势怎么会最大?

答 此时电流变化最大,故磁感应强度变化最大,因而磁通量变化最大,导致自感电动势最大。

**【12-13】** 有两个半径相接近的线圈,问如何放置方可使其互感最小?如何放置可使其互感最大?

答 两线圈轴线相交且垂直,互感最小;两线圈轴线重合互感最大。

**【12-14】** 两个螺线管串联相接,两管中任何时候通有相同的恒定电流,试问两螺线管之间有没有互感存在? 解释之。

答 没有互感存在。因为只有当回路中的电流发生变化时,才有电磁感应。

**【12-15】** 在螺绕环中,磁能密度较大的地方是在内半径附近,还是在外半径附近?

答 由安培定理知  $2\pi rH = NI$  ( $N$  为匝数)

$$w_m = \frac{1}{2}HB = \frac{\mu N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

显然,内半径附近的磁能密度大一些。

**【12-16】** 磁能的两种表达式  $W_m = \frac{1}{2}LI^2$  和  $W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$  的物理意义有何不同? 式中  $V$  是均匀磁场所占体积。

答  $W_m = \frac{1}{2}LI^2$  表示回路或线圈具有储能的作用。其能量与回路的电流  $I$  成正比,与回路的电惯性度量  $L$  成正比。

$W_m = \frac{1}{2}B^2 \frac{V}{\mu_0}$  表示只要磁感应强度存在,则在磁场所及空间中就有能量存在,即磁场具有能量。

## 习题解答

**【12-1】**  $AB$  和  $BC$  两段导线,其长均为 10 cm,在  $B$  处相接成  $30^\circ$  角,若使导线在均匀磁场中以速度  $v = 1.5 \text{ m/s}$  运动,方向如图 12-8 所示,磁场方向垂直纸面向内,磁感应强度为  $B = 2.5 \times 10^{-2} \text{ T}$ 。问  $A$ 、 $C$  两端之间的电势差为多少? 哪一端电势

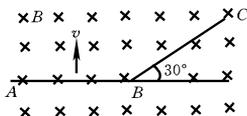


图 12-8

高?

解 两段导线中的感应电动势

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \int_C^A \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_C^B \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \\ &= vB \overline{CB} \cos 30^\circ + vB \overline{BA} = vB (\overline{CB} \cos 30^\circ + \overline{BA}) \\ &= 1.5 \times 2.5 \times 10^{-2} \times (0.10 \times \cos 30^\circ + 0.10) \text{ V} \\ &= 7.0 \times 10^{-3} \text{ V}\end{aligned}$$

方向由  $C$  到  $A$ , 因此  $A$  点电势高,

$$V_A - V_C = \mathcal{E}_i = 7.0 \times 10^{-3} \text{ V}$$

**【12-2】** 一均匀磁场与矩形导体回路面法线单位矢量  $e_n$  间的夹角为  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (图12-9), 已知磁感应强度  $B$  随时间线性增加, 即  $B = kt$  ( $k > 0$ ), 回路的  $AB$  边长为  $l$ , 以速度  $v$  向右运动, 设  $t=0$  时,  $AB$  边在  $x=0$  处。求任意时刻回路中感应电动势的大小和方向。

解 感应电动势大小为

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS \cos \theta) = \frac{d}{dt}(ktx \cos \theta) = klx \cos \theta + ktl \cos \theta \frac{dx}{dt}$$

注意到  $x=vt$ ,  $\frac{dx}{dt}=v$ , 则有

$$\mathcal{E}_i = 2klvt \cos \frac{\pi}{3} = klvt$$

感应电动势的方向为由  $A$  指向  $B$ 。

**【12-3】** 如图12-10所示, 一长直导线通有电流  $I=0.5 \text{ A}$ , 在与其相距  $d=5.0 \text{ cm}$  处放有一矩形线圈, 共1000匝。线圈以速度  $v=3.0 \text{ m/s}$  沿垂直于长导线的方向向右运动时, 线圈中的动生电动势是多少? (设线圈长  $l=4.0 \text{ cm}$ , 宽  $b=2.0 \text{ cm}$ 。)

解 在矩形线圈平面上, 磁场方向垂直于平面向内。当线圈向右运动时, 长度为  $b$  的两条边的运动方向与其长度方向平行, 对边上任一导线元, 都有  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 因而这两条边上无动生电动势; 就边长为  $l$  的两条边而言, 长度方向、运动方向、磁场方向两两垂直, 因而它们都具有动生电动势。

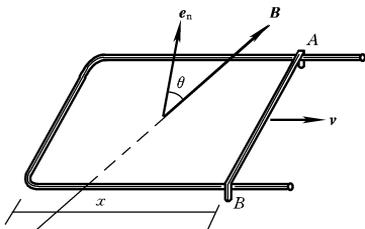


图 12-9

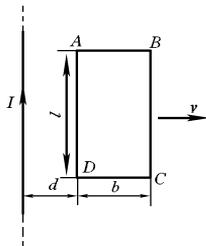


图 12-10

$$\mathcal{E}_{iAD} = NB_1lv = N \frac{\mu_0 I}{2\pi d} lv$$

$$\mathcal{E}_{iBC} = NB_2lv = N \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)} lv$$

它们的方向对线圈而言是相反的。 $\mathcal{E}_{iAD}$ 的方向是顺时针的， $\mathcal{E}_{iBC}$ 的方向是逆时针的。因而线圈电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_{iAD} - \mathcal{E}_{iBC} = \frac{N\mu_0 I lv}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+b} \right) \\ &= 1\,000 \times 2 \times 10^{-7} \times 0.5 \times 4.0 \times 10^{-2} \times 3.0 \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{5.0 \times 10^{-2}} - \frac{1}{(5.0 + 2.0) \times 10^{-2}} \right] \text{V} \\ &= 6.86 \times 10^{-5} \text{V} \end{aligned}$$

**【12-4】** 在两平行导线的平面内，有一矩形线圈，如图 12-11 所示。如导线中电流  $I$  随时间变化，试计算线圈中的感生电动势。

解 在矩形线圈面积上，平行于电流方向取宽为  $dx$  的条形面积 (图 12-12)，该面积上各点磁感应强度相同，其大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+d_2-d_1} \right)$$

方向垂直纸面向内。该面积的磁通量

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+d_2-d_1} \right) dx$$

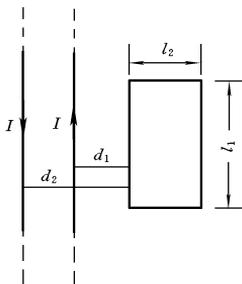


图 12-11

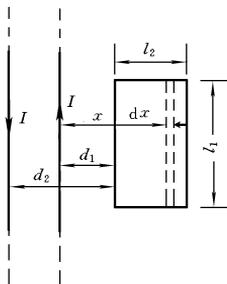


图 12-12

通过矩形线圈的磁通量即为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{d_1}^{d_1+l_2} \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+d_2-d_1} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \ln \frac{d_1+l_2}{d_1} - \ln \frac{d_2+l_2}{d_2} \right)\end{aligned}$$

感生电动势

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \left( \ln \frac{d_2+l_2}{d_2} - \ln \frac{d_1+l_2}{d_1} \right) \frac{dI}{dt}$$

**【12-5】** 如图 12-13 所示, 导线  $AB$  在导线架上以速度  $v$  向右滑动。已知导线  $AB$  的长为  $50 \text{ cm}$ ,  $v=4.0 \text{ m/s}$ ,  $R=0.20 \Omega$ , 磁感应强度  $B=0.50 \text{ T}$ , 方向垂直回路平面。试求: (1)  $AB$  运动时所产生的动生电动势; (2) 电阻  $R$  上所消耗的功率; (3) 磁场作用在  $AB$  上的力。

解 (1)  $AB$  上的动生电动势

$$\mathcal{E}_i = Blv = 0.50 \times 0.50 \times 4.0 \text{ V} = 1.0 \text{ V}$$

(2) 电阻  $R$  消耗的功率

$$P = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = \frac{1.0^2}{0.20} \text{ W} = 5.0 \text{ W}$$

(3) 回路中的电流

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$

磁场作用在  $AB$  上的力

$$F = BIl = \frac{B\mathcal{E}_i l}{R} = \frac{0.50 \times 1.0 \times 0.50}{0.20} \text{ N} = 1.3 \text{ N}$$

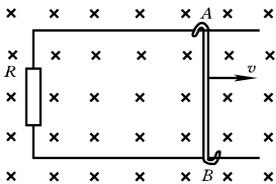


图 12-13

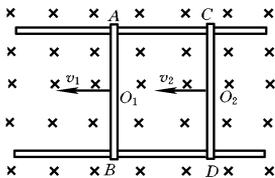


图 12-14

**【12-6】** 如图12-14所示,  $AB$  和  $CD$  为两根金属棒, 各长  $1 \text{ m}$ , 电阻都是  $R = 4 \Omega$ , 放置在均匀磁场中, 已知  $B = 2 \text{ T}$ , 方向垂直纸面向里。当两根金属棒在导轨上分别以  $v_1 = 4 \text{ m/s}$  和  $v_2 = 2 \text{ m/s}$  的速度向左运动时, 忽略导轨的电阻。试求: (1) 在两棒中动生电动势的大小和方向, 并在图上标出; (2) 金属棒两端的电势差  $U_{AB}$  和  $U_{CD}$ ; (3) 两金属棒中点  $O_1$  和  $O_2$  之间的电势差。

解 (1)  $AB$  棒中动生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_{i1} = Blv_1 = 2 \times 1 \times 4 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

方向由  $A$  至  $B$ 。 $CD$  棒中动生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_{i2} = Blv_2 = 2 \times 1 \times 2 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

方向由  $C$  至  $D$ 。

(2) 回路  $ABDCA$  中的电流

$$I = \frac{\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2}}{2R} = \frac{8 - 4}{2 \times 4} \text{ A} = 0.5 \text{ A}$$

$$U_{AB} = -\mathcal{E}_{i1} + IR = (-8 + 0.5 \times 4) \text{ V} = -6 \text{ V}$$

$B$  端电势较高。

$$U_{CD} = U_{AB} = -6 \text{ V}$$

(3) 电路  $O_1BDO_2$  的等效电路如图 12-15 所示。由图可得

$$\begin{aligned} V_{O_1} - V_{O_2} &= I \cdot \frac{R}{2} - \frac{\mathcal{E}_{i1}}{2} + \frac{\mathcal{E}_{i2}}{2} + I \cdot \frac{R}{2} \\ &= IR - \frac{1}{2}(\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2}) \\ &= \left[ 0.5 \times 4 - \frac{1}{2} \times (8 - 4) \right] \text{ V} = 0 \end{aligned}$$

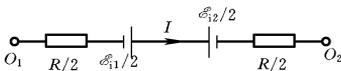


图 12-15

**【12-7】** 一导线  $AB$  弯成如图 12-16 所示的形状, 其中  $CD$  是一半圆, 半径  $r=0.10 \text{ m}$ ,  $AC$  和  $DB$  段的长度均为  $l=0.10 \text{ m}$ , 在均匀磁场 ( $B=0.50 \text{ T}$ ) 中绕轴线  $AB$  转动, 转速  $n=3\ 600 \text{ r/min}$ 。设电路的总电阻(包括电表  $M$  的内阻)为  $1\ 000 \ \Omega$ , 求导线中的动生电动势和感应电流的频率以及它们的最大值各是多少。

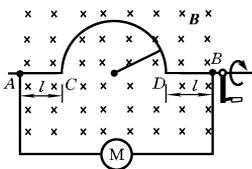


图 12-16

**解** 在导线  $AB$  的转动过程中, 回路中只有以  $\overline{CD}$  为直径的半圆面积上的磁通量发生变化。以图示半圆位置为参考位置, 当半圆转过角度  $\theta$  时, 通过半圆面积的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \theta = \frac{1}{2} \pi r^2 B \cos \omega t = \frac{1}{2} \pi r^2 B \cos 2\pi n t$$

$\widehat{CD}$  中动生电动势

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = \pi^2 r^2 B n \sin 2\pi n t$$

$$n = 3\ 600 \text{ r/min} = 60 \text{ r/s}$$

$$\begin{aligned}\text{因此 } \mathcal{E}_i &= 3.14^2 \times 0.10^2 \times 0.50 \times 60 \sin(2 \times 60\pi t) \\ &= 2.96 \sin 120\pi t\end{aligned}$$

回路中感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{2.96}{1000} \sin 120\pi t = 2.96 \times 10^{-3} \sin 120\pi t$$

由  $\mathcal{E}_i$  及  $I$  的表示式可知, 动生电动势和感应电流的频率等于半圆形导线的转动频率

$$n = 60 \text{ Hz}$$

$$\text{动生电动势最大值 } \mathcal{E}_{i\max} = 2.96 \text{ V}$$

$$\text{感应电流最大值 } I_{\max} = 2.96 \times 10^{-3} \text{ A}$$

**【12-8】** 有一螺线管, 每米有 800 匝。在管内中心放置一绕有 30 圈的半径为 1 cm 的圆形小回路, 在 1/100 s 时间内, 螺线管中产生 5 A 的电流。问小回路中感应产生的感生电动势为多少?

解 当螺线管电流为  $I$  时, 管内中心处磁感应强度

$$B = \mu_0 n I$$

位于中心处并与螺线管共轴的圆形小回路面积上的磁通量

$$\Phi = BS = \mu_0 n I \pi R^2$$

当螺线管中电流变化时, 圆形小回路中的感生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_i = \frac{Nd\Phi}{dt} = \pi \mu_0 N n R^2 \frac{dI}{dt}$$

已知  $N=30$ ,  $n=800$ ,  $R=1 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{5}{1/100} \text{ A/s} = 500 \text{ A/s}$ , 代入上式得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= 3.14 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 30 \times 800 \\ &\quad \times (1 \times 10^{-2})^2 \times 500 \text{ V} \\ &= 4.73 \times 10^{-3} \text{ V}\end{aligned}$$

**【12-9】** 一横截面为  $3.0 \text{ cm}^2$  的铁芯螺绕环, 环上每厘米绕有线圈 40 匝, 铁芯的磁导率  $\mu = 2000\mu_0$ , 在环上绕有 2 匝次级线圈。求初级绕组中电流在 0.1 s 内由 5 A 降到 0 时, 在次级绕组中产生的感生电动势。

解 初级绕组中电流为  $I$  时, 环内磁感应强度

$$B = \mu n I$$

截面上的磁通量

$$\Phi = BS = \mu n I S$$

当初级绕组中电流变化时, 次级线圈中的平均感生电动势大小为

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}_i &= \left| \frac{N \Delta \Phi}{\Delta t} \right| = N \mu n S \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right| \\ &= 2 \times 2000 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 40 \times 10^2 \times 3.0 \\ &\quad \times 10^{-4} \times \frac{5}{0.1} \text{ V} \\ &= 0.301 \text{ V} \end{aligned}$$

**【12-10】** 如图12-17所示, 具有相同轴线的两个导线回路, 小的回路在大的回路上面距离  $y$  处,  $y$  远大于回路的半径  $R$ , 因此当大回路中有电流  $I$  按图示方向流过时, 小回路所围面积  $\pi r^2$  之内的磁场几乎是均匀的。现假定  $y$  以匀速  $v = dy/dt$  而变化。(1) 试确定穿过小回路的磁通量  $\Phi$  和  $y$  之间的关系; (2) 当  $y = NR$  时 ( $N$  为整数), 小回路内产生的感生电动势; (3) 若  $v > 0$ , 确定小回路内感应电流的方向。

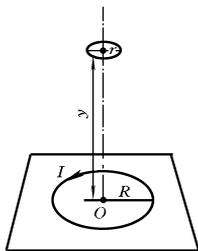


图 12-17

解 (1) 当小回路距大回路为  $y$  时, 小回路面积上磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

小回路面积上的磁通量为

$$\Phi = BS = B\pi r^2 = \frac{\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

因为  $y \gg R$ , 所以

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \pi r^2 R^2}{2y^3}$$

(2) 当  $y$  变化时, 小回路面积上磁通量也发生变化。小回路中感生电动势为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_0 I \pi r^2 R^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y^3}\right) \\ &= \frac{3}{2}\mu_0 I \pi r^2 R^2 \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}\mu_0 I \pi r^2 R^2 \frac{v}{y^4}\end{aligned}$$

当  $y=NR$  时,

$$\mathcal{E}_i = \frac{3\mu_0 I \pi r^2 R^2 v}{2N^4 R^4} = \frac{3\mu_0 I \pi r^2 v}{2N^4 R^2}$$

(3) 当  $v>0$  时,二回路距离增大,小回路面积上磁通量减小。根据楞次定律,小回路上应产生与大回路相同方向的感应电流。

**【12-11】** 电子感应加速器中的磁场在直径为 0.50 m 的圆柱形区域内是匀强的,若磁场的变化率为  $1.0 \times 10^{-2}$  T/s,试计算离开中心距离为 0.10 m、0.50 m、1.0 m 处各点的感生场强。

解 当磁场变化时,在圆柱形区域内外距轴线为  $r$  处的感生场强的大小为

$$E = \begin{cases} \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| & (r \leq R) \\ \frac{R^2}{2r} \left| \frac{dB}{dt} \right| & (r \geq R) \end{cases}$$

当  $r=0.10$  m 时,  $r < R$  ( $R=0.25$  m),

$$E = \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{0.10}{2} \times 1.0 \times 10^{-2} \text{ V/m} = 5.0 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

当  $r=0.50$  m 时,  $r > R$ ,

$$\begin{aligned}E &= \frac{R^2}{2r} \left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{0.25^2}{2 \times 0.50} \times 1.0 \times 10^{-2} \text{ V/m} \\ &= 6.25 \times 10^{-4} \text{ V/m}\end{aligned}$$

当  $r=1.0$  m 时,

$$\begin{aligned}E &= \frac{R^2}{2r} \left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{0.25^2}{2 \times 1.0} \times 1.0 \times 10^{-2} \text{ V/m} \\ &= 3.13 \times 10^{-4} \text{ V/m}\end{aligned}$$

**【12-12】** 图12-18表示一个限定在半径为  $R$  的圆柱体内的均匀磁场  $B$ ,  $B$  以  $10^{-2}$  T/s 的恒定变化率减少,电子在磁场中  $A$ 、 $O$ 、 $C$

各点处时,它所获得的瞬时加速度(大小和方向)各为若干? 设  $r=5.0\text{ cm}$ 。

解 在圆柱体区域内,当磁场变化时,距轴线  $r$  处的感生电场的场强大小为

$$E = \frac{r}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

在该处电子受到的作用力的大小为

$$F = eE = \frac{er}{2} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

它获得的加速度大小为

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{er}{2m_e} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

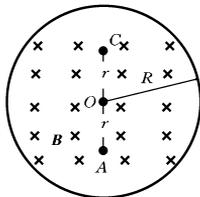


图 12-18

$a$  的方向与  $E$  的方向相反,而  $E$  的方向根据  $\frac{dB}{dt}$  的方向由左手螺旋法则确定。

电子在  $A$  点时,  $r=5.0 \times 10^{-2}\text{ m}$ , 它的加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 5.0 \times 10^{-2}}{2 \times 9.1 \times 10^{-31}} \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \\ &= 4.4 \times 10^7 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$B$  在减少,  $\frac{dB}{dt}$  的方向垂直纸面向外,在  $A$  点,感生电场方向向左,因而电子加速度方向向右。

电子在  $O$  点时,因为  $r=0, E=0$ , 所以加速度为零。

电子在  $C$  点时,仍有  $r=5.0 \times 10^{-2}\text{ m}$ , 其加速度大小仍是  $4.4 \times 10^7 \text{ m/s}^2$ , 但方向向左。

**【12-13】** 在半径为  $R$  的圆柱形体积内充满磁感应强度为  $B$  的均匀磁场,有一长为  $l$  的金属棒放在磁场中,如图12-19所示。设  $\frac{dB}{dt}$  为已知,求棒两端的电势差。

解 设想有两段导线  $AO$  和  $OA'$  与金属棒构成一回路。当磁感应强度为  $B$  时,回路面积上的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{Bl}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

磁场变化时,回路内感生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

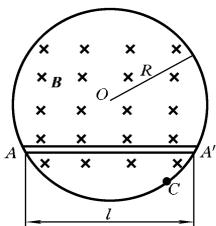


图 12-19

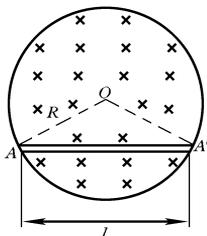


图 12-20

由于磁场的对称性,变化磁场所激发的感生电场的电场线在圆柱形体积内是与圆柱同轴的同心圆。因此,在回路的  $AO$  和  $OA'$  段的任一导线元上都有  $E \cdot dl = 0$  (图 12-20)。在这两段导线上无感生电动势,可见  $\mathcal{E}_i$  就是金属棒的感生电动势。实际上  $AO$  和  $OA'$  这两段电路是不存在的,棒两端的电势差即为

$$U = \mathcal{E}_i = \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

**【12-14】** 边长为 20 cm 的正方形导体回路,放置在圆柱形空间的均匀磁场中,已知磁感应强度的量值为 0.5 T,方向垂直于导体回路所围平面(图 12-21),若磁场以 0.1 T/s 的变化率减小,  $AC$  边沿圆柱体直径,  $B$  点在磁场的中心。(1)用矢量标出图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$  各点处感生电场  $E$  的方向和大小;(2)  $AC$  边内的感生电动势有多大?(3)回路内的感生电动势有多大?(4)如果回路的电阻为  $2 \Omega$ ,回路中的感应电流多大?(5)  $A$  和  $C$  两点间的电势差

为多少? 哪一点的电势高。

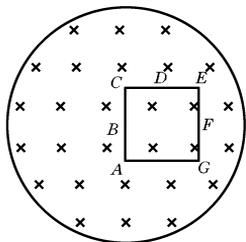


图 12-21

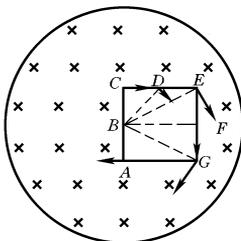


图 12-22

解 (1)  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$  各点处感生电场  $E$  的方向如图 12-22 所示。因为在圆柱形空间内,  $E$  与到中心的距离  $r$  成正比, 所以

$$E_E = E_G > E_F > E_D > E_C = E_A > E_B$$

(2) 在  $AC$  边内的感生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^C E \cos 90^\circ dl = 0$$

(3) 回路内感生电动势的大小为

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = S \left| \frac{dB}{dt} \right| = 0.20^2 \times 0.1 \text{ V} = 4 \times 10^{-3} \text{ V}$$

(4) 回路中的感应电流

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{4 \times 10^{-3}}{2} \text{ A} = 2 \times 10^{-3} \text{ A}$$

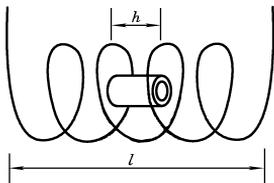
$$(5) R_{AC} = \frac{1}{4} R = \frac{2}{4} \Omega = 0.5 \Omega$$

因此  $A$  和  $C$  两点间电势差

$$U = IR_{AC} = 2 \times 10^{-3} \times 0.5 \text{ V} = 1 \times 10^{-3} \text{ V} = 1 \text{ mV}$$

根据感生电场的方向可判断, 在回路中电流方向是顺时针的, 在  $AC$  段中无感生电动势, 故  $V_A > V_C$ 。

**【12-15】** 要从真空仪器的金属部件上清除出气体,可以利用感应加热的方法。如图12-23所示,设线圈长 $l=20\text{ cm}$ ,匝数 $N=30$ 匝(把线圈近似看作是无量长密绕的),线圈中的高频电流为 $I=I_0\sin 2\pi ft$ ,其中 $I_0=25\text{ A}$ ,频率 $f=10^5\text{ Hz}$ ,被加热的是电子管阳极,它是半径 $r=4\text{ mm}$ 而管壁极薄的空圆筒,高度 $h\ll l$ ,其电阻 $R=5\times 10^{-3}\ \Omega$ ,求:(1)阳极中的感应电流最大值;(2)阳极内每秒产生的热量;(3)当频率 $f$ 增加1倍时,热量增至几倍?



解 (1) 当线圈中电流为 $I$ 时,圆筒处磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

圆筒截面积上磁通量

$$\Phi = BS = \pi r^2 B = \frac{\pi \mu_0 NI r^2}{l}$$

图 12-23

线圈电流变化时,圆筒上感应电动势

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 N r^2}{l} \frac{dI}{dt} = -\frac{\pi \mu_0 N r^2}{l} \frac{d}{dt} I_0 \sin 2\pi ft \\ &= -\frac{2\pi^2 \mu_0 f N r^2 I_0}{l} \cos 2\pi ft \end{aligned}$$

阳极中电流  $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{2\pi^2 \mu_0 f N r^2 I_0}{lR} \cos 2\pi ft$

电流最大值

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{2\pi^2 \mu_0 f N r^2 I_0}{lR} \\ &= \frac{2 \times 3.14^2 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 10^5 \times 30 \times (4 \times 10^{-3})^2 \times 25}{0.20 \times 5 \times 10^{-3}} \text{ A} \\ &= 29.7 \text{ A} \end{aligned}$$

(2) 阳极内每秒产生的热量为

$$Q = \int_0^1 I^2 R dt = \int_0^1 I_0^2 R \cos^2 2\pi ft dt$$

$$= \frac{1}{2} I_0'^2 R = \frac{1}{2} \times 29.7^2 \times 5 \times 10^{-3} \text{ J} = 2.2 \text{ J}$$

(3)  $Q \propto I_0'^2 \propto f^2$ , 因此, 当频率增加 1 倍时, 热量增至 4 倍。

**【12-16】** 如图 12-24 所示, 一块金属板的尺寸为  $l \times l \times d$ , 一均匀磁场垂直于板面。当磁感应强度的大小按  $B = B_0 \sin \omega t$  变化时, 证明由于在金属板内产生涡电流而消耗的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{64} \gamma \omega^2 B_0^2 d l^4$$

式中  $\gamma$  是金属板的电导率。

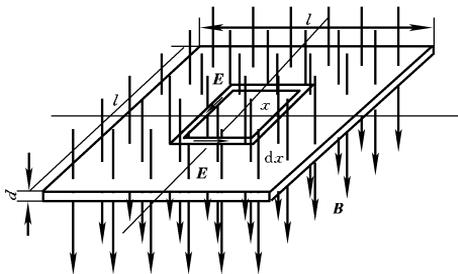


图 12-24

证 在金属板上取一边长为  $2x$ , 边宽为  $d$ , 厚为  $d$  的正方形金属框, 其中心与金属板中心重合, 边长与金属板边长平行 (图 12-24)。在此正方形面积上, 磁通量为

$$\Phi = BS = 4B_0 x^2 \sin \omega t$$

当磁场变化时, 正方形金属框内的感生电动势为

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - 4B_0 x^2 \omega \cos \omega t$$

正方形金属框的电阻为

$$R = \frac{8x}{\gamma d (dx)}$$

正方形金属框内的涡电流消耗的功率为

$$dP = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} = 2B_0^2 \omega^2 \gamma d \cos^2 \omega t x^3 dx$$

整个金属板中的涡电流的功率为

$$P = \int_0^{l/2} 2B_0^2 \omega^2 \gamma d \cos^2 \omega t x^3 dx = \frac{1}{32} B_0^2 \omega^2 \gamma d l^4 \cos^2 \omega t$$

涡电流的平均功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{32} B_0^2 \omega^2 \gamma d l^4 \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{64} B_0^2 \omega^2 \gamma d l^4$$

**【12-17】** 在长为 60 cm、直径为 5.0 cm 的空心纸筒上绕多少匝线圈才能得到自感为  $6.0 \times 10^{-3}$  H 的线圈?

解 设线圈匝数为  $N$ , 当线圈中电流为  $I$  时, 线圈内磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

线圈横截面积上的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{\pi \mu_0 N I d^2}{4l}$$

因此, 线圈的自感为

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\pi \mu_0 N^2 d^2}{4l}$$

匝数

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{4lL}{\pi \mu_0 d^2}} = \frac{2}{d} \sqrt{lL} \\ &= \frac{2}{5.0 \times 10^{-2}} \sqrt{\frac{0.60 \times 6.0 \times 10^{-3}}{3.14 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7}}} = 1.2 \times 10^3 \end{aligned}$$

**【12-18】** 一截面为长方形的螺绕管, 其尺寸如图 12-25 所示, 共有  $N$  匝, 求此螺绕管的自感。

解 图 12-26 是螺绕管的横截面图和纵截面图, 在管内作半径为  $r$  的圆。当线圈中电流为  $I$  时, 圆上各点磁感应强度为

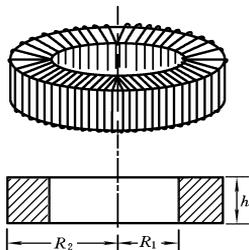


图 12-25

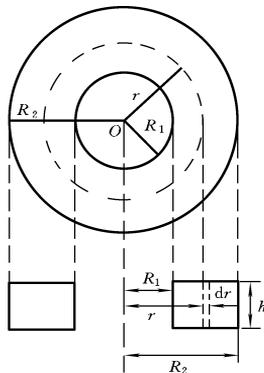


图 12-26

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

在螺绕管的纵截面上距轴线  $r$  处取一宽为  $dr$ , 长为  $h$ , 与轴平行的窄条, 窄条面积上磁通量为

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi r} dr$$

整个截面上磁通量为

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NIh}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

螺绕管的自感即为

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

**【12-19】** 一圆形线圈A由50匝细线绕成,其面积为 $4\text{ cm}^2$ ,放在另一个匝数等于100匝、半径为20 cm的圆形线圈B的中心,两线圈同轴。设线圈B中的电流在线圈A所在处所激发的磁场可看作是均匀的。求:(1)两线圈的互感;(2)当线圈B中的电流以50

A/s的变化率减小时,线圈A内磁通量的变化率;(3)线圈A中的感生电动势。

解 (1) 设线圈B中的电流为 $I$ ,它中心处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N_B I}{2R}$$

式中 $N_B$ 是线圈B的匝数, $R$ 是它的半径。置于线圈B的中心的小线圈A的面积上磁场可认为是均匀的,则线圈A面积上的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 N_B I S}{2R}$$

两线圈的互感即为

$$\begin{aligned} M &= \frac{N_A \Phi}{I} = \frac{\mu_0 N_B N_A S}{2R} \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 100 \times 50 \times 4 \times 10^{-4}}{2 \times 0.20} \text{ H} \\ &= 6.28 \times 10^{-6} \text{ H} \end{aligned}$$

(2) 因为 $N_A \Phi = MI$ ,所以

$$\begin{aligned} \frac{d(N_A \Phi)}{dt} &= M \frac{dI}{dt} = 6.28 \times 10^{-6} \times (-50) \text{ Wb/s} \\ &= -3.14 \times 10^{-4} \text{ Wb/s} \end{aligned}$$

(3) 线圈A中的感生电动势

$$\mathcal{E}_i = -M \frac{dI}{dt} = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

**【12-20】** 两个共轴圆线圈,半径分别为 $R$ 及 $r$ ,匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ,相距为 $d$ 。设 $r$ 很小,则小线圈所在处的磁场可以视为均匀的。求两线圈的互感系数。

解 设大线圈中电流为 $I$ ,它在小线圈处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

小线圈面积上磁场均匀,则磁通量

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 N_1 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi \mu_0 N_1 I R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

两线圈的互感为

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

【12-21】 一矩形线圈长  $l=20\text{ cm}$ , 宽  $b=10\text{ cm}$ , 由 100 匝表面绝缘的导线绕成, 放置在一根长直导线的旁边, 并和直导线在同一平面内, 该直导线是一个闭合回路的一部分, 其余部分离线圈很远, 其影响可略去不计。求图 12-27(a)、(b) 两种情况下, 线圈与长直导线间的互感。

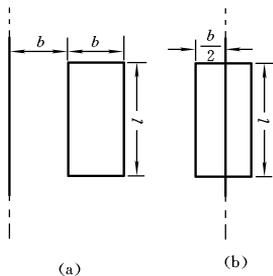


图 12-27

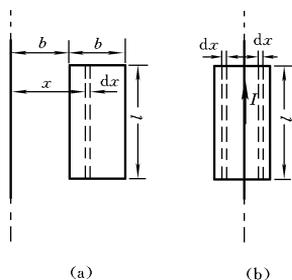


图 12-28

解 设图 12-28(a) 的长直导线中有电流  $I$ 。在矩形线圈面积上距直导线  $x$  处, 取一宽为  $dx$ 、长为  $l$  且与直导线平行的长条形面积。该面积上磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

磁通量为 
$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 Il}{2\pi x} dx$$

整个线圈面积上的磁通量

$$\Phi = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 Il}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln 2$$

线圈与长直导线间的互感

$$M = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 l}{2\pi} \ln 2$$

$$= 2 \times 10^{-7} \times 100 \times 0.20 \times \ln 2 \text{ H} = 2.8 \times 10^{-6} \text{ H}$$

设图12-28(b)的长直导线中有电流 $I$ 。在矩形线圈面积上,相对于直导线对称地取二宽为 $dx$ 、长为 $l$ 且与直导线平行的长条形面积。这两个面积上磁感应强度大小相等、方向相反,因而这两个面积的磁通量相等、符号相反、代数和为零。由于长直导线位于矩形线圈的中线上,矩形面积是由成对的对称条形面积组成,因而矩形面积的磁通量为零,线圈与长直导线间的互感即为零。

**【12-22】** 有一个平绕于圆筒上的螺旋线圈,长10 cm,直径1 cm,共有线圈1 000匝,用32号漆包线绕制,漆包线的电阻是247  $\Omega$ /km(20 $^{\circ}$ C)。若把这线圈接在电动势为2 V的蓄电池上,问:(1)线圈的自感和电阻各是多少? 电路的时间常数是多少?(2)线圈中通电开始时的电流增长率是多少?(3)线圈中的电流达到稳定后,恒定电流是多少?(4)在稳定后线圈中所储存的磁能及磁能密度各是多少?

解 (1) 线圈的自感为(见题12-17)

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi\mu_0 N^2 d^2}{4l} \\ &= \frac{3.14 \times 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 1\,000^2 \times (1 \times 10^{-2})^2}{4 \times 0.10} \text{ H} \\ &= 9.86 \times 10^{-4} \text{ H} \end{aligned}$$

线圈上导线长度为

$$\begin{aligned} l' &= N\pi d = 1\,000 \times 3.14 \times 0.01 \text{ m} \\ &= 31.4 \text{ m} = 3.14 \times 10^{-2} \text{ km} \end{aligned}$$

电阻为  $R = 3.14 \times 10^{-2} \times 247 \text{ } \Omega = 7.76 \text{ } \Omega$

电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{9.86 \times 10^{-4}}{7.76} \text{ s} = 1.27 \times 10^{-4} \text{ s}$$

(2) 线圈中电流增长规律为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

电流的增长率  $\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

通电开始时,  $t=0$ ,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{2}{9.86 \times 10^{-4}} \text{ A/s} = 2.03 \times 10^3 \text{ A/s}$$

(3)  $t \rightarrow \infty$  时, 电流达到稳定, 其值为

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2}{7.76} \text{ A} = 0.258 \text{ A}$$

(4) 稳定后线圈中所储存的磁能

$$W_m = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2} \times 9.86 \times 10^{-4} \times 0.258^2 \text{ J} = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$$

磁能密度为

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{W_m}{V} = \frac{W_m}{\frac{1}{4}\pi d^2 l} = \frac{4W_m}{\pi d^2 l} \\ &= \frac{4 \times 3.28 \times 10^{-5}}{3.14 \times 0.01^2 \times 0.10} \text{ J/m}^3 = 4.18 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

**【12-23】** 一个自感为 0.5 mH、电阻为 0.01  $\Omega$  的线圈串接到内阻可以忽略、电动势为 12 V 的电源上。问电流在电键接通多长时间达到稳定值的 90%? 这时, 在线圈中储存了多少磁能? 到此时电源共消耗了多少能量? 求此电路的时间常数。要使这电路中的电流达到与稳定值差 0.1% 时, 需经过几个“时间常数”的时间?

解 电键接通后, 线圈中电流增长规律为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

式中  $I_0$  是电流的稳定值。由此方程解得

$$t = \frac{L}{R} \ln \frac{1}{1 - I/I_0} = \frac{0.5 \times 10^{-3}}{0.01} \ln \frac{1}{1 - 0.9} \text{ s} = 0.115 \text{ s}$$

这时线圈中储存的磁能为

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L(0.9I_0)^2 = \frac{1}{2} L \left( 0.9 \frac{\mathcal{E}}{R} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 0.5 \times 10^{-3} \times \left( 0.9 \times \frac{12}{0.01} \right)^2 \text{ J} = 291.6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

到此时电源消耗的能量是

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^t \mathcal{E} I dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^t (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[ t + \frac{L}{R} (e^{-\frac{R}{L}t} - 1) \right] \\
 &= \frac{12^2}{0.01} \left[ 0.115 + \frac{0.5 \times 10^{-3}}{0.01} \left( e^{-\frac{0.01}{0.5 \times 10^{-3}} \times 0.115} - 1 \right) \right] \text{ J} \\
 &= 1\,008 \text{ J}
 \end{aligned}$$

时间常数  $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5 \times 10^{-3}}{0.01} \text{ s} = 0.05 \text{ s}$

$$\frac{t}{\tau} = -\ln\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = -\ln\left(\frac{1}{1\,000}\right) = 6.9$$

即

$$t = 6.9\tau$$

**【12-24】** 自感为  $2.0 \text{ H}$ 、电阻为  $10 \Omega$  的线圈,突然连接到电动势  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$ 、内阻不计的电池组上。在接通  $0.1 \text{ s}$  时,试求:(1)磁场中储存能量的增加率;(2)线圈中产生的焦耳热功率;(3)电池组放出的电功率。

解 (1) 磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2$$

磁场能量增加率

$$\begin{aligned}
 \frac{dW_m}{dt} &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{R}{L}t} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \\
 &= \frac{100^2}{10} e^{-\frac{10}{2} \times 0.1} (1 - e^{-\frac{10}{2} \times 0.1}) \text{ J/s} = 238 \text{ J/s}
 \end{aligned}$$

(2) 线圈中的焦耳热功率

$$P_R = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2 = \frac{100^2}{10} (1 - e^{-\frac{10}{2} \times 0.1})^2 \text{ W} = 152 \text{ W}$$

(3) 电池组放出的电功率

$$P = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{100^2}{10}(1 - e^{-\frac{10}{2} \times 0.1}) \text{ W} = 390 \text{ W}$$

显然,  $P = P_R + \frac{dW_m}{dt}$ , 符合能量守恒定律。

**【12-25】** 一个  $10 \mu\text{F}$  的电容器充电到  $100 \text{ V}$  后, 通过电阻  $R = 10 \text{ k}\Omega$  放电。试求: (1) 刚开始时的电流; (2) 电荷量减少一半所需的时间; (3) 能量减少一半所需的时间。

解 (1) 刚开始时的放电电流

$$I_{\max} = \frac{U_C}{R} = \frac{100}{10 \times 10^3} \text{ A} = 0.01 \text{ A}$$

(2) 电容器放电时, 电容器电荷量变化规律为

$$q = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}$$

电荷量减少一半所需时间为

$$t = -RC \ln \frac{q}{q_{\max}} = -10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6} \ln \frac{1}{2} \text{ s} = 0.07 \text{ s}$$

(3) 电容器能量为

$$W = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2C}q_{\max}^2 e^{-\frac{2t}{RC}} = W_{\max} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

能量减少一半所需时间

$$t = -\frac{RC}{2} \ln \frac{W}{W_{\max}} = -\frac{10 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-6}}{2} \ln \frac{1}{2} \text{ s} = 0.035 \text{ s}$$

**【12-26】** 电阻为  $3.0 \times 10^6 \Omega$  的电阻器、电容为  $1.0 \mu\text{F}$  的电容器以及电动势为  $4.0 \text{ V}$  的电源串联成一电路。试求在这电路接通后  $1.0 \text{ s}$  时下列各量: (1) 电容器上电荷量增加的速率; (2) 电容器内储藏能量的速率; (3) 电阻器上产生焦耳热的功率; (4) 电源所供给的功率。

解 (1) 充电时, 电容器上电荷量变化规律为

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

时间常数  $\tau = RC = 3.0 \times 10^6 \times 1.0 \times 10^{-6} \text{ s} = 3.0 \text{ s}$

电荷量增加的速率

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{4.0}{3.0 \times 10^6} e^{-\frac{1.0}{3.0}} \text{ C/s} = 9.5 \times 10^{-7} \text{ C/s}$$

(2) 电容器内储藏的能量

$$W = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})^2$$

能量的增长速率

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{C \mathcal{E}^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{4.0^2}{3.0 \times 10^6} e^{-\frac{1.0}{3.0}} \times (1 - e^{-\frac{1.0}{3.0}}) \text{ W} = 1.1 \times 10^{-6} \text{ W} \end{aligned}$$

(3) 充电时电流变化规律为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电阻器上产生焦耳热的功率

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{4.0^2}{3.0 \times 10^6} e^{-\frac{2 \times 1.0}{3.0}} \text{ W} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ W}$$

(4) 电源所供给的功率为

$$P' = I \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{4.0^2}{3.0 \times 10^6} e^{-\frac{1.0}{3.0}} \text{ W} = 3.8 \times 10^{-6} \text{ W}$$

$P'$  是电容器能量增长速率和电阻消耗的功率之和。

**【12-27】** 有一段 10 号铜线, 直径为 2.54 mm, 单位长度的电阻为  $3.28 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ , 在这铜线上载有 10 A 的电流, 试计算:

(1) 铜线表面处的磁能密度有多大? (2) 该处的电能密度是多少?

解 (1) 铜线表面处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$$

铜线表面处的磁能密度

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 d^2} \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 10^2}{2 \times 3.14^2 \times (2.54 \times 10^{-3})^2} \text{ J/m}^3 = 0.99 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

(2) 铜线中电流密度  $j = \frac{I}{S}$

铜线电导率  $\gamma = \frac{l}{RS}$

铜线的电场强度  $E = \frac{j}{\gamma} = I \left( \frac{R}{l} \right)$

铜线电能密度

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 I^2 \left( \frac{R}{l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^2 \times (3.28 \times 10^{-3})^2 \text{ J/m}^3 \\ &= 4.8 \times 10^{-15} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

**【12-28】** 一根长直导线, 其  $\mu \approx \mu_0$ , 载有电流  $I$ , 已知电流均匀分布在导线的横截面上。试证: 单位长度导线内所储存的磁能为  $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$ 。

证 在导线内取半径为  $r$ 、厚为  $dr$ , 与导线共轴的单位长度的圆柱形薄壳。薄壳上磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

式中  $R$  是导线半径。薄壳处磁能密度

$$\omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

薄壳体积  $dV = 2\pi r dr$

薄壳中的磁能  $dW_m = \omega_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} r^3 dr$

单位长度导线内所储存的磁能

$$W_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

# 第十三章 电磁场和电磁波

## 知 识 要 点

### 1. 位移电流

位移电流密度 
$$j_d = \frac{dD}{dt}$$

位移电流 
$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi_D}{dt}$$

### 2. 麦克斯韦方程组

积分形式 
$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

微分形式 
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

### 3. 电磁场的能量、质量和动量

电磁能量密度 
$$w = \frac{1}{2}(DE + BH)$$

单位体积的场的质量  $m = \frac{1}{2C^2}(DE + BH)$

单位体积的电磁场(平面电磁波中)的动量

$$p = \frac{\tau w}{c}$$

#### 4. 电磁波的性质

$E$  和  $H$  在量值上的关系  $\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$

电磁波的速度  $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

电磁场的总能量体密度  $w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$

坡印廷矢量(能流密度矢量)  $S = E \times H$

## 思考题解答

**【13-1】** 什么叫做位移电流?什么叫做全电流?位移电流和传导电流有什么不同?位移电流和位移电流密度的表达式是怎样得到的?

答 位移电流就是变化的电场;由自由电荷的定向移动形成的电流称为传导电流。位移电流和传导电流合在一起称为全电流;位移电流和传导电流在本质上是不同的,只是在激发磁场方面等效。另外,传导电流产生焦耳热,位移电流则不会;位移电流和位移电流密度的表达式是利用电荷守恒定律和高斯定理得到的,其中还利用了电流的定义式。

**【13-2】** 位移电流密度的方向是否与电位移  $D$  的方向平行?

答 不一定。充电时,平行板电容器两极板间  $j_d$  与  $D$  的方向平行;而放电时,  $j_d$  与  $D$  的方向相反。

**【13-3】** 电容器极板间的位移电流与连接极板的导线中的电流大小相等,然而在极板间的磁场越靠近轴线中心越弱,而传导电流的磁场越靠近导线越强,为什么?

答 设有一传导电流沿无限长圆柱形直导线流动,并且电流均匀分布于导线的横截面上。若导线的半径为 $a$ ,则由安培环路定理可得电流在导线内、外产生的磁场大小分别为 $B_{\text{内}} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$ 和 $B_{\text{外}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , $r$ 是场点到导线轴线的距离。可见,在导线外面,越靠近导线磁场越强;但在导线(电流)内部,越靠近轴线磁场越弱。类似地,位移电流分布在极板间,极板间一点的磁场类似于上述无限长载流圆柱形直导线在其内部产生的磁场,所以越靠近轴线中心磁场越弱。参见习题13-5。

**【13-4】** 试分析麦克斯韦方程组的不对称性,并说明这种不对称性的物理内容。

答 麦克斯韦方程组中的头两个方程是不对称的,第一个方程表明电荷是电场的场源,而第二个方程则表明磁场是无源的,不存在像激发电场的电荷一样能在空间激发磁场的所谓“磁荷”(或磁单极子)。后两个方程也有不对称的地方。第三个方程表明 $H$ 的环流与自由电荷的宏观定向移动所形成的电流有关,第四个方程中,左边是 $E$ 的环流,右边却并没有出现由自由“磁荷”的宏观定向移动所产生的“磁流”。

**【13-5】** 静电场中的高斯定理 $\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \iiint_V \rho dV$ 和用于真空中电磁场时的高斯定理 $\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \iiint_V \rho dV$ 在形式上是相同的,但理解上述两式时有何区别?

答 在静电场的高斯定理中,电场 $E$ 是静电场;而用于真空中电磁场时的高斯定理中的电场 $E$ 不但包含由静电荷所激发的静电场,还包括由变化的磁场所激发的涡旋电场,是两者的矢量和。

**【13-6】** 对于真空中恒定电流的磁场, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ,对于一般的电磁场又看到 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 这个式子,在这两种情况下,对 $B$

矢量的理解上有哪些区别?

答 在第一种情况下,  $B$  仅仅是由恒定传导电流产生的。对一般的电磁场,  $B$  既包含传导电流产生的磁场, 也包含位移电流所激发的磁场。

## 习题解答

【13-1】 试证明平行板电容器中的位移电流可写为

$$I_d = C \frac{dU}{dt}$$

式中  $C$  是电容器的电容,  $U$  是两极板间的电势差。如果不是平行板电容器, 上式可以应用吗? 如果是圆柱形电容器, 其中的位移电流密度和平板电容器时有何不同?

证 本题用到了位移电流的表达式和高斯定理。

对于平行板电容器有

$$D = \sigma$$

电容器平行于极板的截面上的电位移通量为

$$\Psi = DS = \sigma S = q = CU$$

因此, 电容器中的位移电流

$$I_d = \frac{d\Psi}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

可以证明, 上式对于圆柱形电容器和球形电容器也是适用的。

对于平行板电容器, 其中的位移电流密度

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

方向垂直于极板, 不同点的位移电流密度的大小和方向都相同。

对于圆柱形电容器, 其中的电位移

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

位移电流密度

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\lambda}{dt}$$

方向垂直于圆柱轴线,而且到轴线距离不同的点位移电流密度不同。

**【13-2】** 在一对巨大的圆形极板(电容  $C=1.0 \times 10^{-12}$  F)上,加上频率为 50 Hz、峰值为 174 000 V 的交变电压,计算极板间位移电流的最大值。

解 设极板间交变电压为

$$U = U_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi)$$

如上题所述,电容器中位移电流

$$\begin{aligned} I_d &= C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt} U_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi) \\ &= 2\pi\nu C U_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi) \end{aligned}$$

位移电流最大值

$$\begin{aligned} I_{d\max} &= 2\pi\nu C U_0 \\ &= 2 \times 3.14 \times 50 \times 1.0 \times 10^{-12} \times 1.74 \times 10^5 \text{ A} \\ &= 5.46 \times 10^{-5} \text{ A} \end{aligned}$$

**【13-3】** 有一点电荷  $q$ ,以速度  $v$  ( $v \ll c$ ) 作匀速运动。试从

$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Psi_D}{dt}$  出发,计算离电荷  $r$  处的磁场强度。

解 本题的关键在于选择一个合适的回路,使得公式左边的积分和右边的通量  $\Psi_D$  易于计算。

在图 13-1 中,点  $P$  与点电荷相距为  $r$ 。从点  $P$  向沿电荷速度方向的直线作垂线,垂足为  $O$ 。以  $O$  为圆心, $OP$  ( $OP=R$ ) 为半径作一圆,圆平面与电荷速度方向垂直。

由于对称性,圆上各点磁场强度相等,方向与圆相切,以此圆为路径的积分

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R H = 2\pi r H \sin\alpha$$

可以证明,在圆平面上的  $E$  通量为

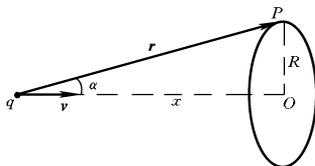


图 13-1

$$\Psi_E = \frac{q}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

电位移通量则为

$$\Psi = \frac{q}{2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{q}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{dx}{dt}$$

因为  $(x^2 + R^2)^{1/2} = r$ ,  $\frac{R}{r} = \sin\alpha$ ,  $-\frac{dx}{dt} = v$ , 所以

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{qv}{2r} \sin^2\alpha$$

根据

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\Psi}{dt}$$

可得

$$2\pi r H \sin\alpha = \frac{qv}{2r} \sin^2\alpha$$

所以

$$H = \frac{qv}{4\pi r^2} \sin\alpha$$

矢量式为

$$\mathbf{H} = \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

**【13-4】** 当导线中载有交变电流时,证明:其中传导电流密度  $j$  与位移电流密度  $\frac{\partial D}{\partial t}$  的大小比为  $\gamma/(\omega\epsilon_0)$ 。式中  $\gamma$  是导线的电导率,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  是交变电流的频率,导线的  $\epsilon_r \approx 1$ 。已知铜导线的  $\gamma = 5.7$

$\times 10^7 \text{ S/m}$ , 分别计算当铜导线中载有频率分别为(1)50 Hz 和(2) $3.0 \times 10^{11} \text{ Hz}$ 的交变电流时, 传导电流密度和位移电流密度大小的比值。

解 当导线中有交变电流时, 其中传导电流密度可以表示为

$$j = j_0 \sin \omega t$$

导线中电场强度

$$E = \frac{j}{\gamma} = \frac{j_0}{\gamma} \sin \omega t$$

电位移

$$D = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 j_0}{\gamma} \sin \omega t$$

位移电流密度

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 j_0 \omega}{\gamma} \cos \omega t$$

它的幅值

$$j_{d0} = \frac{\epsilon_0 j_0 \omega}{\gamma}$$

传导电流密度与位移电流密度幅值之比为

$$\frac{j_0}{j_{d0}} = \frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega} = \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0 f}$$

(1) 当  $f = 50 \text{ Hz}$  时,

$$\frac{j_0}{j_{d0}} = \frac{5.7 \times 10^7 \times 2 \times 9 \times 10^9}{50} = 2.1 \times 10^{16}$$

(2) 当  $f = 3.0 \times 10^{11} \text{ Hz}$  时,

$$\frac{j_0}{j_{d0}} = \frac{5.7 \times 10^7 \times 2 \times 9 \times 10^9}{3.0 \times 10^{11}} = 3.4 \times 10^6$$

**【13-5】** 有一平板电容器, 极板是半径为  $R$  的圆形板, 现将两极板由中心处用长直引线连接到一远处的交变电源上, 使两极板上的电荷量按规律  $q = q_0 \sin \omega t$  变化。略去极板边缘效应, 试求两极板间任一点的磁场强度。

解 本题运用了位移电流的概念和安培环路定理。

当电容器极板上电荷量为  $q$  时, 电荷面密度

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

这时电容器内的电位移  $D = \sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ 。位移电流密度

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{dq}{dt}$$

设两极板间点  $P$  到电容器轴线的距离为  $r$ 。过点  $P$  以  $r$  为半径作与电容器共轴的圆(图 13-2)。由于对称性, 圆上各点磁场强度相等, 设为  $H$ , 则以此圆为积分路径时,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H$$

此圆所包围的电流为

$$I_d = j_d \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} \frac{dq}{dt}$$

因为  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_d$

所以  $2\pi r H = \frac{r^2}{R^2} \frac{dq}{dt}$

点  $P$  的磁场强度为

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt} = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{d}{dt} q_0 \sin \omega t = \frac{r \omega q_0}{2\pi R^2} \cos \omega t$$

**【13-6】** 为了在一个  $1.0 \mu\text{F}$  的电容器内产生  $1.0 \text{ A}$  的瞬时位移电流, 加在电容器上的电压变化率应有多大?

解 本题利用了全电流的连续性。

电容器上的电压变化率

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C}$$

$I$  是导线上的传导电流。忽略电容器外的位移电流, 由于全电流的连续性, 电容器内的位移电流  $I_d = I$ 。因此

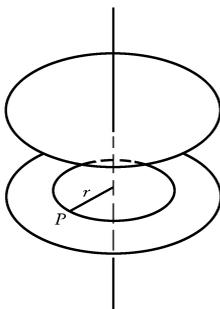


图 13-2

$$\frac{dU}{dt} = \frac{I_d}{C} = \frac{1.0}{1.0 \times 10^{-6}} \text{ V/s} = 1.0 \times 10^6 \text{ V/s}$$

**【13-7】** 一圆形极板电容器,极板的面积为 $S$ ,两极板的间距为 $d$ 。一根长为 $d$ 的极细的导线在极板间沿轴线与两板相连,已知细导线的电阻为 $R$ ,两极板外接交变电压 $U=U_0\sin\omega t$ ,求:(1)细导线中的电流;(2)通过电容器的位移电流;(3)通过极板外接线中的电流;(4)极板间离轴线为 $r$ 处的磁场强度。设 $r$ 小于极板的半径。

解 本题用到了全电流的概念,以及位移电流和传导电流在激发磁场方面的等效性。

(1) 细导线中的电流为

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R}\sin\omega t$$

(2) 电容器内的位移电流密度为

$$j_d = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

于是,可得位移电流

$$\begin{aligned} I_d &= S j_d = \frac{d(S\sigma)}{dt} = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{d}{dt}(U_0 \sin\omega t) = \frac{\epsilon_0 S \omega U_0}{d} \cos\omega t \end{aligned}$$

(3) 通过极板外接线中的电流是全电流,故

$$I_{\text{全}} = I + I_d = \frac{U_0}{R}\sin\omega t + \frac{\epsilon_0 S \omega U_0}{d}\cos\omega t$$

(4) 极板间的磁场是传导电流的磁场与位移电流的磁场的叠加。传导电流在离轴线 $r$ 处的磁场强度

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{U_0}{2\pi r R}\sin\omega t$$

在题13-5中已导出位移电流的磁场强度

$$H_2 = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt} = \frac{rC}{2S} \frac{dU}{dt} = \frac{r}{2S} \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{dU}{dt}$$

$$= \frac{\epsilon_0 r}{2d} \frac{d}{dt} U_0 \sin \omega t = \frac{\epsilon_0 r U_0 \omega}{2d} \cos \omega t$$

因此,极板间离轴线为  $r$  处的磁场强度为

$$H = H_1 + H_2 = \frac{U_0}{2\pi r R} \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 r U_0 \omega}{2d} \cos \omega t$$

**【13-8】** 如图13-3所示,一个平面电磁波在真空中传播,设某点的电场强度为

$$E_x = 900 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ V/m}$$

试求这一点的磁场强度表达式。又在该点前方  $a$  m 处和该点后方  $a$  m 处(均沿  $Oz$  轴计算),电场强度和磁场强度的表达式各如何?

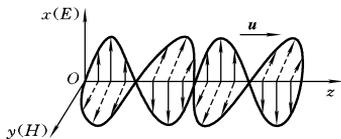


图 13-3

**解** 本题用到了  $E$  和  $H$  在量值上的关系式。根据关系式

$$\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H \text{ 有}$$

$$\sqrt{\epsilon_0} E_x = \sqrt{\mu_0} H_y$$

可得

$$\begin{aligned} H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x \\ &= \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{12.56 \times 10^{-7}}} \times 900 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ A/m} \\ &= 2.39 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{6} \right) \text{ A/m} \end{aligned}$$

在该点前方  $a$  m 处,电场强度的表达式为

$$E_x = 900 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ V/m}$$

磁场强度的表达式为

$$H_y = 2.39 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ A/m}$$

在该点后方  $a$  m 处, 电场强度的表达式为

$$E_x = 900 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ V/m}$$

磁场强度的表达式为

$$H_y = 2.39 \cos \left[ 2\pi\nu \left( t + \frac{a}{c} \right) + \frac{\pi}{6} \right] \text{ A/m}$$

**【13-9】** 一个沿  $-Oz$  方向传播的平面电磁波, 其电场强度沿  $Ox$  方向, 传播速度为  $c$ 。在空间某点的电场强度为

$$E_x = 300 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ V/m}$$

试求在同一点的磁场强度表达式, 并用图表示电场强度、磁场强度和传播速度之间的相互关系。

解 本题运用了  $E$  和  $H$  的量值关系式及  $E$ 、 $H$  与传播速度之间的关系。

电磁波沿  $-Oz$  方向传播, 根据  $E$ 、 $H$  和  $c$  的右手螺旋方向关系及  $\sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\epsilon_0} E$  的数量关系, 可得

$$\begin{aligned} H_y &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x = -\sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{12.56 \times 10^{-7}}} \times 300 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ A/m} \\ &= -0.8 \cos \left( 2\pi\nu t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ A/m} \end{aligned}$$

电场强度、磁场强度和传播速度之间的相互关系如图 13-4 所示。

**【13-10】** 在地球上测得太阳的平均能流密度  $\bar{S} = 1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 。设太阳到地球的平均距离约为  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 。试求太阳的总辐射能量。若太阳光垂直照射某物体表面而被全部反射, 试求该物

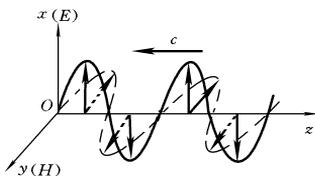


图 13-4

体所受的辐射压力。

解 太阳的总辐射功率为

$$\begin{aligned} P &= 4\pi r^2 \bar{S} = 4 \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{11})^2 \times 1.4 \times 10^3 \text{ W} \\ &= 3.96 \times 10^{26} \text{ W} = 3.96 \times 10^{23} \text{ kW} \end{aligned}$$

太阳光被物体全部反射时,物体所受的辐射压强为

$$p = \frac{2\bar{S}}{c} = \frac{2 \times 1.4 \times 10^3}{3 \times 10^8} \text{ Pa} = 9.3 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

即物体每平方米面积上所受的辐射压力为  $9.3 \times 10^{-6} \text{ N}$ 。

**【13-11】** 有一氩-氟激光管,它所发射的激光功率为  $10 \text{ mW}$ 。设发出的激光为圆柱形光束,圆柱截面的直径为  $2 \text{ mm}$ 。试求激光的最大电场强度  $E_0$  和磁感应强度  $B_0$ 。

解 激光平均辐射强度

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{\bar{P}}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4\bar{P}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{3.14 \times (2 \times 10^{-3})^2} \text{ W/m}^2 \\ &= 3.2 \times 10^3 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

$\bar{S}$  与最大电场强度  $E_0$  的关系为

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E_0 &= \sqrt{\frac{2\bar{S}}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.2 \times 10^3}{8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^8}} \text{ V/m} \\ &= 1.55 \times 10^3 \text{ V/m} \end{aligned}$$

电磁波中, 电场强度和磁感应强度的关系为

$$E = uB$$

因而, 在真空中, 最大电场强度和磁感应强度的关系为

$$E_0 = cB_0$$

故 
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.55 \times 10^3}{3 \times 10^8} \text{ T} = 5.17 \times 10^{-6} \text{ T}$$

**【13-12】** 一雷达发射装置发出一圆锥形的辐射束, 而辐射能量是均匀分布于圆锥内各方向的。圆锥顶的立体角为  $0.01 \text{ sr}$ , 距发射装置  $1 \text{ km}$  处的电场强度的最大值  $E_0$  是  $10 \text{ V/m}$ 。试求: (1) 磁场强度的最大值  $H_0$ 。(2) 这圆锥体内的最大辐射功率。

解 本题用到了电磁波中  $E$  与  $H$  的量值关系式, 以及坡印廷矢量等概念。

(1) 根据电磁波中电场强度与磁场强度的关系

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$$

可得在真空(或空气)中, 电场强度和磁场强度的最大值的关系为

$$\sqrt{\epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$$

因此

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{12.56 \times 10^{-7}}} \times 10 \text{ A/m} \\ &= 2.65 \times 10^{-2} \text{ A/m} \end{aligned}$$

(2) 最大辐射强度

$$S_0 = E_0 H_0$$

在距发射装置  $r$  处, 圆锥形电磁波波面的面积为

$$A = r^2 \Omega$$

式中  $\Omega$  为波面对波源所张的立体角。因此, 圆锥体内电磁波的最大辐射功率为

$$\begin{aligned} P_0 &= S_0 A = E_0 H_0 r^2 \Omega \\ &= 10 \times 2.65 \times 10^{-2} \times (1 \times 10^3)^2 \times 0.01 \text{ W} \\ &= 2.65 \times 10^3 \text{ W} = 2.65 \text{ kW} \end{aligned}$$

【13-13】一束平面单色光 $SO$ 从折射率为 $n_1$ 的介质射向折射率为 $n_2$ 的介质( $n_2 > n_1$ ),在分界面上的入射点 $O$ 处分解成一束反射光 $OR$ 和一束透射光 $OT$ ,已知入射光的 $E$ 矢量垂直于入射面,反射光和透射光的 $H$ 矢量均在入射面内,方向如图13-5所示。试标出反射光和透射光的 $E$ 矢量方向。

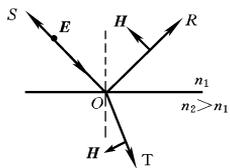


图 13-5

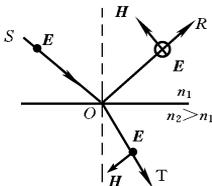


图 13-6

解 反射光和透射光的 $E$ 矢量方向如图13-6所示。

# 第十四章 波动光学

## 知识要点

### 第一部分 光的干涉

#### 1. 杨氏双缝干涉

明暗条纹的位置

$$x = \begin{cases} \pm k \frac{D\lambda}{d} & \text{明纹} \\ \pm (2k + 1) \frac{D\lambda}{2d} & \text{暗纹} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

#### 2. 光程

(1) 定义 光波在介质中经历的几何路程  $x$  与该介质折射率  $n$  之积  $nx$ 。

(2) 光程差  $\delta$  与相位差的关系

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (\lambda \text{ 为光在真空中的波长})$$

(3) 两相干光束干涉产生的明暗纹条件

$$\delta = \begin{cases} k\lambda & \text{明纹} \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(4) 半波损失相当于  $\frac{\lambda}{2}$  的附加光程差。

(5) 透镜不引起附加光程差。

### 3. 薄膜干涉

(1) 等倾干涉 薄膜厚度均匀。以相同倾角入射的光经薄膜两个表面反射后发生的干涉情况相同。干涉条纹是同心圆环。明纹和暗纹的光程差条件是

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'$$

$$= \begin{cases} k\lambda & (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{明纹} \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗纹} \end{cases}$$

(2) 等厚干涉 薄膜厚度不均匀。光线垂直入射,薄膜等厚处干涉情况相同。明纹和暗纹出现的条件是

$$\delta = 2ne + \delta' = \begin{cases} k\lambda & (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{明纹} \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗纹} \end{cases}$$

劈尖干涉相邻明纹(或暗纹)间的距离

$$l = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

牛顿环中明环和暗环的半径

$$r = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2k - 1)R\lambda}{2}} & (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{明环} \\ \sqrt{kR\lambda} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗环} \end{cases}$$

### 4. 迈克耳孙干涉仪

视场中明纹移动的条数 $N$ 与平面镜 $M_1$ 平移的距离 $d$ 的关系:

$$d = N \frac{\lambda}{2}$$

## 第二部分 光的衍射

### 1. 单缝的夫琅禾费衍射

衍射图样:明暗相间的平行条纹。

明纹和暗纹的条件:

$$a\sin\theta = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{暗纹} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{明纹} \end{cases} \quad (k=1,2,3,\dots)$$

$$-\lambda < a\sin\theta < \lambda \quad \text{中央明纹}$$

中央明纹的半角宽度  $\Delta\theta_0 = \arcsin \frac{\lambda}{a}$ 。当  $\Delta\theta_0$  很小时,  $\Delta\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a}$ 。

## 2. 圆孔的夫琅禾费衍射

第一级暗环的衍射角满足下式:

$$\sin\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

爱里斑的半径  $R = 1.22 \frac{\lambda}{d} f$

最小分辨角  $\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$

最小分辨角的倒数称为光学仪器的分辨率。

## 3. 光栅衍射

单色光垂直入射时,明纹条件是

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \quad (k=0,1,2,\dots)$$

缺级条件  $k = \frac{a+b}{a}k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$

光栅的分辨本领  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$

## 4. X射线的衍射

布拉格公式  $2d\sin\theta = k\lambda \quad (k=1,2,3,\dots)$

# 第三部分 光的偏振

## 1. 光的偏振状态

光有五种偏振状态:自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光和圆偏振光。

## 2. 马吕斯定律

$$I_2 = I_1 \cos^2\alpha$$

自然光通过起偏器后,强度减为 $\frac{1}{2}I_0$ 。

### 3. 布儒斯特定律

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

当 $i = i_B$ 时,反射光与折射光相互垂直。

### 4. 双折射现象

光射入晶体后分为两束: o 光和 e 光。o 光和 e 光都是线偏振光。利用 $1/4$ 波片可从线偏振光得到椭圆偏振光或圆偏振光。 $1/4$ 波片的厚度是

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}$$

### 5. 偏振光的干涉

利用晶片(或人工双折射材料)和检偏器可以使偏振光分成振动方向相同、相位差恒定的相干光而发生干涉。这两束相干光的相位差是

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_o - n_e) + \pi$$

其中 $d$ 是晶片厚度。

## 思考题解答

### 第一部分 光的干涉

**【14-1】** 为什么两个独立的同频率的普通光源发出的光波叠加时不能得到光的干涉图样?

答 要得到光的干涉图样,两列光波必须满足振动频率相同、振动方向一致、相位差恒定的条件。普通光源发出的光是由光源中各个分子或原子发出的波列组成的,而这些波列之间没有固定的相位联系。因此,来自两个独立的普通光源的光波,即使频率相同,

振动方向相同,它们的相位差也不可能保持恒定,因而得不到干涉图样。

**【14-2】** 试讨论两个相干点光源 $S_1$ 和 $S_2$ 在如下的观察屏上产生的干涉条纹:(1)屏的位置垂直于 $S_1$ 和 $S_2$ 的连线;(2)屏的位置垂直于 $S_1$ 和 $S_2$ 连线的中垂线。

答 (1) 此时,屏上相位差相同的点分布在以屏和连线的交点为圆心的圆周上。因此,干涉条纹是以交点为圆心的同心圆环,离圆心越远,光程差变化越慢,所以条纹呈中间密、边缘疏的分布。若屏恰好平分 $S_1$ 和 $S_2$ 的连线,则当 $S_1$ 和 $S_2$ 同相时,屏上光程差处处为零,屏上亮度均匀,无干涉条纹出现;当 $S_1$ 和 $S_2$ 反相时,屏上处处干涉相消,无光强分布。

(2) 此时屏上的干涉条纹是如图14-1所示的双曲线。若设两光源之间的距离为 $2a$ ,光源到屏的垂直距离为 $h$ ,波长为 $\lambda$ ,分别过 $S_1$ 和 $S_2$ 作屏的垂线,以 $S_1$ 和 $S_2$ 在屏上的垂足的连线为 $x$ 轴,连线的中点为原点 $O$ ,在屏上建立直角坐标系 $Oxy$ ,则可得第 $k$ 级明纹满足 $k\lambda = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + h^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + h^2}$ ,化简可知,此为双曲线方程(当 $a > \frac{k\lambda}{2}$ 时),据此作图可得到类似图14-1所示的

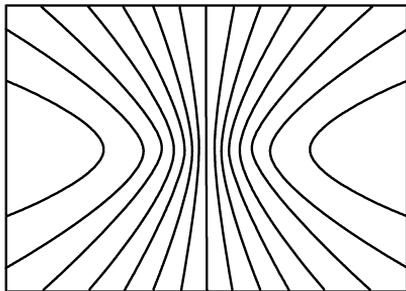


图 14-1

干涉图样。

**【14-3】** 在如图 14-2 所示的杨氏双缝实验中,试描述在下列情况下干涉条纹如何变化:(1)当两缝的间距增大时;(2)当双缝的宽度增大时;(3)当缝光源  $S$  平行于双缝移动时;(4)当缝光源  $S$  向双缝屏移近时;(5)当缝光源  $S$  逐渐增宽时。

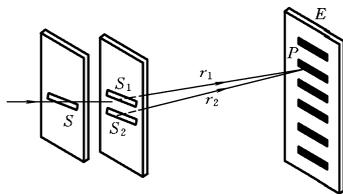


图 14-2

答 (1) 根据杨氏双缝干涉明纹位置的表达式可知,此时条纹向中间收缩,条纹间距变小。

(2) 条纹的位置和间距不变,明纹亮度增加。

(3)  $S$  移动会导致  $S_1$  和  $S_2$  产生相位差,使得条纹反向移动。

(4) 干涉条纹没有变化。

(5) 条纹位置不变,明纹亮度增加。

**【14-4】** 在杨氏双缝实验中,如有一条狭缝稍稍加宽一些,屏幕上的干涉条纹有什么变化?如把其中一条狭缝遮住,将发生什么现象?

答 若将一条缝稍稍加宽,条纹的位置不变,明纹更亮,原暗纹处的光强不再为零,明纹和暗纹的反差减小,条纹不如原来清晰。如把其中一条缝遮住,干涉条纹消失,单缝衍射的中央极大占满屏幕,光强基本上均匀分布。

**【14-5】** 为什么刚吹起的肥皂泡(很小时)看不到有什么彩色?当肥皂泡吹大到一定程度时,会看到有彩色,而且这些彩色随着肥皂泡的增大而改变。试解释此现象。当肥皂泡大到将要破裂

时,将呈现什么颜色?为什么?

答 在吹肥皂泡的过程中,肥皂膜的厚度逐渐减小。刚开始时膜的厚度较大,当这个厚度使得膜的两个面上的反射光的光程差大于光的相干长度时,两相应的波列不能重叠,因而无干涉发生,看不到干涉条纹。当膜的厚度随肥皂泡的增大而减小到一定程度时,就会出现干涉现象。因自然光中光的波长是连续分布的,各波长的明纹连在一起,这样就出现了彩色。在肥皂泡变大时,其上各点处的膜厚变小,该处的光程差变小,使得在该处出现的明纹的波长相应地变小,所以可以观察到颜色的变化;当膜厚使得光程差小于一个波长时,就观察不到干涉现象了。故在肥皂泡大到将要破裂时将呈紫色,因为可见光中紫色的波长最短。

**【14-6】** 为什么窗玻璃在日光照射下我们观察不到干涉条纹?

答 因玻璃的厚度较大,使得入射光在上下两个表面处产生的两束反射光的光程差大于相干长度,因而观察不到干涉条纹。

**【14-7】** 在如图 14-3 所示的劈尖干涉实验中,如果把上面的一块玻璃向上平移,干涉条纹将怎样变化?如果向右平移,干涉条纹又怎样变化?如果将它绕接触线转动,使劈尖角增大,干涉条纹又将怎样变化?

答 设第  $k$  级明条纹处劈尖厚度为  $e_k$ ,则有  $2e_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ 。当  $k$  一定时,此厚度  $e_k$  确定不变。当上面一块玻璃向上平移时,厚度为  $e_k$  的位置向左移动,所以第  $k$  级明条纹向左移动,即干涉条纹向左平移。当上面的玻璃向右平移时,厚度为  $e_k$  的位置也随之右移,所以条纹向右平移。当上面的玻璃绕接触线转动,使劈尖角增大时,厚度为  $e_k$  的位置显然向左移动,故干涉条纹向左平移。由于相邻明条纹之间的距离  $l$  满足关系式  $l \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$ ,其中  $\theta$  为劈尖角。所以,劈尖角增大时,条纹变密。

**【14-8】** 在牛顿环实验装置中,如果平玻璃由冕牌玻璃( $n =$

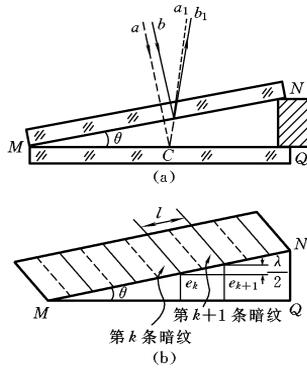


图 14-3

1.50)和火石玻璃( $n=1.75$ )组成。透镜用冕牌玻璃制成,而透镜与平玻璃间充满二硫化碳( $n=1.62$ ),如图14-4所示。试说明在单色光垂直照射下反射光的干涉图样是怎样的,并大致将其画出来。

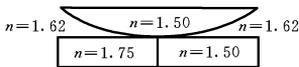


图 14-4

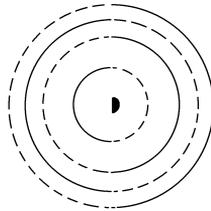


图 14-5

答 光在左半部分空气膜的上下表面反射时都有半波损失,而在右半部分只在空气膜的上表面处反射时有半波损失。设左半部分第 $k$ 级明纹处空气膜的厚度为 $e_k$ ,右半部分第 $k$ 级暗纹处膜厚为 $e_k'$ ,则有 $2e_k = k\lambda$ 和 $2e_k' + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ,可见,左边的第 $k$ 级明

纹与右边的第  $k$  级暗纹形成一个完整的圆。据此可大致画出干涉图样,如图 14-5 所示。

**【14-9】** 牛顿环和迈克耳孙干涉仪实验中的圆条纹均是从中心向外由疏到密的明、暗相间的同心圆,试说明这两种干涉条纹不同之处,若增加空气薄膜的厚度,这两种条纹将如何变化?为什么?

答 牛顿环是等厚干涉条纹,条纹半径越大,干涉级次越高。迈克耳孙干涉仪实验中的圆条纹是等倾干涉条纹,条纹半径越大,干涉级次越低。当空气膜的厚度增加时,前者向中心收缩,不断“陷入”中心;后者向外扩展,不断从中心“冒出”。

**【14-10】** 在加工透镜时,经常利用牛顿环快速检测其表面曲率是否合格。将标准件(玻璃验规)G 覆盖在待测工件L 之上,如图 14-6 所示。如果光圈(牛顿环的俗称)太多,工件不合格,需要进一步研磨,究竟磨边缘还是磨中央,有经验的工人师傅只要将验规轻轻下压,观察光圈的变化,试问他是怎样判断的。

答 若工件L 的中央与标准件G 接触不紧密,则其中会存在空气膜,产生等厚干涉条纹。向下轻压验规时,膜变薄,圆条纹向中心收缩,此时需要磨边缘;若工件的中央与标准件吻合,但接触面太小,也不合格,此时向下轻压验规时,膜变薄,圆条纹向外扩展,表明需要磨中央。

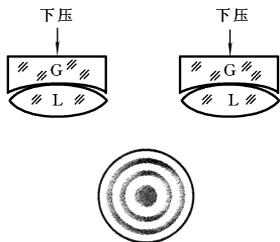


图 14-6

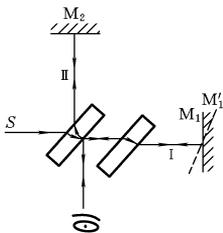


图 14-7

**【14-11】** 用迈克耳孙干涉仪观测等厚条纹时,若使其中一平面镜 $M_2$ 固定(图14-7),而另一平面镜 $M_1$ 绕垂直于纸面的轴线转到 $M'_1$ 的位置,问在转动过程中将看到什么现象?如果将平面镜 $M_1$ 换成半径为 $R$ 的球面镜(凸面镜或凹面镜),球心恰在光线 $I$ 上,球面镜的像的顶点与 $M_2$ 接触,此时将观察到什么现象?

答 在 $M_1$ 转动到 $M'_1$ 位置的过程中,干涉条纹向右平移,且条纹变密。将平面镜 $M_1$ 换成半径为 $R$ 的球面镜后,将形成类似牛顿环的等厚干涉条纹,但中心点是明纹。

## 第二部分 光的衍射

**【14-12】** (1)为什么无线电波能绕过建筑物,而光波却不能?  
(2)为什么隔着山可以听到中波段的电台广播,而电视广播却很容易被高大建筑物挡住?

答 (1)当障碍物的大小与波的波长相近时,波可以绕过障碍物传播,即发生衍射。无线电波波长与建筑物相近,所以能绕过建筑物。而光波波长远小于建筑物的尺寸,不能发生衍射。

(2)中波波长范围是 $200\sim 3\,000\text{ m}$ ,与山的尺度相近,所以绕过山发生衍射。电视广播所用的波长在米波段,即 $1\sim 10\text{ m}$ 的范围,高大建筑物的尺寸比米波段的波长大得多,所以不能发生衍射。

**【14-13】** 一人持一狭缝屏紧贴眼睛,通过狭缝注视远处的一平行于狭缝的线状白光光源,这人看到的衍射图样是菲涅耳衍射还是夫琅禾费衍射?

答 由于光源在很远处,且其波阵面为以线状白光光源为轴的圆柱面,所以入射光可视为平行光。又因为屏紧贴眼睛,观测屏实际上就在视网膜上,晶状体起凸镜的作用,使得衍射光也是平行光。所以,看到的是夫琅禾费衍射图样。

**【14-14】** 在如图14-8所示的单缝夫琅禾费衍射实验中,试讨论下列情况衍射图样的变化:(1)狭缝变窄;(2)入射光的波长增

大；(3)单缝垂直于透镜光轴上下平移；(4)线光源  $S$  垂直透射光轴上下平移；(5)单缝沿透镜光轴向观察屏平移。

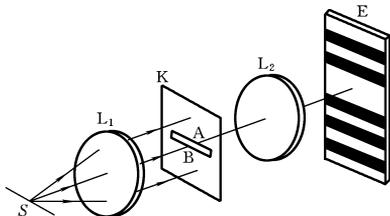


图 14-8

答 (1) 条纹变宽,且向上下两边移动。

(2) 条纹变宽,且向上下两边移动。

(3) 衍射图样不变化。

(4) 线光源  $S$  垂直透射光轴上下平移时,入射到单缝上的平行光将是斜入射的,这会造成衍射图样作反向平移。参见习题 14-17。

(5) 衍射图样没有变化。

**【14-15】** 在双缝实验中,怎样区分双缝干涉和双缝衍射?

答 当缝宽很小时,单缝衍射的中央明纹基本上占满观测屏,两束单缝衍射光在屏上的叠加就是两个中央明纹的相干叠加,干涉条纹近于等强度分布,这时可认为发生的是双缝干涉;当缝宽不很小时,屏上将出现单缝衍射的多级明纹,这两套单缝衍射的明纹在屏上相干叠加时形成的干涉条纹强度有明显变化,这时可认为是双缝衍射。参见原教材图 14-46。

**【14-16】** 光栅衍射图样的强度分布具有哪些特征?这些特征分别与光栅的哪些参数有关?

答 光栅衍射图样由细窄而明亮且分得很开的主明纹和其间由许多次明纹形成的相当弱的背景构成。增加缝数  $N$  可使主明纹

变细。次明纹很弱,强度仅为主明纹的4%左右。光栅衍射图样中存在缺级现象,所缺级次由缝宽度 $a$ 和光栅常量 $d$ 决定。 $d$ 越小,光谱散得越开, $N$ 越大,分辨率越高。

**【14-17】** 如果光栅中透光狭缝的宽度与不透光部分的宽度相等,将出现怎样的衍射图样?

答 光栅衍射中存在缺级,所缺级数  $k = \frac{a+b}{a}k'$  ( $k' = 1, 2, 3, \dots$ ), 当  $a = b$  时,  $k = 2k'$ , 故除中央明纹外,所有偶级数的主明纹都不出现。

**【14-18】** 光栅衍射光谱和棱镜光谱有何不同?

答 棱镜对白光的色散光谱是由于不同颜色的光在棱镜中的传播速度不相等,也就是折射率不一样而形成的。波长越长,偏折越小,偏向角也就越小,所以红光比紫光的偏向角小。光栅光谱则是由于衍射造成的。对给定的级数,波长越短,衍射角越小,所以紫光比红光的衍射角小,而且对零级无色散,级次越高,光谱展得越开。

**【14-19】** 图 14-9 所示的是单色光通过三种不同衍射屏在屏幕上呈现的夫琅禾费衍射强度分布曲线。试指出这些图所对应的

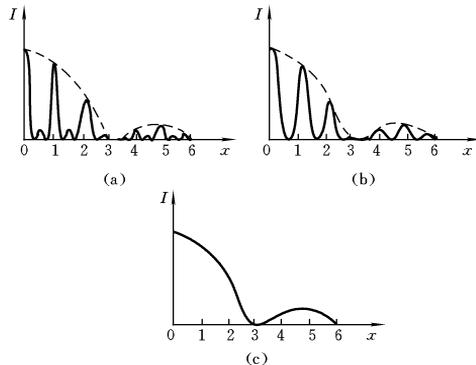


图 14-9

各是什么衍射屏?说明图14-19(a)和(b)所示两衍射屏的有关参数的相对大小。

答 图14-9(a)中有次明纹出现,所以衍射屏是光栅。第3级主明纹缺级,表明光栅常量与缝宽之比为3。图14-9(b)中的图样所对应的是双缝衍射屏,且缝间距是缝宽的2倍。图14-9(c)所对应的是单缝衍射屏。

### 第三部分 光的偏振

**【14-20】** 如图14-10所示,  $M$  为起振偏振器,  $N$  为检偏振器。今以单色自然光垂直入射。若保持  $M$  不动, 将  $N$  绕  $OO'$  轴转动  $360^\circ$ , 转动过程中通过  $N$  的光强怎样变化? 若保持  $N$  不动, 将  $M$  绕  $OO'$  轴转动  $360^\circ$ , 则转动过程中通过  $N$  的光强又怎样变化? 试定性画出光强对转动角度的关系曲线。

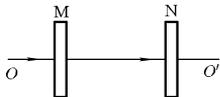


图 14-10

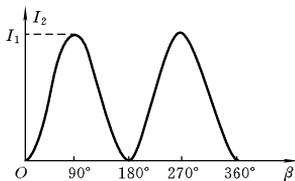


图 14-11

答 通过  $M$  的光为线偏振光, 光强  $I_1$  不变, 始终是入射的自然光强度的一半。通过  $N$  的光也是线偏振光, 设此光强为  $I_2$ , 则由马吕定律有  $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$ , 其中  $\alpha$  是  $I_1$  的偏振方向与  $N$  的偏振化方向之间的夹角。对题中所给的两种情况, 通过  $N$  的光强变化相同, 即光强经历由零到最大, 再由最大到零的变化。设开始时光强为零, 则可得光强对转动角度  $\beta$  的关系曲线大致如图 14-11 所示。

**【14-21】** 上题中, 若使  $M$  和  $N$  的偏振化方向相互垂直, 则通过  $N$  后的光强为零。若在  $M$  和  $N$  之间插入另一偏振片  $C$ , 它的方向和  $M$  及  $N$  均不相同, 则通过  $N$  后的光强如何? 若将偏振片  $C$  转动

一周, 试定性画出光强对转动角度的关系曲线。

答 若入射的自然光的光强为  $I_0$ , 则通过 N 后的光强  $I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$ , 其中  $\alpha$  是 C 和 M 的偏振化方向之间的夹角。设 C 开始时与 M 的偏振化方向一致, 则通过 N 的光强  $I$  与转动角度  $\beta$  的关系为

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \beta \sin^2 \beta = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\beta$$

根据此式, 当  $\beta$  由  $0$  变到  $360^\circ$  时, 可得  $I-\beta$  曲线如图 14-12 所示。

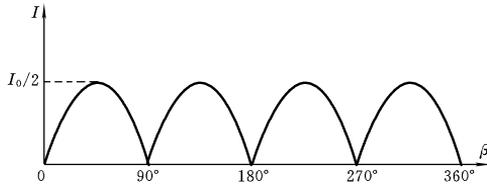


图 14-12

**【14-22】** 在如图 14-13 所示的各种情况中, 以非偏振光或偏振光由空气入射到水面时, 折射光和反射光各属于什么性质的光?

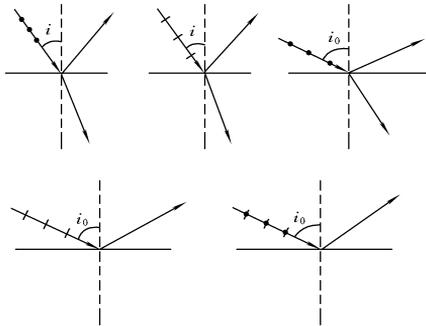


图 14-13

在图 14-13 中所示的折射光线和反射光线上用点和短线把振动方向表示出来。把不存在的反射线或折射线划掉。图中  $i_0 = \arctan n$ ,  $n$  为水的折射率,  $i \neq i_0$ 。

答 折射光线与反射光线的振动方向如图 14-14 所示。

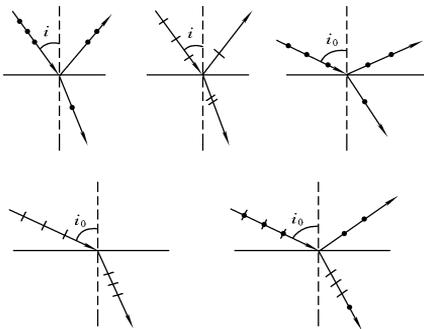


图 14-14

**【14-23】** 若从一池静水的表面上反射出来的太阳光是完全偏振的,那么太阳在地平线之上的仰角是多大?这种反射光的电矢量的振动方向如何?

答 水的折射率为 1.33。当入射角为布儒斯特角时反射光是完全偏振的。此时有

$$\tan i_B = 1.33/1 = 1.33$$

故  $i_B = 53.06^\circ$ , 即太阳在地平线之上的仰角是  $53.06^\circ$ 。反射光的电矢量的振动方向与入射面垂直。

**【14-24】** 据测金星表面反射的光是部分偏振光,这样可以推测金星表面覆有一层具有镜面特性的物质,例如水或由水滴、冰晶等组成的小云层。其根据是什么?

答 根据是,理论和实验观测指出,自然光在反射和折射时反射光和折射光都将成为部分偏振光。

**【14-25】** 如图14-15所示,一束自然光入射到方解石晶体上,经折射后透射出晶体。对这晶体来说,试问:(1)哪一束是 $o$ 光?哪一束是 $e$ 光?为什么?(2) $a$ 、 $b$ 两束光处于什么偏振态?分别画出它们的光矢量振动方向。(3)在入射光束中放一偏振片,并旋转此偏振片,出射光强有何变化?

答 (1) 图14-15中的入射光与折射光均与光轴垂直,此时 $e$ 光的折射率就是 $e$ 光的主折射率 $n_e$ ,而 $n_e = 1.4864$ , $o$ 光的折射率 $n_o = 1.6584$ 。显然 $n_e < n_o$ 。若空气的折射率记为 $n$ ,则由折射定律有 $n \sin i = n_o \sin \gamma_o$ 和 $n \sin i = n_e \sin \gamma_e$ ,故 $\gamma_e > \gamma_o$ ,说明 $e$ 光的折射角比 $o$ 光的大,所以 $a$ 为 $o$ 光, $b$ 为 $e$ 光。

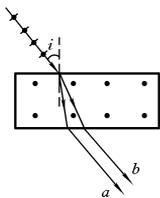


图 14-15

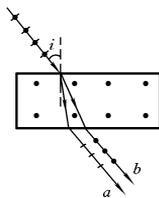


图 14-16

(2)  $a$ 、 $b$ 两光束都是线偏振光。 $a$ 光的振动方向垂直于它对应的主平面; $e$ 光的振动方向平行于它对应的主平面,如图14-16所示。

(3) 若在入射光中放一偏振片并旋转,则入射光成为偏振方向不断变化的线偏振光,其偏振方向与光轴之间的夹角 $\alpha$ 作 $360^\circ$ 的变化。若设入射线偏振光的振幅 $A$ , $o$ 光的振幅 $A_o$ 和 $e$ 光的振幅 $A_e$ ,则有如下关系: $A_o = A \cos \alpha$ , $A_e = A \sin \alpha$ 。由此知, $o$ 光和 $e$ 光的光强作周期性变化,且当其中一个最大时,另一个就为零。

**【14-26】** 一光束可能是(a)自然光;(b)线偏振光;(c)部分偏振光。如何用实验来决定这束光是哪一种光。

答 可用检偏器来区分。通过检偏器观察这束光,当绕光的传播方向转动检偏器时,(a)光强无变化者为自然光;(b)光强有大小

的变化,并且有消光(光强变为零)现象的是线偏振光;(c)光强有大小的变化,但无消光现象的是部分偏振光。

**【14-27】** 如图14-17所示的菲涅耳-阿喇果实验。在杨氏双缝干涉实验中, $S$ 为单色自然光源。(1)如果在 $S$ 后放置偏振片 $P_0$ (如图14-17,但没有 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ ),干涉条纹有何变化?(2)如果在 $S_1$ 和 $S_2$ 处再分别加偏振片 $P_1$ 和 $P_2$ ,它们的偏振化方向互相垂直,且都与 $P_0$ 的偏振化方向成 $45^\circ$ 角,屏上的光强分布如何?(3)在屏前再放偏振片 $P_3$ ,其偏振化方向与 $P_0$ 平行,这时屏上的干涉条纹与(1)中的情形有何不同?(4)在(3)中的布置,如将 $P_0$ 转过 $90^\circ$ 而偏振化方向与 $P_3$ 垂直,干涉条纹有何变化?(5)在(3)中的布置,将 $P_0$ 撤去,屏上的光强分布情况如何?

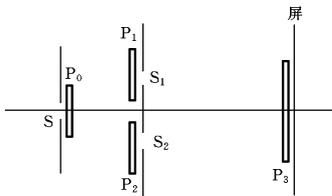


图 14-17

答 (1) 加上偏振片 $P_0$ 后,入射光光强减半,但由 $S_1$ 和 $S_2$ 发出的光振动方向相同,仍为相干光。故条纹位置不变,明纹亮度减小一半。

(2) 此时由 $S_1$ 、 $S_2$ 发出来的光振动方向相互垂直,不再是相干光,观测屏上干涉条纹消失,一片明亮。

(3) 这时干涉条纹的位置与(1)中的相同,光强减为(1)中的一半。

(4) 此时通过 $P_3$ 的两个光矢量始终是与振动方向相反的,屏上处处光强为零。

(5) 条纹位置不变,光强增加一倍。

## 习题解答

## 第一部分 光的干涉

**【14-1】** 在双缝干涉实验中,两缝的间距为  $0.6 \text{ mm}$ ,照亮狭缝  $S$  的光源是汞弧灯加上绿色滤光片。在  $2.5 \text{ m}$  远处的屏幕上出现干涉条纹,测得相邻两明条纹中心的距离为  $2.2 \text{ mm}$ 。试计算入射光的波长。

解 本题是利用双缝干涉测量光的波长的一个例子。

已知  $d=0.6 \text{ mm}=0.6 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $D=2.5 \text{ m}$ ,  $\Delta x=2.2 \text{ mm}=2.2 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。相邻两明条纹中心间距

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d}$$

因此入射光波长为

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{d\Delta x}{D} = \frac{0.6 \times 10^{-3} \times 2.2 \times 10^{-3}}{2.5} \text{ m} \\ &= 5.28 \times 10^{-7} \text{ m} = 528 \text{ nm}\end{aligned}$$

**【14-2】** 用很薄的云母片 ( $n=1.58$ ) 覆盖在双缝实验中的一条缝上,这时屏幕上的零级明条纹移到原来的第七级明条纹的位置上。如果入射光波长为  $550 \text{ nm}$ ,试问此云母片的厚度为多少?

解 在未加云母片时零级明条纹处的光程差为零,在一条缝上加云母片后该处光程差增加。零级明条纹每移动一个相邻条纹间距的距离,原中心零级明纹处光程差就增加了一个波长。因此,若设云母片厚度为  $t$ ,则在一条缝上覆盖该云母片后,由该缝发出的光的光程将增加  $nt-t=(n-1)t$ 。正是这一附加光程差使零级明条纹移到原来的第七级明条纹处,故

$$(n-1)t = 7\lambda$$

已知  $n=1.58$ ,  $\lambda=550 \text{ nm}$ ,云母片厚度为

$$t = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} \text{ m}$$

$$= 6.6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6.6 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

需要指出的是,全部干涉条纹均随零级明纹平移。

**【14-3】** 用白光垂直入射到间距为  $d=0.25 \text{ mm}$  的双缝上,距离缝  $1.0 \text{ m}$  处放置屏幕。求第二级干涉条纹中紫光和红光极大点的间距(白光的波长范围是  $400\sim 760 \text{ nm}$ )。

解 对于波长为  $\lambda$  的光波,第二级明条纹的位置

$$x = \frac{2D\lambda}{d}$$

因此,对于波长分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的光波,它们的第二级明条纹的间距

$$\Delta x = \frac{2D(\lambda_2 - \lambda_1)}{d}$$

这里  $\lambda_1 = 400 \text{ nm} = 400 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 760 \text{ nm} = 760 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $d = 0.25 \text{ mm} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $D = 1.0 \text{ m}$ , 故

$$\Delta x = \frac{2 \times 1.0 \times (760 \times 10^{-9} - 400 \times 10^{-9})}{0.25 \times 10^{-3}} \text{ m}$$

$$= 2.88 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.88 \text{ mm}$$

**【14-4】** 一射望远镜的天线设在湖岸上,距湖面高度为  $h$  (图14-18),对岸地平线上方有一恒星正在升起,恒星发出波长为  $\lambda$  的电磁波。试求当天线测得第一级干涉极大时恒星所在的角位置  $\theta$ 。(提示:作为洛埃德镜干涉分析。)

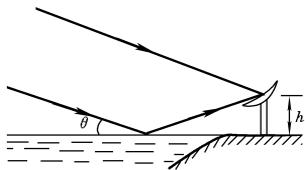


图 14-18

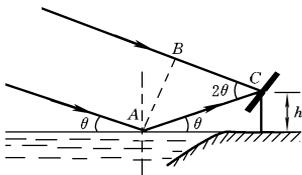


图 14-19

解 在本题中要注意电磁波在水面反射时有半波损失。

从图14-19中可以看出,经湖面反射到达C点的波与直接到达C点的波所走过的路程之差为

$$r_2 - r_1 = AC - BC$$

其中

$$AC = \frac{h}{\sin\theta}, \quad BC = AC\cos 2\theta = \frac{h\cos 2\theta}{\sin\theta}$$

因此

$$r_2 - r_1 = \frac{h}{\sin\theta} - \frac{h\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{\sin\theta}(1 - \cos 2\theta) = 2h\sin\theta$$

因电磁波被湖水反射时的半波损失,反射波和直射波的波程差为

$$\delta = r_2 - r_1 + \lambda/2 = 2h\sin\theta + \lambda/2$$

两束波在C点产生第一级干涉极大时,它们的波程差 $\delta = \lambda$ ,即

$$2h\sin\theta + \lambda/2 = \lambda, \quad 4h\sin\theta = \lambda$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{4h}$$

因为 $\theta$ 很小,近似有 $\sin\theta = \theta$ ,于是得到

$$\theta = \frac{\lambda}{4h}$$

**【14-5】** 一平面单色光波垂直照射在厚度均匀的薄油膜上。油膜覆盖在玻璃板上。所用单色光的波长可以连续变化,观察到500 nm与700 nm这两个波长的光在反射中消失。油的折射率为1.30,玻璃的折射率为1.50,试求油膜的厚度。

解 注意,由于油的折射率比空气的大,玻璃的折射率比油的大,光在油膜的上下两个表面反射时都有半波损失,因此,从油膜上下两个表面反射的两束光的光程差为 $\delta = 2ne$ ,其中 $n$ 和 $e$ 分别是油膜的折射率和厚度。设入射光的波长为 $\lambda$ ,则当 $\lambda$ 满足下式时反射光消失,

$$\delta = 2ne = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

若  $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_2 > \lambda_1)$  是使反射光消失的两个相邻的波长, 则有

$$2ne = (2k + 1) \frac{\lambda_1}{2} \quad (1)$$

$$2ne = [2(k - 1) + 1] \frac{\lambda_2}{2} = (2k - 1) \frac{\lambda_2}{2} \quad (2)$$

由①、②两式可得

$$e = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2n(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{500 \times 700}{2 \times 1.30 \times (700 - 500)} \text{ nm} = 673 \text{ nm}$$

**【14-6】** 白光垂直照射在空气中厚度为  $0.40 \mu\text{m}$  的玻璃片上。玻璃的折射率为  $1.50$ 。试问在可见光范围内 ( $\lambda = 400 \sim 700 \text{ nm}$ ), 哪些波长的光在反射中增强? 哪些波长的光在透射中增强?

解 注意透射光中一部分是直接透射的, 一部分是经过两次从玻璃到空气的界面反射后才透射的。更多次反射后才透射的光很弱, 不必考虑。

反射增强的光的波长  $\lambda$  满足

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

于是  $\lambda = \frac{4ne}{2k-1} = \frac{4 \times 1.50 \times 0.40 \times 10^3}{2k-1} \text{ nm} = \frac{2.4 \times 10^3}{2k-1} \text{ nm}$

只有  $k=3$  使得  $\lambda$  在可见光范围内, 即

$$\lambda = \frac{2.4 \times 10^3}{2 \times 3 - 1} \text{ nm} = 480 \text{ nm}$$

透射中增强的光满足

$$2ne = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

故  $\lambda = \frac{2ne}{k} = \frac{2 \times 1.50 \times 0.40 \times 10^3}{k} \text{ nm} = \frac{1.2 \times 10^3}{k} \text{ nm}$

只有  $k=2$  或  $k=3$  时,  $\lambda$  才在可见光范围内, 故

$$\lambda_1 = \frac{1.2 \times 10^3}{2} \text{ nm} = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = \frac{1.2 \times 10^3}{3} \text{ nm} = 400 \text{ nm}$$

**【14-7】** 白光垂直照射到空气中一厚度为  $380 \text{ nm}$  的肥皂水膜上。试问水膜表面呈现什么颜色? (肥皂水的折射率看作  $1.33$ 。)

解 注意,入射光第一次发生反射时有半波损失,第二次在肥皂水膜内部被反射回膜内时无半波损失,此反射光再透射出来与第一次的反射光叠加。水膜表面呈现的颜色是反射光中相干加强的各种波长(颜色)的光混合的结果。

从肥皂水膜两表面反射的两条光线的光程差  $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$ 。当

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

时反射光最强,由此可得相应波长

$$\lambda = \frac{4ne}{2k - 1}$$

已知  $n = 1.33$ ,  $e = 380 \text{ nm}$ 。在白光波长范围内,  $k$  只能取  $k_1 = 2$  和  $k_2 = 3$  两个值,相应的波长为

$$\lambda_1 = \frac{4 \times 1.33 \times 380}{2 \times 2 - 1} \text{ nm} = 674 \text{ nm} (\text{红色})$$

$$\lambda_2 = \frac{4 \times 1.33 \times 380}{2 \times 3 - 1} \text{ nm} = 404 \text{ nm} (\text{紫色})$$

所以水膜表面呈现紫红色。

**【14-8】** 彩色电视发射机常用三基色的分光系统,如图 14-20 所示,系用镀膜方法进行分光。现要求红光的波长为  $600 \text{ nm}$ ,绿光的波长为  $520 \text{ nm}$ 。设基片玻璃的折射率  $n = 1.50$ ,膜材料的折射率  $n' = 2.12$ 。试求膜的厚度。

解 光束射至薄膜表面被反射时有半波损失,从薄膜射至与玻璃的分界面被反射时没有半波损失。

设入射角为  $i$ ,膜的厚度为  $e$ ,两束反射光叠加时的光程差

$$\delta = 2e \sqrt{n'^2 - \sin^2 i} + \lambda/2$$

而  $n' = 2.12$ ,  $i = 45^\circ$ ,故

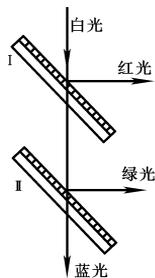


图 14-20

$$\delta = 2e \sqrt{2.12^2 - \sin^2 45^\circ} + \lambda/2 = 4e + \lambda/2$$

设反射光为红光的薄膜厚度为  $e_1$ , 则

$$4e_1 + \lambda_1/2 = \lambda_1$$

$$e_1 = \lambda_1/8 = 600/8 \text{ nm} = 75 \text{ nm}$$

设反射光为绿光的薄膜厚度为  $e_2$ , 则

$$4e_2 + \lambda_2/2 = \lambda_2$$

$$e_2 = \lambda_2/8 = 520/8 \text{ nm} = 65 \text{ nm}$$

以上得出的是  $e_1$  和  $e_2$  的最小值, 当

$$4e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

即 
$$e = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{4} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

时, 均能满足分光要求。膜的厚度的确定还要综合考虑其他因素。

**【14-9】** 利用劈尖的等厚干涉条纹可以测量很小的角度。今在很薄的劈尖玻璃板上, 垂直地射入波长为 589.3 nm 的钠光, 相邻暗条纹间距离为 5.0 mm, 玻璃的折射率为 1.52, 求此劈尖的夹角。

解 注意考虑半波损失。

设玻璃折射率为  $n$ , 在厚度为  $e$  处, 两束反射光叠加时的光程差

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

与第  $k$  级暗条纹相应的厚度  $e_k$  满足下式

$$2ne_k + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$e_k = \frac{k\lambda}{2n}$$

因此

$$l \sin \theta = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n}$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2nl} = \frac{589.3 \times 10^{-9}}{2 \times 1.52 \times 5.0 \times 10^{-3}} = 3.88 \times 10^{-5}$$

劈尖夹角 
$$\theta \approx \sin \theta = 3.88 \times 10^{-5} \text{ rad} = 8''$$

**【14-10】** 一玻璃劈尖的末端的厚度为 0.05 mm, 折射率为 1.50。今用波长为 700 nm 的平行单色光以 30° 的入射角射到劈尖的上表面, 试求: (1) 在玻璃劈尖的上表面所形成的干涉条纹数目; (2) 若以尺寸完全相同的由两玻璃片形成的空气劈尖代替上述的玻璃劈尖, 则所产生的条纹数目又为多少?

解 (1) 当平行单色光以入射角  $i$  射到劈尖表面上时, 上下两个表面的反射光的光程差为

$$\delta = 2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \lambda/2$$

当  $2e \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \lambda/2 = k\lambda$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 时, 厚度为  $e$  处出现明条纹。由此得

$$e = \frac{(2k-1)\lambda}{4 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$

又  $n_2=1.50, n_1=1, i=30^\circ, \lambda=700 \text{ nm}$ , 故

$$e = \frac{(2k-1) \times 700}{4 \sqrt{1.50^2 - \sin^2 30^\circ}} \text{ nm} = 123.7(2k-1) \text{ nm}$$

相邻两明条纹对应的劈尖的厚度差

$$\begin{aligned} e_{k+1} - e_k &= \{123.7[2(k+1)-1] - 123.7(2k-1)\} \text{ nm} \\ &= 247.4 \text{ nm} \end{aligned}$$

设相邻两明条纹间距为  $l$ , 劈尖角度为  $\theta$ , 劈尖长度为  $L$ , 末端厚度为  $d$ , 则

$$e_{k+1} - e_k = l \sin \theta = ld/L$$

劈尖表面上干涉条纹数

$$N = \frac{L}{l} = \frac{d}{e_{k+1} - e_k}$$

而  $d=0.05 \text{ mm}=5 \times 10^4 \text{ nm}$ , 故

$$N = \frac{5 \times 10^4}{247.4} = 202 \text{ (条)}$$

(2) 若为空气劈尖, 则  $n_1=1.50, n_2=1$ , 明条纹处厚度

$$e = \frac{(2k-1)\lambda}{4\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} = \frac{(2k-1) \times 700}{4\sqrt{1 - 1.50^2 \times \sin^2 30^\circ}} \text{ nm}$$

$$= 264.6(2k-1) \text{ nm}$$

$$e_{k+1} - e_k = \{264.6[2(k+1) - 1] - 264.6(2k-1)\} \text{ nm} \\ = 529.2 \text{ nm}$$

$$N = \frac{d}{e_{k+1} - e_k} = \frac{5 \times 10^4}{529.2} = 94 \text{ (条)}$$

**【14-11】** 使用单色光来观察牛顿环,测得某一明环的直径为 3.00 mm,在它外面第五个明环的直径为 4.60 mm,所用平凸透镜的曲率半径为 1.03 m,求此单色光的波长。

解 此题用到了牛顿环的明环半径公式

$$r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

此处  $R = 1.03 \text{ m}$ ,  $r_k = 3.00/2 \text{ mm} = 1.50 \text{ mm}$ ,  $r_{k+5} = 4.60/2 \text{ mm} = 2.30 \text{ mm}$ , 则

$$r_k^2 = \frac{(2k-1)R\lambda}{2}, \quad r_{k+5}^2 = \frac{[2(k+5)-1]R\lambda}{2}$$

故

$$r_{k+5}^2 - r_k^2 = 5R\lambda$$

$$\lambda = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5R} = \frac{(2.30 \times 10^{-3})^2 - (1.50 \times 10^{-3})^2}{5 \times 1.03} \text{ m} = 590 \text{ nm}$$

**【14-12】** 一柱面平凹透镜 A, 曲率半径为  $R$ , 放在平玻璃片 B 上, 如图 14-21 所示。现用波长为  $\lambda$  的单色平行光自上方垂直往下照射, 观察 A 和 B 间空气薄膜的反射光的干涉条纹。如空气膜的最大厚度  $d = 2\lambda$ , (1) 分析干涉条纹的特点(形状、分布、级次高低), 作图表示明条纹; (2) 求明条纹距中心线的距离  $r$ ; (3) 共能看到多少条明条纹? (4) 若将玻

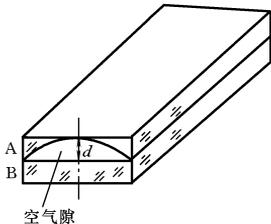


图 14-21

璃片B向下平移,条纹如何移动?若玻璃片移动了 $\lambda/4$ ,问这时还能看到几条明条纹?

解 这是一个等厚干涉问题,注意计入半波损失。

(1) 在空气薄膜内,在平行于柱面平凹透镜棱边的同一直线处,空气厚度相等,从膜的两个表面反射的光束的光程差相等,因而干涉图样是平行于透镜棱边的明暗相间的条纹。图样的中心位于空气膜最大厚度处,是一暗条纹,它的两侧对称地分布着同级的明条纹或暗条纹,而在图样的边缘是两条暗条纹。由于中心处空气膜厚度最大,故条纹的级别由中心向两侧逐次降低。干涉图样如图14-22(a)所示。

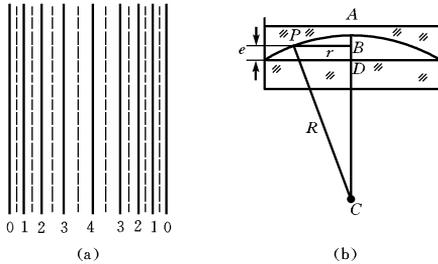


图 14-22

(2) 如图14-22(b)所示,空气薄膜厚度为 $e$ 处( $P$ 点)到中心线的距离以 $r$ 表示, $AD=d$ ,则

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - CB^2 = R^2 - (R - AB)^2 \\ &= R^2 - [R - (AD - BD)]^2 = R^2 - [R - (d - e)]^2 \end{aligned}$$

忽略 $(d-e)^2$ 项,则

$$r^2 = 2R(d - e)$$

由此解得

$$e = d - \frac{r^2}{2R}$$

在空气膜厚度为 $e$ 处,两束反射光的光程差

$$\delta = 2e + \lambda/2 = 2d - r^2/R + \lambda/2$$

当

$$2d - r^2/R + \lambda/2 = k\lambda$$

时出现明条纹,因此明条纹到中心线的距离为

$$r = \sqrt{2Rd - (k - 1/2)R\lambda}$$

(3) 由于存在半波损失,在平凹透镜与平玻璃片接触处( $e=0$ )出现第零级暗条纹。在最大厚度处, $e=d=2\lambda$ ,光程差

$$\delta = 2e + \lambda/2 = 2 \times 2\lambda + \lambda/2 = (4 + 1/2)\lambda$$

因此出现第4级暗条纹。相邻暗条纹之间存在一条明条纹,在中心暗条纹两侧各有4条明条纹,共8条明条纹。

(4) 将玻璃片下移,空气膜厚度增加,干涉条纹向两侧移动。若玻璃片向下移动 $\lambda/4$ ,各处空气膜厚度都增加了 $\lambda/4$ ,光程差则增加了 $\lambda/2$ ,原来的第 $k$ 级暗条纹处出现第 $(k+1)$ 级明条纹。因此,在边缘处是第1级明条纹,而在中心处是第5级明条纹,干涉图样上一共有9条明条纹。

**【14-13】** 如图14-23所示, $G_1$ 和 $G_2$ 是两块块规(块规是两个端面经过磨平抛光,达到相互平行的钢质长方体), $G_1$ 的长度是标准的, $G_2$ 是同规格待校准的复制品(两者的长度差在图中是夸大的)。 $G_1$ 和 $G_2$ 放置在平台上,用一块样板平玻璃T压住。(1)设垂直入射光的波长 $\lambda=589.3\text{ nm}$ , $G_1$ 与 $G_2$ 相隔 $d=5\text{ cm}$ ,T与 $G_1$ 以及T与 $G_2$ 间的干涉条纹的间隔都是 $0.5\text{ mm}$ 。试求 $G_1$ 与 $G_2$ 的长度

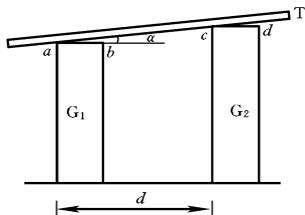


图 14-23

差。(2)如何判断 $G_1$ 、 $G_2$ 哪一块比较长一些?(3)如果T与 $G_1$ 间的干涉条纹的间距是0.5 mm,而T与 $G_2$ 间的干涉条纹的间距是0.3 mm,则说明了什么问题?

解  $G_1$ 和 $G_2$ 的上端面分别与T构成空气劈尖。

(1)若相邻明条纹间距为 $l$ ,则由公式

$$2l\sin\alpha = \lambda$$

可得

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{2l}$$

设两块规长度差为 $\Delta h$ ,则由图14-23可知

$$\tan\alpha = \frac{\Delta h}{d}$$

因 $\alpha$ 很小, $\tan\alpha \approx \sin\alpha$ ,可得

$$\frac{\Delta h}{d} = \frac{\lambda}{2l}$$

$$\Delta h = \frac{\lambda d}{2l} = \frac{589.3 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-2}}{2 \times 0.5 \times 10^{-3}} \text{ m}$$

$$= 2.95 \times 10^{-5} \text{ m} = 2.95 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

(2)在图14-23中,如果和 $a$ 点、 $c$ 点相应的条纹是暗条纹,则 $G_2$ 比较长一些;如果和 $b$ 点、 $d$ 点相应的条纹是暗条纹,则 $G_2$ 比较短一些。如果在极偶然的情况下,和 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 四点相应的条纹都是暗条纹,只需对两块规的距离稍作调整,即只会出现和 $a$ 、 $c$ 两点相应的暗条纹,或和 $b$ 、 $d$ 两点相应的暗条纹。

(3)根据公式 $2l\sin\alpha = \lambda$ 知,如果T与 $G_2$ 间干涉条纹的间距小于T与 $G_1$ 间干涉条纹的间距,即 $l_2 < l_1$ ,则 $\alpha_2 > \alpha_1$ ,说明 $G_2$ 的端面向右下方倾斜。

**【14-14】** 一实验装置如图14-24所示,一块平玻璃片上放一油滴。当油滴展开成油膜时,在单色光(波长 $\lambda = 600 \text{ nm}$ )垂直照射下,从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹(用读数显微镜观察),已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$ ,油膜的折射率 $n_2 = 1.20$ 。(1)当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 1.2 \mu\text{m}$ 时,描述所看到的

条纹情况。可以看到几条明条纹?明条纹所在处的油膜的厚度是多少?中心点的明暗如何?(2)当油膜继续摊展时,所看到的条纹情况将如何变化?中心点的情况如何变化?

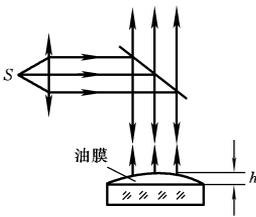


图 14-24

解 这是一个等厚干涉问题。

(1) 入射光在油膜上下两表面反射时都存在半波损失。在油膜厚度为  $e$  处,两反射光的光程差

$$\delta = 2n_2e$$

出现明暗条纹处的油膜厚度由下式决定

$$2n_2e = \begin{cases} k\lambda & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{明条纹} \\ (2k + 1) \frac{\lambda}{2} & (k = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{暗条纹} \end{cases}$$

由此可见,在油膜的边缘处( $e=0$ )出现第零级明条纹。随着厚度增加,出现级别依次提高的其他圆形明条纹,它们所在处的油膜厚度

$$e = \frac{k\lambda}{2n_2} = k \frac{600}{2 \times 1.2} \text{ nm} = 250k \text{ nm} = 0.25k \mu\text{m}$$

由此可得各级明纹所对应的油膜厚度为  $e_1=0.25 \mu\text{m}$ ,  $e_2=0.50 \mu\text{m}$ ,  $e_3=0.75 \mu\text{m}$ ,  $e_4=1.0 \mu\text{m}$ 。油膜最大厚度(即油膜中心处)  $h < 1.25 \mu\text{m}$ , 因此可以看到五条明条纹。可以算出,第4级暗条纹对应的油膜厚度为  $1.125 \mu\text{m}$ , 因此中心处不是最亮,也不是最暗,明暗程度介于两者之间。

(2) 油膜摊展时,最大厚度减小,明纹的最高级别降低,也就是明条纹数减少,条纹间隔增大;中心点逐渐变暗,在  $h=1.125 \mu\text{m}$  时最暗,以后逐渐变亮,在  $h=1 \mu\text{m}$  时最亮,以后又逐渐变暗,依此类推,直到油膜停止摊展,或在  $h < 0.125 \mu\text{m}$  后,中心点只变亮,不再变暗。

【14-15】 迈克耳孙干涉仪可用来测量单色光的波长,当  $M_2$

移动距离  $d=0.3220\text{ mm}$  时,测得某单色光的干涉条纹移过  $N=1204$  条,试求该单色光的波长。

解  $d$ 、 $N$  和光波波长  $\lambda$  存在如下关系

$$d = N\lambda/2$$

由此可得波长

$$\lambda = \frac{2d}{N} = \frac{2 \times 0.3220}{1204} \text{ mm} = 5.349 \times 10^{-4} \text{ mm} = 534.9 \text{ nm}$$

## 第二部分 光的衍射

**【14-16】** 有一单缝,宽  $a=0.10\text{ mm}$ ,在缝后放一焦距为  $50\text{ cm}$  的会聚透镜。用平行绿光( $\lambda=546.0\text{ nm}$ )垂直照射单缝,试求位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹及第二级明条纹的宽度。

解 中央明条纹的半角宽度

$$\Delta\theta_0 = \lambda/a$$

屏幕上中央明条纹宽度为

$$\begin{aligned} \Delta x_0 &= 2f\Delta\theta_0 = \frac{2f\lambda}{a} = \frac{2 \times 50 \times 10^{-2} \times 546.0 \times 10^{-9}}{0.10 \times 10^{-3}} \text{ m} \\ &= 546.0 \times 10^{-5} \text{ m} = 5.46 \text{ mm} \end{aligned}$$

第二级暗条纹满足  $a\sin\theta_2=2\lambda$

$$\theta_2 \text{ 很小,近似有} \quad \theta_2 = \frac{2\lambda}{a}$$

同理,第三级暗条纹的衍射角

$$\theta_3 = \frac{3\lambda}{a}$$

因此第二级明条纹的角宽度

$$\Delta\theta = \theta_3 - \theta_2 = \frac{3\lambda}{a} - \frac{2\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a}$$

屏幕上第二级明条纹的宽度为

$$\Delta x = f\Delta\theta = \frac{f\lambda}{a} = \frac{1}{2}\Delta x_0 = \frac{1}{2} \times 5.46 \text{ mm} = 2.73 \text{ mm}$$

**【14-17】** 波长为  $\lambda$  的单色平行光沿着与单缝衍射屏成  $\alpha$  角的方向入射到宽度为  $a$  的单狭缝上, 试求各级衍射极小的衍射角  $\theta$  值。

解 如图 14-25 所示, 当平行光入射到狭缝平面上时, 它们的相位是不相同的, 射到  $A$  点的光线 1 和射到  $B$  点的光线 2 相位差最大。用光程表示, 光线 1 的光程比光线 2 的光程多  $a \sin \alpha$ 。因此, 光线 2 和光线 1 的总的光程差为

$$\delta = a \sin \theta - a \sin \alpha$$

入射光还可以从上方斜射到单缝上, 因此, 上式可改写为

$$\delta = a \sin \theta \mp a \sin \alpha$$

当  $a \sin \theta \mp a \sin \alpha = k \lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

时, 屏幕上即出现暗条纹。由此可得各级衍射极小的衍射角为

$$\theta = \arcsin \left( \frac{k \lambda}{a} \pm \sin \alpha \right) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

**【14-18】** 用波长  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$  的混合光垂直照射单缝。在衍射图样中,  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级明条纹中心位置恰与  $\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗条纹中心位置重合。求  $k_1$  和  $k_2$ 。试问  $\lambda_1$  的暗条纹中心位置能否与  $\lambda_2$  的暗条纹中心位置重合?

解  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级明条纹满足

$$a \sin \theta = (2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2}$$

$\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗条纹满足

$$a \sin \theta = k_2 \lambda_2$$

因此

$$(2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} = k_2 \lambda_2$$

$$\frac{2k_1 + 1}{2k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{700}{400} = \frac{7}{4}$$

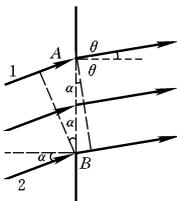


图 14-25

式中  $k_1, k_2$  都是正整数, 由此解得  $k_1=3, k_2=2$ 。虽然有更高的  $k_1$  和  $k_2$  的值满足此方程, 但高级别明条纹的亮度极弱, 因而是没有什么实际意义的。

设  $\lambda_1$  的第  $k_1$  级暗条纹中心与  $\lambda_2$  的第  $k_2$  级暗条纹中心重合, 则有

$$a \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{4}$$

即  $\lambda_1$  的第 7 级暗条纹中心可与  $\lambda_2$  的第 4 级暗条纹中心重合。

**【14-19】** 一光栅, 宽为 2.0 cm, 共有 6 000 条缝。如用钠光 (589.3 nm) 垂直入射, 在哪些角度出现光强极大?

解 光栅常量  $a+b = \frac{2.0 \times 10^{-2}}{6\,000} \text{ m} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ m}$

由光栅方程

$$(a+b) \sin \theta = k \lambda$$

得  $\sin \theta = \frac{k \lambda}{a+b} = k \frac{589.3 \times 10^{-9}}{3.33 \times 10^{-6}} = 0.177k$

各级主极大相应的角度如下:

$$k=0, \sin \theta=0, \theta=0$$

$$k=\pm 1, \sin \theta=\pm 0.177, \theta=\pm 10^\circ 11'$$

$$k=\pm 2, \sin \theta=\pm 0.177 \times 2 = \pm 0.354, \theta=\pm 20^\circ 42'$$

$$k=\pm 3, \sin \theta=\pm 0.177 \times 3 = \pm 0.531, \theta=\pm 32^\circ 2'$$

$$k=\pm 4, \sin \theta=\pm 0.177 \times 4 = \pm 0.708, \theta=\pm 45^\circ$$

$$k=\pm 5, \sin \theta=\pm 0.177 \times 5 = \pm 0.885, \theta=\pm 62^\circ 8'$$

**【14-20】** 已知一个每厘米刻有 4 000 条缝的光栅, 利用这个光栅可以产生多少个完整的可见光谱 ( $\lambda=400 \sim 760 \text{ nm}$ )?

解 此光栅的光栅常量

$$a+b = \frac{1}{4\,000} \text{ cm} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

依光栅方程

$$(a+b) \sin \theta = k \lambda$$

知光谱线的最高级别  $k < \frac{a+b}{\lambda}$

它与波长成反比,因此,完整的可见光谱的最高级别

$$k < \frac{a+b}{\lambda_{\max}}$$

$\lambda_{\max} = 760 \text{ nm}$ , 所以

$$k < \frac{2.5 \times 10^{-6}}{760 \times 10^{-9}} = 3.29$$

取整数,  $k=3$ , 故可以产生 3 级完整的可见光谱。

**【14-21】** 波长  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在一光栅上。第 2 级明条纹分别出现在  $\sin\theta=0.20$  处。第 4 级缺级。试问: (1) 光栅上相邻两缝的间距  $a+b$  有多大? (2) 光栅上狭缝可能的最小宽度  $a$  有多大? (3) 按上述选定的  $a, b$  值, 试问在光屏上可能观察到的全部级数是多少?

解 (1) 按光栅方程  $(a+b)\sin\theta = k\lambda$

对第 2 级明条纹  $(a+b)\sin\theta = 2\lambda$

所以相邻两缝的间距  $a+b = \frac{2\lambda}{\sin\theta}$

已知  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ,  $\sin\theta = 0.20$ , 所以

$$a+b = \frac{2 \times 600 \times 10^{-9}}{0.20} \text{ m} = 6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

(2) 由第  $k$  级缺级条件

$$k = \frac{a+b}{a} k'$$

可得

$$a = \frac{a+b}{k} k'$$

要求  $a$  的最小值, 可令  $k'=1$ , 则

$$a = \frac{a+b}{k} = \frac{6 \times 10^{-4}}{4} \text{ cm} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

(3) 方程

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

中,  $k$  的最大值

$$k_m < \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-9}} = 10, \quad k_m = 9$$

$k=10$  相应于  $\theta=90^\circ$ , 第 10 级明条纹出现在无穷远处, 实际上不出现; 又考虑到缺级条件

$$k = \frac{a+b}{a} k' = \frac{6 \times 10^{-4}}{1.5 \times 10^{-4}} k' = 4k'$$

当  $k'=1, 2$  时,  $k=4, 8$ 。即第 4 级和第 8 级缺级。故屏幕上可能观察到的全部级数是

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$$

共 15 条明条纹。

**【14-22】** 波长为 500 nm 的单色光, 垂直入射到光栅上, 如要求第一级谱线的衍射角为  $30^\circ$ , 问光栅每毫米应刻几条线? 如果单色光不纯, 波长在 0.5% 范围内变化, 则相应的衍射角变化范围  $\Delta\theta$  如何? 又如光栅上下移动而保持光源不动, 衍射角  $\theta$  有何变化?

解 当  $k=1$  时, 光栅方程为

$$(a+b)\sin\theta = \lambda$$

由此得

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{500 \times 10^{-9}}{\sin 30^\circ} \text{ m} \\ &= 1.0 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned}$$

每毫米应刻的缝数为

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{1.0 \times 10^{-3}} \text{ mm}^{-1} = 1\,000 \text{ mm}^{-1}$$

如果单色光不纯, 与波长  $\lambda$  相差最大的波长为  $\lambda'$ 。令  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ , 则对第  $k$  级主极大, 其衍射角在  $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$  范围内变化。

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{a+b}, \quad \sin(\theta + \Delta\theta) = \frac{k(\lambda + \Delta\lambda)}{a+b}$$

可得

$$\frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$\text{又} \quad \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta - \sin\theta}{\sin\theta}$$

因  $\Delta\theta$  很小,  $\cos\Delta\theta \approx 1$ ,  $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ ,

$$\frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \cdot \Delta\theta$$

$$\text{因此} \quad \cot\theta \cdot \Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad \Delta\theta = \tan\theta \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

例如,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.5\%$  时,

$$\Delta\theta = \tan 30^\circ \times 0.5\% = 0.0029 \text{ rad} = 0.17^\circ$$

当光栅沿上下方向平移时,入射光仍是垂直射到光栅上的,衍射角  $\theta$  不会发生变化。

**【14-23】**  $N$  根天线沿一水平直线等距离排列组成天线列阵, 每根天线发射同一波长  $\lambda$  的球面波, 从第 1 根天线到第  $N$  根天线, 相位依次落后  $\pi/2$ , 相邻天线间的距离  $d = \lambda/2$ , 如图 14-26 所示。求: 在什么方向(即与天线列阵法线的夹角  $\theta$  为多少)上, 天线列阵发射的电磁波最强。

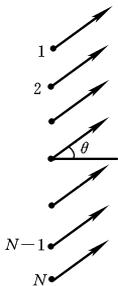


图 14-26

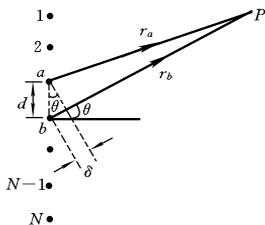


图 14-27

**解** 如图 14-27 所示,  $a$ 、 $b$  是天线列阵中的两根相邻的天线, 它们沿  $\theta$  角方向发射的电磁波在远处  $P$  点叠加。已知  $\phi_{a0} - \phi_{b0} = \frac{\pi}{2}$ 。

由图 14-27 可知,波程差

$$r_b - r_a = \delta = d \sin \theta$$

因此,  $a$ 、 $b$  两波源发出的波在  $P$  点叠加时的相位差

$$\Delta\phi = \phi_{b0} - \phi_{a0} - 2\pi \frac{r_b - r_a}{\lambda} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}$$

将  $d = \lambda/2$  代入上式得

$$\Delta\phi = -\pi/2 - \pi \sin \theta = -\pi(1/2 + \sin \theta)$$

当

$$-\pi(1/2 + \sin \theta) = 2k\pi$$

时,  $P$  点电磁波最强, 由此解得

$$\sin \theta = -(2k + 1/2)$$

显然,  $k=0$  是  $k$  唯一可能的值, 因此在  $\theta = -30^\circ$  方向上波源  $a$ 、 $b$  发射的电磁波最强。其他波源发出的波在  $P$  点都是相互加强的, 故整个天线列阵在这一方向上发射的电磁波是最强的。

**【14-24】** 在迎面驶来的汽车上, 两盏前灯相距  $1.2 \text{ m}$ 。试问汽车离人多远的地方, 眼睛才可能分辨这两盏前灯? 假设夜间人瞳孔直径为  $5.0 \text{ mm}$ , 而入射光波长  $\lambda = 550.0 \text{ nm}$ 。

解 已知瞳孔直径  $d = 5.0 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 550.0 \text{ nm}$ 。人眼的最小分辨角

$$\theta_R = 1.22\lambda/d$$

汽车两车灯间距  $l = 1.2 \text{ m}$ , 当车与人相距  $D$  时, 两车灯对人眼的张角 (图 14-28) 近似为

$$\theta = l/D$$

当  $\theta = \theta_R$  时, 眼睛恰可分辨这两盏灯。由

$$1.22\lambda/d = l/D$$

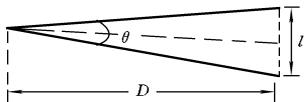


图 14-28

得恰可分辨两车灯的距离

$$D = \frac{dl}{1.22\lambda} = \frac{5.0 \times 10^{-3} \times 1.2}{1.22 \times 550.0 \times 10^{-9}} \text{ m} = 8.94 \text{ km}$$

**【14-25】** 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为  $4.84 \times 10^{-6} \text{ rad}$ , 由它们发出的光波波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$ 。望远镜物镜的口径至少要多大, 才能分辨出这两颗星?

解 设望远镜的物镜的直径为  $d$ , 对于发出波长  $\lambda$  的两点光源, 其最小分辨角

$$\theta_R = 1.22\lambda/d$$

由此可得最小口径应为

$$d = \frac{1.22\lambda}{\theta_R} = \frac{1.22 \times 550 \times 10^{-9}}{4.84 \times 10^{-6}} \text{ m} = 0.139 \text{ m}$$

**【14-26】** 一观察者通过缝宽为  $0.5 \text{ mm}$  的单缝, 观察位于正前方  $1 \text{ km}$  远处发出波长为  $500 \text{ nm}$  的单色光的两盏灯灯丝, 两灯丝都与单缝平行, 它们所在的平面与观察方向垂直, 则人眼能分辨的两灯丝最短距离是多少?

解 按瑞利准则, 当一灯丝的中央明条纹中心处与另一灯丝的第 1 级暗条纹重合时, 人眼恰能分辨出两灯丝。这时两中央明条纹中心对单缝所张的角即是一条中央明条纹的半角宽度。因此, 两中央明条纹中心对单缝的张角为

$$\Delta\theta_0 = \lambda/a$$

同时, 这也是两灯丝对单缝的张角(图 14-29), 因此又有

$$\Delta\theta_0 = d/D$$

由

$$d/D = \lambda/a$$

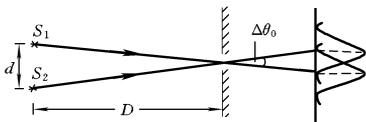


图 14-29

可得两灯丝能被分辨的最短距离为

$$d = \frac{D\lambda}{a} = \frac{1 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-9}}{0.5 \times 10^{-3}} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

**【14-27】** 已知地球到月球的距离是  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ , 设来自月球的光的波长为  $600 \text{ nm}$ , 若在地球上用物镜直径为  $1 \text{ m}$  的一天文望远镜观察时, 刚好将月球正面一环形山上的两点分辨开, 则该两点的距离为多少?

解 望远镜的最小分辨角为

$$\theta_R = 1.22\lambda/d$$

设环形山上能被分辨的两点的最小距离为  $l$ , 地球到月球的距离为  $D$ , 则

$$\theta_R = l/D$$

由

$$l/D = 1.22\lambda/d$$

得

$$\begin{aligned} l &= \frac{1.22\lambda D}{d} \\ &= \frac{1.22 \times 600 \times 10^{-9} \times 3.84 \times 10^8}{1} \text{ m} = 281 \text{ m} \end{aligned}$$

**【14-28】** 一直径为  $2 \text{ mm}$  的氦氖激光束射向月球表面, 其波长为  $632.8 \text{ nm}$ 。已知月球和地面的距离为  $3.84 \times 10^5 \text{ km}$ 。试求: (1) 在月球上得到的光斑的直径有多大? (2) 如果该激光束经扩束器扩展成直径为  $2 \text{ m}$ , 则在月球表面上得到的光斑直径将为多大? 在激光测距仪中, 通常采用激光扩束器, 这是为什么?

解 (1) 以  $D_1$  表示光斑的直径,  $L$  表示月球到地球的距离,  $d_1$  是激光束的直径,  $\lambda$  为波长, 则

$$\frac{D_1}{2} = 1.22 \frac{\lambda}{d_1} L$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2 \times 1.22\lambda L}{d_1} \\ &= \frac{2 \times 1.22 \times 632.8 \times 10^{-9} \times 3.84 \times 10^8}{2 \times 10^{-3}} \text{ m} \end{aligned}$$

$$= 2.96 \times 10^5 \text{ m}$$

(2) 以  $d_2$  表示扩束器孔径,  $D_2$  表示扩束后的激光在月球表面上的光斑直径。由(1)可知

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

因此 
$$D_2 = \frac{d_1 D_1}{d_2} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 2.96 \times 10^5}{2} \text{ m} = 296 \text{ m}$$

由此可知, 激光通过扩束后, 其方向性大为改善, 强度大大提高。

**【14-29】** 用方解石分析 X 射线谱, 已知方解石的晶面间距为  $3.029 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 今在  $43^\circ 20'$  和  $40^\circ 42'$  的掠射方向上观察到两条主最大谱线, 求这两条谱线的波长。

解 根据布拉格公式

$$2d \sin \theta = k\lambda$$

对于主最大 ( $k=1$ ) 谱线, 其波长为

$$\lambda = 2d \sin \theta$$

对于  $\theta_1 = 43^\circ 20'$ , 相应的波长

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \times 3.029 \times 10^{-10} \times \sin 43^\circ 20' \text{ m} \\ &= 4.15 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.415 \text{ nm} \end{aligned}$$

对于  $\theta_2 = 40^\circ 42'$ , 相应的波长

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 2 \times 3.029 \times 10^{-10} \times \sin 40^\circ 42' \text{ m} \\ &= 3.95 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.395 \text{ nm} \end{aligned}$$

### 第三部分 光的偏振

**【14-30】** 使自然光通过两个偏振化方向成  $60^\circ$  角的偏振片, 透射光强为  $I_1$ 。今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片, 它的偏振化方向与前两个偏振片均成  $30^\circ$  角, 则透射光强为多少?

解 本题运用了马吕斯定律。

设通过第一个偏振片后光的强度为  $I_0$ , 通过第二偏振片后光的强度

$$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha = I_0 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} I_0$$

在两偏振片之间插入第三个偏振片后,则通过第三偏振片的光的强度

$$I' = I_0 \cos^2 \alpha' = I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} I_0$$

再通过第二偏振片后光的强度为

$$I_2 = I' \cos^2 \alpha' = I' \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} I' = \frac{9}{16} I_0$$

因此

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{9}{16} I_0}{\frac{1}{4} I_0} = \frac{9}{4}, \quad I_2 = \frac{9}{4} I_1 = 2.25 I_1$$

**【14-31】** 如果起偏振器和检偏振器的偏振化方向之间的夹角为  $30^\circ$ , (1) 假定偏振片是理想的, 则非偏振光通过起偏振器和检偏振器后, 其出射光强与原来光强之比是多少? (2) 如果起偏振器和检偏振器分别吸收了  $10\%$  的可通过光线, 则出射光强与原来光强之比是多少?

解 (1) 设入射光为自然光, 强度为  $I_0$ 。通过起偏振器后, 光的强度为  $\frac{1}{2} I_0$ 。再通过检偏振器后, 按马吕斯定律, 其出射光强为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0 = 0.375 I_0$$

因此, 出射光强与原来光强之比是

$$I : I_0 = 0.375$$

(2) 在光线通过起偏振器时, 若平行其偏振化方向的光线被吸收  $10\%$ , 则强度为  $I_0$  的入射光通过起偏振器后, 强度变为

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - 10\%)$$

通过检偏振器后的出射光强则为

$$I = I_1 \cos^2 30^\circ (1 - 10\%) = \frac{3}{8} (1 - 10\%)^2 I_0 = 0.304 I_0$$

因此,出射光强和原来光强之比是

$$I : I_0 = 0.304$$

**【14-32】** 自然光和线偏振光的混合光束,通过一偏振片时,随着偏振片以光的传播方向为轴的转动,透射光的强度也跟着改变。如最强和最弱的光强之比为6:1,那么入射光中自然光和线偏振光的强度之比为多大?

解 设入射光中自然光强度为  $I_{01}$ ,线偏振光强度为  $I_{02}$ 。无论偏振片的偏振化方向取向如何,自然光通过偏振片后,强度都是

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{01}$$

线偏振光的透射强度与偏振片取向有关。当偏振片的偏振化方向与线偏振光光振动方向平行时,透射的线偏振光强度最大,其值为

$$I_{2\max} = I_{02}$$

当偏振片的偏振化方向与光振动方向垂直时,透射的线偏振光强度最小,其值为

$$I_{2\min} = 0$$

透射光的最大强度

$$I_{\max} = I_1 + I_{2\max} = \frac{1}{2} I_{01} + I_{02}$$

透射光的最小强度

$$I_{\min} = I_1 + I_{2\min} = \frac{1}{2} I_{01}$$

按题意有

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{\frac{1}{2} I_{01} + I_{02}}{\frac{1}{2} I_{01}} = 6$$

由此解得

$$\frac{I_{01}}{I_{02}} = \frac{2}{5}$$

**【14-33】** 水的折射率为1.33,玻璃的折射率为1.50。当光由

水中射向玻璃而反射时,起偏振角为多少?当光由玻璃射向水面反射时,起偏振角又为多少?

解 设水的折射率为 $n_1$ ,玻璃的折射率为 $n_2$ 。光由水射向玻璃被反射时,按布儒斯特定律

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

可得起偏振角为

$$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.50}{1.33} = 48^\circ 26'$$

如果光由玻璃射向水而被反射,则起偏振角为

$$i'_B = \arctan \frac{n_1}{n_2} = \arctan \frac{1.33}{1.50} = 41^\circ 34'$$

**【14-34】** 如图 14-30 所示,一块折射率 $n=1.50$ 的平面玻璃浸在水中,已知一束光入射到水面上时反射光是完全偏振光。若要使玻璃表面的反射光也是完全偏振光,则玻璃表面与水平面的夹角 $\theta$ 应是多大?

解 设光束射到水面上的入射角为 $i_{B1}$ 。水的折射率 $n'=1.33$ ,则  
 $i_{B1} = \arctan n' = \arctan 1.33 = 53^\circ 4'$   
 从水面上反射的光为完全偏振光时,折射线与反射线垂直,折射角

$$r = 90^\circ - i_{B1}$$

如果玻璃表面也是水平的,射到玻璃上的光线的入射角也是 $r$ 。当玻璃

表面如图倾斜 $\theta$ 角时,入射角也增加 $\theta$ ,这时从玻璃表面的反射光也是完全偏振光,因此

$$i_{B2} = r + \theta = 90^\circ - i_{B1} + \theta$$

由此得

$$\theta = i_{B1} + i_{B2} - 90^\circ$$

$$i_{B2} = \arctan \frac{n}{n'} = \arctan \frac{1.50}{1.33} = 48^\circ 26'$$

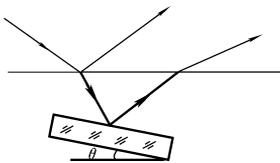


图 14-30

因此  $\theta = 53^{\circ}4' + 48^{\circ}26' - 90^{\circ} = 11^{\circ}30'$

**【14-35】** 偏振分束器可把入射的自然光分成两束传播方向互相垂直的偏振光,其结构如图14-31所示。两个等边直角玻璃棱镜的斜面合在一起,两斜面间有一多层膜。多层膜是由高折射率材料(硫化锌,  $n_H = 2.38$ )和低折射率材料(冰晶石,  $n_L = 1.25$ )交替镀膜而成。如用氩离子激光( $\lambda = 514.5 \text{ nm}$ )以 $45^{\circ}$ 角入射到多层膜上。(1)为使从膜层反射的光为线偏振光,玻璃棱镜的折射率 $n$ 应取多少?(2)画出反射光和透射光的振动方向。(3)为使透射光的偏振度最大,高折射率层和低折射率层的厚度的最小值是多少?

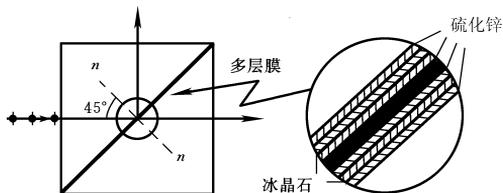


图 14-31

**解** (1) 设光从硫化锌到冰晶石被反射而获得线偏振光的布儒斯特角为  $i_B$ , 则

$$i_B = \arctan \frac{n_L}{n_H} = \arctan \frac{1.25}{2.38} = 27.7^{\circ}$$

因为不同介质的分界面都是平行的,以 $r$ 表示光从玻璃到硫化锌的折射角,则 $r = i_B$ (图14-32)。根据折射定律有

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_H}{n}$$

$i = 45^{\circ}$ ,是光从玻璃到硫化锌的入射角。由此可得

$$n = \frac{n_H \sin r}{\sin i} = \frac{n_H \sin i_B}{\sin i} = \frac{2.38 \times \sin 27.7^{\circ}}{\sin 45^{\circ}} = 1.56$$

(2) 反射光和透射光的振动方向如图14-32所示。

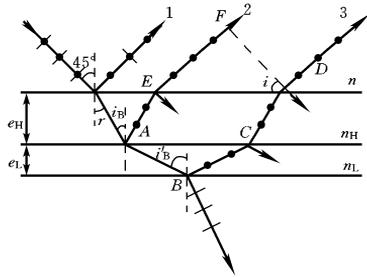


图 14-32

(3) 为使透射光的偏振度最大,不但要求反射光为线偏振光,而且要求反射光强度最大。在这种情况下,透射光中平行于入射面的振动的比例最大。因此,要求反射光干涉时相互加强。在图 14-32 中,反射线 2 和反射线 1 的光程差

$$\delta_1 = 2e_H \sqrt{n_H^2 - n^2 \sin^2 i} + \lambda/2$$

反射线 3 和反射线 2 的光程差

$$\delta_2 = n_L(AB + BC) - nEF + \lambda/2$$

$$AB = BC = \frac{e_L}{\cos i'_B}$$

$$EF = ED \sin i = AC \sin i = 2e_L \tan i'_B \sin i$$

因此

$$\delta_2 = 2n_L \frac{e_L}{\cos i'_B} - 2ne_L \tan i'_B \sin i + \frac{\lambda}{2}$$

考虑到折射定律有

$$n \sin i = n_H \sin r = n_H \sin i'_B = n_L \sin i'_B$$

于是

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{2n_L e_L}{\cos i'_B} (1 - \sin^2 i'_B) + \frac{\lambda}{2} = 2n_L e_L \cos i'_B + \frac{\lambda}{2} \\ &= 2e_L \sqrt{n_L^2 - n_L^2 \sin^2 i'_B} + \frac{\lambda}{2} = 2e_L \sqrt{n_L^2 - n^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

在其他反射线中,凡从硫化锌射到冰晶石被反射的光线,与前一反射线的光程差都是  $\delta_1$ ,而从冰晶石射到硫化锌被反射的光线,与前一反射线的光程差都是  $\delta_2$ 。欲使反射光线相互加强且硫化锌和冰晶石的厚度最小,须同时满足

$$2e_H \sqrt{n_H^2 - n^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \lambda, \quad 2e_L \sqrt{n_L^2 - n^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

因此,硫化锌和冰晶石的最小厚度分别为

$$\begin{aligned} e_H &= \frac{\lambda}{4 \sqrt{n_H^2 - n^2 \sin^2 45^\circ}} = \frac{\lambda}{2 \sqrt{2(2n_H^2 - n^2)}} \\ &= \frac{514.5}{2 \sqrt{2 \times (2 \times 2.38^2 - 1.56^2)}} \text{ nm} = 61 \text{ nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_L &= \frac{\lambda}{2 \sqrt{2(2n_L^2 - n^2)}} \\ &= \frac{514.5}{2 \sqrt{2 \times (2 \times 1.25^2 - 1.56^2)}} \text{ nm} = 219 \text{ nm} \end{aligned}$$

$e_L > e_H$ 。为了画图方便,图 14-32 中  $e_H > e_L$ 。

# 第四篇

## 量子物理

# 第十五章 早期量子论和 量子力学基础

---

---

## 知 识 要 点

### 1. 黑体辐射实验定律

#### (1) 斯特藩-波尔兹曼定律

$$M_0(T) = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

#### (2) 维恩位移定律

$$T\lambda_m = b, \quad b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

### 2. 普朗克公式

$$M_{\lambda_0}(T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} \frac{1}{e^{hc/(k\lambda T)} - 1}$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

### 3. 爱因斯坦光电效应方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$$

### 4. 光子的能量、质量和动量

$$\varepsilon = h\nu$$

$$m_\varphi = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$p = m_\varphi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

### 5. 康普顿效应

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

## 6. 氢原子光谱

$$\text{波数公式} \quad \tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

式中  $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots$

## 7. 玻尔的氢原子理论

定态假设 原子系统只能处于一系列不连续的能量状态, 这些状态称为定态。

$$\text{频率条件} \quad \nu_{kn} = \frac{|E_n - E_k|}{h}$$

$$\text{量子化条件} \quad L = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

## 氢原子轨道半径和能量

$$r_n = n^2 \left( \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} \right) = n^2 r_1, \quad E_n = -\frac{1}{n^2} \left( \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} \right) = \frac{E_1}{n^2}$$

## 8. 实物粒子的波粒二象性、德布罗意波

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

## 9. 不确定度关系

### 坐标和动量的不确定度关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

### 能量和时间的不确定度关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

## 10. 定态薛定谔方程

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

## 11. 一维无限深势阱中的粒子

$$\text{定态波函数} \quad \begin{cases} \psi_e(x) = 0 \\ \psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$\text{能量} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

## 12. 确定原子中电子状态的四个量子数

主量子数:  $n=1, 2, 3, \dots$

副量子数:  $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$

磁量子数:  $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

自旋磁量子数:  $m_s = \pm \frac{1}{2}$

## 思考题解答

**【15-1】** 两个相同的物体 A 和 B, 具有相同的温度, 如 A 物体周围的温度低于 A 的温度, 而 B 物体周围的温度高于 B 的温度。试问: A 和 B 两物体在温度相同的那一瞬间, 单位时间内辐射的能量是否相等? 单位时间内吸收的能量是否相等?

答 物体在单位时间内从其表面的单位面积上所发射的各种波长的总辐射能, 称为辐出度。由于辐出度仅是物体温度的函数, 故 A 和 B 两物体在温度相同的那一瞬间, 在单位时间内从单位表面积上辐射的能量相等。物体温度相同时, 其单色吸收比也相同。但由于 A 物体周围的温度较低, 即 A 周围其他物体的辐射小, 故单位时间内 A 物体吸收的能量要少一些。

**【15-2】** 绝对黑体和平常所说的黑色物体有何区别? 绝对黑体在任何温度下, 是否都是黑色的? 在同温度下, 绝对黑体和一般黑色物体的辐出度是否一样?

答 一般的黑色物体是指能全部吸收所有可见光的物体, 而绝对黑体指的是在任何温度下能全部吸收任何波长的电磁辐射的

物体。绝对黑体本身也能向外辐射电磁波,并非在任何温度下都呈黑色。在同温度下,绝对黑体的辐出度比一般黑色物体的大,因为好的吸收体也是好的辐射体。绝对黑体是完全的吸收体,因此也是理想的辐射体。

**【15-3】** 你能否估计在人体热辐射的各种波长中,哪个波长的单色辐出度最大?

答 根据维恩位移定律知,黑体的单色辐出度最大的波长 $\lambda_m$ 与黑体的温度 $T$ 之间的关系为

$$T\lambda_m = b \quad (b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K})$$

将人体视为黑体,取其温度 $T = (273 + 37) \text{ K} = 310 \text{ K}$ ,代入上式可

得 $\lambda_m = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{310} \text{ m} = 9.345 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,处于红外波段。

**【15-4】** 有两个同样的物体,一个是黑色的,一个是白色的,且温度也相同,把它们放在高温的环境中,哪一个物体温度升高较快?如果把它们放在低温环境中,哪一个物体温度降得较快?

答 在高温环境中,吸收的辐射能大于发射的辐射能,而黑色物体吸收能力大些,温度升高得快些;在低温环境中,发射的能量大于吸收的能量,黑色物体辐射能力大些,温度下降得要快些。

**【15-5】** 若一物体的温度(绝对温度数值)增加1倍,它的总辐射能增加到多少倍?

答 参照斯特藩-玻尔兹曼定律,物体的绝对温度增加1倍,其总辐射能增加到原来的16倍,因为总辐出度 $M_0(T) \propto T^4$ 。

**【15-6】** 在光电效应的实验中,如果:(1)入射光强度增加1倍;(2)入射光频率增加1倍。按光子理论,这两种情况的结果有何不同?

答 (1)入射光强度增加1倍,相当于入射的光子数增加1倍,因而光电子数翻倍,光电流增加1倍。

(2)入射光频率增加1倍,光电子的最大初动能也增加1倍。

**【15-7】** 已知一些材料的逸出功如下:钽 4.12 eV,钨

4.50 eV, 铝4.20 eV, 钷2.50 eV, 铯2.30 eV。试问, 如果制造在可见光下工作的光电管, 应取哪种材料?

答 光子的红限 $\nu_0$ 与逸出功的关系为

$$\nu_0 = \frac{A}{h} = \frac{A}{6.626 \times 10^{-34}} \text{ (Hz)}$$

故钷、铯、铝、钷和铯的红限分别为  $9.93 \times 10^{14}$  Hz、 $10.8 \times 10^{14}$  Hz、 $10.14 \times 10^{14}$  Hz、 $6.03 \times 10^{14}$  Hz 和  $5.55 \times 10^{14}$  Hz。可见光的频率范围在  $3.95 \times 10^{14} \sim 7.50 \times 10^{14}$  Hz。所以, 应选钷和铯。

**【15-8】** 在彩色电视研制过程中, 曾面临一个技术问题: 用于红色部分的显像管的设计技术要比绿、蓝部分困难, 你能说明其原因吗?

答 显像管利用的是光电效应。从思考题15-7的解答和原教材上的表15-1可以看出, 一般的金属的红限大于红光的频率(约  $3.95 \times 10^{14}$  Hz), 而绿、蓝光的频率较高, 比一些金属的红限大。所以红色部分的显像管的材料比较难找。

**【15-9】** 光子在哪些方面与其他粒子(譬如电子)相似? 在哪些方面不同?

答 光子与电子等实物粒子的相似之处在于, 光子也具有能量、动量和质量等粒子性; 不同之处在于光子的静质量为零。

**【15-10】** 用频率为 $\nu_1$ 的单色光照射某光电管阴极时, 测得饱和电流为 $I_1$ ; 用频率为 $\nu_2$ 的单色光以与 $\nu_1$ 的单色光相等强度照射时, 测得饱和电流为 $I_2$ , 若 $I_2 > I_1$ ,  $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 的关系如何?

答  $I_2 > I_1$ 表明用频率为 $\nu_2$ 的光照射时, 单位时间内有更多的光电子到达了阳极。两种单色光强度相等, 在单位时间内产生的光电子数也就相等。因此, 这说明用频率为 $\nu_2$ 的光产生的光电子初速度较大, 而这就要求 $\nu_2 > \nu_1$ 。故 $\nu_2$ 比 $\nu_1$ 要大。

**【15-11】** 用频率为 $\nu_1$ 的单色光照射某光电管阴极时, 测得光电子的最大动能为 $E_{k_1}$ ; 用频率为 $\nu_2$ 的单色光照射时, 测得光电子的最大动能为 $E_{k_2}$ , 若 $E_{k_1} > E_{k_2}$ ,  $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 哪一个大?

答 根据爱因斯坦光电效应方程,  $h\nu = E_k + A$ , 其中  $A$  为逸出功。因  $E_{k_1} > E_{k_2}$ , 故  $\nu_1$  大些。

**【15-12】** 用可见光能否观察到康普顿散射现象?

答 不能。因为可见光的波长远大于康普顿波长  $\lambda_c$ , 此时康普顿效应不太显著, 不易观察到。 $\lambda_c$  与 X 光的波长相近, 入射光为 X 光时康普顿散射现象很明显。

**【15-13】** 光电效应和康普顿效应都包含有电子与光子的相互作用, 这两过程有什么不同?

答 在光电效应中, 光子是与束缚态的电子发生作用, 因为入射光一般用的是可见光或紫外光, 光子能量只有几个电子伏特, 与原子中处于束缚态的电子的能量相差不大; 而在康普顿效应中, 入射光的波长很短(一般在 X 光波段), 光子的能量大大地超出电子的束缚能, 电子可以看作自由电子。故在康普顿效应中, 是光子与自由电子发生相互作用。

**【15-14】** 在康普顿效应中, 什么条件下才可以把散射物质中的电子近似看成静止的自由电子?

答 当散射物质中的电子所受束缚较弱, 入射光子的能量比电子的束缚能大得多时, 电子可近似视为自由电子。

**【15-15】** 在康普顿效应中, 反冲电子获得的能量总是小于入射光子的能量, 这是否意味着入射光的光子可分成两部分, 其中的一部分被电子吸收。这与光子的粒子性是否矛盾?

答 没有矛盾。电子吸收一个入射光子后, 再放出一个散射光子, 而不是入射光子被分成了两部分。

**【15-16】** (1) 氢原子光谱中, 同一谱系的各相邻谱线的间隔是否相等? (2) 试根据氢原子的能级公式说明当量子数  $n$  增大时能级的变化情况以及能级间的间距变化情况。

答 (1) 氢原子光谱的谱系可表示为

$$\tilde{\nu} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (k=1, 2, 3, \dots; \quad n=k+1, k+2, k+3, \dots)$$

$k$  值相同者属同一谱系。相邻谱线之间间隔为

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{n+1} - \tilde{\nu}_n = R \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{R(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$$

可见,  $\Delta\tilde{\nu}$  随  $n$  增大而减小。故同一谱系的各相邻谱线的间隔不相等。

(2) 氢原子的能级为  $E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} (n=1, 2, 3, \dots)$ , 可见, 量子数  $n$  越大, 能级的能量越高。而且  $\Delta E = E_{n+1} - E_n = 13.6 \left[ \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] \text{ eV}$ , 说明能级间距随  $n$  的增大越来越密, 最后连成一片, 能量不再是量子化的。

**【15-17】** 根据氢原子理论可知氢原子处于  $n=4$  的激发态时, 可发射几种波长的光?

答 如图 15-1 所示, 当氢原子处于  $n=4$  的激发态时, 可发射 6 种波长的光。

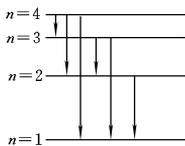


图 15-1

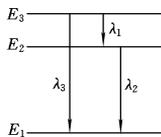


图 15-2

**【15-18】** 如图 15-2 所示, 被激发的氢原子跃迁到低能级时, 可发射波长为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的辐射。问三个波长之间的关系如何?

答 跃迁时, 两能级间的能量差越大波长越短, 故  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ 。

注意到  $h\nu_3 = h\nu_1 + h\nu_2$ , 且  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , 可得  $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ 。

**【15-19】** 设实物粒子的质量为  $m$ , 速度为  $v$ 。由德布罗意公式  $h\nu = mc^2$ ,  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , 得  $\nu\lambda = c^2/v$ ; 根据  $\nu\lambda = v$ , 得  $v = c$ 。显然以上的结论是错误的, 试问错误的根源何在?

答 错误在于  $\nu\lambda = v$  中的  $v$  并不是实物粒子的运动速度, 只是波的相速度, 粒子的运动速度等于波的群速度。

【15-20】 为什么说不确定度关系与实验技术或仪器的改进无关?

答 不确定度关系直接源于微观粒子的波粒二象性, 所以并非测量仪器对粒子的干扰, 也和仪器的误差无关。

## 习题解答

【15-1】 估测星球表面温度的方法之一是: 将星球看成黑体, 测量它的辐射峰值波长  $\lambda_m$ , 利用维恩位移定律便可估计其表面温度。如果测得北极星和天狼星的  $\lambda_m$  分别为  $0.35 \mu\text{m}$  和  $0.29 \mu\text{m}$ , 试计算它们的表面温度。

解 根据维恩位移定律  $T\lambda_m = b$  可得北极星表面温度

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.35 \times 10^{-6}} \text{ K} = 8.28 \times 10^3 \text{ K}$$

天狼星表面温度

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.29 \times 10^{-6}} \text{ K} = 9.99 \times 10^3 \text{ K}$$

【15-2】 在加热黑体过程中, 其单色辐出度的峰值波长由  $0.69 \mu\text{m}$  变化到  $0.50 \mu\text{m}$ , 求总辐出度变为原来的多少倍?

解 当  $\lambda_{m1} = 0.69 \mu\text{m}$  时, 根据维恩位移定律, 黑体的温度为

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.69 \times 10^{-6}} \text{ K} = 4.20 \times 10^3 \text{ K}$$

根据斯特藩-玻尔兹曼定律, 黑体的总辐出度

$$\begin{aligned} M_{01} &= \sigma T_1^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (4.20 \times 10^3)^4 \text{ W/m}^2 \\ &= 1.76 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

当  $\lambda_{m2} = 0.50 \mu\text{m}$  时, 黑体的温度为

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = \frac{2.897 \times 10^{-3}}{0.50 \times 10^{-6}} \text{ K} = 5.79 \times 10^3 \text{ K}$$

黑体的总辐出度

$$\begin{aligned} M_{02} &= \sigma T_2^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (5.79 \times 10^3)^4 \text{ W/m}^2 \\ &= 6.37 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{M_{02}}{M_{01}} = \frac{6.37 \times 10^7}{1.76 \times 10^7} = 3.62$$

即

$$M_{02} = 3.62 M_{01}$$

**【15-3】** 假设太阳表面温度为 5 800 K, 太阳半径为  $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ 。如果认为太阳的辐射是稳定的, 求太阳在 1 年内由于辐射它的质量减小了多少?

解 太阳表面的总辐出度

$$M_0 = \sigma T^4$$

辐射功率

$$P = M_0 S = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

在 1 年内, 辐射的总能量

$$W = Pt = 4\pi\sigma R^2 T^4 t$$

1 年内由于辐射而减少的质量

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{W}{c^2} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4 t}{c^2} \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (6.96 \times 10^8)^2 \times 5800^4 \times 3.15 \times 10^7}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} \\ &= 1.37 \times 10^{17} \text{ kg} \end{aligned}$$

**【15-4】** 假定太阳和地球都可看成黑体, 如太阳表面温度  $T_s = 6000 \text{ K}$ , 地球表面各处温度相同, 试求地球的表面温度 (已知太阳半径  $R_s = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ , 太阳到地球的距离  $r = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$ )。

解 根据斯特藩-玻尔兹曼定律, 太阳的总辐出度

$$M_0(T_s) = \sigma T_s^4$$

辐射功率

$$P_s = M_0(T_s) \cdot 4\pi R_s^2 = 4\pi\sigma R_s^2 T_s^4$$

单位立体角内的辐射功率

$$P_{s0} = \frac{P_s}{4\pi} = \sigma R_s^2 T_s^4$$

地球对太阳所张的立体角

$$\Omega = \frac{\pi R_E^2}{r^2}$$

式中  $R_E$  为地球半径。因此地球吸收的功率

$$P_E = P_{S_0} \Omega = \sigma R_S^2 T_S^4 \frac{\pi R_E^2}{r^2}$$

设地球的表面温度为  $T_E$ , 它的总辐出度

$$M_0(T_E) = \sigma T_E^4$$

辐射功率  $P'_E = M_0(T_E) 4\pi R_E^2 = 4\pi\sigma R_E^2 T_E^4$

在达到热平衡时有  $P_E = P'_E$ , 即

$$\sigma R_S^2 T_S^4 \frac{\pi R_E^2}{r^2} = 4\pi\sigma R_E^2 T_E^4$$

由此得

$$\begin{aligned} T_E &= \left( \frac{R_S^2}{4r^2} \right)^{1/4} T_S = \left[ \frac{(6.96 \times 10^5)^2}{4 \times (1.496 \times 10^8)^2} \right]^{1/4} \times 6\,000 \text{ K} \\ &= 289 \text{ K} \end{aligned}$$

**【15-5】** 钾的光电效应红限波长为  $\lambda_0 = 0.62 \mu\text{m}$ 。求: (1) 钾的逸出功; (2) 在波长  $\lambda = 330 \text{ nm}$  的紫外光照射下, 钾的遏止电势差。

解 (1) 钾的逸出功

$$\begin{aligned} A &= h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{6.62 \times 10^{-6}} \text{ J} \\ &= 3.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV} \end{aligned}$$

(2) 设钾的遏止电势差为  $U_a$ , 则

$$\begin{aligned} eU_a &= \frac{1}{2} m v_m^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A \\ &= \left( \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{330 \times 10^{-9}} - 3.2 \times 10^{-19} \right) \text{ J} \\ &= 2.83 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.77 \text{ eV} \end{aligned}$$

故

$$U_a = 1.77 \text{ V}$$

**【15-6】** 在光电效应实验中,有个学生测得某金属的遏止电势差 $U_a$ 和入射光波长 $\lambda$ 有表15-1所示的对应关系。画出遏止电势差与入射光频率的曲线,并求出:(1)普朗克常量 $h$ ;(2)该金属的逸出功;(3)该金属的光电效应红限和频率。

表 15-1

$\lambda/\text{nm}$	$U_a/\text{V}$
253.6	2.60
283.0	2.11
303.9	1.81
330.2	1.47
366.3	1.10
435.8	0.57

表 15-2

$\nu/(10^{14}\text{ Hz})$	$U_a/\text{V}$
11.8	2.60
10.6	2.11
9.87	1.81
9.09	1.47
8.19	1.10
6.88	0.57

解 由公式 $\nu = \frac{c}{\lambda}$ 可将表15-1变为表15-2。由表15-2中数据可绘 $U_a-\nu$ 曲线,如图15-3所示。

(1)  $U_a-\nu$ 曲线是一条直线,其方程可表示为

$$U_a = k\nu - U_0$$

因此  $eU_a = ek\nu - eU_0$

与爱因斯坦光电效应方程

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - A$$

比较可得普朗克常数

$$h = ek$$

由图可得

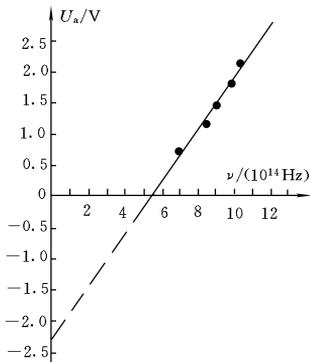


图 15-3

$$k = \frac{\Delta U_a}{\Delta \nu} = \frac{2.60 - 0.57}{(11.8 - 6.88) \times 10^{14}} \text{ J} \cdot \text{s/C}$$

$$= 4.13 \times 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{s/C}$$

因此

$$h = ek = 1.6 \times 10^{-19} \times 4.13 \times 10^{-15} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$= 6.61 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

(2) 由图 15-3 可知, 实验曲线的延长线与纵轴交于  $-2.3 \text{ V}$ , 即  $U_0 = 2.3 \text{ V}$ 。将直线方程与光电效应方程比较, 可得该金属的逸出功为

$$A = eU_0 = 2.3 \text{ eV}$$

(3) 直线与横轴交于  $\nu_0 = 5.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , 这就是该金属光电效应的遏止频率。红限波长即为

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^8}{5.5 \times 10^{14}} \text{ m} = 5.45 \times 10^{-7} \text{ m} = 545 \text{ nm}$$

**【15-7】** 铝的逸出功为  $4.2 \text{ eV}$ 。今用波长为  $200 \text{ nm}$  的紫外光照射到铝表面上, 发射的光电子的最大初动能为多少? 遏止电势差为多大? 铝的红限波长是多大?

解 根据光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$  得光电子的最大初动能

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A$$

$$= \left( \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} - 4.2 \times 1.6 \times 10^{-19} \right) \text{ J}$$

$$= 3.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}$$

遏止电势差满足关系

$$eU_a = \frac{1}{2}mv_m^2$$

所以  $U_a = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{2.0 \text{ eV}}{e} = 2.0 \text{ V}$

铝的遏止频率  $\nu_0$  满足关系  $h\nu_0 = A$ , 故铝的红限波长

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} = 296 \text{ nm}\end{aligned}$$

**【15-8】** 能引起人眼视觉的最小光强约为  $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , 如瞳孔的面积约为  $0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , 计算每秒平均有几个光子进入瞳孔到达视网膜上。设光的平均波长为  $550 \text{ nm}$ 。

解 瞳孔接收的最小光功率为

$$P = IS = 10^{-12} \times 0.5 \times 10^{-4} \text{ W} = 5 \times 10^{-17} \text{ W}$$

波长为  $\lambda$  的光子的能量为

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{550 \times 10^{-9}} \text{ J} = 3.62 \times 10^{-19} \text{ J}$$

因而平均每秒进入瞳孔的光子数为

$$N = \frac{P}{h\nu} = \frac{5 \times 10^{-17}}{3.62 \times 10^{-19}} = 138 \text{ (个/s)}$$

**【15-9】** 如果一个光子的能量等于一个电子的静止能量, 问该光子的频率、波长和动量各是多少? 在电磁波谱中属于何种射线?

解 该光子能量等于一个电子的静止能量, 则其能量为  $\varepsilon = m_e c^2$ , 又  $\varepsilon = h\nu$ , 因而频率

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\varepsilon}{h} = \frac{m_e c^2}{h} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{6.63 \times 10^{-34}} \text{ Hz} \\ &= 1.24 \times 10^{20} \text{ Hz}\end{aligned}$$

光子的波长

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{1.24 \times 10^{20}} \text{ m} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

属于低能  $\gamma$  射线。光子的动量

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2.4 \times 10^{-12}} \text{ kg/ms} = 2.76 \times 10^{-22} \text{ kg/ms}$$

**【15-10】** 波长  $\lambda_0 = 0.0708 \text{ nm}$  的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射, 在  $\pi/2$  和  $\pi$  方向上所散射的 X 射线的波长以及反冲电子所

获得的能量各是多少?

解 散射 X 射线波长  $\lambda$  与散射角  $\varphi$  的关系是

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

当  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  时,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\pi}{4} \\ &= \left( 0.0708 \times 10^{-9} + 2 \times 2.43 \times 10^{-12} \times \frac{1}{2} \right) \text{ m} \\ &= 7.32 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0732 \text{ nm} \end{aligned}$$

根据能量守恒知,反冲电子获得的能量就是入射光子与散射光子能量之差,所以

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0\lambda} \Delta\lambda \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times (7.32 \times 10^{-11} - 7.08 \times 10^{-11})}{7.08 \times 10^{-11} \times 7.32 \times 10^{-11}} \text{ J} \\ &= 9.21 \times 10^{-17} \text{ J} = 576 \text{ eV} \end{aligned}$$

当  $\varphi = \pi$  时,散射 X 射线的波长

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\pi}{2} = \lambda_0 + 2\lambda_c \\ &= (0.0708 \times 10^{-9} + 2 \times 2.43 \times 10^{-12}) \text{ m} \\ &= 7.57 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0757 \text{ nm} \end{aligned}$$

反冲电子获得的能量

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \frac{hc}{\lambda\lambda_0} \Delta\lambda \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times (7.57 \times 10^{-11} - 7.08 \times 10^{-11})}{7.08 \times 10^{-11} \times 7.57 \times 10^{-11}} \text{ J} \\ &= 1.82 \times 10^{-16} \text{ J} = 1.14 \times 10^3 \text{ eV} \end{aligned}$$

**【15-11】** 已知 X 光的光子能量为 0.60 MeV,在康普顿散射后波长改变了 20%,求反冲电子获得的能量和动量。

解 设入射 X 光光子波长为  $\lambda_0$ ,则散射后波长为

$$\lambda = (1 + 20\%) \lambda_0 = 1.2 \lambda_0$$

X 光光子散射后的能量即为

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{1.2 \lambda_0} = \frac{\varepsilon_0}{1.2}$$

因此反冲电子获得的能量为

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - \varepsilon &= \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{1.2} = \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) \varepsilon_0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{1.2}\right) \times 0.60 \text{ MeV} = 0.10 \text{ MeV} \end{aligned}$$

在康普顿散射中, 散射角  $\varphi$  满足关系

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

因此

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi}{2} &= \sqrt{\frac{\Delta\lambda}{2\lambda_c}} = \sqrt{\frac{0.2\lambda_0}{2\lambda_c}} = \sqrt{\frac{0.1hc}{\lambda_c \varepsilon_0}} \\ &= \sqrt{\frac{0.1 \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.43 \times 10^{-12} \times 0.60 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 0.292 \\ \varphi &= 2\arcsin 0.292 = 33.9^\circ \end{aligned}$$

图 15-4 是 X 光光子散射前后的情况。由图可得动量守恒定律的两个分量式为

$$p_e \cos\theta + \frac{h}{\lambda} \cos\varphi = \frac{h}{\lambda_0} \quad (1)$$

$$p_e \sin\theta = \frac{h}{\lambda} \sin\varphi \quad (2)$$

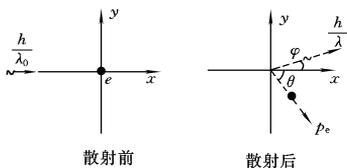


图 15-4

由此得反冲电子的动量大小为

$$\begin{aligned}
 p_e &= \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\varphi} = \frac{h}{\lambda_0\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\lambda\cos\varphi} \\
 &= \frac{h}{1.2\lambda_0} \sqrt{1.2^2 + 1 - 2 \times 1.2 \times \cos\varphi} \\
 &= \frac{\varepsilon_0}{1.2c} \sqrt{2.44 - 2.4\cos\varphi} \\
 &= \frac{0.60 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.2 \times 3 \times 10^8} \sqrt{2.44 - 2.4\cos 33.9^\circ} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\
 &= 1.78 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}
 \end{aligned}$$

由式②可得反冲电子动量方向与  $x$  轴的夹角为

$$\theta = \arcsin\left(\frac{h}{\lambda p_e}\sin\varphi\right) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_0}{1.2c p_e}\sin\varphi\right) = 56.68^\circ$$

**【15-12】** 一光子与自由电子碰撞,电子可能获得的最大能量为 60 keV,求入射光子的波长和能量。

解 光子与自由电子碰撞后,电子获得的能量为

$$\Delta\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = \frac{hc}{\lambda_0(\lambda_0/\Delta\lambda + 1)}$$

式中  $\lambda_0$ 、 $\lambda$  分别是入射光子和散射光子的波长。由此式可知,当  $\Delta\lambda$  取最大值时,  $\Delta\varepsilon$  有最大值。根据康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$\Delta\lambda$  的最大值为  $2\lambda_c$ , 因此电子可能获得的最大能量

$$(\Delta\varepsilon)_m = \frac{hc}{\lambda_0\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_c} + 1\right)}$$

由此得关于  $\lambda_0$  的方程

$$\lambda_0^2 + 2\lambda_c\lambda_0 - \frac{2\lambda_chc}{(\Delta\varepsilon)_m} = 0$$

即  $\lambda_0^2 + 2 \times 2.43 \times 10^{-12} \lambda_0 - [(2 \times 2.43 \times 10^{-12} \times 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8) / (6.0 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19})] = 0$

$$\lambda_0^2 + 4.84 \times 10^{-12} \lambda_0 - 1.01 \times 10^{-22} = 0$$

解此方程得

$$\lambda_0 = 7.86 \times 10^{-12} \text{ m} = 7.86 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

入射光子的能量为

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{7.86 \times 10^{-12}} \text{ J} \\ &= 2.53 \times 10^{-14} \text{ J} = 158 \text{ keV} \end{aligned}$$

**【15-13】** 以 $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ 的可见光和 $\lambda_2 = 0.04 \text{ nm}$ 的X光与自由电子碰撞,在 $\theta = \pi/2$ 的方向上观察散射光。(1)计算两种情况下,波长的相对改变量 $\Delta\lambda/\lambda$ 之比和电子获得的动能之比;(2)欲获得明显的康普顿效应,应如何选取入射光?

解 (1) 根据康普顿散射公式知

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

又 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,故 $\Delta\lambda = \lambda_c$ 。因此

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_c}{\lambda}$$

$$\left( \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} \right) / \left( \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0.04}{400} = 10^{-4}$$

在上题中已经得到,与光子碰撞后电子获得的动能为

$$\Delta\epsilon = \frac{hc}{\lambda(\lambda/\Delta\lambda + 1)}$$

因此

$$\frac{\Delta\epsilon_1}{\Delta\epsilon_2} = \frac{\lambda_2(\lambda_2/\Delta\lambda_2 + 1)}{\lambda_1(\lambda_1/\Delta\lambda_1 + 1)}$$

因为 $\lambda_2 \gg \Delta\lambda_2, \lambda_1 \gg \Delta\lambda_1$ ,所以可作近似

$$\frac{\Delta\epsilon_1}{\Delta\epsilon_2} = \frac{\lambda_2 \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda_2}}{\lambda_1 \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 = (10^{-4})^2 = 10^{-8}$$

(2) 根据上面的计算可以看出,与自由电子碰撞后,可见光波

长的相对变化只是 X 光波长的相对变化的  $10^{-4}$ , 反冲电子的动能只是后者的  $10^{-8}$ 。因此可见光的康普顿效应是很微弱的, 要观察到明显的康普顿效应, 应当选取波长很短的入射光。

**【15-14】** 在基态氢原子被外来单色光激发后发出的巴耳末系中, 仅观察到三条谱线, 试求: (1) 外来光的波长; (2) 这三条谱线的波长。

解 从高能级跃迁到  $n=2$  的能级形成的谱系为巴耳末系。

(1) 氢光谱的巴耳末系中仅观察到三条谱线, 说明基态氢原子被激发到  $n=5$  的能级。在该能级上, 氢原子能量  $E_5 = -0.54 \text{ eV}$ , 而基态氢原子能量为  $E_1 = -13.58 \text{ eV}$ 。因此外来光子能量

$$\epsilon = E_5 - E_1 = [-0.54 - (-13.58)] \text{ eV} = 13.04 \text{ eV}$$

波长为

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{\epsilon} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{13.04 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 9.53 \times 10^{-8} \text{ m} = 95.3 \text{ nm} \end{aligned}$$

(2) 这三条谱线的波数分别为

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \\ &= 1.097 \times 10^7 \times \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \text{ m}^{-1} = 1.52 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_2 &= R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ &= 1.097 \times 10^7 \times \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \text{ m}^{-1} = 2.06 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_3 &= R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) \\ &= 1.097 \times 10^7 \times \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right) \text{ m}^{-1} = 2.30 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

相应的波长分别为

$$\lambda_1 = \frac{1}{\tilde{\nu}_1} = \frac{1}{1.52 \times 10^6} \text{ m} = 6.58 \times 10^{-7} \text{ m} = 658 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\tilde{\nu}_2} = \frac{1}{2.06 \times 10^6} \text{ m} = 4.85 \times 10^{-7} \text{ m} = 485 \text{ nm}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\tilde{\nu}_3} = \frac{1}{2.30 \times 10^6} \text{ m} = 4.35 \times 10^{-7} \text{ m} = 435 \text{ nm}$$

**【15-15】** 在气体放电管中,高速电子撞击原子发光。如高速电子的能量为 12.2 eV,轰击处于基态的氢原子,试求氢原子被激发后所能发射的光谱线波长。

解 氢原子能级公式为

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left( \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} &= \frac{9.1 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{8 \times (8.85 \times 10^{-12})^2 \times (6.63 \times 10^{-34})^2} \text{ J} \\ &= 2.17 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

因此能级公式可表示为

$$E_n = -\frac{2.17 \times 10^{-18}}{n^2} \text{ J}$$

由此可算出基态( $n=1$ )能量为

$$E_1 = -2.17 \times 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}$$

第一激发态( $n=2$ )能量为

$$E_2 = -\frac{2.17 \times 10^{-18}}{2^2} \text{ J} = -5.43 \times 10^{-19} \text{ J} = -3.39 \text{ eV}$$

第二激发态( $n=3$ )能量为

$$E_3 = -\frac{2.17 \times 10^{-18}}{3^2} \text{ J} = -2.41 \times 10^{-19} \text{ J} = -1.51 \text{ eV}$$

第三激发态( $n=4$ )能量为

$$E_4 = -\frac{2.17 \times 10^{-18}}{4^2} \text{ J} = -1.36 \times 10^{-19} \text{ J} = -0.85 \text{ eV}$$

$$E_3 - E_1 = [-1.51 - (-13.6)] \text{ eV} = 12.1 \text{ eV}$$

$$E_4 - E_1 = [-0.85 - (-13.6)] \text{ eV} = 12.8 \text{ eV}$$

所以能量为 12.2 eV 的电子最多只能使氢原子从基态跃迁到第二激发态,接着发生如图 15-5 所示的三种可能的跃迁。从  $n=3$  到  $n=2$  的跃迁所发射的光子波长

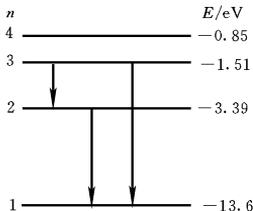


图 15-5

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c}{\nu_1} = \frac{hc}{h\nu_1} = \frac{hc}{E_3 - E_2} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5.43 \times 10^{-19} - 2.41 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 6.58 \times 10^{-7} \text{ m} = 658 \text{ nm} \end{aligned}$$

从  $n=2$  到  $n=1$  的跃迁所发射的光子波长

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.17 \times 10^{-18} - 5.43 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 1.22 \times 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm} \end{aligned}$$

从  $n=3$  到  $n=1$  的跃迁所发射的光子波长

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.17 \times 10^{-18} - 2.41 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 1.03 \times 10^{-7} \text{ m} = 103 \text{ nm} \end{aligned}$$

**【15-16】** 试计算氢原子各线系的长波极限波长  $\lambda_{\text{lm}}$  和短波极限波长  $\lambda_{\text{sm}}$ 。

解 氢原子光谱各线系的谱线波数可表示为

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

波长可表示为 
$$\lambda = \frac{1}{R} \frac{k^2 n^2}{n^2 - k^2}$$

对于莱曼系,  $k=1, n=2, 3, 4, \dots$ 。因此  $n=2$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{1m} &= \frac{1}{R} \frac{2^2}{2^2 - 1^2} = \frac{4}{1.097 \times 10^7 \times 3} \text{ m} \\ &= 1.215 \times 10^{-7} \text{ m} = 121.5 \text{ nm}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{sm} = \frac{1}{R} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 9.12 \times 10^{-8} \text{ m} = 91.2 \text{ nm}$$

对于巴耳末系,  $k=2, n=3, 4, 5, \dots$ 。  $n=3$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{1m} &= \frac{1}{R} \frac{2^2 \times 3^2}{3^2 - 2^2} = \frac{4 \times 9}{1.097 \times 10^7 \times (9 - 4)} \text{ m} \\ &= 6.563 \times 10^{-7} \text{ m} = 656.3 \text{ nm}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{sm} = \frac{2^2}{R} = \frac{4}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 3.646 \times 10^{-7} \text{ m} = 364.6 \text{ nm}$$

对于帕邢系,  $k=3, n=4, 5, 6, \dots$ 。  $n=4$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{1m} &= \frac{1}{R} \frac{3^2 \times 4^2}{4^2 - 3^2} = \frac{9 \times 16}{1.097 \times 10^7 \times (16 - 9)} \text{ m} \\ &= 1.875 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.875 \mu\text{m}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{sm} = \frac{3^2}{R} = \frac{9}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 8.204 \times 10^{-7} \text{ m} = 820.4 \text{ nm}$$

对于布拉开系,  $k=4, n=5, 6, 7, \dots$ 。  $n=5$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{1m} &= \frac{1}{R} \frac{4^2 \times 5^2}{5^2 - 4^2} = \frac{16 \times 25}{1.097 \times 10^7 \times (25 - 16)} \text{ m} \\ &= 4.051 \times 10^{-4} \text{ m} = 4.051 \mu\text{m}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{sm} = \frac{4^2}{R} = \frac{16}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 1.459 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.459 \mu\text{m}$$

对于普丰德系,  $k=5, n=6, 7, 8, \dots$ 。  $n=6$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{lm}} &= \frac{1}{R} \frac{5^2 \times 6^2}{6^2 - 5^2} = \frac{25 \times 36}{1.097 \times 10^7 \times (36 - 25)} \text{ m} \\ &= 7.458 \times 10^{-6} \text{ m} = 7.458 \mu\text{m}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{\text{sm}} = \frac{5^2}{R} = \frac{25}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 2.279 \times 10^{-6} \text{ m} = 2.279 \mu\text{m}$$

对于哈弗莱系,  $k=6, n=7, 8, 9, \dots$ 。  $n=7$  时, 有

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{lm}} &= \frac{1}{R} \frac{6^2 \times 7^2}{7^2 - 6^2} = \frac{36 \times 49}{1.097 \times 10^7 \times (49 - 36)} \text{ m} \\ &= 1.237 \times 10^{-5} \text{ m} = 12.37 \mu\text{m}\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\lambda_{\text{sm}} = \frac{6^2}{R} = \frac{36}{1.097 \times 10^7} \text{ m} = 3.282 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.282 \mu\text{m}$$

**【15-17】** 常温下的中子称为热中子, 试计算  $T=300 \text{ K}$  时热中子的平均动能, 由此估算其德布罗意波长。(中子的质量  $m_n = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。)

解 热中子的平均动能

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \text{ J} = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

热中子动量大小的平均值约为

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \sqrt{2m_n \bar{\epsilon}_k} = \sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 6.21 \times 10^{-21}} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ &= 4.55 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}\end{aligned}$$

德布罗意波长则为

$$\lambda = \frac{h}{\bar{p}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4.55 \times 10^{-24}} \text{ m} = 1.46 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.146 \text{ nm}$$

**【15-18】** 一束带电粒子经  $206 \text{ V}$  电压加速后, 测得其德布罗意波长为  $2.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$ , 已知该粒子所带的电荷量与电子电荷量相等, 求这粒子的质量。

解 已知加速电压  $U=206 \text{ V}$ , 设带电粒子被加速后的速度为  $v$ , 粒子质量为  $m$ , 则

$$eU = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (1)$$

以此速度运动的粒子的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2)$$

由式①和②可解得

$$m = \frac{h^2}{2eU\lambda^2}$$

将  $\lambda = 2.0 \times 10^{-3} \text{ nm} = 2.0 \times 10^{-12} \text{ m}$  代入上式得

$$\begin{aligned} m &= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 206 \times (2.0 \times 10^{-12})^2} \text{ kg} \\ &= 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

**【15-19】** 设电子与光子的波长均为  $0.50 \text{ nm}$ 。试求两者的动量之比以及动能之比。

解 电子动量  $p_e = \frac{h}{\lambda_e}$

光子动量  $p = \frac{h}{\lambda}$

$\lambda_e = \lambda$ , 所以  $p_e : p = 1$

光子动能即光子能量  $\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

电子动能  $\epsilon_k = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_e^2}$

$$\frac{\epsilon_k}{\epsilon} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_e^2} \frac{\lambda}{hc} = \frac{h}{2m_e\lambda_e c}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 0.50 \times 10^{-9} \times 3 \times 10^8} = 2.4 \times 10^{-3}$$

**【15-20】** 若一个电子的动能等于它的静能, 试求该电子的速率和德布罗意波长。

解 电子的动能等于它的静能, 则有

$$mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$$

因此 
$$m = 2m_0, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_0$$

故 
$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c$$

电子动量为 
$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

它的德布罗意波长

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0v} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times \sqrt{1 - 3/4}}{9.1 \times 10^{-31} \times 0.866 \times 3 \times 10^8} \text{ m} \\ &= 1.4 \times 10^{-12} \text{ m} = 1.4 \times 10^{-3} \text{ nm} \end{aligned}$$

**【15-21】** 设一电子被电势差  $U$  加速后打在靶上,若电子的动能全部转为一个光子的能量,求当这光子相应的光波波长为 500 nm(可见光)、0.1 nm(X 射线)和 0.000 1 nm( $\gamma$  射线)时,加速电子的电势差各是多少?

解 电子被加速后,其动能

$$\epsilon_k = eU$$

电子的动能全部转化为一个光子的能量,则

$$h\nu = \epsilon_k = eU$$

即 
$$\frac{hc}{\lambda} = eU$$

所以 
$$U = \frac{hc}{e\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \lambda} \text{ V} = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{\lambda} \text{ V}$$

若  $\lambda_1 = 500 \text{ nm} = 500 \times 10^{-9} \text{ m}$ , 则

$$U_1 = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-9}} \text{ V} = 2.48 \text{ V}$$

若  $\lambda_2 = 0.1 \text{ nm} = 0.1 \times 10^{-9} \text{ m}$ , 则

$$U_2 = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{0.1 \times 10^{-9}} \text{ V} = 1.24 \times 10^4 \text{ V}$$

若  $\lambda_3 = 0.000 1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-13} \text{ m}$ , 则

$$U_3 = \frac{1.24 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-13}} \text{ V} = 1.24 \times 10^7 \text{ V}$$

**【15-22】** 试证明带电粒子在均匀磁场中作圆轨道运动时,其德布罗意波长与圆半径成反比。

证 质量为 $m$ 、电荷量为 $q$ 的带电粒子在磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场中以速率 $v$ 作圆周运动时,轨道半径

$$r = \frac{mv}{qB}$$

动量

$$p = mv = qBr$$

其德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{qBr}$$

这表明德布罗意波长与圆半径成反比。

**【15-23】** 在戴维孙-革末实验中,已知晶格常量 $d=0.3 \text{ nm}$ ,电子经 $100 \text{ V}$ 电压加速,求各极大值所在的方向。

解 在戴维孙-革末实验中,电子束散射极大的角度满足以下条件

$$d \sin \theta = k \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

因此

$$\begin{aligned} \sin \theta &= k \frac{h}{d \sqrt{2meU}} \\ &= k \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.3 \times 10^{-9} \sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 100}} \\ &= 0.409 k \end{aligned}$$

当 $k=0$ 时,  $\theta=0$

当 $k=\pm 1$ 时,  $\theta = \arcsin(\pm 0.409) = \pm 24.1^\circ$

当 $k=\pm 2$ 时,  $\theta = \arcsin(\pm 0.409 \times 2) = \arcsin(\pm 0.818)$   
 $= \pm 54.8^\circ$

**【15-24】** 设粒子在沿 $Ox$ 轴运动时,速率的不确定量为 $\Delta v = 1 \text{ cm/s}$ ,试估算下列情况下坐标的不确定量 $\Delta x$ :(1)电子;(2)质量

为  $10^{-13}$  kg 的布朗粒子; (3) 质量为  $10^{-4}$  kg 的小弹丸。

解 在  $x$  轴方向上, 粒子坐标和动量的不确定度关系为

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

粒子沿  $x$  轴方向运动, 其动量为  $p_x = mv$ , 动量的不确定度  $\Delta p_x = m\Delta v$ , 代入上式可得坐标的不确定度

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\hbar}{2m\Delta v}$$

(1) 对于电子,  $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg, 代入后得

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1 \times 10^{-2}} \text{ m} \\ &= 5.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 5.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

(2) 对于  $m = 10^{-13}$  kg 的布朗粒子

$$\Delta x \geq \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-13} \times 1 \times 10^{-2}} \text{ m} = 5.3 \times 10^{-20} \text{ m}$$

(3) 对于  $m = 10^{-4}$  kg 的小弹丸

$$\Delta x \geq \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^{-2}} \text{ m} = 5.3 \times 10^{-29} \text{ m}$$

**【15-25】** 作一维运动的电子, 其动量不确定量是  $\Delta p_x = 10^{-25}$  kg · m/s, 能将这个电子约束在内的最小容器的大概尺寸是多少?

解 根据坐标和动量的不确定度关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

可得 
$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-25}} \text{ m} = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

因此, 能将这个电子约束在内的容器的最小尺寸大约是  $5 \times 10^{-10}$  m。

**【15-26】** 氦氖激光器所发出的红光波长为  $\lambda = 632.8$  nm, 谱线宽度  $\Delta\lambda = 10^{-9}$  nm。试求该光子沿运动方向的位置不确定量(即波列长度)。

解 取光子运动方向为  $x$  轴方向, 光子的动量

$$p_x = h/\lambda = 2\pi\hbar/\lambda$$

光子动量的不确定度

$$\Delta p_x = \frac{2\pi\hbar}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

根据粒子坐标与动量的不确定度关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

可得光子位置不确定量为

$$\begin{aligned} \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi\hbar \Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \\ &= \frac{632.8^2}{4 \times 3.14 \times 10^{-9}} \text{ nm} = 3.2 \times 10^{13} \text{ nm} = 32 \text{ km} \end{aligned}$$

**【15-27】** 如果钠原子所发出的黄色谱线( $\lambda=589 \text{ nm}$ )的自然宽度为 $\Delta\nu/\nu=1.6 \times 10^{-8}$ , 计算钠原子相应的波长态的平均寿命。

解 钠黄线光子的能量

$$\epsilon = h\nu$$

能量的不确定量

$$\Delta\epsilon = h\Delta\nu = 2\pi\hbar\Delta\nu$$

这一不确定量与钠原子相应的波长态的平均寿命 $\Delta t$ 满足能量和时间的不确定度关系

$$\Delta\epsilon\Delta t \geq \hbar/2$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2\Delta\epsilon} = \frac{\hbar}{4\pi\hbar\Delta\nu} = \frac{1}{4\pi\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)\nu} = \frac{\lambda}{4\pi c\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)} \\ &= \frac{589 \times 10^{-9}}{4 \times 3.14 \times 3 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-8}} \text{ s} \\ &= 9.77 \times 10^{-9} \text{ s} \end{aligned}$$

**【15-28】** 如果某球形病毒的直径为 $5 \text{ nm}$ 、密度为 $1.2 \text{ g/cm}^3$ 。试估算病毒的最小速率。

解 病毒的体积  $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$

病毒质量  $m = \rho V = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho$

病毒动量  $p = mv = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho v$

取病毒坐标的不确定量  $\Delta x = d$ , 动量的不确定量  $\Delta p_x = p$ 。根据不确定度关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

可得  $\frac{1}{6} \pi d^3 \rho v \geq \frac{\hbar}{2}$

$$v \geq \frac{3\hbar}{\pi d^3 \rho} = \frac{3 \times 1.05 \times 10^{-34}}{3.14 \times (5 \times 10^{-9})^3 \times 1.2 \times 10^3} \text{ m/s}$$

$$= 1.3 \times 10^{-4} \text{ m/s} = 0.13 \text{ mm/s}$$

最小速率  $v_{\min} = 0.13 \text{ mm/s}$ 。

**【15-29】** 试计算在宽度为  $0.1 \text{ nm}$  的无限深势阱中  $n=1, 2, 10, 100, 101$  各能态电子的能量。如果势阱宽为  $1.0 \text{ cm}$  又如何?

解 处于无限深势阱中的电子的能级公式是

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = n^2 E_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

已知  $a = 0.1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 当  $n=1$  时,

$$E_1 = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (1 \times 10^{-10})^2} \text{ J}$$

$$= 6.04 \times 10^{-18} \text{ J} = 37.7 \text{ eV}$$

当  $n=2$  时,  $E_2 = 2^2 E_1 = 4 \times 37.7 \text{ eV} = 150.8 \text{ eV}$

当  $n=10$  时,  $E_{10} = 10^2 E_1 = 100 \times 37.7 \text{ eV} = 3.77 \times 10^3 \text{ eV}$

当  $n=100$  时,  $E_{100} = 100^2 E_1 = 100^2 \times 37.7 \text{ eV} = 3.77 \times 10^5 \text{ eV}$

当  $n=101$  时,  $E_{101} = 101^2 E_1 = 101^2 \times 37.7 \text{ eV} = 3.85 \times 10^5 \text{ eV}$

若  $a' = 1.0 \text{ cm} = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 则当  $n=1$  时

$$E'_1 = \frac{\hbar^2}{8ma'^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (1.0 \times 10^{-2})^2} \text{ J}$$

$$= 6.04 \times 10^{-34} \text{ J} = 3.77 \times 10^{-15} \text{ eV} = 10^{-16} E_1$$

因此  $E'_n = n^2 E'_1 = 10^{-16} n^2 E_1 = 10^{-16} E_n$

当  $n=2$  时,  $E'_2 = 10^{-16} E_2 = 1.508 \times 10^{-14} \text{ eV}$

当  $n=10$  时,  $E'_{10} = 10^{-16} E_{10} = 3.77 \times 10^{-13} \text{ eV}$

当  $n=100$  时,  $E'_{100} = 10^{-16} E_{100} = 3.77 \times 10^{-11} \text{ eV}$

当  $n=101$  时,  $E'_{101} = 10^{-16} E_{101} = 3.85 \times 10^{-11} \text{ eV}$

**【15-30】** 一维无限深势阱中粒子的定态波函数为  $\psi_n =$

$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$ 。试求: (1) 粒子处于基态时; (2) 粒子处于  $n=2$  的状态

时, 在  $x=0$  到  $x=\frac{a}{3}$  之间找到粒子的概率。

解 (1) 粒子处于基态时,  $n=1$ 。所求概率为

$$\int_0^{a/3} |\psi_1(x)|^2 dx = \int_0^{a/3} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.19$$

(2) 粒子处于  $n=2$  的状态时, 所求概率为

$$\int_0^{a/3} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{a/3} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.40$$

**【15-31】** 一维运动的粒子处于如下波函数所描述的状态:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ 。(1) 求波函数  $\psi(x)$  的归一化常数  $A$ ; (2) 求粒子的概率分布函数; (3) 在何处发现粒子的概率最大?

解 (1) 归一化条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

因为  $x < 0$  时,  $\psi(x) = 0$ , 故

$$\int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

将波函数代入:

$$A^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2\lambda x} dx = A^2 \left( -\frac{1}{2\lambda} x^2 e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} 2x e^{-2\lambda x} dx \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A^2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-2\lambda x} dx \\
 &= \frac{A^2}{\lambda} \left( -\frac{1}{2\lambda} x e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda x} dx \right) \\
 &= \frac{A^2}{2\lambda^2} \left( -\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1
 \end{aligned}$$

所以  $A = 2\lambda^{\frac{3}{2}}$

(2) 设粒子坐标的概率分布函数为  $\omega(x)$ , 则

$$\omega(x) = |\psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$(3) \frac{d\omega(x)}{dx} = 4\lambda^3 (2xe^{-2\lambda x} - 2\lambda x^2 e^{-2\lambda x}) = 8\lambda^3 x e^{-2\lambda x} (1 - \lambda x)$$

令  $\frac{d\omega(x)}{dx} = 0$ , 则有  $x_1 = 0, x_2 \rightarrow \infty, x_3 = \frac{1}{\lambda}$ 。分别代入  $\omega(x)$  中, 得

$\omega(x_1) = 0, \omega(x_2) = 0, \omega(x_3) = \frac{4\lambda}{e^2}$ 。可见在  $x = \frac{1}{\lambda}$  处发现粒子的概率

最大, 最大概率密度为  $\frac{4\lambda}{e^2}$ 。

**【15-32】** 一维无限深势阱中的粒子的波函数, 在边界处为零, 这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 因而势阱宽度  $a$  必须等于德布罗意波长的整数倍。试利用这一条件导出能量量子化公式

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

解 粒子的能量  $E = \frac{p^2}{2m}$

德布罗意波长  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$

该定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 则势阱宽度(相当于弦长)必须等于德布罗意波半波长的整数倍。即

$$a = n \frac{\lambda}{2} = \frac{nh}{2\sqrt{2mE}}$$

由此得 
$$E = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

**【15-33】** 一个质子在一维无限深势阱中, 阱宽  $a = 10^{-14} \text{ m}$ 。  
(1) 质子的零点能量有多大? (2) 由  $n=2$  态跃迁到  $n=1$  态时, 质子放出多大能量的光子?

解 一个质子在一维无限深势阱中的能量为

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = n^2 E_1$$

(1)  $n=1$  时, 质子的能量为零点能, 大小为

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{8 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-14})^2} \text{ J} = 3.29 \times 10^{-13} \text{ J}$$

(2) 质子所放出的光子能量是

$$\begin{aligned} \epsilon &= E_2 - E_1 = 2^2 E_1 - E_1 = 3E_1 \\ &= 3 \times 3.29 \times 10^{-13} \text{ J} = 9.87 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

**【15-34】** 假设氢原子处于  $n=3, l=1$  的激发态。则原子的轨道角动量在空间有哪些可能取向? 计算各可能取向的角动量与  $z$  轴之间的夹角。

解  $l=1$  时, 电子的轨道角动量

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{1 \times (1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$

电子的磁量子数  $m_l = 0, \pm 1$ 。角动量在空间给定方向的投影为

$$L_z = m_l \hbar$$

即  $L_z = 0, \pm \hbar$ 。相应的取向与  $z$  轴间的夹角为

$$\theta_1 = \arccos \frac{L_{z1}}{L} = \arccos \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} \right) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{L_{z2}}{L} = \arccos 0 = 90^\circ$$

$$\theta_3 = \arccos \frac{L_{z3}}{L} = \arccos \left( -\frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} \right) = \arccos \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 135^\circ$$

由以上计算可得电子轨道角动量的空间取向如图 15-6 所示。

**【15-35】** 试说明钾原子中电子的排列方式, 并和钠元素的化学性质进行比较。

解 钾原子共有19个电子, 排列方式如下。

K壳层( $n=1$ ): 有2个s电子。

L壳层( $n=2$ ):

s分层( $l=0$ )有2个电子,

p分层( $l=1$ )有6个电子。

M壳层( $n=3$ ):

s分层有2个电子,

p分层有6个电子。

N壳层( $n=4$ ):

s分层有1个电子。

综上所述, 钾原子中电子排列方式是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$ 。因为3d电子比4s电子能量高, 根据能量最小原理, 第19个电子不是3d电子而是4s电子。

钠原子共有11个电子, 其排列方式是 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ 。由于钾原子和钠原子最外层都只有一个电子(即价电子), 所以它们有相似的化学性质, 都是一价的活泼金属元素。

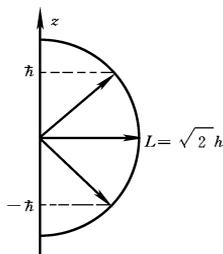


图 15-6

# 第十六章 激光和固体的量子理论

---

---

## 知识要点

### 1. 产生激光的基本条件

(1) 粒子数反转 处在高能态的原子数大于低能态的原子数,这种原子分布与正常分布相反,称为粒子数反转。粒子数反转可以在具有适当能级结构的工作物质中实现。

(2) 光学谐振腔 在光学谐振腔中,某一方向和频率的光子享有最优越的条件进行放大,而其他方向和频率的光子被抑止。在光学谐振腔中,光放大的规律为

$$I = I_0 e^{Gx}$$

$G$  称为增益系数。

### 2. 固体的能带结构

大量原子形成固体,彼此间距很小。原子能级由于原子间的相互作用发生分裂形成能带。填满电子的能带叫满带,满带中电子不能参与导电;部分填充电子的能带叫导带,导带中电子参与导电;没有电子的能带叫空带。能带与能带可能连接,可能重叠,也可能有一定间隔,这个间隔叫禁带。

### 3. 导体和绝缘体

导体中的能带有导带。绝缘体的空带与满带间有较宽的禁带。

### 4. 半导体

有三种类型的半导体。

本征半导体 满带和空带间禁带宽度较小,有少量电子和空

穴参与导电。

**n 型半导体** 参与导电的载流子是从施主能级跃迁到导带中的电子。

**p 型半导体** 参与导电的载流子是由于受主能级收容了从满带中跃迁来的电子后,在满带中产生的空穴。

### 5. p-n 结

p-n 结是在 p 型半导体和 n 型半导体接触面附近,由于电子从 n 型半导体向 p 型半导体扩散而形成的电偶层,它具有单向导电性。

## 思考题和习题解答

**【16-1】** 比较受激辐射和自发辐射的特点。

**答** 自发辐射是发光物质中各个原子自发地、独立地进行辐射,辐射的各个光子的相位、偏振态和传播方向之间没有确定的关系,因此,即使辐射出同频率的光,也不是相干光。

受激辐射的光子在频率、相位、偏振态和传播方向上均与诱发受激辐射的外来光子相同。在连续诱发的受激辐射中,各原子发出的光的频率、相位、偏振态和传播方向都相同,因此受激辐射的光是相干光。

**【16-2】** 实现粒子数反转要求具备什么条件?

**答** 要实现粒子数反转,必须要有激活物质。在这种物质的能级结构中,除了存在基态、激发态外,还须存在亚稳态能级。原子被激发到激发态后,通过无辐射跃迁,达到相当稳定的亚稳态。于是基态原子数不断减少,亚稳态原子数不断增多,从而实现亚稳态对基态的粒子数反转。

**【16-3】** 如果在激光的工作物质中,只有基态和另一个激发态,能否实现粒子数反转?

**答** 在工作物质中,如果只有基态和另一个激发态,则由于原

子在激发态的寿命极短,极容易通过自发辐射回到基态,使激发态原子数远小于基态原子数,不能实现粒子数反转。

**【16-4】** 谐振腔在激光的形成过程中起什么作用?

答 当激光的工作物质产生受激辐射时,由同一外来光子诱发的连续发生的受激辐射的光子具有相同的频率、相位、偏振态和传播方向。而初始诱发受激辐射的外来光子来源于自发辐射,因此不同外来光子在频率、相位、偏振态和传播方向上是随机的,不同外来光子诱发的受激辐射的光子在频率、相位、偏振态和传播方向上也是随机的。谐振腔的作用就在于使某一方向和频率的光子享有最优越的条件进行放大,而抑止其他频率和方向的光子。

**【16-5】** 已知 Ne 原子的某一激发态和基态的能量差  $E_2 - E_1 = 16.7 \text{ eV}$ , 试计算  $T = 300 \text{ K}$  时在热平衡条件下,处于两能级上的原子数的比。

解 在热平衡状态下,工作物质中原子在能级上的分布服从玻尔兹曼分布律,即

$$N_i = A e^{-E_i/(kT)}$$

能量差为  $E_2 - E_1$  的两个能级上原子数的比为

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/(kT)}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{kT} = \frac{16.7 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 645$$

因此 
$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-645} = 1.31 \times 10^{-280}$$

**【16-6】** 计算氢原子第一激发态  $E_2 (n=2)$  与基态  $E_1 (n=1)$  之间的能量差,用 eV 为单位。设火焰(温度为  $2700 \text{ K}$ )中含有  $10^{20}$  个氢原子,如果火焰中氢原子能级按玻尔兹曼分布律分布,求氢原子处于能级  $E_2$  的原子个数  $n_2$ 。设火焰中每秒放射的光子数为  $10^8 n_2$ , 求发光的功率。用 W 为单位。

解 氢原子能级公式为

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left( \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right)$$

氢原子第一激发态与基态之间的能量差

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3me^4}{32\epsilon_0^2 h^2} \\ &= \frac{3 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{32 \times (8.85 \times 10^{-12})^2 \times (6.63 \times 10^{-34})^2} \text{ J} \\ &= 1.62 \times 10^{-18} \text{ J} = 10.1 \text{ eV} \end{aligned}$$

氢原子在  $E_2$  能态和  $E_1$  能态上的数目的比

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-(E_2 - E_1)/(kT)}$$

$$\frac{E_2 - E_1}{kT} = \frac{1.62 \times 10^{-18}}{1.38 \times 10^{-23} \times 2700} = 44$$

因此

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-44} = \frac{1}{1.28 \times 10^{19}}$$

$$\frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1}{1.28 \times 10^{19} + 1} \approx \frac{1}{1.28 \times 10^{19}}$$

而

$$n_1 + n_2 = 10^{20}$$

故

$$n_2 = \frac{10^{20}}{1.28 \times 10^{19}} = 8$$

每个光子的能量

$$\epsilon = E_2 - E_1 = 1.62 \times 10^{-18} \text{ J}$$

发光功率即为

$$P = 10^8 n_2 \epsilon = 10^8 \times 8 \times 1.62 \times 10^{-18} \text{ W} = 1.30 \times 10^{-9} \text{ W}$$

**【16-7】** 氦氖激光为波长 632.8 nm 的红光。它的谱线宽度  $\Delta\lambda$  约为  $10^{-8}$  nm, 试计算它的相干长度。

解 相干长度  $\delta_m$  与光的波长  $\lambda$  及谱线宽度  $\Delta\lambda$  的关系为

$$\delta_m = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

这里

$$\lambda = 632.8 \text{ nm} = 632.8 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\Delta\lambda = 10^{-8} \text{ nm} = 10^{-17} \text{ m}$$

所以  $\delta_m \approx \frac{(632.8 \times 10^{-9})^2}{10^{-17}} \text{ m} = 4 \times 10^4 \text{ m} = 40 \text{ km}$

**【16-8】** 如果光在增益介质中通过 1 m 后, 光强增大至两倍, 若介质的增益系数  $G$  可视为常数, 试求  $G$ 。

解 光强在增益介质中按指数规律增长

$$I = I_0 e^{Gx}$$

由此得增益系数

$$G = \frac{1}{x} \ln \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1} \times \ln 2 \text{ m}^{-1} = 0.69 \text{ m}^{-1}$$

**【16-9】** 已知 He-Ne 激光器的输出功率为 4 mW, 输出端反射镜的透射率为 1%, 毛细管直径为 1 mm, 求腔内能量密度。

解 设激光器腔内能量密度为  $w$ , 毛细管横截面积为  $S$ , 则腔内光功率为

$$P = wcS$$

在谐振过程中, 布儒斯特窗起起偏作用, 输出的是完全偏振光。因此输出功率

$$P' = \frac{1}{2} \cdot 1\% \cdot P = \frac{1}{2} \cdot 1\% \cdot wcS$$

故

$$\begin{aligned} w &= \frac{2P'}{0.01cS} \\ &= \frac{2 \times 4 \times 10^{-3}}{0.01 \times 3 \times 10^8 \times 3.14 \times (0.5 \times 10^{-3})^2} \text{ J/m}^3 \\ &= 3.4 \times 10^{-3} \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

**【16-10】** 从能带结构来看, 导体、半导体和绝缘体有什么不同?

答 若价带已被电子填满, 成为满带, 在满带和空带之间的禁带宽度很大 ( $3 \sim 6 \text{ eV}$ ), 以致在一般情况下, 满带中很少有电子能被激发到空带中去, 在外电场作用下, 参与导电的电子极少, 显示出很高的电阻率, 这就是绝缘体。

半导体中的价带也已填满,但禁带宽度较小(0.1~1.5 eV),满带中的电子在不很强的外界影响下即可进入空带,参与导电,同时满带中留下的空穴也可参与导电。

导体的能带有两种类型:第一,价带未填满而成为导带;第二,价带虽已填满,但禁带宽度为零,满带与导带部分重叠。

**【16-11】** 半导体的导电机构是什么?适当掺入杂质和加热都能使半导体的电导率增加,这两种处理本质上有无不同?

答 半导体存在两种导电机构。在有电场时,跃入导带中的电子逆电场方向运动,而满带中空穴沿电场方向移动。在本征半导体中,两种导电机构兼而有之。在n型半导体中主要是电子导电,在p型半导体中主要是空穴导电。

对半导体加热,可以将更多的电子从满带激发到导带,同时在满带中产生同样多的空穴,使两种载流子浓度都增高,从而增加半导体的电导率。向半导体掺入杂质或者可以形成施主能级,向导带提供大量电子,或者可以形成受主能级,使满带中产生大量空穴,这都会使半导体载流子浓度增加,从而提高半导体的电导率。

**【16-12】** 试由霍尔系数的定义和载流子所受洛伦兹力,粗略地证明p型半导体的霍尔系数  $R_H = \frac{1}{n_p e}$ , n型半导体的霍尔系数  $R_H = \frac{1}{n_n e}$ , 式中  $n_p$  和  $n_n$  分别表示空穴或电子的浓度。

解 设有如图16-1所示的p型半导体,磁场由前向后垂直于表面,电流从左向右流过半导体,则上下表面分别带有正电荷和负电荷,电势差

$$U = R_H \frac{IB}{d}$$

$R_H$  即为霍尔系数,它可定义为

$$R_H = \frac{Ud}{IB} \quad (1)$$

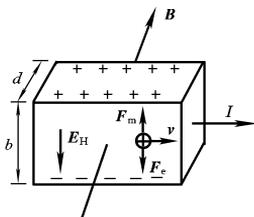


图 16-1

p 型半导体的载流子为带正电的空穴。在稳定情况下,它受到的霍尔电场力与洛仑兹力平衡,即  $F_m = F_e$ 。

$$F_m = evB, \quad F_e = eE_H$$

由此可得

$$E_H = vB$$

于是霍尔电势差

$$U = E_H b = vBb \quad (2)$$

设 p 型半导体中空穴浓度为  $n_p$ , 则电流强度

$$I = n_p e v d b \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1), 可得

$$R_H = \frac{1}{n_p e}$$

同理可证, n 型半导体的霍尔系数为

$$R_H = \frac{1}{n_n e}$$

**【16-13】** 在室温下 n 型锗的霍尔系数  $R_H = 100 \text{ cm}^3/\text{C}$ , 求载流子浓度。

解 该 n 型锗的载流子浓度为

$$n_n = \frac{1}{R_H e} = \frac{1}{100 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ cm}^{-3} = 6.25 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

**【16-14】** p 型半导体与 n 型半导体接触后形成 p-n 结, n 型的电子能否无限地向 p 型扩散?

答 当 p 型半导体和 n 型半导体接触时, p 型半导体中的空穴浓度大大高于 n 型半导体, 而 n 型半导体中的自由电子浓度大大高于 p 型半导体。这样, 在接触面附近就出现电子从 n 型半导体向 p 型半导体的扩散, 使 p 型半导体一侧具有过多的负电荷, 因而电势较低, n 型半导体一侧具有过多的正电荷, 因而电势较高, 在接触面附近就出现从 n 型半导体指向 p 型半导体的电场, 这种电场抑制电子的扩散, 因此扩散进行到一定程度就会停止。

**【16-15】** 已知 CdS 和 PbS 的禁带宽度分别为 2.43 eV 和

0.3 eV, 试计算它们的本征光电导的吸收限, 并由此说明为什么 CdS 可用在可见光到 X 射线的短波方面, 而 PbS 却可有效地用在红外线方面。

解 只有当照射到晶体上的光子的能量大于禁带宽度  $E_g$  时才能发生本征吸收, 即光子频率需满足

$$h\nu \geq E_g$$

波长需满足

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \leq \frac{hc}{E_g}$$

对 CdS:

$$\lambda \leq \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2.43 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5.1 \times 10^{-7} \text{ m} = 510 \text{ nm}$$

所以从可见光中波长小于 510 nm 的光, 直到 X 射线才能使 CdS 产生本征光电吸收。

对 PbS:

$$\begin{aligned} \lambda &\leq \frac{hc}{E_g} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{0.3 \times 1.6 \times 10^{-19}} \text{ m} \\ &= 4.14 \times 10^{-4} \text{ m} = 4140 \text{ nm} \end{aligned}$$

由此可见, 对 PbS, 红外线已可使它发生本征吸收。