数学奥林匹克小丛书・高中卷

三 角 与 几 何

田廷彦　编著

华东师范大学出版社

前　言

不久以前，笔者到复旦大学聆听著名数学家吴文俊先生作学术报告．在报告行将结束之际，吴先生感叹平面几何“难得要死”，而他提出的数学机械化方法，可以让计算机在微秒级的时间内完成一道几何题的证明．其实，从吴先生的传记看，他从小也是位几何爱好者．正因为有这样的经历，他才能有这番肺腑之言，才让几何问题的机器证明首先成为数学机械化的一块试金石．数学机械化真正要做的是高等数学中的诸如解方程之类的算法设计问题，这已在很多领域取得了成就．

自从 1997 年“更深的蓝”击败国际象棋世界冠军卡斯帕罗夫后，有人感到机器开始向人类的智慧挑战．尽管就目前来看这是一种多虑，但至少国际象棋的魅力受到了一定影响．不过，几何机械化是绝对不会影响传统几何证明的．因为从“复杂度”来看，几何比象棋要高一个层次，因为后者完全可以转化为算法，而前者证明过程的重要性不亚于结果（当然数论、拓扑学之类具有更高的复杂度）；其次，数学机械化其实从笛卡儿时代就开始了，如今的新方法也不是凭空出世的，而是与传统方法有着密切联系．或许正是因为吴先生曾是个几何爱好者，所以平面几何的机械化成为数学机械化工作中的一个“偶然事件”．（只可惜几次与吴先生交谈，都出于敬仰而使客套话几乎占据了一切，“偶然事件”大概永远成为笔者的一个猜测了．）真正懂得几何的人都知道，几何中的不少结果十分精致漂亮，与数论、不等式不一样，它更具有“上帝”心思的味道，也就是说更为“天然”，人为的痕迹要少些．在数论、不等式中，提出一个问题往往远比解决一个问题来得容易，但在几何中并非如此．因此，几何的机械化工作在发现几何命题方面是超越历史的，但寻求一个简洁的传统证明，也是不无意义的（至少在奥数培训方面）．

在所有的传统方法中，纯几何方法无疑是最最困难的，“几何几何，想破脑壳”，苦尽甘来，唯有自知．但笔者也不欣赏一味地“蛮算”，这样不仅抹杀了几何的美感，更重要的是不易看透问题的本质、意义以及与其他问题的联系，也

很难留下较深刻的印象，这对于今后的学习都是不利的；更何况很多几何难题的计算量会大到令人望而却步（总不能像费马那样写道，“我已经找到了一个绝妙的证明，只可惜这里地方太小，写不下”）的程度；当然，既然是“竞赛”而不是“研究”，那么花几个星期添十几条辅助线也是不足取的. 笔者还是认为折中的方案比较好，尤其是三角方法特别受到青睐. 这是因为三角方法比解析法灵活，可以简化证明，少添辅助线，且仍能做到有章可循.

单墫教授有一句话给笔者留下了深刻的印象. 数年前，笔者曾向他感叹数学之难，单教授的回答意味深长：“弱水三千，只取一瓢. 做点普及工作，不算虚度一生. ”因此，本书收集了很多题目，有一部分是全新的，笔者希望读者不要错过思考这些问题的机会. 在写作上常采用分析法，这有助于理清思路（尤其是较复杂的问题）. 特别要指出的是，本书第 1 单元的例 1、例 7，习题 2 的第 18 题，第 5 单元的例 14、例 15，以及第 6 单元的例 7 是笔者的师友、杰出的平面几何专家叶中豪先生的成果（有的已经找到了漂亮的纯几何证明），还有一些是笔者自己的成果. 对于中豪大量深入的发现来说，这几道题目也真算得上是“弱水三千，只取一瓢”了.

作者

2004. 6. 27

目录

1 三角比的基本性质和初步应用

三角比及三角函数的提出，是数学史上一次巨大的进步. 它在数学的大多数分支中都极为有用，并常常起到本质的作用. 对于平面几何来说，三角比对其核心内容——直角、面积及勾股定理等——给出了一种更为清晰的理解方式.

本单元用到的工具是三角比的定义、基本性质(如增减性、诱导公式等)和常见的特殊角(如 $45°$、$60°$等)的三角函数值.

例 1 已知等腰$\triangle ABC$，$AB=AC$，一半圆以 BC 的中点为圆心，且与两腰 AB、AC 分别相切于点 D、G，EF 与半圆相切，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F. 过 E 作 AB 的垂线，过 F 作 AC 的垂线，两垂线相交于 P，作 $PQ\perp BC$，Q 为垂足. 求证：$PQ=\dfrac{EF}{2\sin\theta}$，此处 $\theta=\angle B$.

证明 如图 1-1，设 $BC=a$，$AB=AC=l=\dfrac{a}{2\cos\theta}$，又设 $BE=m$，$CF=n$，$BQ=s$，$CQ=t$，借助于线段 AP、BP、CP，利用勾股定理，有

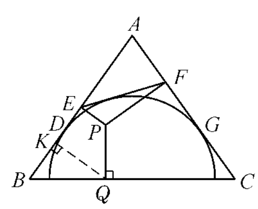


图 1-1

$$AE^2+BQ^2+CF^2=BE^2+AF^2+CQ^2,$$

即 $$(l-m)^2+s^2+n^2=m^2+(l-n)^2+t^2,$$

所以 $$s^2-t^2=2l(m-n)=\frac{a}{\cos\theta}(m-n),$$

又 $s+t=a$，故 $$s-t=\frac{m-n}{\cos\theta},$$

于是 $$s=\frac{a}{2}+\frac{m-n}{2\cos\theta}.$$

易知

$$BD = CG = \frac{a}{2}\cos\theta,$$

$$\begin{aligned} EF &= DE + FG \\ &= BE + CF - (DB + CG) \\ &= m + n - a\cos\theta. \end{aligned}$$

现作 $QK \perp AB$**，则** $\angle PQK = \angle B = \theta$.

于是由 $BK + KE = BE$**，得**

$$s\cos\theta + PQ\sin\theta = m,$$

所以

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{m - s\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{m - \left(\frac{a}{2} + \frac{m-n}{2\cos\theta}\right)\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\frac{m+n}{2} - \frac{a}{2}\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{m + n - a\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{EF}{2\sin\theta}. \end{aligned}$$

评注　这个漂亮的结果是叶中豪先生告诉笔者的. 此证明对几何综合素质有一定的要求. 三角比的引入给证明带来不少便利.

例 2　设四边形 $ABCD$ **的对角线交于点** O**，点** M**、**N **分别是** AD**、**BC **的中点，点** H_1**、**H_2**（不重合）分别是**$\triangle AOB$ **与**$\triangle COD$ **的垂心，求证：**

$$H_1H_2 \perp MN.$$

证明　如图 1-2**，不妨设** $\angle AOB$ $(=\theta) < 90^\circ$**（其余情形请读者自己讨论），并不妨设** BH_1 **与** CH_2 **的延长线交于点** P.

取 AB **中点** Q**，连接** MQ**、**NQ**. 易见** $MQ \parallel BD$**，从而** $MQ \perp H_2P$**，同理可得** $NQ \perp H_1P$**，于是** $\angle P = \angle MQN$**. 对于**$\triangle PH_1H_2$ **与**$\triangle QNM$ **来说，对应角已有一组相等，对应边已有两组垂直，如能证明它们是（顺向）相似的，则立得第三组对应边垂**

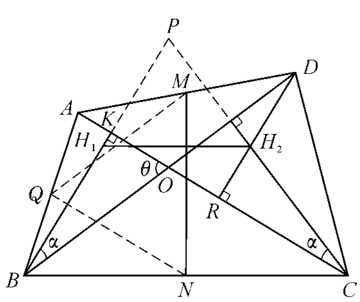


图 1-2

直，即 $MN \perp H_1H_2$.

于是，问题归结为求证

$$\frac{QM}{QN}=\frac{PH_2}{PH_1} \text{ 或 } \frac{PH_1}{PH_2}=\frac{AC}{BD}.$$

设 $\angle PCO=\alpha(=90^\circ-\theta)=\angle PBO$，于是

$$\frac{KR}{PH_2}=\cos\alpha,$$

此处点 K 和 R 分别为点 B 及点 D 在 AC 上的垂足.

又 $KR=BD\cos\theta$，故

$$PH_2=BD\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}=BD\cot\theta,$$

同理
$$PH_1=AC\cot\theta,$$

即得
$$\frac{PH_1}{PH_2}=\frac{AC}{BD}.$$

评注 此题有对称性，求出一个值后另一值同理可求，这确实省了不少事. 由此可得一著名的结论：完全四边形的垂心线与牛顿线垂直.

例 3 已知平行四边形 $ABCD$，点 E 是点 B 在 AD 上的垂足，点 F 在 CD 上，$\angle AFB=90^\circ$，$EG \parallel AB$，点 G 在 BF 上，点 H 是 AF 与 BE 的交点，又 DH 延长后与 CB 的延长线交于点 I，求证：$FI\perp GH$.

证明 如图 1-3，作 $IK\perp HF$，对于 $\triangle FKI$ 与 $\triangle HFG$ 来说，$KF\perp FG$，$KI\perp HF$，而 $\angle HFG=90^\circ=\angle FKI$，如果能证明两三角形（顺向）相似，那么第三组对应边 FI 与 HG 就垂直了，于是只需证明

$$\frac{KF}{FG}=\frac{KI}{HF} \text{ 或 } \frac{KF}{KI}=\frac{FG}{HF}.$$

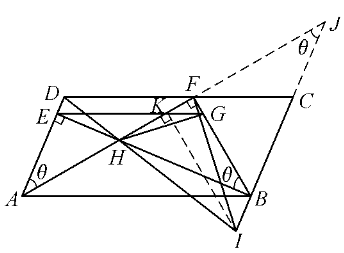


图 1-3

事实上设 AF、BC 延长后交于点 J，且设 $\angle J=\theta$，则易知

$$KF=BI\cos\theta,$$
$$KI=IJ\sin\theta,$$

于是

$$\frac{KF}{KI}=\frac{BI}{IJ}\cot\theta=\frac{DE}{AD}\cot\theta=\frac{FG}{FB}\cot\theta,$$

又 $HB\perp BJ$，故 $\angle HBF=\theta$，于是

$$FB\tan\theta=HF,$$

代入上式，即得

$$\frac{KF}{KI}=\frac{FG}{HF}.$$

评注 这道题目值得我们去回味的是：凡是直角多的题不妨多考虑三角比.

例 4 已知正三角形 ABC 内有一点 P，在三边 BC、CA、AB 上的垂足分别为点 D、E、F，连接 PA、PB、PC，求证：

$$S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}=S_{\triangle PBF}+S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PCD}.$$

证明 此题比想象的略难一些. 计算是必要的，关键在于如何设置既少又好的自由参数，使论证最简捷.

下面介绍一种方法. 如图 1-4，过点 P 作 $MN\parallel BC$，点 M、N 分别在 AB、AC 上，设 $PM=a$，$PN=b$，$PD=h$. 下面我们来计算.

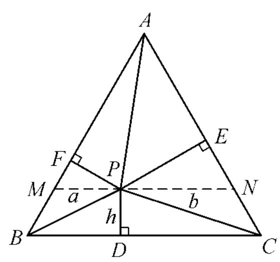


图 1-4

先看 $S_{\triangle PAF}$，由于

$$PF=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$AF=AM-MF=(a+b)-a\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a+b,$$

故
$$S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}AF\cdot PF=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab.$$

其次，看 $S_{\triangle PBD}$，由于

$$BD=a+h\cot 60^\circ=a+\frac{h}{\sqrt{3}},$$

故 $$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}BD\cdot PD=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2.$$

最后看 $S_{\triangle PCE}$，由于

$$\begin{aligned}PE&=b\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}b,\\CE&=EN+CN\\&=b\cos 60^\circ+\frac{h}{\sin 60^\circ}\\&=\frac{b}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}h,\end{aligned}$$

故 $$S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}CE\cdot PE=\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2}bh.$$

这样便有

$$\begin{aligned}&S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCE}\\=&\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2+\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2}bh\\=&\frac{\sqrt{3}}{8}a^2+\frac{\sqrt{3}}{8}b^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}h^2+\frac{\sqrt{3}}{4}ab+\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh\\=&\frac{\sqrt{3}}{8}\left(a+b+\frac{2}{\sqrt{3}}h\right)^2\\=&\frac{\sqrt{3}}{8}BC^2\\=&\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$

显然可知 $$S_{\triangle PBF}+S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

由此知结论成立.

例 5 已知$\triangle ABC$，其中 BC 上有一点M，且$\triangle ABM$ 与$\triangle ACM$ 的内切圆大小相等，求证：

$$AM=\sqrt{p(p-a)},$$

此处 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，a、b、c 分别为 $\triangle ABC$ 对应三边之长．

证明 设 $AM=x$，两圆半径均为 r，易知

$$r(a+b+c+2x)=2S_{\triangle ABC}.$$

如图 1-5，设两圆与 BC 分别切于点 E、F，则

$$BE=r\cot\frac{\angle B}{2}=\frac{1}{2}(AB+BM-x),$$

$$CF=r\cot\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{2}(AC+CM-x),$$

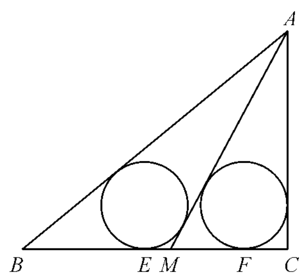


图 1-5

两式相加，得

$$r\left(\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{1}{2}(a+b+c-2x),$$

于是，有

$$S_{\triangle ABC}\left(\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)^2-x^2.$$

又设$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r'，易知

$$\begin{aligned}
&S_{\triangle ABC}\left(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(r'\cot\frac{\angle A}{2}+r'\cot\frac{\angle B}{2}+r'\cot\frac{\angle C}{2}\right)\cdot(a+b+c)\\
=&\frac{1}{2}\left(\frac{b+c-a}{2}+\frac{a+c-b}{2}+\frac{a+b-c}{2}\right)(a+b+c)\\
=&\frac{1}{4}(a+b+c)^2.
\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}
x^2&=S_{\triangle ABC}\cdot\cot\frac{\angle A}{2}\\
&=\frac{1}{2}r'(a+b+c)\cdot\frac{b+c-a}{2r'}\\
&=\frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a)\\
&=p(p-a).
\end{aligned}$$

评注 此题看似不难，但计算不当却极易陷入“泥潭”.

例 6 已知凸五边形 $ABCDE$，其中 $\angle ABC=\angle AED=90^\circ$，$\angle BAC=\angle EAD$，$BD$ 与 CE 交于点 O，求证：

$$AO \perp BE.$$

证明 由于 O 点的位置不易刻画，考虑用同一法，先作 $AH \perp BE$，H 为垂足. 再延长 AH 后分别交 CE、BD 于点 O' 和点 O''，如能证明 $HO' = HO''$，则有 O' 与 O'' 重合于点 O，问题即解决.

如图 1-6，设 $\angle BAC = \angle EAD = \theta$. 作 $CM \perp BE$，则

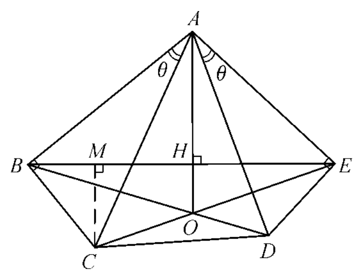


图 1-6

$$\frac{HO'}{MC} = \frac{HE}{ME},$$

$$\begin{aligned} MC &= BC\sin\angle EBC \\ &= BC\cos\angle ABE \\ &= BC\sin\angle BAH \\ &= BC \cdot \frac{BH}{AB} = BH\tan\theta, \end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned} ME &= BE - BM \\ &= BE - BC\cos\angle CBE \\ &= BE - BC \cdot \frac{AH}{AB} \\ &= BE - AH\tan\theta, \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} HO' &= MC \cdot \frac{HE}{ME} \\ &= \frac{HB \cdot HE \cdot \tan\theta}{BE - AH\tan\theta}, \end{aligned}$$

注意这个式子是对称的，同理有

$$HO'' = \frac{HB \cdot HE \cdot \tan\theta}{BE - AH\tan\theta}.$$

评注 这类题目用三角比来证是十分合适的.

例 7 如图 1-7，EF 是锐角 $\triangle ABC$ 的中位线，P 是 BC 上一动点，点 Q 在 AE 上，满足 $QB = QP$，点 R 在 CF 上，满足 $RC = RP$，QR 与 EF 交于 M，求证：$EM - \frac{1}{2}BP$ 是定值（即不依赖于动点 P）.

证明 延长 PR，交 EF 延长线于点 S.

由于
$$\angle STP = \angle QPB = \angle B,$$

$$\angle S=\angle RPC=\angle C,$$

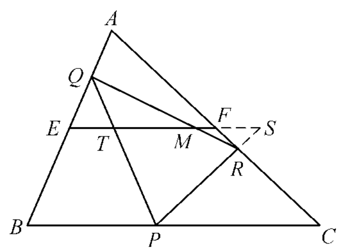


图 1-7

易知$\triangle TPS$与以$\triangle ABC$的中位线为边的三角形全等(事实上设BC上的高为AD,则$ED \parallel TP$, $FD \parallel PS$).

于是 $TS=EF=\frac{1}{2}BC$,

故 $$ET=FS.$$

由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{PQ}{QT}\cdot\frac{TM}{MS}\cdot\frac{SR}{RP}=1,$$

而 $$\frac{PQ}{QT}=\frac{BP}{ET},\ \frac{SR}{RP}=\frac{FS}{PC},$$

代入前式,得

$$\frac{MS}{TM}=\frac{BP}{PC},$$

即

$$\frac{TS}{TM}=\frac{BC}{PC},$$

所以 $$TM=TS\cdot\frac{PC}{BC}=\frac{1}{2}PC,$$

又由于

$$\frac{ET}{BP}=\frac{EQ}{QB}=1-\frac{BE}{QB},$$

所以 $$\begin{aligned}ET&=BP-BE\cdot\frac{BP}{QB}\\&=BP-\frac{1}{2}AB\cdot 2\cos B\\&=BP-AB\cos B,\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}EM&=ET+TM\\&=BP-AB\cos B+\frac{1}{2}PC\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}BP-AB\cos B+\frac{1}{2}(BP+PC)$$
$$=\frac{1}{2}BP-AB\cos B+\frac{1}{2}BC,$$

于是，$EM-\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}BC-AB\cos B$ 为定值.

例 8 已知等腰梯形 $ABCD$，G 是对角线 BD 与 AC 的交点，过点 G 作 EF 与上、下底平行，点 E、F 分别在 AB 和 CD 上，求证：$\angle AFB=90^\circ$ 的充要条件是 $AD+BC=CD$.

证明 如图 1-8，不妨设 $AD=a$，$BC=b$，易知 $GF=\frac{ab}{a+b}$.

充分性比较容易，注意到

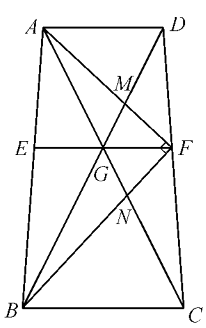


图 1-8

$$\frac{DF}{CD}=\frac{GF}{BC},$$

即 $$\frac{DF}{a+b}=\frac{ab}{(a+b)b},$$

故 $$DF=a,$$

这样一来就有 $$AD=DF,$$

于是 $$\angle DFA=\angle DAF=\angle AFE,$$

同理 $$\angle GFB=\angle CFB,$$

于是 $$\angle AFB=90^\circ.$$

必要性就不那么容易了，考虑用面积(或正弦定理)，设 GD 与 AF 交于点 M，有

$$\frac{AD}{GF}=\frac{MD}{MG}=\frac{S_{\triangle MDF}}{S_{\triangle MGF}}=\frac{DF}{GF}\cdot\frac{\sin\angle DFA}{\sin\angle AFE},$$

于是 $$\frac{\sin\angle DFA}{\sin\angle AFE}=\frac{AD}{DF}=\frac{AD}{CD}\cdot\frac{BC}{GF},$$

同理 $$\frac{\sin\angle CFB}{\sin\angle EFB}=\frac{\sin\angle CFB}{\sin\angle FBC}=\frac{BC}{CF}=\frac{AD}{CD}\cdot\frac{BC}{GF}.$$

考虑到 $\angle CFB=90^\circ-\angle DFA$，$\angle EFB=90^\circ-\angle AFE$，故

$$\frac{\sin\angle CFB}{\sin\angle EFB}=\frac{\cos\angle DFA}{\cos\angle AFE},$$

于是
$$\frac{\sin\angle DFA}{\sin\angle AFE}=\frac{\cos\angle DFA}{\cos\angle AFE},$$

即
$$\tan\angle DFA=\tan\angle AFE,$$

于是
$$\angle DFA=\angle AFE=\angle FAD,$$

所以
$$AD=DF,$$

同理
$$BC=CF,$$

因此
$$AD+BC=CD.$$

习 题 1

1 设$\triangle ABC$外接圆O半径为1,内心是I, $\angle B=60^\circ$, $\angle A<\angle C$. $\angle A$的外角平分线交圆O于点E,求证:$IO=AE$; $2<IO+IA+IC<1+\sqrt{3}$.

2 延长锐角三角形ABC的三条高AD、BE、CF,分别交其外接圆于点L、M和N,求证:$\frac{BC}{HA}+\frac{AC}{HB}+\frac{AB}{HC}=\frac{BC}{HL}+\frac{AC}{HM}+\frac{AB}{HN}$,其中$H$为$\triangle ABC$的垂心.

3 点M、N分别是$\triangle ABC$的边AC、AB的中点,设$\triangle ANC$和$\triangle AMB$的外接圆交于点A和P,$\triangle AMN$的外接圆交AP于点T,求$AT:AP$的值.

4 H和O分别是锐角三角形ABC的垂心和外心,且$AH=AO$,求$\angle A$的所有可能值.

5 在锐角$\triangle ABC$中,BC最短,$\angle A$的内角平分线交BC于点D,$\angle B$和$\angle C$的外角平分线分别交射线AC、AB于点E、F,过点D、E、F分别作BC、AC、AB的垂线,求证:若这三条垂线共点,则$AB=AC$.

6 设AB是$\odot O$直径,过点A、B的切线分别为l_A与l_B,C是圆周上一点,BC延长后交l_A于点K,$\angle CAK$的平分线交CK于点H. 设M为弧$\overset{\frown}{CAB}$的中点,HM与$\odot O$又另交于一点S,过M的$\odot O$的切线交l_B于点T,求证:S、T、K三点共线.

7 设$\triangle ABC$中,BM是中线,且$\angle ABM=\angle A+\angle C$,求证:$\tan\angle ABM=$

$3\tan A$.

8 $\triangle ABC$ 中，BD、CE 是角平分线，求证：DE 必定与 $\triangle ABC$ 的内切圆相交.

9 求证：若一双心四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，两圆圆心距为 d，则 $\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}$.

10 设 AB 是 $\odot O$ 的直径，l 为过点 A 的切线，点 C、M、D 为 l 上在 A 同侧依次排列的三个点，且 $CM=DM$. 又设直线 BC、BD 分别交 $\odot O$ 于点 P、Q，求证：可以在直线 BM 上找到一点 R，使 RP 和 RQ 均与 $\odot O$ 相切.

11 已知圆内接四边形 $ABCD$，C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 中点，P 是 $\overset{\frown}{AD}$ 上任一点，BP、CP 分别交 AC、AD 于点 M、N，求证：$MN \parallel BD$.

12 已知平行四边形 $ABCD$，CN、CM 分别垂直于 AB、AD，且点 N、M 在 AB、AD 上. 延长 NM，与 BD 的延长线交于点 P，求证：$PC \perp AC$.

2 余弦定理

余弦定理与正弦定理(关于正弦定理,见本丛书中一本讲面积的书)一样基本,其应用也同样广泛(只是不如正弦定理“轻巧”). 需要注意的是,余弦定理既是勾股定理的推广,又是勾股定理的推论,因此不能用余弦定理来证明勾股定理;其次是,需知道公式 $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$,这样判断三角形某内角是锐角、直角还是钝角,只需研究三边平方之间的关系. 最后需要说明的是,本单元不是只谈余弦定理的,而是综合前一单元的方法及正弦定理,后面的单元也有类似情况,不再赘述.

例 1 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$,延长 AC 到点 D,连接 BD,若 $\angle CBD=30^\circ$ 且 $AB=CD=1$,求 AC 之长.

解 如图 2-1,设 $AC=x$, $BD=y$.

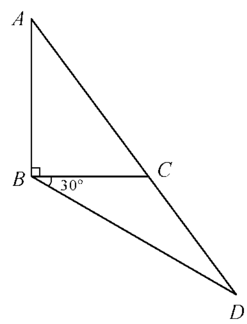


图 2-1

则

$$x=\frac{AC}{CD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BC}{\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin 30^\circ}=\frac{2}{BD}=\frac{2}{y}.$$

又由余弦定理,

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos 120^\circ,$$

此即

$$(1+x)^2=1+\left(\frac{2}{x}\right)^2+\frac{2}{x}.$$

化简并整理,得

$$(x+2)(x^3-2)=0,$$

$$x_1 = -2(\text{舍}),\ x_2 = \sqrt[3]{2}.$$

所以 $$AC = x = \sqrt[3]{2}.$$

评注 此题用一次面积比，用一次余弦定理，等于列出两个变量的方程组，在方法上是比较讲究的. 如果方法上不讲究，或试图用纯几何的办法，将要陷入一个"死胡同"的.

例 2 AP、AQ、AR、AS 是同一个圆中的四条弦，已知 $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$，求证：$AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)$.

证明 如图 2-2，设 $PQ = QR = RS = d$.

$$\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS = \theta.$$

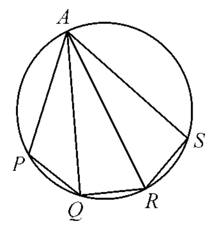


图 2-2

由余弦定理，

$$d^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ\cos\theta, \quad ①$$
$$d^2 = AQ^2 + AR^2 - 2AQ \cdot AR\cos\theta, \quad ②$$
$$d^2 = AR^2 + AS^2 - 2AR \cdot AS\cos\theta. \quad ③$$

①－②，得

$$AR^2 - AP^2 = 2AQ(AR - AP)\cos\theta. \quad ④$$

②－③，得

$$AS^2 - AQ^2 = 2AR(AS - AQ)\cos\theta. \quad ⑤$$

如果 $AR = AP$，则 AQ 是直径；而 $AQ = AS$ 的充要条件也是 AR 是直径.

如果 AQ、AR 都不是直径，则由④、⑤两式可分别得到

$$AR + AP = 2AQ\cos\theta,\ AS + AQ = 2AR\cos\theta.$$

两式相除，再作整理，即有

$$AR(AR + AP) = AQ(AQ + AS).$$

若 AQ、AR 之一为直径，不妨设 AQ 是直径，那么⑤式仍可化简为

$$AS + AQ = 2AR\cos\theta.$$

至于④式，亦可化为

$$AR + AP = 2AQ\cos\theta.$$

这是因为 $AR = AP = AQ\cos\theta$.

综上所述，结论成立.

评注　此题想到用余弦定理还是比较自然的，在计算顺序上有些讲究，读者要认真体会.

例 3　证明所谓的“射影定理”，设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 对应的边长，则有 $a\cos B + b\cos A = c$，$a\cos C + c\cos A = b$，$c\cos B + b\cos C = a$.

说明　其实这用“cos”的定义就可得出，但要知道 $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$，当然它也可由余弦定理推出，反之，这个定理亦可推出余弦定理.

“射影定理”也有点用处.

例 4　$\triangle ABC$ 三边长分别为 a、b、c，其中 $b < c$，AD 是角平分线. 若 AB、AC 上分别存在一点 E、F（非端点），满足 $BE = CF$，$\angle BDE = \angle CDF$，试用 a、b、c 表示 BE 的长.

证明　如图 2-3，由于点 D 至 BE、CF 距离相等，又 $BE = CF$，故

$$S_{\triangle BDE} = S_{\triangle CDF}.$$

于是有

$$BD \cdot DE = DC \cdot DF. \quad ①$$

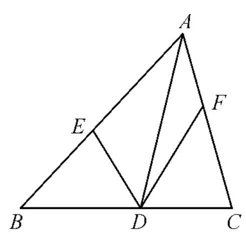


图 2-3

又由余弦定理，有

$$\begin{aligned} & BD^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE\cos\angle EDB \\ = & BE^2 = CF^2 \\ = & CD^2 + DF^2 - 2CD \cdot DF\cos\angle FDC. \end{aligned}$$

因为 $\angle EDB = \angle FDC$，故

$$BD^2 + DE^2 = CD^2 + DF^2.$$

于是与①式合并可得

$$BD + DE = CD + DF. \quad ②$$

由此可知下列两种情况成立：

$$\begin{cases} BD = CD, \\ DE = DF; \end{cases} \quad \begin{cases} BD = DF, \\ DE = CD. \end{cases}$$

若 $BD = CD$，则 $AB = AC$，与题设矛盾，因此只可能是后一种情况成立.

这样一来，$\triangle BDE \cong \triangle FDC$，

于是 $$\angle DFC = \angle B，A、B、D、F \text{ 四点共圆，}$$

于是 $$CF \cdot CA = CD \cdot CB，$$

而 $$CA = b，CB = a，CD = \frac{ab}{b+c}，$$

所以 $$CF(= BE) = \frac{a^2}{b+c}.$$

例 5 （“四边形的余弦定理”之一）设凸四边形 $ABCD$ 之对角线交于点 P，$\angle APB = \theta$，求证：

$$\cos\theta = \frac{AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2}{2AC \cdot BD}.$$

证明 如图 2-4，不妨设 PA、PB、PC、PD 的长分别为 a、b、c、d，则有

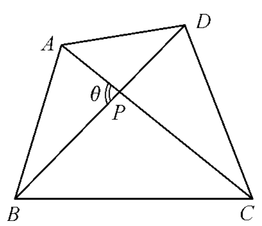


图 2-4

$$\begin{aligned}
AD^2 &= a^2 + d^2 + 2ad\cos\theta, \\
BC^2 &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta, \\
AB^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \\
CD^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\theta.
\end{aligned}$$

前两式之和减去后两式之和，得

$$\begin{aligned}
&AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 \\
&= 2(ad + bc + ab + cd)\cos\theta \\
&= 2AC \cdot BD\cos\theta.
\end{aligned}$$

评注 当四边形四边固定时，整个四边形一般仍能变形，这个定理却说明：尽管对角线的某夹角大小在变，但其锐角、直角或钝角的性质保持不变. 例如 $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ 时，θ 恒为 $90°$.

例 6 （“四边形的余弦定理”之二）求证：对于一凸四边形 $ABCD$，有 $CD^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 - 2AD \cdot AB\cos A - 2AB \cdot BC\cos B + 2AD \cdot BC(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$.

证明 如图 2-5，过点 C、D 作直线 AB 的垂线，垂足分别为点 F、E，则

$$EF = AB - AD\cos A - BC\cos B,$$

又 $\quad DE = AD\sin A, CF = BC\sin B$，故

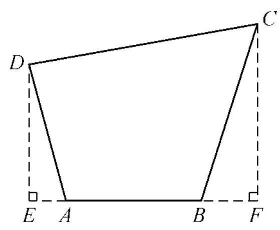


图 2-5

$$\begin{aligned}CD^2 &= (CF-DE)^2+EF^2\\ &= (BC\sin B - AD\sin A)^2 + (AB - AD\cos A - BC\cos B)^2\\ &= AB^2+AD^2+BC^2-2AB\cdot AD\cos A - 2AB\cdot BC\cos B + 2AD\cdot BC(\cos A\cos B - \sin A\sin B).\end{aligned}$$

我们知道，$\cos A\cos B - \sin A\sin B = \cos(A+B)$，因此上述公式还可简化.

例 7 （“四边形的余弦定理”之三）已知凸四边形 $ABCD$，记 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，对角线 $AC=m$，$BD=n$，求证：$m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)$.

证明 如图 2-6，向外作 $\triangle APB \backsim \triangle CDA$，

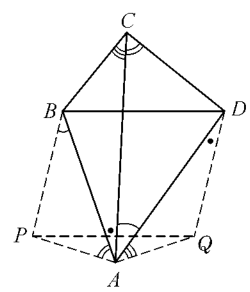


图 2-6

其中
$$\angle BAP = \angle ACD,$$
$$\angle PBA = \angle CAD,$$

于是有
$$\frac{PA}{CD} = \frac{AB}{CA}$$

或
$$PA = \frac{ac}{m}.$$

同理，作 $\triangle DAQ \backsim \triangle ACB$，其中
$$\angle DAQ = \angle BCA,$$
$$\angle ADQ = \angle CAB,$$

于是
$$\frac{AQ}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

即
$$AQ = \frac{bd}{m}.$$

对于$\triangle PAQ$，用余弦定理，有
$$PQ^2 = PA^2 + QA^2 - 2PA\cdot QA\cos\angle PAQ,$$

即
$$PQ^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - \frac{2abcd}{m^2}\cos(A+C),$$

显然接下去只要证明 $PQ=n=BD$ 即可.

由于 $$\frac{BP}{AD}=\frac{AB}{AC}\text{, 故 } BP=\frac{ad}{m}\text{,}$$

又 $$\frac{DQ}{AB}=\frac{AD}{AC}\text{, 即 } DQ=\frac{ad}{m}\text{,}$$

故 $$BP=DQ\text{,}$$

又
$$\begin{aligned}&\angle PBD+\angle QDB\\=&\angle ABD+\angle BDA+\angle PBA+\angle QDA\\=&\angle ABD+\angle BDA+\angle CAD+\angle CAB\\=&180^\circ\text{,}\end{aligned}$$

故 $$PB\parallel DQ\text{,}$$

于是四边形 $BPQD$ 为平行四边形.

$PQ=BD$.

评注 这个结论可以推出托勒密定理和托勒密不等式,并且这个证法与托氏定理及不等式的直接证法也相类似. 当然,托氏定理用余弦定理($\cos A+\cos C=\cos B+\cos D=0$)证明最快(即分别算出两条对角线的长).

例 8 设不等边锐角$\triangle ABC$, $\odot I$ 是内切圆,切 BC 于点 K, AD 是高,点 M 为 AD 中点,延长 KM,交$\odot I$ 于点 N,求证:过点 B、N、C 的圆与$\odot I$ 内切.

证明 如图 2-7,不妨设 $AC>AB$, 并且设 $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. r 为$\odot I$ 半径.

作 BC 中垂线 EF,点 E 为 BC 中点,点 F 为直线 MK 与直线 OE 之交点,点 O 为$\triangle NBC$ 外接圆圆心. 连接 NO.

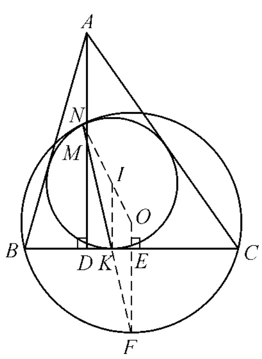


图 2-7

易知 $BK=p-b$, 故

$$\begin{aligned}DK&=p-b-c\cos B\\&=\frac{a+c-b}{2}-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\\&=\frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}=\frac{b-c}{a}(p-a)\text{,}\end{aligned}$$

而 $$KE=\frac{a}{2}-\frac{a+c-b}{2}=\frac{1}{2}(b-c).$$

设 $\angle NKB=\angle EKF=\theta$，则

$$NK=2r\sin\frac{\angle NIK}{2}=2r\sin\theta,$$

$$KF=\frac{KE}{\cos\theta},$$

于是
$$\begin{aligned}NK\cdot KF&=r(b-c)\tan\theta\\&=r(b-c)\frac{AD\cdot a}{2(b-c)(p-a)}\\&=r\frac{S_{\triangle ABC}}{p-a}\\&=\frac{S_{\triangle ABC}^2}{p(p-a)}=(p-b)(p-c)\\&=BK\cdot KC.\end{aligned}$$

所以点 F 亦在 $\odot O$ 上.

这样一来，$\triangle NKI$ 与 $\triangle NFO$ 成了两个位似的等腰三角形，于是点 N、I、O 共线，即 $\odot I$ 与 $\odot O$ 内切.

评注　此题中用到了三角形面积的海伦公式. 这是一道不错的预选题，关键是思路要清晰. 本题的思路是寻找什么途径来证明两圆相切. 一旦目标明确，计算是顺理成章的事情.

例 9　证明斯图沃特定理：设 $\triangle ABC$ 对应边长为 a、b、c，BC 上有一点 D，$BD=u$，$CD=v$，$AD=x$，则

$$x^2=\frac{c^2v+b^2u}{a}-uv.$$

证明　如图 2-8，$\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，故 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$.

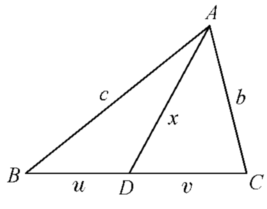


图 2-8

用余弦定理代入，有

$$\frac{u^2+x^2-c^2}{2ux}+\frac{v^2+x^2-b^2}{2vx}=0,$$

移项整理便得斯图沃特定理.

评注 斯图沃特定理也算是初等数学中的一条大定理，不用余弦定理还不那么好处理. 由这个定理，我们可以得出不少重要推论，最有名的便是中线长公式：

$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线长

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

角平分线长与高长也可推出，但计算更繁琐，有兴趣的读者可自行推导.

例 10 在$\triangle ABC$ 中，点 E、F 分别是 AC、AB 的中点，点 G 是重心，对$\angle BAC$ 的每一个值，有多少互不相似的$\triangle ABC$，满足点 A、F、G、E 共圆？

解 如图 2-9，由 A、F、G、E 共圆，得

$$CG \cdot CF = CE \cdot CA.$$

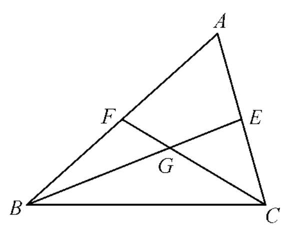


图 2-9

若设$\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，对应中线为 m_a、m_b、m_c，则上式变为

$$\frac{2}{3}m_c^2 = \frac{1}{2}b^2.$$

又由中线长公式知

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2),$$

消去 m_c，得 $$b^2+c^2=2a^2.$$

又由余弦定理， $$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2,$$

再将 a 抵消，得 $$b^2-4bc\cos A+c^2=0.$$

若设 $\lambda=b/c$，则 $$\lambda^2-4\lambda\cos A+1=0,$$

这个方程的 $\Delta=4(4\cos^2 A-1)$，于是当 $|\cos A|<\frac{1}{2}$ 时，方程无解；又当$\angle A>90^\circ$ 时，两边之比为负数，也不符合要求.

除了以上两种情况，剩下来的便是 $\angle A \leqslant 60^\circ$ 时，此时有互为倒数或相同的解，因此合乎要求的三角形恰有一个.

例 11 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=2\angle ABC$，BC 上有一点 D，$CD=2BD$，延

长 AD 到点 E，使 $AD=DE$，求证：$\angle ECB+180^{\circ}=2\angle EBC$.

证明　我们首先来研究一下证明上式的途径，比如从边入手.

如图 2-10，如果我们延长 CB 至点 F，连接 EF，使 $EF=EB$，则 $2\angle EBC-180^{\circ}=\angle FEB$，这样，问题就归结为求证

$$\angle FEB=\angle ECB,$$

又这两个角相等的充要条件是 $\triangle FEB\backsim\triangle FCE$，

即 $$EF^2=FC\cdot FB$$

或 $$BE^2=BF(BF+BC).$$

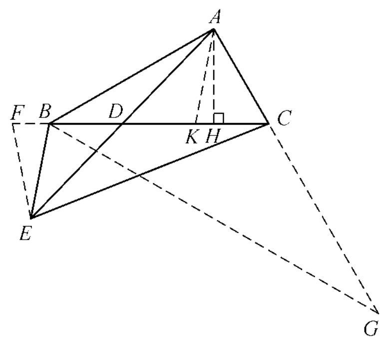


图 2-10

从严格意义上讲，除了证明上式以外，还必须证明 $\angle EBC>90^{\circ}$，否则 F 点怎能作出. 下面就来证明这两点.

先证 $\angle EBC>90^{\circ}$，取 CD 中点 K，再作 $AH\perp BC$，点 H 是垂足，易知 $\angle EBC=\angle AKB=180^{\circ}-\angle AKC$，于是目标变为证明 $\angle AKC<90^{\circ}$.

事实上，若 $\angle ACB\geqslant 90^{\circ}$，则 $\angle AKC<180^{\circ}-\angle ACB\leqslant 90^{\circ}$；下面设 $\angle ACB<90^{\circ}$，于是 H 在 BC 内，这样，只需证明 $CH<CK$，便可得 $\angle AKC<90^{\circ}$. 若 $CH\geqslant CK$，我们设法推出矛盾.

设$\triangle ABC$ 三对应边分别为 a、b、c，则

$$CH=AC\cos\angle ACB=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

而 $KC=\dfrac{1}{3}a$，于是

$$\frac{1}{3}a^2+b^2\geqslant c^2.$$

又延长 AC 至点 G，使 $BC=CG$，则

$$\angle G=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle ABC,$$

故 $\triangle ABC\backsim\triangle AGB$，

$$c^2=AC\cdot AG=b(a+b),$$ 代入上式，得

$$\frac{1}{3}a \geqslant b,$$

即
$$CK \geqslant AC,$$

而显然有 $AC > CH$，于是 $CK > CH$，矛盾.

最后我们来证明

$$BE^2 = BF(BF + BC).$$

先来计算 BF，由中心对称，知

$$\begin{aligned} BF &= 2KH \\ &= 2(KC - HC) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}a - \frac{a^2 + b^2 - b(a+b)}{2a}\right) \\ &= \frac{2}{3}a - (a - b) \\ &= b - \frac{1}{3}a, \end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned} &BF(BF + BC) \\ =& \left(b - \frac{1}{3}a\right)\left(b + \frac{2}{3}a\right) \\ =& b^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}a^2. \end{aligned}$$

又设 $BE = AK = x$，由余弦定理（或斯图沃特定理），得

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\frac{2}{3}b^2a + \frac{1}{3}c^2a}{a} - \frac{2}{9}a^2 \\ &= \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b(a+b) - \frac{2}{9}a^2 \\ &= b^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}a^2. \end{aligned}$$

于是结论成立.

评注　这道题目对综合能力的要求较高，首先是目标的明确性和可行性，其次是计算的步骤.

例 12　设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最大内角，点 D、E 分别在 CA、BA 的延长线上，BD、CE 分别为 $\triangle ABC$ 内角 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线，且 $BD = CE$，求证：

$AB = AC$.

证明 如图 2-11，设$\triangle ABC$对应边为a、b、c，根据外角平分线性质，知

$$\frac{AD}{c} = \frac{CD}{a} = \frac{AD+b}{a},$$

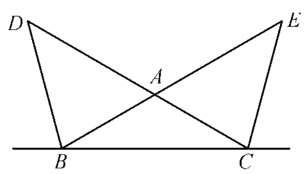


图 2-11

此即 $$AD = \frac{bc}{a-c}.$$

又根据余弦定理，有

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos\angle DAB \\ &= AD^2 + c^2 + 2AD \cdot c\cos\angle BAC \\ &= \left(\frac{bc}{a-c}\right)^2 + c^2 + \frac{2bc}{a-c} \cdot c \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2c^2 + c^2(a-c)^2 + c(a-c)(b^2+c^2-a^2)}{(a-c)^2} \\ &= \frac{ab^2c}{(a-c)^2} - ac, \end{aligned}$$

同理 $$CE^2 = \frac{abc^2}{(a-b)^2} - ab.$$

由$BD = CE$，得

$$bc\left[\frac{b}{(a-c)^2} - \frac{c}{(a-b)^2}\right] = c - b.$$

令$a-b=x$，$a-c=y$，显然问题归结为证明$x=y$.

此时原式变为

$$(a-x)(a-y)\left(\frac{a-x}{y^2} - \frac{a-y}{x^2}\right) = x - y$$

或 $$(a-x)(a-y)[a(x^2-y^2)-(x^3-y^3)] = x^2y^2(x-y).$$

若$x \neq y$，则有

$$(a-x)(a-y)\left(a - \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right) = \frac{x^2y^2}{x+y},$$

但由于$b+c>a$，故$a>x+y$，故上述左式

$$> xy\left(x+y-\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)$$
$$=\frac{x^2y^2}{x+y}=\text{右式},\text{矛盾}.$$

因此 $AB=AC$.

评注 注意此题的计算思路,弄不好会陷入困境. 当$\angle A$不是最大内角时,AB未必等于AC.

例 13 已知$BC\perp CD$,点A为BD中点,点Q在BC上,$AC=CQ$,又在BQ上找一点R,使$BR=2RQ$,CQ上找一点S,使$QS=RQ$,求证:$\angle ASB=2\angle DRC$.

证明 本题错综复杂,因此在计算之前,目标一定要明确.

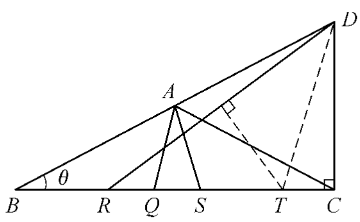


图 2-12

如图 2-12,先计算 $\cos\angle ASB$,设$AB=AC=AD=a$,$\angle B=\theta$,则

$$\begin{aligned}BQ&=BC-CQ\\&=2a\cos\theta-a,\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}QS=RQ&=\frac{1}{3}BQ\\&=\frac{2}{3}a\cos\theta-\frac{1}{3}a.\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}BS&=BQ+QS\\&=\frac{8}{3}a\cos\theta-\frac{4}{3}a,\\SC&=BC-BS\\&=\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a\cos\theta.\end{aligned}$$

由 $\cos\angle ASB+\cos\angle ASC=0$,得

$$AB^2-AS^2=BS\cdot SC,$$

而
$$\begin{aligned}&AB^2-BS\cdot SC\\=&a^2-\left(\frac{8}{3}a\cos\theta-\frac{4}{3}a\right)\left(\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}a\cos\theta\right)\\=&\frac{25}{9}a^2-\frac{40}{9}a^2\cos\theta+\frac{16}{9}a^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{5}{3}a-\frac{4}{3}a\cos\theta\right)^2,$$

于是
$$AS=\frac{5}{3}a-\frac{4}{3}a\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\cos\angle ASB&=\frac{AS^2+BS^2-AB^2}{2AS\cdot BS}\\&=\frac{BS^2-BS\cdot CS}{2AS\cdot BS}\\&=\frac{BS-CS}{2AS}\\&=\frac{\frac{10}{3}a\cos\theta-\frac{8}{3}a}{\frac{10}{3}a-\frac{8}{3}a\cos\theta}\\&=\frac{5\cos\theta-4}{5-4\cos\theta}.\end{aligned}$$

又作 RD 中垂线，交 BC 直线于点 T，则

$$\angle DTC=2\angle DRC,$$

注意，若点 T 在 BC 延长线上时，把 TC 看成负数(即 $\angle DTC=180^\circ-\angle DTB$).

于是
$$\begin{cases}RT+TC=RC,\\TC^2+CD^2=RT^2\end{cases}$$

或
$$RT-TC=\frac{CD^2}{RC},$$

于是
$$TC=\frac{1}{2}\left(RC-\frac{CD^2}{RC}\right),$$

$$RT=\frac{1}{2}\left(RC+\frac{CD^2}{RC}\right),$$

$$\begin{aligned}\cos\angle DTC&=\frac{TC}{RT}\\&=\frac{RC^2-CD^2}{RC^2+CD^2}.\end{aligned}$$

下面计算 CD 与 RC. 易见

$$CD=2a\sin\theta,$$

$$
\begin{aligned}
RC &= BC - BR \\
&= 2a\cos\theta - \left(\frac{4}{3}a\cos\theta - \frac{2}{3}a\right) \\
&= \frac{2}{3}a\cos\theta + \frac{2}{3}a,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
RC^2 + CD^2 &= a^2\left(\frac{40}{9} - \frac{32}{9}\cos^2\theta + \frac{8}{9}\cos\theta\right) \\
&= \frac{8}{9}a^2(5 - 4\cos\theta)(1 + \cos\theta),
\end{aligned}
$$

而
$$
\begin{aligned}
RC^2 - CD^2 &= a^2\left(\frac{40}{9}\cos^2\theta + \frac{8}{9}\cos\theta - \frac{32}{9}\right) \\
&= \frac{8}{9}a^2(5\cos\theta - 4)(1 + \cos\theta),
\end{aligned}
$$

于是
$$\cos\angle DTC = \frac{5\cos\theta - 4}{5 - 4\cos\theta} = \cos\angle ASB,$$

故而
$$\angle ASB = \angle DTC = 2\angle DRC.$$

评注 此题在计算过程中务必仔细. 另外需要注意的是,本题在证明过程中用到一个结论:

设点 D 为等腰$\triangle ABC$ 底边 BC 所在直线上一点,则如图 2-13,

(1) $AB^2 - AD^2 = BD \cdot CD$

(当点 D 在 BC 上时);

(2) $AD^2 - AB^2 = BD \cdot CD$

(当点 D 在 BC 延长线上时).

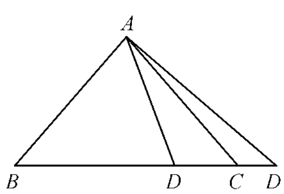


图 2-13

点 D 在 BC 上时,我们可以用 $\cos\angle ADB + \cos\angle ADC = 0$ 推得;而点 D 在 BC 延长线上,则变成了 $\cos\angle ADB = \cos\angle ADC$.

之所以还要再强调一遍,是因为这个结论应用非常之广,在记忆上也不麻烦. 因此,尽管在试卷上我们不能将它直接当作一个定理使用,但在记忆上应该是一个不折不扣的定理.

例 14 两圆外切于点 A,且内切于另一大圆 O 于点 B、C. 记两小圆外公切线割圆 O 的弦 MN 的中点为 D,BC 与 MN 交于点 P,求证:$\frac{DB}{DC} = \frac{PB}{PC}$.

证明 如图 2-14,过点 B 作切线 BE,

则 $\qquad \angle EBN = \angle BAF = \angle BMN$,

此处点 F 为 BN 与小圆交点.

又 $\qquad \angle BFA = \angle BAM$,

故 $\qquad \angle NBA = \angle MBA$,

同理, CA 平分 $\angle MCN$.

这样一来,就有

$$\frac{BM}{BN} = \frac{MA}{NA} = \frac{MC}{NC}.$$

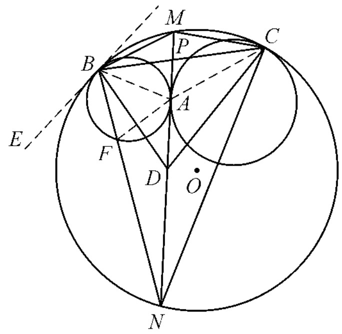


图 2-14

又由中线长公式,

$$\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{2(BM^2 + BN^2) - MN^2}{2(CM^2 + CN^2) - MN^2},$$

若设 $\qquad BM = a,\ BN = b,\ CN = c,\ CM = d,\ MN = x$,

则只需求证

$$\frac{2(a^2 + b^2) - x^2}{2(c^2 + d^2) - x^2} = \frac{BP^2}{CP^2} = \frac{S^2_{\triangle BMN}}{S^2_{\triangle CMN}} = \left(\frac{ba}{cd}\right)^2. \qquad ①$$

由题有 $\qquad ac = bd$,

又由余弦定理,得 $\qquad \cos\angle MBN + \cos\angle MCN = 0$,

即 $$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2 - x^2}{cd} = 0,$$

$$x^2 = \frac{a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2}{ab + cd}$$

$$= \frac{2ac(ad + bc)}{ab + cd}.$$

若 $ab = cd$, 则由 $ac = bd$ 可得

$$a = d,\ b = c,$$

于是四边形 $MBNC$ 为筝形, MN 将 BC 垂直平分,这样便有

$$\frac{BD}{CD} = 1 = \frac{BP}{CP},$$ 这显然是成立的.

下面假定 $$ab \neq cd.$$

由式①解出

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2 - b^2c^2d^2)}{a^2b^2 - c^2d^2} \\ &= \frac{2a^2c^2(b^2 + a^2 - d^2 - c^2)}{a^2b^2 - c^2d^2}, \end{aligned}$$

于是只需证明

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{ac(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{a^2b^2 - c^2d^2}$$

或 $$ac(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (ad + bc)(ab - cd).$$

展开为

$$\begin{aligned} & a^3c + ab^2c - ac^3 - acd^2 \\ &= a^2bd + ab^2c - acd^2 - bc^2d, \end{aligned}$$

由 $a^3c = a^2bd$ 及 $ac^3 = bc^2d$ 知上式成立,于是命题得证.

评注　如果你还能看出点 A 是$\triangle BCD$ 的内心,那么仅用正弦定理也能说得清楚.

由于 $\dfrac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle BNP}} = \dfrac{MP}{PN} = \dfrac{ad}{bc} = \dfrac{a^2}{b^2}$,

由此可推出 BP 关于 BA 的对称直线过 MN 中点.

同理可证 CA 平分$\angle BCD$,于是点 A 就成为$\triangle BCD$ 的内心.

数学题就是这样,有时要求更多反而容易.

习　题　2

1 已知$\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c,求证:

$$(b-c)^2\cos^2\frac{\angle A}{2} + (b+c)^2\sin^2\frac{\angle A}{2} = a^2.$$

2 在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle A$ 为锐角,且 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$,求$\angle A$ 的取值范围.

3 已知锐角三角形 ABC,外心 O 到三边距离分别为 d_1、d_2、d_3,求证:$d_1 + d_2 + d_3 = R + r$,其中 R、r 分别为$\triangle ABC$ 外接圆与内切圆半径.

4 过锐角三角形 ABC 的顶点 A、B 作该三角形的外接圆的切线，它们分别与过点 C 的该三角形的外接圆的切线交于点 D、E，直线 AE 交 BC 于点 P，直线 BD 交 AC 于点 R，设点 Q、S 分别为 AP 和 BR 的中点，求证：$\angle ABQ=\angle BAS$.

5 已知$\triangle ABC$ 的外心和内心分别为点 O 和 I，求证：$OI=\sqrt{R^2-2Rr}$，这里 R、r 分别为$\triangle ABC$ 外接圆与内切圆半径.

6 直角$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AC、BC 边上的中线所夹的锐角为 θ，求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}c^2\tan\theta$，其中 $c=AB$.

7 设点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点，且满足：(1) PA、PB、PC 成等差数列（公差大于 0）；(2) PB、PD、PC 成等比数列（公比大于 1），求证：这样的点 P 是惟一存在的.

8 设$\triangle ABC$ 中有一点 P，满足 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta$，求证：$\cot\theta=\cot A+\cot B+\cot C$.

9 设$\triangle ABC$ 内心为 I，C_1、B_1 分别为 AB、AC 的中点，直线 AC 与 C_1I 交于点 B_2，直线 AB 与 B_1I 交于点 C_2，若 $S_{\triangle AB_2C_2}=S_{\triangle ABC}$，试求$\angle CAB$ 的度数.

10 已知$\triangle ABC$，$\angle A=60°$. 过$\triangle ABC$ 的内心 I 作 AC 的平行线，交 AB 于点 E，点 P 在 BC 上，且 $3BP=BC$，求证：$\angle B=2\angle BEP$.

11 有一个半径为 R 的正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆，点 P 是距圆心为 a 的平面上任一点，则 $PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$ 为定值，并求此定值.

12 在锐角$\triangle ABC$ 中，$BC<AC<AB$，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且满足 $BD=BC=CE$，求证：$\triangle ADE$ 的外接圆半径等于$\triangle ABC$ 的内心到外心的距离.

13 设点 P 为正方形 $ABCD$ 的内切圆 O 上任一点，求证：$\tan^2\angle APC+\tan^2\angle BPD=8$.

14 已知有六个小圆在一个大圆内，且均与大圆相切，而每两个相邻小圆外切，若六个小圆与大圆的切点依次为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6，求证：$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1$.

15 设$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线延长后交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 A_1，又过点 A 作射线与 AA_1 关于$\angle BAC$ 的平分线对称，并交外接圆于点 A_2，若设外心为点 O，$\triangle ABC$ 的对应边长为 a、b、c 且 A_1、O、A_2 三点共线，求证 $b^2+c^2+\frac{4b^2c^2}{b^2+c^2}=a^2$.

16 求证：凸四边形四边平方和减去对角线平方和，等于对角线中点连线平方的 4 倍，从而可得，一凸四边形是平行四边形的充要条件是：四边平方和等于对角线平方和.

17 锐角$\triangle ABC$，三个对应边上的旁切圆为$\odot I_A$、$\odot I_B$、$\odot I_C$，已知$\odot I_C$、$\odot I_B$ 与 BC 直线的切点分别为 M、N，$\odot I_A$ 与 AB、AC 直线的切点分别为 P、Q，延长 MP、NQ 交于点 S，求证：$AS \perp BC$.

18 $\triangle ABC$ 中，$BC > CA > AB$，内外心之间的距离为 d. 在 BA 和 CA 延长线上分别取点 D、E，使 $BD = CE = BC$；在 CB 上和 AB 延长线上分别取点 F 和 G，使 $CF = AG = CA$；又在 AC 和 BC 上分别取点 H 和 K，使 $AH = BK = AB$，求证：

(1) $\triangle ADE$、$\triangle BFG$、$\triangle CHK$ 的外接圆半径都等于 d；

(2) $ED \parallel GF \parallel HK$.

3 和角公式应用之——“牛刀小试”

两角和与差的三角函数的展开，正弦、余弦函数的积化和差与和差化积，以及各种推论，如倍角公式、三倍角公式、半角公式等，是三角函数的核心内容. 不难想象它们在几何问题中也会有用. 在这本书中有一半以上的内容是涉及这一方面的. 但笔者坚持认为，做几何题，应该突出几何意义，这类公式可以不用就尽量别用，至少尽量少用.

例 1 已知$\triangle ABC$，求证：

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

证明

$$\begin{aligned}
&\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\\
=&\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\angle A+\cos 2\angle B+\cos 2\angle C)\\
=&\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[2\cos(\angle A+\angle B)\cos(\angle A-\angle B)+\cos 2(\angle A+\angle B)]\\
=&1+\cos(\angle A+\angle B)\cos(\angle A-\angle B)+\cos^2(\angle A+\angle B)\\
=&1-2\cos A\cos B\cos C.
\end{aligned}$$

评注 例 1 被称作“三角形中的恒等式”，是数量极为繁多的三角恒等式的一部分. 本书不会过多涉及这方面的内容，不过一些最基本的三角形恒等式还是知道点较好（三角形不等式的情形也类似）. 除了例 1，还有几个比较有名的三角形恒等式，如

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2};$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C;$$

$$\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}+\tan\frac{\angle C}{2}\tan\frac{\angle A}{2}=1.$$

等等,读者可自行推导.

例 2 已知$\triangle ABC$的外接圆及内切圆半径分别为R和r,求证:

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}.$$

证明 设$\triangle ABC$三边为a、b、c,则

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r=S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}.$$

用$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$代入,得

$$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=2R^2\sin A\sin B\sin C,$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{r}{R}\cdot 4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\\=&16\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle C}{2},\end{aligned}$$

再化简就得证.

说明 上述结果可以使我们较快证明熟知的结论:若锐角三角形ABC外心至三边距离为d_1、d_2、d_3,则$d_1+d_2+d_3=R+r$.

这是因为

$$\begin{aligned}&d_1+d_2+d_3\\=&R(\cos A+\cos B+\cos C)\\=&R\left[2\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}-\cos(\angle A+\angle B)\right]\\=&R\left[2\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\left(\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}-\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)+1\right]\\=&R\left(4\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}+1\right)\\=&R\left(\frac{r}{R}+1\right)=R+r.\end{aligned}$$

评注 这些题目的共同模式是:

几何条件→三角运算→几何结论.

例 3 设点P为$\triangle ABC$内一点,$\alpha=\angle APC-\angle ABC$,$\beta=\angle APB-$

$\angle ACB$，求证：

(1) $PA \cdot BC = AB \cdot PC\cos\alpha + AC \cdot PB\cos\beta$;

(2) $PA \cdot BC\cos(\alpha-\beta) = AC \cdot PB\cos\alpha + AB \cdot PC\cos\beta$.

证明 先把(1) 改为

$$BC = \frac{AB \cdot PC}{PA}\cos\alpha + \frac{AC \cdot PB}{PA}\cos\beta.$$

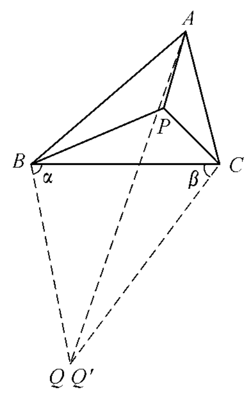


图 3-1

如图 3-1，作点 Q，使 $\angle QBC = \alpha$，$\angle QCB = \beta$.

若能证明

$$BQ = \frac{AB \cdot PC}{PA}, \qquad ①$$

$$CQ = \frac{AC \cdot PB}{PA}, \qquad ②$$

问题就解决了.

但从严格意义上，还要求 $\alpha+\beta < 180^\circ$，否则 Q 的位置有问题.

先证 $\alpha+\beta < 180^\circ$，这是因为延长 PA 可以看出 $\angle APB + \angle APC < 360^\circ - \angle BAC$，故

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &< 360^\circ - \angle BAC - \angle ABC - \angle ACB \\ &= 180^\circ.\end{aligned}$$

然后证明①式.

直接证明有麻烦，不如作 AQ'，使

$$\angle BAQ' = \angle PAC \text{ 且 } \triangle BAQ' \backsim \triangle PAC,$$

于是
$$\frac{BQ'}{PC} = \frac{AB}{AP},$$

故
$$BQ' = \frac{AB \cdot PC}{PA},$$

又易见 $\triangle ABP \backsim \triangle AQ'C$，

同理有
$$CQ' = \frac{AC \cdot PB}{PA}.$$

又 $\angle Q'BC = \alpha$，$\angle Q'CB = \beta$，Q 与 Q' 重合. 于是结论(1)成立.

下面处理(2).

由(1)知,要(2)成立,只需

$$AC \cdot PB(\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos\alpha)=AB \cdot PC(\cos\beta-\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)),$$

化简,知只需证

$$AC \cdot PB\sin\beta=AB \cdot PC\sin\alpha.$$

这是肯定成立的,因为由正弦定理,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{AC \cdot PB}{AB \cdot PC}.$$

例 4 已知正三角形 ABC 内有一条动线段,长为 a,它在$\triangle ABC$ 三边上的射影长分别为 l、m、n,求证:$l^2+m^2+n^2=\frac{3}{2}a^2$.

证明 如图 3-2,设动线段为 PQ(长为 a),延长 PQ 两端,知必与$\triangle ABC$ 的某两边及第三边的延长线相交(特殊情况可视为极限,不影响结论).

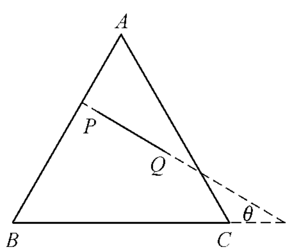


图 3-2

不妨设与 AB、AC 相交,与 BC 延长线相交,若设 PQ 与 BC 夹角为 θ,则 PQ 与 AC 夹角便为 $60^\circ-\theta$,而 PQ 与 AB 夹角即为 $60^\circ+\theta$.

于是

$$\begin{aligned}
&l^2+m^2+n^2\\
=&a^2(\cos^2\theta+\cos^2(60^\circ-\theta)+\cos^2(60^\circ+\theta))\\
=&a^2\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\theta+\cos(120^\circ-2\theta)+\cos(120^\circ+2\theta))\right]\\
=&a^2\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\theta+2\cos 120^\circ\cos 2\theta)\right]\\
=&\frac{3}{2}a^2.
\end{aligned}$$

评注 此题用和角公式可以简化证明,一开始的分析十分必要.

例 5 已知一凸四边形的边长依次为 a、b、c、d,外接圆半径为 R,如果 $a^2+b^2+c^2+d^2=8R^2$,问对此四边形有何要求?

解 首先,该四边形一定包含圆心 O,若不然,如图 3-3,

由于

$$\angle BAD>90^\circ,$$

$$\angle BDC>90^\circ,$$

$$AB^2+AD^2+CD^2<BD^2+CD^2<BC^2<4R^2,$$

于是四边形 $ABCD$ 的四边平方和 $<8R^2$，矛盾.

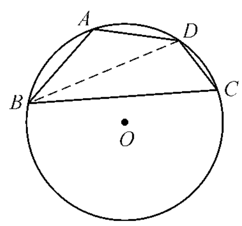


图 3-3

如图 3-4，连接 OA、OB、OC、OD，设 $\angle AOB=2\alpha$，$\angle BOC=2\beta$，$\angle COD=2\gamma$，$\angle DOA=2\theta$，则由题设，有

$$\begin{aligned}8R^2&=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\\&=4R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\theta),\end{aligned}$$

故 $$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\theta=2.$$

于是 $$\frac{2-\cos 2\alpha-\cos 2\beta}{2}+\frac{2-\cos 2\gamma-\cos 2\theta}{2}=2$$

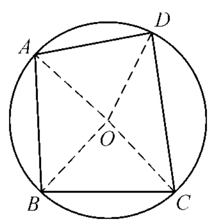


图 3-4

或 $$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2\theta=0,$$

此即 $$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=-\cos(\gamma+\theta)\cos(\gamma-\theta),$$

由于 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=180°$，故

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos(\gamma+\theta),$$

若该式为 0，只能有 $$\alpha+\beta=\gamma+\theta=90°,$$

此时 AC 即为直径.

若 $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$，则

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\gamma-\theta).$$

对 $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\gamma-\theta)$ 和差化积，得

$$\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\theta}{2}\sin\frac{\alpha+\theta-\beta-\gamma}{2}=0.$$

由于 $$|\alpha+\gamma-\beta-\theta|<360°,\ |\alpha+\theta-\beta-\gamma|<360°,$$

故只能有 $$\alpha+\gamma=\beta+\theta$$

或 $$\alpha+\theta=\beta+\gamma.$$

后者即 $$\angle BCD=\angle BAD=90°,$$

此时 BD 是直径.

前者表明，若设 BD，AC 交于点 P，则

$$\angle BPC=\angle BDC+\angle ACD$$

$$=\beta+\theta=90^{\circ},$$

即 $BD\perp AC$.

评注　综上所述，满足条件的圆内接四边形的要求为：对角线垂直或至少有一条对角线长是直径.

例 6　已知$\triangle ABC$，$\angle B=90^{\circ}$，内切圆分别切 BC、CA、AB 于点 D、E、F，又 AD 交内切圆于另一点 P，$PF\perp PC$，求$\triangle ABC$ 三边之比.

解　如图 3-5，连接 FD、PE、ED，易知$\triangle FBD$ 是等腰直角三角形.

由弦切角知，

$$\angle FPD=\angle FDB=45^{\circ},$$

于是 $$\angle DPC=45^{\circ},$$

又 $\angle PDC=\angle PFD$，故

$$\triangle PFD\backsim\triangle PDC,$$

所以 $$\frac{PF}{FD}=\frac{PD}{CD},$$

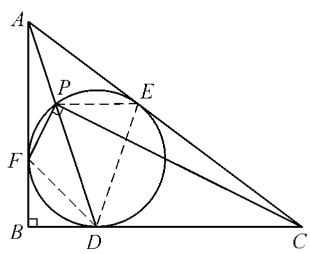


图 3-5

又由于 $\triangle APF\backsim\triangle AFD$，$\triangle APE\backsim\triangle AED$，

故 $$\frac{PE}{DE}=\frac{AP}{AE}=\frac{AP}{AF}=\frac{PF}{FD},$$

于是 $$\frac{PE}{DE}=\frac{PD}{CD},$$

又 $$\angle EPD=\angle EDC,$$ 故

$$\triangle EPD\backsim\triangle EDC,$$

于是$\triangle EPD$ 也是等腰三角形，

所以 $$\angle PED=\angle EPD=\angle EDC,$$

所以 $$PE\parallel BC,$$

于是
$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC}&=\frac{PE}{CD}=\frac{PE}{ED}\cdot\frac{ED}{CD}\\&=\left(\frac{ED}{CD}\right)^{2}=4\sin^{2}\frac{\angle C}{2}\\&=2(1-\cos C)\\&=2\left(1-\frac{BC}{AC}\right)\end{aligned}$$

$$= 2\frac{AC-BC}{AC}.$$

又 $$\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{1}{2}(AB+AC-BC)}{AC},$$

故 $$AB+AC-BC=4(AC-BC),$$
$$AB=3(AC-BC),$$

两边平方，得

$$AB^2=9(AC-BC)^2=AC^2-BC^2,$$

此即 $$9(AC-BC)=AC+BC,$$

所以 $$\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5},$$

所以 $$AB:BC:AC=3:4:5.$$

评注 这是一道好题，对运算和推理都有较高的要求.

例 7 如图 3-6，设点 H 是锐角$\triangle ABC$ 的垂心，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是它的三个内角，点 P 是平面上任一点，求证：

$$(AP^2-AH^2)\tan A+(BP^2-BH^2)\tan B+(CP^2-CH^2)\tan C$$
$$=PH^2\tan A\tan B\tan C.$$

证明 首先，我们有

$$\tan A+\tan B+\tan C$$
$$=\tan A\tan B\tan C,$$

这只要由

$\tan C=-\tan(\angle A+\angle B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}$ 得到.

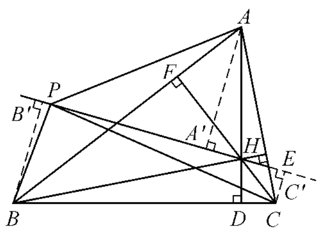


图 3-6

于是，待证等式转化为

$$(PH^2+AH^2-AP^2)\tan A+(PH^2+BH^2-BP^2)\tan B$$
$$+(PH^2+CH^2-CP^2)\tan C=0.$$

又由余弦定理，有

$$PH^2+AH^2-AP^2=2AH\cdot PH\cos\angle AHP,$$

上式可化为求证

$$AH\tan A\cos\angle AHP+BH\tan B\cos\angle BHP+CH\tan C\cos\angle CHP=0.$$

这个等式还可简化，只要考虑到

$$AH\sin C=AE=AB\cos A,$$

$$AH=\frac{AB}{\sin C}\cos A=\frac{BC}{\sin A}\cos A=\frac{BC}{\tan A},$$

另外还有两个，于是欲证等式还可化为

$$BC\cos\angle AHP+AC\cos\angle BHP+AB\cos\angle CHP=0.$$

不妨设直线 PH 与 AB、AC 相交，于是点 A 在 PH 一侧，点 B、点 C 在 PH 另一侧.

如图 3-6，今作 AA'、BB'、CC' 分别垂直于 PH 直线，易见

$$\cos\angle AHP=\cos\angle B'BC=\frac{BB'-CC'}{BC},$$

而
$$\cos\angle BHP=\cos\angle A'AE=\frac{AA'+CC'}{AC},$$

$$\cos\angle CHP=-\cos\angle BAA'=-\frac{AA'+BB'}{AB},$$

于是
$$\begin{aligned}&BC\cos\angle AHP+AC\cos\angle BHP+AB\cos\angle CHP\\=&BB'-CC'+AA'+CC'-AA'-BB'\\=&0.\end{aligned}$$

评注　当 P 的位置有变动时，$\cos\angle AHP$，$\cos\angle BHP$ 及 $\cos\angle CHP$ 的表达式形式上稍有不同，因此其余情形请读者讨论.

对于这样复杂的等式，纯几何方法真的难以奏效.

例 8　设圆内接四边形 $ABCD$，$AB+CD=m$，$BC+DA=n$，$AC+BD=l$，$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$、$\triangle ABC$ 的内切圆直径各为 d_1、d_2、d_3、d_4，求证：$d_1d_3+d_2d_4=(l-m)(l-n)$.

证明　如图 3-7，由内切圆的性质，知

$$d_1=(BC+CD-BD)\tan\frac{C}{2},$$

$$d_2=(AD+CD-AC)\tan\frac{D}{2},$$

$$d_3=(AB+AD-BD)\tan\frac{A}{2},$$

$$d_4=(AB+BC-AC)\tan\frac{B}{2}.$$

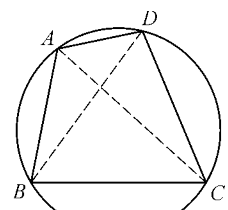


图 3-7

由于 $\angle A+\angle C=180^\circ$,

$\angle B+\angle D=180^\circ$, 故

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1,\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{D}{2}=1,$$

于是 $d_1d_3+d_2d_4$

$$\begin{aligned}&=(BC+CD-BD)(AB+AD-BD)\\&\quad+(CD+AD-AC)(AB+BC-AC)\\&=(BC+CD)(AB+AD)-BD(AB+BC+CD+DA)+BD^2\\&\quad+(CD+AD)(AB+BC)-AC(AB+BC+CD+DA)+AC^2\\&=(BC+CD)(AB+AD)+(CD+AD)(AB+BC)-l(m+n)+BD^2\\&\quad+AC^2,\end{aligned}$$

此式若等于 $(l-m)(l-n)$, 仅当

$$\begin{aligned}&(BC+CD)(AB+AD)+(CD+AD)(AB+BC)+BD^2+AC^2\\&=l^2+mn\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}&(BC+CD)(AB+AD)+(CD+AD)(AB+BC)\\&=2AC\cdot BD+(AD+BC)(AB+CD),\end{aligned}$$

展开,即 $$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD.$$

这是托勒密定理,于是命题得证.

此类题目除了计算,也没什么其他好办法.

评注 此题好像未用和角公式,其实这公式正是用在托勒密定理之上,今试用此法论证如下:

如图 3-8,设圆内接四边形 $ABCD$,外接圆半径为 R, $\angle ABD=\alpha$, $\angle CBD=\beta$, $\angle ACB=\theta$,

则 $$AD=2R\sin\alpha,$$

$$BC=2R\sin(\alpha+\beta+\theta),$$

$$AB = 2R\sin\theta,$$
$$CD = 2R\sin\beta.$$

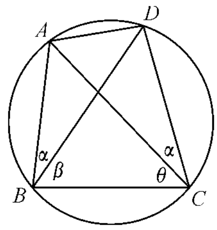


图 3-8

而 $AC = 2R\sin(\alpha+\beta)$，$BD = 2R\sin(\alpha+\theta)$，问题就变为求证

$$\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\theta)+\sin\theta\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\theta),$$

积化和差，并去除系数 1/2，得

$$\begin{aligned}\text{左式} &= \cos(\beta+\theta)-\cos(2\alpha+\beta+\theta)+\cos(\beta-\theta)-\cos(\beta+\theta)\\ &= \cos(\beta-\theta)-\cos(2\alpha+\beta+\theta)\\ &= \text{右式}.\end{aligned}$$

例 9 已知正方形 $ABCD$，AB、BC 上各有一点 S、P，且 DS、DP 交 AC 于点 R、Q，求 B、P、Q、R、S 五点共圆的充要条件（即点 S、P 满足什么位置关系）.

解 如图 3-9，不妨设正方形边长为 1，$AS = a$，$CP = b$，下面证明，充要条件是

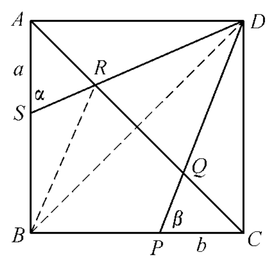


图 3-9

$$BS \cdot BP = 2AS \cdot CP.$$

先证充分性.

设 $\angle ASD = \alpha$，$\angle DPC = \beta$，则

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{ab}} = \frac{a+b}{ab-1}.$$

由于 $(1-a)(1-b) = 2ab$，故

$$\tan(\alpha+\beta) = -1,$$

$$\alpha+\beta = 135^\circ.$$

连接 BD、BR，易知 $\triangle BRC \cong \triangle DRC$，故

$$\angle RBC = \angle RDC = \angle ASD = \alpha.$$

而 $\angle RQP = \beta + 45^\circ$，故

$$\begin{aligned}\angle RBC+\angle RQP&=\alpha+\beta+45^\circ\\&=180^\circ,\end{aligned}$$

即点 B、R、Q、P 共圆.

同理,点 B、S、R、Q 共圆.

所以 B、S、R、Q、P 五点共圆.

反之,若 B、S、R、Q、P 五点共圆,可得

$$\alpha+\beta=\angle RQD+\beta=135^\circ,$$

于是
$$BS\cdot BP=2AS\cdot CP.$$

综上所述,充要条件为

$$BS\cdot BP=2AS\cdot CP.$$

评注　容易看出,五点所共圆的直径即为 SP,另外,还有 $\angle SDP=45^\circ$,SQ、PR 是$\triangle SPD$ 的高等.

例 10　证明拿破仑定理:$\triangle ABC$,向外作正三角形 BCA_1、CAB_1、ABC_1,设它们的中心为 P_1、Q_1、R_1,则$\triangle P_1Q_1R_1$ 为正三角形(称为外拿破仑正三角形),又向$\triangle ABC$ 各边内侧作正三角形 BCA_2、CAB_2、ABC_2,设其中心分别为 P_2、Q_2、R_2,则$\triangle P_2Q_2R_2$ 亦为正三角形(称为内拿破仑正三角形).

并进而求证:$S_{\triangle P_1Q_1R_1}-S_{\triangle P_2Q_2R_2}=S_{\triangle ABC}$,并试用$\triangle ABC$ 各边表示 $S_{\triangle P_1Q_1R_1}+S_{\triangle P_2Q_2R_2}$;最后证明:$AP_1$、$BQ_1$、$CR_1$ 的中点是一个正三角形的顶点,对于 AP_2、BQ_2、CR_2,也有类似结论.

证明　这是一组庞大的结论,我们必须有条不紊地进行论证.

尽管拿破仑定理有十分漂亮的纯几何证明,但三角证法也有简捷的优点,符合我们的要求.

如图 3-10,设$\triangle ABC$ 的对应边为 a、b、c,易知

$$P_1C=\frac{a}{\sqrt{3}},\ Q_1C=\frac{b}{\sqrt{3}},$$

$$\angle P_1CQ_1=\angle C+60^\circ,$$

于是

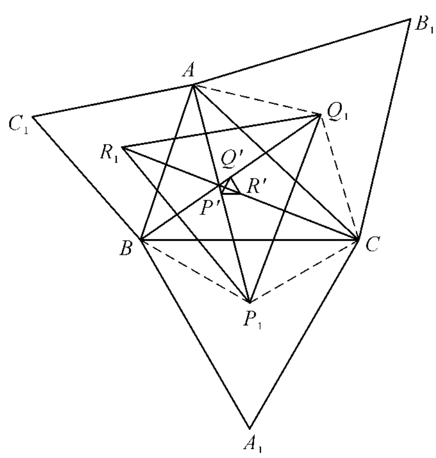


图 3-10

$$
\begin{aligned}
P_1Q_1^2 &= P_1C^2+Q_1C^2-2P_1C\cdot Q_1C\cos(\angle C+60^\circ)\\
&=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}(\cos C\cos 60^\circ-\sin C\sin 60^\circ)\\
&=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{\sqrt{3}}{3}ab\sin C\\
&=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}
$$

这是一个对称式,同理可证 $Q_1R_1^2$、$R_1P_1^2$ 也是此式,故$\triangle P_1Q_1R_1$ 是正三角形.

至于内拿破仑正三角形的证明,三角运算的优势更加明显,因为图往往画不清楚.

易知此时有

$$
P_2C=\frac{a}{\sqrt{3}},\ Q_2C=\frac{b}{\sqrt{3}},
$$
$$
\angle P_2CQ_2=|\angle C-60^\circ|,
$$

于是

$$
\begin{aligned}
P_2Q_2^2 &= P_2C^2+Q_2C^2-2P_2C\cdot Q_2C\cos(\angle C-60^\circ)\\
&=\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2ab}{3}(\cos C\cos 60^\circ+\sin C\sin 60^\circ)\\
&=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)-\frac{2\sqrt{3}}{3}S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}
$$

这也是对称式,于是$\triangle P_2Q_2R_2$ 为正三角形(有趣的是,我们还附带证明了 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$).

易知

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle P_1Q_1R_1} &= \frac{\sqrt{3}}{4}P_1Q_1^2\\
&=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle P_2Q_2R_2} &= \frac{\sqrt{3}}{4}P_2Q_2^2\\
&=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},
\end{aligned}
$$

于是

$$
S_{\triangle P_1Q_1R_1}+S_{\triangle P_2Q_2R_2}=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2),
$$
$$
S_{\triangle P_1Q_1R_1}-S_{\triangle P_2Q_2R_2}=S_{\triangle ABC}.
$$

最后，设 AP_1、BQ_1、CR_1 中点分别为 P'、Q'、R'，我们来证明：$\triangle P'Q'R'$ 是正三角形.

显然，只要算出 $P'Q'$ 是一个对称式即可.

由习题 2 知，点 P'、Q' 是四边形 AP_1、BQ_1 之中点，则有

$$\begin{aligned}4P'Q'^2 &= AB^2 + BP_1^2 + P_1Q_1^2 + Q_1A^2 - AP_1^2 - BQ_1^2 \\ &= c^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - AP_1^2 - BQ_1^2 + P_1Q_1^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AP_1^2 &= AC^2 + P_1C^2 - 2AC \cdot P_1C\cos(\angle C + 30^\circ) \\ &= b^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2ab}{\sqrt{3}}(\cos C\cos 30^\circ - \sin C\sin 30^\circ) \\ &= b^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{6} + \frac{c^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$

同理
$$BQ_1^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC},$$

于是
$$4P'Q'^2 = P_1Q_1^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC}.$$

前面已经证过 P_1Q_1 是对称式，故 $P'Q'$ 也是，于是$\triangle P'Q'R'$为正三角形.

关于 AP_2、BQ_2、CR_2 的中点也有类似结论.

评注 用计算对付这类题目是十分有效的.

例 11 设锐角三角形 ABC 内有 P、Q 两点，使得 $\angle ACP = \angle BCQ$，$\angle CAP = \angle BAQ$，过点 P 作 BC、CA、AB 的垂线，垂足分别为点 D、E、F，求证：$\angle DEF = 90^\circ$ 当且仅当点 Q 是$\triangle BDF$ 的垂心.

证明 如图 3-11，若 $\angle FED = 90^\circ$，由于点 A、F、P、E 共圆，点 P、E、C、D 共圆，故

$$\begin{aligned}\angle BAP &= \angle FEP \\ &= 90^\circ - \angle PED \\ &= 90^\circ - \angle PCD,\end{aligned}$$

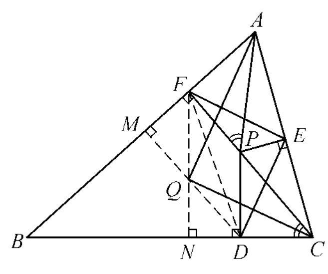


图 3-11

于是易见

$$\triangle APF \backsim \triangle PCD.$$

又易知 $\angle QAC = \angle FAP$，

$$\angle QCA = \angle PCD,$$

所以 $$\triangle APF \backsim \triangle ACQ \backsim \triangle PCD,$$

由于这是顺相似，

故有 $$\triangle AFQ \backsim \triangle APC \backsim \triangle QDC,$$

于是 $$\frac{QD}{CD} = \frac{AP}{CP},$$

$$\begin{aligned} QD &= \frac{CD}{CP}AP = AP\cos\angle PCD \\ &= AP\cos\angle APF \\ &= FP. \end{aligned}$$

同理 $$FQ = PD,$$

于是四边形 $FQDP$ 是平行四边形.

这样，便有 $FQ /\!/ PD$，$DQ /\!/ PF$，

于是 $FQ \perp BD$，$DQ \perp BF$，即点 Q 为$\triangle FBD$ 之垂心.

反之，若点 Q 为$\triangle FBD$ 之垂心，则问题不那么好处理.

我们从平行四边形 $PDQF$ 入手.

易知，若能证得 $\angle AQC = 90°$，则

$$\begin{aligned} \angle FED &= \angle FEP + \angle DEP \\ &= \angle FAP + \angle DCP \\ &= \angle QAE + \angle QCE \\ &= 180° - \angle AQC = 90°. \end{aligned}$$

下设 $\angle QDP = \theta (= \angle B)$，$FP = a$，$PD = b$，

$$\angle QAB = \alpha,\ \angle PAB = \beta,$$

于是 $$\angle BAC = \alpha + \beta.$$

我们的目标是

$$\frac{AQ}{AC} = \cos\beta\text{（这样 } AQ \perp QC \text{ 了）}.$$

由于 $$\tan\beta = \frac{FP}{AF} = \frac{FP}{AM - FM}$$

$$= \frac{a}{b\cos\theta\cot\alpha - b\sin\theta},$$

而
$$\begin{aligned} AB &= AM + BM \\ &= b\cos\theta\cot\alpha + MD\cot\theta \\ &= b\cos\theta\cot\alpha + (a + b\cos\theta)\cot\theta \\ &= b\cos\theta\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha\sin\theta} + a\cot\theta \\ &= b\cot\theta\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} + a\cot\theta, \end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned} AC &= AB\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha+\beta)} \\ &= \left(b\cot\theta\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} + a\cot\theta\right)\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha+\beta)} \\ &= \left(b\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} + a\right)\frac{\cos\theta}{\sin(\theta+\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

又
$$AQ = \frac{b\cos\theta}{\sin\alpha},$$

于是，问题就变成求证：

$$\frac{b\cos\theta}{\sin\alpha} = \left(\frac{b\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} + a\right)\frac{\cos\theta\cos\beta}{\sin(\theta+\alpha+\beta)},$$

即
$$\left(\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos\theta} + \frac{a}{b}\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}\right)\frac{\cos\theta\cos\beta}{\sin(\theta+\alpha+\beta)} = 1$$

或
$$\cos\beta + \frac{a}{b}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{\sin(\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\theta)},$$

右式$= \sin\beta\cot(\alpha+\theta) + \cos\beta$，

这样，两边消去 $\cos\beta$，即知只须证

$$\frac{a}{b}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\theta)} = \sin\beta\cot(\alpha+\theta).$$

由 $\tan\beta$ 的表达式，上式进一步化为

$$\sin\alpha = \frac{1}{\cos\theta\cot\alpha - \sin\theta}\cos(\alpha+\theta),$$

此时，右式 $= \dfrac{\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha}\cos(\alpha+\theta) = \sin\alpha =$左式.

于是结论成立.

评注 上述证明是依赖于图的,读者请考虑,点 P、Q 是否还有其他类型的位置.

此题难度适中,也可用同一法,借助三角函数进行证明,但必须做到目标明确,计算仔细.

例 12 已知点 A_0 是 BC 中点,点 A' 是 $\triangle ABC$ 内切圆与 BC 的切点. 以点 A_0 为圆心、A_0A' 为半径作 $\odot A_0$,同理,定义点 B_0、B' 及 $\odot B_0$ 和点 C_0,C' 及 $\odot C_0$. 证明:若 $\odot A_0$ 与 $\triangle ABC$ 外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 弧(不含点 A)相内切,则另外两个圆中的一个也与 $\triangle ABC$ 的外接圆在相应弧段相内切.

证明 如图 3-12,不妨设 $AB > AC$,设 $\odot A_0$、$\odot B_0$ 和 $\odot C_0$ 的半径分别为 r_1、r_2、r_3,a、b、c 分别为 $\triangle ABC$ 的对应边的长度.

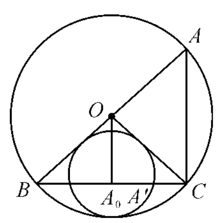


图 3-12

由于 $\odot A_0$ 与 $\odot O$(外接圆)相切,故有

$$OA_0 = R - r_1\ (R \text{ 为} \odot O \text{ 半径}),$$

又 $$\angle A_0OC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle A,$$

因此 $$R - A_0A' = R - \left(\frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2}\right) = R\cos A,$$

故有 $$R(1-\cos A) = \frac{c-b}{2},$$

由正弦定理知即 $$1-\cos A = \sin\angle BCA - \sin B,$$

即 $$2\sin^2\frac{\angle A}{2} = 2\sin\frac{\angle BCA - \angle B}{2}\cos\frac{\angle BCA + \angle B}{2}$$

或 $$\sin\frac{\angle A}{2} = \sin\frac{\angle BCA - \angle B}{2},$$

对 $\sin\frac{\angle A}{2} - \sin\frac{\angle BCA - \angle B}{2}$ 进行和差化积,得

$$\sin\frac{\angle A - \angle BCA + \angle B}{4}\cos\frac{\angle A - \angle B + \angle BCA}{4} = 0,$$

此即 $$\sin\left(45^\circ - \frac{\angle BCA}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) = 0,$$

只能是 $\angle BCA=90^\circ$.

与之对应的是直角边 AC 上的$\odot B_0$ 与$\odot O$ 内切，当且仅当

$$1-\cos B=\sin\angle BCA-\sin A.$$

这显然成立，故命题得证.

评注　此题的命题方式很别致，让人一下子觉得没有方向，只好一步步地推导下去，这里三角计算的威力就体现出来了，得到 $\angle BCA=90^\circ$ 是关键一步.

例 13　已知锐角三角形 ABC，CD 是高，点 M 是 AB 中点. 过点 M 的直线分别交射线 CA、CB 于点 K、L，且 $CK=CL$. 求证：若$\triangle CKL$ 的外心为点 S，则 $SD=SM$.

证明　如图 3-13，不妨设 $AC\geqslant BC$，易知此时点 K 在 AC 上，点 L 在 CB 延长线上.

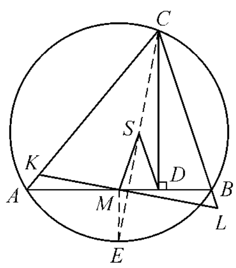


图 3-13

由正弦定理，知 $$\frac{AK}{AM}=\frac{\sin\angle AMK}{\sin\angle AKM},$$
$$\frac{BL}{BM}=\frac{\sin\angle BML}{\sin\angle BLM},$$

由对顶角相等及 $\angle AKM+\angle BLM=180^\circ$，得

$$\frac{AK}{AM}=\frac{BL}{BM}，\text{即 } AK=BL.$$

这样一来，便有 $$CK=CL=\frac{AC+BC}{2},$$

$$CS=\frac{CK}{2\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}=\frac{AC+BC}{4\cos\dfrac{\angle ACB}{2}},$$

延长 CS 交$\triangle ABC$ 外接圆$\overset{\frown}{AB}$于点 E，则点 E 为$\overset{\frown}{AB}$中点.

若设$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则

$$CE=2R\sin\left(\angle A+\frac{\angle ACB}{2}\right),$$

于是 $$\begin{aligned}\frac{CE}{CS}&=2R\sin\left(\angle A+\frac{\angle ACB}{2}\right)\frac{2\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{R(\sin B+\sin A)}\\&=\frac{4\sin\left(\angle A+\dfrac{\angle ACB}{2}\right)\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{\sin A+\sin B}\end{aligned}$$

$$= \frac{2(\sin(\angle A + \angle ACB) + \sin A)}{\sin A + \sin B}$$

$$= \frac{2(\sin B + \sin A)}{\sin A + \sin B}$$

$$= 2.$$

这表明，点 S 为 CE 中点.

又因为 $ME \perp AB$，$CD \perp AB$，故点 S 在 MD 的中垂线上.

故 $SD = SM$.

评注　此题也属于用三角公式来求解特快的一种题型.

例 14　在半圆的直径 AB 上取点 K、L. 在半圆弧上取点 M、N，使四边形 $KLMN$ 成为一个正方形，它的面积等于$\triangle ABC$ 的面积，点 C 在半圆弧上，求证：$\triangle ABC$ 的内切圆圆心即正方形的一条边与连结顶点 M（或 N）和顶点 A（或 B）的直线的交点.

证明　如图 3-14，不妨设点 C 在 MN 右侧，于是我们的目标变为，证明 BN 与 ML 的交点 P 为$\triangle ABC$ 的内心.

我们来论证两点：

(1) $\angle CBN = \angle ABN$；

(2) $BL = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$.

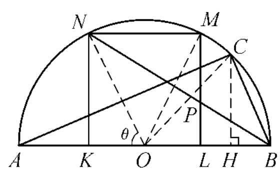


图 3-14

由(1)，(2)可知点 P 为$\triangle ABC$ 内心.

先证(1). 设 $AO = BO = 1$ (O 是 AB 中点)，$\angle NOA = \theta$，则 $NK = \sin\theta$，$MN = 2\cos\theta$，于是

$$\tan\theta = 2,$$

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

又 $S_{\triangle ABC} = S_{KLMN}$，故

$$\frac{1}{2} \times 2 \times CH = \sin^2\theta = \frac{4}{5},$$

故 $$CH = \frac{4}{5},$$

这样便有 $$\sin\angle COB = \frac{4}{5}$$

$$= 2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= \sin 2\theta,$$

由于 $\angle COB < \angle MOB = \theta$，故

$$\angle COB = 180^\circ - 2\theta,$$

即 $$\angle AOC = 2\theta,$$

故 $$\angle CBA = \theta,$$

又由于 $$\angle ABN = \frac{\theta}{2},$$

故 $$\angle CBN = \angle ABN.$$

下证(2).

$$BL = 1 - \cos\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$AB = 2,\ BC = 2\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$AC = 2\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

于是 $$\frac{1}{2}(AB + BC - AC)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= BL.$$

此即(2)得证，故 P 为 $\triangle ABC$ 内心.

评注　这是一道定值问题，不用三角函数也不是不可以，但三角法确确实实帮助我们理清了思绪.

例 15　(四边形的"面积公式")设凸四边形 $ABCD$ 中，$AB = a$，$BC = b$，$CD = c$，$\angle ABC = \alpha$，$\angle BCD = \beta$，直线 AB、CD 的交角为 θ，则 $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\beta - \frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)$.

证明　作 $AE \perp BC$，$DF \perp BC$，点 E、F 可在 BC 上或其延长线上. 如图

3-15 所示.

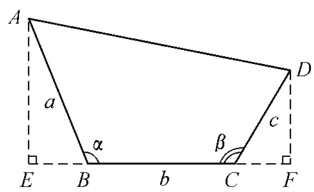


图 3-15

$$S_{ABCD}=S_{AEFD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDF}$$
$$=\frac{1}{2}(a\sin\alpha+c\sin\beta)(b-a\cos\alpha-c\cos\beta)$$
$$+\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}c^2\sin\beta\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta-\frac{1}{2}ac\cos\alpha\sin\beta$$
$$-\frac{1}{2}ac\sin\alpha\cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta-\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta).$$

评注 这里的 $S_{\triangle ABE}$ 与 $S_{\triangle CDF}$ 可正可负.

正如四边形有“余弦定理”，它也有“面积公式”，对角线之积乘以它们夹角正弦的一半就是一个，这个也算.

本题结论在后面会用到.

习 题 3

1 已知有一个定圆 O 与一直线 l，两者不相交或相切，在 l 上取动点 M、N，使以 MN 为直径的圆 O' 与圆 O 外切，求证：平面中存在一定点 A，使 $\angle MAN$ 为定角.

2 设 $\triangle ABC$ 为正三角形，边长为定值 a，点 C 为 BD 中点. 过点 D 任作一直线交 AB、AC 于点 F、E，求证：$\frac{1}{BF}+\frac{1}{2CE}=\frac{\sqrt{3}}{2a}\cot D$.

3 设钝角 $\triangle ABC$ 的周长等于其内切圆直径与外接圆直径之和，求证：$\cos 2\angle A+\cos 2\angle B+\cos 2\angle C=2\cos A+2\cos B+2\cos C$.

4 用三角函数证明：若一个三角形有两条相等的内角平分线，则此三角形是等腰三角形.

5 过 $\triangle ABC$ 的外心 O 作 $DE\parallel BC$，分别交 AB、AC 于点 D、E. P 为 DE 上一点，且 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，求 $\tan B\cdot\tan C$ 的取值范围.

6 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 E、F 为底边 BC 上两点（E 在 BF 上），求证：

$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle A$（即 $\angle BAC$）当且仅当 $EF^2=BE^2+FC^2+2BE\cdot FC\cos\theta$.

7 设点 O 是 $\triangle ABC$ 外心，延长 AO、BO、CO，分别交对边于点 D、E、F，求证：$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BE}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{R}$，此处 R 是外接圆半径.

8 设 $\triangle ABC$ 中，重心、外心、内心、垂心分别为点 G、O、I、H，三条对应边分别为 a、b、c，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，外接圆、内切圆半径分别为 R、r，则

（1）$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$；

（2）$GI^2=\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)+r^2-\frac{1}{3}p^2$；

（3）$HI^2=4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

9 已知 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，$\triangle XYZ$ 三边分别为 x、y、z，则有 $x^2bc\cos A+y^2ac\cos B+z^2ab\cos C=8S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle XYZ}+(bz-yc)^2+4bcyz\sin^2\frac{\angle A-\angle X}{2}$.

10 设 $\odot O$ 半径为 r，AM、AN 是切线，L 是劣弧 $\overset{\frown}{MN}$ 上异于 M、N 的一点，过点 A 且平行于 MN 的直线分别交直线 ML、NL 于点 P、Q，求证：$r^2=OP\cdot OQ\cdot\cos\angle POQ$.

11 设 M、N 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的边 AC、BC 上的点，K 是 MN 中点，$\triangle CAN$ 和 $\triangle BCM$ 的外接圆的第二个交点为 D，证明：CD 经过 $\triangle ABC$ 外心的充要条件是 AB 的中垂线经过点 K.

12 证明：存在惟一的三边长为连续整数且有一个内角为另一内角两倍的三角形.

13 已知点 O、I 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心和内心，AD 是高，若点 I 在线段 OD 上，则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

14 以 $\triangle ABC$ 的 BC 边为直径作半圆，与 AB、AC 分别交于定点 D、E，过点 D、E 分别作 BC 的垂线 DF、EG，点 F、G 在 BC 上，又设 DG 与 EF 交于点 M，求证：$AM\perp BC$.

15 设 R、r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆及内切圆半径，R'、r' 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆及内切圆半径，求证：若 $\angle C=\angle C'$，$Rr'=R'r$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

16 证明：双心四边形（既有外接圆，又有内切圆）的内心、外心与对角线交点

共线.

17 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=30^\circ$，点 O 为外心，点 I 为内心，在 AC、BC 上分别取点 D、E，使 $AD=BE=AB$，求证：$OI\perp DE$.

18 设正方形 $ABCD$ 边长为 a，AB、BC、CD、DA 上分别有点 E、G、H、F，且 $EF\,/\!/\,GH$，EF 与 GH 距离为 a，设 $\triangle AEF$ 与 $\triangle GHC$ 的周长分别为 c_1、c_2，求 c_1+c_2（用 a 表示）.

19 两圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 P、Q 两点，且离点 P 近的公切线分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 切于点 A、B. 过点 P 作 $\odot O_1$ 的切线，与 $\odot O_2$ 交于点 C，又 AP 延长后与 BC 交于点 R，证明：$\triangle PQR$ 的外接圆与直线 BP、BR 相切.

20 已知一凸四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot O$，求证：$OA\cdot OC+OB\cdot OD=\sqrt{AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA}$.

21 已知 $\triangle ABC$ 中，$\sin B$、$\sin A$、$\sin C$ 成等差数列，求证：$\tan\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$、$\tan\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$、$\tan\dfrac{\angle C+\angle A}{2}$ 亦成等差数列.

4 和角公式应用之二
——特殊角问题

在所有的几何问题中，特殊角问题是显示三角方法无比优越性的最典型的一类问题. 有了三角公式，原来很难逾越的鸿沟突然可以轻易地跨过去了，下面就举几个例子.

例1 已知$\triangle ABC$，点E是形内一点，BE延长后交AC于点D，已知$\angle DCE=10^\circ$，$\angle DBC=30^\circ$，$\angle ECB=20^\circ$，$\angle ABD=40^\circ$，求$\angle BAE$.

解 如图4-1，具体作法如下：

由于$\angle BDA=60^\circ$，我们的目标是证明

$$AB^2=BE\cdot BD.$$

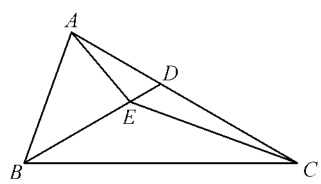


图4-1

不妨设$BC=1$，则$BD=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

而又由正弦定理，

$$\frac{BE}{BC}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 130^\circ},$$

即
$$BE=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ},$$

又
$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 80^\circ},$$

问题就归结为证明
$$\frac{\sin^2 30^\circ}{\sin^2 80^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}$$

或证明
$$\sin 20^\circ\sin^2 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 50^\circ$$

或
$$\frac{1+\cos 20^\circ}{2}\sin 20^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 50^\circ,$$

这等价于 $$2\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sqrt{3}\sin 50^\circ,$$

此式是容易证明的，因为

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ - \frac{1}{2}\sin 40^\circ\\=&\sin 50^\circ\cos 30^\circ - \cos 50^\circ\sin 30^\circ\\=&\sin 20^\circ.\end{aligned}$$

所以 $AB^2 = BE \cdot BD$ 即 $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{AB}$.

故 $\triangle ABE \backsim \triangle DBA$，从而 $\angle BAE = 60^\circ$

评注 此题也可以用纯几何方法，作者本人曾经找到过，但作辅助线较伤脑筋.

例 2 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 40^\circ$，$\angle ABC = 60^\circ$，点 D、E 分别是 AC、AB 上的点，$\angle CBD = 40^\circ$，$\angle BCE = 70^\circ$，点 F 是直线 BD 和 CE 的交点，证明：直线 AF 和 BC 垂直.

证明 如图 4-2，

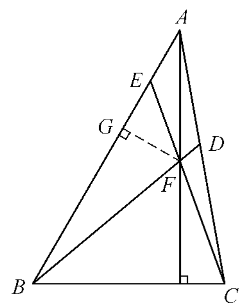


图 4-2

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ &= 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\\&= 2\sin 40^\circ\cos(60^\circ - 20^\circ)\\&= 2\sin 40^\circ(\cos 60^\circ\cos 20^\circ + \sin 60^\circ\sin 20^\circ)\\&= \sin 40^\circ(\cos 20^\circ + \sqrt{3}\sin 20^\circ),\end{aligned}$$

所以 $$\frac{\sin 80^\circ - \sin 40^\circ\cos 20^\circ}{\sin 40^\circ\sin 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

设$\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，

则 $$BC = 2R\sin 40^\circ,\ AB = 2R\sin 80^\circ,$$

易知 $\angle BFC = 70^\circ = \angle BCF$，故

$$BF = BC = 2R\sin 40^\circ.$$

今作 $GF \perp AB$，点 G 为垂足，则

$$\begin{aligned}BG &= 2R\sin 40^\circ\cos 20^\circ,\\GF &= 2R\sin 40^\circ\sin 20^\circ,\end{aligned}$$

此即 $$\frac{AG}{GF}=\frac{AB-BG}{GF}=\sqrt{3},$$

所以 $$\angle BAF=30^\circ,$$

故 $$AF\perp BC.$$

例 3 已知$\triangle ABC$，$\angle A=100^\circ$，$AB=AC$，延长 AB 至点 D，使 $AD=BC$，求$\angle BCD$.

解 如图 4-3，在 AB 上找一点 E，使 $\angle ACE=30^\circ$.

易知 $$\frac{AE}{AC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ},$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BC}{AC}=2\cos 40^\circ,$$

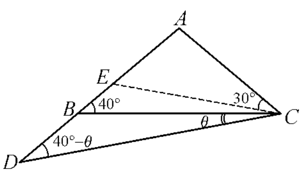


图 4-3

两式相乘，得

$$\frac{AE\cdot AD}{AC^2}=\frac{2\sin 30^\circ\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ}=1,$$

于是 $$AC^2=AE\cdot AD,$$

故 $$\triangle ACE\backsim\triangle ADC,$$

$$\angle D=\angle ACE=30^\circ,$$

所以 $$\angle BCD=40^\circ-\angle D$$
$$=10^\circ.$$

评注 真是太漂亮了，有一个有名的纯几何证明，比这种方法难许多. 不过，如果猜不出角度，还是挺难的，因此这类题目的图一定要画好，一旦猜出角度，辅助线就不过是为其“量身定做”了，接下去的任务就是三角运算.

例 4 $\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，CE 为 AB 边上的高，若 $\angle CDA=45^\circ$，求$\angle BED$.

解 如图 4-4，设$\triangle ABC$ 的内角对应为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 不妨设 $AC=1$，由于$\angle A$ 是锐角，故

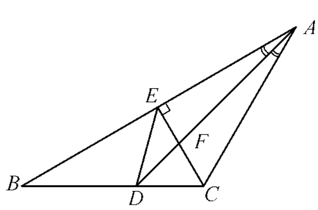


图 4-4

$$CE=\sin A,$$
$$CF=CE-EF$$
$$=\sin A-\cos A\tan\frac{\angle A}{2}$$

$$= \sin A - \cos A \cdot \frac{\sin A}{1+\cos A}$$
$$= \frac{\sin A + \sin A\cos A - \cos A\sin A}{\cos A + 1}$$
$$= \tan \frac{\angle A}{2},$$

又 $$\frac{CD}{AC} = \frac{\sin \frac{\angle A}{2}}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}\sin \frac{\angle A}{2},$$

于是 $$CE \cdot CF = \sin A \cdot \tan \frac{\angle A}{2} = 2\sin \frac{\angle A}{2}\cos \frac{\angle A}{2} \frac{\sin \frac{\angle A}{2}}{\cos \frac{\angle A}{2}} = 2\sin^2 \frac{\angle A}{2} = CD^2.$$

故 $$\triangle CDF \backsim \triangle CED,$$
$$\angle DEC = \angle ADC = 45^\circ,$$

因此 $$\angle BED = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

评注 此题也是需要先猜出$\angle BED$，由于这个三角形形状并不固定，故可让$\triangle ABC$处于一个特殊形状以便于猜测. 一旦确信，接下去用三角函数可谓志在必得，不用添线，论证轻松、干脆，做完后感觉颇好.

例 5 已知$\triangle ABC$，点 P 是其内部一点，$\angle PBC = \angle PCB = 24^\circ$，$\angle ABP = 30^\circ$，$\angle ACP = 54^\circ$，求$\angle BAP$的大小.

解 如图 4-5，延长 BP 交 AC 于点 E，由于 $\angle BAC = 48^\circ$，故 $\angle BEC = 48^\circ + 30^\circ = 78^\circ = \angle BCE$.

于是 $BE = BC$. 不妨设 $BE = BC = 1$.

由正弦定理， $$\frac{PE}{CE} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 48^\circ},$$

故 $$PE=\frac{2\sin 54^\circ\sin 12^\circ}{\sin 48^\circ},$$

又 $$AC=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 48^\circ},$$

于是 $$AE=AC-CE$$
$$=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 48^\circ}-2\sin 12^\circ.$$

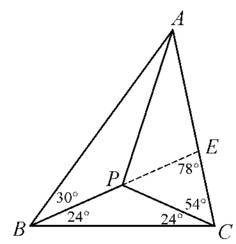


图 4-5

由于 $$\sin 54^\circ-2\sin 12^\circ\sin 48^\circ$$
$$=\sin 54^\circ-\cos 36^\circ+\cos 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2},$$

故有 $$AE^2=\frac{1}{4\sin^2 48^\circ},$$

而 $$PE\cdot BE=\frac{2\sin 54^\circ\sin 12^\circ}{\sin 48^\circ},$$

如果二者相等,则 $\triangle APE\backsim\triangle BAE$,于是 $\angle PAE=\angle ABE=30^\circ$,得 $\angle BAP=48^\circ-30^\circ=18^\circ$.

下证此等式,即证

$$\sin 12^\circ\sin 48^\circ\sin 54^\circ=\frac{1}{8}.$$

这是因为

左式 $$=\frac{1}{2}(\cos 36^\circ-\cos 60^\circ)\sin 54^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos^2 36^\circ-\frac{1}{2}\cos 36^\circ\right)$$
$$=\frac{1}{4}(1+\cos 72^\circ-\cos 36^\circ)$$
$$=\frac{1}{4}(1-2\sin 54^\circ\sin 18^\circ)$$
$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 36^\circ\cos 72^\circ)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{8}.$$

例 6　已知等腰$\triangle ABC$,**底角** $\angle ABC=\angle ACB=50^\circ$,**点** D、E **分别在** BC、AC **上**,AD、BE **交于点** P,$\angle ABE=30^\circ$,$\angle BAD=50^\circ$,**连接** ED,**求**$\angle BED$.

解　如图 4-6,**不妨设** $AB=AC=1$,**则** $BC=2\cos 50^\circ$. **而** $AD=BD=\frac{1}{2\cos 50^\circ}$.

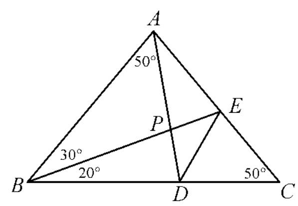


图 4-6

由面积知

$$\frac{PD}{AP}=\frac{BD\sin 20^\circ}{AB\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 50^\circ},$$

又由正弦定理,得

$$\frac{PE}{AP}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

若能证明这两个比值相等,则就有 $PD=PE$,**又** $\angle APE=80^\circ$,**即得** $\angle BED=40^\circ$,**于是我们的任务变成证明**

$$\cos 50^\circ\sin 30^\circ=\sin 20^\circ\sin 70^\circ$$

或
$$\cos 50^\circ=2\sin 20^\circ\sin 70^\circ,$$

积化和差,右式$=\cos 50^\circ-\cos 90^\circ$

$=$ **左式,故结论成立.**

例 7　已知如图 4-7,**凸四边形** $ABCD$ **中**,$\angle B=90^\circ$,$\angle DAB=\angle D=96^\circ$,$\angle BCD=78^\circ$,**且** $DA=2AB$,**求**$\angle CAB$.

解　不妨设 $AB=1$,$AD=2$,**若延长** DA、CB **交于点** F(**图中未画出**),**则** $\angle F=6^\circ$.

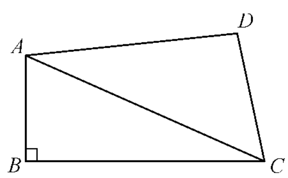


图 4-7

易知
$$AF=\frac{1}{\sin 6^\circ},$$

$$BF=\cot 6^\circ,$$

故 $$DF=\frac{1}{\sin 6^\circ}+2,$$

由正弦定理,得 $$\frac{BC+\cot 6^\circ}{DF}=\frac{\sin 96^\circ}{\sin 78^\circ},$$

于是 $$BC=\frac{\sin 96^\circ(2\sin 6^\circ+1)}{\sin 78^\circ\sin 6^\circ}-\cot 6^\circ.$$

尽管我们现在还不知道$\angle CAB$究竟等于几度,但既然可求,一定是可以将上式化简为某个角的正切的形式,只是在化简的过程中有一定盲目性而已.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin 96^\circ(2\sin 6^\circ+1)}{\sin 78^\circ\sin 6^\circ}-\cot 6^\circ\\
=&\frac{2\sin 96^\circ(\sin 6^\circ+\sin 30^\circ)}{\sin 78^\circ\sin 6^\circ}-\cot 6^\circ\\
=&\frac{4\sin 96^\circ\sin 18^\circ\cos 12^\circ}{\sin 78^\circ\sin 6^\circ}-\cot 6^\circ\\
=&\frac{4\sin 96^\circ\sin 18^\circ-\cos 6^\circ}{\sin 6^\circ}\\
=&(4\sin 18^\circ-1)\cot 6^\circ\\
=&\left(\frac{2\sin 36^\circ-\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}\right)\cot 6^\circ\\
=&\frac{\cos 54^\circ+\cos 54^\circ-\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}\cot 6^\circ\\
=&\frac{\cos 54^\circ(1-2\cos 72^\circ)}{\cos 18^\circ}\cot 6^\circ\\
=&\frac{4\cos 54^\circ\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\cos 18^\circ}\cot 6^\circ\\
=&\frac{4\cos 6^\circ\cos 54^\circ\sin 66^\circ}{\cos 18^\circ}\\
=&\frac{4\cos 6^\circ\cos 54^\circ\cos 66^\circ}{\cos 18^\circ}\tan 66^\circ\\
=&\tan 66^\circ.
\end{aligned}$$

因此$\angle CAB=66^\circ$.

评注　这道题目比前几道难度大一些,三角计算况且如此,纯几何证明难度就更大.另外,我们在计算过程中,使用了一个小有名气的公式:

$$\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta;$$

另外两个是

$$\sin\theta\sin(60°-\theta)\sin(60°+\theta)=\frac{1}{4}\sin 3\theta,$$

$$\tan\theta\tan(60°-\theta)\tan(60°+\theta)=\tan 3\theta.$$

这些恒等式不难证明,并且知道它们后,可能会对解题带来一些便利.

例 8 已知$\triangle ABC$,$\angle A=80°$,$AB=AC$,P 为$\triangle ABC$ 内部一点,求$\angle PCA$,若:

(1) $\angle PAB=20°$,$\angle ABP=10°$;

(2) $\angle PAB=10°$,$\angle PBA=10°$;

(3) $\angle PAB=10°$,$\angle PBA=20°$.

解 (1) 如图 4-8,延长 AP 至 BC 于点 Q.

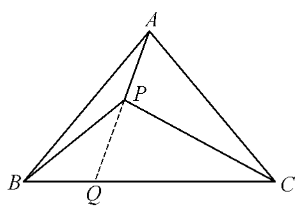


图 4-8

不妨设 $AB=1$,由正弦定理得

$$\frac{BP}{AB}=\frac{\sin 20°}{\sin 150°},$$

故 $$BP=2\sin 20°,$$

而 $$\frac{BQ}{AB}=\frac{\sin 20°}{\sin 110°},$$

$$BC=2\cos 50°,$$

如能证明 $$2\sin 20°=\frac{\cos 50°}{\sin 70°},$$

则有 $BP^2=BQ\cdot BC$,于是由 $\angle BPQ=30°$,

得 $$\angle PCB=30°,$$

故 $$\angle PCA=20°.$$

因为 $$2\sin 20°\sin 70°=\cos 50°-\cos 90°=\cos 50°.$$

故结论成立.

(2) 如图 4-9,延长 AP 至 BC 于点 Q,设 $AB=1$,则

$$BP=\frac{1}{2\cos 10°},$$

$$BQ=\frac{\sin 10°}{\sin 120°}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 10^\circ,$$

$$BC = 2\cos 50^\circ.$$

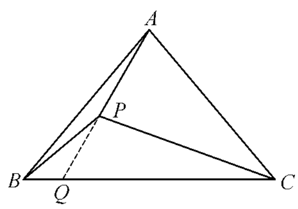


图 4-9

由于 $\cos^2 10^\circ \sin 10^\circ \cos 50^\circ$

$$= \frac{1}{2}\cos 10^\circ \sin 20^\circ \cos 50^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \frac{1}{8}\sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{16},$$

故 $$BP^2 = BQ \cdot BC,$$

于是 $$\angle PCB = \angle BPQ = 20^\circ,$$

$$\angle ACP = 30^\circ.$$

(3) **如图** 4-10,**作** CQ **与直线** AP **垂直,不妨设** $AB = AC = 1$.

则 $AQ = \cos 70^\circ$,

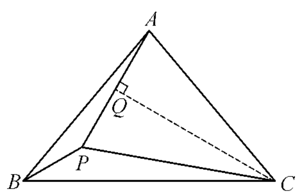


图 4-10

又由正弦定理,

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ},$$

易知 $$AP = 2AQ,$$

即 $$AQ = PQ,$$

原来 CQ **是** AP **中垂线**.

所以 $$AC = PC,$$

$$\angle ACP = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ.$$

例 9 **如图** 4-11,**已知四边形** $ABCD$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABD = 26^\circ$, $\angle DBC = 51^\circ$, $\angle ACD = 13^\circ$, **求** $\angle CAD$.

解 **设** $\angle ADC = \theta$, **则由正弦定理,有**

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + 13^\circ)},$$

又 $$\frac{AC}{BC}=\frac{\sin 77^\circ}{\sin 30^\circ},$$
$$\frac{BC}{CD}=\frac{\sin 43^\circ}{\sin 51^\circ},$$

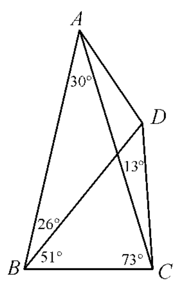


图 4-11

于是有

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+13^\circ)}&=\frac{2\sin 77^\circ\sin 43^\circ}{\sin 51^\circ}\\&=\frac{2\cos 13^\circ\cos 47^\circ\cos 73^\circ}{\sin 51^\circ\cos 73^\circ}\\&=\frac{\cos 39^\circ}{2\sin 51^\circ\cos 73^\circ}\\&=\frac{1}{2\cos 73^\circ},\end{aligned}$$

于是 $$\cos 13^\circ+\cot\theta\sin 13^\circ=2\cos 73^\circ,$$
$$\begin{aligned}\cot\theta&=\frac{2\cos 73^\circ-\cos 13^\circ}{\sin 13^\circ}\\&=\frac{2\cos(60^\circ+13^\circ)-\cos 13^\circ}{\sin 13^\circ}\\&=\frac{-2\sin 60^\circ\sin 13^\circ}{\sin 13^\circ}\\&=-\sqrt{3},\end{aligned}$$

于是 $\theta=150^\circ$，故 $\angle CAD=180^\circ-150^\circ-13^\circ=17^\circ$.

评注 这么“可怕”的问题，用了三角函数就不再“可怕”，但此题仍属不易，有如下认识：首先，一旦 B、C 定，则 A、D 也定，$\angle CAD$ 或$\angle ADC$ 之类固然依赖于 AD，但 AD 须通过余弦定理才能表示，太繁，故想方设法回避掉，结果就找到 AC 与 CD 之比；其次我们再度运用了伟大公式 $\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta$，可见其威力.

例 10 如图 4-12，凸四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 交于点 P，$\angle DBC=60^\circ$，$\angle ACB=50^\circ$，$\angle ABD=20^\circ$，$\angle ACD=30^\circ$，求$\angle ADB$.

解 据说这是一道“名题”，从奥数角度来说，用三角函数解决起来毫不拖泥带水.

$$\frac{AP}{AC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{BP\sin 20^\circ}{BC\sin 80^\circ}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ\sin 80^\circ},$$

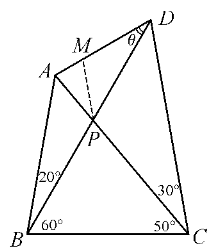


图 4-12

而 $$\frac{DP}{CD}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ},$$

由于 $$\frac{\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 10^\circ\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$=\frac{2}{4}\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{4},$$

于是 $$\frac{AP}{AC}=\frac{\sin 20^\circ\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ\sin 80^\circ}$$

$$=\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2=\frac{DP^2}{CD^2}.$$

现作 $PM \parallel CD$，点 M 在 AD 上. 于是

$$\frac{AP}{AC}=\frac{MP}{CD},$$

这样一来便有

$$DP^2=MP\cdot CD,$$

又 $$\angle MPD=\angle PDC,$$

故 $$\triangle MPD \backsim \triangle PDC,$$

因此 $$\angle ADB=\angle PCD=30^\circ.$$

另外一种方案与例 9 类似.

设 $\angle ADB=\theta$，则

$$\frac{\sin(\theta+20^\circ)}{\sin\theta}=\frac{BD}{AB}$$

$$=\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ},$$

此即

$$\cos 20^\circ + \cot\theta \sin 20^\circ = 2\cos 40^\circ$$

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\\ &= \frac{2\cos(60^\circ - 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\\ &= \frac{2\sin 60^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

于是，$\theta = 30^\circ$.

评注　看来这套方法已经掌握熟练了.

习　题　4

1 求证：正五边形一条对角线被另一条对角线黄金分割，如果它们没有共同端点的话.

2 设点 P 为$\triangle ABC$ 内一点，$\angle PBA = 10^\circ$，$\angle BAP = 20^\circ$，$\angle PCB = 30^\circ$，$\angle CBP = 40^\circ$，求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

3 已知$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 108^\circ$，$AB = AC$，延长 AC 至点 D，设点 J 是 BD 的中点，求证：当且仅当 $AD = BC$ 时 $AJ \perp JC$.

4 设$\triangle ABC$ 内有一点 M，$\angle MBA = 30^\circ$，$\angle MAB = 10^\circ$，又$\angle ACB = 80^\circ$，$AC = BC$，求$\angle AMC$.

5 已知$\triangle ABC$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 4$，求证 $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

6 不等边$\triangle ABC$ 中，三内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 成等差数列，公差为 θ，且 $\csc 2A$、$\csc 2B$、$\csc 2C$ 也成等差数列，求 $\tan\theta$.

7 已知$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 48^\circ$，$\angle B = 54^\circ$，$\angle C = 78^\circ$，求证：$BC^2 + AC^2 - AB^2 = R^2$，R 为外接圆半径.

8 半径为 1 的圆$\odot O$ 上依次有 6 点 A_1，A_2，A_3，…，A_6，且$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_5OA_6 = \frac{\pi}{7}$，求 $A_1A_6 + A_3A_4 - A_2A_5$.

9 一个边长为 1 的正五边形，D 是这样的点集，D 中每一点到所有顶点的距

离都不大于 1,**求** D **的面积**.

10 $\triangle ABC$ **中**,$\angle B=70^\circ$,$\angle A=80^\circ$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle CBP=\angle BCP=10^\circ$,**求**$\angle BAP$.

11 $\triangle ABC$ **中**,$\angle A=100^\circ$,$AB=AC$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle PAC=\angle ACP=20^\circ$,**求**$\angle PBA$.

12 $\triangle ABC$ **中**,$\angle A=100^\circ$,$AB=AC$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle ACP=10^\circ$,$\angle PAC=20^\circ$,**求**$\angle PBA$.

13 $\triangle ABC$ **中**,$\angle A=30^\circ$,$\angle B=50^\circ$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle PAB=20^\circ$,$\angle PCA=40^\circ$,**求**$\angle PBA$.

14 $\triangle ABC$ **中**,$\angle A=80^\circ$,$\angle B=60^\circ$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle PAC=\angle PCA=10^\circ$,**求**$\angle PBA$.

15 $\triangle ABC$ **中**,$\angle A=80^\circ$,$\angle B=60^\circ$,**点** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,$\angle BAP=10^\circ$,$\angle ABP=20^\circ$,**求**$\angle ACP$.

16 **已知等腰**$\triangle ABC$,**顶角** $\angle A<\frac{\pi}{3}$,D **在** AC **上**,**若** $AD=BC=1$,$BD=\sqrt{2}$,**求**$\angle A$.

17 $\triangle ABC$ **中**,$\angle B$ **与**$\angle C$ **的平分线分别与** CA、AB **交于点** D、E,$\angle BDE=24^\circ$,$\angle CED=18^\circ$,**试求**$\triangle ABC$ **的三个内角**.

5 和角公式应用之三
——比较复杂的问题

这一单元其实是第 3 单元的延续，列举一些比较复杂的问题. 有人可能以为，用三角（或解析几何）计算，几何就再无困难，其实不然. 对此，读者要好好体会.

例 1 设四边形 $ABCD$ 内接于圆，BA、CD 延长后交于点 R，AD、BC 延长后交于点 P，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 指的都是$\triangle ABC$ 的内角，求证：若 AC 与 BD 交于点 Q，则

$$\frac{\cos A}{AP}+\frac{\cos C}{CR}=\frac{\cos B}{BQ}.$$

证明 如图 5-1，设 $\angle ABD=\theta$，

则
$$\begin{aligned}\angle R&=\angle BDC-\theta\\&=\angle A-\theta,\\ \angle BQC&=\angle A+\theta,\\ \angle P&=\angle C-\angle CAD\\&=\angle C-\angle DBC\\&=\angle C-(\angle B-\theta)\\&=\angle C-\angle B+\theta.\end{aligned}$$

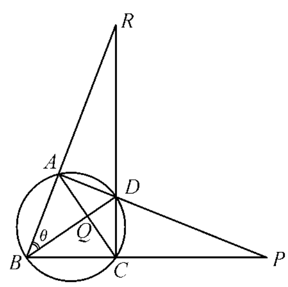


图 5-1

现在$\triangle ABP$，$\triangle ABQ$ 和$\triangle BCR$ 中分别运用正弦定理，有

$$\frac{AP}{\sin B}=\frac{AB}{\sin(\angle C-\angle B+\theta)},$$
$$\frac{BQ}{\sin A}=\frac{AB}{\sin(\angle A+\theta)},$$
$$\frac{CR}{\sin B}=\frac{BC}{\sin(\angle A-\theta)},$$

所以
$$\begin{aligned}&\frac{\cos A}{AP}+\frac{\cos C}{CR}-\frac{\cos B}{BQ}\\=&\frac{\cos A\sin(\angle C-\angle B+\theta)}{AB\sin B}+\frac{\cos C\sin(\angle A-\theta)}{BC\sin B}-\\&\frac{\cos B\sin(\angle A+\theta)}{AB\sin A}.\end{aligned}$$

欲证此式为 0，先乘以 AB，知由正弦定理，只需证下式：
$$\begin{aligned}&\frac{\cos A\sin(\angle C-\angle B+\theta)}{\sin B}+\frac{\cos C\sin(\angle A-\theta)\sin C}{\sin A\sin B}\\=&\frac{\cos B\sin(\angle A+\theta)}{\sin A},\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}&\sin 2\angle A\sin(\angle C-\angle B+\theta)+\sin 2\angle C\sin(\angle A-\theta)\\&-\sin 2\angle B\sin(\angle A+\theta)=0.\end{aligned}$$

用和角公式按 θ 展开后，$\sin\theta$ 的系数为
$$\begin{aligned}&\sin 2\angle A\cos(\angle C-\angle B)-\sin 2\angle C\cos A-\sin 2\angle B\cos A\\=&\frac{1}{2}[\sin(2\angle A+\angle C-\angle B)+\sin(2\angle A+\angle B-\angle C)\\&-\sin(2\angle C+\angle A)-\sin(2\angle C-\angle A)-\sin(2\angle B+\angle A)\\&-\sin(2\angle B-\angle A)]\\=&\frac{1}{2}\{[\sin(2\angle A+\angle C-\angle B)-\sin(2\angle B-\angle A)]\\&-[\sin(2\angle C+\angle A)+\sin(2\angle B+\angle A)]\\&+[\sin(2\angle A+\angle B-\angle C)-\sin(2\angle C-\angle A)]\}.\end{aligned}$$

考虑到 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，上面三对的每一对都为 0；又 $\cos\theta$ 的系数为
$$\begin{aligned}&\sin 2\angle A\sin(\angle C-\angle B)+\sin 2\angle C\sin A-\sin 2\angle B\sin A\\=&\sin 2\angle A\sin(\angle C-\angle B)+(\sin 2\angle C-\sin 2\angle B)\sin A\\=&\sin 2\angle A\sin(\angle C-\angle B)+2\sin(\angle C-\angle B)\cos(\angle C+\angle B)\sin A\\=&\sin(\angle C-\angle B)(\sin 2\angle A-2\cos A\sin A)\\=&0.\end{aligned}$$

于是结论成立.

评注 此题计算务必仔细，而且在计算过程中也比较讲究顺序，适当减少计算量.

例 2 有三个两两外切的等圆$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$，另有一小圆$\odot O$与它们都外切. 在$\odot O$上任找一点P作$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$的切线，求证：

三条切线中有两条之和等于第三条切线之长.

证明 如图 5-2，连接OA、OB、OC不妨设点P在$\angle AOC$内，且$\angle AOP=\theta$，$\angle POB=120^\circ+\theta$（其实也可能是$240^\circ-\theta$，但由于后面作的是余弦，不影响），$\angle POC=120^\circ-\theta$.

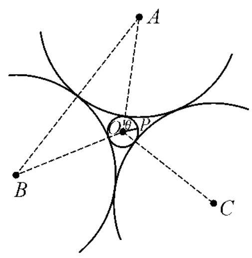


图 5-2

设小圆半径为 1，大圆半径为x，则由$AB=\sqrt{3}AO$，得

$$2x=(x+1)\sqrt{3},$$
$$x=2\sqrt{3}+3.$$

由余弦定理，

$$\begin{aligned}PA^2&=OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cos\theta\\&=(2\sqrt{3}+4)^2+1-2(2\sqrt{3}+4)\cos\theta.\end{aligned}$$

于是点P至$\odot A$的切线长

$$\begin{aligned}l_A&=\sqrt{PA^2-(2\sqrt{3}+3)^2}\\&=\sqrt{4\sqrt{3}+7+1-2(2\sqrt{3}+4)\cos\theta}\\&=\sqrt{16+8\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}l_B&=\sqrt{16+8\sqrt{3}}\sin\frac{120^\circ+\theta}{2}\\&=\sqrt{16+8\sqrt{3}}\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{2}\right),\\l_C&=\sqrt{16+8\sqrt{3}}\sin\frac{120^\circ-\theta}{2}\\&=\sqrt{16+8\sqrt{3}}\sin\left(60^\circ-\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

为证$l_A+l_C=l_B$，只需证明

$$\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(60^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{2}\right),$$

由于左式$=\sin\frac{\theta}{2}+\sin 60^\circ\cos\frac{\theta}{2}-\cos 60^\circ\sin\frac{\theta}{2}$

$$=\sin 60^\circ\cos\frac{\theta}{2}+\cos 60^\circ\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{2}\right),$$

故结论成立.

评注　此题不用三角函数法,恐怕不好解决.

例 3　在$\triangle ABC$外作三个等边三角形$\triangle A_1BC$、$\triangle ACB_1$、$\triangle ABC_1$. 又作$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆O,延长A_1A、B_1B、C_1C,分别与$\odot O$交于点A_2、B_2、C_2,求证:$A_2A+B_2B+C_2C=AA_1$.

证明　如图5-3,**我们先证明**AA_1、BB_1、CC_1**交于一点. 不妨设**AA_1**与**BC**交于点**P,BB_1**与**AC**交于点**Q,CC_1**与**AB**交于点**R,**令**$\triangle ABC$**的三个内角对应为**$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. **于是**

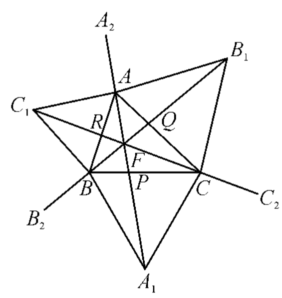


图 5-3

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ACA_1}}\cdot\frac{S_{\triangle BCB_1}}{S_{\triangle ABB_1}}\cdot\frac{S_{\triangle ACC_1}}{S_{\triangle CBC_1}}$$

$$=\frac{AB\cdot BA_1\sin(\angle B+60^\circ)}{AC\cdot CA_1\sin(\angle C+60^\circ)}\cdot\frac{BC\cdot B_1C\cdot\sin(\angle C+60^\circ)}{AB\cdot AB_1\sin(\angle A+60^\circ)}$$

$$\cdot\frac{CA\cdot AC_1\sin(\angle A+60^\circ)}{BC\cdot BC_1\sin(\angle B+60^\circ)}=1,$$

故由塞瓦逆定理,知AA_1、BB_1、CC_1**共点于**F(**其实就是费马点**).

下面证明:

$\angle AFC_1$、$\angle C_1FB$、$\angle BFA_1$、$\angle A_1FC$、$\angle CFB_1$、$\angle B_1FA$**均为**60°.

由对称性知只要证明$\angle AFC_1=60^\circ$**即可.**

这是因为

$$AB=BC_1,$$

$$A_1B=BC,$$

$$\angle C_1BC=60^\circ+\angle B=\angle ABA_1,$$

故

$$\triangle C_1BC\cong\triangle ABA_1,$$

这样就有 $\angle BC_1F=\angle BAF$，
于是点 A、C_1、B、F 四点共圆，于是

$$\angle AFC_1=\angle ABC_1=60^\circ.$$

同理，点 B、A_1、C、F 也四点共圆，由托勒密定理

$$BF\cdot A_1C+CF\cdot BA_1=FA_1\cdot BC,$$

故而 $$BF+CF=FA_1.$$

这意味着由对称性有

$$AA_1=BB_1=CC_1=FA+FB+FC.$$

欲证 $$A_2A+B_2B+C_2C=AA_1,$$

只需证 $$(FA_2+FB_2+FC_2)-(FA+FB+FC)=AA_1$$

即 $$FA_2+FB_2+FC_2=2AA_1.$$

又 $FA_1+FB_1+FC_1=3AA_1-(FA+FB+FC)=2AA_1$，
故我们只需证明

$$FA_1+FB_1+FC_1=FA_2+FB_2+FC_2.$$

注意此式已不含点 A、B、C. 而 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2 又六点共圆. 我们可以把命题理解为$\odot O$ 中三条交于一点 F 的弦 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 两两夹角为 60°，则

$$FA_1+FB_1+FC_1=FA_2+FB_2+FC_2,$$

如图 5-4 所示.

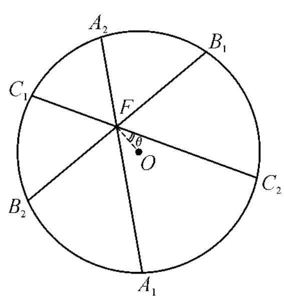


图 5-4

证明如下：

不妨设 $\odot O$ 半径为 r，$OF=d$，点 O 在 $\angle C_2FA_1$ 内，$\angle C_2FO=\theta$，则由垂径定理，知

$$FC_2=\sqrt{r^2-d^2\sin^2\theta}+d\cos\theta,$$
$$FC_1=\sqrt{r^2-d^2\sin^2\theta}-d\cos\theta,$$
$$FB_1=\sqrt{r^2-d^2\sin^2(60^\circ+\theta)}+d\cos(60^\circ+\theta),$$
$$FB_2=\sqrt{r^2-d^2\sin^2(60^\circ+\theta)}-d\cos(60^\circ+\theta),$$

$$FA_1 = \sqrt{r^2 - d^2\sin^2(60^\circ - \theta)} + d\cos(60^\circ - \theta),$$
$$FA_2 = \sqrt{r^2 - d^2\sin^2(60^\circ - \theta)} - d\cos(60^\circ - \theta).$$

这样一来，欲证等式变成

$$\cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) - \cos\theta$$
$$= -\cos(60^\circ - \theta) - \cos(60^\circ + \theta) + \cos\theta,$$

也即 $$\cos(60^\circ - \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos\theta,$$

这显然成立，于是命题证毕.

评注　应该说这是一道非常好的题目，先找出$\triangle ABC$中的一些相等关系，然后去掉$\triangle ABC$，看出问题最终被简化为一个六点共圆的问题，而结合垂径定理及三角函数，又看出此问题即为一个三角恒等式，整个解题过程虽不简单，但思路清晰，干脆利索，令人回味.

例 4　如图 5-5，已知$\odot O_1$与$\odot O_2$分别以R，r为半径（$R \geqslant \sqrt{2}r$），且$O_1O_2 = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}$，点$A$是$\odot O_1$上一点，$AB$、$AC$分别切$\odot O_2$于点$B$、$C$，并分别延长后交$\odot O_1$于点$D$、$E$，求证：$BD \cdot CE = r^2$.

证明　首先确定两圆内含，即$O_1O_2 < R - r$.

由于 $$(R-r)^2 - O_1O_2^2$$
$$= (R-r)^2 - (R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2})$$
$$= r\sqrt{4R^2 + r^2} - 2Rr$$
$$= r(\sqrt{4R^2 + r^2} - 2R) > 0.$$

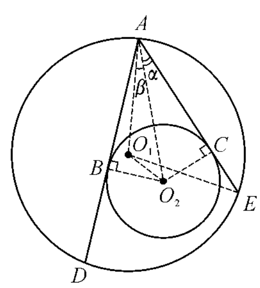


图 5-5

故两圆确实内含.

连接O_2A、O_1A、O_1E、O_2B、O_2C，设$AO_2 = d$，$\angle O_2AE = \alpha$，$\angle O_1AO_2 = \beta$.

于是 $$AE = 2R\cos(\alpha + \beta),$$
$$CE = 2R\cos(\alpha + \beta) - \sqrt{d^2 - r^2}.$$

又$\angle BAO_1 = |\alpha - \beta|$，故有

$$BD = 2R\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{d^2 - r^2}.$$

接下来的任务就是证明

$$(2R\cos(\alpha + \beta) - \sqrt{d^2 - r^2})(2R\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{d^2 - r^2}) = r^2,$$

展开，即

$$4R^2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2R\sqrt{d^2-r^2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))+d^2-r^2=r^2, \quad ①$$

由于有
$$\cos\beta=\frac{R^2+d^2-O_1O_2^2}{2Rd},$$

$$\sin\alpha=\frac{r}{d},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{d^2-r^2}}{d},$$

又
$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\&=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)\\&=\frac{1}{2}(2\cos^2\beta-1+1-2\sin^2\alpha)\\&=\cos^2\beta-\sin^2\alpha,\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

于是，欲证①式左端为

$$\begin{aligned}&4R^2(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)-4R\sqrt{d^2-r^2}\cos\alpha\cos\beta+d^2-r^2\\&=4R^2\left[\left(\frac{R^2+d^2-O_1O_2^2}{2Rd}\right)^2-\frac{r^2}{d^2}\right]-4R(d^2-r^2)\frac{R^2+d^2-O_1O_2^2}{2Rd^2}+d^2-r^2\\&=\frac{1}{d^2}[(R^2+d^2-O_1O_2^2)^2-4R^2r^2-2(d^2-r^2)(R^2+d^2-O_1O_2^2)+d^4-d^2r^2]\\&=\frac{1}{d^2}[(R^2+d^2-O_1O_2^2)^2-2(d^2-r^2)(R^2+d^2-O_1O_2^2)+(d^2-r^2)^2-4R^2r^2-r^4+d^2r^2]\\&=\frac{1}{d^2}[(R^2+d^2-O_1O_2^2-d^2+r^2)^2-r^4-4R^2r^2+d^2r^2]\\&=\frac{1}{d^2}[r^2(4R^2+r^2)-r^4-4R^2r^2+d^2r^2]\\&=r^2.\end{aligned}$$

于是命题得证.

评注 这类问题如不用三角计算，可能会颇费心思.

例 5 如图 5-6，设$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B>\angle A$，AB中点为O，点

I 是$\triangle ABC$ 内心，求证：$OI \perp BI$ 的充要条件是 $BC : CA : AB = 3 : 4 : 5$.

证明 先证必要性.

设 $OI \perp BI$，作 $IM \perp OB$，则有 $IM^2 = OM \cdot BM$.

今设 AB、BC、CA 分别为 c、a、b，则有

$$BM = \frac{1}{2}(a+c-b),$$

$$OM = \frac{c}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

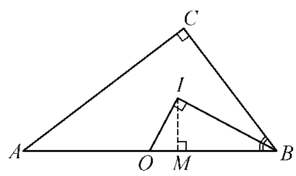


图 5-6

又 IM 是内切圆半径，故

$$\frac{1}{2}IM(a+b+c) = \frac{1}{2}ab,$$

即
$$IM = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}(a+b-c),$$

于是有
$$(a+b-c)^2 = (b-a)(a+c-b),$$

整理，得
$$2a^2+2b^2+c^2 = 3bc+ac,$$

令 $\angle ABC = \theta$，则

$a = c\cos\theta$，$b = c\sin\theta$，代入，有

$3c^2 = 3bc + ac$ 即

$$3c = 3b + a,$$

$$3 = 3\sin\theta + \cos\theta,$$

于是
$$(3-\cos\theta)^2 = 9\sin^2\theta,$$

$$10\cos^2\theta - 6\cos\theta = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5},$$

故 $BC : CA : AB = 3 : 4 : 5$.

反之，
$$\cos\theta = \frac{3}{5},$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned}BM&=\frac{1}{2}(a+c-b)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}c+c-\frac{4}{5}c\right)\\&=\frac{2}{5}c<\frac{1}{2}c,\end{aligned}$$

$$OM=\frac{1}{2}c-\frac{2}{5}c=\frac{1}{10}c,$$

$$BM\cdot OM=\frac{1}{25}c^2,$$

而
$$\begin{aligned}IM&=BM\tan\frac{\theta}{2}\\&=\frac{2}{5}c\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\\&=\frac{1}{5}c,\end{aligned}$$

故
$$IM^2=BM\cdot OM,$$

此即
$$\frac{OM}{IM}=\frac{IM}{BM},$$

又
$$\angle OMI=90^\circ=\angle BMI,$$

于是
$$\triangle OMI\backsim\triangle IMB,$$

$$\begin{aligned}\angle OIB&=\angle OIM+\angle MIB\\&=\angle IBO+\angle MIB\\&=90^\circ.\end{aligned}$$

例 6　如图 5-7，**已知圆内接四边形** $ABCD$，**圆心** O **在**$\triangle ABC$ **内**，Q、P **分别是** AB，BC **上的点**，O **在**$\triangle DQP$ **内，且** $\angle PDC=\angle OAB=\alpha$，$\angle ADQ=\angle OCB=\beta$，**若** CO **与** PQ **延长后交于点** M，AO **与** QP **延长后交于点** N，**求证：**$\frac{MD}{ND}\cdot\frac{OP}{QO}=\frac{PD}{QD}\cdot\frac{OM}{ON}$.

证明　圆中相等角度甚多，又此题欲证结论、图形都错综复杂，故可考虑用三角函数.

不妨设 $\angle A=\angle BAC$，$\angle C=\angle ACB$.

设 $\angle ACD=\theta$，$\angle CAD=\gamma$. 圆半径为 R.

由正弦定理易知，$\angle OCB=90^\circ-\angle BAC$，

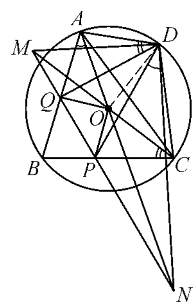


图 5-7

即
$$\angle A+\beta=90^\circ,$$

$$\frac{QD}{AD}=\frac{QD}{2R\sin\theta}=\frac{\sin(\angle A+\gamma)}{\sin(\angle A+\gamma+\beta)}$$
$$=\frac{\sin(\angle A+\gamma)}{\cos\gamma},$$

故
$$QD=\frac{2R\sin\theta\sin(\angle A+\gamma)}{\cos\gamma},$$

同理
$$PD=\frac{2R\sin\gamma\sin(C+\theta)}{\cos\theta},$$

由于 $\angle C+\angle A+\theta+\gamma=180^\circ$，故

$$\frac{QD}{PD}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\gamma\cos\gamma}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\gamma},$$

又
$$\angle DQP+\angle DPQ=180^\circ-(180^\circ-\angle B-\alpha-\beta)$$
$$=\angle B+\alpha+\beta$$
$$=\angle B+90^\circ-\angle C+90^\circ-\angle A$$
$$=2\angle B,$$
$$\theta+\gamma=180^\circ-(180^\circ-\angle B)=\angle B,$$

所以
$$2\theta+2\gamma=2\angle B,$$

于是由正弦定理，
$$\frac{\sin\angle QPD}{\sin\angle DQP}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\gamma},$$

即
$$\frac{\sin(2\angle B-\angle DQP)}{\sin\angle DQP}=\frac{\sin(2\angle B-2\gamma)}{\sin 2\gamma},$$

展开即
$$\sin 2\angle B\cot\angle DQP-\cos 2\angle B$$
$$=\sin 2\angle B\cot 2\gamma-\cos 2\angle B,$$

由于点 O 在 $\triangle ABC$ 内，$\angle B<90^\circ$，$\sin 2\angle B\neq 0$，

于是
$$\cot\angle DQP=\cot 2\gamma,$$

所以
$$\angle DQP=2\gamma,$$
$$\angle DPQ=2\theta,$$

于是 $$\begin{aligned}\angle MQD &= 180^\circ - \angle DQP \\ &= 180^\circ - 2\gamma \\ &= 180^\circ - \angle DOC \\ &= \angle MOD,\end{aligned}$$

故点 M、Q、O、D 四点共圆.

同理,点 N、P、O、D 亦四点共圆.

于是 $$\begin{aligned}\frac{MD}{ND}\cdot\frac{OP}{OQ} &= \frac{MD}{OQ}\cdot\frac{OP}{ND} \\ &= \frac{\sin 2\gamma}{\sin\angle ODQ}\cdot\frac{\sin\angle ODP}{\sin 2\theta},\end{aligned}$$

而 $$\begin{aligned}\frac{PD}{QD}\cdot\frac{OM}{ON} &= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\theta}\cdot\frac{\sin\angle ONM}{\sin\angle OMN} \\ &= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\theta}\cdot\frac{\sin\angle ODP}{\sin\angle ODQ}.\end{aligned}$$

于是结论成立.

评注　这道题目是有一定难度的,关键是看出两组四点共圆,这动用了多种三角方法. 此题是典型的奥数试题.

例 7　设圆内接四边形 $ABCD$,圆心 O 在该四边形内部,圆的直径为 25,若点 P、Q 分别为 AD、CD 的中点,且 AB、BC、CD、DA、OP、OQ 是 6 个两两不等的正整数,求四边形周长的所有可能值.

解　如图 5-8,易知 OP、OQ 分别垂直平分 AD、CD.

于是,有

$$OQ^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = DO^2,$$

即 $$CD^2 + 4OQ^2 = 4DO^2 = 625.$$

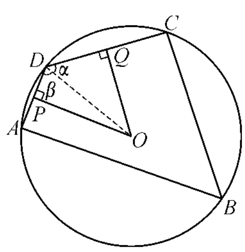


图 5-8

下面考虑不定方程

$$x^2 + 4y^2 = 625,$$

由此可见,x 一定是奇数,故 $x^2 \equiv 1 \pmod 8$,

又 $625 \equiv 1 \pmod 8$,于是 y 为偶数.

由 $4y^2 < 625$,得 $y \leqslant 12$;将 $y = 2$、4、6、8、10、12 分别代入,惟有当 $y = 10$ 时,$x = 15$,或当 $y = 12$ 时,$x = 7$,其余情况不定方程均无解.

于是,有

$$AD=7,\ CD=15,\ OP=12,\ OQ=10$$

或 $$AD=15,\ CD=7,\ OP=10,\ OQ=12.$$

先考虑第 1 种情况.

今设 $\angle CDO=\alpha$，$\angle ADO=\beta$, 则有

$$\sin\alpha=\frac{OQ}{DO}=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5};$$

$$\sin\beta=\frac{OP}{DO}=\frac{24}{25},\ \cos\beta=\frac{7}{25};$$

于是 $$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{21}{125}-\frac{96}{125}\\&=-\frac{3}{5},\end{aligned}$$

故 $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}.$$

由正弦定理，

$$AC=25\sin(\alpha+\beta)=20.$$

今设 $AB=a$，$BC=b$，由于 $\cos B=\frac{3}{5}$，

故 $$a^2+b^2-\frac{6}{5}ab=400.$$

于是 a、b 至少有一个是 5 的倍数.

由对称性,先设 $a=5a_1$，则

$$25a_1^2+b^2-6a_1b=400,$$

即 $$(b-3a_1)^2+16a_1^2=400.$$

于是，$a_1\leqslant 5$，让 $a_1=1$、2、3、4、5 代入,得

当 $a_1=3$ 时，$|b-3a_1|=16$，$b=25$，$a=15$；

当 $a_1=4$ 时，$|b-3a_1|=12$，$b=24$，$a=20$；

当 $a_1=5$ 时，$|b-3a_1|=0$，$b=15$，$a=25$.

由于解必须两两不同,因此解只能为

$$\begin{cases} AD=7, \\ CD=15, \\ AB=24, \\ BC=20 \end{cases} \text{或} \begin{cases} AD=7, \\ CD=15, \\ AB=20, \\ BC=24. \end{cases}$$

周长为 66.

再考虑第二种情况,这时整个图形作了对称操作,因此仍有$\{AB, BC\}=\{20, 24\}$.

综上所述,四边形 $ABCD$ 的周长为 66.

评注　此题的新颖之处在于将其和整数、不定方程联系在一起. 运用几何与三角函数能准确、快捷地列出方程. 题型虽不灵活,无需很大技巧,但讲究章法与步骤,需要坚持.

例 8　$\triangle ABC$ 中,BD、CE 是角平分线,点 D、E 分别在 AC、AB 上. 点 I 是内心,点 I 到 DE 的垂线交 DE 于点 M,MI 延长后交 BC 于点 N,若 $IN=2IM$,求$\angle A$.

解　设$\triangle ABC$ 三对应边分别为 a、b、c,三对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

又设 $\angle IED=\alpha$, $\angle IDE=\beta$, 如图 5-9.

对于$\triangle INC$,有正弦定理

$$\frac{IN}{\sin\frac{\angle C}{2}}=\frac{IC}{\sin\angle INC}=\frac{IC}{\sin\left(\angle NIC+\frac{\angle C}{2}\right)}=\frac{IC}{\sin\left(90^\circ-\alpha+\frac{\angle C}{2}\right)},$$

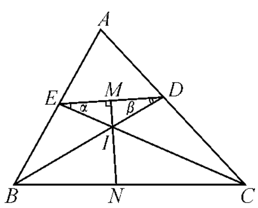


图 5-9

又由角平分线性质,知

$$\frac{EI}{IC}=\frac{AE}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AC+BC}=\frac{c}{a+b},$$

又 $IN=2IM=2EI\sin\alpha$, 于是

$$\frac{\sin\frac{\angle C}{2}}{\sin\left(90^\circ-\alpha+\frac{\angle C}{2}\right)}=\frac{IN}{IC}=\frac{2EI\sin\alpha}{IC}$$

$$=2\sin\alpha\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}$$

$$=2\sin\alpha\frac{\sin\dfrac{\angle C}{2}\cos\dfrac{\angle C}{2}}{\sin\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle A-\angle B}{2}},$$

由于 $\sin\dfrac{\angle A+\angle B}{2}=\cos\dfrac{\angle C}{2}$**，故而上式可化为**

$$2\sin\alpha\sin\left(90^\circ-\alpha+\frac{\angle C}{2}\right)=\cos\frac{\angle A-\angle B}{2},$$

积化和差，即

$$\cos\left(90^\circ-2\alpha+\frac{\angle C}{2}\right)-\cos\left(90^\circ+\frac{\angle C}{2}\right)=\cos\frac{\angle A-\angle B}{2},$$

即

$$\begin{aligned}\sin\left(2\alpha-\frac{\angle C}{2}\right)&=\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}-\sin\frac{\angle C}{2}\\&=\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}-\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\\&=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2},\end{aligned}\qquad ①$$

同理

$$\sin\left(2\beta-\frac{\angle B}{2}\right)=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle C}{2},\qquad ②$$

由于

$$\alpha+\beta=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

①＋② **并和差化积，得**

$$\begin{aligned}&\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\angle B+\angle C}{4}\right)\cos\left(\alpha-\beta+\frac{\angle B-\angle C}{4}\right)\\&=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B+\angle C}{4}\cos\frac{\angle B-\angle C}{4},\end{aligned}$$

化简，得

$$\cos\left(\alpha-\beta+\frac{\angle B-\angle C}{4}\right)=2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B-\angle C}{4}.\qquad ③$$

又 ①－② **并和差化积，得**

$$\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\angle B-\angle C}{4}\right)\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\angle B+\angle C}{4}\right)$$
$$=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B-\angle C}{4}\cos\frac{\angle B+\angle C}{4},$$

化简得

$$\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\angle B-\angle C}{4}\right)=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B-\angle C}{4}. \qquad ④$$

③^2 + ④^2，得 $$1=4\sin^2\frac{\angle A}{2},$$

故 $$\sin\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2},$$
$$\angle A=60^\circ.$$

评注 这是一道相当不错的竞赛题，逆命题是比较容易证明的，即 $\angle A=60^\circ$，有 $IN=IE=ID=2IM$，此时由于 A、E、I、D 共圆，有许多性质可以用. 但此命题就比较麻烦，信息发生了"阻断"，此时谁都知道用代数与三角方法比较明智，但如何入手仍比较棘手，直接计算 IM（用余弦定理），似乎是一件可怕的事；而引进 α、β，好像较为可取，因为一开始我们并不清楚推理将我们引向何方，至少由于对称性，能对 α 立一个方程，就可相应地对 β 立一个方程. 最后，如果运道比较好，方程不算太复杂的话，就要坚定地做下去，否则趁早改弦易辙，另谋他路.

例 9 在$\triangle ABC$ 中，三个内角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，其中 $\angle C=2\angle B$，点 P 为$\triangle ABC$ 内一点，满足 $AP=AC$ 及 $PB=PC$，求证：$\angle PAB=\frac{1}{3}\angle A$.

证明 如图 5-10，设 $\angle PBC=\angle PCB=\theta$，

于是 $$\angle ABP=\angle ABC-\theta,$$
$$\angle ACP=\angle C-\theta$$
$$=2\angle B-\theta,$$

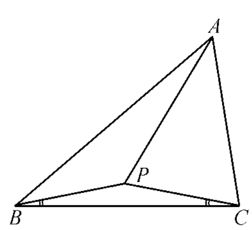


图 5-10

故 $$\angle PAB$$
$$=\angle A-\angle PAC$$
$$=\angle A-(180^\circ-2\angle ACP)$$
$$=(180^\circ-3\angle B)-(180^\circ-4\angle B+2\theta)$$

$= \angle B - 2\theta.$

若要证明 $\angle B - 2\theta = \frac{1}{3}\angle A$，由于 $\angle A + 3\angle B = 180^\circ$，故

$$2\theta = \angle B - (60^\circ - \angle B) = 2\angle B - 60^\circ,$$

即 $\angle B - \theta = 30^\circ$，于是问题变为证明 $\angle ABP = 30^\circ$.

设$\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，由正弦定理

$$AB = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot AC,$$

即
$$c = 2b\cos B.$$

又对于$\triangle APB$，由于

$$\begin{aligned}\angle APB &= 360^\circ - (\angle BPC + \angle APC)\\ &= 360^\circ - (180^\circ - 2\theta) - (2\angle B - \theta)\\ &= 180^\circ - (2\angle B - 3\theta).\end{aligned}$$

由正弦定理，
$$\begin{aligned}\frac{c}{b} = \frac{AB}{AP} &= \frac{\sin\angle APB}{\sin\angle ABP}\\ &= \frac{\sin(2\angle B - 3\theta)}{\sin(\angle B - \theta)},\end{aligned}$$

于是
$$\sin(2\angle B - 3\theta) = 2\sin(\angle B - \theta)\cos B.$$

记 $\angle B - \theta = \alpha$，则

$$\sin(3\alpha - \angle B) = 2\sin\alpha\cos B,$$

即
$$\sin(3\alpha - \angle B) - \sin(\alpha + \angle B) = \sin(\alpha - \angle B),$$

和差化积，得

$$2\sin(\alpha - \angle B)\cos 2\alpha = \sin(\alpha - \angle B),$$

由于
$$\alpha - \angle B = -\theta \neq 0,\text{故}$$
$$2\cos 2\alpha = 1,$$
$$\alpha = 30^\circ.$$

评注 凡是这类题目，用正弦定理建立方程是经常想到的方法，但如何寻找一条比较好的途径，使计算量降低，仍少不了一番思索.

例 10 在直角$\triangle ABC$ 中，直角$\angle A$ 的 n 等分线与斜边 BC 依次相交于

P_1，P_2，…，P_{n-1}，求证：

$$\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}=\frac{b+c}{2bc}\left(\cot\frac{\pi}{4n}-1\right).$$

此处 $b=AC$，$c=AB$.

证明　如图 5-11，不妨设 P_1 靠近 B，

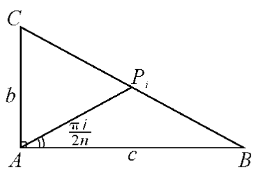


图 5-11

则
$$\angle P_iAB=\frac{\pi i}{2n},$$

由
$$S_{\triangle AP_iC}+S_{\triangle BP_iA}=S_{\triangle ABC}$$

得
$$\frac{1}{2}b\cdot AP_i\cos\frac{\pi i}{2n}+\frac{1}{2}c\cdot AP_i\sin\frac{\pi i}{2n}=\frac{1}{2}bc,$$

此即
$$\frac{1}{AP_i}=\frac{1}{b}\sin\frac{\pi i}{2n}+\frac{1}{c}\cos\frac{\pi i}{2n},$$

于是
$$\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n-1}\sin i\alpha+\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n-1}\cos i\alpha,$$

此处
$$\alpha=\frac{\pi}{2n}.$$

根据三角级数中的公式，即得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}+\cdots+\frac{1}{AP_{n-1}}\\
=&\frac{1}{b}\frac{\sin\frac{n-1}{2}\alpha\sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{c}\frac{\sin\frac{n-1}{2}\alpha\cos\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\\
=&\frac{\sin\frac{n-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{b}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{c}\cos\frac{\pi}{4}\right)\\
=&\frac{\sqrt{2}(b+c)}{2bc}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(b+c)}{2bc}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cot\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{b+c}{2bc}\left(\cot\frac{\pi}{4n}-1\right).$$

说明 此题用到了三角级数，三角级数除了以上几个可通过乘以 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 积化和差以外，还往往与复数、单位根及韦达定理有着十分密切的关系. 读者可试求下列三式的值(此处 n 为正整数).

(1) $\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$;

(2) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$;

(3) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$.

例 11 如图 5-12，设有一固定的矩形 $ABCD$，有一动圆弧 $\overset{\frown}{AC}$ 整个在矩形 $ABCD$ 内，将矩形分成两部分. 今作 $\odot O_1$ 与 AB、BC、$\overset{\frown}{AC}$ 相切，又作 $\odot O_2$ 与 AD、CD、$\overset{\frown}{AC}$ 相切，求证：r_1+r_2 为定值，此处 r_1、r_2 分别为 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径.

证明 设 $\overset{\frown}{AC}$ 所在圆记为 $\odot O$，当 $\overset{\frown}{AC}$ 为 AC 时(即 $\odot O$ 无穷大)，此时 $r_1+r_2=2r_1=AB+BC-AC$，于是我们的目标就是对一般情况证明 $r_1+r_2=AB+BC-AC$.

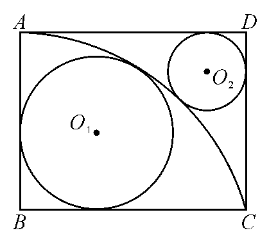


图 5-12

不妨设 $\odot O$ 半径为 1，且 O 在坐标原点(图 5-12 中未画出)，$A(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$C(\cos\theta, \sin\theta)$. $\overset{\frown}{AC}$ 全在矩形中，可认为矩形在第一象限，α、θ 均为锐角，$\alpha>\theta$.

$$(\cos\alpha+r_1)^2+(\sin\theta+r_1)^2=(1-r_1)^2,$$
$$(\cos\theta-r_2)^2+(\sin\alpha-r_2)^2=(1+r_2)^2,$$

这都是相切得出的勾股方程.

由此解得

$$r_1=\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\sin\theta)}-1-\cos\alpha-\sin\theta,$$
$$r_2=1+\cos\theta+\sin\alpha-\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\theta)(1+\sin\alpha)},$$

由于 $\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\sin\theta)}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

同理 $\sqrt{(1+\cos\theta)(1+\sin\alpha)}=\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$，

于是

$$\begin{aligned}r_1+r_2&=(\cos\theta-\cos\alpha)+(\sin\alpha-\sin\theta)+2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)-\\&\quad 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\\&=(\cos\theta-\cos\alpha)+(\sin\alpha-\sin\theta)+2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\right.\\&\quad\left.\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\\&=(\cos\theta-\cos\alpha)+(\sin\alpha-\sin\theta)-2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\\&=BC+AB-AC.\end{aligned}$$

说明 笔者曾经尝试过纯几何或纯代数计算的证明，但感觉困难不小，最终找到了这个三角证明. 读者要是有兴趣的话，可以尝试找个纯几何证明.

例 12 如图 5-13，设四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$AC>BD$，延长 AB、DC 交于点 E，延长 AD、BC 交于点 F，又设 M、N 分别为 AC、BD 中点，求证：

$$\frac{MN}{EF}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{BD}-\frac{BD}{AC}\right).$$

证明 AC 与 BD 还好，可 MN 与 EF 似乎联系不起来，给解题带来实质性的困难. 我们的回答是，即使有难度，还是要想方设法联系起来！

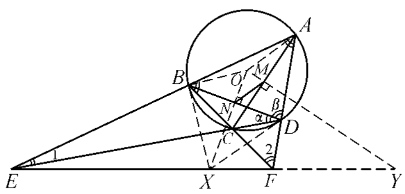


图 5-13

不妨设 $\angle BAD=\angle A$，$\angle ABC=\angle B$，则欲证右式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)\\
=&\frac{1}{2}\ \frac{\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin A\sin B}\\
=&\frac{1}{4}\ \frac{\cos 2\angle A-\cos 2\angle B}{\sin A\sin B}\\
=&-\frac{1}{2}\ \frac{\sin(\angle A+\angle B)\sin(\angle A-\angle B)}{\sin A\sin B}\\
=&\frac{1}{2}\ \frac{\sin(180^\circ-\angle A-\angle B)\sin(\angle EDF-\angle A)}{\sin A\sin B}\\
=&\frac{\sin\angle 1\sin\angle 2}{2\sin A\sin B}. \qquad ①
\end{aligned}
$$

其中 $\angle 1=\angle AED$，$\angle 2=\angle AFB$，**又设** $\alpha=\angle BDE$，$\beta=\angle ADB$.

下面来考虑左式的变形.

先过点 B **作圆的切线，设交** EF **于点** X**，则**

$$
\begin{aligned}
\frac{EX}{FX}&=\frac{S_{\triangle BEX}}{S_{\triangle BFX}}=\frac{BE\sin\angle EBX}{BF\sin\angle FBX}=\frac{BE\sin\beta}{BF\sin\alpha}\\
&=\frac{BE}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{BF}=\frac{BD}{\sin\angle 1}\cdot\frac{\sin\angle 2}{BD}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}.
\end{aligned}
$$

同理，若设过点 D **的切线** DX' **交** EF **于点** X'**，仍有**

$$\frac{EX'}{X'F}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}.$$

故而点 X **与** X' **重合，于是** ONX **垂直平分** BD.

不妨设圆心 O **在** BD、AC**"上方"，且** OM **的延长线交** EF **的延长线于点** F **右侧的点** Y**，同理可证** CY、AY **亦为圆之切线，并有**

$$\frac{EY}{FY}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}=\frac{EX}{FX},$$

原来 E、X、F、Y **是调和点列！**

设圆的半径为 r**，则由切线性质知**

$$OX\cdot ON=r^2=OY\cdot OM.$$

于是 $\triangle OMN\backsim\triangle OXY$**，并有**

$$\frac{MN}{XY}=\frac{OM}{OX}=\frac{OM\cdot ON}{r^2},$$

易知
$$OM=r\cos B,$$
$$ON=r\cos A,$$
于是
$$\frac{MN}{XY}=\cos A\cos B.$$

我们再来计算$\frac{XY}{EF}$.

由
$$\frac{EX}{FX}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}，得$$
$$\frac{FX}{EF}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 1+\sin\angle 2},\qquad ②$$
又由
$$\frac{EY}{FY}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1}，得$$
$$\frac{FY}{EF}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2-\sin\angle 1},\qquad ③$$
②+③，得
$$\begin{aligned}\frac{XY}{EF}&=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2+\sin\angle 1}+\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2-\sin\angle 1}\\&=\frac{2\sin\angle 1\sin\angle 2}{\sin^2\angle 2-\sin^2\angle 1}\\&=\frac{2\sin\angle 1\sin\angle 2}{\sin(\angle 2+\angle 1)\sin(\angle 2-\angle 1)}\\&=\frac{2\sin\angle 1\sin\angle 2}{\sin(\angle ECF-\angle A)\sin[(\angle 2+\angle DCF)-(\angle 1+\angle BCE)]}\\&=\frac{2\sin\angle 1\sin\angle 2}{\sin 2A\sin(180^\circ-\angle B-\angle B)}\\&=\frac{\sin\angle 1\sin\angle 2}{2\sin A\cos A\sin B\cos B},\end{aligned}\qquad ④$$
于是
$$\begin{aligned}\frac{MN}{EF}&=\frac{MN}{XY}\cdot\frac{XY}{EF}\\&=\frac{\sin\angle 1\sin\angle 2}{2\sin A\sin B},\end{aligned}$$
由①知结论成立.

评注　此题乃经典之作，推导过程较长却十分有序，并且其中许多中间结论也是很有意思的.这里所谓的“序”，就是引进中间量XY后以此展开的一系

列运算.“中间结论”中最有意思的是经过 B、D 的切线之交点在 EF 上,这不是别的,正是帕斯卡定理!不过其中两条边退化成点而已.

最后不得不指出的是,从严格意义上我们并没有做完,比如当 O 在四边形 $ABCD$ 外,当 O 在 BD 或 AC 之“下”,X 在 EF 之外,还有 Y 在 X 左侧等情形没有说明,尽管有充足理由说“同理可证”,这里还是限于篇幅留给读者细细讨论吧!

例 13 已知 AD 是锐角$\triangle ABC$ 的一条高,P 是 AD 上某一点,延长 BP 交 AC 于点 M,延长 CP 交 AB 于点 N,又 MN 与 AP 交于点 Q,过点 Q 作任一直线交 PN 于点 E,交 AM 于点 F,求证:

$$\angle EDA=\angle FDA.$$

证明 如图 5-14,连接 DM、DN.

由前知,$\angle NDA=\angle MDA$.

如果我们能证明

$$\frac{\sin\angle MDF}{\sin\angle ADF}=\frac{\sin\angle NDE}{\sin\angle ADE}, \qquad ①$$

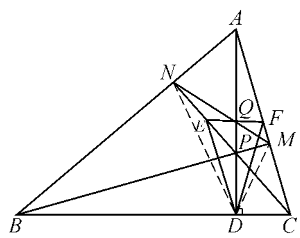


图 5-14

则此题结论成立.

这是因为若设 $\angle ADM=\angle ADN=\theta$,
$\angle ADF=\alpha$,$\angle ADE=\beta$,

上式变为
$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta},$$

即
$$\sin\theta\cot\alpha=\sin\theta\cot\beta.$$

由于 $\sin\theta\neq 0$,故 $\cot\alpha=\cot\beta$,得 $\alpha=\beta$.

下面就来证明①式.

由于
$$\frac{DM\sin\angle MDF}{AD\sin\angle ADF}=\frac{S_{\triangle MDF}}{S_{\triangle ADF}}=\frac{FM}{AF},$$

故
$$\frac{\sin\angle MDF}{\sin\angle ADF}=\frac{AD\cdot FM}{DM\cdot AF},$$

同理
$$\frac{\sin\angle NDE}{\sin\angle ADE}=\frac{PD\cdot NE}{PE\cdot ND},$$

于是问题又变成证明

$$\frac{AD \cdot FM}{AF \cdot DM} = \frac{PD \cdot NE}{PE \cdot ND}$$

或
$$\frac{FM \cdot PE}{AF \cdot NE} = \frac{DM \cdot PD}{AD \cdot ND}. \qquad ②$$

这样分离的好处是右式完全不依赖于动线段 EQF. 下证之.

$$\begin{aligned}\frac{FM \cdot PE}{AF \cdot NE} &= \frac{S_{\triangle QFM}}{S_{\triangle AQF}} \cdot \frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle QNE}} \\ &= \frac{QM \cdot \sin \angle FQM}{AQ \cdot \sin \angle AQF} \cdot \frac{PQ \sin \angle EQP}{NQ \sin \angle NQE},\end{aligned}$$

考虑对顶角相等,上式即为

$$\frac{QM \cdot PQ}{AQ \cdot NQ},$$

于是由②及 DQ 平分$\angle MDN$ 得

$$\frac{DM}{DN} = \frac{QM}{QN},$$

所以最后只须证明
$$\frac{PD}{AD} = \frac{PQ}{AQ}.$$

由梅氏定理知
$$\begin{aligned}\frac{PQ}{AQ} &= \frac{PM}{BM} \cdot \frac{BN}{AN} \\ &= \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} \cdot \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle APC}} \\ &= \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{PD}{AD}.\end{aligned}$$

评注　命题就这样证完了. 本题对面积及三角方法的应用可谓淋漓尽致,与其说是需要聪明的头脑,还不如说是要求对面积及三角法有比较深的理解.

例 14　设$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于 P、Q 两点,过点 P 任作两条直线 APB 和 CPD,其中点 A、C 在$\odot O_1$ 上,点 B、D 在$\odot O_2$ 上. M、N 分别是 AD、BC 中点,O 为 O_1O_2 中点, $\angle APC = \theta$ 为锐角,设 h 为点 O 至 MN 的距离,K 为 PQ 中点,求证: $h = OK \cdot \cos \theta$.

证明　设 $O_1O_2 = d$, 并不妨设 $r_2 \geqslant r_1$, CA、BD 延长后交于点 X.

又设 AB 中点为 S，连接 MS、NS、NO、MO、O_1A、O_1C、O_2B、O_2D、QC、QD、O_1P、O_2P. 如图 5-15 所示.

易知 $MS=\frac{1}{2}BD=r_2\sin\theta$，$NS=\frac{1}{2}AC=r_1\sin\theta$，又 $\angle MSN=180°-\angle X$.

由于 $\angle XCQ=\angle QPB=\angle QDB$，故

X、C、Q、D 四点共圆.

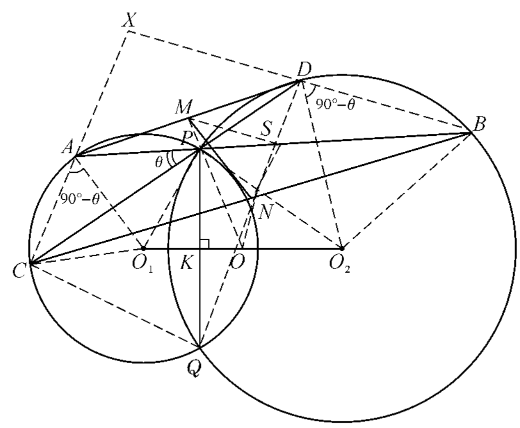


图 5-15

于是
$$\begin{aligned}\angle X&=180°-\angle CQD\\&=\angle PCQ+\angle PDQ\\&=\angle PO_1O_2+\angle PO_2O_1\\&=180°-\angle O_1PO_2,\end{aligned}$$

于是
$$\angle MSN=\angle O_1PO_2,$$

因此
$$\triangle MSN\backsim\triangle O_1PO_2,$$

故
$$\frac{MN}{O_1O_2}=\frac{MS}{PO_2}=\sin\theta,$$

即
$$MN=d\sin\theta.$$

接下来我们的想法是，如果能用 d、r_1、r_2、θ 这些“基本元素”表示 OM、ON，那么 O 到 MN 的距离也就不难求出了.

首先建立这样一个结论：S、T 分别是凸四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 的中点，$AB=x$，$CD=y$，且 BA、CD 经延长后交角为 φ，

于是有
$$ST^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{xy}{2}\cos\varphi.$$

证明显然，如图 5-16 所示.

下面就用这一结论分别计算 OM^2 与 ON^2.

由于 AO_1 与 DO_2 的交角为 $360°-2(90°+\theta)-\angle X=180°-2\theta-\angle X$.

因此

$$OM^2=\frac{r_1^2}{4}+\frac{r_2^2}{4}-\frac{r_1r_2}{2}\cos(2\theta+\angle X).$$

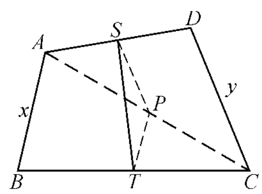


图 5-16

又由于 CO_1 与 BO_2 的交角为 $360°-2(90°-\theta)-\angle X=180°+2\theta-\angle X$，

故 $$ON^2=\frac{r_1^2}{4}+\frac{r_2^2}{4}-\frac{r_1r_2}{2}\cos(2\theta-\angle X).$$

今作 $OJ\perp MN$（图中未画出），J 在 MN 或其延长线上，设 $MJ=x$，$NJ=y$，注意此处 x、y 可负.

于是有 $$\begin{cases}x+y=d\sin\theta,\\ x^2-y^2=OM^2-ON^2.\end{cases}$$

由于 $$OM^2-ON^2=\frac{r_1r_2}{2}[\cos(\angle X-2\theta)-\cos(\angle X+2\theta)]$$
$$=r_1r_2\sin X\sin 2\theta,$$

因此 $$\begin{cases}x+y=d\sin\theta,\\ x-y=\dfrac{2r_1r_2}{d}\sin X\cos\theta,\end{cases}$$

由此解得 $$x=\frac{d}{2}\sin\theta+\frac{r_1r_2}{d}\sin X\cos\theta$$
$$=\frac{d}{2}\sin\theta+\frac{2S_{\triangle PO_1O_2}}{d}\cos\theta$$
$$=\frac{d}{2}\sin\theta+\frac{PQ}{2}\cos\theta,$$

于是 $$x^2=\frac{d^2}{4}\sin^2\theta+\frac{PQ^2}{4}\cos^2\theta+\frac{d\cdot PQ}{2}\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{d^2}{4}\sin^2\theta+\frac{PQ^2}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}r_1r_2\sin X\sin 2\theta.$$

又 $$OM^2=\frac{r_1^2}{4}+\frac{r_2^2}{4}-\frac{r_1r_2}{2}\cos 2\theta\cos X+\frac{r_1r_2}{2}\sin 2\theta\sin X,$$

于是 $$h^2=OM^2-x^2$$
$$=\frac{r_1^2}{4}+\frac{r_2^2}{4}-\frac{r_1r_2}{2}\cos 2\theta\cos X-\frac{d^2}{4}\sin^2\theta-\frac{PQ^2}{4}\cos^2\theta.$$

又由于 $$\angle X=180°-\angle O_1PO_2,$$

故有 $$\cos X=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2},$$

这样一来，

$$\begin{aligned}h^2&=\frac{r_1^2+r_2^2}{4}+\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{4}\cos 2\theta-\frac{d^2}{4}\sin^2\theta-\frac{PQ^2}{4}\cos^2\theta\\&=\frac{r_1^2+r_2^2}{2}\cos^2\theta-\frac{d^2}{2}\cos^2\theta+\frac{d^2}{4}-\frac{d^2}{4}\sin^2\theta-\frac{PQ^2}{4}\cos^2\theta\\&=\left(\frac{r_1^2+r_2^2}{2}-\frac{d^2+PQ^2}{4}\right)\cos^2\theta,\\&=\left(\frac{r_1^2-\frac{PQ^2}{4}}{2}+\frac{r_2^2-\frac{PQ^2}{4}}{2}-\frac{d^2}{4}\right)\cos^2\theta\\&=\left[\frac{O_1K^2+O_2K^2}{2}-\frac{(O_1K+O_2K)^2}{4}\right]\cos^2\theta\\&=\frac{O_1K^2+O_2K^2-2O_1K\cdot O_2K}{4}\cos^2\theta\\&=\left(\frac{O_2K-O_1K}{2}\right)^2\cos^2\theta\\&=\left[\frac{OK+\frac{d}{2}-\left(\frac{d}{2}-OK\right)}{2}\right]^2\cos^2\theta\\&=OK^2\cos^2\theta.\end{aligned}$$

于是 $$h=OK\cdot\cos\theta.$$

说明　当 $\theta=90^\circ$ 时，O、M、N 三点共线，又当 $\theta>90^\circ$ 时，结论如何？请读者自己思考.

另一个有意思的结论：当两圆为等圆时，点 O 与点 K 重合，仍有 O、M、N 三点共线.

本题综合程度很高，必须做到目标明确，计算仔细，对几何、对三角都要有一定的修养.

本题是叶中豪先生发现的命题，中豪已找到了极其漂亮的纯几何证明.

例 15　如图 5-17，已知 $\triangle ABC$ 三对应边为 a、b、c，另有一三角形 $\triangle A'B'C'$，使得 A、B、C 分别落在 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$ 上，并满足 $AA'∶BB'∶CC'=b^2c∶c^2a∶a^2b$，求证：$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

证明　此题可以用反证法加上同一法进行论证. 设 $\triangle ABC$ 对应内角为

$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 现作$\triangle ABC$的外接三角形$\triangle A''B''C''$，使A''、B''分别在射线AA'与AB'上，且$\angle A''$、$\angle B''$、$\angle C''$分别等于$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

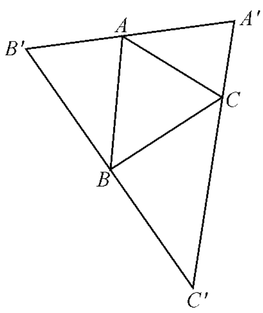


图 5-17

此时有 $AA'' : BB'' : CC'' = b^2c : c^2a : a^2b$.

下面的任务已经很清楚，证明$\triangle A''B''C''$与$\triangle A'B'C'$重合，即点A''、B''、C''分别与点A'、B'、C'重合，用反证法，并分几种情况讨论.

设 $\angle A'' \geqslant \angle B'' \geqslant \angle C''$（即 $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C$），　①

于是$\angle B''$、$\angle C''$为锐角.

现当然有

$$\frac{AA'}{AA''} = \frac{BB'}{BB''} = \frac{CC'}{CC''}. \quad ②$$

若设 $\angle B''AB = \theta$，

则
$$\begin{aligned}\angle CBC'' &= \angle ABC'' - \angle B\\ &= \theta + \angle B'' - \angle B\\ &= \theta.\end{aligned}$$

同理 $\angle ACA'' = \theta$.

第 1 种情况：点A'在线段AA''内，于是由②，$AA' < AA''$，$BB' < BB''$，$CC' < CC''$.　③

此时点B'不可能在AB''延长线上，因为$\angle B''$是锐角，这样会导致$BB' > BB''$，与③矛盾，故B'也在线段AB''内.

如图 5-18，延长$B''B$、$A''C$所得到的点C''必位于$\triangle BCC'$内，设BC''经延长后交CC'于点G.

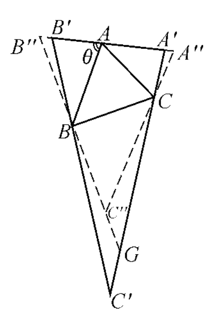


图 5-18

由于$\angle CC''B < 90^\circ$，故$\angle CC''G > 90^\circ$，故有

$CC' > CG > CC''$，与③矛盾.

第 2 种情况：点A'在AA''延长线上，点B'在AB''延长线上. 如图 5-19.

现在射线AA'及射线AB'上分别找到点A''、B''，使$\angle AA''C = \angle A$，$\angle AB''B = \angle B$，则$B''B$与$A''C$经延长后交于点C''，$\angle BC''C = \angle C$，此时$\triangle A''B''C'' \backsim \triangle ABC$. 设$\triangle A''B''C''$对应内角为$\angle A''$、$\angle B''$、$\angle C''$.

于是由②知，$AA' > AA''$，$BB' > BB''$，$CC' > CC''$.

如图 5-19，易见点 C' 在 $\triangle CBC''$ 内，延长 CC' 交 BC'' 于点 G，由于 $\angle CGC'' > \angle B'' \geqslant \angle C''$，故 $CC'' > CG > CC'$，矛盾.

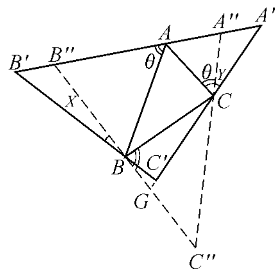


图 5-19

第 3 种情况：点 A' 在 AA'' 延长线上，点 B' 仍在线段 AB'' 上.

注意此时仍有

$$AA' > AA'',\ BB' > BB'',\ CC' > CC''. \qquad ④$$

易知，此时有 $\angle B''B'B < \angle B''$，即点 B' 比较"靠近"点 A.

如图 5-20，设 $\angle BAB'' = \angle CBC'' = \angle ACA'' = \theta$. 又设 $\angle B''BB' = \angle C'BC'' = X$，$\angle C'CC'' = \angle A'CA'' = Y$.

我们有（正弦定理）

$$\begin{aligned}1 < \frac{BB'}{BB''} &= \frac{\sin B''}{\sin(\angle B''+X)} = \frac{AA'}{AA''}\\ &= \frac{AA'}{AC}\cdot\frac{AC}{AA''}\\ &= \frac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A''-Y)}\cdot\frac{\sin A''}{\sin\theta}\\ &= \frac{CC'}{CC''} = \frac{CC'}{BC}\cdot\frac{BC}{CC''}\\ &= \frac{\sin(\theta+X)}{\sin(Y+\angle C''-X)}\cdot\frac{\sin C''}{\sin\theta},\end{aligned}$$

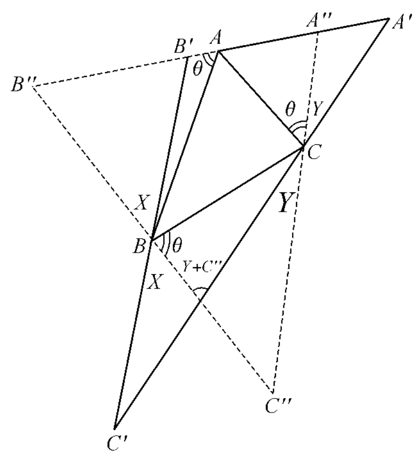


图 5-20

因此，上式化简后有

$$\begin{aligned}\frac{\sin B''}{\sin(\angle B''+X)} &= \frac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A''-Y)}\cdot\frac{\sin A''}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin(\theta+X)}{\sin(Y+\angle C''-X)}\cdot\frac{\sin C''}{\sin\theta}.\end{aligned} \qquad ⑤$$

下面证明一结论：

$$\frac{\sin(\theta+X)}{\sin\theta} \geqslant \frac{\sin B''}{\sin(\angle B''+X)}. \qquad ⑥$$

证明方法就是化为证明

$$\sin(\theta+X)\sin(\angle B''+X)\geqslant\sin\theta\sin B''$$

或 $\cos(\angle B''-\theta)-\cos(\theta+\angle B''+2X)\geqslant\cos(\angle B''-\theta)-\cos(\theta+\angle B'')$

或证明 $$\cos(\angle B''+\theta)-\cos(\theta+\angle B''+2X)\geqslant 0$$

或 $$\sin(\angle B''+\theta+X)\sin X\geqslant 0.$$

由于 $$\angle B''+\theta+X=180^\circ-\angle ABB'<180^\circ,$$

故上式成立,结论证毕.

由⑥及⑤,立得

$$\sin C''\leqslant\sin(Y+\angle C''-X)=\sin C',$$

由于$\angle C''$是锐角,故 $$\angle C''\leqslant\angle C',$$

此即 $$X\leqslant Y.$$

下面再证明一个结论:

当 $Y<\angle A''$ 时,$\dfrac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A''-Y)}$是 Y 的增函数.

这是因为图 5-20 中所示,有

$$\frac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A''-Y)}=\frac{AA'}{AC},$$

AC 固定而 AA'随 Y 的增加而增大.

于是有

$$\frac{\sin(\theta+X)}{\sin(\angle A''-X)}\leqslant\frac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A''-Y)},$$

再考虑⑤,有

$$\frac{\sin(\theta+X)}{\sin(\angle A''-X)}\cdot\frac{\sin A''}{\sin\theta}\leqslant\frac{\sin B''}{\sin(\angle B''+X)}$$

或 $$\sin(\theta+X)\sin(\angle B''+X)\leqslant\frac{\sin B''\sin\theta\sin(\angle A''-X)}{\sin A''}$$

或 $$\cos(\angle B''-\theta)-\cos(\angle B''+\theta+2X)\leqslant\frac{2\sin(\angle A''-X)}{\sin\angle A''}\sin B''\sin\theta.$$

由⑥的推导过程知

$$\cos(\angle B''+\theta+2X)\leqslant\cos(\angle B''+\theta),$$

代入前式,得

$$\cos(\angle B''-\theta)-\cos(\angle B''+\theta)\leqslant\frac{2\sin(\angle A''-X)}{\sin A''}\sin B''\sin\theta,$$

左式和差化积,得 $\qquad \sin A''\leqslant\sin(\angle A''-X)$,

这样一来$\angle A''$只能是钝角,于是由

$$\sin(180^\circ-\angle A'')\leqslant\sin(\angle A''-X)\text{ 可知}$$

$$180^\circ-\angle A''\leqslant\angle A''-X,$$

即 $$\angle A''\geqslant 90^\circ+\frac{X}{2},$$

又因为 $\qquad \angle B''\geqslant\angle BB'B''$,故

$$\frac{X}{2}\geqslant 90^\circ-\angle B''.$$

于是 $$\angle A''+\angle B''\geqslant 90^\circ+\frac{X}{2}+90^\circ-\frac{X}{2}=180^\circ,$$

此与 $\angle A''+\angle B''=180^\circ-\angle C''<180^\circ$ 矛盾,故第 3 种情况得证.

事情至此还未完结,还有 $\angle A''\geqslant\angle C''\geqslant\angle B''$(也即 $\angle A\geqslant\angle C\geqslant\angle B$)这个情况.

注意此时 $\angle C''(\angle C)<90^\circ$,第 1 种情况和第 3 种情况都畅行无阻,因为两种情形都只用到$\angle C''$与$\angle B''$是锐角这一事实.

下面看第 2 种情况.

于是(仍用图 5-19),设 $\angle B'BB''=X$,$\angle A''CA'=Y$. $\angle B'AB=\theta=\angle CBC''=\angle A''CA$.

$$\frac{AA'}{AA''}=\frac{BB'}{BB''}=\frac{CC'}{CC''}>1,$$

即 $$\frac{\sin(\theta+Y)}{\sin(\angle A-Y)}\cdot\frac{\sin A}{\sin\theta}=\frac{\sin B}{\sin(\angle B-X)}=\frac{\sin(\theta-X)}{\sin(\angle C+X+Y)}\cdot\frac{\sin C}{\sin\theta}. \quad ⑦$$

首先,有 $Y>180^\circ-2\angle C$.

这是因为 $CG>CC'>CC''$,

故 $\angle CGC''<\angle C''$,于是

$$Y = 180^\circ - \angle CGC'' - \angle C'' > 180^\circ - 2\angle C'' = 180^\circ - 2\angle C.$$

又因为 $$Y + \theta + \angle C = \angle BCA' < 180^\circ,$$

故 $180^\circ - 2\angle C + \theta + \angle C < 180^\circ$,即 $\theta < \angle C$(θ 为锐角), ⑧

而 $\angle C + X + Y > \angle C + X + 180^\circ - 2\angle C = 180^\circ - \angle C + X > 90^\circ$,

于是,由于 $$\angle A + \angle C + X = 180^\circ - \angle B + X < 180^\circ,$$

即 $$\angle A - Y < 180^\circ - \angle C - X - Y < 90^\circ,$$

这样就有 $$\sin(\angle A - Y) < \sin(\angle C + X + Y),$$

又由⑦知 $\sin A \geqslant \sin C$,故
$$\sin(\theta + Y) < \sin(\theta - X),$$

此即 $$\sin\frac{X+Y}{2}\cos\left(\frac{Y-X}{2} + \theta\right) < 0,$$

由于 $X + Y < \angle BC'C < 180^\circ$,故
$$\frac{Y-X}{2} + \theta > 90^\circ,$$

即 $$(\theta - X) > 180^\circ - (Y + \theta)$$

或 $$\angle CBC' > \angle ACG > \angle ACB,$$

故延长 $C'B'$,CA 后相交,此即
$$\angle B' + \angle B'AC > 180^\circ,$$

而 $$\angle B' < \angle B,\ \angle B'AC = \angle A + \theta,$$

故 $$\angle B + \theta + \angle A > 180^\circ,$$
$\theta > 180^\circ - \angle A - \angle B = \angle C$,与 ⑧ 矛盾.

于是命题全部证完.

说明 这也是叶中豪先生提出的命题.笔者完成这一证明后有如下感触:首先是严密性,一定要所有情形都讨论到,不懂严密性就不懂数学;其次是证明的曲折性,方法是现成的,但如何使用很讲究.许多尝试是行不通的,有的尝试即使有可能走通,也是复杂得无法想象.由此可见,要沿着正确途径绕出来真是很不简单(不过尚有化简余地,这留给读者.).

习　题　5

1 证明 Morley 定理：设$\triangle ABC$内有三点 D、E、F，$\angle DBC=\angle FBA=\frac{1}{3}\angle ABC$，$\angle FAB=\angle EAC=\frac{1}{3}\angle BAC$，$\angle ECA=\angle DCB=\frac{1}{3}\angle ACB$，则$\triangle DEF$是正三角形.

2 有一凸六边形 $ABCDEF$，向内作 3 个不相交的正三角形$\triangle ABP$、$\triangle CDQ$、$\triangle EFR$，求证：若$\triangle PQR$也是正三角形，则$\triangle XYZ$是正三角形，此处 X、Y、Z 分别为 AF、BC、DE 之中点.

3 设锐角$\triangle ABC$的垂心为 H，今在 AH、BH、CH 上分别取点 P、Q、T，使 $AP=BQ=CT=x$，求证：$S_{\triangle PQT}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)(x^2-2Rx+2Rr)$. 此处 R、r 分别是$\triangle ABC$的外接圆、内切圆半径，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 分别为$\triangle ABC$的对应内角.

4 已知锐角$\triangle ABC$，外心、内心分别为 O、I，延长 BO 交外接圆于 K，延长 AB 至点 N，延长 CB 至点 M，使 $AN=CM=\triangle ABC$ 半周长，求证：$MN\perp IK$.

5 $\triangle ABC$中，$BC>AC>AB$，外接于圆 O，三条角平分线分别交 BC、CA 与 AB 于点 D、E、F，过 B 作弦 BQ，使 $BQ\parallel EF$，又在$\odot O$上找一点 P，使 $QP\parallel AC$，求证：$PC=PA+PB$.

6 在$\triangle ABC$中作 AB、AC 的中垂线，分别交直线 BC 于点 X、Y，$XY=BC$，求 $\tan B\cdot\tan C$ 的所有可能值.

7 锐角$\triangle ABC$的内切圆 I 切 BC 于点 K，AD 为$\triangle ABC$的高，M 为 AD 中点，直线 KM 交$\odot I$于另一点 N，求证：$\triangle BCN$的外接圆与$\odot I$切于点 N.

8 给定一$\triangle ABC$，A'是点 A 关于直线 BC 的对称点，B'是点 B 关于直线 CA 的对称点，C'是点 C 关于直线 AB 的对称点，若$\triangle A'B'C'$是正三角形，求$\triangle ABC$的充要条件.

9 设有一定直线 l 与一定圆$\odot O$不相交，$OE\perp l$，E 为垂足，动点 M 在 l 上，MA、MB 是两条切线，点 E 在 MA、MB 直线上的垂足分别是 P、Q，直线 PQ 与 OE 交于点 R，求证：R 不依赖于点 M 的变化而变化.

10 对$\triangle ABC$,设点 X 在 AB 上,$\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{4}{5}$,点$Y$ 在 CX 上,使$CY=2XY$,点 Z 在 CA 延长线上,使 $\angle CXZ = 180^\circ - \angle ABC$. 用$\sum$表示所有满足 $\angle XYZ = 45^\circ$ 的$\triangle ABC$ 的集合,证明:$\sum$中所有的三角形都相似.

11 设正 $2n+1$ 边形外接圆半径为 r,求所有以正 $2n+1$ 边形的顶点为顶点且内部包含圆心的三角形面积之和.

12 $\triangle ABC$ 外心是 O,AH、BK、CL 是 3 条高,A_O、B_O、C_O 分别是 AH、BK、CL 的中点,内切圆 I 分别切 BC、CA、AB 于点 D、E、F,证明:线段 A_OD、B_OE、C_OF、OI 共点.

6 几何不等式与几何极值一瞥

几何不等式与几何极值的内容极端丰富，各写一本书也决无问题. 这里所谓的几何不等式，一般是指有一定几何意义且与三角有关的几何不等式，不是关于 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 的非常复杂的纯三角不等式，也不是诸如关于三角形边长与中线之比的四次方之类的几何意义不甚明显的几何不等式.

除了一些最基本的几何不等式之外，还有几个不等式值得一提：

(1) 在$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$\angle B<\angle B'$，则 $AC<A'C'$；此题运用余弦的递减性可快速证得.

(2) 设$\triangle ABC$，p、q、r 是 3 个正数，则

$$p\cos A+q\cos B+r\cos C\leqslant\frac{1}{2}\,pqr\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}\right).$$

此式其实是 $x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos A+2yz\cos B+2zx\cos C$ 的另一种形式与特殊情况，至于 x、y、z 的不等式可用二次函数 $f(x)$ 的判别式$\leqslant 0$ 得到.

(3) $\frac{3}{4}\leqslant\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$.

这里$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是$\triangle ABC$ 的三内角，等号当且仅当$\triangle ABC$ 是正三角形时成立，这个不等式也很强.

前面说过，此书不涉及非常复杂的纯三角不等式，但一些基本的三角不等式对解题有用.

三角不等式有几点需要注意：

首先，有界性与单调性，比如 $|\sin x|\leqslant 1$ 之类；其次，运用和角公式等进行转化，比如"$\angle A+\angle B=$ 常数"时，$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle A-\angle B}{2}$，于是只要研究单一变化的 $\cos\dfrac{\angle A-\angle B}{2}$；$\cos A\cos B$ 也类似处理. 所以在证明不等式之前，往往先要列出有用的等式；最后，三角形中很多

对称不等式通常是 $\angle A=\angle B=\angle C=60^{\circ}$，需要加以注意.

最后再列举一个非常有用的结果：

（4）$|a\cos x+b\sin x|\leqslant\sqrt{a^{2}+b^{2}}$.

例 1 已知$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别有点 D、E、F，把$\triangle ABC$ 的周长三等分，求证：

（1）$DE+EF+FD\geqslant\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$；

（2）$DE^{2}+EF^{2}+FD^{2}\geqslant\frac{1}{12}(AB+BC+CA)^{2}$.

证明 （1）如图 6-1，不妨设$\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

作 FF'、EE'分别与 BC 垂直，F'、E'是垂足，则易知

$$EF\geqslant E'F'=AF\cos B+AE\cos C;$$

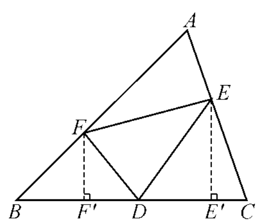


图 6-1

同理
$$FD\geqslant BD\cos C+BF\cos A;$$
$$DE\geqslant CD\cos B+CE\cos A.$$

加之，得

$$\begin{aligned}DE+EF+FD&\geqslant(BF+CE)\cos A+(AF+CD)\cos B+\\&\quad(AE+BD)\cos C\\&=\left(b+c-\frac{2}{3}p\right)\cos A+\left(a+c-\frac{2}{3}p\right)\cos B+\\&\quad\left(a+b-\frac{2}{3}p\right)\cos C\\&=(b\cos A+a\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+\\&\quad(c\cos B+b\cos C)-\frac{2}{3}p(\cos A+\cos B+\cos C)\\&=2p-\frac{2}{3}p(\cos A+\cos B+\cos C)\\&\geqslant p.\end{aligned}$$

在以上推导过程中，$\triangle ABC$ 是否为钝角三角形不是必要条件.

（2）在知道（1）后，（2）可由其推出，否则，由余弦定理，

$$DE^{2}=CE^{2}+CD^{2}-2CE\cdot CD\cos C$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(CE+CD)^2-\frac{1}{2}(CE+CD)^2\cos C$$

$$=\frac{2}{9}p^2(1-\cos C),$$

同理 $$EF^2\geqslant \frac{2}{9}p^2(1-\cos A),$$

$$FD^2\geqslant \frac{2}{9}p^2(1-\cos B),$$

加之,得 $$DE^2+EF^2+FD^2$$

$$\geqslant \frac{2}{9}p^2(3-\cos A-\cos B-\cos C)$$

$$\geqslant \frac{1}{3}p^2,$$

于是,(2)就得证.

最后我们证明 $$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant \frac{3}{2}.$$

这是因为 $$\cos A+\cos B+\cos C$$

$$=2\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}+1-2\sin^2\frac{\angle C}{2}$$

$$\leqslant 2\sin\frac{\angle C}{2}+1-2\sin^2\frac{\angle C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\left(\sin\frac{\angle C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{3}{2}.$$

评注 这种题目不用三角函数做真是难以想象.

例2 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,点 P 至 BC、CA、AB 的垂线分别为 PD、PE、PF(D、E、F 是垂足),求证:$PA\cdot PB\cdot PC\geqslant(PD+PE)\cdot(PE+PF)\cdot(PF+PD)$,并讨论等号成立之条件.

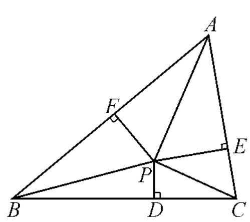


图 6-2

证明 如图 6-2,不妨设 $\triangle ABC$ 对应角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 无论 $\angle C$ 是否钝角,有

$$PE+PD=PC(\sin\angle PCB+\sin\angle PCA)$$

$$=2PC\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle PCB-\angle PCA}{2}$$

$$\leqslant 2PC\sin\frac{\angle C}{2}, \qquad ①$$

同理，有

$$PE+PF\leqslant 2AP\sin\frac{\angle A}{2}, \qquad ②$$

$$PF+PD\leqslant 2BP\sin\frac{\angle B}{2}, \qquad ③$$

于是

$$(PD+PE)(PE+PF)(PF+PD)$$
$$\leqslant 8AP\cdot PB\cdot PC\cdot\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}.$$

余下来的任务就是要证明

$$\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

并确定等号成立之条件.

这是因为

$$\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}-\cos\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\frac{\angle C}{2}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\angle C}{2}\right)\sin\frac{\angle C}{2}$$
$$\leqslant\frac{1}{8}.$$

等号成立的条件是 $\sin\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{2}$ 及 $\angle A=\angle B$，也即$\triangle ABC$ 是正三角形.

又只有当①、②和③式也成为等式时，原命题才变为等式. ①式成为等式的条件为

$$\angle PCB=\angle PCA,$$

即 CP 平分$\angle ACB$，同理 BP 平分$\angle ABC$，P 为正三角形$\triangle ABC$ 的中心.

这个不等式颇像有名的 Erdös-Mordell 不等式（留作习题），我们还可用之做下列习题（仍用图 6-2），求证：

$$\frac{BP \cdot PC}{PD}+\frac{PC \cdot PA}{PE}+\frac{PA \cdot PB}{PF} \geqslant 2(PA+PB+PC),$$

以及 $(PA \cdot PB \cdot PC)^2 \geqslant PD \cdot PE \cdot PF(PA+PB)(PB+PC)(PC+PA)$.

例 3 已知圆内接四边形 $ABCD$,求证:

$$|AB-CD|+|AD-BC| \geqslant 2|AC-BD|.$$

证明 此题分两种情况讨论.

第一种情况,圆心 O 在四边形 $ABCD$ 内,如图 6-3 所示.

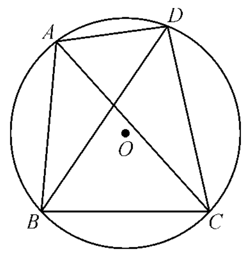


图 6-3

设$\angle AOB$、$\angle BOC$、$\angle COD$、$\angle DOA$ 分别为 2α、2β、2γ、2θ,则

$\alpha+\beta+\gamma+\theta=180^{\circ}$,且$\odot O$ 的半径为 1.

不妨设 $\alpha \geqslant \gamma$, $\beta \geqslant \theta$, 则

$AB=2\sin\alpha$, $BC=2\sin\beta$, $CD=2\sin\gamma$, $DA=2\sin\theta$, 所以有

$$\begin{aligned} |AB-CD| &= 2|\sin\alpha-\sin\gamma| \\ &= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right| \\ &= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}\right|, \end{aligned}$$

同理
$$|AD-BC|=4\left|\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|,$$
$$|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|.$$

由于 $\beta \geqslant \theta$, 故

$$\begin{aligned} &|AB-CD|-|AC-BD| \\ =& 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\left|\sin\frac{\beta+\theta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\beta-\theta}{2}\right|\right) \\ =& 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\sin\frac{\beta+\theta}{2}-\sin\frac{\beta-\theta}{2}\right) \\ =& 8\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

由于 $0<\frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\beta}{2} \leqslant 90^{\circ}$, 故

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\geqslant 0,$$

此即意味着 $\quad |AB-CD|\geqslant|AC-BD|,$

同理 $\quad |AD-BC|\geqslant|AC-BD|,$

两式一加即完成证明.

等号成立,仅当 $\alpha=\gamma$, $\beta=\theta$ 时,此时四边形 $ABCD$ 是矩形.

第二种情况. 四边形 $ABCD$ 在点 O 的一侧,不妨设四边中 BC 最"靠近"点 O,如图 6-4 所示.

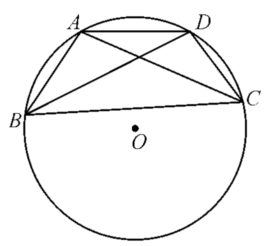


图 6-4

仍用前面的符号,此时有 $\quad \alpha+\gamma+\theta=\beta\leqslant 90^\circ.$

于是

$$|AB-CD|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|,$$

$$=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cos\frac{\beta-\theta}{2},$$

$$|AD-BC|=4\left|\sin\frac{\beta-\theta}{2}\right|\cos\frac{\beta+\theta}{2},$$

$$|AC-BD|=4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

由于 $\beta=\theta+\alpha+\gamma$, 故

$$0<\beta-\theta<2\theta+\alpha+\gamma<180^\circ,$$

即 $$\cos\frac{\beta-\theta}{2}>\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

此即 $\quad |AB-CD|\geqslant|AC-BD|$, 又

$$\frac{\beta+\theta}{2}=\theta+\frac{\alpha+\gamma}{2},\ \cos\frac{\beta+\theta}{2}=\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right),$$

而 $$\left|\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|<\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\beta-\theta}{2}<90^\circ,$$

即 $$\left|\sin\frac{\beta-\theta}{2}\right|>\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|,$$

于是 $\quad |AD-BC|>|AC-BD|$, 余下类推.

例 4 如图 6-5,已知凸四边形 $ABCD$, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$,

$DA=d$，求其面积的最值(或确界).

解　设四边形面积为 S，则有

$$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C,$$

又

$$\begin{aligned}&a^2+d^2-2ad\cos A=BD^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos C,\end{aligned}$$

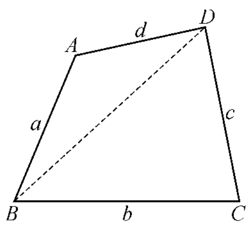


图 6-5

此二式化为

$$\begin{cases}ad\sin A+bc\sin C=2S,\\ad\cos A-bc\cos C=\dfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-c^2),\end{cases}$$

将两式平方后相加(惯用手法!)，得

$$a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C)=$$
$$4S^2+\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

所以

$$4S^2=a^2d^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-2abcd\cos(A+C).$$

显然，当 $\angle A+\angle C=180^\circ$ 时，四边形 $ABCD$ 面积最大，此时有

$$S_{\max}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

此处 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$.

求最小值，就比较麻烦. 我们知道，最小值希望 $\angle A+\angle C$ 越大或越小，这样四边形 $ABCD$ 的内角中会出现平角，也就是说，最小值是取不到的，只能求下确界.

不妨设 $b+c\geqslant a+d$，$a+b\geqslant c+d$，则 S 的下确界为当 $\angle A\to180^\circ$ 和当 $\angle D\to180^\circ$ 时的较小者.

对于前者来说，

$$\begin{aligned}\cos(\angle A+\angle C)&\to\cos(180^\circ+\angle C)\\&=-\cos C\\&=\frac{(a+d)^2-b^2-c^2}{2bc}.\end{aligned}$$

对于后者来说，

$$
\begin{aligned}
\cos(B+D) &\to \cos(180^\circ+B)\\
&=-\cos B\\
&=\frac{(c+d)^2-a^2-b^2}{2ab}.
\end{aligned}
$$

两个下确界分别为

$$S_1=a^2d^2+b^2c^2-\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+ad[b^2+c^2-(a+d)^2];$$

$$S_2=a^2b^2+c^2d^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+cd[a^2+b^2-(c+d)^2];$$

$$
\begin{aligned}
S_1-S_2&=(a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2-c^2d^2)+\frac{1}{4}[(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\
&\quad-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2]+ad[b^2+c^2-(a+d)^2]\\
&\quad-cd[a^2+b^2-(c+d)^2]\\
&=(c^2-a^2)(b^2-d^2)+(a^2-c^2)(b^2-d^2)+ad[b^2+c^2\\
&\quad-(a+d)^2]-cd[a^2+b^2-(c+d)^2].
\end{aligned}
$$

于是问题变为在 $b+c\geqslant a+d$，$a+b\geqslant c+d$ 的前提下，比较 $a[b^2+c^2-(a+d)^2]$ 与 $c[a^2+b^2-(c+d)^2]$ 的大小.

先把前提改为

$d-b\leqslant c-a\leqslant b-d$，这个条件可以加强为

$$0\leqslant c-a\leqslant b-d, \tag{①}$$

此时有

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1-S_2}{d}&=a[b^2+c^2-(a+d)^2]-c[a^2+b^2-(c+d)^2]\\
&=ab^2+ac^2-a^3-2a^2d-ad^2-a^2c-b^2c+c^3+cd^2+2c^2d\\
&=(c-a)(a^2+c^2+d^2+2ad+2cd+2ac-b^2)\\
&=(c-a)[(a+c+d)^2-b^2]\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

因此，在①这个前提下，S 的下确界为

$$\inf S=\frac{\sqrt{S_2}}{2}.$$

评注 此题又让我们想起"打好基础"这样的老话,因式分解就是整个初等数学乃至整个数学的一个重要的基本功.

至于给定四边形的四边,则一定能调到四点共圆,这留给读者自己考虑.

例 5 已知圆外切四边形 $ABCD$,切点依次为 P、Q、R、S,如图 6-6 所示. 设四边形 $ABCD$ 的面积和周长分别为 S_1、P_1,四边形 $PQRS$ 的面积和周长分别为 S_2、P_2,求证:

$$\frac{S_1}{S_2} \leqslant \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2.$$

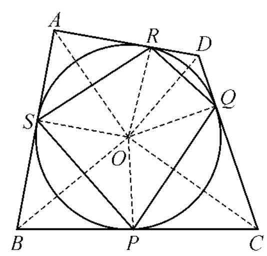


图 6-6

证明 设 $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, $\angle D = 2\theta$. 内切圆的半径为 r.

$$S_1 = \frac{1}{2} r P_1.$$

又 $\angle SOR = 180^\circ - 2\alpha$, 故

$$\begin{aligned} S_{\triangle SOR} &= \frac{1}{2} r^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) \\ &= r^2 \sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

由此可知 $S_2 = r^2(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma + \sin\theta\cos\theta)$.

又 $$SR = 2r\cos\alpha, \text{故}$$

$$P_2 = 2r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta).$$

欲证不等式即为 $$S_1 \cdot P_2^2 \leqslant S_2 \cdot P_1^2$$

或 $$rP_2^2 \leqslant 2S_2 \cdot P_1.$$

而 $$P_1 = 2r(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + \cot\theta).$$

理由是 $AB = r(\cot\alpha + \cot\beta)$,

此即
$$\begin{aligned} & 4r^3(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta)^2 \\ \leqslant\ & 4r^3(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma + \\ & \sin\theta\cos\theta)(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + \cot\theta), \end{aligned}$$

这个结论由柯西不等式保证成立.

等号成立的条件是四边形 $ABCD$ 为正方形.

例 6 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高,且 $BC + AD = AB + AC$,求 $\angle BAC$ 的取值范围.

解 不妨设$\triangle ABC$的对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,外接圆半径为R,则如图6-7,

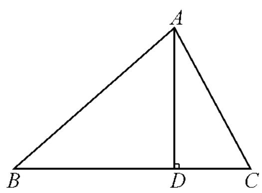


图6-7

有
$$AD = AB\sin B = 2R\sin B\sin C.$$

于是条件就变为
$$2R\sin B\sin C + 2R\sin A = 2R\sin B + 2R\sin C$$

或
$$\sin A + \sin B\sin C = \sin B + \sin C,$$
$$\begin{aligned}\sin B\sin C &= \sin B + \sin C - \sin A\\ &= 2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}\cos\frac{\angle B-\angle C}{2}\\ &\quad -2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}\cos\frac{\angle B+\angle C}{2}\\ &= 2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}\cdot 2\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2},\end{aligned}$$

再对左式用倍角公式,得
$$\cos\frac{\angle A}{2} = \cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}$$

或
$$\begin{aligned}2\cos\frac{\angle A}{2} &= 2\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\\ &= \cos\frac{\angle B-\angle C}{2} + \cos\frac{\angle B+\angle C}{2},\end{aligned}$$

此即
$$2\cos\frac{\angle A}{2} - \sin\frac{\angle A}{2} = \cos\frac{\angle B-\angle C}{2}.$$

我们想,一旦$\angle A$被固定后,$\left|\frac{\angle B-\angle C}{2}\right|$的最小值为0,而最大值趋向于$\frac{\pi}{2}-\frac{\angle A}{2}$,并且是连续变化的,于是
$$\sin\frac{\angle A}{2} < \cos\frac{\angle B-\angle C}{2} \leqslant 1.$$

由余弦函数的连续性知,欲求$\angle A$范围,只要解出如下不等式即可.
$$\sin\frac{\angle A}{2} < 2\cos\frac{\angle A}{2} - \sin\frac{\angle A}{2} \leqslant 1.$$

对于左边,即
$$\tan\frac{\angle A}{2} < 1,$$

故 $$\angle A < \frac{\pi}{2},$$

右式经移项后平方，得

$$4\cos^2\frac{\angle A}{2} \leqslant 1 + 2\sin\frac{\angle A}{2} + \sin^2\frac{\angle A}{2},$$

此即 $$\left(5\sin\frac{\angle A}{2} - 3\right)\left(\sin\frac{\angle A}{2} + 1\right) \geqslant 0,$$

于是 $$\sin\frac{\angle A}{2} \geqslant \frac{3}{5},$$

$$\angle A \geqslant 2\arcsin\frac{3}{5}.$$

综上所述，$\angle A$ 的取值范围是 $\left[2\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

评注　此题也有其他解法，但正确地“运用”三角法是最快捷的.

例 7　已知凸四边形 $ABCD$，$AD = a$，$AB = b$，$BC = c$，AC、BD 的交点是 P，$\angle APD = \theta(< 90^\circ)$，$a$、$b$、$c$，$\theta$ 都是固定的，问第四边 $CD = x$ 为何值时，四边形 $ABCD$ 的面积达到最大？

解　如图 6-8，由前面例题知

$$\cos\theta = \frac{b^2 + x^2 - a^2 - c^2}{2AC \cdot BD},$$

由于 $$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\theta.$$

要使其面积大，只要 $AC \cdot BD$ 尽量大，即 x 尽量大.

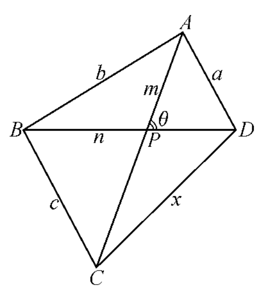


图 6-8

由托勒密不等式

$$\begin{aligned} b^2 + x^2 - a^2 - c^2 &= 2AC \cdot BD \cdot \cos\theta \\ &\leqslant 2(ac + bx)\cos\theta, \end{aligned}$$

此即 $$b^2 + x^2 - 2bx\cos\theta \leqslant a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta,$$

也即 $$(x - b\cos\theta)^2 \leqslant a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta - b^2\sin^2\theta,$$

$$x \leqslant \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta - b^2\sin^2\theta} + b\cos\theta.$$

现在的问题是，根号内的值是否不小于零？x 能否取到上述数值？

第一个问题显然. 由 $\theta < 90°$ 知

$$a \geqslant AP\sin\theta,$$
$$c \geqslant BP\sin\theta,$$

于是

$$\begin{aligned} & a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta \\ \geqslant & (AP^2 + BP^2 + 2AP \cdot BP\cos\theta)\sin^2\theta \\ = & b^2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

此时设 $AP = m$, $BP = n$, 且让 A、B、C、D 四点共圆, 看看这个解是否存在.

$$m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta = b^2,$$
$$\frac{m}{n} = \frac{a}{c},$$

解得

$$m = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}},$$
$$n = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}}.$$

于是我们从构造 $\triangle ABP$ 开始, 逐步扩展直至构造出整个四边形 $ABCD$ 来.

这很容易, 先作线段 PA、PB, 使之分别为 m、n, 夹角为 $180° - \theta$, 于是 $AB = b$.

为能构造出 AD, 只须 $m\sin\theta \leqslant a$, 即

$$b^2\sin^2\theta \leqslant a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta,$$

这是由前面保证的. 于是我们作出 AD, 并使 $\angle ADB = \angle ACB \leqslant 90°$. 这样由相似知 $BC = c$, 此时, 有

$$\begin{aligned} PD &= m\cos\theta + \sqrt{a^2 - m^2\sin^2\theta}, \\ x &= \frac{PD}{m} \cdot b \\ &= b\left(\cos\theta + \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 - \sin^2\theta}\right) \\ &= b\left(\cos\theta + \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}{b^2} - \sin^2\theta}\right) \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta - b^2\sin^2\theta} + b\cos\theta. \end{aligned}$$

这说明 x 确实能取到此值.

此时最大面积为

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}(ac+bx)\sin\theta.$$

说明　$\theta=90^\circ$ 时, $x=\sqrt{a^2+c^2-b^2}$ 是常数.

最大面积仍是在 A、B、C、D 四点共圆时取到. 这个最大值为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AC\cdot BD&=\frac{1}{2}(bx+ac)\\&=\frac{1}{2}(b\sqrt{a^2+c^2-b^2}+ac).\end{aligned}$$

如图 6-9, $\theta>90^\circ$ 时,此时 $\cos\theta<0$, 有

$$\begin{aligned}b^2+x^2-a^2-c^2&=2AC\cdot BD\cos\theta\\&\geqslant 2(ac+bx)\cos\theta.\end{aligned}$$

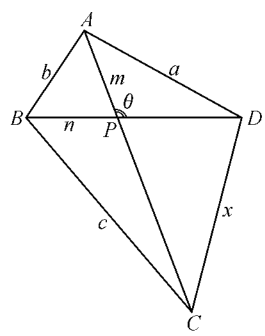


图 6-9

为使 $AC\cdot BD$ 尽量大,易见只要 x 越小越好. 下面求 x 的最小值.

由上述不等式,得

$$(x-b\cos\theta)^2\geqslant a^2+c^2+2ac\cos\theta-b^2\sin^2\theta,$$

即　$$x\geqslant b\cos\theta+\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\theta-b^2\sin^2\theta}$$

或　$$x\leqslant b\cos\theta-\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\theta-b^2\sin^2\theta}.$$

后一式子因为右边是负数故不可能成立,于是似乎是 $x=b\cos\theta+\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\theta-b^2\sin^2\theta}$ 时四边形面积最大.

但这里有一个前提是

$$a^2+c^2+2ac\cos\theta\geqslant b^2\sin^2\theta,$$

更进一步由 $x>0$ 得

$$\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\theta-b^2\sin^2\theta}>-b\cos\theta,$$

即　$$a^2+c^2+2ac\cos\theta>b^2.\qquad①$$

现在,先设条件①满足,于是仍先构造$\triangle ABP$,使

$$m = AP = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}},$$

$$n = BP = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta}},$$

且 $\angle APB = 180° - \theta$，此时 $AB = b$.

如今要分别在 BP、AP 延长线上找到 D、C 两点，使 $AD = a$，$BC = c$，故条件仅为

$$AP < a,\ BP < c.$$

而这就是①.

此时 A、B、C、D 共圆（读者请考虑，为何 $\angle APD = \angle BPC > 90°$，$\frac{AD}{AP} = \frac{BC}{BP}$，就能得出 $\triangle APD \backsim \triangle BPC$），有

$$\begin{aligned}\frac{x}{b} &= \frac{PD}{m}\\ &= \frac{\sqrt{a^2 - m^2\sin^2\theta} + m\cos\theta}{m}\\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta - b^2\sin^2\theta} + b\cos\theta.\end{aligned}$$

但是，若 $a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta \leqslant b^2$，又怎么办呢？这个问题留给读者自己考虑.

本题十分讲究推理的严密性，托勒密不等式是关键一步. 先用不等式定出界，然后举例说明这个界是可以达到的，此乃极值问题的一贯解法.

例 8 如图 6-10，$\triangle ABC$ 中，a、b、c 是对应边，且 $a \geqslant c \geqslant b$，$M$、$N$、$P$ 分别是 BC、CA、AB 的中点，点 M_1、N_1、P_1，满足 MM_1、NN_1、PP_1 分别平分$\triangle ABC$ 的周长. 证明：(1) MM_1、NN_1、PP_1 交于同一点；(2) 设此点为 K，则$\frac{KA}{BC}$、$\frac{KB}{AC}$、$\frac{KC}{AB}$中至少有一个不小于$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

证明 (1) $BM_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) - \frac{a}{2}$

$$= \frac{1}{2}(b + c),$$

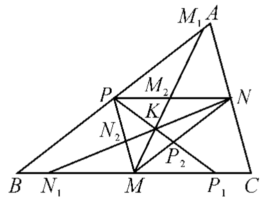


图 6-10

易知，有 $\frac{c}{2} < BM_1 \leqslant c$，

因此 M_1 在线段 AP 内.

于是有 $$PM_1=\frac{b}{2}=PM,$$

于是易推出 MM_2 平分 $\angle PMN$，同理 PP_2、NN_2 分别平分 $\angle MPN$ 和 $\angle MNP$，故三线确实交于一点 K，K 为 $\triangle MNP$ 之内心.

（2）由中线长公式

$$PK=\frac{1}{2}\sqrt{2(AK^2+BK^2)-AB^2},$$

记 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r，则

$$PK=\frac{r}{2\sin\frac{\angle C}{2}},$$

于是
$$\begin{aligned}2(AK^2+BK^2)&=AB^2+4PK^2\\&=AB^2+\frac{r^2}{\sin^2\frac{\angle C}{2}}\\&=c^2+r^2+\frac{1}{4}(a+b-c)^2,\end{aligned}$$

同理
$$\begin{aligned}2(BK^2+CK^2)&=BC^2+4MK^2\\&=a^2+r^2+\frac{1}{4}(b+c-a)^2,\end{aligned}$$

$$2(CK^2+AK^2)=b^2+r^2+\frac{1}{4}(a+c-b)^2,$$

加之，得

$$3r^2+a^2+b^2+c^2+\frac{1}{4}(a+b-c)^2+\frac{1}{4}(b+c-a)^2$$
$$+\frac{1}{4}(c+a-b)^2=4(AK^2+BK^2+CK^2).$$

若结论不成立，则

$AK<\frac{1}{\sqrt{3}}BC$，$BK<\frac{1}{\sqrt{3}}CA$，$CK<\frac{1}{\sqrt{3}}AB$，代入上式，有

$$5(a^2+b^2+c^2)+36r^2<6(ab+bc+ca). \qquad ①$$

如果这个不等式不成立,则结论得证. 由于 $a=r\left(\cot\dfrac{\angle B}{2}+\cot\dfrac{\angle C}{2}\right)$, $b=r\left(\cot\dfrac{\angle A}{2}+\cot\dfrac{\angle C}{2}\right)$, $c=r\left(\cot\dfrac{\angle A}{2}+\cot\dfrac{\angle B}{2}\right)$, 因此我们只需证明

$$8\left[\left(\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}\right)^2\right]+36$$
$$\geqslant 12\left(\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\right)^2,$$

上式可简化为

$$\cot^2\frac{\angle A}{2}+\cot^2\frac{\angle B}{2}+\cot^2\frac{\angle C}{2}+9$$
$$\geqslant 2\left(\cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2}+\cot\frac{\angle C}{2}\cot\frac{\angle A}{2}\right),$$

记 $\tan\dfrac{\angle A}{2}=x$, $\tan\dfrac{\angle B}{2}=y$, $\tan\dfrac{\angle C}{2}=z$, 由于

$$\frac{1-\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}}{\tan\frac{\angle A}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}}=\cot\frac{\angle A+\angle B}{2}=\tan\frac{\angle C}{2},$$

故
$$xy+yz+zx=1,\ x、y、z>0.$$

于是我们就在这个前提下设法证明

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+9\geqslant 2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right),$$

此式即
$$\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\geqslant\frac{4}{xy}-9$$

或
$$\left(\frac{x+y}{1-xy}-\frac{x+y}{xy}\right)^2\geqslant\frac{4}{xy}-9,$$

$$\text{左式}=(x+y)^2\left(\frac{1}{1-xy}-\frac{1}{xy}\right)^2$$
$$\geqslant 4xy\left(\frac{1}{1-xy}-\frac{1}{xy}\right)^2,$$

令 $xy=k$，$0<k<1$，如能证明下式即可：

$$4k\left(\frac{1}{1-k}-\frac{1}{k}\right)^2\geqslant\frac{4}{k}-9$$

或
$$\left(\frac{2k-1}{k-1}\right)^2\geqslant 1-\frac{9}{4}k,$$

此即
$$4(2k-1)^2\geqslant 4(k-1)^2-9k(k-1)^2,$$

即证
$$9k(k-1)^2\geqslant 4[(k-1)^2-(2k-1)^2]=4k(2-3k)$$

或
$$\begin{aligned}&9(k-1)^2-4(2-3k)\\=&9k^2-6k+1=(3k-1)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

等号成立仅当 $k=\frac{1}{3}$，追溯至前，有 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$，此时$\triangle ABC$ 为正三角形.

评注　这是道非常不错的题目，熔几何、三角、不等式于一炉. 不仅对运算有一定要求，而且对知识要求也较高，比如你必须知道中线长公式和三角形中半角正切两两乘积之和为 1 这个事实，并且在恒等变形的过程中计算得过硬；至于对不等式，要求无疑更高，把欲证结论放宽为①本身就冒风险，因为不等式一旦“放过头”可导致前功尽弃，每个奥数选手必深有体会，相比之下，后面在“收拾残局”的过程中将 $(x+y)^2$ 降为 $4xy$，风险较小，而且双变量不等式变成了单变量不等式，也是合乎情理的做法.

请研究当 K 为三角形内任一点时(2)是否仍成立.

例 9　已知凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的 6 条边长均相等，求证：

$$S_{\triangle A_1A_3A_5}+S_{\triangle A_2A_4A_6}\geqslant S,$$

这里的 S 即六边形面积.

证明　先证明一个结论.

结论 1　凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，且 $\angle ABC+\angle BCD<180°$，则 $AD<BC$.

这是因为如图 6-11，连接 BD.

由于 $\angle ABC+\angle BCD<180°$，故延长 BA、CD 后相交，故有 $\angle BDC>\angle ABD$，这样一来，对于$\triangle ABD$ 与$\triangle BDC$ 来说，两组对应边相等，夹角不等，于是 $AD<BC$.

下面不妨设六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 边长为 1.

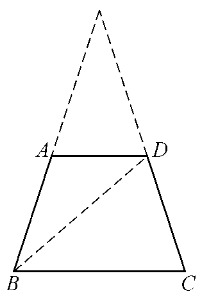


图 6-11

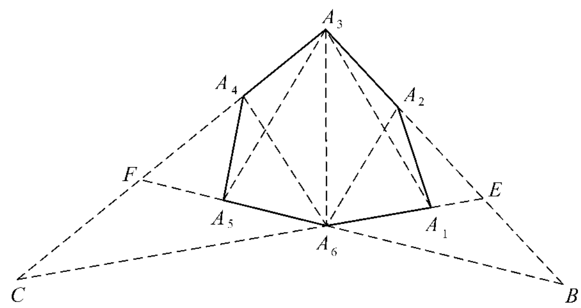


图 6-12

当 $A_2A_3 /\!/ A_5A_6$ 时,容易证明 $A_1A_2 /\!/ A_4A_5$, $A_1A_6 /\!/ A_3A_4$ 亦同时成立,此时欲证不等式的等号成立.

下面,不妨设 A_3A_2、A_5A_6 经延长后相交于 B,如图 6-12,于是由结论 1,有 $A_3A_5 > A_2A_6$,也即

$$\angle A_3A_5A_4 < \angle A_1A_2A_6,$$

又
$$\begin{aligned}&\angle A_3A_2A_6 + \angle A_2A_6A_5\\ &= 180^\circ + \angle B > 180^\circ - \angle B\\ &= \angle A_2A_3A_5 + \angle A_3A_5A_6,\end{aligned}$$

由于 $\angle A_3A_2A_6 > \angle A_3A_5A_6$ 与 $\angle A_2A_6A_5 > \angle A_2A_3A_5$ 中,至少有一个成立,故不妨设

$$\angle A_3A_2A_6 > \angle A_3A_5A_6,$$

于是
$$\begin{aligned}\angle A_1A_2A_3 &= \angle A_1A_2A_6 + \angle A_3A_2A_6\\ &> \angle A_3A_5A_4 + \angle A_3A_5A_6\\ &= \angle A_4A_5A_6.\end{aligned}$$

于是
$$A_1A_3 > A_4A_6.$$

由结论 1 知,A_3A_4、A_1A_6 延长后相交于一点,设为点 C. 又延长 A_6A_1、A_6A_5 分别交 A_3B、A_3C 于点 E、F(设 $\angle A_3EC = \angle E$, $\angle A_3FB = \angle F$),易见

$$\angle A_1A_6A_5 = \angle BA_6C > \angle A_2A_3A_4,$$

又
$$\begin{aligned}\angle A_1A_6A_5 + \angle F &= 180^\circ + \angle C > 180^\circ - \angle C\\ &= \angle A_2A_3A_4 + \angle E;\end{aligned}$$

$$\angle A_1A_6A_5+\angle E=180^\circ+\angle B>180^\circ-\angle B$$
$$=\angle A_2A_3A_4+\angle F,$$

于是 $\angle E-\angle F,\ \angle F-\angle E<\angle A_1A_6A_5-\angle A_2A_3A_4$,

即 $\frac{1}{2}\mid\angle E-\angle F\mid<\frac{1}{2}(\angle A_1A_6A_5-\angle A_2A_3A_4)<90^\circ$,

于是便有 $\cos\frac{\angle E-\angle F}{2}>\cos\frac{\angle A_1A_6A_5-\angle A_2A_3A_4}{2}$, ①

又 $\frac{1}{2}(\angle E+\angle F)+\frac{1}{2}(\angle A_1A_6A_5+\angle A_2A_3A_4)=180^\circ$,

于是 $\sin\frac{\angle E+\angle F}{2}=\sin\frac{\angle A_1A_6A_5+\angle A_2A_3A_4}{2}$, ②

①×②,得

$$\begin{aligned}&\sin E+\sin F\\=&2\sin\frac{\angle E+\angle F}{2}\cos\frac{\angle E-\angle F}{2}\\>&2\sin\frac{\angle A_1A_6A_5+\angle A_2A_3A_4}{2}\cos\frac{\angle A_1A_6A_5-\angle A_2A_3A_4}{2}\\=&\sin\angle A_1A_6A_5+\sin\angle A_2A_3A_4.\end{aligned}\tag{③}$$

由第 3 单元例 15 知

$$S_{\text{四边形}A_1A_2A_3A_6}-S_{\triangle A_6A_1A_2}-S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sin E,$$

$$S_{\text{四边形}A_3A_4A_5A_6}-S_{\triangle A_3A_4A_5}-S_{\triangle A_4A_5A_6}=\frac{1}{2}\sin F,$$

于是由③及上二式,得

$$\begin{aligned}&S_{\triangle A_1A_3A_5}+S_{\triangle A_2A_4A_6}-S\\=&S-S_{\triangle A_6A_1A_2}-S_{\triangle A_1A_2A_3}-S_{\triangle A_2A_3A_4}-\\&S_{\triangle A_3A_4A_5}-S_{\triangle A_4A_5A_6}-S_{\triangle A_5A_6A_1}\\=&\frac{1}{2}\sin E+\frac{1}{2}\sin F-S_{\triangle A_2A_3A_4}-S_{\triangle A_5A_6A_1}\\=&\frac{1}{2}[(\sin E+\sin F)-(\sin\angle A_1A_6A_5+\sin\angle A_2A_3A_4)]\\>&0.\end{aligned}$$

因此结论得证,等号成立,仅当 $\angle B=\angle C=0$,此时有 $A_2A_3 \parallel A_5A_6$,$A_1A_2 \parallel A_4A_5$,$A_1A_6 \parallel A_3A_4$.

评注 此题若不使用三角函数,恐怕也是难以下手的. 另外,把"中间"三角形转化为"周边"三角形这一思路也是很常见的.

习 题 6

1 $\triangle ABC$ 中,求证:$\cos A+\cos B+\cos C>1$,并说明下界 1 不可改进.

2 设 R、r 为 $\triangle ABC$ 的外接圆及内切圆半径,则 $\frac{9r^2}{R^2} \leqslant \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}$.

3 $\triangle ABC$ 中,求证:$\tan^2\frac{\angle A}{2}+\tan^2\frac{\angle B}{2}+\tan^2\frac{\angle C}{2} \geqslant 2-8\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$.

4 对 $\triangle ABC$ 及正数 x、y、z,有 $x\cos 2\angle A+y\cos 2\angle B+z\cos 2\angle C \geqslant -\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)$.

5 已知 $\triangle ABC$,求证:

$$\frac{\sqrt{\sin A\sin B}}{\sin\frac{\angle C}{2}}+\frac{\sqrt{\sin B\sin C}}{\sin\frac{\angle A}{2}}+\frac{\sqrt{\sin C\sin A}}{\sin\frac{\angle B}{2}} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

6 已知 α、β、γ 都是锐角,且满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$,求证:$90^\circ \leqslant \alpha+\beta+\gamma \leqslant 135^\circ$.

7 在 $\triangle ABC$ 中,求证:$\sin 3\angle A+\sin 3\angle B+\sin 3\angle C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$,并求取等号时的条件.

8 锐角 $\triangle ABC$ 中,求证:$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A \leqslant \frac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C$.

9 空间有从一点 P 出发的 3 条射线 PA、PB、PC,若设 $\angle APB=\alpha$,$\angle BPC=\beta$,$\angle CPA=\gamma$,求证:$1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geqslant \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

10 已知$\angle APB$内有一定点Q，$\angle APQ=\alpha$，$\angle BPQ=\beta$，$PQ=d$，今有一动直线过点Q，且与PA、PB射线交于点M、N，用α、β、d表示：

(1) $PM\cdot PN$的最小值；

(2) k_1PM+k_2PN的最小值(k_1、k_2是两给定正数)；

(3) $MQ\cdot NQ$之最小值.

11 设$\triangle ABC$中，$AB=AC$，过点C作$CD\perp AB$于D，设CD中点为M，过点A作$AE\perp BM$于点E，又过点A作$AF\perp CE$于点F，求证：$AF\leqslant\frac{1}{3}AB$.

12 设给定$a\in(\sqrt{2},\ 2)$，单位圆内接四边形$ABCD$满足：圆心在四边形内部；最大边长是a，最小边长是$\sqrt{4-a^2}$，过点A、B、C、D作4条切线围成一四边形$A'B'C'D'$，其中点A、B、C、D分别在边$D'A'$、$A'B'$、$B'C'$和$C'D'$上，求$\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}$的最大值与最小值(用$a$表示).

13 设a、b、c、R、r分别表示$\triangle ABC$的三边、外接圆半径及内切圆半径，a'、b'、c'、R'、r'则为$\triangle A'B'C'$的三边、外接圆半径及内切圆半径，求证：$36rr'\leqslant aa'+bb'+cc'\leqslant 9RR'$.

14 设点I是$\triangle ABC$的内心，AI、BI、CI延长后，分别交$\triangle ABC$的外接圆于点A_1、B_1、C_1，求证：$IA_1+IB_1+IC_1\geqslant IA+IB+IC$；$IA_1\cdot IB_1\cdot IC_1\geqslant IA\cdot IB\cdot IC$.

15 (1) 设$0\leqslant x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\leqslant\pi$，则

$$\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n)\leqslant\sin\ \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n);$$

(2) 设$-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{1}{n}(\cos x_1+\cos x_2+\cdots+\cos x_n)\leqslant\cos\ \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n);$$

(3) 设$0\leqslant x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n<\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{1}{n}(\tan x_1+\tan x_2+\cdots+\tan x_n)\geqslant\tan\ \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n);$$

(4) 设$0<x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{1}{n}(\cot x_1+\cot x_2+\cdots+\cot x_n)\geqslant\cot\ \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

16 **证明** Erdös-Mordell **不等式**:$\triangle ABC$ **内有一点** P,**点** P **至** BC、CA、AB **的距离分别为** $PD=p$,$PE=q$,$PF=r$,**又记** $PA=x$,$PB=y$,$PC=z$,**则** $x+y+z\geqslant 2(p+q+r)$.

17 **设** $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,**求证**:$\sin x\leqslant x\leqslant \tan x$.

18 $\triangle ABC$ **中,设外接圆、内切圆半径分别是** R、r,**求证**:

$\frac{3r}{2R}\leqslant \sin\frac{\angle A}{2}+\sin\frac{\angle B}{2}+\sin\frac{\angle C}{2}-\sin^2\frac{\angle A}{2}-\sin^2\frac{\angle B}{2}-\sin^2\frac{\angle C}{2}\leqslant \frac{3}{4}$.

19 $\triangle ABC$ **中**,R、r **分别为外接圆、内切圆半径,求证**:

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{2R^2}\leqslant \sin A\sin B\sin C\leqslant \frac{3\sqrt{3}r}{4R}\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

20 $\triangle ABC$ **中,求证**:

$\cos A\cos B\cos C\leqslant \frac{1}{24}(\cos^2(\angle A-\angle B)+\cos^2(\angle B-\angle C)+\cos^2(\angle C-\angle A))\leqslant \frac{1}{8}$.

21 $\triangle ABC$ **中**,a、b、c **为对应边**,$a\leqslant b\leqslant c$,**则**

$2\cos^2\frac{\angle C}{2}\leqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2\cos^2\frac{\angle A}{2}$.

22 **设**$\triangle ABC$ **对应边长为** a、b、c,R、r **分别是**$\triangle ABC$ **的外接圆及内切圆半径,则** $4r(16R-5r)\leqslant (a+b+c)^2\leqslant 16R^2+16Rr+12r^2$.

23 **设**$\triangle ABC$ **的边** BC、CA、AB **上分别有点** D、E、F,**记** $C(\triangle)$**为三角形周长,则** $C(\triangle DEF)\geqslant \min(C(\triangle AEF),C(\triangle BFD),C(\triangle CDE))$.

24 **设** P **为**$\triangle ABC$ **内一点**,AP、BP、CP **与对边交于点** D、E、F,**则** $AD\cdot BE\cdot CF\geqslant 2\cdot S_{\triangle DEF}\cdot(AB+BC+CA)$. **并求等号成立之条件.**

25 **一个**$\triangle ABC$ **为锐角、直角或钝角三角形,下述论断分别各有一个成立**:

(1) $a+b+c>4R+2r$;$a+b+c=4R+2r$;$a+b+c<4R+2r$.

(2) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C>2$;$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$;$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<2$.

26 **设锐角**$\triangle ABC$ **的三条高分别为** h_a、h_b、h_c,**则** $\min(h_a,h_b,h_c)\leqslant R+r\leqslant \max(h_a,h_b,h_c)$. **这里** R、r **分别是**$\triangle ABC$ **外接圆与内切圆半径.**

27 **设** x、y、z **是正数,有**$\triangle ABC$,**求证**:

$$x\tan\frac{\angle A}{2}+y\tan\frac{\angle B}{2}+z\tan\frac{\angle C}{2}\leqslant\frac{R^2}{4S}\cdot\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz},$$

其中 R 为$\triangle ABC$外接圆半径，S 是$\triangle ABC$面积.

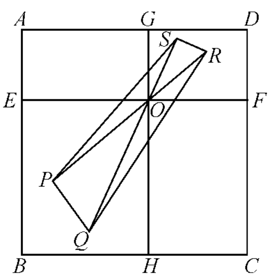
28 设 a、b、c 是一三角形的三边，则对任意实数 x、y、z，求证：$a(x-y)(x-z)+b(y-z)(y-x)+c(z-x)(z-y)\geqslant 0$，等号成立仅当 $x=y=z$.

29 求证：设$\triangle ABC$，则

$$\frac{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}+\frac{\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}}{\cos\frac{\angle A}{2}}+\frac{\cos\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle B}{2}}>\frac{5}{2}.$$

30 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 1，EF、GH 把其分割成 4 个矩形，且交于点 O，四边形 $PQRS$ 的对角线也交于点 O，且点 P、Q 在矩形 $EBHO$ 内，点 R、S 在矩形 $OFDG$ 内，求证：

$$S_{\text{四边形}PQRS}\leqslant\frac{1}{2}.$$



（第 30 题）

31 求证：任意 4 个正数中，一定可以选出其中两个正数 x、y，使下面的不等式成立.

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}.$$

32 已知锐角$\triangle ABC$，BC、CA、AB 上各有点 D、E、F，求证：$DE+EF+FD\geqslant 4R\sin A\sin B\sin C$，这里 R 为外接圆半径.

33 设锐角$\triangle ABC$，内有一点 P，延长 AP、BP、CP，与对边分别交于点 D、E、F，设 $S_{\triangle DEF}=S_P$，求证：$S_H\leqslant S'\leqslant S_I\leqslant S_G$. 其中点 H、I、G 分别是$\triangle ABC$的垂心、内心和重心，S'是以$\triangle ABC$内切圆在三边切点为顶点的三角形之面积.

34 $\triangle ABC$ 中，t_a 是$\angle A$的平分线，同理定义 t_b、t_c，又 R、r 分别是$\triangle ABC$的外接圆、内切圆半径，求证：

$$\frac{1+\cos A}{t_a^2}+\frac{1+\cos B}{t_b^2}+\frac{1+\cos C}{t_c^2}\geqslant\frac{1}{Rr}.$$

35 对于$\triangle ABC$，r 为内切圆半径，c 为周长，设 $\frac{r}{c}=f(\triangle ABC)$. 今有一等边$\triangle ABC$，$A_1$ 在其内部，而 A_2 在$\triangle A_1BC$内部，求证：

$$f(\triangle A_2BC)<f(\triangle A_1BC).$$

36 有一三角形纸片，边长为 $\frac{3}{2}$、$\frac{\sqrt{5}}{2}$、$\sqrt{2}$，沿垂直于长度为 $\frac{3}{2}$ 的边的方向折

叠，求重合部分面积的最大值.

37 已知$\triangle ABC$内有一点F，$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$，延长$BF$、$CF$、$AF$，分别交$AC$、$AB$、$BC$于点$D$、$E$、$G$求证：$AB+AC+BC\geqslant 2(DE+EG+GD)$.

38 已知$\triangle ABC$，$PA=a$，$PB=b$，$PC=c$为固定，求$S_{\triangle ABC}$达到最大时点P在$\triangle ABC$中的位置.

39 一等腰$\triangle ABC$底角为θ，腰长$AB=AC$为a，$\triangle ABC$的每一个内接三角形（即$\triangle ABC$各边上寻找一点作为顶点）都有一条最大边，求这些最大边的最小值，此时这个内接三角形是何形状？

40 已知边长为$\frac{1}{4}$的正$\triangle KLM$在边长为1的正$\triangle ABC$内部（或边界上），求点A到直线KL、LM、MK的距离和达到最大时$\triangle KLM$的位置.

41 平面上3个已知圆$O_i(i=1、2、3)$，其中$\odot O_1$直径$AB=1$，$\odot O_2$与$\odot O_1$同心，且直径为k（固定值），$1<k<3$. $\odot O_3$以A为圆心，直径为$2k$. 考虑所有线段XY，点X在$\odot O_2$上，点Y在$\odot O_3$上，并通过点B，问$\frac{XB}{BY}$为何值时，XY的长度最小？

42 设锐角$\triangle ABC$外心为O，延长AO交$\triangle BOC$外接圆于点A'，同样得到点B'、C'，求证：$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$，这里$R$为$\triangle ABC$外接圆半径.

43 设定点A、B在定直线l两侧，$AC\perp l$于点C，$BD\perp l$于点D，M是CD内的动点，p、q是两固定正数，证明：当$p\cdot AM+q\cdot BM$达到最小时，有$p\sin\angle CAM=q\sin\angle DBM$.

44 $\odot O$的内接四边形$ABCD$，AB是直径且为2，$BC:CD:DA=1:\sqrt{7}:4$，试在不含点C、D的弧$\overset{\frown}{AB}$上找一点M，使点M到BC、CD、DA的距离之和最大.

45 已知平面上有点O、A_1、A_2、A_3、A_4，已知对任意$1\leqslant i<j\leqslant 4$，均有$S_{\triangle OA_iA_j}\geqslant 1$，求证：存在$1\leqslant i<j\leqslant 4$，有$S_{\triangle OA_iA_j}\geqslant\sqrt{2}$.

46 已知$\triangle ABC$中，$AB<AC$，延长CB到点M，延长BC到点N，$\triangle AMB$、$\triangle ABC$和$\triangle ACN$的内切圆半径相等，求证：$MB<CN$，$\angle CAN<\angle BAM$.

47 设M为$\triangle ABC$内一点，点M在BC、CA、AB上的射影分别为点A'、B'、C'，定义$f(M)$为$\frac{MA'\cdot MB'\cdot MC'}{MA\cdot MB\cdot MC}$，求$f(M)$的最大值，$\triangle ABC$为固

定的.

48 已知一凸四边形内接于一个单位圆,求证:四边形周长与对角线长度之和的差<2.

49 证明:在$\triangle ABC$中,$a^3\cos A+b^3\cos B+c^3\cos C\leqslant\frac{3}{2}abc$,这里$a$、$b$、$c$是对应边长.

50 过点C、B作锐角$\triangle ABC$外接圆切线,且交于点R,AR交BC于点P,AP中点是Q,求$\angle ABQ$的最大值($\triangle ABC$不固定).

51 设凸四边形$ABCD$,R_A、R_B、R_C、R_D分别为$\triangle DAB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$的外接圆半径,求证:$R_A+R_C>R_B+R_D$的充要条件是$\angle A+\angle C>\angle B+\angle D$(这里的$\angle A$即$\angle DAB$,其余类推).

52 设凸四边形$ABCD$的内切圆I分别与DA、AB、BC和CD切于点K、L、M、N,设$\odot I_A$、$\odot I_B$、$\odot I_C$、$\odot I_D$分别是$\triangle AKL$、$\triangle BLM$、$\triangle CMN$和$\triangle DNK$的内切圆,找到$\odot I_A$与$\odot I_B$的不同于AB的外公切线l_{AB},同理找到l_{BC}、l_{CD}、l_{AD},这4条外公切线围成一个凸四边形.若设这个四边形的面积为S,求证:$S\leqslant(12-8\sqrt{2})r^2$,此处$r$为$\odot I$的半径.

53 设D、E、F分别为$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上的点,求证$S^2_{\triangle DEF}$不小于$S_{\triangle AEF}$、$S_{\triangle BFD}$、$S_{\triangle CDE}$中两个较小者的积.

54 设单位正方形$ABCD$内或边界上有一点P,求$PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD$的最大值.

7 杂题选讲

本章是全书的最后一单元.

一看到"杂题",大家的印象就是形式多样,方法隐蔽. 当然,此处的杂题还具备一个特点,那就是和三角函数都有关系,不管题目在叙述上是否提到三角函数.

例 1 已知一凸 n 边形所有边长及对角线长均是有理数,今连接所有的对角线,并考察任一条对角线,它与某些对角线相交的交点将其分成若干段,求证:每一段的长度也是有理数.

证明 我们先来看 $n=4$ 的情况,然后再处理一般情形.

如图 7-1,设四边形 $ABCD$ 四边及对角线长均为有理数,又设对角线交于 O 点,则 AO、BO、CO、DO 之长也是有理数.

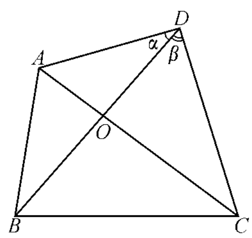


图 7-1

由对称性,只需证 AO 长是有理数. 不妨设 $\angle ADB=\alpha$, $\angle CDB=\beta$, 于是有

$$\frac{AO}{CO}=\frac{AD\sin\alpha}{CD\sin\beta},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}.$$

由条件及余弦定理,知 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin^2\beta(=1-\cos^2\beta)$ 均为有理数,AD/CD 也是有理数,于是 AO/CO 为有理数,而 $AO+CO$ 本来就是有理数,易知 AO 为有理数.

接下来处理一般情形. 设某条对角线为 MN,中间一段为 PQ. 易知,点 P 除了在 MN 上,还在另一对角线上. 现特地注意这两条对角线,它们显然是一个边长、对角线长均为有理数的四边形(即 n 边形的"子图")的对角线,于是由前知,PN 是有理数. 同理,QN 也是有理数,故而 PQ 为有理数.

评注 此题不用三角函数恐怕不易解决.

例 2 如图 7-2，X 星球是一个奇怪的星球，它的表面铺满了三角形. 每个三角形都代表一个国家. 这些三角形的所有边均满足：除端点外，边上没有其他点能成为另一个三角形的顶点. 现将所有三角形顶点染成红、黄、蓝三色之一（注意是任意着色）. 在太空中观察，凡是顶点正好三色的三角形中，红、黄、蓝逆时针的，是正义国；红、黄、蓝顺时针的，是邪恶国. 其他非三色三角形都是不好不坏国. 求证：无论怎样涂色，正义国与邪恶国总是一样多的（包括 0 个）.

证明 这道题目的精髓是给每一个三角形配一个"特征数"S，使 S（正义国）与 S（邪恶国）互为相反数，而 S（不好不坏国）$=0$，再用另一种算法表明所有的特征数之和为 0.

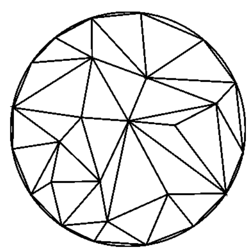


图 7-2

比如，我们给红、黄、蓝点分别赋值 1、0、-1. 对任一三角形，三顶点按逆时针排列，赋值依次为 X、Y、Z，则定义其特征数为

$$\sin(X-Y)+\sin(Y-Z)+\sin(Z-X).$$

易知，此时只要 X，Y，Z 中有两数相等，该值即为 0，于是 S（不好不坏国）$=0$.

又 S（正义国）$=2\sin 1-\sin 2\neq 0$，S（邪恶国）$=\sin 2-2\sin 1$，确为相反数.

由题设知，三角形的每一条边恰好属于两个三角形，如图 7-3，在计算左、右两个三角形的特征数时，分别出现 $\sin(Z-X)$ 与 $\sin(X-Z)$，两者刚好抵消！因此所有国的特征数之和为 0.

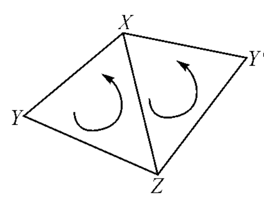


图 7-3

今设正义国有 m 个，邪恶国有 n 个，于是

$$m(2\sin 1-\sin 2)+n(\sin 2-2\sin 1)=0,$$

$$(m-n)(2\sin 1-\sin 2)=0,$$

$$m=n.$$

于是，正义国与邪恶国一样多.

说明 易知特征数有无穷多个，比如 $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ 等.

例 3 设 E 为凸四边形 $ABCD$ 内一点，A、B、C、D、E 五点中任意两点间有个距离，设这些距离中最大者与最小者之比为 k，求证：

$$\min k = 2\sin 70^\circ.$$

说明　先证明两个引理.

引理 1　在$\triangle ABC$中,有 $\dfrac{BC}{\min(AB, AC)} \geqslant 2\sin\dfrac{\angle A}{2}$. 为证明此式,作$\angle A$平分线$AT$,过$B$、$C$分别作$AT$垂线,垂足分别为$D$、$E$.

则
$$\begin{aligned} BC &= BT + CT \\ &\geqslant BD + CE \\ &= AB\sin\frac{\angle A}{2} + AC\sin\frac{\angle A}{2} \\ &\geqslant 2\min(AB, AC)\sin\frac{\angle A}{2}. \end{aligned}$$

引理 2　设D为$\triangle ABC$内一点,则

$$\frac{BC}{\min(AD, BD, CD)} \geqslant \begin{cases} 2\sin A, & A < 90^\circ \text{ 时}, \\ 2, & A \geqslant 90^\circ \text{ 时}. \end{cases}$$

证明　当$A < 90^\circ$且$\triangle ABC$为锐角三角形时,此时,外心O在$\triangle ABC$内部. 连接AO、BO、CO,$\triangle ABC$被分成三个等腰三角形.

不妨设D在$\triangle AOC$内部或边界上(在另两个三角形内作类似处理),于是

$$\begin{aligned} \min(AD, BD, CD) &\leqslant \min(AD, CD) \\ &\leqslant \frac{AD + CD}{2} \leqslant \frac{AO + CO}{2} \\ &= R = \frac{BC}{2\sin A}. \end{aligned}$$

而当$\angle A < 90^\circ$而$\angle B$、$\angle C$之一不小于90°时,$\triangle ABO$,$\triangle BOC$,$\triangle AOC$仍"覆盖"$\triangle ABC$(还有重叠),剩下同理可证. 引理前半部分得证.

接下来讨论$\angle A \geqslant 90^\circ$的情况. 此时,设$BC$中点为$M$,连接$AM$,易知$AM \leqslant BC/2$. 不妨设$D$在$\triangle ABM$内或边界上,于是有

$$\begin{aligned} \min(AD, BD, CD) &\leqslant \min(AD, BD) \\ &\leqslant \frac{AD + BD}{2} \leqslant \frac{AM + BM}{2} \leqslant \frac{BC}{2}. \end{aligned}$$

至此引理得证.

如图 7-4,今设AC与BD交于F,E在$\triangle FAB$内(或边界上).

由引理知,若 $\angle AEC \geqslant 140^\circ$,

则 $k \geqslant \dfrac{AC}{\min(AE,\ CE)} \geqslant 2\sin\dfrac{140^\circ}{2} = 2\sin 70^\circ$.

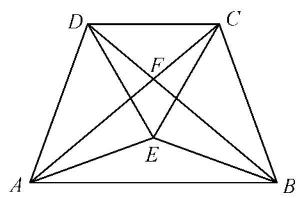


图 7-4

于是 $\angle AEC < 140^\circ$,同理 $\angle AEB < 140^\circ$,故 $\angle BEC > 80^\circ$,同理 $\angle AED > 80^\circ$.

又由引理知,若 $\angle ABC \geqslant 70^\circ$,则

$$k \geqslant \frac{AC}{\min(AE,\ BE,\ CE)} \geqslant 2\sin 70^\circ,$$

故 $$\angle ABC < 70^\circ,$$

同理 $$\angle BAD < 70^\circ,$$

于是 $\max(\angle ADC,\ \angle BCD) > 110^\circ$,不妨设 $\angle BCD > 110^\circ$.

不妨设最小距离为 1,于是由引理有

$$BC \geqslant \frac{BC}{\min(CE,\ BE)} \geqslant 2\sin\frac{\angle CEB}{2}$$
$$\geqslant 2\sin 40^\circ,$$

于是,有

$$\begin{aligned} k \geqslant BD &= \sqrt{DC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC\cos\angle BCD} \\ &> \sqrt{DC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC\cos 110^\circ} \\ &= \sqrt{DC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC\cos 70^\circ} \\ &\geqslant \sqrt{1 + 4\sin^2 40^\circ + 4\sin 40^\circ\cos 70^\circ} \\ &= 2\sin 70^\circ. \end{aligned}$$

由于当$\triangle DCE$ 为正三角形,且 $AE = BE = CE$,$\angle DEA = \angle CEB = 80^\circ$ 时,$k = 2\sin 70^\circ$,

故 $\min k = 2\sin 70^\circ$.

说明　此题是 1992 年 9 月 16 日发现的.

例 4　已知$\triangle ABC$,$\angle A \leqslant \angle C \leqslant \angle B$,一小偷(动点 T),两警察(P_1,P_2)在$\triangle ABC$ 及三条中位线上移动,其中 BC,CA,AB 的中点依次为 D、E、F,注意:小偷和警察不能从一条边“跳到”另一条边上,两警察每时每刻均能看见小偷并可随意控制自己的速度,今设小偷及两个警察的最大速度分别为 $v_T(=1)$、v_{P_1}、v_{P_2},求证:

当 $v_{P_1}=\dfrac{\sin A}{2\sin A+\sin B}$，$v_{P_2}=\varepsilon$（**即任意小的正数**）**时，小偷必可被抓住.**

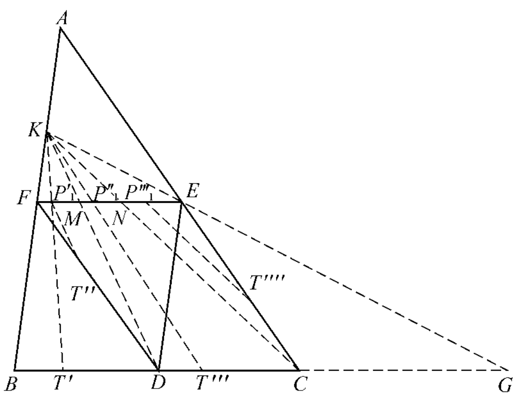


图 7-5

证明　先让 P_1 **在** F **处，**P_2 **在** E **处，若** T **在**AF **或**AE、EF **上，自然只好束手待擒. 于是** T **在**EF**“下”方.**

如图 7-5，**延长** BC **至点**G，**使** $CG=CE$，**连接** GE **且延长与** AF **交于点** K，**连接** KD、KC，**分别与** EF **交于点**M、N.

现考虑 FM，P'_1 **是其上一动点，**T'、T'' **分别在** BD、FD **上，满足** K、P'_1、T' **共线，**$P'_1T''\parallel MD$，

又P''_1**是** MN **上一点，点**T'''**在**CD **上，**K、P''_1、T'''**共线.**

最后，点 P'''_1 **在** NE **上，点** T''''**在**CE **上，**$P'''_1T''''\parallel CN$.

易知，当 T'、T''、T'''、T''''**速度分别为** 1 **时，**P'_1 **的速度为** $\dfrac{FM}{BD}=\dfrac{EF}{BG}=\dfrac{BC}{2BC+2CG}=\dfrac{\sin A}{2\sin A+\sin B}$（**针对点** T'），P'_1 **速度为** $\dfrac{FM}{FD}=\dfrac{FM}{BD}\cdot\dfrac{BD}{FD}=\dfrac{FM}{BD}\cdot\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{FM}{BD}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}<\dfrac{\sin A}{2\sin A+\sin B}$（**针对点** T''）. **而** P''_1 **的速度亦为** $\dfrac{\sin A}{2\sin A+\sin B}$，$P'''_1$ **的速度为** $\dfrac{NE}{CE}=\dfrac{NE}{CG}=\dfrac{EF}{BG}=\dfrac{\sin A}{2\sin A+\sin B}$.

有了上述结果，策划方案如下：

P_1 **先在点** F **处，**P_2 **在点** E **处. 先让点** P_1 **在** EF **上来回移动，点** P_2 **暂且不动.**

易知，当点 P_1 **从点** F **移向点** E **时，经点** P'_1、P''_1 **到** P'''_1，**点** T'_1、T''、T'''、T''''**分别“扫过”**BD、FD、DC **和** CE，P_1 **总会碰到小偷** T（**除非** T **在** DE **上**），**于是** P_1 **可这样“控制”小偷** T：

(1) **点** T **在**BF **上，点** P_1 **在** F **处；**

(2) $T=T'$，$P_1=P'_1$；

(3) $T=T''$，$P_1=P'_1$；

(4) **点** T **在**DE **上，点** P_1 **在** M **处不动；**

(5) $T=T'''$, $P_1=P''_1$;

(6) $T=T''''$, $P_1=P'''_1$.

一旦小偷被“控制住”,他就始终在$\triangle BDF$或$\triangle EDC$的边上移动,此时P_2可大摇大摆地从点E走向点D. 一到点D后,发现小偷T在$\triangle BDF$边上,则P_1以最快速度跑向点F,若小偷T在$\triangle EDC$边上,则P_1以最快速度跑向点E,最终小偷将无路可逃.

例5　已知一凸六边形,每边长至少为1,求证:一定有一条对角线长不小于$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,并且这个下界不可改进.

证明　我们先叙述一个四边形的“余弦定理”(具体见第2单元例6):

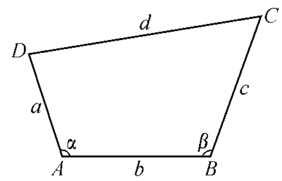


图7-6

如图7-6,设四边形$ABCD$中,$DA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$, $\angle DAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, **则有**$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha-2bc\cos\beta+2ac\cos(\alpha+\beta)$.

另外一个结果即本单元例3的引理1,于是有如下推论:

在$\triangle ABC$中,若$\angle A\geqslant 150°$,则$\frac{BC}{\min(AB, AC)}\geqslant 2\sin 75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

现设六边形为$ABCDEF$,由于$(\angle A+\angle B)+(\angle C+\angle D)+(\angle E+\angle F)=720°$, **故总有一对和不小于$240°$,不妨设$\angle A+\angle B\geqslant 240°$,又设$\angle FAB=\alpha$,$\angle ABC=\beta$,若$\alpha$、$\beta$之一不小于$150°$,则结论成立. 若$\alpha$、$\beta<150°$,有$\alpha$、$\beta>90°$.**

设$x=\min(FA, AB, BC)\geqslant 1$, **于是有**

$$\begin{aligned}FC^2&=FA^2+AB^2+BC^2-2FA\cdot AB\cos\alpha\\&\quad-2AB\cdot BC\cos\beta+2FA\cdot BC\cos(\alpha+\beta)\\&=(FA-BC)^2+AB^2-2FA\cdot AB\cos\alpha\\&\quad-2AB\cdot BC\cos\beta+2FA\cdot BC(1+\cos(\alpha+\beta)).\end{aligned}$$

注意有$-\cos\alpha>0$, $-\cos\beta>0$, **故有**

上式$\geqslant x^2-2x^2\cos\alpha-2x^2\cos\beta+2x^2(1+\cos(\alpha+\beta))$

$=x^2(3-2\cos\alpha-2\cos\beta+2\cos(\alpha+\beta))$

$=x^2\left(3-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos(\alpha+\beta)\right)$.

由于 $120^\circ \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2} < 180^\circ$，故 $-\cos\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$，当 $\alpha+\beta$ 固定时，α 与 β 之差越大，$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 越小，不妨设 $\alpha \geqslant \beta$，则当 $\beta \to 90^\circ$ 时，上式达到最小，于是

$$\begin{aligned} FC^2 &> x^2(3-2\cos\alpha+2\cos(\alpha+90^\circ)) \\ &= x^2(3-2\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)) \\ &\geqslant x^2(3-2\sqrt{2}\sin 195^\circ) \\ &\geqslant 3+2\sqrt{2}\sin 15^\circ \\ &= 2+\sqrt{3}, \end{aligned}$$

即 $$FC \geqslant \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

容易知道取到下界时当且仅当该六边形每边长为 1，每相邻两角之和为 240°，且有三个内角是直角.

例 6 已知平面上有六个点，任两点之间有一距离，记最大距离与最小距离之比为 λ_6，则

$$\min \lambda_6 = 2\sin 72^\circ.$$

证明 在证明此题之前，先建立如下几个结论，具体见本单元例 3.

结论一：若六个点中有三点组成一内角 $\geqslant 144^\circ$ 的三角形，则 $\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$.

结论二：若六点中，有三点组成一三角形有一内角 $\geqslant 72^\circ$，且此三角形内还至少有一点，则 $\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$.

接下来用凸包来进行讨论.

(1) 当六点的凸包为 $\triangle ABC$，其余三点 D、E、F 在其内部或边界上，此时有 $\lambda_6 \geqslant 2$.

先证一个引理：设 $\triangle ABC$ 内部或边界上有两点 M、N，则 $MN \leqslant \max(AB, BC, CA)$.

证明如图 7-7，点 M、N 一定在边界上，否则可以延长，若两点在同一边上当然成立，下不妨设点 M、N 分别在 AB、AC 上.

由 $\angle AMN + \angle BMN = 180^\circ$ 得 $\max(\angle AMN, \angle BMN) \geqslant 90^\circ$，故

$$MN \leqslant \max(AN, BN)$$

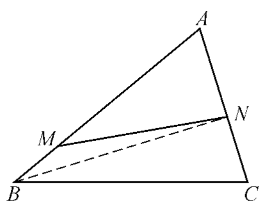


图 7-7

$$\leqslant \max(AC, BN).$$

同理 $BN \leqslant \max(AB, BC)$，于是有

$$MN \leqslant \max(AB, BC, CA),$$

引理得证.

下讨论情形 1. 设 BC、CA、AB 中点分别为 P、Q、R. 连接 PQ、QR、RP，如图 7-8.

若点 D 在 $\triangle ARQ$ 内，则

$$AD \leqslant \max(AR, RQ, QA)$$
$$= \frac{1}{2}\max(AB, BC, CA).$$

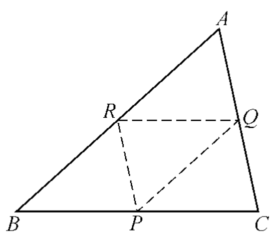


图 7-8

结论已经成立，当点 D 在 $\triangle BRP$ 和 $\triangle PQC$ 内时，同理可证.

于是点 D 在 $\triangle PQR$ 内. 同理，点 E 也在其内. 但这样一来，又有

$$DE \leqslant \max(PQ, QR, RP)$$
$$= \frac{1}{2}\max(AB, BC, CA).$$

其实凸包是三角形时，内部两点就足够了.

(2) 当凸包为四边形 $ABCD$，点 E、F 在其内时.

不妨设 $\angle A \geqslant 90^\circ$，由本章例 3 引理 2，知若 E 在 $\triangle ABD$ 内，则 $\lambda_6 \geqslant 2$，于是 E 在 $\triangle BCD$ 内，同理 F 也在 $\triangle BCD$ 内，但由(1)的讨论知，此时仍有 $\lambda_6 \geqslant 2$.

(3) 当凸包为五边形 $ABCDE$，F 在其内部. 称凸五边形相邻两边及一对角线组成的三角形为“周边三角形”，共有 5 个.

第一种情况，若 F 在一个周边三角形内，不妨设是 $\triangle ABE$，于是由结论二知，若 $\angle A \geqslant 72^\circ$ 时，$\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$，故只需考虑 $\angle A < 72^\circ$.

接下来证明一个结论：

若一三角形有一内角 $\leqslant 18^\circ$，则最大边与最小边之比 $\geqslant 2\sin 72^\circ$.

可以这样来证明：不妨设 $\angle C \leqslant \angle B \leqslant \angle A$，$\angle C \leqslant 18^\circ$，若 $\angle A \geqslant 144^\circ$，则由结论一知成立. 于是再考虑 $\angle A < 144^\circ$.

但是 $2\angle A \geqslant \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C \geqslant 162^\circ$，知 $\angle A \geqslant 81^\circ$. 既然 $\angle A$ 在 81° 与 144° 之间，仍有

$$\sin A \geqslant \sin 144^\circ = \sin 36^\circ,$$

于是

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin A}{\sin C} \geqslant \frac{\sin 36^\circ}{\sin 18^\circ}$$

$$= 2\sin 72^\circ.$$ 结论成立.

现回到第一种情况，$\angle BAE < 72^\circ$，内有三条线 AC、AD、AF，分出 4 个角，必有一者小于 18°，由前知有 $\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$.

第二种情况，F 不在任一周边三角形内，于是一定在五条对角线围成的中间的小五边形内.

如图 7-9. 易知此时有

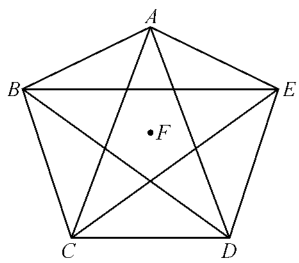


图 7-9

$$\angle AFC + \angle BFD + \angle CFE + \angle DFA + \angle EFB$$
$$= 2(\angle AFB + \angle BFC + \angle CFD + \angle DFE + \angle EFA)$$
$$= 720^\circ,$$

于是

$$\max(\angle AFC, \angle BFD, \angle CFE, \angle DFA, \angle EFB) \geqslant 144^\circ.$$

由结论一，知仍有 $\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$.

（4）当凸包为六边形 $ABCDEF$ 时，由本章例 5 知，有 $\lambda_6 \geqslant 2\sin 75^\circ > 2\sin 72^\circ$.

由于凸包为正五边形，当另一点为其中心时恰好有 $\lambda_6 = 2\sin 72^\circ$，故 $\min\lambda_6 = 2\sin 72^\circ$.

说明　易知 $\min \lambda_5 = 2\sin 54^\circ$ 是一道常见的赛题. $\min \lambda_7$ 与 $\min \lambda_8$ 也已求出，但十分繁难. 尽管如此，这些结果的证明还是大大地依赖于三角函数，没有这个工具是不可想象的.

例 7　设直径为 1 的凸 n 边形的最大周长为 c_n，则有

$$c_n \leqslant 2n\sin\frac{\pi}{2n}. \quad ①$$

并且，当 n 不是 2 的幂时，有 $c_n = 2n\sin\frac{\pi}{2n}$，而且此时凸 n 边形的各条边长都相等.（凸多边形的直径指所有边及对角线中的最长者.）

证明　**定义 1**　对于一平面点集中任意一点，如果以此点为端点的直径共有 n 条（n 可以为∞），则称该点的直径度为 n.

定义 2　若一直径的两端点的直径度均为 1，则称此直径为“孤立直径”.

引理 1 用局部调整，可以使得凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点的直径度都至少为 1，而且此时周长尽可能大. 此时还有：若 $A_pA_q(p<q)$ 是孤立直径，必有 $A_{p+1}A_{q+1}$ 也是直径.

不妨设 A_1 的直径度为零，今以 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为圆心，以 1 为半径作圆，易知点 A_1 均位于这些圆的内部. 在凸 n 边形中，离点 A_1 最远的点一定是凸 n 边形的端点，不妨设为点 A_m，延长 A_mA_1，不妨设射线首先和某一个圆相交于点 B_1 这一点，易知，原凸 n 边形和点 B_1 构成的凸包的直径也是 1，但周长增加了.

凸包的顶点不包括点 A_1，特别注意，顶点数$\leqslant n$. 若顶点数$<n$（设为 l），则可用第二数学归纳法，先证 $c_3\leqslant 3$（明显），又由 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}\ (x\geqslant 2)$ 的递增性，可知：

$$\text{原周长}\leqslant\text{调整后的周长}\leqslant 2l\sin\frac{\pi}{2l}\leqslant 2n\sin\frac{\pi}{2n},$$

因此，可以假定顶点数依然为 n，此时凸 n 边形变为 $B_1A_2A_3\cdots A_n$，B_1 的直径度$\geqslant 1$.

如果 A_2 的直径度为零，我们可以依上法继续调整，最后由归纳假设，我们只需研究调整后的凸 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$，这个凸 n 边形的周长增加了（至少不减），直径为 1，且每一顶点的直径度至少为 1.

下面证明：若 $B_pB_q(p<q)$ 是孤立直径，必有 $B_{p+1}B_{q+1}$ 也是直径. 事实上，若 $B_{p+1}B_{q+1}$ 不是直径，由于 B_{p+1} 的直径度至少为 1，不妨设 $B_{p+1}B_r=1$. 当 $r<q$ 时，易知

$$1\geqslant\frac{1}{2}(B_pB_r+B_{p+1}B_q)>\frac{1}{2}(B_pB_q+B_{p+1}B_r)=1,$$

这与直径定义矛盾.

当 $r>q+1$ 时，不妨设 $B_{q+1}B_t=1$，若 $t>p+1$，易知 $\max(B_tB_r, B_{p+1}B_{q+1})>1$，若 $t<p$，则 $\max(B_tB_q, B_pB_{q+1})>1$，又因为 B_pB_q 是孤立直径，$t=p+1$，于是 $B_{p+1}B_{q+1}=1$，得证.

上述的推导过程中并未画图，所谓的“$>$”和“$<$”最好是用“两侧”来理解，因为比如当 $p=1$ 时，$t=n$ 时，我们也认为 $t<p$. 同时，我们也知道，此时 $B_{p-1}B_{q-1}$ 也是直径.

下面再调整，把孤立直径“取掉”.

引理 2 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是平面上 n 个点，EF 是一条线段，点 $B_i(1\leqslant$

$i \leqslant n)$ 不在直线 EF 上(其实在直线 EF 上也没有关系,我们可以用极限的观点处理),则当 D 是 EF 内点时,有

$$\sum_{i=1}^{n} B_iD < \max\Big(\sum_{i=1}^{n} B_iE,\ \sum_{i=1}^{n} B_iF\Big).$$

证明 设 $B_i(x_i,\ y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 并不妨设 $E(0,\ 0)$, $F(1,\ 0)$, $D(x,\ 0)$, $0 < x < 1$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} B_iD = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x-x_i)^2 + y_i^2},$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + y_i^2}},$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\left[(x-x_i)^2 + y_i^2\right]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

这说明 $f(x)$ 是一个下凸函数. $f(x)$ 要么是单调的;要么有惟一驻点,驻点左侧为减函数,右侧为增函数,无论哪一种情况,$f(x)$ 在任一闭区间上的最大值必定在边界上取到,于是有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \max(f(0),\ f(1)),$$

这等于证明了引理 2.

由引理 2 易得如下结论:

设点 B_p、C_p、B_q、C_q 在直线 A_pA_q 上,点 B_p、C_q 在线段 A_pA_q 外(点 B_p 在点 A_p 一侧,点 C_q 在点 A_q 一侧),点 C_p、B_q 在线段 A_pA_q 内,且有 $A_pA_q = B_pB_q = C_pC_q$, A_{p-1}、A_{p+1}、A_{q-1}、A_{q+1} 是平面上四点,则有

$$\begin{aligned}&A_pA_{p-1} + A_pA_{p+1} + A_qA_{q-1} + A_qA_{q+1}\\ &< \max(B_pA_{p-1} + B_pA_{p+1} + B_qA_{q-1} + B_qA_{q+1},\ C_pA_{p-1} + C_pA_{p+1} +\\ &\quad C_qA_{q-1} + C_qA_{q+1}).\end{aligned}$$

证明只要将点 A_q 平移至 A_p、B_q、C_q、A_{q-1}、A_{q+1}(按和 A_q 一样的距离和方向平移),用引理 2 立得.

于是我们现在可以去除"孤立直径"以增加凸 n 边形周长了.

定义 3 将线段 AB 两端延长分别得到的射线称为 A 侧射线和 B 侧射线.

今设 A_pA_q 为孤立直径,设 $A_{p-1}A_{p+1}$ 交于点 M, A_pA_q 和 $A_{q-1}A_{q+1}$ 交于点

N. 现在我们在 A_pA_q 直线上平移线段 A_pA_q.

A_p 侧射线上有一定点 R，使得 $RN=1$，又设直线 $A_{p+2}A_{p+1}$ 以及 $A_{p-2}A_{p-1}$ 交 A_p 侧射线两点中比较靠近点 A_p 的那一点为 S，R 和 S 中比较靠近点 A_p 的那一点为 T；同样在 A_q 侧射线上得到类似的一点 X. 除了 A_p、A_q，以其余的点分别为圆心，1 为半径作圆，这些圆和 A_p 侧射线有一些交点，记这些交点中最靠近 A_p 的那点为 Y；同样得到最靠近点 A_q 的一点 Z.

记 T、Y 中靠近点 A_p 的那点为 E，X、Z 中靠近点 A_q 的那点为 F. 我们在线段 A_pA_q 内找到两点 C、D，使得 $EC=FD=A_pA_q=1$. 易知将 A_pA_q 调至 EC 或 FD 时，凸 n 边形的其他边长不变，而四条边长

$$\begin{aligned}&A_pA_{p-1}+A_pA_{p+1}+A_qA_{q-1}+A_qA_{q+1}\\&<\max(EA_{p-1}+EA_{p+1}+CA_{q-1}+CA_{q+1},\ DA_{p-1}+DA_{p+1}+FA_{q-1}+\\&\quad FA_{q+1}),\end{aligned}$$

说明周长还有增加的余地，不妨设把 A_pA_q 调至 EC 周长增加了，EC 显然不应是孤立直径，否则凸 n 边形的边数会减少，由刚才的归纳假设，结论已经成立了.

下面我们引进"相邻直径"的概念.

定义 4 凸 n 边形中，若 A_pA_{q-1}、A_pA_q（即一端点公共，另一端点为相邻顶点）同为直径，则称其为第一类相邻直径，而若 A_pA_{q+1} 和 $A_{p+1}A_q$ 均非直径，A_pA_q、$A_{p+1}A_{q+1}$ 是直径，则称它们为第二类相邻直径.

引理 3 设 A_pA_q、$A_{p+1}A_{q+1}$ 为第二类相邻直径，长为 1，交于点 O，$\angle A_pOA_{p+1}=\theta$，则存在 α，$\beta\geqslant 0$，满足 $\alpha+\beta=\theta$，且

$$A_pA_{p+1}+A_qA_{q+1}\leqslant 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\leqslant 4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}=4\sin\frac{\theta}{4}.$$

我们完全可以仿效上面的方法证明，在直线 A_pA_q 上移动线段 A_pA_q，由上面知一定有一个位置使得 $A_pA_{p+1}+A_qA_{q+1}$ 增加，且 $A_{p+1}A_q$ 或 A_pA_{q+1} 等于 1. 不妨设 $A_pA_{q+1}=1$，此时设 $\angle A_pA_{q+1}A_{p+1}=\alpha$，$\angle A_qA_pA_{q+1}=\beta$，则 $\alpha+\beta=\theta$，$A_pA_{p+1}=2\sin\frac{\alpha}{2}$，$A_qA_{q+1}=2\sin\frac{\beta}{2}$，又由正弦函数的上凸性即得引理 3.

现在，我们把调整好的凸 n 边形放入直角坐标系，使其中的一条直径（记为 l_1）和 x 轴平行，并按与 x 轴的倾角的大小，从小到大将这些直径记为 l_1，l_2，…，l_k. 容易验证，l_i 和 l_{i+1} 是相邻直径.

如果是第一类相邻直径，比如 A_pA_q、A_pA_{q+1} 是直径，它们之间的夹角为

α，则有一条边被这两条直径"所管"，即 $A_qA_{q+1}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

如果是第二类相邻直径，比如 A_pA_q、$A_{p+1}A_{q+1}$ 是直径，它们之间的夹角为 β，则有二条边被这两条直径"所管"，即

$$A_pA_{p+1}+A_qA_{q+1}\leqslant 4\sin\frac{\beta}{4}.$$

用同前面一样的方法，可知凸 n 边形的每条边都被确定的两条直径所管. 又易知 $\sum\alpha_i+\sum\beta_i=\pi$，由 Jensen 不等式，立得

$$\text{周长 } c_n=\sum A_iA_{i+1}\leqslant 2\sum\sin\frac{\alpha_i}{2}+4\sum\sin\frac{\beta_i}{4}$$

$$\leqslant 2n\sin\frac{\sum\left(\frac{\alpha_i}{2}+\frac{\beta_i}{2}\right)}{n}=2n\sin\frac{\pi}{2n}.$$

当 n 不是 2 的幂时，①式是可以取到等号的，设 m 是 n 的奇数因子，作 Reuleaux m 边形，将每一段弧 $\dfrac{n}{m}$ 等分，依次连结所有顶点（包括等分点和 Reuleaux m 边形的顶点）即可.

评注　那么，为什么 n 为 2 的幂时，c_n 取不到 $2n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ 呢？由上面的讨论知道，要使得周长尽量大，必须尽量消灭第二类相邻直径，且所有的直径都是"连通"的，而要求 c_n 取到 $2n\sin\dfrac{\pi}{2n}$，还需要这些直径是"闭连通"的，这在 n 不是 2 的幂时可以做到，但当 n 为 2 的幂时，只能是"开连通"的，即存在一条直径 A_pA_q，而 A_pA_{q-1} 和 A_pA_{q+1} 中至少有一条不是直径，A_q 的直径度为 1.

以上讨论虽然不能求出当 n 为 2 的幂时 c_n 的最大值，但也给出了一个很强的必要条件，所有直径必须连通. 如今 c_4 已求出，下一个待解的就是 c_8 了.

例 8　是否存在一个三角形，它的每条边长都是正整数，且每个内角均可用圆规、直尺三等分？

证明　这样的三角形是存在的，下面举的例子是一个直角三角形.

取角 $\alpha<15^\circ$，且 $\tan\alpha$ 是有理数（比如 $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$），于是

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \tan 3\alpha=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\ \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\cos 6\alpha=\frac{1-\tan^2 3\alpha}{1+\tan^2 3\alpha},\ \sin 6\alpha=\frac{2\tan 3\alpha}{1+\tan^2 3\alpha}.$$

以上六个三角函数值均为有理数.

现构造一直角三角形 $A_1B_1C_1$，使 $\angle C_1=90°$，$\angle A_1=6\alpha$，$A_1B_1=1$，$A_1C_1=\cos 6\alpha$，$B_1C_1=\sin 6\alpha$，各边长均为有理数，可相似地放大为整数边长的三角形，如 $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$ 时，该直角三角形的三边之长可以分别为 $AB=4\ 913$，$AC=495$，$BC=4\ 888$.

另外，由于 α 可尺规作图完成，故 $\dfrac{1}{3}\angle A_1=2\alpha$ 也可尺规作图，$\angle B_1=90°-6\alpha$，$\dfrac{1}{3}\angle B_1=30°-2\alpha$ 可尺规作图，又 $90°$的三分之一 $30°$也可尺规作图完成，因此这样的三角形是存在的.

例 9 求证：对于任何一个周长为 1 的封闭凸形 C，总存在一个周长不小于$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$的内接三角形（假定存在最大周长的内接三角形）.

证明 显然这是最好的估计，因为当 C 是圆周时，正好达到此值（内接三角形为正三角形时）. 但对一般的凸形，似乎不易下手.

对一般凸形，一个十分有效的工具是“支撑线”，即与凸形仅在边界有公共点（可能不止一个）的直线，当凸形是光滑的时，支撑线就是切线. 为方便起见，凡是支撑线与凸形的公共点均称为切点，而凸形的 n 条（n 显然$\geqslant 3$）支撑线围成的凸 n 边形则称作该凸形的外切 n 边形. 如图 7-10 中是 $n=6$ 的情形.

接下去我们建立一个关键性结论，由于任何两条不同支撑线，当一条固定时，另一条与它所夹的内角（包含凸形的那个）可以取$(0,\ \pi)$中的任意值. 因此，对任意的 $n\geqslant 3$，存在凸形的外切等角 n 边形，于是此 n 边形的任何两条邻边所夹的外角为$\dfrac{2\pi}{n}$.

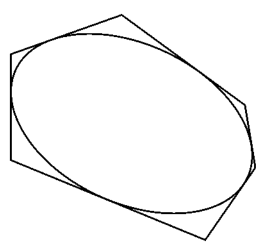


图 7-10

现作凸形 C 的外切等角 $6n$ $(n\geqslant 4)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{6n}$，A_iA_{i+1} 边上的切点记为 B_i $(1\leqslant i\leqslant 6n)$，此处 $A_{6n+1}=A_1$（切点不唯一，就找公共点集之中点）.

现考虑 $2n$ 个三角形 $\triangle B_iB_{2n+i}B_{4n+i}$ $(1\leqslant i\leqslant 2n)$，它们都是凸形 C 的内接三角形.

现考虑 B_iB_{2n+i}，它在直线 $A_{n+i}A_{n+i+1}$ 上有投影 $B'_iB'_{2n+i}$，于是有

$B_iB_{2n+i}\geqslant B'_iB'_{2n+i}$.

但是易知 $B'_iB'_{2n+i}=A_{n+i}A_{n+i+1}+(A_{n+i-1}A_{n+i}+A_{n+i+1}A_{n+i+2})\cos\frac{\pi}{3n}+(A_{n+i-2}A_{n+i-1}+A_{n+i+2}A_{n+i+3})\cos\frac{2\pi}{3n}+\cdots+(A_{i+1}A_{i+2}+A_{2n+i-1}A_{2n+i})\cos\frac{(n-1)\pi}{3n}+(B_iA_{i+1}+A_{2n+i}B_{2n+i})\cos\frac{\pi}{3}$.

这样一来,便有

$$\begin{aligned}&\triangle B_iB_{2n+i}B_{4n+i}\text{ 的周长}\\ \geqslant\ & B'_iB'_{2n+i}+B'_{2n+i}B'_{4n+i}+B'_{4n+i}B'_i\\ =\ & d_0+\sum_{j=1}^{n-1}d_j\cos\frac{j\pi}{3n}+d_n\cos\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

其中 d_0 是类似于 $A_{n+i}A_{n+i+1}$ 这样的 3 条边长之和,d_j 是对应的 6 条边长之和,d_n 是分别包含点 B_i、B_{2n+i}、B_{4n+i} 的 3 条边长之和.

记 S 为所有的$\triangle B_iB_{2n+i}B_{4n+i}$的周长之和,于是有

$$S\geqslant\sum\left(d_0+\sum_{j=1}^{n-1}d_j\cos\frac{j\pi}{3n}+d_n\cos\frac{\pi}{3}\right).\qquad ①$$

我们现在来计算右式,考虑 $A_1A_2\cdots A_{6n}$ 的任一条边 $A_iA_{i+1}(A_{6n+1}=A_1)$,看其在上述右式中出现了几次. 显然,与之有关的线段是 $B_{i-2n}B_i$、$B_{i-2n+1}B_{i+1}$、…、B_iB_{i+2n},共 $2n+1$ 条. 其中,凡下标大于 $6n$ 或小于 1 者,以 $\mathrm{mod}\ 6n$ 处理. 在这些线段的估计中,A_iA_{i+1} 曾单独出现过一次,$B_{i-2n}B_i$ 与 B_iB_{i+2n}"合作"得 $A_iA_{i+1}\cos\frac{\pi}{3}$,其余则为 $2A_iA_{i+1}\sum_{j=1}^{n-1}\cos\frac{j\pi}{3n}=\left(\dfrac{\sin\frac{2n-1}{6n}\pi}{\sin\frac{\pi}{6n}}-1\right)A_iA_{i+1}$.

于是,①式右端为

$$\left[1+\left(\frac{\sin\frac{2n-1}{6n}\pi}{\sin\frac{\pi}{6n}}-1\right)+\cos\frac{\pi}{3}\right]C_{6n},$$

这里 C_{6n} 是 $A_1A_2A_3\cdots A_{6n}$ 的周长,显然 $C_{6n}\geqslant 1$.

记$\triangle B_iB_{2n+i}B_{4n+i}(1\leqslant i\leqslant 2n)$中最大周长为 b_n,凸形 C 的最大内接三角形周长为 L,则

$$L \geqslant b_n \geqslant \left(\frac{\sin\dfrac{2n-1}{6n}\pi}{2n\sin\dfrac{\pi}{6n}}+\frac{1}{4n}\right)C_{6n},$$

$$> \frac{\sin\dfrac{2n-1}{6n}\pi}{2n\sin\dfrac{\pi}{6n}}.$$

最后,令 $n\to+\infty$, 得

$$L \geqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{2n-1}{6n}\pi}{2n\sin\dfrac{\pi}{6n}}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

评注　此题构思巧妙,令人回味无穷,尽管用到了三角级数、抽屉原则与极限,但思路并不以此为主,一个简单的好的主意就是用外切多边形进行估计. 这样无规的凸形就被驾驭了.

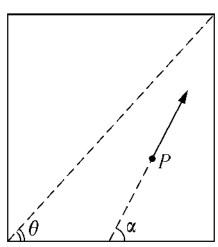
需要注意的是,如果不假定最大周长的内接三角形之存在,还要费点口舌,甚至会用到数学分析中连续函数的性质.

至于内接三角形乃至内接 n 边形最大面积的最佳估计也已彻底解决,不过困难程度要明显地增加,因此读者不必花费心思.

习　题　7

1 已知:单位圆中有一内接凸 n 边形,求证:其各边的平方和 $\leqslant 9$.

2 如图,台球 P(看成一点)在矩形球桌内无摩擦无外力地以初速运动,碰到边界按光路反射(遇到矩形顶点时原路返回),求证:当 $\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ 是无理数时,P 的轨迹在矩形中是"稠密"的(即矩形中任意处放置一无论多小的圆,P 终将穿过此圆),而当 $\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ 是有理数 $\frac{m}{n}$(m、n 为互质正整数)或无穷大时,P 的轨迹是循环的,并求循环节 $k=f(m, n)$(即 P 在反射 k 次后又回到了原来的出发点和出发方向).



(第 2 题)

3 设有一三角形$\triangle ABC$,有一点U满足存在实数α、β、γ、θ不全为零,使得对平面上所有点P,$\alpha PL^2+\beta PM^2+\gamma PN^2-\theta UP^2$为常数,这里$L$、$M$、$N$分别为点$P$到$BC$、$CA$、$AB$的垂线的垂足,试确定$U$的集合.

4 m为正整数,G为单位圆内接正$2m+1$边形$V_1V_2\cdots V_{2m+1}$,求证:存在与m无关的正常数A满足对G内任一点P,有G的两个不同顶点V_i、V_j适合$|PV_i-PV_j|<\dfrac{1}{m}-\dfrac{A}{m^3}$,其中$|A-B|$表示点$A$与点$B$之间的距离.

5 设双心n边形的外接圆、内切圆半径分别为R、r,则$R\geqslant r\sec\dfrac{\pi}{n}$,等号仅在$n$边形为正$n$边形时成立.

6 $A_1A_2\cdots A_{2n}$为单位圆O的内接$2n$边形,求证:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}\right|\leqslant 2\sin\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\angle A_{2i-1}OA_{2i}\right).$$

7 在正$2n$边形$A_1A_2\cdots A_{2n}$的内切圆的圆周上任取一点A,求证:$\tan^2\angle A_1AA_{n+1}+\tan^2\angle A_2AA_{n+2}+\cdots+\tan^2\angle A_nAA_{2n}$不依赖于点$A$的位置.

8 求证:对任一周长为C的闭凸形,一定有一个周长为C_n的内接凸n边形,满足$\dfrac{C_n}{C}\geqslant\dfrac{n}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$,也一定存在一个周长为$C'_n$的外切凸$n$边形,满足$\dfrac{C'_n}{C}\leqslant\dfrac{n}{\pi}\tan\dfrac{\pi}{n}$.

9 设一个矩形的长和宽分别是a、b,另一个矩形的长和宽分别是c、d,且$a<c<d<b$,$ab<cd$,证明:其中一个矩形可被放入另一矩形内部的充要条件是$(a^2-b^2)^2\leqslant(bd-ac)^2+(bc-ad)^2$.

10 设S是一个平面点集,由n个点组成.S中任意两点之间距离至少为1,求证:存在S的一个子集T,T至少由$\dfrac{n}{7}$个点组成,并且T中任意两点之间的距离$\geqslant\sqrt{3}$.

11 设$n\geqslant 3$,$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\cdots$,$\odot O_n$为平面上n个半径为1的圆,假设任一直线至多与两个圆相交或相切,证明:$\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{O_iO_j}\leqslant\frac{(n-1)\pi}{4}$.

12 平面上有7个点,凸包是三角形.这7点中每两点之间有一个距离,试估计最大距离与最小距离之比的下界.

13 两个单位半径的圆覆盖了一个凸集,求这凸集面积的最大值.

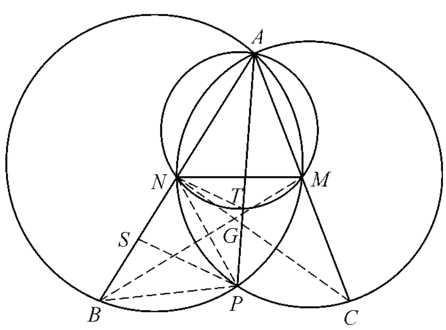
14 第8题的前半题中$n=2$是什么意思?

习　题　1

1. **取**$\overset{\frown}{AC}$**中点** M**，先证** $\triangle AEO \cong \triangle IMO$**，又取**$\overset{\frown}{BC}$**中点** F**，通过** $EF < FA + AE$ **证明左边不等式；再证明** A**、**O**、**I**、**C **四点共圆，由此计算出** OI **与** IA**、**IC **的关系（托勒密定理），消去一个再进行分析，得右不等式等价于** $(\sqrt{3}-1)\cdot CI + OI < 1$**，由于**$\triangle IFC$ **是正三角形，故可由** $IC\sin 60^\circ + OI < 1$ **得出上式.**

2. **设**$\triangle ABC$ **对应角为**$\angle A$**、**$\angle B$**、**$\angle C$**，设法证明** $\dfrac{BC}{HA} = \tan A$ **等，**$\dfrac{BC}{HL} = \dfrac{1}{2}(\tan B + \tan C)$ **等.**

3. **作** $PS \parallel NT$**，点** S **在** BN **上，由点** A**、**N**、**P**、**C **共圆及点** A**、**N**、**T**、**M **四点共圆知** $\angle NPS = \angle TNP = \angle MNC$**，又再证** N**、**G**（**$\triangle ABC$ **的重心）、**P**、**B **共圆，故知** $\angle SPB = \angle NMB$**，再用面积之比和正弦定理证明** $NS = SB$**，即可得** $AT : AP = 2:3$**.**



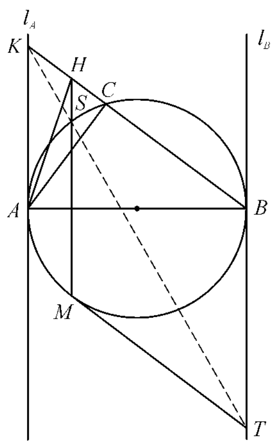
第 3 题图

4. **先证明** $AH = 2R\cos A$**，这里** R **是**$\triangle ABC$ **外接圆半径.**

5. **不妨设这三条垂线交于点** Q**，过点** D **分别作** $DG \perp FQ$**，**$DH \perp EQ$**，点** G**、**H **分别在** FQ**、**EQ **上. 不妨设** $AB > AC$**，由外角平分线性质，有** $\dfrac{AB}{AF} = 1 - \dfrac{BC}{AC}$**，**$\dfrac{AC}{AE} = 1 - \dfrac{BC}{AB}$**，由此可知** $AF > AE$**，并进而得到** $DG > DH$**（只要过点**

D 作 AB、AC 的垂线即可). 于是由正弦定义及$\angle DQG$、$\angle DQH < 90°$ 的事实,得 $\angle DQG > \angle DQH$, 又易知 $\angle DQG = \angle ABC$, $\angle DQH = \angle ACB$, 于是 $\angle ABC > \angle ACB$, $AC > AB$, 矛盾;同理 $AC > AB$ 也不可能.

6. 先设法证明 $HB = AB$, 再由角平分线及割线性质,得 $HK = \dfrac{KB \cdot HC}{AB}$, $HS = \dfrac{HC \cdot HB}{HM}$, 又由 $MT \parallel KB$, $S_{\triangle ABT} = S_{\triangle KBT} = S_{\triangle KBM}$, 及 $\angle MHB = \angle MSB - \angle CBS = \angle MBS$, 得 $AB \cdot BT = HM \cdot KB \sin \angle MHB = HM \cdot KB \cdot \dfrac{SM}{AB}$, 故 $\dfrac{MT}{SM} = \dfrac{BT}{SM} = \dfrac{KB}{AB} \cdot \dfrac{HM}{AB} = \dfrac{KB}{AB} \cdot \dfrac{HM}{HB} = \dfrac{HK}{HS}$, 又 $\angle SMT = \angle SHK$, 于是 $\triangle SMT \backsim \triangle SHK$, 于是 $\angle TSM = \angle KSH$.



第 6 题图

7. 作 $MD \perp AB$, 垂足为点 D,并延长 MD 交 CB 延长线于点 Q,点 D 及点 Q 一定存在,因为 $\angle ABM = \angle ABQ$, BD 垂直平分 QM,于是由梅涅劳斯定理,知 $BC = 2QB$, 又由梅氏定理,知 $AD = 3BD$.

8. 设$\triangle ABC$ 内心为点 I,$\triangle ABC$ 对应角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 由于 $\angle BEC + \angle BDC = 2\angle A + \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) > \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \angle CED + \angle BDE$, 于是 $\angle BEC > \angle CED$ 和 $\angle BDC > \angle BDE$ 之中至少有一个成立, 不妨设 $\angle BEC > \angle DEC$, 又 $180° - \angle DEC > \angle BEC$, 于是 I 至 DE 的距离 $EI \sin \angle DEC < EI \sin \angle BEC = r$, 此处 r 为内切圆半径,又 $r \leqslant EI$, $r \leqslant DI$, $\angle EID > 90°$, 故内切圆与 DE 相交.

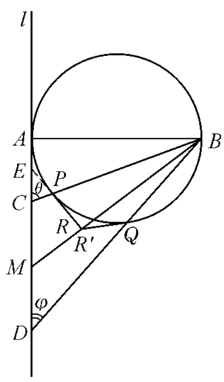
9. 设外心为点 O,内心为点 I, AI、CI 经延长后分别交外接圆于点 E、F,易知 EF 为直径. 于是由中线性质, $IE^2 + IF^2 = 2(R^2 + d^2)$, 而 $AI = \dfrac{r}{\sin \dfrac{\angle A}{2}}$, $CI = \dfrac{r}{\sin \dfrac{\angle C}{2}}$, 故由 $IE \cdot IA = R^2 - d^2$, 可得 $IE = \dfrac{R^2 - d^2}{r} \sin \dfrac{\angle A}{2}$, 同理 $IF = \dfrac{R^2 - d^2}{r} \sin \dfrac{\angle C}{2}$, 又 $\angle A + \angle C = 180°$, 故 $\left(\dfrac{R^2 - d^2}{r}\right)^2 = 2(R^2 + d^2)$.

10. 设过点 P 的$\odot O$ 切线交 BM 于点 R,延长 RP 交 AC 于点 E,易知点 E 为 AC 中点,又设 $\angle ACB = \theta$, $\angle ADB = \varphi$, $AB = 1$, 则 $AC = \cot \theta$,

$AD = \cot\varphi$, $EM = \dfrac{1}{2}\cot\varphi$, $EC = \dfrac{1}{2}\cot\theta$, $\dfrac{CP}{PB} = \cot^2\theta$.

又由梅涅劳斯定理，$\dfrac{BR}{RM} = \tan\varphi\tan\theta$. 同理若设过点 Q 的切线交 BM 于点 R'，延长 QR' 交 AD 于点 F，则 F 为 AD 中点，$DF = \dfrac{1}{2}\cot\varphi$, $MF = \dfrac{1}{2}\cot\theta$, $\dfrac{BQ}{QD} = \tan^2\varphi$.

于是 $\dfrac{BR'}{R'M} = \tan^2\varphi \cdot \dfrac{\cot\varphi}{\cot\theta} = \tan\varphi \cdot \tan\theta = \dfrac{BR}{RM}$，即点 R 与 R' 重合.



第 10 题图

11. 只需证明 $MB\sin\angle PBD = ND\sin\angle ADB$，这也即 $\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{ND}{PD}$，此由 $\triangle ABM \backsim \triangle PDN$ 来保证的.

12. 设 $BC = AD = x$, $AB = CD = y$, $\angle ABC = \alpha$，则由梅氏定理 $\dfrac{BP}{PD} \cdot \dfrac{MD}{AM} \cdot \dfrac{AN}{BN} = 1$，又延长 PC 交 AB 延长线于点 Q，有 $\dfrac{BP}{PD} = \dfrac{BQ}{CD}$，于是 $\dfrac{BQ}{CD} = \dfrac{AM}{MD} \cdot \dfrac{BN}{AN} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{AM}{AN}$，于是 $BQ = \dfrac{x(x - y\cos\alpha)}{y - x\cos\alpha}$，于是 $QN = BQ + x\cos\alpha = \dfrac{x^2\sin^2\alpha}{y - x\cos\alpha}$，又 $AN = y - x\cos\alpha$，于是，$QN \cdot AN = x^2\sin^2\alpha = CN^2$，此即 $\triangle ANC \backsim \triangle CNQ$，于是 $PQ \perp AC$.

习 题 2

1. 不妨设 $b \geqslant c$，在 AC 上取一点 E，使 $AE = AB$，延长 BE，作 $CD \perp BD$，D 为垂足，于是 $CD = (b-c)\cos\dfrac{\angle A}{2}$, $BD = (b+c)\sin\dfrac{\angle A}{2}$.

2. 用余弦定理分别计算对角线的长度.

3. 易知 d_1、d_2、d_3 分别为 $R\cos A$、$R\cos B$、$R\cos C$，由三个“射影定理”（即 $b\cos C + c\cos B = a$ 等），并注意 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}(a+b+c)r = \dfrac{1}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)R$.

4. 设 $\triangle ABC$ 三边为 a、b、c，易证 $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{c^2}{b^2}$，故 $BP = \dfrac{ac^2}{c^2+b^2}$，由余弦定理及三角形面积、中线长定理，得 $\cot\angle ABQ = \dfrac{c^2 + BQ^2 - AQ^2}{4S_{\triangle ABQ}}$, $AQ = \dfrac{AP}{2}$

可用斯图沃特定理算出，BQ 可用中线长公式算出，$S_{\triangle ABQ}=\dfrac{c^2}{2(c^2+b^2)}S_{\triangle ABC}$，由此可得 $\cot\angle ABQ=\dfrac{a^2+b^2+3c^2}{4S_{\triangle ABC}}$，同理 $\cot\angle BAS$ 也是此值.

5. 延长 AI 至外接圆于点 D，易知 $ID=2R\sin\dfrac{\angle A}{2}$，故 $AI\cdot ID=2Rr$，又由余弦定理，$\cos\angle AIO+\cos\angle DIO=0$，代入，得 $OI^2=R^2-AI\cdot ID$.

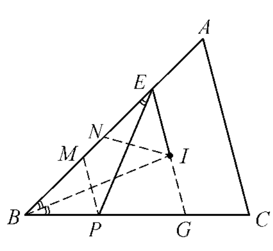
6. 设中线为 AD、BE，则有 $ED^2+AB^2-AE^2-BD^2=2AD\cdot BE\cdot\cos\theta=4S_{\text{四边形}ABDE}\cdot\cot\theta$，即 $\dfrac{1}{4}c^2+c^2-\dfrac{1}{4}c^2=3S_{\triangle ABC}\cdot\cot\theta$.

7. 设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，$PD=d$，则 $a^2+c^2=b^2+d^2$，又 $a+c=2b$，$d^2=bc$，得 $b=2a$，$c=3a$，$d=\sqrt{6}a$，然后通过旋转得 $\angle APB=135^\circ$，由余弦定理得 $a=\left(\sqrt{5+2\sqrt{2}}\right)^{-1}AB$，故点 P 是惟一存在.

8. 设 $PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，且令$\triangle ABC$ 的对应边分别为 a、b、c. 则对三个小三角形分别用余弦定理，并加之，得 $2(bz+cx+ay)\cos\theta=a^2+b^2+c^2$，又 $bz\sin\theta+cx\sin\theta+ay\sin\theta=2S_{\triangle ABC}$，故 $\cot\theta=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{\triangle ABC}}$，又对$\triangle ABC$ 用三次余弦定理，得 $a^2+b^2+c^2=2ab\cos C+2bc\cos A+2ca\cos B$，代入上式分子展开即可.

9. 设$\triangle ABC$ 的对应边分别为 a、b、c，$AC_2=b'$，$AB_2=c'$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，内切圆半径为 r. 易知 $S_{\triangle AC_1B_2}=\dfrac{c'rp}{2b}$，由于 $S_{\triangle AIC_1}=\dfrac{cr}{4}$，$S_{\triangle AIB_2}=\dfrac{c'r}{2}$，于是 $\dfrac{c'r}{2}+\dfrac{cr}{4}=\dfrac{c'rp}{2b}$，即 $2c'(p-b)=bc$，故 $c'(a-b+c)=bc$，同理 $b'(a+b-c)=bc$，又由条件知 $b'c'=bc$，故 $(a-b+c)(a+b-c)=bc$，或 $a^2=b^2+c^2-bc$，由余弦定理知 $\angle CAB=60^\circ$.

10. 设 EI 延长后交 BC 于点 G，易知点 P 在 BG 上. 设 $BE=x$，$BG=y$，$GE=z$，则 $GC=IG=\dfrac{yz}{x+y}$，设 $BP=a$，则 $a=\dfrac{1}{3}\left(y+\dfrac{yz}{x+y}\right)=\dfrac{y(x+y+z)}{3(x+y)}$，$y-a=\dfrac{y(2x+2y-z)}{3(x+y)}$. 欲证结论，只需证 $\angle IBE=\angle BEP$，今作 $MP\parallel EG$，又作正三角形 NEI，点 N 在 BE 上，则 $\angle EMP=120^\circ=$



第 10 题图

$\angle BNI$，于是只要证明 $\triangle BNI \backsim \triangle EMP$ 或 $\frac{MP}{ME}=\frac{NI}{BN}$. 由于 $MP=\frac{az}{y}$，$ME=\frac{(y-a)x}{y}$，故 $\frac{MP}{ME}=\frac{az}{(y-a)x}=\frac{(x+y+z)z}{(2x+2y-z)x}$；而 $\frac{NI}{BN}=\frac{EI}{BE-EI}=\frac{z}{x+y-z}$，故有 $(x+y+z)(x+y-z)=(2x+2y-z)x$，此即 $y^2=x^2+z^2-xz$，这由 $\angle BEG=\angle BAC=60^\circ$ 来保证.

11. 反复利用余弦定理，结果为 $n(R^2+a^2)$.

12. 设$\triangle ABC$ 的内心为点 I，外心为点 O. $\triangle ABC$ 的对应边的长度为 a、b、c，则 $AD=c-a$，$AE=b-a$，则 $DE^2=(c-a)^2+(b-a)^2-2(c-a)(b-a)\cos A$，欲证结论，即只需证 $DE=2OI\sin A=a\sqrt{1-\frac{2r}{R}}$，由于 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$，$R=\frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$，故 $\frac{2r}{R}=\frac{16S^2_{\triangle ABC}}{abc(a+b+c)}$，又对 $S_{\triangle ABC}$ 使用海伦公式，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代入并展开，便得等式.

13. 不妨设 $\angle POA=\theta$，$\odot O$ 的半径为 1，由余弦定理易知：$PA^2+PC^2=6$. 又在$\triangle APC$ 中，由面积知 $\sin\angle APC=\frac{2\sqrt{2}\sin\theta}{PA\cdot PC}$，而 $\cos\angle APC=-\frac{1}{PA\cdot PC}$，故 $\tan^2\angle APC=8\sin^2\theta$，同理，$\tan^2\angle BPD=8\sin^2(90^\circ-\theta)=8\cos^2\theta$.

14. 不妨设大圆半径为 1，6 个小圆的半径依次为 $r_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，若 $\angle A_1OA_2=\alpha$，则 $A_1A_2=\sqrt{2-2\cos\alpha}=\sqrt{2-\frac{(1-r_1)^2+(1-r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{(1-r_1)(1-r_2)}}=2\sqrt{\frac{r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}}$，同理得到另外 5 个式子.

15. 易知 $\angle A_1AA_2=90^\circ$，又不妨设 $\angle BAA_2=\angle CAA_1=\theta<90^\circ$，$b\geqslant c$. $\angle BAC=90^\circ+2\theta$，于是 $b\sin\theta=c\sin(90^\circ+\theta)=c\cos\theta$，$\tan\theta=\frac{c}{b}$. 又易知 2θ 为锐角，构作直角三角形 PQR，$\angle R=90^\circ$，$\angle PQR=2\theta$，$PQ=1$，$PR=h$，延长 RQ 至点 S，使 $QS=QP$，于是 $\sin 2\theta=h$，而 $\tan\theta=\frac{h}{1+\sqrt{1-h^2}}$，由此得 $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，于是此处有 $\cos\angle BAC=-\sin 2\theta=-\frac{2bc}{b^2+c^2}$，由此便可推出结论.

16. 连续多次使用中线长公式.

17. 过点 A 作 BC 的垂线，设 MP、NQ 延长后分别与之交于点 S_1、S_2，于是只要证明点 S_1 与点 S_2 重合即可. 设 AS_2 与 BC 交于点 K，易知只要证明 $\frac{AS_1}{S_1K}=\frac{AS_2}{S_2K}$，设 $\triangle ABC$ 对应边的边长为 a、b、c，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，由梅氏定理 $\frac{AS_2}{S_2K}=\frac{CN}{KN}\cdot\frac{AQ}{CQ}$，由于 $AQ=p$，故只须证明 $\frac{KN\cdot CQ}{CN}$ 关于 b、c 对称. 这里有：$KN=b\cos c+p-a=\frac{(b+c)(a+b-c)}{2a}$，$CQ=p-b$，$CN=p-a$，于是 $\frac{KN\cdot CQ}{CN}=\frac{(b+c)(p-c)(p-b)}{a(p-a)}$，关于 b、c 对称.

18. (1) 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 对应边长，R、r 分别是其外接圆、内切圆半径. 先用余弦定理算出 DE，并运用公式 $d=\sqrt{R(R-2r)}$. (2) 对 $\triangle ADE$、$\triangle BFG$、$\triangle CHK$ 分别使用正弦定理，利用(1)的结论，可得 $\angle EDB=\angle DGF$ 等.

习　题　3

1. 过点 O 作 l 的垂线 ON，设 $ON=d$，$\odot O$ 半径为 r，则点 A 在射线 NO 上，且 $NA=\sqrt{d^2-r^2}$.

2. 用正弦定理与和角公式.

3. 先证明 $\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C$，然后平方再移项用三角公式变形.

4. 设 $\triangle ABC$，角平分线 AD、BE 相等，则这等价于 $\sin A\sin\left(\frac{\angle A}{2}+\angle B\right)=\sin B\sin\left(\frac{B}{2}+A\right)$，然后再用三角公式.

5. 易得 $\cos A=\frac{2}{3}\sin B\sin C$，故 $\tan B\cdot\tan C=3$.

6. 只需将两边两个三角形往中间翻折.

7. 先证明 $AD=2R\cdot\frac{1}{1+\cot B\cot C}$ 等.

8. 充分利用点 O、H、G、I 之性质及斯图沃特定理.

9. 左式 $=(y^2+z^2-2yz\cos X)bc\cos A+y^2(c^2-bc\cos A)+z^2(b^2-bc\cos A)=b^2z^2+y^2c^2-2bycz\cos A\cos X=(bz-cy)^2+2bycz(1-\cos(\angle A-\angle X))+8S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle XYZ}=$ 右式. 此式可推出有名的匹多不等式.

10. 连接 OA、OM，设 $\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$，易知 $AM=AN$，$AO\perp MN$. 由 $PQ\parallel MN$ 知 $AO\perp PQ$. 由于 $\cos\angle POQ=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{OA^2-AP\cdot AQ}{OP\cdot OQ}$，又由弦切角及内错角，知 $\triangle AMP\backsim\triangle AQN$，故 $AP\cdot AQ=AM\cdot AN=AM^2$，于是 $OA^2-AP\cdot AQ=OA^2-AM^2=r^2$.

11. 易知，若 O 是锐角三角形 ABC 的外心，现设 CD 与 AB 交于点 P，CD 过点 O 等价于 $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle A}$；又过点 M、N 分别作 AB 的垂线 MM_1、NN_1，于是 AB 的中垂线过点 K 等价于 $AM_1=BN_1$，即 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$. 下证两者等价. 易知 $\triangle AMD\backsim\triangle NBD$，故 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{MD}{BD}=\dfrac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$，从而 $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{AM\sin B}{BN\sin A}=\dfrac{\cos B\sin B}{\sin A\cos A}=\dfrac{\sin 2\angle B}{\sin 2\angle A}$.

12. 设三边为 $n-1$、n、$n+1$，三角为 θ、2θ、$180^\circ-3\theta$，展开 $\sin 3\theta$ 并运用正弦定理讨论几种情况，得惟一解(4，5，6).

13. 设$\triangle ABC$ 对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r. 易知有著名结果 $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{\angle A}{2}\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}$；今延长 AI 交外接圆于点 K，连接 OK，则 $AD\parallel OK$，故 $\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}$，易知 $AD=2R\sin B\sin C$，$OK=R$，$AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle A}{2}}$，$IK=2R\sin\dfrac{\angle A}{2}$，于是 $\sin B\sin C=\dfrac{\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}}{\sin\dfrac{\angle A}{2}}$，即 $4\sin\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle C}{2}=1$，再由 $\dfrac{r_a}{R}=4\sin\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle B}{2}\cos\dfrac{\angle C}{2}$ 可知结论，r_a 是 BC 边上旁切圆的半径.

14. 设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，则 $CG=a\cos^2 C$，$EG=a\cos C\sin C$；同理 $BF=a\cos^2 B$，$DF=a\cos B\sin B$. 故若作 $MN\perp FG$，点 N 在 FG 上，必有 $\dfrac{NG}{FG}=\dfrac{EG}{EG+DF}=\dfrac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}$，故 $NG=a(1-\cos^2 B-\cos^2 C)\dfrac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B+\sin 2\angle C}=\dfrac{1}{2}a\sin 2\angle C\cot A$，于是 $\dfrac{NG}{CG}=\dfrac{\cot A}{\cot C}=\dfrac{AE}{CE}$.

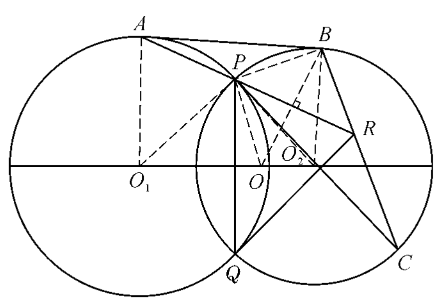
15. 先证明 $\cot\frac{\angle A}{2}+\cot\frac{\angle B}{2}=\cot\frac{\angle A'}{2}+\cot\frac{\angle B'}{2}$，故 $\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}=\sin\frac{\angle A'}{2}\sin\frac{\angle B'}{2}$ 或 $\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}=\cos\frac{\angle A'-\angle B'}{2}$，再进行讨论.

16. 不妨设双心四边形为 $ABCD$，外心 O，内心 I，对角线交点 E，我们设法证明 $\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle IBD}}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle IAC}}$ 即可. 易知 $\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OAC}}=\frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}$，又 $S_{\triangle IBD}=\frac{1}{2}IB\cdot ID\cdot\sin\angle BID=r^2\frac{\cos C}{\sin B}$，$S_{\triangle IAC}=r^2\frac{\cos B}{\sin C}$，此处 r 为内切圆半径. $\angle B$、$\angle C$ 为四边形内角(注意如大于 $90°$ 需作讨论).

17. 记$\triangle ABC$ 的三个内角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 延长 BI 交外接圆$\odot O$ 于点G，易知 $AG=\frac{AB\sin\frac{\angle B}{2}}{\sin 30°}$，$AE=\frac{AB\sin B}{\sin\left(90°-\frac{\angle B}{2}\right)}$，于是 $AG=GI=AE$，然后设法证明 $\triangle DAE\cong\triangle OGI$，并且有 $AE\perp BG$.

18. 设 $\angle AEF=\alpha$，$AE=x$，则可用 α、x、a 表示六条边，最终得 $c_1+c_2=2a$. 不计算的方法是平移.

19. 先证 $BP=BR$，又作 $BO\perp AP$，点 O 在连心线上，易知点 O 为$\triangle PQR$ 的外心. 今设 $\angle PAB=\alpha$，$\angle ABP=\beta$，$\angle AO_1D=\angle BO_2E=\gamma$，点 D、E 分别是点 A、B 在直线 O_1O_2 上的射影. 又设$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r_1、r_2，不妨设 $r_1\geqslant r_2$. 我们要证明的是 $OP\perp BP$，即 $\frac{BP}{BO}=\cos\angle PBO$，又易知 $\angle BOE=\gamma-\alpha$，



第 19 题图

故 $BP=2r_2\sin\beta$，$BO=\frac{r_2\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)}$，于是问题变为证明 $\frac{2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma}=\sin(\alpha+\beta)$ 或 $\cot\alpha-\cot\beta=2\cot\gamma$. 易知 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$，又由 $\angle PO_1O_2=\gamma-2\alpha$，$\angle PO_2O_1=180°-\gamma-2\beta$，得 $\frac{\sin(\gamma-2\alpha)}{\sin(\gamma+2\beta)}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$，解得 $\cot\gamma=\frac{\cos 2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cos 2\beta}{\sin 2\alpha\sin^2\beta+\sin 2\beta\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{2}(\cot\alpha-\cot\beta)$.

20. 不妨设 $\angle BAD=2\alpha$，$\angle ABC=2\beta$，$\angle BCD=2\gamma$，$\angle CDA=2\theta$，$\alpha+\beta+\gamma+\theta=180^\circ$，又不妨设$\odot O$半径为 1，用上述角及其组合的三角函数表示欲证等式中的各线段长度，然后证明三角等式.

21. 对 $\sin B-\sin A=\sin A-\sin C$ 进行和差化积；或用 $\tan\dfrac{\angle A+\angle B}{2}=\cot\dfrac{\angle C}{2}$ 等，考虑 $\tan\dfrac{\angle A}{2}=\dfrac{r}{p-a}$ 等，此处 a、b、c 是对应边长，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，$r=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{p}$ 是内切圆半径.

习 题 4

1. 此题就是要证明 $\dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，或 $\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$. 设 $36^\circ=\theta$，则 $\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$；又设 $\cos\theta=x$，则 $4x^3+2x^2-3x-1=0$，因式分解得 $(x+1)(4x^2-2x-1)=0$，故 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$（负根舍去）；另外还有 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2. 只需证明 $\dfrac{BC}{AB}=2\cos 50^\circ$，又 $\dfrac{BC}{BP}=\dfrac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sin 70^\circ$，而 $\dfrac{BP}{AB}=\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ}=2\sin 20^\circ$，余下的任务是证明 $2\sin 20^\circ\sin 70^\circ=\cos 50^\circ$.

3. 取 BC 中点 M，AC 中点 K，连接 MK、MJ、KJ，易证 $\angle KMJ=72^\circ$，$MK=\dfrac{1}{2}AB$，$MJ=\dfrac{1}{2}CD$，则 $AJ\perp JC$ 仅当 $KJ=\dfrac{1}{2}AC$，不妨设 $AB=1$，则 $BC=2\cos 36^\circ$，设 $CD=x$，则 $KJ=\dfrac{1}{2}AC\Leftrightarrow MK=KJ\Leftrightarrow\dfrac{MJ}{MK}=2\cos 72^\circ\Leftrightarrow x=2\cos 72^\circ$，最后变成证明 $1+2\cos 72^\circ=2\cos 36^\circ$.

4. 证明 $AM=AC$.

5. 用正弦定理转化为证明一个三角恒等式.

6. $\tan\theta=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

7. 转换成三角恒等式.

8. 易知 $A_1A_6=2\sin\dfrac{5\pi}{14}$，$A_2A_5=2\sin\dfrac{3\pi}{14}$，$A_3A_4=2\sin\dfrac{\pi}{14}$，然后证明

$\sin\dfrac{5\pi}{14}-\sin\dfrac{3\pi}{14}+\sin\dfrac{\pi}{14}=\dfrac{1}{2}$.

9. 先计算周边五块相等的面积.

10. $\angle BAP=60^\circ$.

11. $\angle PBA=30^\circ$.

12. $\angle PBA=20^\circ$.

13. $\angle PBA=30^\circ$.

14. $\angle PBA=40^\circ$.

15. $\angle ACP=30^\circ$.

16. $\angle A=\dfrac{\pi}{7}$.

17. 记$\triangle ABC$的三个内角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 设内心为I,内切圆半径为r,则$EI\sin\left(42^\circ+\dfrac{\angle B}{2}\right)=r=DI\sin\left(42^\circ+\dfrac{\angle C}{2}\right)$,于是有$\dfrac{\sin\left(42^\circ+\dfrac{\angle B}{2}\right)}{\sin\left(42^\circ+\dfrac{\angle C}{2}\right)}=\dfrac{DI}{EI}=\dfrac{\sin 18^\circ}{\sin 24^\circ}$,又$\angle B+\angle C=84^\circ$,故设$42^\circ+\dfrac{\angle B}{2}=\alpha$,则$42^\circ+\dfrac{\angle C}{2}=126^\circ-\alpha$,于是$\dfrac{\sin(54^\circ+\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin 24^\circ}{\sin 18^\circ}$,即$\cot\alpha+\cot 54^\circ=\dfrac{\sin 24^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=4\sin 24^\circ$,然后再证明$\alpha=48^\circ$.

习　题　5

1. 不妨设$\triangle ABC$对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,R为$\triangle ABC$外接圆半径. 先证$AF=8R\sin\left(60^\circ+\dfrac{\angle C}{3}\right)\sin\dfrac{\angle B}{3}\sin\dfrac{\angle C}{3}$,$AE=8R\sin\left(60^\circ+\dfrac{\angle B}{3}\right)\sin\dfrac{\angle B}{3}\sin\dfrac{\angle C}{3}$,于是$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cos\dfrac{\angle A}{3}=64R^2\sin^2\dfrac{\angle A}{3}\sin^2\dfrac{\angle B}{3}\sin^2\dfrac{\angle C}{3}$,于是$EF=8R\sin\dfrac{\angle A}{3}\sin\dfrac{\angle B}{3}\sin\dfrac{\angle C}{3}$,同理$FD$、$DE$也是此值.

2. 取PC、PF中点M、N,若能证明$\triangle MNZ$是正三角形,则由旋转知$\triangle XNZ\cong\triangle YMZ$,可知$\triangle XYZ$为正三角形. 接下去证明$MN=MZ=NZ$,最好用点复数,这样来得快些.

3. 由第 3 单元例 15 知，$S_{\text{四边形}BCTQ}=\frac{1}{2}ax\cos C+\frac{1}{2}ax\cos B-\frac{1}{2}x^2\sin(180^\circ-\angle A)$，同理有另外两个表达式，这里 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 对应边长. 于是 $S_{\triangle PQT}=S_{\triangle ABC}-\frac{1}{2}ax(\cos B+\cos C)-\frac{1}{2}bx(\cos A+\cos C)-\frac{1}{2}cx(\cos A+\cos B)+\frac{1}{2}x^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{2}(a+b+c)r-Rx[\sin(\angle A+\angle B)+\sin(\angle A+\angle C)+\sin(\angle B+\angle A)]+\frac{1}{2}x^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B+\sin C)(2Rr-2Rx+x^2)$.

4. 易知只需证明 $\angle NMB=\angle IKC$. 今设 $\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，对应角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，设 $\angle NMB=\alpha$，$\angle IKC=\beta$，易知 $\angle KCI=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C$，于是 $\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle C+\beta\right)}{\sin\beta}=\frac{KC}{IC}=\frac{2R\cos A}{r}\sin\frac{\angle C}{2}$，这里 R、r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径. 整理得 $\cot\beta=\frac{\cos A}{2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}}-\tan\frac{\angle C}{2}$，此处用到了 $\frac{r}{R}=4\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$. 又容易推得 $BN=4R\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}$，$BM=4R\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}$，于是 $\frac{\sin(\alpha+\angle B)}{\sin\alpha}=\frac{BM}{BN}\Rightarrow\sin B\cot\alpha+\cos B=\tan\frac{C}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}$. 问题最后变成证明 $\frac{\cos A}{2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}}-\tan\frac{\angle C}{2}=\frac{\tan\frac{\angle C}{2}}{\tan\frac{\angle A}{2}\sin B}-\cot B$，整理得

$$\frac{\cos A\cos\frac{\angle B}{2}-\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle C}{2}\sin B}=\tan\frac{\angle C}{2}-\cot B \text{ 或}$$

$$\frac{\cos A\cos\frac{\angle B}{2}-\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{\sin\frac{\angle A}{2}}=-\cos\left(\angle B+\frac{\angle C}{2}\right) \text{ 或证明}$$

$\sin\dfrac{\angle C}{2}\sin\dfrac{\angle B+\angle C}{2}+\cos(\angle B+\angle C)\cos\dfrac{\angle B}{2}=\cos\left(\angle B+\dfrac{\angle C}{2}\right)$ $\cos\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$,左式$=\dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{\angle B}{2}-\cos\left(\angle C+\dfrac{\angle B}{2}\right)+\cos\left(\angle C+\dfrac{\angle B}{2}\right)+\cos\left(\angle C+\dfrac{3}{2}\angle B\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\angle B}{2}+\cos\left(\angle C+\dfrac{3}{2}\angle B\right)\right)=$右式.

5. 先证明$\angle AFE=\angle PBC$,又进一步证明$\triangle AFE\backsim\triangle PBC$. 又设$\triangle ABC$对应边为$a$、$b$、$c$,用其表示$AE$、$AF$,并对四边形$PABC$使用托勒密定理,然后将$\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{a+c}{a+b}$代入.

6. 通过计算知有$\dfrac{\sin C}{\cos B}+\dfrac{\sin B}{\cos C}=0$或$4\sin A$,由此得$\tan B\cdot\tan C=3$或$-1$.

7. 设$\triangle NBC$外心为O,只需证明O、I、N三点共线. 然后将问题转化为证明NK平分$\angle BNC$. 不妨设$\triangle ABC$对应边为a、b、c,且$c<b$. 又设$\angle MKD=\varphi$,$\triangle ABC$的外接圆、内切圆半径分别为R、r. 问题变为证明$\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{BK}{KC}$. 在$\triangle BNK$与$\triangle CNK$中分别使用余弦定理,可知上式转化为$(CK-BK)NK=2BK\cdot CK\cdot\cos\varphi$,又$\sin\varphi=\dfrac{NK}{2r}$,于是只需证$r(CK-BK)\tan\varphi=BK\cdot CK$. 又$\tan\varphi=\dfrac{AD}{2DK}=\dfrac{c\sin B}{a+c-b-2c\cos B}$,又$BK=r\cot\dfrac{\angle B}{2}$,$CK=r\cot\dfrac{\angle C}{2}$,由正弦定理及$a=c\cos B+b\cos C$,最后问题变为证明$\sin B\sin C\left(\cot\dfrac{\angle C}{2}-\cot\dfrac{\angle B}{2}\right)=\cot\dfrac{\angle B}{2}\cot\dfrac{\angle C}{2}[\sin C-\sin B+\sin(\angle B-\angle C)]$.

8. 设$\triangle ABC$三对应角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,先用余弦定理及三角公式得出$\sin(\angle B-\angle A)(1-8\sin A\sin B\cos C)=0$,同理有$\sin(\angle B-\angle C)(1-8\sin B\sin C\cos A)=0$,由进一步讨论知,$\triangle ABC$或为等边三角形,或为顶角为$30^\circ$的等腰三角形,或为顶角为$150^\circ$的等腰三角形.

9. 用三角法结合坐标系可得$ER=\dfrac{OE^2-r^2}{2OE}$,此处r是$\odot O$半径. 或设AB与OE交于S,证明R是ES中点,为此过O、A、M、E、B五点作圆,PQ是西摩松线.

10. 记$\triangle ABC$的三个内角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$. 先证明$4\cot\angle ACX=$

$9\cot C+5\cot A$，$\cot\angle ACX-2\cot\angle CXZ=3\cot\angle XYZ=3$，考虑到 $\angle CXZ=180^\circ-\angle B$，故 $5\cot A+8\cot B+9\cot C=12$，又 $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$，解得 $\cot A=1$，$\cot B=\frac{1}{2}$，$\cot C=\frac{1}{3}$.

11. 面积之和 $S=\frac{2n+1}{2}r^2\sum_{i=1}^{n}i\sin\frac{2\pi i}{2n+1}=\frac{(2n+1)^2r^2}{8}\csc\frac{\pi}{2n+1}$.

12. 此题可用解析法，AH 在 y 轴上，H 为原点，注意其中 OI 的方程不必将点 O、I 求出，在 OI 中任一点作 AB、BC、CA 的垂线，分成 6 条线段，其中相间的三条之和等于另相间的三条之和，反之，满足这种性质的点的轨迹是直线 OI（在 $\triangle ABC$ 外的点如何解释？）. 故而只要对点 A、B、C 的位置设好即可，比如 $AH=1$，$B(-\cot B,0)$，$C(\cot C,0)$.

习 题 6

1. 证明 $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$.

2. 左式可代数化，右式可三角恒等变形.

3. 利用 $x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$，其中 $x=\tan\frac{\angle A}{2}$，$y=\tan\frac{\angle B}{2}$，$z=\tan\frac{\angle C}{2}$.

4. 方法与上题类似.

5. 先证明 $\dfrac{\sqrt{\sin A\sin B}}{\sin\frac{\angle C}{2}}\geqslant 3\sqrt{3}\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}$.

6. 由 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta-\sin^2\gamma=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)\geqslant 0$ 得 $\beta+\gamma\leqslant 90^\circ$，同理 $\alpha+\beta\leqslant 90^\circ$，$\alpha+\gamma\leqslant 90^\circ$. 又由 $\sin^2\alpha=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)\geqslant\cos^2(\beta+\gamma)=\sin^2(90^\circ-\beta-\gamma)$ 得 $\alpha+\beta+\gamma\geqslant 90^\circ$.

7. 不妨设 $\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$，则 $\angle A+\angle B\leqslant 120^\circ$，$\angle C\geqslant 60^\circ$，左式 $=2\sin\frac{3}{2}(\angle A+\angle B)\left[\cos\frac{3}{2}(\angle A+\angle B)+\cos\frac{3}{2}(\angle A-\angle B)\right]\leqslant 2\sin\theta(\cos\theta+1)=2\sqrt{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^3}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$，这里 $\theta=\frac{3}{2}(\angle A+\angle B)\leqslant 180^\circ$，最后一步是算术-几何平均不等式. 等号成立当且仅当 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\angle A=\angle B=20^\circ$，$\angle C=140^\circ$.

8. 不妨设 $\angle C\geqslant 60^\circ$，由 $(\cos A+\cos B)\cos C\leqslant 2\sin\frac{\angle C}{2}\cos C$，及 $\cos A$

$\cos B(1-2\cos C)\leqslant\frac{1}{2}(1-\cos C)(1-2\cos C)$ 可得.

9. 设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，则四面体 $PABC$ 的体积为 $\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

10. 首先建立 $\frac{\sin\alpha}{PN}+\frac{\sin\beta}{PM}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{d}$. 对于(1)，用算术-几何平均不等式；对于(2)，用柯西不等式；对于(3)，则设 $\angle MQP=\theta$，有 $MQ\cdot NQ=d^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta-\beta)}$，然后对分母积化和差，知极值在线段 MQN 与 $\angle APB$ 平分线垂直时取到.

11. 设 $\angle BAC=2\alpha$，$\angle ABE=\beta$，$BD=1$，$CD=2t$，则 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$，$\sin\beta=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，$AF=AE\sin\alpha=AB\sin\alpha\sin\beta$. 等式成立在 $CD=\sqrt{2}$ 时.

12. 设圆心为 O，$\angle AOB=2\theta_1$，$\angle BOC=2\theta_2$，$\angle COD=2\theta_3$，$\angle DOA=2\theta_4$，故 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 均为锐角且 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=180°$，易知 $\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4)}{\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4}$，由上述表达式的对称性知不妨设 $AD=a$，$CD=\sqrt{4-a^2}$，则 $\theta_3+\theta_4=\theta_1+\theta_2=90°$，$\tan\theta_3+\tan\theta_4=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$，$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2}{\sin 2\theta_1}$，$\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4=2\sin 2\theta_3=a\sqrt{4-a^2}$，$\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2=2\sin 2\theta_1$. 于是比值变成 θ_1 的单变量函数，由函数增减性不难求出最值.

13. 由柯西不等式及第 2 道习题，有 $(aa'+bb'+cc')^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=16R^2R'^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)(\sin^2A'+\sin^2B'+\sin^2C')\leqslant 81R^2R'^2$. 又 $aa'+bb'+cc'\geqslant 3\sqrt[3]{abca'b'c'}$. 接下去先证明 $abc\geqslant 24\sqrt{3}r^3$ 或 $R\cdot S_{\triangle ABC}\geqslant 6\sqrt{3}r^3$，由 $r=4R\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$，$S_{\triangle ABC}=r^2\cot\frac{\angle A}{2}\cot\frac{\angle B}{2}\cot\frac{\angle C}{2}$，及 $\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，$\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$ 可得结论.

14. 设外接圆半径为 R，则先证明 $IA_1=2R\sin\frac{\angle A}{2}$，而 $IA=$

$4R\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}$，如此等等.

15. 这是 Jensen 不等式的特例，Jensen 不等式是说（可用归纳法证明）：若对于一区间上的任两个实数 x、y，有 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]\geqslant f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，（$f$ 足够光滑时也可用 $f''(x)\geqslant 0$），则对该区间上的任 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$.

16. 先证明 $DE\geqslant p\sin B+q\sin A$，于是 $z\geqslant p\dfrac{\sin B}{\sin C}+q\dfrac{\sin A}{\sin C}$，同样得另两个不等式，加之即得. 等号成立当且仅当$\triangle ABC$ 是正三角形且 P 是$\triangle ABC$ 中心.

17. 注意这里的 x 是弧度制. 本题可用面积证，属于证明不难但却是极其重要的数学结果之一. 这个不等式取等式当且仅当 $x=0$.

18. 先证明 $\dfrac{r}{2R}\leqslant\sin\dfrac{\angle A}{2}\left(1-\sin\dfrac{\angle A}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{4}$.

19. 设 I 是$\triangle ABC$ 内心，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，先证 $\dfrac{AI^2}{bc}+\dfrac{BI^2}{ac}+\dfrac{CI^2}{ab}=1$，然后用算术-几何平均不等式，并考虑 $AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{\angle A}{2}}$ 等，以及 $\sin\dfrac{\angle A}{2}\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}=\dfrac{r}{4R}$，可得左式；右式用三角变换做，先用倍角公式消去 R 和 r. 当然左式也可用倍角公式.

20. 先证明 $8\cos A\cos B\cos C\leqslant\cos^2(\angle A-\angle B)$.

21. 先证 $\dfrac{2}{1+\tan\dfrac{\angle B}{2}\tan\dfrac{\angle C}{2}}\leqslant\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\leqslant\dfrac{2}{1+\tan\dfrac{\angle A}{2}\tan\dfrac{\angle B}{2}}$.

22. 分别计算 HI 与 GI，其中 H、G、I 分别为$\triangle ABC$ 的垂心、重心和内心，有 $IH^2=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C=4R^2+4Rr+3r^2-\dfrac{1}{4}(a+b+c)^2$；而 $GI^2=r^2-\dfrac{1}{12}(a+b+c)^2+\dfrac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)$，并考虑到 $(a+b+c)^2=2(a^2+b^2+c^2)+4r(4R+r)$.

23. 定义$\triangle DEF$与$\triangle ABC$对应边的夹角，然后用局部调整把$\triangle DEF$调到一个合适的位置，并利用正弦定理与积化和差.

24. 过点P作三边垂线，用这三条垂线之长及$\triangle ABC$内角及面积表示$\triangle DEF$的面积，最后用算术-几何平均不等式.

25. 完全转换成三角函数运算.

26. 左式用抽屉原则容易证明，右式用三角函数转换.

27. 先证明$xa^2+yb^2+zc^2\leqslant\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz}R^2$，再证明$a^2\geqslant 4S\tan\frac{\angle A}{2}$等. 前式可参考第4题. 其中$a$、$b$、$c$是$\triangle ABC$对应三边长.

28. 设$\sqrt{a}=p$，$\sqrt{b}=q$，$\sqrt{c}=r$，则p、q、r能组成三角形，代入欲证不等式，等式变形并由余弦定理配方为$[p(x-y)+r(y-z)\cos Q]^2+r^2(y-z)^2\sin^2 Q\geqslant 0$.

29. 先证明$\dfrac{\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{\angle A}{2}+\tan\frac{\angle B}{2}}$等，然后令$\tan\frac{\angle A}{2}=x>0$，$\tan\frac{\angle B}{2}=y>0$，$\tan\frac{\angle C}{2}=z>0$，在$xy+yz+zx=1$的条件下，证明代数不等式.

30. 设$\angle EOP=\alpha$，$\angle HOQ=\beta$，$\angle POQ=\theta$，则$PR\leqslant\frac{1}{\cos\alpha}$，$SQ\leqslant\frac{1}{\cos\beta}$，$\sin\theta=\cos(\alpha+\beta)$，而$S_{\text{四边形}PQRS}=\frac{1}{2}\cdot PR\cdot SQ\cdot\sin\theta$.

31. 因为$\dfrac{x-y}{1+x+y+2xy}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{y}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. 于是对4个正数$a$、$b$、$c$、$d$，构造$\tan\alpha=1+\frac{1}{a}$，$\tan\beta=1+\frac{1}{b}$，$\tan\gamma=1+\frac{1}{c}$，$\tan\theta=1+\frac{1}{d}$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. 然后用抽屉原则并注意到$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

32. 找到外心O，连接OD、OE、OF，先证明$S_{\text{四边形}AFOE}\leqslant\frac{1}{2}R\cdot EF$，同理有$S_{\text{四边形}FBDO}\leqslant\frac{1}{2}R\cdot FD$，$S_{\text{四边形}ODCE}\leqslant\frac{1}{2}R\cdot DE$，然后相加.

33. 由这些"心"的性质,易得 $\frac{S_G}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$, $\frac{S_H}{S_{\triangle ABC}}=2\cos A\cos B\cos C$, $\frac{S_I}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, **而** $S'=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{r^2}{4R}(a+b+c)=\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$, **故** $\frac{S'}{S_{\triangle ABC}}=2\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$. **此处** a、b、c **为**$\triangle ABC$ **的对应边,**R、r **分别是外接圆、内切圆半径. 由** $\cos A\cos B=\frac{1}{2}(\cos(\angle A+\angle B)+\cos(\angle A-\angle B))\leqslant\frac{1}{2}(\cos(\angle A+\angle B)+1)=\frac{1}{2}(1-\cos C)=\sin^2\frac{\angle C}{2}$**,及另外两个类似的不等式,得** $S_H\leqslant S'$. **又** $\frac{a}{b+c}=$

$$\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}\cos\frac{\angle B-\angle C}{2}}=\frac{\sin\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle B-\angle C}{2}}\geqslant$$

$\sin\frac{\angle A}{2}$**,及另外两个不等式,得** $S'\leqslant S_I$. **显然** $S_I\leqslant S_G$.

34. 可先证明 $\frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{t_a}+\frac{\cos\frac{\angle B}{2}}{t_b}+\frac{\cos\frac{\angle C}{2}}{t_c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

35. 先证明:对任意$\triangle ABC$**,有** $f(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}\tan\frac{\angle C}{2}$**,今延长** BA_2 **至** CA_1 **于点** A'**,设法证明** $f(\triangle A_2BC)<f(\triangle A'BC)<f(\triangle A_1BC)$.

36. 用解析法分类讨论,其中算出折叠前后若干线段夹角的三角函数值.

37. 先证 $AB+AC\geqslant 4DE$. **设** AF、BF、CF **分别为**x、y、z**,易由面积得** $DF=\frac{xz}{x+z}$**,同理** $EF=\frac{xy}{x+y}$**,欲证不等式变为代数不等式(用**x、y、z **表示** AB、AC、DE**,方法用到余弦定理).**

38. 设 $\angle APB=\alpha$, $\angle APC=\beta$, $\angle BPC=\theta$**,先固定**θ**,于是** $4(S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC})^2=(ab\sin\alpha+ac\sin\beta)^2\leqslant(ab\sin\alpha+ac\sin\beta)^2+(ab\cos\alpha-ac\cos\beta)^2=a^2b^2+a^2c^2-2a^2bc\cos\theta$ **为定值,于是为使** $S_{\triangle ABC}$ **大,尽量有** $\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\cos\beta}=\frac{c}{\cos\alpha}$**,要是能取到,**$P$ **为**$\triangle ABC$ **之垂心,但是否能取到,**a、b、c **有何限制,须进一步讨论,比如转而研究"tan". 首先可以排除一些特殊情况,如点** P **在**$\triangle ABC$ **外等.**

39. 先将内接三角形调到等腰三角形，然后再调到有一边与底边 BC 平行，然后用 a 及 θ 的三角函数值表示这个值.

40. 先把点 L、K 分别调到 BC、AB 上，记 $\angle BLK = \angle AKM = \alpha$. 当 $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$ 时，点 A 位于 $\angle KLM$ 内部，距离和为 $8(S_{\triangle AKL} + S_{\triangle ALM} + S_{\triangle AKM}) = 8(S_{\triangle KLM} + 2S_{\triangle AKM})$，于是变成求适当的 α，使 $S_{\triangle AKM}$ 最大，也即 $AK \cdot \sin\alpha$ 最大，易知 $BK = \dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}$，故 $AK\sin\alpha = \left(1 - \dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{3}}\right)\sin\alpha$，仍在 $\alpha = 90^\circ$ 时最大. 当 $0^\circ \leqslant \alpha < 60^\circ$ 时，作点 K 关于 LM 的对称点 N，此时 $\triangle MNL \cong \triangle KML$，且点 N 在 $\triangle ABC$ 内部，然后再调整，归结到前一种情形.

41. 设 $\angle ABX = \alpha$，则 $XY = \dfrac{1}{2}(3\sqrt{k^2 - \sin^2\alpha} - \sqrt{1 - \sin^2\alpha})$，求导求极值. 最后得 $\dfrac{XB}{BY} = 1$.

42. 先算出 $OA' = R\dfrac{\cos(\angle B - \angle C)}{\cos A}$ 等. 为证明 $\dfrac{\cos(\angle A - \angle B)\cos(\angle B - \angle C)\cos(\angle C - \angle A)}{\cos C\cos A\cos B} \geqslant 8$，考虑到 $\dfrac{\cos(\angle A - \angle B)}{\cos C} = \dfrac{1 + \cot A\cot B}{1 - \cot A\cot B} = \dfrac{1+x}{1-x}$，此处 $x = \cot A\cot B$，同理 $y = \cot B\cot C$，$z = \cot C\cot A$，则 x、y、$z > 0$ 且 $x + y + z = 1$，求证 $\dfrac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)} \geqslant 8$.

43. 此题可用求导数或调整处理. 此题的背景是光的折射定律.

44. 设 $BC = a$，$CD = \sqrt{7}a$，$AD = 4a$，先证明 $AB^3 - (BC^2 + CD^2 + DA^2) \cdot AB = 2BC \cdot CD \cdot DA$，然后得 $8 - 48a^2 = 8\sqrt{7}a^3$，或 $\sqrt{7}a^3 + 6a^2 - 1 = 0$，由此解得 $a = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. 今延长 CB 至点 P，使 $CP = 1$，在 AD 上取点 Q，使 $DQ = 1$，然后证明 Q、O、P 三点共线，由此得距离之和 $= 2(S_{\triangle QMP} + S_{\text{四边形}QPCD})$，为 $S_{\triangle QMP}$ 最大，只须 $MO \perp QP$.

45. 设 $OA_1 = a$，$OA_2 = b$，$OA_3 = c$，$OA_4 = d$，$\angle A_1OA_2 = \alpha$，$\angle A_2OA_3 = \beta$，$\angle A_3OA_4 = \gamma$，易知 $S_{\triangle OA_1A_2} = \dfrac{1}{2}ab\,|\sin\alpha| = S_1$，$S_{\triangle OA_1A_3} = \dfrac{1}{2}ac\,|\sin(\alpha+\beta)| = S_2$，$S_{\triangle OA_1A_4} = \dfrac{1}{2}ad\,|\sin(\alpha+\beta+\gamma)| = S_3$，$S_{\triangle OA_2A_3} = \dfrac{1}{2}bc\,|\sin\beta| = S_4$，$S_{\triangle OA_2A_4} = \dfrac{1}{2}bd\,|\sin(\beta+\gamma)| = S_5$，$S_{\triangle OA_3A_4} =$

$\frac{1}{2}cd\mid\sin\gamma\mid=S_6$. 由此可知 $S_1S_6\pm S_2S_5\pm S_3S_4=0$，且不能同时取正.

46. 由面积及余弦定理，并设 $\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，有 $BM=\frac{a(a^2+2bc+3c^2-b^2)}{(b+c)^2-a^2}$，$CN=\frac{a(a^2+2bc+3b^2-c^2)}{(b+c)^2-a^2}$. 为证 $\angle CAN<\angle BAM$，只须证 $\tan\frac{1}{2}\angle CAN<\tan\frac{1}{2}\angle BAM$.

47. 易知 $\frac{MB'\cdot MC'}{MA^2}=\sin\angle MAB\cdot\sin\angle MAC=\frac{1}{2}[\cos(\angle MAB-\angle MAC)-\cos(\angle MAB+\angle MAC)]\leqslant\sin^2\frac{\angle A}{2}$，同理得另外两个不等式，故等式成立仅当 M 为内心，最大值为 $\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$.

48. 设圆内接四边形 $ABCD$，$AB=2\sin\alpha$，$BC=2\sin\beta$，$CD=2\sin\theta$，$DA=2\sin(\alpha+\beta+\theta)$，$AC=2\sin(\alpha+\beta)$，$BD=2\sin(\beta+\theta)$. 于是问题变为：若 $\alpha+\beta+\theta<180°$，则 $1+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\theta)>\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta+\sin(\alpha+\beta+\theta)$. 其实，可证更强的不等式 $\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\theta)>\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta+\sin(\alpha+\beta+\theta)$.

49. 由余弦定理得 $a^3\cos A+b^3\cos B+c^3\cos C=\frac{3}{2}abc-\frac{1}{2abc}[a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)+b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)+c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)]\leqslant\frac{3}{2}abc$，最后一步的依据见第 28 题.

50. 不妨设 $\triangle ABC$ 对应边为 a、b、c，对应角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$\angle ABQ=\theta$，则先推出 $\frac{BP}{CP}=\frac{c^2}{b^2}$，得 $BP=\frac{c^2a}{b^2+c^2}$，故由 $AQ=QP$ 知 $c\sin\theta=BP\sin(B-\theta)$，即 $\frac{b^2+c^2}{ac}=\sin B\cot\theta-\cos B$，于是 $\cot\theta=\frac{b^2+c^2}{ac\sin B}+\cot B=\frac{a^2+2c^2}{ac\sin B}-\cot B\geqslant\frac{2\sqrt{2}-\cos B}{\sin B}\geqslant\sqrt{7}$，于是 $\tan\theta\leqslant\frac{\sqrt{7}}{7}$，当 $\theta=\arctan\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时，$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$.

51. 充分性是由 $\angle B+\angle D<180°$，点 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆外部，于是 $\angle BAC>\angle BDC$，$\angle ACB>\angle ADB$，$\angle DAC>\angle DBC$，$\angle DCA>\angle DBA$. 然后利用正弦定理.

52. 设 $ABCD$ 的内切圆为 $\odot I$，则 $\odot I$ 过点 I_A、I_B、I_C、I_D，易证 $l_{AB}\parallel$

KM，由此可算出，l_{AB}与MK的距离为$r(\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1)$，$l_{CD}$与$MK$的距离为$r(\cos\gamma+\cos\delta-\cos(\gamma+\delta)-1)$，此处$\angle KIL=2\alpha$，$\angle LIM=2\beta$，$\angle MIN=2\gamma$，$\angle NIK=2\delta$，则$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^\circ$，于是$l_{AB}\parallel l_{CD}$，且距离为$r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)$，同理$l_{BC}\parallel l_{DA}$且相距也是此值，于是所研究的四边形是菱形. 今设$KM$与$LN$夹角为$\theta$，则$S=\frac{r^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)^2}{\sin\theta}=\frac{r^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)^2}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

又$\cos\alpha+\cos\gamma\leqslant 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$，$\cos\beta+\cos\delta\leqslant 2\cos\frac{\beta+\delta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$，令$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\psi$，若$S\leqslant\frac{4r^2(\cos\psi+\sin\psi-1)^2}{\sin 2\psi}=\frac{8r^2(1-\cos\psi-\sin\psi)}{\sin 2\psi}+4r^2\leqslant(12-8\sqrt{2})r^2$. 只需证$\frac{\sin\psi+\cos\psi-1}{\sin 2\psi}\geqslant\sqrt{2}-1$，注意$\psi<90^\circ$，等式变形，即证$1+\sin 2\psi\geqslant 1+2(\sqrt{2}-1)\sin 2\psi+(\sqrt{2}-1)^2\sin^2 2\psi$，此即$1\geqslant 2\sqrt{2}-2+(\sqrt{2}-1)^2\sin 2\psi$，或$3-2\sqrt{2}\geqslant(\sqrt{2}-1)^2\sin 2\psi$，最后一式显然成立.

53. 设S_1、S_2、S_3、S分别是$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$和$\triangle DEF$的面积，设法证明更强之结论：$\frac{1}{S_1S_2}+\frac{1}{S_2S_3}+\frac{1}{S_3S_1}\geqslant\frac{3}{S^2}$.

54. 不妨设AC、BD交于点O，点P在$\triangle AOD$内，$\angle POD=\theta$，$OP=x$，用x、θ(余弦定理)表示PA^2、PB^2、PC^2和PD^2，然后作等式变形.

习　题　7

1. 设n边形为$A_1A_2\cdots A_n$，$n\geqslant 4$时总有内角$\geqslant 90^\circ$，比如$\angle A_{n-1}A_nA_1\geqslant 90^\circ$，于是由余弦定理知$A_{n-1}A_1^2\geqslant A_{n-1}A_n^2+A_nA_1^2$，也即凸$A_1A_2\cdots A_{n-1}$各边平方和增大(至少不减). 不断进行这个过程，问题归结为：已知A、B、C是单位圆上三点，求证$AB^2+BC^2+CA^2\leqslant 9$，这可用三角函数证明.

2. 对矩形不断翻折，让点P的轨迹展开成一条直线.

3. U只能是$\triangle ABC$的垂心. 此题用坐标法，把点A、B、C看成在单位圆上.

4. 先证明必有两个距离之差的绝对值$\leqslant\frac{1}{m}\cos\frac{\pi}{2(2m+1)}$，再证明存在常数$A>0$，满足$\cos\frac{\pi}{2(2m+1)}<1-\frac{A}{m^2}$.

5. 用R与三角函数($\sin$)及r与三角函数($\tan$)两种方式表示n边形的周

长，再使用三角函数的凸性，即 Jensen 不等式.

6. 设 O 在坐标原点，先证明 $n=2$ 时结论成立，再利用数学归纳法，去掉 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 中几个处于特殊位置的点，再寻找一个 $B_1B_2\cdots B_{2k-2}$ 边形，其中几乎所有顶点都是 $A_1A_2\cdots A_{2k}$ 的顶点，只有最靠近 $\sum\limits_{i=1}^{k}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}$ 的 n 个点被去除，满足 $\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}\right|\leqslant\left|\sum\limits_{i=1}^{k-1}\overrightarrow{B_{2i-1}B_{2i}}\right|\leqslant 2\sin\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k-1}\angle B_{2i-1}OB_{2i}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\angle A_{2i-1}OA_{2i}\right)$.

7. 设外接圆圆心为 O，半径为 R，内切圆半径为 r，则 $\tan^2\angle A_iAA_{i+n}=\frac{1}{\cos^2\angle A_iAA_{i+n}}-1=\frac{4R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sin^2\theta_i$，这里 $\theta_i=\angle AOA_i$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\tan^2\angle A_iAA_{i+n}=\frac{2R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\cos 2\theta_i)=\frac{2R^2r^2n}{(R^2-r^2)^2}$.

8. 方法同本单元例 9.

9. 设一矩形放入另一矩形内，且长为 b 的边与长为 c 的边的夹角为 $\theta(<90^\circ)$，于是条件变成 $\begin{cases}b\cos\theta+a\sin\theta\leqslant c,\\ b\sin\theta+a\cos\theta\leqslant d.\end{cases}$ 然后再求 θ 存在的条件.

10. 先用余弦定理证明一个结果：若 $\triangle ABC$ 每条边均介于 1 与 $\sqrt{3}$ 之间，则其内角 $\geqslant 30^\circ$. 今考虑 n 个点的凸包，设 A_1 为其中一个顶点，则 S 中至多有 6 个点与点 A_1 的距离小于 $\sqrt{3}$，把这些点全部去掉（包含点 A_1），得到一个余子集，重复上述过程，得点 A_2，……，最后的 $T=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 即满足要求. 此处 $k=\left\lceil\frac{n}{7}\right\rceil$（“$\lceil x\rceil$” 表示不少于 x 的最小整数）.

11. 考虑这些圆心组成的点集 A，今找其中任三点 O_i、O_j、O_k，以其为顶点的三角形有这样一个特点：每条高大于 2，于是若设 $\angle O_iO_jO_k=\theta$，则 $O_iO_j\sin\theta>2$，于是 $\frac{1}{O_iO_j}<\frac{\sin\theta}{2}<\frac{\theta}{2}$. 然后把 A 分成凸包和内点，θ 是某一点出发的所有相邻边的夹角，但对于内点还不够，还应该包括其他点关于这个内点对称点之间连接的“虚边”，然后按相邻夹角所对边进行估计.

12. 此题是开放题，下界越大越好（比如 $\frac{5}{2}$），但若下界不大于 2，则不合格.

13. 先证明这个凸集面积要大，一定是过两圆交点的两条“长弦”及它们

之间的两段圆弧围成，然后调节每一条长弦的位置，由于对称性，只需调一条即可．最后求导数．

14．定义一有限点集的直径是点集中任两点间的最大距离，则闭凸形的直径$\geqslant\frac{\text{闭凸形周长}}{\pi}$．