

高等院校自动化专业系列教材

现代控制理论

王 翼 编著



机械工业出版社

本书介绍了现代控制系统的基本理论和控制系统分析与设计的主要方法,内容涉及线性控制系统、最优控制系统和随机控制系统,由浅入深,富有启发性。每章附有习题,主要算法给出了应用 MATLAB 求解的方法,使读者通过本书的学习,既能打下扎实的理论基础,又能掌握应用 MATLAB 对控制系统进行分析与设计的技能。

本书可以作为高等学校自动控制或自动化专业本科生的教材,研究生的教学参考书,经济、管理类专业经济控制论课程的教学参考书,也可以供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/王翼编著. —北京:机械工业出版社,
2005.1

(高等院校自动化专业系列教材)

ISBN 7-111-15326-X

I. 现... II. 王... III. 现代控制理论-高等学校
-教材 IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098334 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑:郭燕春 版式设计:冉晓华 责任校对:王欣
责任印制:李妍

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm $1/16$ ·14.75 印张·362 千字

0 001—5 000 册

定价:21.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

高等院校自动化专业系列教材编审委员会

主 任 袁著祉

副主任 王桂增 席裕庚

委 员 (以姓氏笔画为序)

田作华 李华德 陈大钦 张长水

贾 磊 韩崇昭 薛定宇

出版说明

自动化技术是一门集控制、系统、信号处理、电子和计算机技术于一体的综合技术，广泛用于工业、农业、交通运输、国防、科学研究以及商业、医疗、服务和家庭等各个方面。自动化水平的高低是衡量一个国家或社会现代化水平的重要标志之一，建设一个现代化的国家需要大批从事自动化事业的人才。高等院校的自动化专业是培养国家所需要的专业面广、适应性强，具有明显的跨学科特点的自动化专门人才的摇篮。

为了适应新时期对高等教育人才培养工作的需要，以及科学技术发展的新趋势和新特点，并结合最新颁布实施的高等院校自动化专业教学大纲，我们邀请清华大学、南开大学、上海交通大学、西安交通大学、东北大学、华中科技大学、山东大学、北京科技大学等名校的知名教师、专家和学者，成立了教材编写委员会，共同策划了这套面向高校自动化专业的教材。

本套教材定位于普通高等院校自动化类专业本科层面。按照教育部颁发的《普通高等院校本科专业介绍》中所提出的培养目标和培养要求，适合作为高校相关专业的教材，反映了当前教学与技术发展的主流和趋势。

本套教材的特色：

1. 作者队伍强。本套教材的作者都是全国各院校从事一线教学的知名教师和相关专业领域的学术带头人，具有很高的知名度和权威性，保证了本套教材的水平和质量。
2. 观念新。本套教材适应教学改革的需要和市场经济对人才培养的要求。
3. 内容新。近 20 年，自动化技术发展迅速，与其他学科的联系越来越紧密。这套教材力求反映学科发展的最新内容，以适应 21 世纪自动化人才培养的要求。
4. 体系新。在以前教材的基础上重构和重组，补充新的教学内容，各门课程及内容的组成、顺序、比例更加优化，避免了遗漏和不必要的重复。根据基础课教材的特点，本套教材的理论深度适中，并注意与专业教材的衔接。
5. 教学配套的手段多样化。本套教材大力推进电子讲稿和多媒体课件的建设工作。本着方便教学的原则，一些教材配有习题解答和实验指导书，以及配套学习指导用书。

机械工业出版社

前 言

现代控制理论自 20 世纪 50 年代末产生以来，至今已经历了近半个世纪，在此期间从理论到实践都得到了长足的发展，为人们提供了可以很好地研究动态系统并获得理想性能的方法。由于动态系统的广泛存在，现代控制理论的思想和方法已经应用于工业、农业、国防、航天、交通运输、经济、管理、生物、医学等领域。因此，有人提出，自然科学和社会科学工作者，都应具备一定的现代控制理论知识，这对拓展思路、提高工作水平是大有裨益的。

本书介绍了现代控制理论的基本理论和方法，包括控制系统基础，线性系统理论，最优控制，卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题四部分，共 10 章。线性系统部分详细讲述了定常线性系统的能控性、能观测性和标准分解，然后介绍了反馈控制系统的设计、观测器的设计和鲁棒控制。最优控制部分介绍了连续时间系统的变分法和最大值原理，离散时间系统的变分法和最大值原理及动态规划。考虑到卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题在诸多领域内的广泛应用，在第 10 章对卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题作了简单的介绍。每章后面均有一定数量的习题，以帮助读者掌握所学内容。本书内容涵盖了现代控制理论的基本内容，曾在南开大学自动化系讲过多遍，并经过多次修改。

本书的编写宗旨是：

1. 基本理论讲解清楚，为进一步深入学习和应用打下了一个扎实的基础。

2. 现代控制理论的思想和方法已经广泛应用于多种领域，本书通过实例，介绍了现代控制理论在工程、航天、经济、管理和医学等领域中的应用。

3. MATLAB 软件为控制系统的分析与设计提供了一个强有力的工具，本书涉及的主要算法都给出了相应的 MATLAB 函数和调用格式，以方便读者应用。这可以使读者把学习本书的主要精力放在掌握现代控制理论的思想、方法和对控制系统作进一步的分析和研究上，而不是花很多时间进行矩阵的运算和解微分方程。

为了帮助读者掌握本书所讲的分析和设计方法，本书还提供了一些设计方法，以及应用这些方法解例题的 MATLAB 程序，所有这些程序都是由黄兴博开发的。他的工作给读者学习本书带来很大的方便，在此向他表示深切的谢意。在本书的编写过程中，得到了卢桂章教授、袁著祉教授、辛运韩教授的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

本书最后定稿是在美国完成的，网上丰富的技术资料 and 通过图书馆网络借阅新书的方便，使我收集到了很多很新的资料，为保证本书的先进性创造了条件。

由于本人水平所限，错误和不当之处在所难免，衷心欢迎读者提出批评和建议。

王 翼

目 录

出版说明

前言

第 1 章 控制系统导论	1
1.1 现代控制理论引论	1
1.2 控制系统的状态空间描述	2
1.2.1 控制系统的状态变量和状态方程	2
1.2.2 控制系统的状态流图模型	4
1.2.3 线性控制系统和非线性控制系统的线性化	4
1.3 线性控制系统的动态响应	5
1.3.1 连续时间线性控制系统的动态响应	5
1.3.2 连续时间线性控制系统的离散化	6
1.3.3 离散时间线性控制系统的动态响应	7
1.3.4 化初始条件响应为单位阶跃响应及相应的 MATLAB 程序	8
1.4 定常线性系统的传递函数阵	9
1.4.1 定常线性系统的传递函数阵	9
1.4.2 应用 MATLAB 命令求传递函数阵	11
1.5 控制系统设计的一般步骤	12
1.6 控制系统的实例	12
1.7 习题	16
第 2 章 控制系统的结构性质	18
2.1 动态系统的稳定性	18
2.1.1 稳定性的基本概念	18
2.1.2 定常线性动态系统的稳定性分析	19
2.1.3 非线性系统在均衡点附近的稳定性	21
2.2 定常线性系统的能控性	21
2.2.1 能控性的定义	21
2.2.2 定常线性系统的能控性	22
2.2.3 离散时间定常线性系统的能控性与能达性	24
2.2.4 连续系统离散化对能控性的影响	25
2.2.5 关于能控性定义的说明	25
2.3 定常线性系统的能观测性	26
2.3.1 能观测性的定义	26
2.3.2 定常线性系统能观测性的判据	26
2.3.3 应用 MATLAB 判断能控性与能观测性	28

2.4	能控性与能观测性的对偶性	29
2.5	系统的能控结构形式与能观测结构形式	30
2.5.1	线性系统的坐标变换及其特性	30
2.5.2	能控子空间	32
2.5.3	定常线性系统的能控结构形式——能控部分的分离	33
2.5.4	不能观测子空间	38
2.5.5	定常线性系统的能观测结构形式——能观测部分的分离	39
2.5.6	能控性与能观测性的 PBH 判据	42
2.5.7	求控制系统的能控结构形式与能观测结构形式的 MATLAB 程序	43
2.6	定常线性系统的标准分解	46
2.6.1	卡尔曼标准分解定理	46
2.6.2	系统的零点极点相消问题的讨论	49
2.7	最小实现问题	52
2.7.1	单输入单输出系统的传递函数的实现	52
2.7.2	多输入多输出系统的传递函数阵的实现	55
2.7.3	最小实现	58
2.8	习题	60
第 3 章	反馈控制系统的设计	64
3.1	引言	64
3.2	应用李雅普诺夫第二方法设计反馈控制系统	65
3.2.1	设计方法	65
3.2.2	设计实例	66
3.2.3	对于离散系统的相应结果	67
3.3	极点配置问题	67
3.3.1	应用状态反馈配置极点	67
3.3.2	极点配置算法的改进	74
3.3.3	极点位置的确定	76
3.3.4	应用极点配置设计倒摆控制系统的 MATLAB 程序	77
3.3.5	其他极点配置方法简介	80
3.3.6	装置有噪声时的极点配置问题	81
3.4	镇定问题	82
3.5	应用状态反馈的解耦控制	82
3.5.1	应用状态反馈解耦	83
3.5.2	能用状态反馈实现解耦的充分必要条件	83
3.6	习题	85
第 4 章	观测器和动态反馈	87
4.1	观测器的结构	87
4.2	观测器存在的基本定理	88
4.3	观测器的设计方法	89
4.3.1	全状态观测器	89

4.3.2	降维观测器	91
4.3.3	应用 MATLAB 设计观测器的程序	93
4.4	带观测器的状态反馈控制器	95
4.4.1	极点分离定理	95
4.4.2	带有观测器的状态反馈控制器的传递函数阵	96
4.4.3	观测器极点位置的确定	97
4.5	动态反馈与动态补偿器的设计	97
4.6	习题	99
第 5 章	鲁棒控制	101
5.1	鲁棒控制器	101
5.2	鲁棒控制器存在的条件	101
5.3	鲁棒控制器的一般结构	102
5.4	鲁棒控制器的设计	103
5.4.1	伺服补偿器的设计	103
5.4.2	互补控制器的设计	103
5.5	习题	105
第 6 章	最优控制	106
6.1	最优控制问题的提法	106
6.1.1	最优控制问题的一般提法	106
6.1.2	实现最优控制的必备条件	107
6.1.3	几种典型的最优控制问题	107
6.2	解无约束最优控制问题的变分法	108
6.2.1	最简单的变分问题	109
6.2.2	欧拉-拉格朗日方程	109
6.2.3	可变端点问题	112
6.2.4	推广到一般泛函	115
6.2.5	推广到多变量的情况	117
6.2.6	无约束最优控制问题的解	118
6.3	最大值原理及其应用	126
6.3.1	最大值原理	126
6.3.2	最大值原理的其他形式	130
6.4	应用举例	131
6.5	习题	136
第 7 章	线性二次型最优控制问题	140
7.1	线性二次型问题的重要性	140
7.1.1	什么是线性二次型问题	140
7.1.2	研究线性二次型问题的重要性	140
7.2	线性二次型问题的解	142
7.3	非时变状态调节器	146

7.3.1	非时变状态调节器的设计	146
7.3.2	闭环系统的稳定性	149
7.3.3	代数里卡蒂方程的解法	150
7.3.4	设计非时变状态调节器的 MATLAB 程序	153
7.3.5	非时变状态调节器的频率特性	154
7.4	具有指定稳定度的最优调节器	157
7.5	跟踪问题	159
7.6	带有观测器的最优调节器	160
7.7	习题	162
第 8 章	离散时间系统的最优控制	164
8.1	解离散时间无约束最优控制问题的变分法	164
8.1.1	最简单的离散型变分问题	164
8.1.2	自由端点问题	165
8.1.3	推广到一般形式的变分问题	166
8.1.4	推广到多变量问题	167
8.1.5	解离散无约束最优控制问题的变分法	167
8.2	离散的最大值原理	170
8.3	离散的线性二次型问题	173
8.3.1	离散的线性二次型问题的解	173
8.3.2	解离散的线性二次型问题的 MATLAB 程序	177
8.4	习题	178
第 9 章	动态规划	179
9.1	动态规划的基本思想	179
9.1.1	多阶决策问题	179
9.1.2	最优性原理	181
9.2	动态规划的基本方程	181
9.2.1	动态规划基本方程的推导	181
9.2.2	应用动态规划的基本方程解最优控制问题	183
9.2.3	应用动态规划解最优经济增长问题	186
9.3	应用动态规划解一般线性二次型问题	188
9.3.1	一般的离散时间线性二次型问题	188
9.3.2	一维问题的解	188
9.3.3	推广到多变量的情况	193
9.3.4	应用 MATLAB 解离散的跟踪问题举例	193
9.4	连续时间系统的动态规划法	196
9.5	习题	198
第 10 章	卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题	200
10.1	线性二次型高斯问题的提法	200
10.2	卡尔曼滤波——最优线性递推滤波	201

10.2.1 卡尔曼滤波	201
10.2.2 稳态卡尔曼滤波器	204
10.3 线性二次高斯问题的解.....	206
10.4 习题	210
附录	211
附录 A 二次型的期望值的计算	211
附录 B MATLAB 简介及本书使用的 MATLAB 程序	211
参考文献.....	223

第 1 章 控制系统导论

1.1 现代控制理论引论

控制理论是系统理论的一个分支，随着现代科学技术的发展，对控制的精度要求也越来越高，人们遇到的系统越来越复杂，各个领域的控制系统的复杂程度在不断提高。控制任务越来越复杂的主要原因是：需要处理多输入、多输出的问题、时变的问题和非线性的问题。研究这种控制系统的方法，通常是基于状态空间的方法。基于状态空间法的控制理论称为现代控制理论。而始于 20 世纪 30 年代，基于传递函数和频域技术，主要处理单输入、单输出的定常线性系统的问题的控制理论，则称之为经典控制理论。现代控制理论是在 20 世纪 50 年代末、60 年代初发展起来的。现代控制理论采用状态空间描述，不仅可以刻画系统的输入输出关系，而且还揭示了系统内部的特性，如能控性、能观测性等。经典控制理论，通常只反映了系统的输入输出关系，因而有它的局限性。在研究多变量系统时，虽然也采用描述输入输出关系的传递函数阵，但它只能反映系统的输入输出之间的外部关系，而不能确定系统的内部结构。具有完全相同的传递函数阵的系统可以有完全不同的内部结构，这说明传递函数阵没有完全揭示系统内部的动态特性。

除了上面讨论的处理时变线性系统和非线性系统的问题以外，状态空间法的另一个重要特点是，它提供了对控制系统进行分析与设计的系统化的方法，可以方便地使用向量-矩阵等有力的数学工具，并可使用计算机处理问题，对设计者的经验依赖较少。因此，现代控制理论不仅广泛应用于解决工程上提出的越来越复杂的自动控制系统的分析与设计问题，还广泛应用于经济、生态、医学、交通等领域的一系列复杂问题的分析与控制（或决策），成为研究动态系统的重要工具。

对于某些很复杂的系统，可能很难建立它的状态方程，但有时可借助于系统的输入输出信号的测量，采用系统辨识的方法得到系统的传递函数，从而可以用经典的方法设计控制系统。也可以通过系统辨识得到近似的状态空间模型，用状态空间的方法进行分析与设计。

现代控制理论和经典控制理论的划分是历史上形成的，已沿用多年。现今基于状态空间的方法和基于传递函数的方法都有很大的发展，两者在发展的过程中互相补充、互相促进。本书仅限于向读者介绍基于状态空间法的主要成果。

在 50 年代末 60 年代初，科学家对现代控制理论的贡献主要有以下三个方面：

1) 由卡尔曼 (R.E. Kalman) 提出的线性控制系统的状态空间方法及能控性和能观测性的概念，奠定了现代线性控制系统理论的基础，并提出了卡尔曼滤波，它在随机系统的分析与控制中得到了广泛的应用。

2) 由庞特里亚金等人提出的最大值原理，深入地研究了最优控制问题。

3) 由贝尔曼 (R. Bellman) 提出的动态规划，它广泛应用于各类最优控制问题。

从 20 世纪 50 年代末到现在已经过去了近半个世纪，在此期间现代控制理论得到了很大

的发展，并广泛应用于各种领域。尽管如此，现代控制理论的最重要的基础仍然是上面提到的三个方面。本书主要讲解这三个方面的基本内容，及其在多个领域中的应用。

控制理论在以上基础上的进一步发展是多种多样的，特别值得提出的是以下三个方面。

1) 鲁棒控制。最优控制和卡尔曼滤波需要精确的数学模型和外部干扰的统计特征。一些实际系统有时不具备这些条件，鲁棒控制就是研究当模型有误差和有未知外部干扰时的控制问题。这方面的研究在实际应用中很重要。

2) 复杂系统的控制。生物和医学系统的控制具有内在的复杂性，它们常常由若干互相关联的子系统构成。当通过对个子系统的模型的分析 and 各个子系统之间的关联关系不能很好地分析整个系统的行为时，将面临复杂系统的控制问题。

3) 人-机系统。很多控制系统中存在人和机器的相互作用，当设计这样的系统时必须用一致的术语描述人和机器的行为，再对系统的控制进行研究。

一般地说，控制是影响动态系统的行为以达到预期目标的过程，或者说，控制是为实现一定目的进行的调节、操纵、管理指挥等活动，而控制系统则是能调节一个过程或装置完成一个控制任务的有组织的系统，它以某种要求的方式对能量流、信息流、货币流或其它量进行调节或控制。控制理论则是研究控制系统的分析与设计的有关问题。因此，控制系统广泛存在于各类动态系统之中，控制理论有极其广泛的应用。宋健教授在《自动化》杂志的发刊词中写了这样一段话来描述控制理论应用的广泛性：“凡是能用定量方法描述的自然现象和社会现象，只要可能由人进行控制的，都可以用控制论的方法进行研究，并能得到人们预想不到的结果。”由于上述原因，现代控制理论不仅是自动化学科的基础，也是很多其他学科的基础。

本章以下的内容介绍了控制系统的状态和状态方程的基本知识，并讨论定常线性系统的状态方程与传递函数阵的关系。书中给出了常见于微分方程教材中的定常线性系统的动态响应，以及单位阶跃响应的 MATLAB 程序。最后介绍了几个最常见的控制系统的实例，包括宇航方面的、工程方面的、医学方面的、管理方面的和经济方面的实例。读者通过这些实例可以看到现代控制理论应用的广泛性。

1.2 控制系统的状态空间描述

1.2.1 控制系统的状态变量和状态方程

现代控制理论在研究实际控制系统时，首先要建立它的数学模型——状态方程和输出方程。下面先介绍状态的概念。

动态系统的状态是最小的一组变量，只要知道了这组变量在 $t = t_0$ 时刻的值和 $t \geq t_0$ 时刻的输入，就能完全确定系统在任何未来时刻 $t \geq t_0$ 的行为。这最小的一组变量称为该动态系统的状态。换句话说，系统的状态是为与 t_0 时刻以后的输入一起决定系统在 $t \geq t_0$ 时刻的未来行为需要知道的 t_0 时刻的最少的信息。如果系统的状态包含 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 则称该动态系统是 n 维系统。这 n 个变量写成列向量 $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ，称为该动态系统的状态向量。由 n 维状态向量 x 构成的向量空间称为该系统的状态空间。

在动态控制系统中，除状态变量以外还包含另外两种变量：输入变量和输出变量。动态控制系统所遵循的内在规律的数学描述是这个系统的数学模型，它常常是描述状态变量、输入变量和输出变量之间的内在关系的数学方程式。连续系统的数学模型常常是一个或一组一阶微分方程，它们称为动态控制系统的状态方程。

在动态控制系统中输入变量包含能对系统起调节控制作用的控制变量和外界干扰变量。

【例 1-1】 RCL 网络系统 如图 1-1 所示的 RCL 网络，图中 $v_c(t)$ 是电容两端的电压， $i_L(t)$ 是通过电感的电流， $y(t)$ 是电阻两端的电压， $u(t)$ 是加在网络上的电压。为建立这个网络的数学模型，依据电学中的基尔霍夫 (G.R.Kirchhoff) 定律，先写出下列方程：

$$i_c = C\dot{v}_c = u(t) - i_L$$

$$L\dot{i}_L = v_c - Ri_L$$

令 $x_1 = v_c$ ， $x_2 = i_L$ ，则上面两个方程化为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

系统的输出是电阻两端的电压

$$y(t) = Rx_2 \quad (1-2)$$

利用微分方程组 (1-1) 和变量 $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 的初始值 $x_1(t_0) = x_{10}$ ， $x_2(t_0) = x_{20}$ ，可以惟一确定系统未来的行为 $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 和系统的输出 $y(t)$ 。也就是说，如果已知 v_c 和 i_L 在 t_0 时刻的值，又知道 $u(t)$ ， $t \geq t_0$ ，那

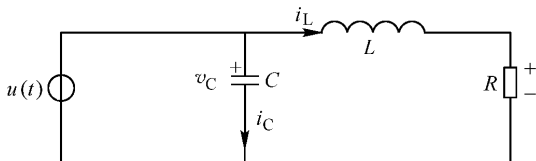


图 1-1 RCL 网络系统

么，对任意 $t \geq t_0$ 时刻， $v_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 都被惟一确定了，因此 $x_1 = v_c$ ， $x_2 = i_L$ 是 RCL 网络系统的两个状态变量， $x = [x_1 \ x_2]^T$ 是该系统的状态向量，微分方程 (组) (1-1) 是该网络系统的状态方程 (组)，电阻两端的电压 $y(t)$ ，是可以测量的，称为该系统的输出变量，方程 (1-2) 为该网络系统的输出方程。电压 $u(t)$ 可以对状态变量 $x_1 = v_c$ ， $x_2 = i_L$ 起到控制作用，为该网络系统的控制变量。

(1-1) 和 (1-2) 写成向量-矩阵的形式为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1-3)$$

$$\mathbf{y} = [0 \ R] \mathbf{x} \quad (1-4)$$

一般电路网络的状态变量的个数是储能元件的个数 (如电容、电感等)，电路系统的状态变量常选为电容两端的电压和通过电感的电流。本例也可以选取电容两端的电压和电感两端的电压作为该系统的两个状态变量。

【例 1-2】 升降机系统 升降机系统是生产和生活中常见的一类系统，工业生产中的提升机和高层建筑的电梯都是这类系统。图 1-2 是升降机系统的示意图。设升降机的质量为 m ，质心到地面的距离为 $x(t)$ ，升降机受牵引力 u 和重力 mg 的作用。依据牛顿第二定律，描述该系统的数学模型为

$$m\ddot{x} = u - mg$$

这样，一个动力学系统的状态完全由升降机的位置 x 和速度 \dot{x} 决定。令 $x_1 = x(t)$, $x_2 = \dot{x}$, 则上述二阶微分方程可转化为如下的包含两个一阶微分方程的方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}u - g \end{cases} \quad (1-5)$$

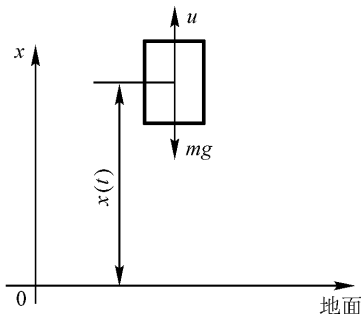


图 1-2 升降机系统

升降机的位置 $x_1 = x(t)$ 和速度 $x_2 = \dot{x}(t)$ 是该系统的状态变量，式 (1-5) 是该系统的状态方程。系统的输出方程为

$$y = x_1 \quad (1-6)$$

状态方程 (1-5) 和输出方程 (1-6) 构成了升降机系统的一种状态空间描述。

1.2.2 控制系统的状态流图模型

动态控制系统的一种常见的状态空间描述是状态流图。对系统建立状态流图是很有益的，利用它可以将状态变量与传递函数联系起来。如果我们已经知道了控制系统的状态方程，就可以画出该系统的状态流图。下面通过例 1-1 中的 RCL 网络系统来讲解如何由状态方程 (1-1) 和输出方程 (1-2) 画出描述该系统的状态流图。

设 $U(s)$ 和 $Y(s)$ 分别为 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的拉普拉斯变换，由状态方程可以直接画出状态流图，见图 1-3。

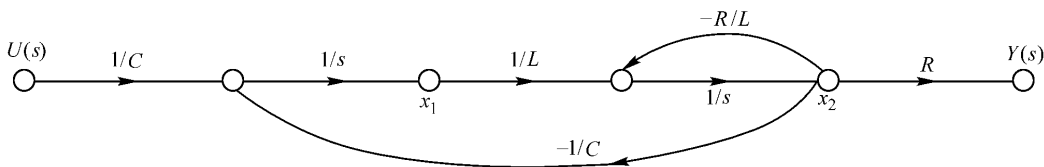


图 1-3 RCL 电路的状态流图

在图 1-3 中， $1/s$ 表示积分算子，出现在它的箭头后面的变量是出现在它的箭头前面的变量的时间导数。

依此方法可以画出对应于系统的状态方程的状态流图。如果通过简便的方法可以得到系统的传递函数，可以应用第 2 章中讲的方法先由系统的传递函数得到系统的一个状态空间表现，再由状态方程画出对应于系统的状态流图。

1.2.3 线性控制系统和非线性控制系统的线性化

用微分方程描述的一般形式为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x_0$$

$$y = g(x, u, t)$$

式中， x 是 n 维状态向量； u 是 m 维控制向量； y 是 r 维输出向量。当 f 和 g 都是 x 和 u 的线性函数时，称为线性控制系统，否则称为非线性控制系统。线性控制系统的一般形式是

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1-7)$$

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (1-8)$$

式中， $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ 分别是 $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ 和 $r \times m$ 矩阵。线性控制系统具有很多优点，比较容易处理，因此，可以在一定精度范围内用线性模型近似时，

尽量采用近似的线性模型。

实际上，任何控制系统都具有一定的非线性成分，只是有不少系统的非线性影响不大，在一定的条件下可以近似地看作线性系统。一些非线性的影响较大，不能近似看作线性的系统，在一定的条件下也可以线性化。例如技术上可以将一个非线性系统在它的均衡点附近线性化。为了叙述简单，仅以二维非线性动态系统为例，并略去控制变量。设非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

在点 (x^0, y^0) 处， $f(x^0, y^0) = 0, g(x^0, y^0) = 0$ 成立，则称 (x^0, y^0) 是该系统的均衡状态。设函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，则在均衡状态 (x^0, y^0) 附近线性化的方法是：在均衡状态 (x^0, y^0) 附近做 Taylor 展开，取到一阶项，得到近似式

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0) \\ &= f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0) \\ g(x, y) &= g(x^0, y^0) + g_x(x^0, y^0)(x - x^0) + g_y(x^0, y^0)(y - y^0) \\ &= g_x(x^0, y^0)(x - x^0) + g_y(x^0, y^0)(y - y^0)\end{aligned}$$

由此得到近似的线性微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0) \\ \dot{y} &= g_x(x^0, y^0)(x - x^0) + g_y(x^0, y^0)(y - y^0)\end{aligned}$$

在研究这个二维非线性动态系统在它的均衡状态附近的行为时，便可以用其近似的线性微分方程组代替，这样可以使问题的难度降低很多，研究的结果在工程上也容易应用。由于这一原因，线性系统的研究在控制理论及应用中占有非常重要的地位。下一节，将给出关于线性系统的动态响应的一些结果。

1.3 线性控制系统的动态响应

1.3.1 连续时间线性控制系统的动态响应

线性控制系统的动态响应在线性控制系统的分析与设计中非常重要，本节涉及的很多内容可以在一般微分方程的著作中找到，读者可参看文献 [1] [2]，这些内容本节不再推证。

由式 (1-7)、(1-8) 描述的连续时间线性控制系统，如果初始状态 $x(t_0)$ 已给定，则对应输入 $u(t)$ 的动态响应 $y(t)$ ，可将微分方程式 (1-7) 的解代入式 (1-8) 算出。

初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1-9)$$

的解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (1-10)$$

式中 $\Phi(t, t_0)$ 是式 (1-9) 的状态转移矩阵，它是下列矩阵微分方程组的初值问题的解：

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (1-11)$$

状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 具有如下性质：

(1) 可分离性 设 $\Phi(t)$ 是式 (1-9) 对应的齐次方程

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1-12)$$

的一个基本解，即 $\Phi(t)$ 是以式 (1-12) 的 n 个线性无关解向量构成的矩阵，则

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \quad (1-13)$$

(2) 唯一性 式 (1-9) 的状态转移矩阵是唯一的。

(3) 传递性 对任意的 t_1, t_2, t_3 成立

$$\Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3) \quad (1-14)$$

(4) 可逆性 $\Phi(t, t_0)$ 可逆，并有

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (1-15)$$

由解式 (1-10)，得到线性控制系统 (1-7)、(1-8) 的输出响应为：

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \quad (1-16)$$

在线性控制系统 (1-7)、(1-8) 中，当输入为零并且 $D=0$ 时，解式 (1-10) 化为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 \quad (1-17)$$

那么 $y = C(t)x(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0$

$$(1-18)$$

称为系统的初始条件响应或零输入响应。

当线性控制系统 (1-7)、(1-8) 中的矩阵 A, B, C, D 均为常数矩阵时，称为定常线性控制系统或非时变线性控制系统，其一般形式为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1-19)$$

$$y = Cx + Du \quad (1-20)$$

由定常线性系统 (1-19)、(1-20)，可得

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1-21)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (1-22)$$

式中 e^{At} 是矩阵指数。

1.3.2 连续时间线性控制系统的离散化

当应用数字计算机对线性控制系统进行控制时，控制 $u(t)$ 是由计算机产生的，经数模转换后送到实际系统实施控制。计算机控制系统的框图见图 1-4。

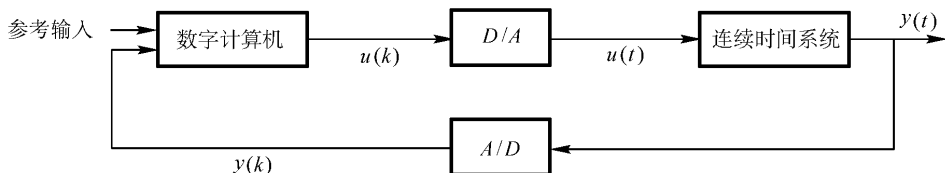


图 1-4 计算机控制系统

设计计算机控制系统的采样周期为 T ，那么在第 k 个时间周期内控制 $u(t)$ 取常值，即在时间区间 $[kt, (k+1)T]$ 上，控制 $u(t) = u(kT)$ 。简记为 $u(kT) = u(k)$ ， $x(kT) = x(k)$ ，对 $t = t_{k+1} = (k+1)T$ 和 $t_0 = t_k = kT$ 应用解式 (1-10) 可得

第 2 章 控制系统的结构性质

控制系统的稳定性、能控性与能观测性是控制系统的结构本身固有的，称为控制系统的结构性质。稳定性、能控性与能观测性是控制系统三个非常重要的概念，它们在现代控制理论的很多论题的研究中起着重要的作用。稳定性是设计控制系统的基本要求，能控性与能观测性描述了控制系统的输入与状态的关系和输出与状态的关系。对于由矩阵组 (A, B, C, D) 代表的定常线性系统，如式 (1-19)、式 (1-20)，矩阵对 (C, A) 描述了系统的输入为 0 时，系统的输出与状态的关系，矩阵对 (A, B) 描述了系统的输入与状态的关系。对于定常线性系统，简单地说，系统的稳定性研究当系统偏离均衡状态时，是否能随着时间的演化返回均衡状态的问题；系统的能控性研究是否存在一个控制 u ，将任意初始状态在有限时间内转移到所希望的状态的问题，即状态能否被输入控制的问题。系统的能观测性是研究是否可由一段有限时间的输出决定系统的初始状态的问题，即初始状态能否被输出观测的问题。

2.1 动态系统的稳定性

2.1.1 稳定性的基本概念

控制系统的稳定性分析是很重要的。由微分方程描述的系统的稳定性在微分方程的教材中有详细的论述，本节介绍本书将用到的基本概念和结果。这里讨论的稳定性是李雅普诺夫意义下的稳定性，下面给出它的定义。

设 \bar{x} 是动态系统

$$\dot{x} = f(x)$$

的均衡状态，即 $f(\bar{x}) = 0$ 。如果从 \bar{x} 临近的任一点 x_0 出发的轨线总保持在 \bar{x} 的临近，则称均衡状态是稳定的，否则称均衡状态是不稳定的。具体地说，一点 x_0 从 \bar{x} 临近出发是指 x_0 位于以 \bar{x} 为中心、半径为 δ 的小球 $S(\delta)$ 内，轨线总保持在 \bar{x} 的临近是指轨线总保持在 \bar{x} 为中心半径为 ϵ 的小球 $S(\epsilon)$ 内，这里 $\epsilon > \delta$ ，如图 2-1 所示。

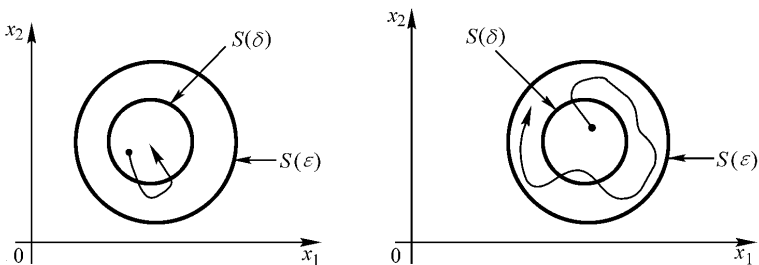


图 2-1 二维情况下的稳定性和渐近稳定性

注意这里没有要求系统的状态趋向均衡状态 \bar{x} 。如果均衡状态是稳定的，并且当 $t \rightarrow \infty$

时 $x(t) \rightarrow \bar{x}$ ，则称均衡状态 \bar{x} 是渐近稳定的。由于本章主要研究定常线性系统，下面对定常线性系统进行较详细的讨论。

2.1.2 定常线性动态系统的稳定性分析

考虑定常线性系统

$$\dot{x} = Ax \tag{2-1}$$

以 $\varphi(t; x_0, 0)$ 表示初始时刻为 0，初始状态为 x_0 的状态轨线，如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; x_0, 0)\| = \infty$$

则称初始状态 x_0 是不稳定的。当系统 (2-1) 没有不稳定的初始状态时，称该系统是稳定的，特别是当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; x_0, 0)\| = 0$$

对任意 $x_0 \in R^n$ 成立时，称系统 (2-1) 是渐近稳定的。由于对实际系统重要的是渐近稳定性，因此系统渐近稳定常简称系统稳定，或简称 A 为稳定矩阵。

关于定常线性系统有如下著名的定理。

定理 2-1 在定常线性系统 (2-1) 中，如果 A 的特征值都有负实部，则该系统是渐近稳定的；如果 A 有实部为正的实特征值，则该系统是不稳定的；如果 A 的所有特征值都有非正实部，而且实部为 0 的特征值都不是 A 的最小多项式的重根，则该系统是稳定的，但不是渐近稳定的；如果 A 有实部为 0 的特征值，并且它是 A 的最小多项式的 k 重根 ($k > 1$)，则该系统是不稳定的 (见文献 [2])。

对非线性系统的稳定性，可用李雅普诺夫方法处理。李雅普诺夫方法需引进李雅普诺夫函数。设 $x(t)$ 是系统的轨线，如果存在对 x 有连续一阶偏导数的函数 $V(x)$ 满足：

- (1) $V(\bar{x}) = 0$
- (2) 对所有 $x \neq \bar{x}$, $V(x) > 0$
- (3) 沿轨线 $\dot{V} \leq 0$

则称 $V(x)$ 是该系统的一个李雅普诺夫函数。

应用李雅普诺夫函数分析系统稳定性的方法称为李雅普诺夫第二方法。该方法可以直接进行稳定性分析，不要求出微分方程的解，因此又称为直接方法。这个方法适用于一般系统，本节仅给出以下几个定理，其证明可在微分方程的教材中找到。

定理 2-2 设 $x = 0$ 是系统的均衡状态，如果对该系统存在李雅普诺夫函数，则均衡状态 $x = 0$ 是稳定的。

定理 2-3 设 $x = 0$ 是系统的均衡状态，如果对该系统存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ ，并且沿轨线 $\dot{V} < 0$ ，则系统的均衡状态 $x = 0$ 是渐近稳定的。

定理 2-4 设 $x = 0$ 是系统的均衡状态，如果存在有连续一阶导数的函数 $V(x)$ ， $V(0) = 0$ ，当 $x \neq 0$ 时， $V(x) > 0$ ， $\dot{V}(x) \leq 0$ ，并且沿从原点以外出发的解 $\dot{V}(x)$ 不恒等于 0，则系统的均衡状态 $x = 0$ 是渐近稳定的。

定理 2-5 设 $x = 0$ 是系统的均衡状态，如果存在有连续一阶导数的函数 $V(x)$ ， $V(0) = 0$ ，并且对 $x = 0$ 的任一邻域都存在 $x^* \neq 0$ 使 $V(x^*) < 0$ ，沿非零轨线 $\dot{V} \leq 0$ ，则系统的均衡状态 $x = 0$ 不是渐近稳定的。如果沿非零轨线 $\dot{V} < 0$ ，那么均衡状态 $x = 0$ 是不稳定的。

李雅普诺夫第二方法也可以用于线性系统 (2-1)，这时可得到如下定理。

定理 2-6 定常线性系统(2-1)渐近稳定的充分必要条件是对任一已给的对称正定矩阵 Q 矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (2-2)$$

有惟一解,并且解 P 也是正定的。方程(2-2)称为李雅普诺夫方程。

证 充分性 设对任一对称正定矩阵 Q 式(2-2)存在惟一正定解 P 。令 $V(x) = x^T P x$, 显然 $V(x)$ 是正定函数,并且

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + PA) x = x^T (-Q) x < 0$$

由定理 2-3 可知,系统(2-1)的平衡状态 $x=0$ 是渐近稳定的,即系统(2-1)渐近稳定。

必要性 设系统(2-1)渐近稳定,则 A 的特征值均有负实部,对 A 的任意两个特征值 $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j \neq 0$ 。这恰是矩阵方程(2-2)有惟一解的充分必要条件(见[10]定理 5.2.6)。又由于

$$A^T P^T + P^T A = (PA)^T + (A^T P)^T = (A^T P + PA)^T = -Q^T = -Q$$

因此 P^T 也是式(2-2)的解。由解的惟一性知 $P^T = P$, 即式(2-2)有惟一对称矩阵解 P 。下面证明对任意 $Q > 0, P$ 必为正定矩阵。令 $V(x) = x^T P x$, 则有

$$\dot{V} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x < 0$$

先证明 P 是半正定的。如果 P 不是半正定的,即 $V(x)$ 不是半正定的,则存在 $x^* \neq 0$, 使得 $V(x^*) = x^{*T} P x^* < 0$, 由定理 2-5 知,系统(2-1)不是渐近稳定的,与假设矛盾,因此 P 必是半正定的。再进一步证明 P 是正定矩阵,如果 P 不是正定的,即 $V(x)$ 不是正定的,因此在 $x=0$ 的任意邻域内存在 $x^* \neq 0$, 使得 $V(x^*) = x^{*T} P x^* = 0$ 。以 x^* 为初始状态的系统(2-1)的轨线设为 $x(t)$, 那么存在 t' , 使对 $0 \leq t \leq t', x(t) \neq 0$, 因此有

$$\dot{V} = -x^T Q x < 0$$

于是 $V(x) < V(x^*) = 0$, 这与 $V(x)$ 半正定矛盾,这就证明了 P 为正定矩阵。至此,我们证明了李雅普诺夫方程(2-2)有惟一正定解,定理证完。

有时不仅要求系统稳定,还要求 A 的特征值的实部都小于 $-\sigma$ (σ 为正数)。应用定理 2-6,可直接推出如下定理:

定理 2-7 定常线性系统(2-1)的极点的实部都小于 $-\sigma$ (σ 为正数)的充分必要条件是对于某个正定矩阵 Q 矩阵方程

$$A^T P + PA + 2\Delta\sigma P = -Q \quad (2-3)$$

存在惟一正定解。

矩阵 A 的特征值的实部都小于 $-\sigma$ 等价于矩阵 $A + \sigma I$ 的特征值都有负实部,因此定理 2-7 是定理 2-6 的直接结果。

解李雅普诺夫方程(2-2)的 MATLAB 函数是 `lyap`, 其调用格式为

$$P = \text{lyap}(A, Q)$$

对于离散时间定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k)$$

定理 2-1 的叙述改变为:

定理 2-1' 离散定常线性系统中,如果 A 的所有特征值的模都小于 1, 则该系统是渐近稳定的。如果 A 有模大于 1 的特征值, 则该系统是不稳定的, 如果 A 的所有特征值的模都小于等于 1, 并且模为 1 的特征值是 A 的最小多项式的单根, 则系统稳定, 但不是渐近稳定的, 如果有模为 1 的特征值是 A 的最小多项式的重根, 则系统是不稳定的。

对离散系统也可以定义李雅普诺夫函数,只是 $\dot{V} < 0$ 的条件需代之以

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0$$

这时定理 2-6 的叙述改变为:

定理 2-6 离散时间定常线性系统渐近稳定的充分必要条件是对任一已给的正定矩阵 Q , 矩阵方程

$$A^T P A - P = -Q \quad (2-2)$$

存在惟一正定解。

式(2-2)称为离散时间定常线性系统的李雅普诺夫方程。

解李雅普诺夫方程(2-2)的 MATLAB 函数是 `dlyap`, 其调用格式为

$$P = \text{dlyap}(A, Q)$$

2.1.3 非线性系统在均衡点附近的稳定性

在第一章中曾讲过非线性系统在均衡状态附近可以线性化, 如果线性化以后的系统是渐近稳定的, 则有如下定理。

定理 2-8 假设系统的数学模型是非线性微分方程

$$\dot{x} = f(x)$$

如果函数 $f(x)$ 连续可微, 那么在某均衡状态 \bar{x} 的邻近可以做 Taylor 展开, 得到线性化的微分方程

$$\dot{x} = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

如果该线性系统是渐近稳定的, 则原非线性系统的均衡状态是渐近稳定的。

这个定理的证明可以在一般的微分方程教材中找到。

2.2 定常线性系统的能控性

2.2.1 能控性的定义

在给出能控性的定义之前, 先用一个实例说明有的控制系统实际上是不能控制的。

【例 2-1】 如图 2-2 所示电路的数学模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

式中 $x = [x_1 \quad x_2]^T$, x_1 , x_2 是图中两个电容器两端的电压, $x(0) = x_0$ 已给。下面分析是否存在 t_1 和 $u(t)$, 使得在 $u(t)$ 的作用下, 将 $x(0) = x_0$ 控制到原点, 即

$$x(t_1) = e^{A t_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = 0 \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

上式等价于

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

可计算

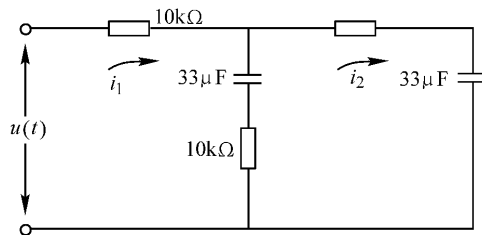


图 2-2 例 2-1 的电路系统

$$e^{-At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} & e^t - e^{3t} \\ e^t - e^{3t} & e^t + e^{3t} \end{bmatrix}$$

代入上式得到

$$x_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} e^\tau + e^{3\tau} & e^\tau - e^{3\tau} \\ e^\tau - e^{3\tau} & e^\tau + e^{3\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^{t_1} e^\tau u(\tau) d\tau$$

这表明只当 x_0 位于 x_1, x_2 平面的直线 $x_1 = x_2$ 上时,才可能存在 $u(t)$ 将 $x_0 = [x_{10} \quad x_{20}]^T$ 控制到原点。换句话说 x_1, x_2 平面的直线 $x_1 = x_2$ 以外的点不能控制到原点。这涉及能控性问题,下面给出能控性的定义。

定义 2-1 设 x_0 是控制系统在 t_0 时刻的状态,如果存在一个有限时刻 $t_1 > t_0$ 和 $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$),使在 $u(t)$ 的作用下将系统的状态 x_0 在 t_1 时刻转移到原点,则称状态 x_0 是能控的(或可控的)。

对定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-4)$$

如果它的任一状态都是能控的,则称该系统是完全能控的,简称 (A, B) 能控。

2.2.2 定常线性系统的能控性

研究能控性的一个重要问题是探求能控性的判据。下面的定理给出了几种等价的判据,同时也进一步揭示了能控系统的某些特征。在给出关于能控性的定理以前,先证明一个有用的引理。

引理 2-1 对定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

完全能控的充分必要条件是对任意 x_0 存在 t_1 和 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$),使得

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2-5)$$

证明 假设 (A, B) 能控,由定义,对任意初始状态 x_0 ,存在 $t_1 > 0$ 和 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$),使得

$$0 = x(t_1) = e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{-A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

即
$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

反之,由(2-5)也可以证明 (A, B) 能控,请读者自己完成。

定理 2-9 n 维定常线性系统(2-4)完全能控的充分必要条件是满足下列互相等价的任何一个条件:

(1) 能控性矩阵

$$U = [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad A^2B \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

秩为 n 。

(2) $e^{-At}B$ 的所有行在 $[0, \infty)$ 上线性无关。

(3) 对任 $t_1 > t_0$, 能控性克莱姆矩阵

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau$$

非奇异。

证明^[4 I25]

由(A, B)能控导出条件(1) 假设(A, B)能控,由引理 2-1,对任意初始状态 x_0 ,存在 $t_1 > 0$ 和 $u(t)(0 \leq t \leq t_1)$,使得

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

由于 e^{At} 可以表现为有限形式^[2 I4]

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (2-6)$$

式(2-5)化为

$$x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} (-1)^{k+1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \tilde{u}_k = [B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B] \tilde{u}$$

即 $[B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B] \tilde{u} = x_0 \quad (2-7)$

式中 $\tilde{u}_k = (-1)^{k+1} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad k = 0, 1, \dots, n-1$
 $\tilde{u} = [\tilde{u}_0^T \tilde{u}_1^T \dots \tilde{u}_{n-1}^T]^T$

由于式(2-7)作为一个线性代数方程组对任意 x_0 有解,因此

$$[B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B]$$

秩为 n 。

由条件(1)导出条件(2) 反设(1)成立(2)不成立, $e^{-At}B$ 的行在 $[0, \infty)$ 上线性相关,则存在 $t_1 > t_0$ 及非零常矢量 α ,使得在 $[t_0, t_1]$ 上成立

$$\alpha^T e^{-At} B \equiv 0$$

对上式逐次求导数得到

$$\alpha^T e^{-At} AB \equiv 0$$

$$\alpha^T e^{-At} A^2 B \equiv 0$$

...

$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B \equiv 0$$

于是有 $\alpha^T \{e^{-At} [B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B]\} \equiv 0$

上式中花括号内的矩阵将非零矢量化为 0,因此

$$\text{rank}\{e^{-At} [B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B]\} < n$$

由于 e^{-At} 可逆,因此由上式得到

$$\text{rank}[B \dots AB \dots \dots \dots A^{n-1} B] < n$$

与(1)矛盾。

由条件(2)导出条件(3) 反设(2)成立(3)不成立,存在 $t_1 > t_0$ 使 $|W(t_0, t_1)| = 0$,因此存在非零矢量 α ,使得 $W(t_0, t_1)\alpha = 0$,因而 $\alpha^T W(t_0, t_1)\alpha = 0$,即

$$\alpha^T W(t_0, t_1)\alpha = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha^T e^{-A\tau} B)(\alpha^T e^{-A\tau} B)^T d\tau = 0$$

由此可得

$$\alpha^T e^{-A\tau} B \equiv 0 \quad t_0 \leq \tau \leq t_1$$

这表明 $e^{-At}B$ 的行线性相关,与(2)矛盾。

由条件(3)推出(A, B)能控 设(3)成立,对任 $t_1 > t_0$, $W(t_0, t_1)$ 非奇异,即 $W(t_0, t_1)$ 可

逆,对任意 x_0 控制矢量

$$u(t) = -B^T e^{-A^T \tau} [W^{-1}(t_0, t_1) e^{-A t_0} x_0], t_0 \leq t \leq t_1$$

将 $x(t_0) = x_0$ 在 t_1 时刻转移到原点。事实上

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t_1-t_0)} x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{A t_1} e^{-A \tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau W^{-1}(t_0, t_1) e^{-A t_0} x_0 \\ &= e^{A(t_1-t_0)} x_0 - e^{A(t_1-t_0)} x_0 = 0 \end{aligned}$$

这样就证明了(1),(2),(3)都是(A,B)能控的充分必要条件,定理证完。

2.2.3 离散时间定常线性系统的能控性与能达性

类似地,可以定义离散时间系统的能控性:

定义 2-2 设 $x(k_0)$ 是控制系统在 k_0 时刻的状态,如果存在一个有限时刻 $k_1 > k_0$ 和 $u(k) (k_0 \leq k \leq k_1)$, 使在 $u(k)$ 的作用下将系统的状态 x_0 在 k_1 时刻转移到原点,则称状态 x_0 是能控的(或可控的)。

从这个定义出发,可以导出关于离散时间定常线性系统的能控性的一系列与连续时间定常线性系统类似的结果,这里不再详述。

离散时间定常线性系统的能控性与连续时间定常线性系统的能控性还有重要的不同点,下面着重讨论它们的不同点。

考虑定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2-8)$$

在它的解式(1-40)中令 $k_0 = 0, k = n, x(0) = x_0$ 得到

$$x(n) = A^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(j)$$

$$= A^n x_0 + [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1} B] [u^T(n-1) \quad \dots \quad u^T(0)]^T$$

现考虑将 x_0 转移到原点的控制序列 $u(0) \dots u(n-1)$, 令 $x(n) = 0$, 上式化为:

$$0 = A^n x_0 + [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1} B] [u^T(n-1) \quad \dots \quad u^T(0)]^T$$

或 $[B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1} B] [u^T(n-1) \quad \dots \quad u^T(0)]^T = -A^n x_0$

对任 x_0 有解,如果 A 可逆,上式化为

$$x_0 = -(A^{-1})^n [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1} B] [u^T(n-1) \quad \dots \quad u^T(0)]^T$$

对任 x_0 存在 $u(0) \dots u(n-1)$ 使 $x(n)$ 为 0 的充分必要条件为矩阵

$$U = [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1} B]$$

的秩等于 n 。如果 A 不可逆,则 $rank U = n$ 只是系统(2-8)能控的充分条件,而不是必要条件。因为如果 $A^n = 0$, 对任何 x_0 , 控制序列 $u(0) = 0 \dots u(n-1) = 0$ 总可将它经 n 步转移到原点。

关于离散系统(2-8)的能控性我们有如下定理^[3]。

定理 2-10 定常线性系统(2-8)完全能控的充分必要条件是对某个正整数 k

$$Span[B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad A^{k-1} B] \supseteq Span[A^k]$$

式中 $\text{Span}[\]$ 表示方括号中的列矢量所生成的矢量空间。

进一步的讨论需对离散系统引进能达性的概念。

定义 2-3 已给定常线性系统(2-8), 如果对系统的状态 x_1 , 存在一个有限时刻 k_1 和控制序列 $u(0), u(1), \dots, u(k_1 - 1)$, 使得在这一控制序列作用下, 系统的状态由原点转移到 $x(k_1) = x_1$, 则称 x_1 是能达的。如果系统的任意状态都是能达的, 则称该系统是完全能达的, 简称 (A, B) 能达。

对连续时间系统也可以定义能达性, 并且对于连续时间定常线性系统能控性与能达性是等价的, 读者可以根据定义直接证明, 也可参看文献[5]。

为分析离散时间定常线性系统(2-8)的能达性我们考虑下式

$$x(n) = [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u^T(n-1) \\ \dots \\ u^T(0) \end{bmatrix}$$

它显然意味着如下定理。

定理 2-11 系统(2-8)完全能达的充分必要条件是矩阵

$$U = [B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

的秩为 n 。

因为对连续系统和离散系统 $\text{rank}U = n$ 都等价于系统 (A, B) 的能达性, 因此有人称矩阵 U 为能达性矩阵。也有人称能控性为点态达原点的能控性, 称能达性为点态离原点的能控性。

2.2.4 连续系统离散化对能控性的影响

定常线性系统(2-4)经离散化得到离散控制系统

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

式中 F 和 G 由(1-25)和(1-26)给出, 由于 $F = e^{AT}$ 总是可逆的, 因此对由连续系统离散化得到的离散时间定常线性系统能控性与能达性是等价的, 都等价于能控性矩阵的秩为 n 。

如果定常线性系统完全能控, 那么经由式(1-25)和式(1-26)离散化得到的离散系统是否还保持能控性呢? 答案是不一定。关于这个问题有如下定理。

定理 2-12 假设定常线性系统(2-1)完全能控, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是 A 的全部不同的特征值, 控制矢量 $u(t)$ 在每个采样周期内为常数, 采样周期为 T , 如果 T 满足如下条件: 当 $\text{Re}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 (i \neq j)$ 时,

$$\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

则由式(1-25)和(1-26)离散化得到的离散系统仍是完全能控的。

这个定理的证明可参看文献[5] [25]。

2.2.5 关于能控性定义的说明

前面已经讲到, 对于连续时间定常线性系统, 能控性与能达性是等价的。由于这个原因, 有的书对定常线性系统的能控性采用如下的定义: 如果对定常线性系统在 t_0 时刻的任一初始状态 x_0 和任意状态 x_1 , 都存在有限时刻 $t_1 > t_0$ 和 $u(t)$, ($t_0 \leq t \leq t_1$), 使在 $u(t)$ 的作用下将系统的状态 x_0 在 t_1 时刻转移到 x_1 , 则称该定常线性系统是完全能控的。

对连续的定常线性系统, 这两个定义是等价的。可以证明按定义 2-1 能控的系统, 对任意给定的 $t_1 > t_0$, 以及任意两个状态 x_0, x_1 , 都存在控制矢量 $u(t)$, ($t_0 \leq t \leq t_1$), 使在 $u(t)$ 的作

用下,系统的状态由 $x(t_0) = x_0$ 转移到 $x(t_1) = x_1$ 。实现这一状态转移的控制矢量是:

$$u(t) = \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \{ \mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1) [e^{-\mathbf{A}t_1} x_1 - e^{-\mathbf{A}t_0} x_0] \}$$

2.3 定常线性系统的能观测性

2.3.1 能观测性的定义

在给出能观测性的定义之前我们先看下面的例。

【例 2-2】考虑图 2-3 的网络,它的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

输出方程为

$$y = [1, -1] \mathbf{x}$$

式中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, x_1 和 x_2 是图中标出的电路的电流。

对这个网络的系统矩阵 \mathbf{A} ,

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

于是当 $u = 0$ 时可算出

$$y(t) = [1, -1] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = (x_{10} - x_{20}) e^{-3t}$$

在本章开始时曾指出,能观测性是由一段有限时间的输出惟一决定系统的初始状态的问题。对这个系统,只要 $x_{10} = x_{20}$ 我们就得到输出 $y(t) = 0$ 。因此,从一段时间的输出 $y = 0$ 并不能确定 x_{10} 和 x_{20} 的值。在 x_1, x_2 平面的 $x_1 = x_2$ 直线上的初始状态不能通过一段时间的输出,惟一确定。

下面讨论系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2-9)$$

的能观测性,将给出系统(2-9)能观测的定义,并研究它能观测的判据。

定义 2-4 设系统(2-9)的输入为零,如果对系统的任意给定的初始状态 x_0 ,都存在有限时刻 $t_1 > t_0$,使得通过在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上的输出 $y(t)$ 能惟一确定初始状态 x_0 ,则称该系统是完全能观测的,简记为 (\mathbf{C}, \mathbf{A}) 能观测。

例 2-2 给出的系统,显然不是完全能观测的,因为 $x_1 = x_2$ 子空间上的状态都不能由输出惟一确定。

2.3.2 定常线性系统能观测性的判据

关于定常线性系统(2-9)我们有如下定理。

定理 2-13 n 维定常线性系统(2-9)完全能观测的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件满足:

(1) 能观测性矩阵

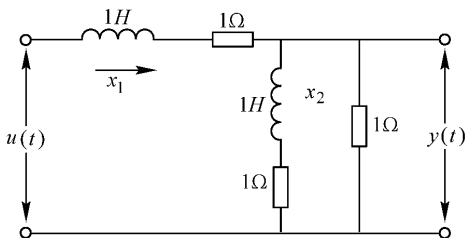


图 2-3 例 2-2 的电路系统

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

秩为 n 。

(2) Ce^{At} 的所在列在 $[0, \infty)$ 上线性无关。

(3) 对任意 $t_1 > t_0$, 能观测性克来姆矩阵

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

非奇异。

证明 由 (C, A) 能观测得到条件(1)用反证法, 设 (C, A) 不能观测, 能观测性矩阵的秩 $< n$ 。则必存在 n 维非 0 矢量 x_0 使得 $Vx_0 = 0$, 即

$$Vx_0 = \begin{bmatrix} Cx_0 \\ CAx_0 \\ \dots \\ CA^{n-1}x_0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{或} \quad CA^i x_0 = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

在状态方程中令 $u(t) = 0$ 则 $y(t) = Ce^{At}x_0$, 由式(2-6)给出的 e^{At} 的有限形式

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x_0 = 0$$

这表明 x_0 不能由输出 $y(t)$ 决定, 与 (C, A) 能观测矛盾。

由条件(1)导出条件(2)设 V 的秩为 n , 反设(2)不成立, 即存在非 0 常矢量 α_0 和 $t_1 > t_0$, 使得在 $[t_0, t_1]$ 上

$$Ce^{At}\alpha_0 \equiv 0$$

上式两端逐次求导数, 得到

$$CAe^{At}\alpha_0 \equiv 0$$

$$CA^2e^{At}\alpha_0 \equiv 0$$

...

$$CA^{n-1}e^{At}\alpha_0 \equiv 0$$

即

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} e^{At}\alpha_0 \equiv 0$$

因此矩阵 V 的秩小于 n , 与(1)矛盾。

由条件(2)导出条件(3)设(2)成立, 反设(3)不成立, 即假设存在 $t_1 > t_0$, 使 $|W(t_0, t_1)| = 0$, 或存在非零常矢量 α , 使得 $\alpha^T W(t_0, t_1) = 0$ 因而有

$$\alpha^T W(t_0, t_1) \alpha = 0$$

或

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} \alpha d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (Ce^{A\tau} \alpha)^T (Ce^{A\tau} \alpha) d\tau = 0$$

由此得到在 $[t_0, t_1]$ 上

$$C e^{At} \alpha \equiv 0$$

与(2)矛盾

由条件(3)推得 (C, A) 能观测设(3)成立, 对任 $t_1 > t_0$, $W^{-1}(t_0, t_1)$ 存在。当 $u(t) \equiv 0$ 时有

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x(t_0) = C e^{A(t-t_0)} x_0$$

上式两端左乘 $e^{A^T t} C^T$ 得到

$$e^{A^T t} C^T y(t) = e^{A^T t} C^T C e^{A(t-t_0)} x_0$$

积分得

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A(t-t_0)} x_0 dt = W(t_0, t_1) e^{-A t_0} x_0$$

由此得到

$$x_0 = e^{A t_0} W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

即 x_0 由 $y(t)$ 唯一确定, (C, A) 能观测。

这样我们就证明了(1), (2), (3)都是 (C, A) 能观测的充分必要条件。

类似地可以定义离散时间定常线性系统的能观测性, 并且可以证明如下定理:

定理 2-14 n 维离散时间定常线性系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

完全能观测的充分必要条件是能观测性矩阵

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

的秩为 n 。

定理的证明可参看文献[3]。

2.3.3 应用 MATLAB 判断能控性与能观测性

MATLAB 函数 `ctrb` 产生能控性矩阵, 再用 MATLAB 函数 `rank` 计算它的秩, 即可判断系统的能控性。调用格式是

$$U = \text{ctrb}(A, B)$$

类似的方法可以应用 MATLAB 判断定常线性系统的能观测性, 产生能控性矩阵的 MATLAB 函数是 `obsv`。

1. 判断能控性的 MATLAB 程序:

```
A = [ ];  
B = [ ];  
[m n] = size(A);  
temp = eye(size(A));
```

```

for i = 1 :m
    temp0(:,i) = temp * B ;
    temp = temp * A ;
end
r = rank(temp0);
fprintf(' \ n ');
if(r == m)
    disp('(A ,B)能控');
else
    disp('(A ,B)不完全能控');
end
fprintf(' \ n ');

```

2. 判断能观测性的 MATLAB 程序：

```

A = [ ];
C = [ ];
[m ,n ] = size(A);
temp = eye(size(A));
for i = 1 :m
    temp0(i ,:) = C * temp ;
    temp = A * temp ;
end
r = rank(temp0);
fprintf(' \ n ');
if(r == m)
    disp('(C ,A)能观测');
else
    disp('(C ,A)不完全能观测');
end
fprintf(' \ n ');

```

2.4 能控性与能观测性的对偶性

由前两节的内容可以看出 ,能控性与能观测性的定理及其证明非常相似 ,实际上能控性与能观测性之间存在着很紧密的对偶关系。这个对偶关系在理论上和应用上都是很重要的。

对连续时间定常线性系统

$$S \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

定义它的对偶系统

$$S^T \begin{cases} \dot{x} = A^T x + C^T u \\ y = B^T x \end{cases}$$

关于对偶关系有如下定理

定理 2-15 若系统 S 完全能控则对偶系统 S^T 完全能观测,若系统 S 完全能观测则对偶系统 S^T 完全能控,反之亦成立。

设 U 和 U_T 分别为系统 S 和对偶系统 S^T 的能控性矩阵, V 和 V_T 分别为 S 和 S^T 的能观测性矩阵,于是成立关系:

$$U_T = V^T \quad V_T = U^T$$

由定理 2-1 和定理 2-5 S 能控 $\Leftrightarrow \text{rank} U = n \Leftrightarrow \text{rank} U^T = n \Leftrightarrow \text{rank} V_T = n \Leftrightarrow S^T$ 能观测。类似地 S 能观测 $\Leftrightarrow \text{rank} V = n \Leftrightarrow \text{rank} V^T = n \Leftrightarrow \text{rank} U_T = n \Leftrightarrow S^T$ 能控。

能控性与能观测性之间存在着如此紧密的对偶关系,是定常线性系统的重要性质,应用它可以容易地由关于能控性的结果推得能观测性的相应结果,而不需另外的证明。

对离散时间定常线性系统,由于 (A, B) 能达对应于矩阵

$$[B \quad \dots \quad AB \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

秩为 n 。因此定理应改为:

定理 2-16 若离散时间定常线性系统 S 完全能达,则它的对偶系统 S^T 完全能观测,若系统 S 完全能观测则对偶系统 S^T 完全能达,反之亦成立。

对于离散时间定常线性系统能控性对偶于能构造性。系统的能构造性定义如下:

定义 2-5 如果系统的在 t_f 时刻的状态 $x(t_f)$,可以由系统在时间区间 $[t_0, t_f]$ 的输出决定,则称该系统是能构造的(constructibility)。

与能观测性不同,能构造性是由 t_f 时刻前的一段时间的输出决定 t_f 时刻的状态。若离散时间定常线性系统 S 能控,则它的对偶系统 S^T 能构造,若系统 S 能构造则对偶系统 S^T 能控,反之亦成立,见文献[40]。

如果系统矩阵 A 可逆,则离散时间定常线性系统的能控性同样对偶于能观测性。

2.5 系统的能控结构形式与能观测结构形式

本节讨论系统按能控性和能观测性进行分解的问题,方法是对状态空间进行分解,为此先引进线性系统的坐标变换。

2.5.1 线性系统的坐标变换及其特性

设 n 维线性系统在基组 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下的状态方程和输出方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

在另一个基组 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ 下的状态记为 $x' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T$ 如果在基组 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下

$$e'_i = t_{1i} e_1 + t_{2i} e_2 + \dots + t_{ni} e_n \quad i = 1, 2, \dots, n$$

并记

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

则

$$[e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]T$$

显然 T 是非奇异矩阵。在状态空间中,不同基组下的同一状态成立

$$[e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

另一方面

$$[e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]T \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

于是得到

$$[e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]T \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

由此得到新旧坐标系下的状态之间的关系为

$$x = Tx'$$

这是状态之间的非奇异线性变换,在此变换之下,原线性系统化为

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= T^{-1}ATx' + T^{-1}Bu = A'x' + B'u \\ y &= CTx' = C'x' \end{aligned}$$

$$\text{式中} \quad A' = T^{-1}AT \quad B' = T^{-1}B \quad C' = CT$$

下面讨论坐标变换的一些特性。

(1) 非非线性变换不改变定常线性系统的能控性和能观测性
新系统的能控性矩阵为

$$U' = [B' \ \dots \ A'B' \ \dots \ A'^{n-1}B'] = [T^{-1}B \ \dots \ T^{-1}AB \ \dots \ T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}U$$

类似地能观测性矩阵为 $V' = TV$ 。因此,经坐标变换(非非线性变换)不改变定常线性系统的能控性和能观测性。

(2) 非非线性变换不改变定常线性系统的特征值
新系统的特征方程为

$$|sI - A'| = |sI - T^{-1}AT| = |T^{-1}(sI - A)T| = |T^{-1}| |sI - A| |T| = 0$$

因此经坐标变换(非非线性变换)不改变定常线性系统的特征值。

(3) 非非线性变换不改变定常线性系统的传递函数阵
新系统的传递函数阵为

$$C'(sI - A')^{-1}B' = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B$$

因此经坐标变换(非非线性变换)不改变定常线性系统的传递函数阵。

坐标变换的其他特性以后遇到时再讲。

MATLAB 函数 `ss2ss` 实现变换 $x' = Px$,调用格式为

$$[ab \ bb \ cb \ db] = \text{ss2ss}(a \ b \ c \ d \ p)$$

下面讨论对不完全能控的系统按能控性进行分解的问题,在进行分解之前需先定义能控子空间。

2.5.2 能控子空间

由引理 2-1 知,状态 x_0 能控的充分必要条件是存在 t_1 和 $u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$) 使得

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

由此能导出如下引理。

引理 2-2 所有能控的状态构成状态空间的一个子空间。

证明 设 x_1, x_2 是任意两个能控的状态, α, β 为任意两个实数, 那么存在 $t_1, u_1(t)$ 和 $t_2, u_2(t)$ 使得:

$$x_1 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u_1(\tau) d\tau$$

$$x_2 = - \int_0^{t_2} e^{-A\tau} B u_2(\tau) d\tau$$

不失一般性设 $t_2 > t_1$, 令

$$\tilde{u}_1 = \begin{cases} u_1(\tau), & \tau \leq t_1 \text{ 时} \\ 0, & \tau > t_1 \text{ 时} \end{cases}$$

则

$$x_1 = - \int_0^{t_2} e^{-A\tau} B \tilde{u}_1(\tau) d\tau$$

于是 $\alpha x_1 + \beta x_2 = - \int_0^{t_2} e^{-A\tau} B [\alpha \tilde{u}_1(\tau) + \beta u_2(\tau)] d\tau = - \int_0^{t_2} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$

式中 $u(\tau) = \alpha \tilde{u}_1(\tau) + \beta u_2(\tau)$ 。上式表明 $\alpha x_1 + \beta x_2$ 也是能控的, 所以全部能控的状态构成状态空间的一个子空间, 称为能控子空间, 记为 X_c 。

定理 2-17 能控子空间 X_c 是由 $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ 的列所张成的子空间, 记为

$$X_c = \text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \quad (2-10)$$

证明 对任 $x_0 \in X_c$ 存在 $t_1, u(t)$ ($0 \leq t \leq t_1$), 使

$$x_0 = - \int_0^{t_1} e^{A\tau} B u(\tau) d\tau$$

由于矩阵指数可写为有限形式

$$e^{A\tau} = \alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)A + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1}$$

因此 $e^{-A\tau} = \alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)(-A) + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)(-A)^{n-1}$

于是 $x_0 = - \int_0^{t_1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)(-A)^k \right] B u(\tau) d\tau = B \tilde{u}_0 + AB \tilde{u}_1 + \dots + A^{n-1} B \tilde{u}_{n-1}$

式中 $\tilde{u}_k = (-1)^{k+1} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau, k = 0, 1, \dots, n-1$

所以 $x_0 \in \text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$

即 $X_c \subset \text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} \quad (2-11)$

下面再证明 X_c 的维数等于 $\text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ 的维数。设 X_c 的维数 $n_1 \leq n$, 若 $n_1 = n$ 即 $X_c = X$, 于是 $X_c = \text{Span}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = X$ 。若 $n_1 < n$, 令 $n_0 = n - n_1$, 那

么在 X 中有 n_0 个线性无关矢量 q_1, q_2, \dots, q_{n_0} 使对任 $x_0 \in X_c$ 有

$$q_i^T x_0 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

因为对任意的 $t_1 > 0$ 和 $u(t)$,

$$-\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = x_0 \in X_c$$

因此, 对任意的 t_1 和 $u(t)$ 成立

$$q_i^T x_0 = -\int_0^{t_1} q_i^T e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = 0$$

由此得到

$$q_i^T e^{-A\tau} B \equiv 0$$

上式两端关于 τ 逐次求导数得到

$$q_i^T e^{-A\tau} B \equiv 0$$

$$q_i^T A e^{-A\tau} B \equiv 0$$

...

$$q_i^T A^{n-1} e^{-A\tau} B \equiv 0$$

令 $\tau = 0$ 得到

$$q_i^T B = 0, q_i^T AB = 0, \dots, q_i^T A^{n-1} B = 0$$

即

$$q_i^T [B \dots AB \dots A^{n-1} B] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

所以, $\text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\}$ 的维数不大于 $n - n_0 = n_1$ 。再由 X_c 的维数为 n_1 及已证的式(2-11) 即得到 $\text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\}$ 的维数也是 n_1 。因而

$$X_c = \text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\}$$

定理 2-18 能控子空间是 A 的不变子空间。

证明 由式 $X_c = \text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\}$ 可导出

$$A X_c = A \text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\} = \text{Span}\{AB \dots A^2 B \dots A^n B\}$$

由凯莱—哈密顿定理 如果 $|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ 则

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I)$$

于是

$$A X_c = \text{Span}\{AB \dots A^2 B \dots A^{n-1} B \dots - (a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I)B\}$$

$$\subset \text{Span}\{B \dots AB \dots A^{n-1} B\} = X_c$$

即能控子空间是 A 的不变子空间。

2.5.3 定常线性系统的能控结构形式——能控部分的分离

考虑定常线性系统(2-9)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

上节已经讲了经非异变换

$$\begin{aligned} x &= Tx' \\ x' &= A'x' + B'u \end{aligned} \quad (2-12)$$

化为

$$y = C'x' \quad (2-13)$$

式中

$$A' = T^{-1}AT \quad B' = T^{-1}B \quad C' = CT \quad (2-14)$$

并且已经分析了经非异线性变换不改变定常线性系统的能控性。

下面我们求一个非异线性变换将一个不完全能控的系统(2-13)化为能控结构形式,明显地将系统的能控部分分离出来。

设能控子空间 X_c 的维数为 $n_c < n$, 在 X_c 中取一个基组 $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_c}$ 。设它们在坐标系 $\Sigma = \{e_1, \dots, e_n\}$ 下的坐标为:

$$e'_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \dots \\ t_{n1} \end{bmatrix} \quad e'_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \dots \\ t_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad e'_{n_c} = \begin{bmatrix} t_{1n_c} \\ t_{2n_c} \\ \dots \\ t_{nn_c} \end{bmatrix}$$

选 X 的任一个子空间,使得

$$X = X_c \oplus X_{nc}$$

在 X_{nc} 中任选一个基组 e'_{n_c+1}, \dots, e'_n , 设它们在 Σ 下的坐标为:

$$e'_{n_c+1} = \begin{bmatrix} t_{1n_c+1} \\ t_{2n_c+1} \\ \dots \\ t_{nn_c+1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad e'_n = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{bmatrix}$$

显然 $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_c}, e'_{n_c+1}, \dots, e'_n$ 构成 X 的一个新基组, 记为

$$\Sigma_c = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_c}, e'_{n_c+1}, \dots, e'_n\}$$

以 Σ_c 作为新的坐标系, 由原坐标系到新坐标系的坐标变换为:

$$x = Tx' \quad T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

对任 $x \in X$, 在 Σ_c 下的坐标可记为:

$$x' = \begin{bmatrix} x'_c \\ x'_{nc} \end{bmatrix}$$

式中

$$x'_c = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_{n_c} \end{bmatrix} \quad x'_{nc} = \begin{bmatrix} x'_{n_c+1} \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

设原系统在 Σ_c 下的坐标表示为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_c \\ \dot{x}'_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_c \\ x'_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x'_c \\ x'_{nc} \end{bmatrix}$$

则可证明如下定理。

定理 2-19 定常线性系统(2-9)在 Σ_c 下的坐标表示有如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_c \\ \dot{x}'_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_c \\ x'_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-15)$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x'_c \\ x'_{nc} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

并且 (A_1, B_1) 能控。

证明 记 $T_1 = [e'_1 \dots e'_{nc}]$, $T_2 = [e'_{nc+1} \dots e'_n]$ 则有 $T = [T_1, T_2]$ 再设

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

于是
$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} A [T_1 \ T_2] = \begin{bmatrix} Q_1AT_1 & Q_1AT_2 \\ Q_2AT_1 & Q_2AT_2 \end{bmatrix}$$

$$B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} Q_1B \\ Q_2B \end{bmatrix}$$

由于

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} [T_1 \ T_2] = \begin{bmatrix} Q_1T_1 & Q_1T_2 \\ Q_2T_1 & Q_2T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & I_{n-n_c} \end{bmatrix}$$

因此必成立 $Q_2T_1=0$ 。由于 T_1 是由 X_c 的基底作为列构成的, 因此 $Q_2T_1=0$ 意味着对任 $x \in X_c$ 有 $x = T_1\alpha$, 于是 $Q_2x = Q_2T_1\alpha = 0$ 。由于 X_c 是 A 的不变子空间, 所以 AT_1 的列属于 X_c , 于是 $Q_2x=0$ 又意味着 $Q_2AT_1=0$ 亦即 $A_2=0$ 。又因为 B 的列属于 X_c , 因此 $Q_2B=0$ 成立, 即 $B_2=0$ 成立。

这样就证明了在 Σ_c 下状态方程化为能控结构形式, 如式(2-15)、式(2-16)所示。

下面证明 (A_1, B_1) 能控。

系统(2-14)的能控性矩阵

$$U' = \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

由定理 2-17, $\text{rank}U' = X_c$ 的维数 $= n_c$ 所以 $\text{rank}[B_1 \dots A_1B_1 \dots \dots \dots A_1^{n-1}B_1] = n_c$, 即

$$\text{rank}[B_1 \dots A_1B_1 \dots \dots \dots A_1^{n_c-1}B_1] = n_c$$

因此 (A_1, B_1) 能控。定理证完。

式 $X = X_c \oplus X_{nc}$ 意味着状态空间可以分解为能控子空间 X_c 和子空间 X_{nc} 。于是系统(2-9)分解为能控子系统

$$S_C : \dot{x}'_c = A_1x'_c + B_1u + A_{12}x'_{nc} \quad (2-17)$$

和不能控子系统

$$S_{NC} : \dot{x}'_{nc} = A_2x'_{nc} \quad (2-18)$$

两个子系统通过 A_{12} 耦合在一起。

系统 S_C 能控是由于在定理 2-19 中已证明系统

$$\dot{x}'_c = A_1 x'_c + B_1 u$$

能控, 令 $f(t) = A_{12} x'_{nc}(t)$ 应用 2.8 习题中的第 5 题的结果即可得到系统

$$\dot{x}'_c = A_1 x'_c + B_1 u + A_{12} x'_{nc}$$

能控。

由式(2-15) 原系统的极点集为 $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ 。 $\sigma(A_1)$ 称为能控极点集, A_1 的极点称为能控极点。 $\sigma(A_2)$ 称为不能控极点集, A_2 的极点称为不能控极点。

下面用实例说明将一个系统化为能控结构形式的具体步骤。

【例 2-3】 已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 2] x$$

求一个非异线性变换将它化为能控结构形式。

解 第 1 步 求能控子空间 X_c 。

$$X_c = \text{Span}\{B \dots AB \dots A^2 B \dots A^3 B\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

取 $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为 X_c 的基底。

第 2 步 求 X_{nc} , 使得 $X = X_c \oplus X_{nc}$ 。 为此我们在 4 维矢量中再选两个矢量 e'_3, e'_4 , 使 e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 线性无关。 显然可取

$$e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$X_{nc} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

并取 e'_3, e'_4 为 X_{nc} 的基底。

第 3 步 坐标变换

取新坐标系为 $\Sigma_c = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$, 那么原坐标系到新坐标系的坐标变换为:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}'$$

在此变换下,原系统化为:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & -4 & -3 \\ 0 & -2 & \dots & -4 & -4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}' + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2] \mathbf{x}'$$

这就是所求的能控结构形式,容易验证 $\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ 能控。

应用 MATLAB 求系统的能控结构形式的方法是对能控性矩阵 U 进行 QR 分解。即将 U 分解为 $U = QR$, 式中 Q 是正交矩阵, R 是上三角矩阵。设 $\text{rank}U = n_c < n$, 则 QR 分解得到的 Q 就是定理中的 T_1 。如果通过随机数生成器逐个增广能控性矩阵 U 的列,对增广后的矩阵 \bar{U} 进行 QR 分解,直到对增广后的矩阵 \bar{U} 进行 QR 分解得到 n 个正交基矢量为止。这时矩阵 Q 的前 n_c 列构成定理中的 T_1 ,后 $n - n_c$ 列构成定理中的 T_2 。

对矩阵 M 实现 QR 分解的 MATLAB 函数是 `qr`,其调用格式为

$$[q \ r] = \text{qr}(M)$$

【例 2-4】 系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

它的能控性矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -5 & 9 & 25 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 9 & -25 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

应用 QR 分解得到

$$U = \begin{bmatrix} 0.57735 & 0.707107 \\ 0.57735 & -0.707107 \\ 0.57735 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1.732 & 0 & -5.19615 & 0 & 15.588 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 & -7.07107 & 0 & 35.355 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.57735 & 0.707107 \\ 0.57735 & -0.707107 \\ 0.57735 & 0 \end{bmatrix}$$

用随机数生成器增广能控性矩阵 U 的列再用 QR 分解得到

$$T_2 = \begin{bmatrix} -0.40825 \\ -0.40825 \\ -0.81650 \end{bmatrix}$$

变换矩阵取为

$$T = [T_1 \quad T_2]$$

经变换

$$x = Tx'$$

系统的状态方程化为

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5.6569 \\ 0 & -5 & 6.9282 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1.73205 & 0 \\ 0 & 1.4142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

MATLAB 函数 `ctrbf` 直接将系统 (A, B, C) 化为能控结构形式, 调用格式为

$$[Ab, Bb, Cb, T] = ctrbf(A, B, C)$$

T 是变换矩阵, 得到的标准型的形式略有不同

$$Ab = \begin{bmatrix} A_{NC} & 0 \\ A_{21} & A_C \end{bmatrix} \quad Bb = \begin{bmatrix} 0 \\ B_C \end{bmatrix}$$

(A_C, B_C) 能控。应用于例 2-5, 当 $C = [1 \quad 1 \quad 1]$ 时得到

$$Ab = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6.9282 & -5 & 0 \\ 5.6569 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Bb = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.4142 \\ -1.7321 & 0 \end{bmatrix} \quad Cb = [0 \quad 0 \quad -1.7321]$$

下面讨论对不完全能观测系统按能观测性进行分解的问题。在进行分解之前需先定义不能观测子空间。

2.5.4 不能观测子空间

当 $u(t) \equiv 0$, 初始状态为 x_0 时, 设 $x(t)$ 是对应于初始状态为 x_0 的状态轨线, 如果与之对应的输出 $y(t) = Cx(t) \equiv 0$, 则由输出 y 不能唯一确定初始状态 x_0 (除零状态以外), 这时称 x_0 为不能观测的状态。

引理 2-3 所有不能观测的状态构成状态空间的一个子空间。

证明 设 $u(t) \equiv 0$; x_0^1, x_0^2 是状态空间中任意两个不能观测的状态, 以它们为初值的状态轨线分别为

$$x^1(t) = e^{At}x_0^1 \quad x^2(t) = e^{At}x_0^2$$

它们对应的输出为

$$y^1(t) = Ce^{At}x_0^1 \equiv 0 \quad y^2(t) = Ce^{At}x_0^2 \equiv 0$$

设 α, β 为两个实数, 则以 $\alpha x_0^1 + \beta x_0^2$ 为初始状态的状态轨线为

$$x(t) = e^{At}(\alpha x_0^1 + \beta x_0^2) = \alpha e^{At}x_0^1 + \beta e^{At}x_0^2 = \alpha x^1(t) + \beta x^2(t)$$

它对应的输出为

$$y(t) = Cx(t) = \alpha Cx^1(t) + \beta Cx^2(t) = \alpha y^1(t) + \beta y^2(t) \equiv 0$$

所以 $\alpha x_0^1 + \beta x_0^2$ 为不能观测的状态。这就证明了所有不能观测的状态构成状态空间的一个子空间。这个子空间称为不能观测子空间, 记为 X_{no} 。

关于不能观测子空间的构成我们有如下定理。

定理 2-20 不能观测子空间是 C, CA, \dots, CA^{n-1} 的核空间的交, 即

$$X_{no} = \bigcap_{i=1}^{n-1} Ker CA^i \quad (2-19)$$

证明 由核空间的定义, 对任意 $x_0 \in \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker CA^i$, 成立

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0$$

以 x_0 为初值的状态 $x(t) = e^{At}x_0$, 对应的输出为:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = C \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) A^i \right] x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) CA^i x_0 \equiv 0$$

所以 $x_0 \in X_{no}$. 这就证明了

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker CA^i \subset X_{no}$$

如果 $x_0 \in X_{no}$, 则 $y(t) = Ce^{At}x_0 \equiv 0$, 该式两端求直到 $n-1$ 次导数, 得到

$$CAe^{At}x_0 \equiv 0$$

...

$$CA^{n-1}e^{At}x_0 \equiv 0$$

令 $t=0$, 得到 $Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0$, 即

$$x_0 \in \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker CA^i$$

$$X_{no} \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker CA^i$$

这就完成了 $X_{no} = \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker CA^i$ 的证明。

定理 2-21 定常线性系统(2-9)完全能观测的充分必要条件是 $X_{no} = \{0\}$ 。

证明 (C, A) 能观测的充分必要条件是能观测性矩阵秩为 n , 这又等价于线性方程组

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

有惟一零解, 即 $X_{no} = \{0\}$ 。

由定理 2-21, 我们也可以将 $X_{no} = \{0\}$ 作为 (C, A) 能观测的定义。

2.5.5 定常线性系统的能观测结构形式——能观测部分的分离

定理 2-22 定常线性系统(2-9)的不能观测子空间 X_{no} 是 A 的不变子空间。

证明 由式(2-19), 如果 $x \in X_{no}$, 则

$$Cx = CAx = \dots = CA^{n-1}x = 0$$

在 A 变换下, x 的象为 Ax , 我们要证明 $Ax \in X_{no}$, 只需证明 $C(Ax) = 0, CA(Ax) = 0, \dots, CA^{n-1}(Ax) = 0$ 同时成立。因此只需再证明 $CA^n x = 0$ 。由凯莱—哈密顿定理, 我们有 $CA^n x = C(-a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I)x = -a_{n-1}CA^{n-1}x - \dots - a_1CAx - a_0Cx = 0$ 。这就完成了 $Ax \in X_{no}$ 的证明。

下面类似于能控结构形式的推导, 选择一个坐标系, 使得系统转化为能观测结构形式。将

系统的能观测部分和不能观测部分明显地分开。

设不能观测子空间 X_{no} 的维数为 n_1 , 在 X_{no} 中选取基组

$$e'_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \dots \\ t_{n_1} \end{bmatrix} \quad e'_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \dots \\ t_{n_2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad e'_{n_1} = \begin{bmatrix} t_{1n_1} \\ t_{2n_1} \\ \dots \\ t_{nn_1} \end{bmatrix}$$

选取 X_o 使得 $X = X_{no} \oplus X_o$, 在 X_o 中选一基组

$$e'_{n_1+1} = \begin{bmatrix} t_{1n_1+1} \\ t_{2n_1+1} \\ \dots \\ t_{nn_1+1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad e'_n = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{bmatrix}$$

以 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1}, e'_{n_1+1}, \dots, e'_n\}$ 为 X 的基组构造坐标系 Σ_o 。在此坐标系下,任一状态 $x \in X$ 的坐标可表示为

$$x' = \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix}$$

式中

$$x_{no} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_{n_1} \end{bmatrix} \quad x_o = \begin{bmatrix} x'_{n_1+1} \\ x'_{n_1+2} \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

由原坐标系到新坐标系 Σ_o 的坐标变换为：

$$x = Tx' \quad T = [t_{ij}] \quad |T| \neq 0$$

原系统经坐标变换得到

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x}'_{no} \\ \dot{x}'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix}$$

可以证明如下定理。

定理 2-23 定常线性系统(2-9)在 Σ_o 下的坐标表示为如下形式：

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x}'_{no} \\ \dot{x}'_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix}$$

并且 (C_2, A_2) 能观测。

定理 2-23 的证明与定理 2-19 类似,留给读者自己完成。

类似于能控性分解,可以通过非异变换将定常线性系统(2-6)分解为能观测子系统

$$S_o : \begin{cases} \dot{x}_o = A_2 x_o + B_2 u \\ y = C_2 x_o \end{cases}$$

和不能观测子系统

$$\dot{x}_{no} = A_1 x_{no} + A_{12} x_o + B_1 u$$

两个子系统由 A_{12} 耦合起来, 并且 A_2 的极点称为能观测极点, A_1 的极点称为不能观测极点。

下面用具体的例来说明将系统化为能观测结构形式的步骤。

【例 2-5】 将例 2-3 中的系统化为能观测结构形式

第 1 步 求 X_{no} 的基组。

由式(2-19) $x \in X_{no}$ 应满足

$$Cx = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 2]x = 0$$

$$CAx = [-2 \quad -2 \quad 2 \quad 0]x = 0$$

$$CA^2x = [4 \quad 4 \quad -4 \quad 4]x = 0$$

$$CA^3x = [-8 \quad -8 \quad 8 \quad -4]x = 0$$

以上 4 式等价于

$$\begin{cases} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]x = 0 \\ [1 \quad 1 \quad -1 \quad 0]x = 0 \end{cases}$$

这个代数方程组有线性无关解 $[1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T$ 和 $[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$ 。因而可选取

$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为 X 的不能观测子空间 X_{no} 的基组。

第 2 步 选取 X_o 的基组使得 $X = X_{no} \oplus X_o$ 。

显然可选

$$e'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e'_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为 X_o 的基组。

第 3 步 变换矩阵取为

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经变换 $x = Tx'$ 原系统化为

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= T^{-1}ATx' + T^{-1}Bu = A'x' + B'u \\ y &= CTx' = C'x' \end{aligned}$$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ -4 & -1 & \dots & 0 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CT = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 2]$$

可验证 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 能观测。

MATLAB 函数 *obsvf* 直接将系统 (A, B, C) 化为能控结构形式, 调用格式为

$$[Ab, Bb, Cb, T] = \text{obsvf}(A, B, C)$$

T 是变换矩阵。

2.5.6 能控性与能观测性的 PBH 判据

有了定常线性系统的能控性结构形式和能观测性结构形式, 可以得出能控性与能观测性的 PBH 判据, 是以提出判据的三位作者的名字的字头命名的, 他们是 Popov, Belevitch 和 Hautus。PBH 判据是非常有用并富有启发性的判据。

定理 2-24 (A, B) 能控的充分必要条件是存在 A 的左特征矢量正交于 B 的所有列。

证明 必要性 如果 (A, B) 能控, 证明不存在 A 的左特征矢量正交于 B 的所有列。用反证法, 设存在 A 的左特征矢量 q 正交于 B 的所有列 b_1, \dots, b_m , 即

$$qA = q\lambda \quad qb_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

那么 $qAb_i = q\lambda b_i = \lambda qb_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$

$$qA^2 b_i = q\lambda Ab_i = \lambda qAb_i = \lambda^2 qb_i = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

类似地可导出

$$qA^k b_i = \lambda^k qb_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n$$

由此得出 $q[A \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = 0$ (2-20)

由于特征矢量 $q \neq 0$, 式(2-20)意味着 $\text{rank}[A \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] < n$, 这与 (A, B) 能控矛盾, 必要性证完。

充分性 由不存在 A 的左特征矢量正交于 B 的所有列, 证明 (A, B) 能控。用反证法, 设 (A, B) 不能控, 不失一般性, 假设系统已化为能控结构形式 (A', B')

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

设 q_2 是矩阵 A_2 的左特征矢量, 那么 $q = [0 \ q_2]$ 是 A' 的左特征矢量, 因为

$$qA' = [0 \ q_2]A' = [0 \ q_2 A_2] = [0 \ q_2 \lambda] = [0 \ q_2] \lambda = q\lambda$$

但 $qB' = q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \ q_2] \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

与不存在 A 的左特征矢量正交于 B 的所有列的假设矛盾, 充分性证完。

定理 2-25 (A, B) 能控的充分必要条件是 A 的每个特征值 λ (因而对任意 λ) 矩阵 $[\lambda I - A \ \dots \ B]$ 秩为 n 。

证明 $\lambda I - A$ 对除 A 的特征值以外的所有复数非奇异, 因此 $[\lambda I - A \ \dots \ B]$ 对除 A 的特征

值以外的复数秩为 n 。因此对 A 的每个特征值 λ , 矩阵 $[\lambda I - A \dots B]$ 秩为 n 等价于对所有的复数 λ 矩阵 $[\lambda I - A \dots B]$ 的秩为 n 。

对所有的复数 λ , 矩阵 $[\lambda I - A \dots B]$ 的秩等于 n 等价于: 不存在行矢量 q 使得 $q[\lambda I - A \dots B] = 0$, 即不存在行矢量 q 使得 $q(\lambda I - A) = 0, qB = 0$, 这就是说不存在 A 的左特征矢量 q 正交于 B 的所有列。按定理 2-24, 这等价于 (A, B) 能控。定理证完。

令 $\lambda = 0$ 得到该定理的一个推论:

推论: 如果 $\text{rank}[B \ A] \neq n$ 则系统不是完全能控的。

定理 2-26 (C, A) 能观测的充分必要条件是 不存在 A 的右特征矢量正交于 C 的所有行。

定理 2-27 (C, A) 能观测的充分必要条件是 对 A 的每个特征值 λ , 矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$ 秩为

n 。

定理 2-26 和定理 2-27 的证明可以应用能控性与能观测性的对偶性由定理 2-24 和定理 2-25 得到, 请读者自己完成。

2.5.7 求控制系统的能控结构形式与能观测结构形式的 MATLAB 程序

前面已经指出, 可以应用 QR 分解求变换矩阵, 将不能控系统转化为能控结构形式, 并给出了直接转化能控结构形式与能观测结构形式的 MATLAB 函数。本小节给出例 2-3 中解法的 MATLAB 程序。

1. 化能控结构形式

例 2-3 中已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 2]x$$

求一个非线性变换将它化为能控结构形式的 MATLAB 程序如下:

```
A = [-2 0 1 -1 ;
      -4 -2 4 -4 ;
      -4 0 3 -3 ;
      0 0 0 1];
B = [2 1 2 0];
C = [1 1 -1 2];
[m n] = size(A);
temp = eye(size(A));
for i = 1:m
    temp0(:, i) = temp * B;
    temp = temp * A;
end
r = rank(temp0);
```

```

temp2(:,1)=temp0(:,1);
for i=1:r
    for j=1:m
        temp2(:,i)=temp0(:,j);
        if rank(temp2)==i
            break
        end
    end
end
end

temp1=eye(size(A));
for i=r+1:m
    for j=1:m
        temp2(:,i)=temp1(:,j);
        if rank(temp2)==i
            break
        end
    end
end
end
t=temp2
t1=inv(t);
A=t1*A*t
B=t1*B
C=C*t

```

得到结果：

```

t=
    2    -2     1     0
    1    -2     0     0
    2    -2     0     0
    0     0     0     1

```

```

a=
    0    -2.0000     0     1.0000
    1.0000   -3.0000    2.0000    2.5000
    0         0     2.0000    2.0000
    0         0         0     1.0000

```

b=

```

    1
    0

```

```

0
0
c=
1 -2 1 2

```

2. 化能观测结构形式

同样考虑例 2-3 中的系统，求一个非非线性变换将它化为能观测结构形式的 MATLAB 程序如下：

```

A = [-2 0 1 -1 ;
-4 -2 4 -4 ;
-4 0 3 -3 ;
0 0 0 1];
B = [2 ; 1 2 0];
C = [1 1 -1 2];
[m n] = size(A);
temp = eye(size(A));
for i = 1 : m
    temp0(i,:) = C * temp;
    temp = temp * A;
end
temp0 = null(temp0);
r = rank(temp0);
temp = eye(size(A));
for i = r + 1 : m
    for j = 1 : m
        temp0(:,i) = temp(:,j);
        if rank(temp0) == i
            break
        end
    end
end
end
T = temp0
t1 = inv(T);
A = t1 * A * T
B = t1 * B
C = C * T

```

得到结果：

```

T =
-0.8165 -0.0012 1.0000 0
0.4072 0.7077 0 0

```

$$\begin{bmatrix} -0.4093 & 0.7065 & 0 & 0 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$A =$

$$\begin{bmatrix} -1.5017 & -0.8720 & 0.0084 & -1.2174 \\ 2.0148 & 2.5017 & -5.6568 & -4.9516 \\ 0.0000 & 0.0000 & -2.0000 & -2.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$B =$

$$\begin{bmatrix} -1.2279 \\ 2.1195 \\ 1.0000 \\ -0.0000 \end{bmatrix}$$

$C =$

$$\begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

2.6 定常线性系统的标准分解

本节讨论定常线性系统的标准分解问题。对于一个不是完全能控、完全能观测的定常线性系统,可以经过非奇异线性变换将它的完全能控、完全能观测的部分分解出来。事实上,一个一般的定常线性系统可以分解为能控能观测、能控不能观测、不能控能观测和不能控不能观测四个子系统,称为系统的标准分解。定常线性系统的标准分解是现代控制论的一个重要基础。在对定常线性系统进行理论分析和一些应用中经常用到。

2.6.1 卡尔曼标准分解定理

考虑 n 维定常线性系统(2-9),我们对它的状态空间 X 做如下分解:

令 $X_1 = X_c \cap X_{no}$, 选取 X_2 使 $X_c = X_1 \oplus X_2$, 选取 X_3 使 $X_{no} = X_1 \oplus X_3$, 选取 X_4 使得

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$$

记 X_i 的维数为 $n_i, i=1, 2, 3, 4$, 显然 $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ 。

在 X_1 中选取基组 $\{e'_1, \dots, e'_{n_1}\}$, 在 X_2 中选取基组 $\{e'_{n_1+1}, \dots, e'_{n_1+n_2}\}$, 在 X_3 中选取基组 $\{e'_{n_1+n_2+1}, \dots, e'_{n_1+n_2+n_3}\}$, 在 X_4 中选取基组 $\{e'_{n_1+n_2+n_3+1}, \dots, e'_n\}$ 。引进新的坐标系

$$\Sigma_{CO} = \{e'_1, \dots, e'_{n_1}, e'_{n_1+1}, \dots, e'_{n_1+n_2}, e'_{n_1+n_2+1}, \dots, e'_{n_1+n_2+n_3}, e'_{n_1+n_2+n_3+1}, \dots, e'_n\}$$

对任一 $x \in X$, 在 Σ_{CO} 下记为 x' , x' 由四个分量 x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 组成

$$\begin{aligned} x'_1 &= [x'_1, \dots, x'_{n_1}]^T & x'_2 &= [x'_{n_1+1}, \dots, x'_{n_1+n_2}]^T & x'_3 &= [x'_{n_1+n_2+1}, \dots, x'_{n_1+n_2+n_3}]^T \\ x'_4 &= [x'_{n_1+n_2+n_3+1}, \dots, x'_n]^T \end{aligned}$$

由原坐标系 Σ 到新坐标系 Σ_{CO} 的坐标变换为

$$x = Tx'$$

变换矩阵 T 的第 i 列为 e'_i 在原坐标系 Σ 下的坐标, 显然 T 是非奇异矩阵, 经此变换原系统化

为

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \\ \dot{x}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}' + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_4] \mathbf{x}'$$

下面的定理指出,在这一特定的变换下,原系统将化为标准型。

定理 2-28 卡尔曼标准分解定理 定常线性系统(2-9)在 Σ_{CO} 坐标下化为如下标准型:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & 0 & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \mathbf{x}' + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-21)$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad \mathbf{C}_2 \quad 0 \quad \mathbf{C}_4] \mathbf{x}' \quad (2-22)$$

并且原系统分解为如下四个子系统:

$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}'_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}'_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{y}_1 = 0\mathbf{x}'_1 = 0 \end{cases}$$

式中 $\mathbf{f}_1 = \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}'_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}'_3 + \mathbf{A}_{14}\mathbf{x}'_4$

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}'_2 = \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}'_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2\mathbf{x}'_2 \end{cases}$$

式中 $\mathbf{f}_2 = \mathbf{A}_{24}\mathbf{x}'_4$

$$S_3: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}'_3 = \mathbf{A}_{33}\mathbf{x}'_3 + \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{y}_3 = 0\mathbf{x}'_3 = 0 \end{cases}$$

式中 $\mathbf{f}_3 = \mathbf{A}_{34}\mathbf{x}'_4$

$$S_4: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}'_4 = \mathbf{A}_{44}\mathbf{x}'_4 \\ \mathbf{y}_4 = \mathbf{C}_4\mathbf{x}'_4 \end{cases}$$

子系统 S_1 没有观测输出,子系统 S_2 完全能控完全能观测,子系统 S_3 不受任何控制变量的影响,也没有输出,子系统 S_4 不受任何控制变量的影响。

证明 需证明 $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_{32} = \mathbf{A}_{41} = \mathbf{A}_{42} = \mathbf{A}_{43} = \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4 = \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_3 = 0$

首先由 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$ 及 $X_c = X_1 \oplus X_2$ 有

$$X = X_c \oplus X_{nc} \quad X_{nc} = X_3 \oplus X_4$$

由定理 2-19 直接得到 $\mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_{32} = \mathbf{A}_{41} = \mathbf{A}_{42} = 0, \mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4 = 0$ 。

由于 $X_{no} = X_1 \oplus X_3, X$ 又可分解为 $X = X_{no} \oplus X_o, X_o = X_2 \oplus X_4$ 。由定理 2-23 系统化为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}'_1 \\ \dot{\mathbf{x}}'_3 \\ \dot{\mathbf{x}}'_2 \\ \dot{\mathbf{x}}'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad C_2 \quad C_4] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_3 \\ x'_2 \\ x'_4 \end{bmatrix}$$

即证明了 $A_{21} = A_{23} = A_{41} = A_{43} = 0$ 和 $C_1 = C_3 = 0$ 。这就完成了式(2-21)、式(2-22)的证明。

下面验证子系统 S_2 能控能观测。由 2.8 习题中的第 5 题, 只需验证 (A_{22}, B_2) 能控, (C_2, A_{22}) 能观测。

由定理 2-18 知 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 能控, 因此相应的能控性矩阵

$$\begin{matrix} n_1 \text{ 行} \\ n_2 \text{ 行} \end{matrix} \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 + A_{12}B_2 & A_{11}(A_{11}B_1 + A_{12}B_2) + A_{12}A_{22}B_2 & \dots \\ B_2 & A_{22}B_2 & A_{22}^2B_2 & \dots \end{bmatrix}$$

秩为 $n_1 + n_2$, 于是它的后 n_2 行必有 n_2 个线性无关列。否则, 设它的后 n_2 行线性无关的列数为 $\bar{n} < n_2$, 则经初等变换, 能控性矩阵可化为

$$\begin{matrix} n_1 \text{ 列} \\ n_2 \text{ 列} \end{matrix} \begin{bmatrix} \times & \dots & \dots & \times & \times & \dots & \times \\ \dots & & & \dots & \dots & & \dots \\ \times & \dots & \dots & \times & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \underbrace{\times \dots \times}_{\bar{n} \text{列}} & & \dots \end{bmatrix}$$

这与它的秩为 $n_1 + n_2$ 矛盾。因此矩阵 $[B_2 \quad A_{22}B_2 \quad \dots \quad A_{22}^{n_1+n_2-1}B_2]$ 秩为 n_2 , 因此

$$\text{rank}[B_2 \quad A_{22}B_2 \quad \dots \quad A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2,$$

即 (A_{22}, B_2) 能控。

类似地可以证明 (C_2, A_{22}) 能观测。

注意, 系统 S_1 有控制输入, 但并不保证 (A_{11}, B_1) 能控。系统 S_4 有观测输出, 但并不保证 (C_4, A_{44}) 能观测。例如, 系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]x$$

显然已经是标准形式, 并且 $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ 能控, 但系统 $S_1: \dot{x}_1 = x_1 + x_2$ 显然是不能控的。但在很多著作中还是简单地说 S_1 是能控不能观测子系统, S_3 是不能控不能观测子系统, S_4 是不能控能观测子系统。

将定常线性系统化为式(2-21)、式(2-22)的形式称为标准分解。式(2-21)、式(2-22)称为定常线性系统的标准结构形式。

图 2-4 是定理 2-23 中分解的 4 个子系统之间的关系示意图。

系统化为标准结构形式,为研究定常线性系统的某些性质提供了方便,这一点在下面的讨论中可以看到。

【例 2-6】 将例 2-3 中的系统做标准分解。

解 在例 2-3 和例 2-5 中已分别求出了它的能控子空间和不能观测子空间,它们分别是:

$$X_c = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad X_{no} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

于是 $X_1 = X_c \cap X_{no} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

先选取 $e'_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ 作为 X_1 的基组;由 $X_c = X_1 \oplus X_2$,可选取 $e'_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$;由 $X_{no} = X_1 \oplus X_3$,可选取 $e'_3 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$;由 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$,可选取 $e'_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 。于是新坐标系为 $\Sigma_{CO} = \{e'_1 \ e'_2 \ e'_3 \ e'_4\}$ 。经坐标变换得

$$x = Tx' \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

原系统化为:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 2] x'$$

这就是所求的标准型。

2.6.2 系统的零点极点相消问题的讨论

在传递函数阵中,各元素的分子同被消去一个公因式的现象,称为传递函数阵中的零极相消现象。下面通过对定常线性系统进行标准分解研究零极相消现象,这是标准分解的一个典型应用。先证明以下定理:

定理 2-29 定常线性系统的传递函数阵等于它的能控能观测子系统的传递函数阵。

证明 由于经非异线性变换定常线性系统的传递函数阵不变。因此定常线性系统的传递函数阵就是它的标准分解形式(2-21)、(2-22)的传递函数阵。于是

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

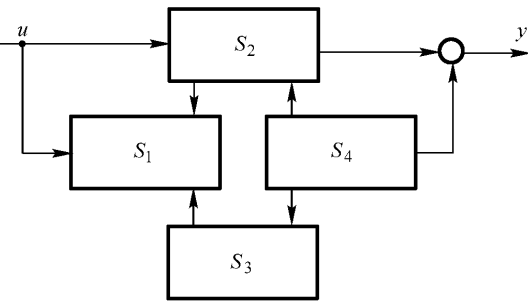


图 2-4 系统的标准分解

$$\begin{aligned}
&= [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4] \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & sI - A_{22} & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & sI - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & sI - A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4] \begin{bmatrix} (sI - A_{11})^{-1} & * & * & * \\ 0 & (sI - A_{22})^{-1} & * & * \\ & & (sI - A_{33})^{-1} & * \\ & & & (sI - A_{44})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2
\end{aligned}$$

定理证完。

由定理 2-29 可以看出, 传递函数阵只描述了系统的能控能观测部分。

原来系统的极点集为: $\sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$, $\sigma(A_{22})$ 称为能控能观测极点集。 $\Lambda = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$ 称为该系统的固定模。

由定理 2-29 可知, 系统的传递函数阵为

$$G(s) = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 = \frac{C_2 \text{Adj}(sI - A_{22})B_2}{|sI - A_{22}|}$$

因此, 得到下式

$$G(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A)B}{\prod_{i=1}^4 |sI - A_{ii}|} = \frac{C_2 \text{Adj}(sI - A_{22})B_2}{|sI - A_{22}|} \quad (2-23)$$

如果系统不是完全能控、完全能观测的, 则必有 $n_2 < n$ 。所以传递函数阵中必有零点和极点相消的现象。消去的极点是全部固定模 Λ 。

对单输入单输出定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + bu \quad y = cx \quad (2-24)$$

传递函数

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{c \text{Adj}(sI - A)b}{\det(sI - A)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

若上式中分子和分母有公因式相消, 则称该单输入单输出系统有零极相消。关于系统(2-24)有如下定理:

定理 2-30 单输入单输出的定常线性系统(2-24), 存在零极相消的充分必要条件是它不是完全能控完全能观测的, 并且消去的极点是系统的全部固定模。

定理 2-30 的充分性是式(2-23)的直接结果, 必要性的证明略去。定理 2-30 对多输入多输出系统是否也成立呢? 前面已经讲了, 如果多输入多输出系统不是完全能控完全能观测的, 则必有零极点相消, 并且消去的极点是系统的全部固定模。那么, 如果系统完全能控完全能观测, 传递函数阵中还会有零极相消的现象呢? 这个问题的回答依赖于对零极相消的定义。首先看下面的例子:

【例 2-7】 考虑定常线性系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

容易验证这个系统是完全能控完全能观测的,由于系统矩阵为上三角形矩阵,因此它的特征多项式为 $|sI - A| = (s - 1)^2(s - 4)$,易知

$$\text{Adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s - 1)(s - 4) & 3(s - 1) & 2(s - 1) \\ 0 & (s - 1)^2 & 2(s - 1) \\ 0 & 0 & (s - 1)(s - 4) \end{bmatrix}$$

于是

$$G(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A) B}{|sI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2(s - 1) & (s - 1)(s - 4) \\ (s - 1)(s - 4) & 0 \end{bmatrix}}{(s - 1)^2(s - 4)}$$

$$= \frac{1}{(s - 1)(s - 4)} \begin{bmatrix} 2 & s - 4 \\ s - 4 & 0 \end{bmatrix}$$

这个例子表明,当系统完全能控、完全能观测时,传递函数阵中仍可能有零极相消现象。传递函数阵中的元素都是真分式,消去的零点是真分式分子的零点,这样的零点称为初等零点。此外,对定常线性系统还可以定义几种其他类型的零点,这里不再介绍,读者可参看文献[36]。

例 2-7 中,传递函数阵的元素的分子分母同消去了一个因子 $(s - 1)$,但经过对消以后的传递函数阵仍保留了 $s = 1$ 和 $s = 4$ 两个极点。这样的对消现象对研究多变量系统意义不大。因此在文献[6]中对零极相消的定义排除了这种情况,在那里如果传递函数阵

$$G(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A) B}{|sI - A|}$$

的分母的零点没有因与分子相消而消失,而只是因相消而降低了重数,就称传递函数阵没有零极相消,在这样的定义下[6]证明了多变量系统的如下定理:

定理 2-31 如果定常线性系统是完全能控、完全能观测的,则它的传递函数阵没有零极相消。

零极相消现象在研究系统的稳定性时是值得注意的,下面的例可以说明这一点。

【例 2-8】 考虑定常线性系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] x$$

它的传递函数为

$$G(s) = c(sI - A)^{-1} b = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{s - 1}{(s + 2)(s - 1)} = \frac{1}{s + 2}$$

从输入输出关系来研究 $G(s) = 1/(s + 2)$,系统是稳定的,但从状态方程来研究系统的极

点为 $s = -2$ 和 $s = 1$, 系统是不稳定的。因此, 我们称该系统是输入输出稳定的, 但不是状态稳定的。这一现象在研究系统的稳定性时值得注意。

2.7 最小实现问题

控制系统以传递函数阵的形式给出输入 - 输出关系时, 由传递函数阵求描述该系统的状态方程的问题称为实现问题。已知控制系统的传递函数阵为 $G(s)$, 如果存在状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

使得 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 。则称 $G(s)$ 是可实现的, 并称 (C, A, B, D) 为 $G(s)$ 的一个实现。当 D 为零矩阵时, 称 (C, A, B) 为 $G(s)$ 的一个实现。

研究实现问题的重要性在于, 很多分析方法和设计方法是按状态方程开发的, 为了应用这些方法, 对于由传递函数描述的系统必须求出它的状态方程实现。例如, 对于由传递函数描述的系统计算它的阶跃响应, 用 MATLAB 是先求出它的状态方程实现, 再计算它的阶跃响应。

定理 2-24 指出, 定常线性系统的传递函数阵等于它的能控能观测部分的传递函数阵, 这表明 (C, A, B) 的能控能观测部分 (C_2, A_2, B_2) 与 (C, A, B) 有相同的传递函数阵, 即对于一个传递函数阵可以有不同维数的实现。传递函数阵的维数最小的实现称为它的最小实现。

本节讨论最小实现的性质和如何求传递函数阵的最小实现。由于传递函数阵的最小实现是传递函数阵的维数最小的实现, 求最小实现的方法是先求出传递函数阵的一个具体的实现, 再进一步求它的最小实现。

为了讨论简单, 在本节中假设传递函数阵的每个元素都是 s 的真有理分式, 如果不是这种情况, 经过简单的处理可以化成这种情况。

2.7.1 单输入单输出系统的传递函数的实现

1. 单输入单输出系统的传递函数为真有理分式的情况

设单输入单输出系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2-25)$$

则输入 u 的拉普拉斯变换 $U(s)$ 和输出 y 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 满足

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s)$$

即

$$Y(s)[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0] = U(s)$$

经逆拉普拉斯变换可以得出输入 u 和输出 y 满足微分方程:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u \quad (2-26)$$

引入状态变量

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}}, \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}$$

则 n 阶微分方程(2-26)化为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

系统的输出方程为

$$y = x_1$$

写成矩阵的形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2-27)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} \quad (2-28)$$

式(2-27)、式(2-28)是传递函数(2-25)的一个实现。容易验证式(2-27)是完全能控的,因此,这一实现称为传递函数(2-25)的能控标准型实现。

2. 传递函数有零点的情况

设单输入单输出系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n \quad (2-29)$$

为应用前面已经导出的结果,令

$$G_0(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{Y_0(s)}{U(s)}$$

那么,由1的结果,式(2-27)和 $y_0 = x_1$ 是 $G_0(s)$ 的一个实现。由式(2-29)有

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)G_0(s)U(s) \\ &= (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)Y_0(s) \end{aligned}$$

即
$$y(t) = b_m \frac{d^m y_0}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dy_0}{dt} + b_0 y_0 = b_0 x_1 + b_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x_1}{dt^m}$$

或者

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x} \quad (2-30)$$

即式(2-27)、式(2-30)为传递函数(2-29)的能控标准型实现。

【例 2-9】 传递函数

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

的能控标准型实现式(2-27)、式(2-30)能观测的充分必要条件是 $\mathbf{c} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \mathbf{b}$ 和 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)$ 没有公共因子相消,式中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]$$

证明 在代数中 A_c 称为伴随矩阵, 如果它的特征值为 s , 容易验证 s 对应的右特征矢量为

$$v = [1 \quad s \quad \dots \quad s^{n-1}]^T$$

由 PBH 检验, (c, A_c) 能观测的充分必要条件是没有 A_c 的右特征矢量与 c 正交。对于该例 A_c 的右特征矢量与 c 正交, 又等价于

$$cv = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 = c \operatorname{adj}(sI - A_c)b = 0$$

由定义

$$\det(sI - A_c) = 0$$

即 $c \operatorname{adj}(sI - A_c)b$ 和 $\det(sI - A_c)$ 有公共因子相消。而没有 A_c 的右特征矢量与 c 正交, 则

$$cv = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 = c \operatorname{adj}(sI - A_c)b \neq 0$$

即 $c \operatorname{adj}(sI - A_c)b$ 和 $\det(sI - A_c)$ 没有公共因子相消。这就证明了本例的命题。

如果

$$G(s) = \frac{s+5}{s^3+8s^2+17s+10}$$

则

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [5 \quad 1 \quad 0]$$

显然 $\det(sI - A_c) = (s+1)(s+2)(s+5)$ $c \operatorname{adj}(sI - A_c)b = s+5$

有公因子 $s+5$, 因此这个能控标准型不完全能观测。容易验证它的能观测性矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -10 & -17 & -3 \end{bmatrix}$$

行列式为 0。

由关于能控性与能观测性的对偶定理, 式(2-27)、式(2-30)的对偶系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-31)$$

$$y = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]x \quad (2-32)$$

是能观测的, 并且与式(2-27)、式(2-30)有相同的传递函数。称式(2-31)、式(2-32)为传递函数(2-29)的能观测标准型实现。

上面已经讲了传递函数的能控标准型实现和能观测标准型实现, 还可以求出其他形式的

实现 这里不再讨论。

2.7.2 多输入多输出系统的传递函数阵的实现

考虑 m 个输入 r 个输出的系统。描述其输入输出关系的是一个 r 行 m 列的矩阵,记为 $G(s)$ 。设 $G(s)$ 为严格真有理分式阵,即它的每个元素都是真有理分式,以 $g(s)$ 表示 $G(s)$ 的元素的分子的首项系数为 1 的最小公倍式,记为

$$g(s) = s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + a_0$$

于是传递函数阵可改写为

$$G(s) = N(s)(g(s))^{-1} = N(s)(g(s)I)^{-1}$$

式中
$$N(s) = N_0 + N_1s + \dots + N_{q-1}s^{q-1}$$

N_0, N_1, \dots, N_{q-1} 是 r 行 m 列的常数矩阵。

【例 2-10】 当

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

时, $G(s)$ 的元素的分子的首项系数为 1 的最小公倍式 $g(s) = s(s+1)(s-1)$, 于是 $G(s)$ 可以改写为

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} \frac{s(s-1)}{g(s)} & \frac{s(s+1)}{g(s)} \\ 0 & \frac{(s+1)(s-1)}{g(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(s-1) & s(s+1) \\ 0 & (s+1)(s-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{g(s)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{g(s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^2 - s & s^2 + s \\ 0 & s^2 - 1 \end{bmatrix} (g(s)I)^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 \right\} (g(s)I)^{-1} \\ &= (N_0 + N_1s + N_2s^2)(g(s)I)^{-1} \end{aligned}$$

式中
$$N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求得 N_0, N_1, \dots, N_{q-1} 后, 输入输出关系可表示为

$$Y(s) = G(s)U(s) = N(s)(g(s)I)^{-1}U(s)$$

为利用前面导出的关于真有理分式的实现的结果, 将上式改写为

$$Y(s) = N(s)Y_0(s) = N_0Y_0(s) + N_1sY_0(s) + \dots + N_{q-1}s^{q-1}Y_0(s) \quad (2-33)$$

式中

$$Y_0(s) = (g(s)I)^{-1}U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{g(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{g(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \dots \\ u_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1(s)}{g(s)} \\ \dots \\ \frac{u_m(s)}{g(s)} \end{bmatrix}$$

由于 $1/g(s)$ 的实现为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{q-2} & -a_{q-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

将 m 个这样的系统叠到一起,即得到

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{I} \\ -a_0 \boldsymbol{I} & -a_1 \boldsymbol{I} & \dots & -a_{q-2} \boldsymbol{I} & -a_{q-1} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} u \quad (2-34)$$

$$\boldsymbol{y}_0 = [\boldsymbol{I} \ 0 \ \dots \ 0] \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$$

这里 \boldsymbol{I} 是 m 阶单位矩阵, \boldsymbol{x} 是 $m \times n$ 维状态矢量, \boldsymbol{x}_1 是 m 维分状态矢量。由式(2-33)经逆拉普拉斯变换可以得出输出 \boldsymbol{y} 为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{N}_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{N}_1 \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt} + \dots + \boldsymbol{N}_{q-1} \frac{d^{q-1} \boldsymbol{x}_1}{dt^{q-1}} = \boldsymbol{N}_0 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{N}_1 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \boldsymbol{N}_{q-1} \boldsymbol{x}_q$$

或者
$$\boldsymbol{y}(t) = [\boldsymbol{N}_0 \ \boldsymbol{N}_1 \ \dots \ \boldsymbol{N}_{q-1}] \boldsymbol{x} \quad (2-35)$$

则式(2-34)、式(2-35)就是传递函数阵 $G(s)$ 的一个实现。容易验证它是完全能控的,因而是 $G(s)$ 的能控实现。利用对偶关系还可以得到 $G(s)$ 的能观测实现。

可以直接验证系统(2-34)(2-35)是传递函数阵 $G(s)$ 的一个实现^[43],记

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{I} \\ -a_0 \boldsymbol{I} & -a_1 \boldsymbol{I} & \dots & -a_{q-2} \boldsymbol{I} & -a_{q-1} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_c = [\boldsymbol{N}_0 \ \boldsymbol{N}_1 \ \dots \ \boldsymbol{N}_{q-1}]$$

下面验证
$$\boldsymbol{C}_c (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c)^{-1} \boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{N}(s)(\boldsymbol{g}(s)\boldsymbol{I})^{-1} = \boldsymbol{G}(s)$$

首先注意到 $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c)^{-1} \boldsymbol{B}_c$ 是矩阵方程 $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}_c$ 的解,式中

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{X}_q \end{bmatrix}$$

于是上面的矩阵方程又可以改写为

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{X}_1 \\ s\mathbf{X}_2 \\ \dots \\ s\mathbf{X}_{q-1} \\ s\mathbf{X}_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{q-2} & -a_{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \dots \\ \mathbf{X}_{q-1} \\ \mathbf{X}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

由这个方程得到

$$s\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad (2-36)$$

$$s\mathbf{X}_q + a_0\mathbf{X}_1 + a_1\mathbf{X}_2 + \dots + a_{q-1}\mathbf{X}_q = \mathbf{I} \quad (2-37)$$

由式(2-36)得到

$$\mathbf{X}_2 = s\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3 = s\mathbf{X}_2 = s^2\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_q = s\mathbf{X}_{q-1} = s^{q-1}\mathbf{X}_1$$

将这些关系代入式(2-37)得到

$$(s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + a_0)\mathbf{X}_1 = g(s)\mathbf{X}_1 = \mathbf{I}$$

于是

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{g(s)}\mathbf{I} \quad \mathbf{X}_2 = \frac{s}{g(s)}\mathbf{I} \quad \dots \quad \mathbf{X}_q = \frac{s^{q-1}}{g(s)}\mathbf{I}$$

因此 $C_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c = C_c\mathbf{X} = [N_0 \quad N_1 \quad \dots \quad N_{q-1}] \frac{1}{g(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ s\mathbf{I} \\ \dots \\ s^{q-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(s)(g(s)\mathbf{I})^{-1}$

这就验证了

$$C_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c = \mathbf{N}(s)(g(s)\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{G}(s)$$

【例 2-11】 求传递函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1)^2(s+2) & -1/(s+1)(s+2) \\ 0 & 1/(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

的能控实现。

先求出 $G(s)$ 的分母的最小公倍式

$$g(s) = (s+1)^2(s+2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

于是

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -(s+1) \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} (g(s)\mathbf{I})^{-1}, \mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^2$$

$G(s)$ 的能控实现为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \\ -2\mathbf{I} & -5\mathbf{I} & -4\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

2.7.3 最小实现

上节已经讲了如何求传递函数阵 $G(s)$ 的一个能控实现, 本节再证明 $G(s)$ 的实现是最小实现的充分必要条件是它是能控能观测的。那么从它的能控实现中分解出能观测部分就是所求的最小实现。

定理 2-32 $G(s)$ 的实现是最小实现的充分必要条件是它是完全能控完全能观测的。

证明 必要性 反设 $G(s)$ 的最小实现 (C, A, B) 不是完全能控完全能观测的, 将它化为标准结构形式, 则由定理 2-29, 子系统 (C_2, A_{22}, B_2) 也是 $G(s)$ 的实现, 但由于 (C, A, B) 不是完全能控完全能观测的, 子系统 (C_2, A_{22}, B_2) 的维数 n_2 小于实现 (C, A, B) 的维数, 这与 (C, A, B) 是 $G(s)$ 的最小实现矛盾。

充分性 设 (C, A, B) 是 $G(s)$ 的完全能控完全能观测的实现, 其维数为 n , 再设 $G(s)$ 有一个实现 $(\hat{C}, \hat{A}, \hat{B})$ 的维数 $n' < n$, 则有

$$G(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = C(sI - A)^{-1}B$$

经逆拉普拉斯变换可以得出 $L^{-1}(sI - A) = e^{At}$, 上式经逆拉普拉斯变换化为

$$\hat{C}e^{At}\hat{B} = Ce^{At}B$$

即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{C} \frac{\hat{A}^i}{i!} \hat{B} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} C \frac{A^i}{i!} B t^i$$

因而 $\hat{C}\hat{B} = CB, \hat{C}\hat{A}\hat{B} = CAB, \dots, \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} = CA^{n-1}B, \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} = CA^nB$

于是能控性矩阵与能观测性矩的积

$$VU = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] =$$

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \dots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} \\ \hat{C}\hat{A}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^2\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1}\hat{B} & \hat{C}\hat{A}^n\hat{B} & \dots & \hat{C}\hat{A}^{2n-2}\hat{B} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \dots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = \hat{V}\hat{U}$$

应用关于矩阵秩的 Sylvester 不等式

$$\text{rank}(\mathbf{V}) + \text{rank}(\mathbf{U}) - n \leq \text{rank}(\mathbf{VU}) \leq \min(\text{rank}(\mathbf{V}), \text{rank}(\mathbf{U}))$$

及 $\text{rank}(\mathbf{U}) = \text{rank}(\mathbf{V}) = n$ 得到 $\text{rank}(\mathbf{VU}) = n$, 类似地得到 $\text{rank}(\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{U}}) = n' < n$, 这与 $\mathbf{VU} = \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{U}}$ 矛盾 , 定理证完。

由这个定理我们得到如下的求最小实现的方法 :

第一步 求 $G(s)$ 的一个实现

第二步 化为标准结构形式 , 其能控能观测子系统就是 $G(s)$ 的一个最小实现。

如果按照上面的做法第一步求出的是 $G(s)$ 的能控实现 , 则第二步只需将它化为能观测结构形式 , 由此得到的能观测子系统就是 $G(s)$ 的一个最小实现。

在第一步得到一个实现以后 , 第二步由一个实现求最小实现可以由 MATLAB 函数 minreal 完成 , 其调用格式为

$$[\text{am } \text{bm } \text{cm } \text{dm}] = \text{minreal}(a \ b \ c \ d)$$

【例 2-12】 已给传递函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

求它的最小实现。

传递函数阵分母的最小公倍式为 $g(s) = s^2$, 于是 $G(s)$ 可以改写为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} s & s \\ s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s \right\} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

那么 $G(s)$ 的一个实现为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

这是 $G(s)$ 的一个能控实现。从这个系统中分离出能观测部分 , 就得到了 $G(s)$ 的最小实现。

实际上这个实现展开写应该是

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

这个系统已经是能观测结构形式 , 其能观测部分为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

这个系统是在能控实现中分离出的能观测部分,因而它是能控能观测的,因此它是 $G(s)$ 的能控能观测的实现,由定理 2-32 知,它就是 $G(s)$ 的最小实现。

以上是标准的做法,适用于求一切元素为真有理分式的传递函数阵的最小实现。对本例给出的传递函数阵也可以用如下较简单的方法求出它的最小实现。

首先设 $Y(s) = [Y_1(s) \ Y_2(s)]^T$ 是输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换, $U(s) = [U_1(s) \ U_2(s)]^T$ 是输入 $u(t)$ 的拉普拉斯变换。于是

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

由此得到

$$Y_1(s) = \frac{1}{s}U_1(s) + \frac{1}{s}U_2(s) \quad Y_2(s) = \frac{1}{s}U_1(s) + \frac{1}{s^2}U_2(s)$$

由上述两式得到该两输入两输出系统的框图如下：

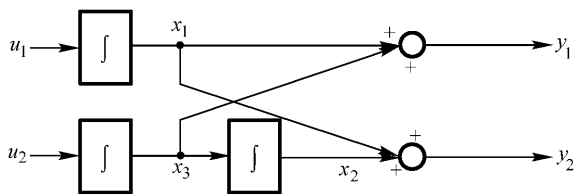


图 2-5 例 2-13 的框图

依据这个框图可直接写出系统状态方程和输出方程如下：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u_2 \\ y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

容易验证这个系统是完全能控完全能观测的,因此是最小实现。

2.8 习题

1. 判断下列系统的能控性

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

(2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

(3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

2. 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1-a & a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} u$$

试问 a, b 满足什么条件时, 系统完全能控。

3. 设 A 为 n 阶方阵, 试证明对任 $k \geq n$ 成立 $[A \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B]$ 的秩与 $[B \quad AB \quad \dots \quad A^{k-1}B]$ 的秩相等。

4. 判断下列系统的能观测性

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

5. 已知定常线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

完全能控、完全能观测, 试证明对任意连续函数 $f(t)$, 系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + f(t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

也是完全能控、完全能观测的。

6. 画出传递函数

$$G(s) = \frac{s-7}{s^2+5s+4} = \frac{-8/3}{s+1} + \frac{11/3}{s+4}$$

的并联实现框图, 并写出它的状态方程和输出方程。

7. 画出传递函数

$$G(s) = \frac{s-7}{s^2+5s+4} = \frac{s-7}{s+4} \cdot \frac{1}{s+1} = \left(1 - \frac{11}{s+4}\right) \cdot \frac{1}{s+1}$$

的串联实现框图, 并写出它的状态方程和输出方程。

8. 将下列系统化为能控结构形式

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

(2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

9. 将下列系统化为能观测结构形式

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = [0 \quad -2 \quad 1] \mathbf{x}$$

(2)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

(3)

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

10. 将下列系统化为标准结构形式, 并求出其传递函数阵

(1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & -3 \\ 6 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]x$$

(2)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad -2 \quad 1]x$$

11. 已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]x$$

试问该系统是否稳定, 如果不稳定能否设计一个状态反馈, 使得到的闭环系统稳定?

12. 设传递函数阵 $G(s) = G_0(s) + D$ 中, D 为常数矩阵, $G_0(s)$ 是严格真有理分式阵。

若系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

是 $G_0(s)$ 的一个最小实现, 试证明系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du$$

是 $G(s)$ 的一个最小实现。

13. 求下列传递函数阵的最小实现

(1)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

(2)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+2}{s} \end{bmatrix}$$

(3)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

第 3 章 反馈控制系统的设计

3.1 引言

反馈是现代控制理论的一个重要概念,人们常应用反馈改善系统的性能,以达到预期的目标。开环系统不带反馈,输入信号直接产生输出响应。闭环系统则将输出的测量值与期望的输出值进行比较,依据它们的差确定控制信号,对受控对象进行控制。

对于定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3-1}$$

$$y = Cx \tag{3-2}$$

设 $r(t)$ 是系统的参考输入,在状态反馈

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \tag{3-3}$$

的作用下得到闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br \tag{3-4}$$

K 称为反馈增益矩阵。

当输入为

$$u(t) = r(t) - Ky(t) \tag{3-5}$$

时,则得到一个输出反馈控制系统。应用输出反馈(3-5)得到的闭环系统的状态方程为:

$$\dot{x} = (A - BKC)x + Br \tag{3-6}$$

输出反馈常在系统的某些状态不能用做反馈时使用。

系统(3-1)的能控性是由矩阵对 (A, B) 决定的性质。应用能控性的充要条件可以证明关于能控性的如下定理:

定理 3-1 状态反馈不影响系统的能控性,即 (A, B) 能控等价于 $(A - BK, B)$ 能控。

证 应用关系式

$$[\lambda I - (A - BK) \dots B] = [\lambda I - A \dots B] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$$

以及对任意 m 行 n 列矩阵 K 矩阵

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$$

总是满秩矩阵,而满秩矩阵乘任意矩阵其秩不变,因此

$$\text{rank}[\lambda I - (A - BK) \dots B] = \text{rank}[\lambda I - A \dots B]$$

对所有 λ 成立。由能控的 PBH 判据立即得到: (A, B) 能控等价于 $(A - BK, B)$ 能控,定理证完。

类似地可证明

定理 3-2 输出反馈不影响系统地能观测性。

定理 3-2 的证明请读者完成(3.6 习题中的第 2 题)。

【例 3-1】 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad -1] x$$

这个系统是能控标准型,因而它是能控的,容易验证它也是能观测的。经状态反馈:

$$u = r - [k_1 \quad k_2] x$$

得到闭环系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3-k_1 & -4-k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \quad -1] x$$

它的能控性矩阵和能观测性矩阵分别为

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4-k_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3+k_1 & 5+k_2 \end{bmatrix}$$

显然对任意 k_1, k_2, U 的秩均为 2,因此对任意 k_1, k_2 闭环系统都是完全能控的。但是

$$|V| = 8 + k_1 + k_2$$

仅当 k_1, k_2 满足 $k_1 + k_2 \neq -8$ 时, V 的秩为 2,闭环系统才是完全能观测的,这表明状态反馈将影响系统的能观测性。

一个能控能观测的系统,经状态反馈能控性不变,经状态反馈仍然能观测的充分必要条件是:经反馈得到的闭环系统的特征值没有与系统的零点相消。对单输入单输出系统,这是定理 2-30 的直接结果。对于多输入多输出系统,这是定理 2-31 的直接结果,这时需注意定理 2-31 前面关于多输入多输出系统的零点与极点相消的的定义的说明。

3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈控制系统

3.2.1 设计方法

考虑定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

要求设计一个反馈控制

$$u = r - Kx$$

使闭环系统渐近稳定。

在考虑稳定性时可设参考输入 $r=0$,并略去负号。考虑反馈控制

$$u = Kx$$

这时闭环系统为

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

由定理 2-6 该闭环系统渐近稳定的充分必要条件是:对任一正定矩阵 Q 李雅普诺夫方程

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q$$

有惟一正定解。设 $P = Q = I$,则李雅普诺夫方程化为

$$(A + BK)^T + (A + BK) = -I$$

因此,可以由以上矩阵方程解出矩阵 K ,以它作为反馈增益矩阵,得到的闭环系统就是渐近稳定的。这样就可以用李雅普诺夫第二方法设计反馈控制系统。

3.2.2 设计实例

【例 3-2】 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} u$$

求反馈 $u = Kx$ 使闭环系统稳定。

解 取 $P = Q = I$ 及 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, 李雅普诺夫方程化为

$$\begin{bmatrix} k_{11} + k_{21} & 1 + k_{12} + k_{22} \\ 2 - 2k_{11} + k_{21} & 2 - 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{21} & 1 + k_{12} + k_{22} \\ 2 - 2k_{11} + k_{21} & 2 - 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此得到

$$\begin{cases} 2k_{11} + 2k_{21} = -1 \\ 3 - 2k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} = 0 \\ 4 - 4k_{12} + 2k_{22} = -1 \end{cases}$$

令 $k_{11} = 1$ 得到解 $k_{21} = -\frac{3}{2}$, $k_{12} = 1$, $k_{22} = -\frac{1}{2}$, 所求的反馈增益矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可以验证,当用它作为反馈增益矩阵时,得到的闭环系统的极点($A + BK$ 的特征值)实部为 -0.5 , 闭环系统渐近稳定。

如果选取 $P = \frac{1}{10}I$, $Q = I$ 解李雅普诺夫方程,可得到另一个反馈增益矩阵,这时得到的闭环系统的极点向左移动了,其实部为 -5 (3.6 习题中的第 5 题)。

如果为了保证闭环系统的响应速度,要求设计一个反馈 $u = Kx$,使闭环极点的实部小于 $-\sigma$ (σ 为正数),可应用定理 3-8,用下面的例说明具体做法。

【例 3-3】 对例 3-2 给出的系统设计反馈 $u = Kx$,使闭环极点的实部小于 -3 。

解 取 $P = Q = I$, $\sigma = 3$, 对闭环系统,式(2-3)化为

$$(A + BK)^T + (A + BK) + 6I = -I$$

对例中给出的矩阵 A , B , 上式化为

$$\begin{bmatrix} k_{11} + k_{21} & 1 + k_{12} + k_{22} \\ 2 - 2k_{11} + k_{21} & 2 - 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} k_{11} + k_{21} & 1 + k_{12} + k_{22} \\ 2 - 2k_{11} + k_{21} & 2 - 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此得到关于 k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} 的代数方程组:

$$\begin{aligned} 2k_{11} + 2k_{21} &= -7 \\ -2k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} &= -3 \\ -4k_{12} + 2k_{22} &= -11 \end{aligned}$$

令 $k_{11}=1$,解得 $k_{12}=3$, $k_{21}=-\frac{9}{2}$, $k_{22}=\frac{1}{2}$,于是

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可以验证闭环系统极点的实部为 -3.5 。

应用李雅普诺夫方程设计反馈系统 ,实质的运算是解代数方程组 ,应用起来比较方便。当然并不是所有定常线性系统都能设计一个反馈使闭环系统稳定 ,这一点将在下一节进行分析。

3.2.3 对于离散系统的相应结果

李雅普诺夫方法也可以应用于离散系统 ,对于离散时间定常线性系统

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) \quad (3-7)$$

设计反馈 $u(k) = \mathbf{K}x(k)$,使得闭环系统

$$x(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x(k)$$

渐近稳定。应用定理 2-6 '中离散时间系统的李雅普诺夫方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (3-8)$$

可以类似地设计使闭环稳定的反馈系统。方法同样是在离散时间系统的李雅普诺夫方程中 ,令 $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ 则化为 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \mathbf{0}$,如果能由此解出 \mathbf{K} 设计就完成了。

3.3 极点配置问题

由前面的分析已看到状态反馈将会影响闭环系统的极点。对某些开环不稳定的系统可以设计一个反馈控制 ,使得到的闭环系统稳定。关于定常线性系统的稳定性的定理说明了定常线性系统的极点决定了它的稳定性。除此之外 ,还有系统的其他性质也决定于系统的极点的位置 ,例如 ,系统的动态特性也在很大程度上依赖于闭环系统极点的位置。本节讨论如何设计反馈系统 ,使闭环系统有事先给定的极点的问题 ,称为极点配置问题。

关于极点配置需要解决以下问题 :

- (1) 什么样的系统能任意配置极点。
- (2) 如何配置极点。
- (3) 如何根据对系统性能的要求确定闭环极点的位置。

下面就开始讨论这些问题。

3.3.1 应用状态反馈配置极点

首先 ,讨论什么样的系统可以应用状态反馈任意配置极点的问题。由于极点的位置决定着系统的重要性质 ,能任意配置极点意味着可以通过反馈任意改变系统的某些重要性质 ,因此任意配置极点的问题应与系统的能控性紧密相关。这使我们考虑到从系统的能控结构形式出发讨论极点配置问题。

设定常线性系统已经过非奇异线性变换化为能控结构形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-9)$$

$$y = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

(A_1, B_1) 能控。显然该系统的极点集合为 $\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ 。

记 $-K = [K_c \quad K_{nc}]$ 经反馈

$$u = r - Kx = r + [K_c \quad K_{nc}] \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix}$$

得到闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_c & A_{12} + B_1 K_{nc} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

它的极点为 $\sigma(A_1 + B_1 K_c) \cup \sigma(A_2)$ 。

由以上分析得知 $\sigma(A_2)$ 经反馈不能改变, 因此如果系统(3-9)不是完全能控的, 则不能经过反馈任意配置它的所有极点。由于经非异线性变换不改变系统的能控性和系统的极点, 这一结论对一般定常线性系统也成立。那么如果一个定常线性系统是完全能控的, 是否它的所有极点都能任意配置呢? 答案是肯定的, 后面将具体给出配置极点的方法, 于是我们有如下重要定理。

定理 3-3 系统 (A, B) 通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件是 (A, B) 完全能控。

下面给出能控系统配置闭环极点的方法。

首先考虑单输入能控系统的极点配置方法, 从能控标准型入手, 考虑单输入能控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

该系统在反馈 $u = kx + r = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]x + r$ 作用下, 得到闭环系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 & \dots & \dots & -a_{n-1} + k_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (3-11)$$

容易计算该闭环系统的特征多项式为

$$s^n + (\alpha_{n-1} - k_n)s^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_2)s + (\alpha_0 - k_1) \quad (3-12)$$

假设要求将系统的极点配置到复平面上事先给定的 n 个点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 这 n 个极点中如有复数必成共轭对出现。由此可以计算要求的闭环系统的特征多项式:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (3-13)$$

对比式(3-12)和(3-13)知为实现要求的闭环极点, 只需取 k_1, \dots, k_n 使得

$$\alpha_0 = a_0 - k_1 \quad \alpha_1 = a_1 - k_2 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} = a_{n-1} - k_n$$

由此解出

$$k_1 = a_0 - \alpha_0 \quad k_2 = a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad k_n = a_{n-1} - \alpha_{n-1}$$

于是

$$k = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}] \quad (3-14)$$

即所求。

对一般的单输入能控系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$

先将它变换为能控标准型,然后再配置极点,为此作变换

$$x = Tx'$$

$$T = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \dots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

式中 $q = [0 \dots 0 \ 1]U^{-1}$, $U = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ 经过上述变换原系统化为

$$\dot{x}' = T^{-1}ATx' + T^{-1}bu$$

由于 $qU = [0 \dots 0 \ 1]U^{-1}U = [0 \dots 0 \ 1]$ 及 $qU = [qb \dots qAb \dots \dots \dots qA^{n-1}b]$ 因此

$$qb = 0 \quad qAb = 0 \quad \dots \quad qA^{n-2}b = 0 \quad qA^{n-1}b = 1$$

这意味着

$$T^{-1}b = \begin{bmatrix} qb \\ qAb \\ \dots \\ qA^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下面再证明 $T^{-1}AT$ 为自然标准型矩阵,即

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

设 A 的特征多项式为 $|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ 那么

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \dots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$$

式(3-15)得证。这样就把单输入能控系统化成了能控标准型,因而可按式(3-14)任意配置极点。在上式中我们用到了等式

$$A^n = -a_0I - a_1A - \dots - a_{n-1}A^{n-1}$$

这是凯莱—哈密顿定理给出的。

由(3-14)得到的反馈 $u = kx' + r$ 再返回原坐标 x 得到

$$u = kT^{-1}x + r = \tilde{k}x + r \quad (3-16)$$

即所求,其中 $\tilde{k} = kT^{-1}$ 。

【例 3-4】 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈使闭环极点为 $-1, -2+3j, -2-3j$ 。

解 首先计算系统的特征多项式

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^3 - 3s - 2s + 6$$

第二步计算要求的特征多项式

$$(s+1)(s+2-3j)(s+2+3j) = s^3 + 5s^2 + 17s + 13$$

由式(3-17)得出

$$\mathbf{k} = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad a_2 - \alpha_2] = [-7 \quad -19 \quad -8]$$

为返回原坐标,计算

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{U}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{qA} \\ \dots \\ \mathbf{qA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

于是 $u = \mathbf{kT}^{-1}\mathbf{x} + r = [-8 \quad -35 \quad -136]\mathbf{x} + r$
即所求。

MATLAB 函数 `place` 用来计算单输入系统状态反馈配置极点的反馈增益矢量,调用格式是

$$\mathbf{k} = \text{place}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})$$

\mathbf{p} 的输入形式是将要求配置的极点写成一个行矢量。对本例 $\mathbf{p} = [-1 \quad -2+3j \quad -2-3j]$

下面讨论多输入系统的极点配置问题,考虑多输入能控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-17)$$

先求出一个状态反馈,将多输入能控系统化为对一个输入变量是能控的,然后再按单输入系统配置极点的方法配置极点。具体做法如下:

设 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m]$,由于假设了多输入系统(3-17)能控,因此它的能控性矩阵 $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 的秩为 n 。将 \mathbf{U} 的列矢量按如下方式重新排列:

$$\{\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1 \quad ; \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2 \quad ; \dots \quad ; \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m\}$$

从这 $m \times n$ 列中自左至右选取线性无关组,得到矩阵:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 \quad ; \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 \quad ; \dots \quad ; \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \dots \mathbf{A}^{\mu_m-1}\mathbf{b}_m] \quad (3-18)$$

$\mathbf{A}^{\mu_1}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}^{\mu_2}\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{A}^{\mu_m}\mathbf{b}_m$ 均是 \mathbf{Q} 中它左面的列的线性组合,因而不再出现在矩阵 \mathbf{Q} 中。令

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{e}_2 & ; & 0 & \dots & 0 & \mathbf{e}_3 & ; & \dots & & \mathbf{e}_m & ; & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 第 μ_1 列 第 $\mu_1 + \mu_2$ 列 第 $\mu_1 + \dots + \mu_{m-1}$ 列 第 n 列

式中 \mathbf{e}_i 是 m 阶单位矩阵的第 i 列。

可以证明,应用上面的矩阵 Q 和 S 构造的矩阵 $\hat{K} = SQ^{-1}$ 将原系统化为单输入能控的。

引理 3-1 设 $b_1 \neq 0$, 在反馈 $u = \hat{K}x + v = SQ^{-1}x + v$ 作用下, 闭环系统

$$\dot{x} = (A + B\hat{K})x + b_1v_1$$

能控, 其中 v_1 是 v 的第一个分量。

证明 由 \hat{K} 的定义有 $\hat{K}Q = S$ 即

$$\begin{aligned} \hat{K} [b_1 \quad Ab_1 \dots A^{\mu_1-1}b_1 \quad ; b_2 \quad Ab_2 \dots A^{\mu_2-1}b_2 \quad ; \dots \quad ; b_m \quad Ab_m \dots A^{\mu_m-1}b_m] \\ = [0 \dots 0e_2 \quad 0 \dots 0e_3 \quad ; \dots \quad 0 \dots 0e_m \quad 0 \dots 0] \end{aligned}$$

由此得到下面一系列的等式:

$$\begin{aligned} \hat{K}b_1 = 0, \hat{K}Ab_1 = 0, \dots, \hat{K}A^{\mu_1-2}b_1 = 0, \hat{K}A^{\mu_1-1}b_1 = e_2 \\ \hat{K}b_2 = 0, \hat{K}Ab_2 = 0, \dots, \hat{K}A^{\mu_2-2}b_2 = 0, \hat{K}A^{\mu_2-1}b_2 = e_3 \\ \hat{K}b_{m-1} = 0, \hat{K}Ab_{m-1} = 0, \dots, \hat{K}A^{\mu_{m-1}-2}b_{m-1} = 0, \hat{K}A^{\mu_{m-1}-1}b_{m-1} = e_m \\ \hat{K}b_m = 0, \hat{K}Ab_m = 0, \dots, \hat{K}A^{\mu_m-2}b_m = 0, \hat{K}A^{\mu_m-1}b_m = 0 \end{aligned}$$

记 $\bar{A} = A + B\hat{K}$, 下面证明 (\bar{A}, b_1) 能控。为此逐次计算 (\bar{A}, b_1) 的能控性矩阵的列:

$$\bar{A}b_1 = (A + B\hat{K})b_1 = Ab_1 + B\hat{K}b_1 = Ab_1$$

$$\bar{A}^2b_1 = \bar{A}(Ab_1) = (A + B\hat{K})Ab_1 = A^2b_1$$

...

$$\bar{A}^{\mu_1-1}b_1 = \bar{A}(A^{\mu_1-2}b_1) = (A + B\hat{K})A^{\mu_1-2}b_1 = A^{\mu_1-1}b_1$$

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1 = \bar{A}(A^{\mu_1-1}b_1) = (A + B\hat{K})A^{\mu_1-1}b_1 = A^{\mu_1}b_1 + B\hat{K}A^{\mu_1-1}b_1$$

由 Q 的构造方法 $A^{\mu_1}b_1$ 是 b_2 左边的列的线性组合, 用 \hat{b}_2 表示。于是上式化为

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1 = \hat{b}_2 + Be_2 = \hat{b}_2 + b_2$$

$$\bar{A}^{\mu_1+1}b_1 = (A + B\hat{K})(\hat{b}_2 + b_2) = Ab_2 + B\hat{K}\hat{b}_2 + A\hat{b}_2 + B\hat{K}b_2$$

式中 $B\hat{K}b_2 = 0$, 通过具体分析不难得出 $B\hat{K}\hat{b}_2$ 和 $A\hat{b}_2$ 都是 Q 中 Ab_2 左边的列的线性组合, 用 $\hat{A}\hat{b}_2$ 表示, 于是

$$\bar{A}^{\mu_1+1}b_1 = Ab_2 + \hat{A}\hat{b}_2$$

由上面的分析可以看出, S 中相应的列放一个 e_i 是为了在 $\bar{A}^{\mu_1+\dots+\mu_i}b_i$ 项转换为 b_{i+1} 。类似于上面的推倒可以得到

$$\bar{A}^{\mu_1+\mu_2}b_1 = \hat{b}_3 + b_3$$

...

$$\bar{A}^{n-1}b_1 = A^{\mu_m-1}b_m + \overbrace{A^{\mu_m-1}b_m}$$

于是 $rank[[b_1 \quad \bar{A}b_1 \dots \bar{A}^{n-1}b_1]] =$

$$\begin{aligned} \text{rank}[b_1 A b_1 \dots A^{\mu_1-1} b_1 ; b_2 + \hat{b}_2 \dots A^{\mu_1-1} b_2 + \overbrace{A^{\mu_1-1} b_2} ; \dots ; b_m + \hat{b}_m \dots A^{\mu_m-1} b_m + \overbrace{A^{\mu_m-1} b_m}] \\ = \text{rank} Q = n \end{aligned}$$

所以 (\bar{A}, b_1) 能控。引理证完。

利用引理 3-1 的结果,可以先求 \hat{K} 将系统化为单输入能控的,再按单输入能控系统配置极点的方法配置极点。

设 \tilde{K} 是所求反馈增益矩阵,它使单输入系统 (\bar{A}, b_1) 有要求的极点,即 $\bar{A} + b_1 \tilde{K}$ 有事先给定的极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。那么

$$A + B \left\{ \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = A + B \hat{K} + b_1 \tilde{k} = \bar{A} + b_1 \tilde{k}$$

因此

$$\sigma \left\{ A + B \left\{ \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \sigma(\bar{A} + b_1 \tilde{k}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

这表明

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

将系统 (A, B) 的极点配置到 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。因此 K 即所求反馈增益矩阵。

多输入能控系统极点配置的计算步骤:

第 1 步 按式(3-18)、式(3-19)构造矩阵 Q 和 S ,并计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$ 。

第 2 步 计算 $\bar{A} = A + B \hat{K}$ 和它的特征多项式

$$|sI - \bar{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

第 3 步 对给定的 n 个极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,计算多项式

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

并计算

$$k = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

第 4 步 计算 $\tilde{k} = kT^{-1}$,式中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \dots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$$

q 是 (\bar{A}, b_1) 的能控性矩阵 U 的逆矩阵的最后一行。

第 5 步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

K 即所求的反馈增益矩阵。

至此对完全能控的定常性线性系统,给出了经过状态反馈任意配置闭环系统的全部极点

的方法,从而完成了定理 3-3 的证明。

【例 3-5】 已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

求反馈增益矩阵 K ,使得到的闭环系统的极点为 $-1, -1, -2, -2$ 。

解 第 1 步 构造矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算反馈矩阵

$$\hat{K} = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 2 步 计算

$$\bar{A} = A + B\hat{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和特征多项式 $|sI - \bar{A}| = s^4 - 3s^3 + 2s^2$ 。

第 3 步 计算要求的多项式

$$(s+1)(s+1)(s+2)(s+2) = s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 12s + 4$$

于是

$$k = [-4 \quad -12 \quad -11 \quad -9]$$

第 4 步 计算

$$q = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [b_1 \quad \bar{A}b_1 \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}b_1]^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad -0.5]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} q \\ q\bar{A} \\ q\bar{A}^2 \\ q\bar{A}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

及

$$\tilde{k} = kT^{-1} = [-16 \quad 7 \quad -2 \quad -18]$$

第 5 步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上论证的过程中能控性的条件主要是用到矩阵 $U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ 秩为 n 。然而,对于离散时间定常线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

这一条件等价于系统完全能达,因此对离散系统有如下定理

定理 3-4 离散时间定常线性系统(A, B)通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件是(A, B)完全能达。

以上讲的配置极点的算法及下面给出的简化算法,同样适用于离散时间定常线性系统,这里不再详述。下面介绍一种简化的极点配置算法,可以减少计算量和对存储单元的需求。

3.3.2 极点配置算法的改进

上一节中极点配置算法的第4步,需要计算 (\bar{A}, b_1) 的能控性矩阵的最后一行 q ,在例3-5中我们发现 q 恰等于 Q^{-1} 的最后一行。这并不是在这个例子中的巧合,而是一个普遍规律,可以证明如下引理。

引理 3-2 系统 (\bar{A}, b_1) 的能控性矩阵 U 的逆矩阵的最后一行等于按式(3-18)构造的矩阵 Q 的逆矩阵的最后一行。

引理的证明方法是证明 U 和 Q 的行列式相等,并且相应的第 i 行第 n 列的代数余子式也相等,证明见文献[7]。

应用这个引理及文献[8]中的推导,可以给出极点配置问题的如下的简化算法:

极点配置的简化算法

第1步 按(3-18)和(3-19)构造矩阵 Q 和 S ,计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$ 并记 Q^{-1} 的最后一行为 q 。

第2步 设要求配置的 n 个极点为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, a_1 \pm b_1j, a_2 \pm b_2j, \dots, a_l \pm b_lj$,并且 $h + 2l = n$,计算

$$\tilde{k} = -q(\bar{A} - \lambda_1 I) \dots (\bar{A} - \lambda_n I) [\bar{A}^2 - 2a_1 \bar{A} + (a_1^2 + b_1^2) I] \dots [\bar{A}^2 - 2a_l \bar{A} + (a_l^2 + b_l^2) I]$$

第3步

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

即所求。

该简化算法显然比前面的算法减少了很多运算量,它们是:求能控性矩阵的逆,求 \bar{A} 的特征多项式和要求的特征多项式。当 n 比较大时减少的运算量是很可观的。

【例 3-6】 仍考虑例3-5中的极点配置问题,其计算步骤可简化为:

第1步 同例3-5的第1步,得到

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

并得到

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

第2步 计算

$$\tilde{k} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} (\bar{A} + I)(\bar{A} + I)(\bar{A} + 2I)(\bar{A} + 2I) = \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

第3步 计算

$$K = \bar{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 7 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与例 3-5 的计算相比较,可以看出简化算法节省了相当的计算量。

由极点配置的计算方法可知,单输入系统的极点配置问题的解是惟一的。但对于多输入系统,极点配置问题的解则不惟一。这里介绍的多输入系统的极点配置问题的算法给出了问题的一个解,除此之外还可以有其他解。我们看下面的例子。

设控制系统的状态方程为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

求一个状态反馈使闭环极点为 $-2, -3$ 。按前面的算法可以得到

$$K_1 = \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以用另一种方法求反馈矩阵,设

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

则闭环矩阵为

$$A + BK_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & 1 + k_{12} \\ 1 + k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

它的特征多项式为

$$|sI - (A + BK_2)| = \begin{vmatrix} s - k_{11} & -(1 + k_{12}) \\ -(1 + k_{21}) & s - k_{22} \end{vmatrix} = s^2 - (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} + (1 + k_{12})(1 + k_{21})$$

而要求的特征多项式为 $(s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$,于是得到

$$-k_{11} - k_{22} = 5$$

$$k_{11}k_{22} + (1 + k_{12})(1 + k_{21}) = 6$$

令 $k_{11} = -5, k_{12} = -7$ 得到 $k_{21} = k_{22} = 0$,就是前面已经得到的解,令 $k_{11} = -1, k_{12} = -2$ 则得到 $k_{21} = 1, k_{22} = -4$ 于是得到

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

两个反馈矩阵都将闭环极点配置在 $-2, -3$,但它们有所不同。对于第一个反馈矩阵,当第一条反馈线路断开时,这相当于使 $k_{11} = 0$,于是反馈矩阵化为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这时

$$A + BK_1 = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

闭环系统的特征多项式为 $s^2 + 6$,两个特征值为 $+\sqrt{6}j, -\sqrt{6}j$ 闭环系统不再是渐近稳定的。而对于第二个反馈矩阵当第一条反馈线路断开时,反馈矩阵化为

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

它的特征方程为 $s^2 + 3s + 2$,两个闭环极点为 $-1, -2$ 。闭环系统仍然是渐近稳定的。因此后者的可靠性比较好。

3.3.3 极点位置的确定

前面已经讨论了什么样的系统能任意配置极点及如何配置极点的问题 ,下面讨论如何根据对系统性能的要求确定闭环极点位置的问题 ,即如何将期望的闭环系统的性能指标转换为要求的极点位置。一种方法是认为高阶系统的性能主要由它的一对主极点决定 ,远极点对系统仅有极微小的影响。据此 ,可以先根据期望的闭环系统的性能指标决定一对主极点的位置 ,再将其他极点配置在距这对主极点甚左的位置上。该方法是根据阶跃响应的性能指标决定一对复共轭主极点。

具有主极点 λ_1, λ_2 的二阶传递函数设为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中 ω_n 是无阻尼自振频率 , ξ 为阻尼比。 λ_1, λ_2 与 ξ, ω_n 有如下关系 :

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= |\lambda_2| = \omega_n \\ \theta &= \cos^{-1} \xi \end{aligned}$$

系统的超调量为

$$\sigma = \frac{e^{-\xi\pi}}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

系统的调整时间(输出与稳态值之差的绝对值小于等于稳态值的 $\Delta\%$ 所需的时间)

$$t_s = 4 / \xi\omega_n (\Delta = 2)$$

$$t_s = 3 / \xi\omega_n (\Delta = 5)$$

$0 < \xi < 0.9$ 时 ,可根据上二式由 σ, t_s 决定 λ_1, λ_2 。

【例 3-7】 设对系统的技术要求为 :调整时间 $t_s = 2$ 秒 ,阻尼系数 $\xi = 0.5$, $\Delta = 2$,则由 $t_s =$

$\frac{4}{\xi\omega_n} = 2$,以 $\xi = 0.5$ 代入 ,解得 $\omega_n = 4$,二阶系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

二阶系统的特征方程为

$$s^2 + 4s + 16$$

得到的一对主极点为

$$\lambda_1 = -2 + 2\sqrt{3}j \quad \lambda_2 = -2 - 2\sqrt{3}j$$

设原系统是四维的 ,可以将另外两个极点配置在 $\lambda_3 = \lambda_4 = -10$ 。

当对系统的技术要求为 :调整时间 $t_s \leq 1.5$ 秒 ,超调百分比 $\leq 5\%$ 时 ,可以得到主极点对允许的区域 ,见图 3-1。

当上面的 $\Delta = 2$ 时 ,由 $t_s = 4 / \xi\omega_n \leq 1.5$,得到 $\xi\omega_n \geq 2.66$,再由超调百分比 $= 100e^{-\pi\xi} / \sqrt{1 - \xi^2} \leq 1.5\%$,得到 $\xi \geq 0.69$ 。于是在图 3-1 中 , $\sin\theta = 0.69$, $\theta = \sin^{-1}0.69$ 。由于

$$(s - \lambda)(s - \bar{\lambda}) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

得到 $\lambda + \bar{\lambda} = 2\xi\omega_n$, 由此得到图 3-1 中的 $OA = \xi\omega_n$ 。一对主极点应取在图 3-1 中由实线围成的开区域内。

以上分析了系统的一对主极点应取在图 3-1 中由实线围成的开区域内, 由以上分析可以看出, 当系统的调整时间 t_s 越小时, $\xi\omega_n$ 越大, 从而这对主极点越靠复平面的左边, 即闭环极点与开环极点离的越远, 这将导致反馈增益矩阵的元素增大, 从而使控制的成本增加, 参见文献[40]。因此, 在选择闭环极点的位置时应兼顾控制成本, 不要一味地追求调整时间短。

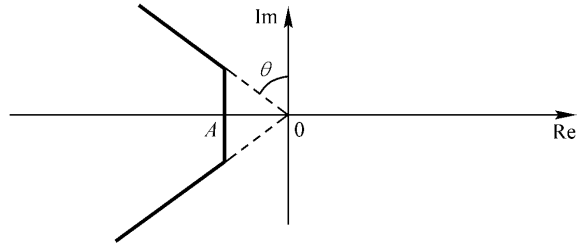


图 3-1 主极点的位置

当然, 实际问题还要更复杂, 选定两个主极点之后, 再加上其他的极点和零点对系统的特性产生的影响, 复极点的位置需要适当的改变, 有时需反复几次才能最后选好极点。

本节设计的反馈系统是全部状态变量的反馈, 但在实际系统中不一定所有的状态都能用作反馈。当系统有不能用作反馈的状态时, 需要设计状态观测器估计系统的状态, 再用得到的状态的估计代替状态进行反馈。观测器的设计将在下一章介绍。

3.3.4 应用极点配置设计倒摆控制系统的 MATLAB 程序

前面已经建立了倒摆控制系统的数学模型, 式(1-56), 下面给出求该系统的反馈增益矩阵 K 的 MATLAB 程序。

首先, 根据技术要求选择期望的闭环极点的位置, 如果要求调整时间为 $t_s = 2s$, 阻尼 $\xi = 0.5$, 这正是例 3-7 的情况, 由例 3-7 知四个极点可以选为 $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}i$, $\lambda_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$, $\lambda_3 = -10$, $\lambda_4 = -10$ 。

以下是求反馈增益矩阵 K 使闭环极点为所选的四个极点的 MATLAB 程序。

先输入系统的参数和闭环极点

```
A = [0 1 0 0 20.601 0 0 0 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0];
```

```
B = [0; -1 0 0.5];
```

```
C = [1 0 0 0 0 0 1 0];
```

```
D = [0 0];
```

```
j = [-2 + 2 * sqrt(3) * i - 2 - 2 * sqrt(3) * i - 10 - 10];
```

```
% 将极点写成对角阵形式
```

```
J = diag(j);
```

按照多输入控制系统极点配置的计算步骤进行极点配置：

第 1 步 按式(3-20)、式(3-21)构造矩阵 Q 和 S , 并计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$

```
[m n] = size(A);
```

```
u(m) = 0;
```

```
u = u + 1;
```

```
x = 1;
```

```
temp = eye(m);
```

```

Q = zeros(m) ;
for i=1 :m
    Q( : i)= temp * B( : x) ;
    if rank(Q) ~ = i
        u(x)= u(x)- 1 ;
        x= x+ 1 ;
        Q( : i)= B( : x) ;
        temp= A ;
    else
        u(x)= u(x)+ 1 ;
        temp= temp * A ;
    end
end
y=0 ; z=2 ;
S = zeros(size(B')) ;
t= eye(size(B')) ;
for j=1 :m
    y= y+ u(j) ;
    if(y<m)
        S( : y)= t( : z) ;
        z= z+ 1 ;
    end
end
K1 = S * inv(Q)
%运行结果
K1 =
    0    0    0    0

```

第 2 步 计算 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{K}}$ 和它的特征多项式

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

第 3 步 对给定的 n 个极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 计算多项式

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

并计算

$$\mathbf{k} = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

```

a1 = A + B * K1 ;
j = poly(a1) ;
jj = poly(J) ;
for i=1 :m
    k( : i)= j(m+ 2- i)- jj(m+ 2- i) ;
end

```

%得到：

k=

1.0e+003 *

-1.6000 -0.7200 -0.2166 -0.0240

第4步 计算 $\tilde{k} = kT^{-1}$ 其中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \dots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$$

q 是 (\bar{A}, b_1) 的能控性矩阵 U 的逆矩阵的最后一行。

%计算 q

temp = eye(m);

temp1(m) = 1;

for i = 1:m

temp2(:,i) = temp * B(:,i);

temp = temp * a1;

end

temp1

inv(temp2)

q = temp1 * inv(temp2)

%得到 q

q =

-0.0510 0 -0.1019 0

%计算 t1

temp = eye(m);

for i = 1:m

t1(:,i) = (q * temp)';

temp = temp * a1;

end

t1 = t1'

%得到 t1

t1 =

-0.0510 0 -0.1019 0

0 -0.0510 0 -0.1019

-1.0000 0 0 0

0 -1.0000 0 0

第5步 计算反馈增益矩阵

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

%计算 k1 ,K
k1 = k * t1 ;
temp3 = zeros(size(B));
temp3(:,1) = (k1)';
K = K1 + temp3'
%得到 K
K =
    298.1504    60.6972    163.0989    73.3945
u = Kx = 298.1504x_1 + 60.6972x_2 + 163.0989x_3 + 73.3945x_4

```

即所求的反馈控制。

采用完全相同的方法,可以编制出用极点配置设计磁盘驱动读取控制系统的 MATLAB 程序,这里不再赘述。

3.3.5 其他极点配置方法简介

1. 解李雅普诺夫方程配置极点^[25]

该方法有一定的限制,配置的极点位置不能包含 A 的特征值,但这对实际应用并不构成影响。其计算步骤如下:

第 1 步 选取一个 $n \times n$ 矩阵 F 使有要求的特征值(不包含 A 的特征值);

第 2 步 选取任意矩阵 \bar{K} 使 (F, \bar{K}) 能观测;

第 3 步 求李雅普诺夫方程 $AP - PF = B\bar{K}$ 的惟一解;

第 4 步 如果 P 是奇异矩阵,返回第 2 步选取不同的 \bar{K} 再进行第 3 步,如果 P 是非奇异矩阵,计算反馈增益矩阵 $K = \bar{K}P^{-1}$ 。

在文献[25]中证明了当 F 和 A 没有共同的特征值时,对单输入系统 (A, B) 能控, (F, \bar{K}) 能观测是李雅普诺夫方程 $AP - PF = B\bar{K}$ 的惟一解非奇异的充分必要条件,因此对单输入系统第 4 步不需要检验 P 的奇异性。但对多输入系统, (A, B) 能控, (F, \bar{K}) 能观测仅是李雅普诺夫方程 $AP - PF = B\bar{K}$ 的惟一解非奇异的必要条件,因此在第 4 步需要检验 P 的奇异性。

应用该方法时, F 有无限多种,可考虑选择能观测伴随矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

矩阵中的 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 是要要求的特征多项式的系数。对这样的 F 可选择

$$\bar{k} = [0 \dots 0 \ 1]$$

2. 应用能控性的 PBH 判据配置极点^[34]

设 (A, B) 能控,求反馈增益矩阵 K 使得闭环极点为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。设 ϕ_i 是闭环系统矩阵的相应于特征值 λ_i 的特征向量,即

$$(\lambda_i I - (A + BK))\phi_i = 0$$

以上方程可改写为

$$[\lambda_i I - A \dots B] \begin{bmatrix} \psi_i \\ K \psi_i \end{bmatrix} = 0$$

式中 ψ_i 和 $K\psi_i$ 都是未知的, 定义新的未知向量

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \psi_i \\ K \psi_i \end{bmatrix}$$

则 ξ_i 满足

$$[\lambda_i I - A \dots B] \xi_i = 0$$

由于 (A, B) 能控, 按 PBH 判据, 矩阵 $[\lambda_i I - A \dots B]_{1 \times (n+m)}$ 有满秩 n , 因此上方程组对每个 λ_i 一定存在 m 个线性无关解, 由这 m 个线性无关解构成 $(n+m) \times m$ 矩阵 $U(\lambda_i)$, 它的 $n+m$ 个分量构成矩阵 $[\lambda_i I - A \dots B]$ 的化零空间的基组。它的每个向量的前 n 个元素构成闭环特征向量。剩下的 m 个元素为这个特征向量乘尚属未知的矩阵 K 。于是可以将 $U(\lambda_i)$ 分部表示如下:

$$U(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_m \\ f_1 & f_2 & \dots & f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(\lambda_i) \\ F(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad f_i = K \psi_i$$

对于 $\lambda_1 \dots \lambda_n$ 有

$$K[\psi(\lambda_1) \quad \psi(\lambda_2) \quad \dots \quad \psi(\lambda_n)] = [F(\lambda_1) \quad F(\lambda_2) \quad \dots \quad F(\lambda_n)]$$

在每一个 $\psi(\lambda_i)$ 块中选一个列构成 n 个线性无关列, 记为矩阵 G , 上式右端相应的列构成的矩阵记为 \bar{G} , 则

$$K = \bar{G}G^{-1}$$

即所求反馈增益矩阵。

3.3.6 装置有噪声时的极点配置问题^[42]

前面讲极点配置时, 假设系统没有干扰或噪声, 这样设计的反馈应用到存在不可忽略的干扰或噪声的系统时会出现问题。现在讨论装置有噪声时的极点配置问题, 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fw(t)$$

式中 $w(t)$ 是系统的干扰或噪声, 设计反馈控制

$$u(t) = Kx(t) + K_w w(t)$$

在它的作用下得到闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK)x + (F + BK_w)w(t)$$

式中的矩阵 K 用极点配制的方法求得, 然后再确定 K_w 使 $w(t)$ 对闭环系统的影响最小。最好的情况当然是能求出 K_w 使 $(F + BK_w) = 0$, 这样就消除了 $w(t)$ 对闭环系统的影响, 但这并不是总可以作到的。设 w 是 q 维向量, 则 F 为 n 行 q 列的矩阵, 这时方程

$$(F + BK_w) = 0 \tag{3-21}$$

有 nq 个方程, 而 K_w 有 mq 个未知数, n, m 分别是状态向量 x 的维数和控制向量 u 的维数。

当 $m = n$ 并且矩阵 B 可逆时, 存在惟一的 K_w 使式(3-21)成立, 这时

$$K_w = -B^{-1}F$$

除此情况以外,其他情况就不一定能求得 K_w 满足式(3-21)了,这时需要做具体分析。

【例 3-8】 考虑系统

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fw(t)$$

式中
$$A = \begin{bmatrix} -1.7 & 50 & 260 \\ 0.22 & -1.4 & -32 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -272 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.1 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该例 $m=1, q=2$ 因此 $K_w = [k_{w1} \ k_{w2}]$, 于是

$$F + BK_w = \begin{bmatrix} 0.02 - 272k_{w1} & 0.1 - 272k_{w2} \\ -0.0035 & 0.004 \\ 14k_{w1} & 14k_{w2} \end{bmatrix}$$

显然不能选择 K_w 满足式(3-21)。这时可以考虑选择 k_{w1}, k_{w2} 使得 $(F + BK_w)$ 的最大的元素为 0。对该例可以选择 k_{w1}, k_{w2} 使得

$$0.02 - 272k_{w1} = 0 \quad 0.1 - 272k_{w2} = 0$$

解得

$$k_{w1} = \frac{0.02}{272}, \quad k_{w2} = \frac{0.1}{272}$$

这时

$$F + BK_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0.00103 & 0.00515 \end{bmatrix}$$

这样选择的 K_w 使得噪声对闭环系统的影响比较小。

3.4 镇定问题

当定常线性系统开环不稳定时,即当 A 不是稳定矩阵时,如果能求矩阵 K 使经反馈 $u(t) = r(t) - Kx(t)$ 得到一个渐近稳定的闭环系统,则称该系统是能稳的。不失一般性,设系统已化为能控结构形式,由于经状态反馈不能改变 $\sigma(A_2)$ 而 A 的其他极点可以任意配置,于是有如下定理

定理 3-5 系统 (A, B) 是能稳的充分必要条件是 $\sigma(A_2)$ 都具有负实部。

还可以换一个角度说,系统 (A, B) 是能稳的充分必要条件是它的所有不稳定(有非负实部的)极点都是能控的。

求反馈增益矩阵 K 使闭环系统稳定的问题称为镇定问题。镇定问题又可以简述为:求矩阵 K 使 $A + BK$ 为稳定矩阵。镇定问题广泛应用于工程控制和经济系统中。

3.5 应用状态反馈的解耦控制

本节介绍应用中常见的解耦控制,这是在控制理论的应用中越来越受到人们重视的一个分支。本节的重点在于应用,仅介绍解耦控制的基本思想和设计方法,而略去繁复的证明,对此感兴趣的读者可参看有关的引文。

3.5.1 应用状态反馈解耦

本节讨论在多输入多输出系统中,应用状态反馈使闭环系统实现解耦的问题,即通过状态反馈使闭环系统的每个输入仅影响一个输出,或者说闭环系统的每个输出仅受一个输入影响。通过状态反馈实现解耦,也就是将一个 m 输入 m 输出的多输入多输出系统化为 m 个单输入单输出系统,从而使控制系统大大简化。因为 m 个单输入单输出系统处理起来要简单得多,因此状态反馈解耦在实际应用中非常重要。

考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

通过状态反馈实现解耦的问题是应用状态反馈

$$u = K_1 x + K_2 v \quad (3-22)$$

使得闭环系统的传递函数阵

$$\bar{G}(s) = C(sI - A - BK_1)^{-1}BK_2 \quad (3-23)$$

为非奇异对角阵。即

$$\bar{G}(s) = \text{diag}\{g_{11}(s), g_{22}(s), \dots, g_{mm}(s)\}$$

本节将给出存在 K_1, K_2 使得 $\bar{G}(s)$ 为非奇异对角阵的充分必要条件及求矩阵 K_1, K_2 的方法。

3.5.2 能用状态反馈实现解耦的充分必要条件

为给出系统能通过状态反馈解耦的充分必要条件,先引入记号 σ_i

$$\sigma_i = \begin{cases} \min\{j/c_i A^{j-1} B \neq 0\} \\ n-1 \quad c_i A^{j-1} B = 0 \text{ 对任何 } j \end{cases} \quad (3-24)$$

式中 c_i 是 C 的第 i 行。

关于状态反馈解耦有如下定理^[37 I44]：

定理 3-6 m 输入 m 输出定常线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

存在反馈控制

$$u = K_1 x + K_2 v$$

使闭环系统解耦的充分必要条件是矩阵

$$E = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1-1} B \\ \dots \\ c_m A^{\sigma_m-1} B \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

为非奇异矩阵,并且实现状态反馈解耦的增益矩阵可由下式计算

$$K_1 = -E^{-1}L, K_2 = E^{-1} \quad (3-26)$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1} \\ c_2 A^{\sigma_2} \\ \dots \\ c_m A^{\sigma_m} \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

得到的闭环系统的传递函数阵为

$$\overline{\mathbf{G}}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{\sigma_1}}, \frac{1}{s^{\sigma_2}}, \dots, \frac{1}{s^{\sigma_m}} \right\}$$

定理 3-6 的证明见文献[44], 根据这个定理, 为解耦输入-输出解耦问题, 首先需按式(3-24)求 σ_i , 然后按式(3-25)构造矩阵 E , 如果 E 是奇异矩阵, 则该系统不能用状态变量反馈按式(3-22)解耦。如果 E 不是奇异矩阵, 则该系统能用状态变量反馈解耦, 反馈增益矩阵由式(3-26)计算。

【例 3-9】 对于定常线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

传递函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_1\mathbf{B} = [1 \quad 0] \quad \sigma_1 = 1$$

$$\mathbf{c}_2\mathbf{B} = [0 \quad 1] \quad \sigma_2 = 1$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异, 该系统能用状态变量反馈按式(3-22)解耦,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{c}_2\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所求的反馈是

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

在它的作用下得到闭环系统

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

即

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其传递函数为

$$\overline{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

原系统已通过状态反馈解耦。

【例 3-10】 对于定常线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

先按式(3-27)确定 σ_i :

$$\begin{aligned} c_1 A^0 B &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [1 \quad 4] \neq 0 \\ c_2 A^0 B &= [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0] = 0 \\ c_2 A B &= [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [2 \quad 8] \neq 0 \end{aligned}$$

所以 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$, 于是

$$E = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 A B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

为奇异矩阵, 该系统不能用状态变量反馈按式(3-22)解耦。

3.6 习题

1. 设系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du$$

中输入为 $u = r - Ky$, 导出闭环系统的状态方程和输出方程, 并画出该反馈系统的框图。

2. 试证明输出反馈不改变定常线性系统的能观测性。
3. 已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

利用李雅普诺夫方程求一个状态反馈, 使闭环系统稳定。

4. 已给系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

利用李雅普诺夫方程求一个状态反馈, 使闭环系统的极点的实部小于 -2 。

5. 令 $P = \frac{1}{10}I, Q = I$ 解例 3-2, 并求出所得到的闭环系统的极点。
6. 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求 k 使在 $u = kx$ 作用下闭环系统极点为 $-1, -2$ 。

7. 已给离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} q & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1-q \\ 1-r \end{bmatrix} u(k)$$

求 k 使在 $u = kx$ 作用下闭环系统极点为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 。

8. 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

求 k 使在 $u = kx$ 作用下闭环系统极点为 $-10, -1 \pm 2i$ 。

9. 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈 $u = \mathbf{Kx}$ 使闭环极点为 $-2, -1 \pm 2i$ 。

10. 已给系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

应用改进的极点配置算法, 求状态反馈 $u = \mathbf{Kx}$ 使闭环极点为 $-1, -1, -2, -2$ 。

11. 判断系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

是否能稳, 如果能稳求状态反馈 $u = kx$ 使闭环系统稳定。

第 缘章 鲁 棒 控 制

本书前面讨论的关于线性系统的内容,都是完全确定的系统,假设系统的数学模型是已给的、确定的。但是在很多控制系统中,存在着不同程度的不确定因素,包括模型的误差和外部干扰的影响。一个控制系统在存在不确定性的情况下,如果能使系统仍保持预期的性能,使模型的不精确性和外干扰造成的系统的性能改变是可以接受的,则称该控制系统是稳健的,有很强适应能力的,又常简单地称这个控制系统为鲁棒(鲁棒)控制系统。鲁棒控制是在控制中越来越受到人们重视的一个分支。由于重点在于应用,本章仅介绍鲁棒控制的基本思想和设计方法,而略去繁复的证明,对此感兴趣的读者可参看文献[缘圆]~[缘愿]。

缘缘 鲁棒控制器

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{曾} = 粤曾 + 月怎垣耘赠 \\ \text{赠} = 悦曾垣阅怎垣云赠 \\ \text{藻} = 赠原赠 \end{cases} \quad (\text{缘圆})$$

式中 曾,怎,赠,憎,赠分别是 灶维状态向量、皂维控制向量、则维输出向量、责维干扰向量和 则维参考输入向量。

参考输入 赠满足如下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{赠} = 粤赠 + 扎 \\ \text{赠} = 悦赠 + 扎 \end{cases} \quad (\text{缘圆})$$

干扰 憎满足如下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{憎} = 粤憎 + 扎 \\ \text{憎} = 悦憎 + 扎 \end{cases} \quad (\text{缘圆})$$

控制问题是对于按以上状态方程决定的参考输入 赠和干扰 憎,设计控制器,使达到输出调节,即 藻 = 藻_望。当实际模型的矩阵 粤,月,悦,阅,耘,云与模型中的相应矩阵有一定误差时,称模型存在一定的扰动。如果在模型存在一定的扰动时系统仍能达到输出调节,则该系统称为鲁棒(伺服)控制系统。

缘圆 鲁棒控制器存在的条件

本节讨论鲁棒控制器存在的条件。有如下定理:

定理 缘员 对于上节提出的控制问题,鲁棒控制器存在的充分必要条件是

员 (粤,月)可镇定

圆 (悦,粤)可检测

猿皂 ≥ 则

源对粤_则或粤_能的任一特征值 λ

越灶垣则 (缘源)

定理的证明见文献[猿],条件 员、圆意味着系统中不稳定的部分是能控能观测的,因而可通过动态输出反馈镇定。条件 源则表明粤_则或粤_能的任一特征值 λ 都不是系统的传递零点,这里不再详述。

如果以 凿(泽和 凿(泽分别表示粤_则和粤_能的最小多项式,以

凿(泽越泽垣凿_泽垣...垣凿_泽泽垣凿_泽

表示 凿(泽和 凿(泽的最小公倍式,并定义择阶方阵

Ω 越
$$\begin{bmatrix} 园 & 员 & 园 & \dots & 园 \\ 园 & 园 & 员 & \dots & 园 \\ & & \dots & & \\ 园 & \dots & 园 & 园 & 员 \\ 原凿 & 原凿 & \dots & 原凿 & 原凿 \end{bmatrix}$$
 (缘缘)

则 Ω 的特征值即是粤_则或粤_能的特征值,因此定理中的条件 源对 Ω 的所有特征值成立。

缘猿 鲁棒控制器的一般结构

下面介绍 缘猿提出的鲁棒控制器的一般鲁棒控制器的结构,它由伺服补偿器和镇定补偿器构成。伺服补偿器的作用是克服干扰 憎,实现输出调节,使系统输出跟踪参考输入,没有稳态误差,它的输出记为 ξ。镇定补偿器的作用是使整个闭环系统稳定,它以 ξ,怎,赠为输入,它的输出记为 η。

在整个控制系统中作用于被控对象的控制矢量为

怎越运_怎ξ垣运_怎η (缘远)

式中 运_怎,运_怎是需要设计的反馈矩阵。

上述的鲁棒控制器的结构如图 缘猿所示。

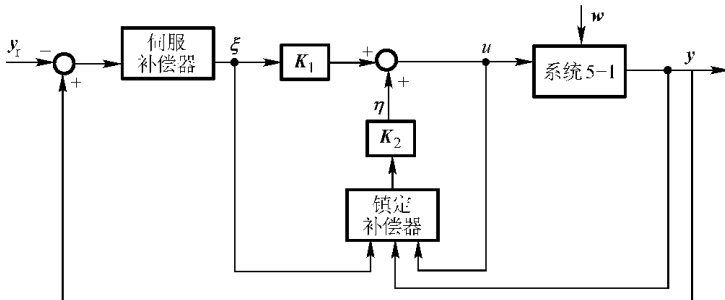


图 缘猿 鲁棒伺服控制器的一般结构

续原 鲁棒控制器的设计

续原 伺服补偿器的设计

伺服补偿器的状态方程为：

$$\dot{\xi} = \Omega^* \xi + \theta^* \varphi \quad (续原)$$

式中

$$\Omega^* = \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) \quad (\text{对角线矩阵中的 } \Omega \text{ 共 } n \text{ 个}) \quad (续原)$$

$$\theta^* = \text{col} \quad (续原)$$

是任 n 阶非奇异方阵, θ 是使 (Ω^*, θ^*) 能控的 $n \times 1$ 矩阵。为了简单可以取

$$\theta = \text{col} \quad (续原)$$

$$\theta = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \quad (续原)$$

式中 $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ 是 n 维列向量, 这时 (Ω^*, θ^*) 必是能控的。

由以上伺服补偿器的设计可以看出, 伺服补偿器只由干扰矢量 φ 和参考输入 φ^* 的动态 (Ω_i 或 Ω_{ij} 的特征值) 决定而与被控对象无关。前面已经说过, Ω 的特征值即是 Ω_{ij} 或 Ω_{ij} 的特征值, 因此称在伺服补偿器中包含了外部环境的模型。这说明欲克服外干扰, 实现输出调节需在控制器内引入一个外部动态的模型。在调节器的设计中这一事实称为内模原理。

包含伺服补偿器的增广系统为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi^* \quad (续原)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi^* \quad (续原)$$

以 $\varphi = \varphi^* + \varphi_0$ 代入, 得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi^* + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi_0 \quad (续原)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi^* + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \varphi_0 \quad (续原)$$

由于 (Ω^*, θ^*) 能控, (Ω, θ) 可镇定, (Ω, θ) 可检测, 容易证明：

$\left(\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ \theta^* & \Omega^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \right)$ 可镇定, $\left(\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ \theta & \Omega^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^* \end{bmatrix} \right)$ 可检测, 因而可设计动态输出反

馈控制器使整个闭环系统稳定, 它就可以作为鲁棒控制器的镇定补偿器。

下面我们介绍一种最简单的镇定补偿器——互补控制器。

续原 互补控制器的设计

前面已经讲到, 一般的镇定补偿器以 ξ, φ, φ^* 为输入, 互补控制器比较简单, 它仅以 φ 为输入, 当被控对象开环稳定时, 互补控制器可取为

$$\dot{\eta} = \Omega_1 \eta + \varphi \quad (续原)$$

系统 (续原) 恰是第四章讲过的不考虑干扰 φ 时的一个开环状态观测器, 它完全模拟了被控对象的动态特性与被控对象互为补充, 因此称为互补控制器。余下的设计任务就是求 φ_0 ,

运,使整个系统在控制(缘)作用下闭环稳定。

下面讨论反馈矩阵 运,运的求法。将式(缘)代入式(缘)、式(缘)和式(缘)得到

$$\xi \text{ 越 } \Omega^* \xi \text{ 垣 } \theta^* (\text{悦垣阅怎垣云曾}) \text{ 原 } \theta^* \text{ 赠}$$

$$\eta \text{ 越 } \text{月云} \xi \text{ 垣 } (\text{粤垣月云}) \eta$$

$$\dot{\xi} \text{ 越 } \theta^* \text{ 悦垣} (\Omega^* \text{ 垣 } \theta^* \text{ 阅云}) \xi \text{ 垣 } \theta^* \text{ 阅云} \eta \text{ 垣 } \theta^* \text{ 云曾原 } \theta^* \text{ 赠}$$

$$\dot{\eta} \text{ 越 } \text{月云} \dot{\xi} \text{ 垣 } (\text{粤垣月云}) \dot{\eta}$$

$$\text{赠越悦曾垣阅云} \xi \text{ 垣阅云} \eta \text{ 垣云曾}$$

以上四个方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \text{ 越 } \begin{bmatrix} \text{粤} & \text{月云} & \text{月云} \\ \theta^* \text{ 悦} & \Omega^* \text{ 垣 } \theta^* \text{ 阅云} & \theta^* \text{ 阅云} \\ \text{园} & \text{月云} & \text{粤垣月云} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\text{垣} \begin{bmatrix} \text{耘} & \text{园} \\ \theta^* \text{ 云} & \text{原 } \theta^* \\ \text{园} & \text{园} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{憎} \\ \text{赠} \end{bmatrix}$$

(缘)

$$\text{赠越悦} [\text{悦} \text{ 阅云} \text{ 阅云}] \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \text{ 垣 } [\text{云} \text{ 园}] \begin{bmatrix} \text{憎} \\ \text{赠} \end{bmatrix}$$

(缘)

为了找出求 运,运的方法,对式(缘)、式(缘)做变换

$$\begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \text{ 原曾} \end{bmatrix} \text{ 越 } \begin{bmatrix} \text{隄} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{隄} & \text{园} \\ \text{原隄} & \text{园} & \text{隄} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \text{ 原曾} \end{bmatrix} \text{ 越 } \begin{bmatrix} \text{粤垣月云} & \text{月云} & \text{月云} \\ \theta^* (\text{悦垣阅云}) & \Omega^* \text{ 垣 } \theta^* \text{ 阅云} & \theta^* \text{ 阅云} \\ \text{园} & \text{园} & \text{粤} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

$$\text{垣} \begin{bmatrix} \text{耘} & \text{园} \\ \theta^* \text{ 云} & \text{原 } \theta^* \\ \text{原耘} & \text{园} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{憎} \\ \text{赠} \end{bmatrix}$$

(缘)

$$\text{赠越悦} [\text{悦垣阅云} \text{ 阅云} \text{ 阅云}] \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \xi \\ \eta \text{ 原曾} \end{bmatrix} \text{ 垣 } [\text{云} \text{ 园}] \begin{bmatrix} \text{憎} \\ \text{赠} \end{bmatrix}$$

(缘)

由此可知闭环极点由 粤的极点和

$$\begin{bmatrix} \text{粤垣月云} & \text{月云} \\ \theta^* (\text{悦垣阅云}) & \Omega^* \text{ 垣 } \theta^* \text{ 阅云} \end{bmatrix}$$

的极点构成。由此我们可以得出如下结论：

员 由于闭环极点中包含了开环极点,因此这种以开环观测器为基础的互补控制器仅能用于开环稳定的系统。

$$\text{圆} \text{ 由于 } \begin{bmatrix} \text{粤} & \text{垣} & \text{月} \\ \theta^* & (\text{悦垣阅}) & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{粤} & \text{园} \\ \theta^* & \text{悦} & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{月} \\ \theta^* & \text{阅} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{运} \\ \text{运} \end{bmatrix}$$

因此,第二部分极点是增广系统(缘)在不考虑 憎和 赠的作用时得到的系统

$$\begin{bmatrix} \text{曾} & \text{越} \\ \xi & \theta^* & \text{悦} & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{曾} & \text{垣} \\ \xi & \theta^* & \text{阅} \end{bmatrix} \text{怎}$$

在 怎越云ξ垣云曾作用下的闭环极点,而当达到稳态时 η越曾这时以上反馈等价于

$$\text{怎越云ξ垣云}\eta$$

由于(粤,月)可镇定时, $\left(\begin{bmatrix} \text{粤} & \text{园} \\ \theta^* & \text{悦} & \Omega^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{月} \\ \theta^* & \text{阅} \end{bmatrix} \right)$ 可镇定,因此可以求出 运,运使闭环系统稳定。

由于互补控制器仅能用于开环稳定的系统,对开环不稳定的系统需设计一个第四章中讲的动态补偿器作为鲁棒控制器中的镇定补偿器。

缘 习 题

圆已给系统

$$\text{曾越} \begin{bmatrix} \text{原} & \text{园} & \text{员} \\ \text{园} & \text{原} & \text{园} \end{bmatrix} \text{曾垣} \begin{bmatrix} \text{园} & \text{员} \\ \text{员} & \text{园} \end{bmatrix} \text{怎垣} \begin{bmatrix} \text{园} \\ \text{员} \end{bmatrix} \text{憎}$$

$$\text{赠垣} \text{员} \text{园} \text{曾}$$

$$\text{藻越} \text{赠} \text{原} \text{赠}$$

设 赠和 憎都是阶跃信号,构造伺服补偿器(缘)并验证包含伺服补偿器的增广系统(缘)完全能控。

圆对上题的增广系统,不考虑 赠和 憎的作用,设计反馈

$$\text{怎越云}\text{曾垣云}\xi$$

使得它的闭环极点为 原员,原员垣躁原员原躁

猿对第 员题中的系统设计一个关于第二个状态变量 曾的互补控制器,并画出由 员-猿题得到的鲁棒控制器的结构图。

圆已给系统

$$\text{曾越} \begin{bmatrix} \text{园} & \text{员} \\ \text{原} & \text{原} \end{bmatrix} \text{曾垣} \begin{bmatrix} \text{园} \\ \text{员} \end{bmatrix} \text{怎}$$

$$\text{赠垣} \text{员} \text{园} \text{曾垣} \text{憎}$$

$$\text{藻越} \text{赠} \text{原} \text{赠}$$

设 赠和 憎都是阶跃信号,设计该系统的鲁棒控制器,并画出它的结构图。

第 远章 最优控制

远 最优控制问题的提法

在前几章中已经讨论了设计反馈控制,使得到的闭环系统具有要求的性能的方法。从这些讨论中可以看出,反馈是现代控制理论的一个重要的概念。本章讲的最优控制是现代控制理论的另一个重要概念。虽然在经典控制理论中也有过以过渡时间最短为指标的控制原理和方法,但真正形成控制系统以性能最优为目标的理论——最优控制理论,却是 远世纪 缘年代末。

一般说来,控制问题可以概括为:选取控制信号使得系统的行为尽可能的好。那么“尽可能的好”的含义是什么呢?如果可以给出一个数学的判据来定量地描述系统的行为,那么就可以用完全系统化的方法设计控制系统,将一个控制系统设计的问题化为一个解数学最优化的问题。使数学的判据最大或最小设计的控制称为最优控制。例如,有的系统对控制精度要求特别高,可以设计出控制偏差最小的系统。这类问题在军事上和空间科学中经常遇到。由于这些领域拥有最先进的计算机,使最优控制有条件首先在这些领域得到应用和发展。但是近 远年来,随着计算机性能不断提高,小型化和价格大幅度下降,最优控制已广泛应用于工业过程、交通运输、经济管理、生态环境、生物医学等领域,并得到了很大的发展。

本书将介绍两类求最优控制的方法:变分法与最大值原理和动态规划。本章介绍变分法与最大值原理,第 苑章讲解用变分法与最大值原理解线性二次型最优控制问题,第 愿章讲解离散的变分法与最大值原理,第 怨章讲解动态规划法。

变分法是数学的一个古老的分支,它的发生与发展可以追溯到 远世纪。无约束的最优控制问题可以用变分法求解。最大值原理是变分法的近代发展,是前苏联数学家庞特里雅金(Л.П.Понтрягин)在 远世纪 缘年代末提出的,它可以求解控制变量有约束的最优控制问题。

动态规划是贝尔曼(Р.А.Беллман)于 远缘年提出的,它是一种多阶过程的最优决策方法,可用于求最优控制策略。

本章针对连续时间系统介绍最优控制问题的一般提法和解最优控制问题的变分法与最大值原理。

远 最优控制问题的一般提法

最优控制问题,简单地说就是求一个控制规律,使控制系统的性能在某种意义上是最优的。一般来说,要使一个系统达到某种预期的目标,控制方案是多种多样的。最优控制问题是在诸方案中求出在某种意义下最优的控制方案。最优控制问题的一般提法是:

已给系统的状态方程

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

和目标函数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \theta(x(t_f), t_f)$$

求最优控制 $u^* \in U$ 使 $J(u^*)$ 最小(或最大)。

状态方程是描述被控对象动态行为的动力学模型,它可以是一个常微分方程组或是一个偏微分方程组。状态方程是常微分方程组的系统称为集中参数系统,状态方程是偏微分方程组的系统称为分布参数系统。本书只考虑集中参数系统,对于离散时间系统考虑由差分方程组描述的系统。

目标函数是判别控制系统性能优劣的标准,它依赖于控制函数 $u(t)$,因而也称为目标泛函。目标函数 $J(u)$ 中的 $u(t)$ 是状态方程对应于控制函数 $u(t)$ 的解。

$u(t) \in U$ 是对控制的约束,其中 U 是 R^m 的子集,可以是开集也可以是闭集。这个约束条件体现了 $u(t)$ 作为实际变量取值受到的限制,例如升降机的向上向下的拉力均小于常数 F 时,控制力 $u(t)$ 服从于约束 $|u(t)| \leq F$ 。

实现最优控制的必备条件

要实现最优控制有三个最基本的条件必须具备。

(1) 具有适当精度的数学模型:

$$J(u) \approx J(\hat{u}, x_0, t_0, t_f)$$

模型的精度太差,所求的结果不能适用于实际系统,精度要求过高导致模型过于复杂,可能使最优控制的计算引入较大的误差,结果反而不一定精确。

(2) 有明确的控制约束: $u(t) \in U, U$ 是允许控制集合。

(3) 有明确的目标函数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \Phi(x(t_f), t_f)$$

其大小的确能反映所设计的控制系统的优劣。

当具备这三个条件时,就可以应用本书中的设计方法设计最优控制系统。

几种典型的最优控制问题

最小时间问题

最小时间问题要求将系统的状态由初始状态 x_0 转移到指定的状态 x_f 所用的时间最短,即求 $u(t)$ 使在它的作用下 $J(u)$ 越小,并使

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$$

最小。

最小能量问题

最小能量问题要求将系统的状态由初始状态 x_0 转移到指定的状态 x_f 所用的能量最小,即求 $u(t)$ 使在它的作用下 $J(u)$ 越小,并使

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$$

最小。

更一般的最小能量问题,目标函数可改为控制变量 u 的加权平方和的积分,即

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt$$

以体现对不同的控制变量所耗能量不同的重视程度。

最省燃料问题

由于飞行体推力有限,节省了燃料就可以多载货物或乘客。超音速飞机的燃料消耗正比于推力 怎 的绝对值,因此最省燃料问题的目标函数取为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u| dt$$

状态调节器问题

当系统的状态 曾 偏离平衡状态 曾₀ 越远时,可用状态变量的平方和的积分衡量误差的积累。状态调节器问题的目标函数可取为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x^T Q x dt$$

更一般的取为状态变量的加权平方和的积分:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x^T W x dt$$

当特别重视终点的偏差时,目标函数取为

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) P x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T W x dt$$

这时控制 怎 要有约束,不然最优解将需要无穷大的能量。去掉对控制能量的约束可考虑目标函数:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) P x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T W x dt + \int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt$$

式中 云 是加权矩阵。

跟踪问题

当要求状态轨线 曾 跟踪某给定的轨线 曾_d 时,目标函数取为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x - x_d]^T Q [x - x_d] dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) P x(t_f)$$

以上列举了五种最常见的最优控制问题,由于对控制系统的要求是多种多样的,这里不可能都列举出来,在以后的例中再进行讨论。

变分法解无约束最优控制问题的变分法

变分法是数学的一个古老分支。1637年由伽利略提出的“最速降线”问题是最早出现的变分问题,1697年后伯努利解决了这个问题。到18世纪末变分法逐渐发展成为一个独立的数学分支。变分法研究泛函的极值问题,在自然科学和社会科学的很多学科中得到了非常广泛的应用。最优控制的目标函数 J 的取值依赖于定义在区间 [t₀, t_f] 上的输入函数 怎,即最优控制的目标函数是函数 怎 的函数,在数学上称为泛函。最优控制问题是求控制策略,使目标泛函最大或最小,因此是一个泛函极值问题,它可以用变分法求解。本节讲述解无约束最优控制问题的变分法,从最简单的变分问题入手,然后再讨论如何用变分法解无约束最优控制问题。

最简单的变分问题

最简单的变分问题是求一个函数 $x(t)$, 使得泛函 $J[x]$ 取极小(或极大)值, 且 $x(t)$ 满足边界条件 $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

并使目标泛函

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt$$

取极小(或极大)值。

以下讨论“相对”极小(极大)问题, 即在“容许函数类”中, 求一个函数 $x(t)$, 使得对这个函数的“邻域”中的一切函数而言, $x(t)$ 使泛函 $J[x]$ 取极小(极大)值。这里需要说明“容许函数”和“邻域”的含义。

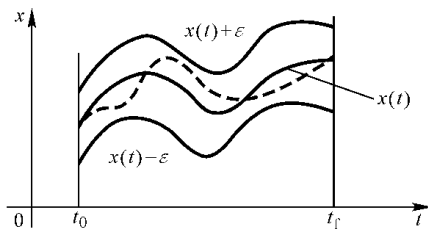


图 1.1 ϵ 邻域

容许函数 具备下列条件的一切函数构成容许函数类:

- (1) $x(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上二次连续可微,
- (2) $x(t)$ 满足边界条件 $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

函数的 ϵ 邻域 适合不等式 $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \epsilon$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) 的一切容许函数的集合称为函数 $x(t)$ 的 ϵ 邻域, 见图 1.1

欧拉-拉格朗日方程

设 $x(t)$ 关于所有变量二次连续可微, $x(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上二次连续可微, 满足边界条件 $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, 并且使

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt$$

达极小值, 推导 $x(t)$ 必须满足的条件。由于 $x(t)$ 使 $J[x]$ 达极小值, 因此对任一容许函数

$$x(t) + \delta x(t) \in \epsilon\text{-邻域} \quad \delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$$

$$J[x + \delta x] - J[x] > 0$$

在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时达到它的极值。因此

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J[x + \delta x] - J[x]}{\delta x} = 0$$

应用泰勒定理

$$J[x + \delta x] - J[x] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{1}{2} \delta x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x + \frac{1}{2} \delta \dot{x} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \delta \dot{x} + \dots \right] dt$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J[x + \delta x] - J[x]}{\delta x} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt = 0 \quad (1.1)$$

对式(1.1)的第二项应用分部积分, 得到

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (1.2)$$

由于 δu 越 Ω , δu 越 Ω 上式化为

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \right) \right] \delta u \text{ 越 } \Omega \quad (2.10)$$

式(2.10)对任意二次连续可微并且满足边界条件 δu 越 Ω 的 δu 成立。为得到进一步的结果,先证明下面的引理

引理 2.1 设 η 越 $[\Omega]$ 二次连续可微,并且 η 越 Ω , η 越 Ω 在 $[\Omega]$ 上连续,如果对满足以上条件的一切 η 越 Ω

$$\int_{\Omega} \eta \text{ 越 } \Omega$$

则在 $[\Omega]$ 上 $\eta = 0$

证明 反设 η 越 Ω 在点 $\xi \in [\Omega]$ 上不为 0 不妨设 $\eta(\xi) > 0$ 则由 η 越 Ω 的连续性,存在包含 ξ 的区间 $[\Omega]$, 使对 $\Omega \leq \Omega \leq \Omega$ 有 $\eta > 0$ 另一方面,函数

$$\eta_{\epsilon}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \Omega \leq \Omega \leq \Omega \text{ 时} \\ \eta(\Omega) \frac{(\Omega - \Omega)^2}{(\Omega - \Omega)^2} & \text{当 } \Omega \leq \Omega \leq \Omega \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \Omega \leq \Omega \leq \Omega \text{ 时} \end{cases}$$

在 $[\Omega]$ 上二次连续可微,具有引理对 η 越 Ω 要求的性质,而

$$\int_{\Omega} \eta_{\epsilon} \text{ 越 } \Omega > \int_{\Omega} \eta \text{ 越 } \Omega > 0$$

得到矛盾。引理证完。

引理 2.1 常称为变分法的基本引理,由于式(2.10)对任意 δu 越 Ω 成立,应用引理 2.1 得到 \mathcal{L} 越 Ω 满足的必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \right) \text{ 越 } \Omega \\ \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega, \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \right) \text{ 越 } \Omega$$

称为欧拉方程或欧拉-拉格朗日方程。它的展开式一般是非线性二阶常微分方程

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u^2} \delta u + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u \partial \nabla u} \delta \nabla u + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \nabla u^2} \delta \nabla u - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u \text{ 越 } \Omega$$

在 Ω 上的泛函与在 $\Omega \in \Omega$ 上的泛函的差为

$$\Delta \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega \in \Omega - \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega$$

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{L} \text{ 越 } \Omega \in \Omega - \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega \right) \text{ 越 } \Omega$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega - \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \delta \nabla u + o(\epsilon^2) \right\} \text{ 越 } \Omega$$

于是

$$\Delta \mathcal{L} \text{ 越 } \Omega \in \Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \delta \nabla u + o(\epsilon^2) \right\} \text{ 越 } \Omega$$

定义 Δ 的线性主要部分

$$\int_{\mathcal{M}} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right\} \mathcal{M}$$

为泛函 \mathcal{L} 的一阶变分, 记为 $\delta \mathcal{L}$. 因此式(2.15)等价于泛函 \mathcal{L} 的一阶变分 $\delta \mathcal{L}$ 过零, 即函数 \mathbf{z} 使泛函 \mathcal{L} 达极值的必要条件是在 \mathcal{M} 上一阶变分 $\delta \mathcal{L}$ 过零

【例 2.15】 已给系统

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

求 \mathbf{u} , 使在它的作用下, 在 t_1 时刻将系统的状态转移到 $\mathbf{z}(t_1)$ 并使

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$$

最小。

解 为应用变分法求解, 由状态方程解出 $\mathbf{z}(t)$ 代入 \mathcal{L} 得到

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$$

化为一个最简单的变分问题。对这个问题的欧拉方程为

$$\mathbf{Q} \mathbf{z} - \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

于是 \mathbf{z} 使 \mathcal{L} 达极小值的必要条件是

$$\begin{cases} \mathbf{Q} \mathbf{z} - \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1 \end{cases}$$

以上二阶微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - \mathbf{Q} = 0$, 特征值为 $\lambda = \pm \sqrt{\mathbf{Q}}$, 于是它的通解是

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1 e^{\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1)} + \mathbf{C}_2 e^{-\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1)}$$

由边界条件得到关系式

$$\begin{cases} \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = \mathbf{z}_1 \end{cases}$$

解得

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{z}}(t_1)}{2}, \quad \mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{z}_1 - \dot{\mathbf{z}}(t_1)}{2}$$

式中 $\dot{\mathbf{z}}(t_1)$ 由 $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1$ 将 $\mathbf{z}(t)$ 代入通解得到

$$\dot{\mathbf{z}}(t_1) = \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{C}_1 - \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{C}_2 = \sqrt{\mathbf{Q}} \mathbf{z}_1$$

将它代入 $\mathbf{z}(t)$ 即得到最优控制

$$\mathbf{z}(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1) + \mathbf{I} \right) e^{\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1)} + \left(\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1) - \mathbf{I} \right) e^{-\sqrt{\mathbf{Q}}(t-t_1)} \right] \mathbf{z}_1$$

容许函数条件的降低 在上面的推导中假设了 $\mathbf{z}(t)$ 的二阶导数连续, 但是只要 $\mathbf{z}(t)$ 有逐段连续的一阶导数, 积分 \mathcal{L} 就是有意义的。这样对 $\mathbf{z}(t)$ 的二阶导数连续的假设是不自然的。下面的定理指出对容许函数 $\mathbf{z}(t)$ 的要求可降低到有逐段连续的一阶导数, 这时问题的解 $\mathbf{z}(t)$ 自动具有连续的二阶导数, 并且满足欧拉方程。

定理 2.15 (逐段连续控制定理) 设 $\mathbf{z}(t)$ 关于其所有变元二次连续可微, $\mathbf{z}(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续并有逐段连续的一阶导数, 如果

$$\delta \text{允越} \epsilon \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{曾垣} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{曾} \right] \text{渊越垣}$$

并且 δ 曾与曾贼具有相同的连续可微性, δ 曾贼越垣, δ 曾贼越垣, 并假设 $\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \neq \text{园}$ 那么曾贼具有连续的二阶导数并且满足欧拉方程。

定理 的证明可参看文献[]。

可变端点问题

可变端点问题是求曾贼, 使曾贼越垣, 并使泛函

$$\text{允曾越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾, 曾, 贼渊越}$$

取极小(极大)值。

解可变端点问题的办法是, 先设贼和曾贼是该问题的解, 令曾贼越垣那么曾贼也是以贼为最终时刻, 曾为边值的两端固定的变分问题的解, 因此解仍应满足欧拉方程和初始条件曾(贼)越垣, 这里缺少了必要条件式()中的另一个边界条件, 下面推导可变端点问题的另一个边界条件。引进贼的改变量 $\epsilon \delta$ 贼和曾的改变量 $\epsilon \delta$ 曾, 泛函 允的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta \text{允越} & \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \\ & \text{越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \\ & \text{垣} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \\ & \text{越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \left\{ \text{枣曾, 曾, 贼垣} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \delta \text{曾垣} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \delta \text{曾垣} \delta \text{曾垣} \delta \text{曾} \right\} \text{渊越} \\ & \text{原} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \end{aligned}$$

于是 $\Delta \text{允越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \left\{ \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{曾垣} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \delta \text{曾垣} \delta \text{曾} \right\} \text{渊越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越}$

由中值定理

$$\int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越}$$

园约 θ 约员

于是 $\int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{枣曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 曾垣} \epsilon \delta \text{曾, 贼渊越} \approx \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \delta \text{曾}$

Δ 允的一阶变分

$$\delta \text{允越} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{曾垣} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \delta \text{曾} \right] \text{渊越} \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \delta \text{曾}$$

消去 ϵ , 对上积分的第二项应用分部积分法得到

$$\left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \right]_{\text{贼}}^{\text{贼}} \int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{原} \left(\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right) \right] \delta \text{曾} \text{枣曾, 曾, 贼渊越} \delta \text{曾}$$

由 δu 及解满足欧拉方程, 上式化为

$$\frac{\partial L}{\partial u} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \right) dt = 0 \quad (2.10)$$

下面结合图 2.1 做进一步的分析。图中 u_1 为 δu 在 t_1 时刻的值, u_2 为 $u_1 + \delta u$ 在 $t_1 + \delta t$ 时刻的值与 u_1 的差, 两条曲线端点的 u 值的差记为 $\epsilon \delta u$, 即

$$u_1 - u_2 = \epsilon \delta u$$

一阶近似可取 $u_2 \approx u_1 + \epsilon \delta u$, 于是得到一阶近似式

$$\epsilon \delta u \approx u_1 - u_2 + \epsilon \delta u$$

即

$$\delta u \Big|_{t_1} = \delta u \Big|_{t_1} + \epsilon \delta u \quad (2.11)$$

应用式 (2.11), 式 (2.10) 化为

$$\frac{\partial L}{\partial u} \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} + \left[L(t_1, u_1, \dot{u}_1) - L(t_1, u_2, \dot{u}_2) \right] \delta t = 0 \quad (2.12)$$

式 (2.12) 称为右端点的广义边界条件, 下面分三种情况讨论:

1. t_1 固定, $\delta t = 0$, δu 任意, 式 (2.12) 化为

$$\frac{\partial L}{\partial u} \delta u \Big|_{t_1} = 0$$

由此得到边界条件

$$\frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{t_1} = 0$$

2. 完全自由端点的情况: δu 与 δt 是互相独立的,

这时式 (2.12) 中含 δu 项与含 δt 项的系数必分别为 0, 由

此得到边界条件

$$\frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{t_1} = 0, \quad L(t_1, u_1, \dot{u}_1) - L(t_1, u_2, \dot{u}_2) = 0$$

3. 如果端点 u_2 必须落到曲线 $u = \varphi(t)$ 上, 则 $\delta u = \varphi(t_1 + \delta t) - u_1$, 这时式 (2.12) 化为

$$\left[L(t_1, u_1, \dot{u}_1) - L(t_1, \varphi(t_1 + \delta t), \dot{\varphi}(t_1 + \delta t)) \right] \delta t = 0$$

由 δt 的任意性, 得到

$$\left[L(t_1, u_1, \dot{u}_1) - L(t_1, \varphi(t_1 + \delta t), \dot{\varphi}(t_1 + \delta t)) \right] = 0$$

总结以上推导得到如下结论:

当 t_1 固定, u_1 自由时的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0, & u_1 \text{ 自由} \\ \frac{\partial L}{\partial u} = 0, & u_1 \text{ 固定} \end{cases} \quad (2.13)$$

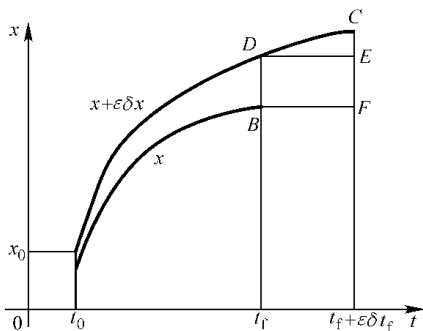


图 2.1 可动边界问题

当 贼,曾 贼均为自由时,可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{原} \frac{\partial \text{曾}}{\partial \text{曾}} \text{越园} \text{曾} \text{贼} \text{越} \text{曾} \\ \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{越园} \text{枣} \text{曾,曾} \text{贼} \text{越} \text{曾} \text{越园} \end{cases} \quad (\text{远怨})$$

当要求端点落到曲线 曾 贼越 曾 (贼)上时,则可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{原} \frac{\partial \text{曾}}{\partial \text{曾}} \text{越园} \\ \text{曾} \text{贼} \text{越} \text{曾} \left[\text{枣} \text{曾,曾} \text{贼} \text{垣} (\text{贼} \text{贼} \text{原} \text{曾}) \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \text{越园} \right] \end{cases} \quad (\text{远园})$$

【例 远圆】 已给系统

$$\text{曾} \text{越} \text{曾} \text{垣} \text{怎} \quad \text{曾} \text{贼} \text{越} \text{曾}$$

求 怎 贼使

$$\text{允} \text{怎} \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{贼} \text{ (曾} \text{垣} \text{怎) 越} \text{贼}$$

最小。这里 贼是给定的。

解 为使用变分法,由状态方程解出 怎越曾原曾,代入目标函数化为

$$\text{允} \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \left[\text{曾} \text{垣} \text{怎} \text{原} \text{曾} \right] \text{越} \text{贼}$$

曾 贼越 曾 给定,曾 贼自由,由必要条件(远怨)得到 曾 贼满足条件

$$\begin{cases} \text{曾} \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}} (\text{曾} \text{垣} \text{怎}) \text{曾} \\ \text{曾} \text{园} \text{越} \text{曾} \quad \left[\text{曾} \text{原} \text{曾} \right] \text{越园} \end{cases}$$

【例 远猿】 已给直线 造曾越曾原贼和 曾园越曾求 曾 贼,使得 曾 贼落到 造上,并使泛函

$$\text{允} \text{曾} \text{越} \int_{\text{曾}}^{\text{贼}} \sqrt{\text{员垣} \text{曾} \text{越} \text{贼}}$$

最小,即求过 粤点的曲线 曾 贼使与 造相截的线段 粤 弧长最短。

解 关于这个问题的欧拉方程为

$$\frac{\partial}{\partial \text{曾} \text{越} \text{贼}} \left(\frac{\text{曾}}{\sqrt{\text{员垣} \text{曾}}} \right) \text{越园}$$

$$\text{或} \quad \frac{\text{曾}}{\sqrt{\text{员垣} \text{曾}}} \text{越糟常数} \quad \text{曾} \text{越糟} (\text{员垣} \text{曾})$$

$$\text{即} \quad \text{曾} \text{越常数} \quad \text{积分得} \quad \text{曾} \text{越} \text{糟} \text{垣} \text{怎}$$

式中 糟越依 $\sqrt{\frac{\text{糟}}{\text{员原} \text{糟}}}$,由条件 曾园越曾解得,糟越员再由式(远猿)的最后一项

$$\left[\sqrt{\text{员垣} \text{曾} \text{垣} (\text{原} \text{员原} \text{曾})} \frac{\text{曾}}{\sqrt{\text{员垣} \text{曾}}} \right] \text{越园}$$

解得 曾 贼越员,由此得到满足必要条件的 曾 贼为 曾越贼垣员

员原

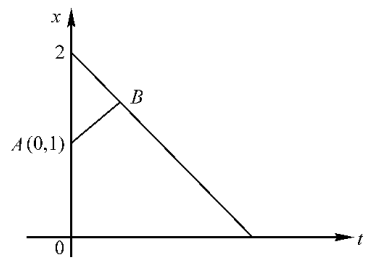


图 远猿 例 远猿的解

由题意知问题的解一定存在,而求出的满足必要条件的曲线只有一条,因此 \bar{u} 即为所求。

由于有本例显示的几何意义,条件

$$\left[\bar{u} \right]_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园}$$

常称为横截条件。

推广到一般泛函

在最优控制中目标函数常包含 $\theta(\bar{u}, \bar{u})$ 项,用以表示对终端时刻的特殊要求。为讨论这一类的最优控制问题,我们考虑泛函

$$J(\bar{u}, \bar{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{u} \text{ 越园}$$

的极值问题,假设 \bar{u} 越园和 \bar{u} 已给, \bar{u} 自由。

设 \bar{u} 使 J 达极小值,考虑

$$J(\bar{u} + \epsilon \delta \bar{u}, \bar{u}) - J(\bar{u}, \bar{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{u} \text{ 越园}$$

$$\Delta J \text{ 越园}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{u} \text{ 越园}$$

应用泰勒定理

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{u} \text{ 越园} \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right\} \text{ 越园}$$

$$\theta(\bar{u}, \bar{u}) \text{ 越园} \frac{\partial \theta(\bar{u}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} \cdot \epsilon \delta \bar{u} \text{ 越园}$$

$$\Delta J \text{ 越园} \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right\} \text{ 越园}$$

改变量的一阶变分

$$\delta J \text{ 越园} \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right\} \text{ 越园}$$

消去 ϵ , 应用分部积分得到一阶必要条件为

$$\frac{\partial \theta(\bar{u}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} \cdot \delta \bar{u} \text{ 越园} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right] \delta \bar{u} \text{ 越园}$$

由于 \bar{u} 越园已给, 于是 $\delta \bar{u}$ 越园上式化为

$$\frac{\partial \theta(\bar{u}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} \delta \bar{u} \text{ 越园} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right] \delta \bar{u} \text{ 越园} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right] \text{ 越园}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right] \delta \bar{u} \text{ 越园} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{u}} \bar{u} \text{ 越园} \right] \delta \bar{u} \text{ 越园}$$

因为最优的 \bar{u} 取定后, \bar{u} 也取定了, \bar{u} 也是泛函

$$\int_{\xi}^{\eta} \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy$$

的 λ 、 μ 给定的极值问题的解, 因此 λ 仍应满足欧拉方程, 这样得到对这个问题的解 λ 应满足的必要条件是

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

如果 y 也是自由的, 则问题化为求 λ 和 μ 使

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

达极大或极小值。设 λ 和 μ 已求出, 它们使 $\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$ 达极大或极小值, 则

$$\Delta \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \Delta \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy = 0$$

$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$ 在 λ 和 μ 附近展开, 取到一阶项有

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

应用式(2.10)一阶变分为

$$\Delta \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \Delta \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \left[\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right] dx + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy = 0$$

于是得到必要条件

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \left[\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right] dx + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy = 0$$

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\int_{\xi}^{\eta} \left[\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right] dx + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} dy = 0$$

上式的推导中应用了式(2.10)。由于 λ 必满足初始条件和欧拉方程, 上式化为

$$\left[\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \right]_{\xi}^{\eta} + \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Big|_{\xi}^{\eta} = 0$$

因此, 当 λ 与 μ 互相独立时, 必要条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda (\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - c) \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda (\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - c) \right] \\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - c) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{拉格朗日})$$

推广到多变量的情况

在应用中常遇到多个变量的泛函的极值问题。当泛函有 n 个未知函数时, 变分问题为: 求 $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})$ 使得 $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 取极值。且 $\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c$, 并使泛函 $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 取

极值。为了讨论方便, 引进矢量

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \quad \delta \mathbf{u} = [\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n]^T$$

和梯度矢量

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_n} \right]^T, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_m} \right]^T$$

考虑泛函

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

的两端固定的变分问题。设它在 \mathbf{u}, \mathbf{v} 上达极值, 记

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda (\mathcal{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - c)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

在 \mathbf{u}, \mathbf{v} 上达到它的极值。因此

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

应用泰勒定理

$$\mathcal{L}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} + \delta \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} + o(\|\delta \mathbf{u}\| + \|\delta \mathbf{v}\|) \right\} d\mathbf{x}$$

于是由

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

得到

$$\int_{\Omega} \left[\delta \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} + \delta \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{变分原理})$$

对上式的第二项应用分部积分,

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \delta v_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \delta v_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} d\mathbf{x}$$

$$\text{越} \sum_{\text{蚤}}^{\text{灶}} \left\{ \left[\delta_{\text{曾}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{原}} \int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \delta_{\text{曾}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right\}$$

由于 $\delta_{\text{曾}}$ 越园, $\delta_{\text{曾}}$ 越园, 上式化为

$$\int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \left[(\delta_{\text{曾}})^{\text{裁}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \int_{\text{蚤}}^{\text{灶}} \left[\delta_{\text{曾}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}}$$

代入式(2.15)得到

$$\int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \left[(\delta_{\text{曾}})^{\text{裁}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \int_{\text{蚤}}^{\text{灶}} \left[\delta_{\text{曾}} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \text{越园}$$

由于 $\delta_{\text{曾}}$ 是独立的, 上式等价于

$$\int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \delta_{\text{曾}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \text{越园} \text{蚤越员} \dots \text{灶}$$

由引理 2.15, 上式意味着

$$\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \text{越园} \text{蚤越员} \dots \text{灶}$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \left[\frac{\partial \text{枣}}{\partial \text{曾}} \right]_{\text{越}} \\ \text{曾越} \text{越园}, \text{曾越} \text{越园} \end{cases} \quad (2.16)$$

式(2.16)是必要条件式(2.15)的矢量形式。对于其他边界条件的情况, 都可以将相应的必要条件式(2.16)、式(2.17)、式(2.18)、式(2.19)、式(2.20)看作矢量形式的必要条件应用于相应的多变量问题。

2.16 无约束最优控制问题的解

无约束最优控制问题的解

已给系统的状态方程

$$\text{曾越} \text{枣}, \text{怎}, \text{越} \text{越园}$$

和目标函数

$$\text{允越} \theta(\text{曾越}, \text{越}) \int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \text{越} \text{越园}$$

无约束最优控制问题是求 怎 越使 允越 最小(或最大)。这里 越 已给定, 曾越 是自由的。

将状态方程作为约束条件 $\text{枣}, \text{怎}, \text{越}$ 越园, 引入拉格朗日乘子矢量 λ (越, 考虑泛函

$$\text{允越}, \text{怎}, \text{越} \text{越} \theta(\text{曾越}, \text{越}) \int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \left[\text{越} \text{越园} \lambda^{\text{裁}} (\text{枣}, \text{怎}, \text{越}) \right]_{\text{越}}$$

$$\text{越} \theta(\text{曾越}, \text{越}) \int_{\text{嘘}}^{\text{嘘}} \text{匀} \text{曾}, \lambda, \text{怎}, \text{越} \text{越园}$$

式中 $\text{匀} \text{曾}, \lambda, \text{怎}, \text{越} \text{越园}$ 越园 $\lambda^{\text{裁}} (\text{枣}, \text{怎}, \text{越})$

如果 $\text{枣}, \text{怎}, \text{越}$ 越园, 越 越园, 关于其所有变元二次连续可微, $\text{曾}, \text{怎}, \lambda$ 的一阶导数逐段连续, 则

则利用上节的结果,得到 $\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}$ 使 J 达相对极值的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

由 \bar{J} 的定义, 上三个必要条件可化为

$$\begin{cases} \bar{u} \text{ 使 } J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \text{ 取极值} \\ \bar{\lambda} \text{ 使 } \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases}$$

式中 $J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda})$ 称为哈密顿函数。

由必要条件(2.15), 边界条件为

$$J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \Big|_{t_0} = J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \Big|_{t_1} + \lambda(t_1) \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{t_1}$$

或者 $J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \Big|_{t_0} = \lambda(t_0) \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{t_0}$

由于这里考虑 $\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}$ 是 J 的泛函, $\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}$ 在两个端点都是自由的, 因此还应成立如下四个边界条件

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{u}} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{u}} \Big|_{t_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{t_1} = 0$$

由于 J 不依赖于 \bar{z} 和 $\bar{\lambda}$, 这些条件显然都是成立的。

综上所述, 无约束最优控制问题的必要条件为: 存在 $\bar{\lambda}(t)$, 它与 \bar{u}, \bar{z} 一起满足正则方程组及边界条件

$$\begin{cases} \bar{u} \text{ 使 } J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \text{ 取极值} \\ \bar{\lambda} \text{ 使 } \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

式中的 \bar{z} 由

$$\frac{\partial J}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.17)$$

确定。

如果 \bar{z} 也是给定的, 则用边界条件 $J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \Big|_{t_0} = J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \Big|_{t_1} + \lambda(t_1) \frac{\partial J}{\partial \bar{\lambda}} \Big|_{t_1}$ 代替式 (2.16) 中的第二个条件。

求最优控制的计算步骤

第 1 步 构造哈密顿函数

$$J(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\bar{u}, \bar{z}, \bar{\lambda}, t) dt + \phi(\bar{z}(t_1))$$

根据

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \lambda} = 0$$

求出 $\lambda^*(x)$ 。

第 1 步 以 $\lambda^*(x)$ 代入正则方程, 消去 λ , 解两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \lambda^*(x), u) \\ \lambda = -\frac{\partial H(x, \lambda^*(x), u)}{\partial x} \end{cases}$$

得到 $x^*(t)$ ($\lambda^*(t)$ 也求出)。

第 2 步 以 $x^*(t)$ ($\lambda^*(t)$ 也代入 $H(x, \lambda^*(x), u)$) 得到所求的最优控制

$$u^*(t) = \arg \min_u H(x^*(t), \lambda^*(t), u)$$

对两端固定的问题关于 λ 的边界条件应换为 $\lambda(t_1) = \lambda_1$

以上导出了无约束最优控制问题的解满足的必要条件, 在求解的过程中, 要求出最优控制 u^* , 必须同时求出 x^* 和 λ^* , 这样要求的变量有 $n+m$ 个。利用 $n+m$ 个条件式(2.15)可以导出 $\lambda^*(x)$, 应用这个关系式在正则方程中消去 λ 以后, 正则方程成为关于 n 个变量 x 和 u 的 n 个微分方程, 并有 n 个定解条件, 据此可以求出 $x^*(t)$ ($\lambda^*(t)$ 也求出), 代入 H 即得到所求的最优控制。如果这样求出的最优控制 u^* 是惟一的, 而由实际背景又知道最优控制一定存在, 那么它就是所求最优解了。

由于正则方程式(2.15)的对称形式, 方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

常称为协状态方程, λ 称为协状态矢量。由于式(2.15)的 n 个边界条件中, 有 m 个给在初始时刻 t_1 , 另外 n 个给在终端时刻 t_2 , 该问题常称为两点边值问题。除少数简单问题以外, 两点边值问题一般需要数值解, 两点边值问题的这一特征导致了计算上的困难: 既不能由 t_1 向后积分, 又不能由 t_2 向前积分。已经有一些解两点边值问题的方法, 本书不进行讨论。

下面举两个可以直接由边界条件求解的简单的例。

【例 2.1】 已给系统的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u$$

目标函数为

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + u^2) dt$$

求 $u^*(t)$, 将 J 转移到 H 并使 J 最小。

解 第 1 步 构造该问题的哈密顿函数

$$H(x, \lambda, u) = \lambda(-x + u) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2)$$

由条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

得到 $u = x$ 或 $u = -x$ 。

第 2 步 将 $u = x$ 代入正则方程, 得到

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x \\ \dot{\lambda} = -x \end{cases}$$

第一个方程微分得到

曾垣曾垣λ 越园

以 λ 越原曾垣λ 及 λ 越原曾原曾代入上式得到

$$\frac{\lambda}{\sigma} \text{曾原曾越园}$$

再应用边界条件 曾园 越员曾贼 越园即得到解(见例 透质)

$$\text{曾贼越} \frac{\lambda}{\sigma} \left[\frac{\sigma}{\lambda} \text{曾原曾} - \frac{\sigma}{\lambda} \right] \text{阅越} \frac{\sigma}{\lambda} \text{曾原曾}$$

由此得到

$$\text{怎贼越原}\lambda \left(\text{贼越曾垣曾越} \frac{\lambda}{\sigma} \left[\sqrt{\text{圆垣员}\frac{\sigma}{\lambda}} - \frac{\sigma}{\lambda} \right] - \frac{\lambda}{\sigma} \left[\sqrt{\text{圆原员}\frac{\sigma}{\lambda}} - \frac{\sigma}{\lambda} \right] \right)$$

得到了与例 透质相同的结果。

注意,在讲了本节的解无约束最优控制问题的方法以后,就不用像例 透质那样将一个最优控制问题化成简单的变分问题求解,而是像本例这样直接利用解无约束最优控制问题的必要条件求解。

【例 透缘】 已知系统的状态方程为

$$\text{曾越怎, 曾园越曾}$$

目标函数为

$$\text{允怎越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} \frac{\sigma}{\lambda} (\text{曾垣则怎}) \text{怎贼} \text{ 怎, 则均为常数}$$

求 怎贼使 允怎 最小。

在这个问题中 贼越员曾贼 自由。当问题不仅要求 曾→园还要求 曾比 怎贼 趋向零的速度更快时,考虑 怎曾→园这时目标函数取为

$$\int_{\text{园}}^{\text{肆}} \left[\frac{\sigma}{\lambda} (\text{曾垣则怎}) \text{怎贼} \right] \text{怎越} \int_{\text{园}}^{\text{肆}} \frac{\sigma}{\lambda} (\text{曾垣则怎}) \text{怎贼}$$

这就是本例考虑的类型,只是这里控制时间考虑的是有限时间,下面解这个问题。

第 员步 构造该问题的哈密顿函数

$$\text{匀曾}\lambda, \text{怎贼越} \frac{\lambda}{\sigma} (\text{曾垣则怎}) \text{垣}\lambda \text{怎}$$

由条件

$$\frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{怎}} \text{越} \frac{\lambda}{\sigma} \text{曾垣则怎垣}\lambda \text{越园}$$

导出

$$\text{怎越原} \frac{\lambda}{\sigma} \text{曾}$$

第 圆步 解两点边值问题:

$$\begin{cases} \text{曾越怎越原} \frac{\lambda}{\sigma} \text{曾} \text{ 曾园越曾} \\ \lambda \text{越原} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{曾}} \text{越原} \frac{\lambda}{\sigma} \text{曾} \text{ } \lambda(\text{员越园}) \end{cases}$$

令 λ 忆越原 λ 曾 则 怎越λ 忆 并且

$$\lambda \text{ 忆越原} \frac{\lambda}{\sigma} \text{曾垣}\lambda \text{ 忆越原} \frac{\sigma}{\lambda} \text{曾}$$

于是正则方程组化为:

$$\begin{cases} \text{曾越}\lambda \text{ 忆} \text{ 曾园越曾} \\ \lambda \text{ 忆越} \frac{\sigma}{\lambda} \text{曾原}\sigma \lambda \text{ 忆} \text{ } \lambda \text{ 忆员越园} \end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\begin{bmatrix} \text{曾} \\ \lambda \text{忆} \end{bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} \text{园} & \text{员} \\ \text{员} & \text{原} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{曾} \\ \lambda \text{忆} \end{bmatrix}$$

系数矩阵是自然标准型,由矩阵代数的结果知道它的两个特征矢量为

$$\begin{bmatrix} \text{员} \\ \text{泽} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{员} \\ \text{泽} \end{bmatrix}$$

泽,泽是上面的齐次微分方程组的特征方程

$$\text{泽垣} \sigma \text{泽原} \frac{\text{员}}{\text{泽}} \text{越园}$$

的两个根。解特征方程得到

$$\text{泽越} \frac{\text{原} \sigma \text{垣} \sqrt{\sigma^2 \text{圆垣} \frac{\text{源}}{\text{泽}}}}{\text{圆}} \quad \text{泽越} \frac{\text{原} \sigma \text{原} \sqrt{\sigma^2 \text{圆垣} \frac{\text{源}}{\text{泽}}}}{\text{圆}}$$

由此得到正则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} \text{曾} \\ \lambda \text{忆} \end{bmatrix} \text{越悦} \begin{bmatrix} \text{员} \\ \text{泽} \end{bmatrix} \text{藻}^{\text{贼}} \text{垣悦} \begin{bmatrix} \text{员} \\ \text{泽} \end{bmatrix} \text{藻}^{\text{贼}}$$

再由边界条件 曾(园) 越 曾, λ忆(员) 越 园得到

$$\begin{aligned} \text{悦} \text{垣悦} \text{越曾} \\ \text{悦} \text{泽藻} \text{垣悦} \text{泽藻} \text{越园} \end{aligned}$$

这是一个线性代数方程组,显然它有惟一解,解出 悦,悦代入所得的通解,就可得到 曾(贼), λ忆(贼),再代入 怎越λ忆中即得到所求的解。

例 2.1.1 求出了惟一满足必要条件的函数 怎,贼,如果由实际问题本身知道它一定有最优解,那么所求得这个惟一解就是要求的最优控制了。

关于允许控制 怎的条件

上面的必要条件的推导利用了变分法的结果,因此 怎,贼应满足上节关于 曾,贼的假设条件,即要求 怎的一阶导数逐段连续。但是,怎,贼是控制矢量,很多情况下它的分量仅是一个逐段连续函数。例如控制中常采用的 追踪控制就是形如

$$\text{怎} \text{越} \begin{cases} \text{原} \text{怎}, & \text{当 } \text{贼} \leq \text{贼} \leq \text{贼} \text{时,} \\ \text{原} \text{怎}, & \text{当 } \text{贼} \leq \text{贼} \leq \text{贼} \text{时.} \end{cases}$$

的一个逐段连续函数,怎是怎的第 蚤个分量。

下面说明,即使对逐段连续函数 怎,贼也得到与式(2.1.1)相同的必要条件。记

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon_{\text{员}} \dots, \epsilon_{\text{灶}}, \lambda_{\text{员}} \dots, \lambda_{\text{灶}}, \epsilon_{\text{圆}} \dots, \epsilon_{\text{灶}}, \lambda_{\text{员}} \dots, \lambda_{\text{灶}}) \\ \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{怎} \text{垣} \epsilon_{\text{员}} \delta \text{怎} \dots, \epsilon_{\text{灶}} \text{垣} \delta \text{怎} \lambda_{\text{员}} \text{垣} \epsilon_{\text{灶}} \delta \lambda_{\text{员}} \dots, \lambda_{\text{灶}} \text{垣} \delta \lambda_{\text{灶}}; \\ \text{怎} \text{垣} \epsilon_{\text{圆}} \delta \text{怎} \dots, \text{怎} \text{垣} \epsilon_{\text{灶}} \delta \text{怎}, \text{贼} \text{越贼} \end{aligned}$$

在极值点

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{\text{蚤}}} \right|_{\epsilon \in \text{越园}} \text{越园} \quad \text{蚤越员} \dots \text{灶}$$

式中 $\epsilon \in \text{越园}$ 表示所有 $\epsilon_{\text{蚤}}$ 均为园,这一条件对 蚤越员, ..., 灶得到相应的状态方程和协状态方程,

由

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \in \text{越园}} \quad \text{越园} \quad \text{蚤越园灶垣皂, \dots, 园灶垣皂}$$

得到 $\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \delta \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{越园} \quad \text{蚤越园, \dots, 皂}$

对任意逐段连续函数 $\delta \varepsilon$ 成立. 应用下面的引理即可由上式导出必要条件式 (2.10).

引理 2.10 设 澡贼 在 $[\text{越园}, \text{越园}]$ 上逐段连续, 并且对 $[\text{越园}, \text{越园}]$ 上的任意逐段连续的函数 η 成立

$$\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{澡贼} \eta(\text{越园}, \text{越园})$$

那么在 $[\text{越园}, \text{越园}]$ 上 $\text{澡贼} \equiv \text{越园}$

证明 由于 澡贼 在 $[\text{越园}, \text{越园}]$ 上逐段连续, 存在常数 悦 使

$$\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} (\text{澡贼} - \text{悦}) \eta(\text{越园}, \text{越园}) \text{取悦越} \left(\frac{\text{员}}{\text{澡贼} - \text{悦}} \right) \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{澡贼} \eta(\text{越园}, \text{越园})$$

$\text{澡贼} - \text{悦}$ 是逐段连续函数, 取 $\eta(\text{越园}, \text{越园}) = \text{澡贼} - \text{悦}$, 则

$$\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} (\text{澡贼} - \text{悦}) \eta(\text{越园}, \text{越园}) \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{澡贼} \eta(\text{越园}, \text{越园}) \text{取悦越} \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \eta(\text{越园}, \text{越园}) \text{取悦越} \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} (\text{澡贼} - \text{悦}) \eta(\text{越园}, \text{越园})$$

即 $\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} (\text{澡贼} - \text{悦}) \eta(\text{越园}, \text{越园})$

由此得到 $\text{澡贼} - \text{悦} \geq \text{澡贼} - \text{悦}$ 对 $\text{越园} \in [\text{越园}, \text{越园}]$ 成立. 再取 $\eta(\text{越园}, \text{越园}) = \text{悦} - \text{澡贼}$ 又有

$$\int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{澡贼} \eta(\text{越园}, \text{越园}) \int_{\text{越园}}^{\text{越园}} \text{悦} \eta(\text{越园}, \text{越园})$$

于是得到 $\text{澡贼} - \text{悦} \leq \text{澡贼} - \text{悦}$ 对 $\text{越园} \in [\text{越园}, \text{越园}]$ 成立. 证完.

应用引理 2.10 导出必要条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \in \text{越园}} \text{越园}$$

写成矢量形式为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \in \text{越园}} \text{越园}$$

即对逐段连续函数 ε 也得到了与式 (2.10) 相同的必要条件.

其他情况下的必要条件

(1) 当要求 曾贼 满足约束

$$\begin{cases} \text{晕}(\text{曾贼}, \text{越园}) \text{越园} \\ \dots \\ \text{晕}(\text{曾贼}, \text{越园}) \text{越园} \end{cases} \quad \text{(矢量形式为 } \text{晕}(\text{曾贼}, \text{越园}) \text{越园)} \quad (2.11)$$

时, 如果 越园 是给定的, 则正则方程的边界条件为

$$\begin{cases} \text{曾贼} \text{越园} \\ \lambda(\text{越园}) \text{越} \frac{\partial \theta(\text{曾贼}, \text{越园})}{\partial \text{曾贼}} \text{垣} \frac{\partial \text{晕}(\text{曾贼}, \text{越园})}{\partial \text{曾贼}} \cdot \text{增} \\ \text{晕}(\text{曾贼}, \text{越园}) \text{越园} \end{cases} \quad (2.12)$$

式中

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} & \cdots & \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} & \cdots & \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} \end{bmatrix}$$

如果 \bar{p} 也是自由的, 这时多了一个未知量, 必要条件再增加一个方程

$$\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \frac{\partial \bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z})}{\partial \lambda} = \text{const} \quad (2.10)$$

式(2.9)、(2.10)的推导 设 \bar{p} 给定, 考虑泛函

$$\bar{J}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) = \int_{t_0}^{t_1} [\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \dot{\bar{z}}] dt$$

$$\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z})$$

式中 $\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) = \bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \dot{\bar{z}}$

应用一般泛函极值的必要条件式(2.8), 边界条件应为

$$\left. \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{p}} \right|_{\bar{p}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = \lambda \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} - \lambda \dot{\bar{z}} \right]$$

由 \bar{p} 的定义, $\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{p}} = \lambda$, 因此以上边界条件化为

$$\lambda(\bar{z}) = \frac{\partial \bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z})}{\partial \lambda} = \text{const}$$

如果 \bar{p} 也是自由的, 由必要条件(2.10)应增加一个方程

$$\left[\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \dot{\bar{z}} \right]_{\bar{p}} = \text{const}$$

$$\left[\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \dot{\bar{z}} \right]_{\bar{p}} = \text{const}$$

由于 $\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{p}} = \lambda$, 及 $\bar{p} = \lambda$, 则上式化为

$$\bar{H}(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) - \lambda \dot{\bar{z}} = \text{const}$$

这就导出了式(2.10)。

(圆) 当哈密顿函数不显含 \bar{p} 时, 沿最优轨线

$$\bar{H}(\lambda, \bar{z}) = \text{const}$$

因此, 当 \bar{p} 不显含 \bar{p} 时, 沿最优轨线

$$\bar{H}(\lambda, \bar{z}) = \text{const} \quad (2.11)$$

这里的推导假设 \bar{z} 存在, 进一步的讨论可以证明: 对 \bar{z} 的连续点, \bar{p} 存在, 并且 $\bar{p} = \text{const}$ 。因此, 对 \bar{z} 的连续点 $(\bar{p}, \lambda, \bar{z}) = \text{const}$ (参看文献[10])。

(猿) 当 \bar{p} 自由时, 如果 \bar{p} 不依赖于 \bar{z} 并且 θ 和 \bar{H} 也都不依赖于 \bar{z} , 则由边界条件式(2.10)进一步得到

匀曾贼, λ(贼, 怎贼) 越园

再由 匀曾λ, 怎 沿最优轨线等于常数的结果, 导出必要条件: 沿最优轨线

$$\text{匀曾贼}, \lambda(\text{贼}, \text{怎贼}) = \text{园}$$

(远园园)

【例 远园】 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \text{曾} \text{越} \text{曾} & \text{曾}(\text{园}) \text{越} \text{园} \\ \text{曾} \text{越} \text{原曾} \text{垣} \text{怎} & \text{曾}(\text{园}) \text{越} \text{园} \end{cases}$$

求 怎贼 使在给定的时刻 贼 将状态转移到直线 葬曾 垣 遭曾 越 糟上, 并使

$$\text{允怎} \text{越} \frac{\text{员}}{\text{园}} \int_{\text{园}}^{\text{贼}} \text{怎} \text{贼} \text{贼}$$

最小。

解 第 员步 对该系统哈密顿函数为

$$\text{匀曾}\lambda, \text{怎} \text{越} \frac{\text{员}}{\text{园}} \int_{\text{园}}^{\text{贼}} \lambda \text{怎} \text{垣} \lambda \text{曾} \text{垣} \lambda(\text{原曾} \text{垣} \text{怎})$$

由必要条件

$$\frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{怎}} \text{越} \text{怎} \text{垣} \lambda \text{越} \text{园}$$

解得

$$\text{怎} \text{越} \text{原} \lambda$$

第 圆步 解正则方程组

$$\begin{cases} \text{曾} \text{越} \text{曾} \\ \text{曾} \text{越} \text{原曾} \text{垣} \text{怎} \text{越} \text{原曾} \text{原} \lambda \\ \lambda \text{越} \text{园} \\ \lambda \text{越} \text{原} \lambda \text{垣} \lambda \end{cases}$$

由协状态方程可解出

$$\begin{cases} \lambda \text{越} \text{悦} \\ \lambda \text{越} \text{悦} \text{遭} \text{垣} \text{悦} \end{cases}$$

将 λ 代入状态方程的第二个方程, 求解得到

$$\text{曾}(\text{贼}) \text{越} \text{悦} \text{遭} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{园}} \text{悦} \text{遭} \text{原} \text{悦}$$

代入第一个方程积分, 得到

$$\text{曾}(\text{贼}) \text{越} \text{原} \text{悦} \text{遭} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{园}} \text{悦} \text{遭} \text{原} \text{悦} \text{贼} \text{垣} \text{悦}$$

由边界条件式(远园)知, 该问题的边界条件是

$$\begin{cases} \text{曾}(\text{园}) \text{越} \text{园} & \text{曾}(\text{园}) \text{越} \text{园} \\ \lambda \text{员}(\text{贼}) \text{越} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{曾}} \cdot \text{增} \text{越} \text{葬} \\ \lambda \text{圆}(\text{贼}) \text{越} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{曾}} \cdot \text{增} \text{越} \text{遭} \\ \text{葬}(\text{贼}) \text{垣} \text{遭}(\text{贼}) \text{越} \text{糟} \end{cases}$$

代入上面求得的正则方程的通解中, 得到

$$\text{原} \text{悦} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{园}} \text{悦} \text{垣} \text{悦} \text{越} \text{园}$$

悦原^员悦原悦越园

$$\frac{\lambda_{员}(\text{贼})}{\lambda_{圆}(\text{贼})} \text{越} \frac{\text{悦原}}{\text{悦原}} \text{越} \text{葬}$$

葬原悦^员原^员悦^员原悦^员贼垣悦^员垣遭悦^员原^员悦^员原悦^员越糟

如果葬,遭,糟已给,解上面的方程组得到悦^员,悦^圆,悦^猿,悦^源代入 $\lambda_{圆}$ 中就得到最优控制怎越原(悦^员藻垣悦^圆)

远猿 最大值原理及其应用

在上节中介绍了用变分法解几种最优控制问题的方法。用变分法解最优控制问题有一定的局限性。首先,变分法要求控制变量怎无约束(或者怎属于某个开集),因此在实际问题中常遇到的有|怎| ≤ 酝类型的控制变量约束的最优控制问题不能用变分法处理。其次,变分法要求枣曾,怎,贼和蕴曾,怎,贼关于所有自变量二次连续可微,要求哈密顿函数匀关于控制变量的偏导数存在,这使得像最省燃料这一类的问题被排除在外,这是因为它的目标函数中出现了|怎|,从而使蕴曾,怎,贼关于怎不可微,哈密顿函数匀关于怎的偏导数不存在。为克服上述的局限性引进了最大值原理。本节介绍最大值原理,它是变分法的推广和现代化。

远猿员 最大值原理

设系统的状态方程为

$$\text{曾越枣曾,怎,贼} \quad \text{曾(贼)越曾}$$

控制怎属于砸中的某个有界闭集哉,最优控制问题是求怎 ∈ 哉,使得

$$\text{允怎)越}\theta(\text{曾(贼),贼)垣\int_{\text{贼}}^{\text{贼}} \text{蕴曾,怎,贼} \text{贼}$$

最小。

假设枣曾,怎,贼的分量为枣_{曾,怎,贼},并假设

$$\text{枣}_{\text{曾,怎,贼}}, \frac{\partial \text{枣}_{\text{曾,怎,贼}}}{\partial \text{贼}}, \frac{\partial \text{枣}_{\text{曾,怎,贼}}}{\partial \text{曾}}, \text{蕴}_{\text{曾,怎,贼}}, \frac{\partial \text{蕴}_{\text{曾,怎,贼}}}{\partial \text{贼}}, \frac{\partial \text{蕴}_{\text{曾,怎,贼}}}{\partial \text{曾}}, \theta(\text{曾(贼),贼}), \frac{\partial \theta(\text{曾(贼),贼})}{\partial \text{曾(贼)}}, \frac{\partial \theta(\text{曾(贼),贼})}{\partial \text{贼}} \quad (\text{蚤躁越员圆...灶})$$

都是其自变量的连续函数。

用怎,曾分别表示最优控制和最优轨线,最大值原理给出怎所满足的必要条件。

最大值原理 怎(贼使允怎)达最小值的必要条件是:

(员)存在协状态向量 $\lambda^*(\text{贼})$,它和曾(贼,怎(贼)一起满足正则方程

$$\begin{cases} \text{曾越枣}_{\text{曾,怎,贼}} \\ \dot{\lambda} \text{越原} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{曾}} \end{cases}$$

(圆)哈密顿函数作为怎的函数在怎越怎(贼)达最小值,即

$$\text{匀}_{\text{曾}, \lambda^*, \text{怎,贼}} \text{越} \text{匀}_{\text{曾}, \lambda^*, \text{怎,贼}}$$

(远猿员)

(猿)正则方程的边界条件:

员若曾越曾是给定的,则边界条件为

$$\text{曾越曾} \quad \text{曾越曾}$$

圆如果越给定,曾自由,那么边界条件为

$$\text{曾越曾} \quad \lambda(\text{越}) \text{越} \frac{\partial \theta(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{曾越曾}}$$

猿如果越也是自由的,还要加一个条件

$$\text{匀曾越曾} \quad \lambda(\text{越}, \text{越越越}, \text{越}) \text{垣} \frac{\partial \theta(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{越}} \text{越园}$$

以确定越

源如果要求曾越曾落在皂维流型杂上,

$$\text{杂园} \begin{cases} \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越}) \text{越园} \\ \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越}) \text{越园} \\ \dots \\ \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越}) \text{越园} \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越}) \text{越园}$$

那么边界条件为

$$\begin{cases} \text{曾越曾} \\ \lambda(\text{越}) \text{越} \frac{\partial \theta(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{曾越曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{曾越曾}} \text{增} \\ \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越}) \text{越园} \quad \text{增越}[\text{增}, \dots, \text{增}]^{\text{越}}$$

如果越自由的,再增加条件:

$$\text{匀曾越曾} \quad \lambda(\text{越}, \text{越越越}, \text{越}) \text{垣} \frac{\partial \text{晕}(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{越}} \text{增垣} \frac{\partial \theta(\text{曾越曾}, \text{越})}{\partial \text{越}} \text{越园}$$

可以看出,上述的正则方程和边界条件与无约束的情况,用变分法导出的完全相同。

最大值原理中式(2.10)的含义是:由最优控制越越越(越引发的状态曾(越和协状态 λ^* (越使得哈密顿函数最小。

最大值原理的证明可参看文献[员][圆]。

【例 2.10】已给系统

$$\text{曾越曾原越} \quad \text{曾园越缘}$$

求满足约束 $\frac{\text{员}}{\text{圆}} \leq \text{越} \leq \text{员}$ 的控制越越越,使目标泛函

$$\text{允越越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} (\text{曾垣越越越})$$

最小,并求出目标函数的最小值。

解 首先写出该问题的哈密顿函数

$$\text{匀越越}(\text{曾垣越}) \text{垣} \lambda(\text{曾原越}) \text{越}(\text{员垣}\lambda) \text{曾垣}(\text{员原}\lambda) \text{越}$$

由最大值原理,应选取越越越使匀最小,即

$$\text{越越越} \begin{cases} \frac{\text{员}}{\text{圆}} & \text{当 } \lambda \text{ 约员时} \\ \text{员} & \text{当 } \lambda \text{ 跃员时} \end{cases}$$

协状态方程为

$$\dot{\lambda} = -\lambda$$

它的通解为 $\lambda = e^{-t}$ 由边界条件 $\lambda(1) = 1$ 得到 $\lambda = e^{-(1-t)}$ 原员设 $\lambda(t) = e^{-(1-t)}$ 由 λ 的解式可解出 $u = 1 - e^{-(1-t)}$ 于是得到最优控制

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{当 } t \leq 0.307 \text{ 时} \\ e^{-(1-t)} & \text{当 } t > 0.307 \text{ 时} \end{cases}$$

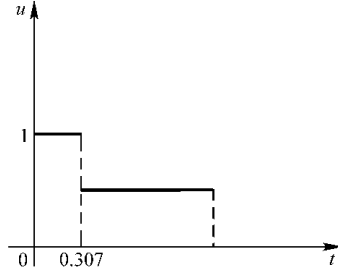
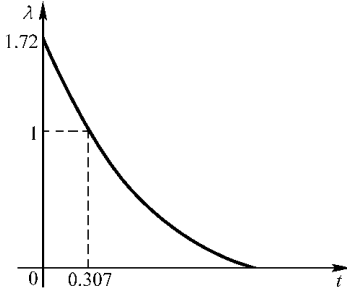


图 例 的解

由状态方程和初始条件, 最优轨线为

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{当 } t \leq 0.307 \text{ 时} \\ e^{-(1-t)} & \text{当 } t > 0.307 \text{ 时} \end{cases}$$

将 u 和 λ 代入目标函数中, 得到目标函数的最小值为

$$J_{\min} = \int_0^1 (1 - e^{-(1-t)}) e^{-(1-t)} dt = \int_0^1 (1 - e^{-(1-t)}) e^{-(1-t)} dt = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

【例 3】已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = u & x(0) = 1 \\ \dot{\lambda} = -\lambda & \lambda(1) = 1 \end{cases}$$

求满足约束条件 $|u| \leq 1$ 的控制 $u(t)$, 将系统的初始状态转移到 $x(1) = 0$ 所用时间最短, 式中

$$J = \int_0^1 |u| dt$$

解 最短时间问题的目标函数取为

$$J = \int_0^1 |u| dt$$

首先写出哈密顿函数:

$$H = \lambda u + \lambda$$

由最大值原理

$$u = \begin{cases} 1 & \text{当 } \lambda > 0 \text{ 时,} \\ -1 & \text{当 } \lambda < 0 \text{ 时,} \\ \text{不确定} & \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

或

$$u = -\text{sgn}(\lambda)$$

协状态方程为

原员

$$\begin{cases} \lambda_{员} > 园 \\ \lambda_{圆} > 原 \lambda_{员} \end{cases}$$

它的通解是 $\lambda_{员} > 粤, \lambda_{圆} > 原 \lambda_{员}$ 因此 怎 至多有一次切换。

当 怎 $> 原 \lambda_{员}$ 时, 状态方程

$$\begin{cases} 粤 > 粤 & 粤(园) > 员 \\ 粤 > 原 \lambda_{员} & 粤(园) > 员 \end{cases}$$

的解为

$$\text{怎} \text{ 原} \begin{cases} 粤 > 员 \text{ 垣 } 贼 \text{ 原 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼} \\ 粤 > 员 \text{ 原 } 贼 \end{cases}$$

当 怎 $> 员$ 时, 状态方程

$$\begin{cases} 粤 > 粤 & 粤(园) > 员 \\ 粤 > 员 & 粤(园) > 员 \end{cases}$$

的解为

$$\text{怎} \text{ 原} \begin{cases} 粤 > 员 \text{ 垣 } 贼 \text{ 垣 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼} \\ 粤 > 员 \text{ 垣 } 贼 \end{cases}$$

显然, 从 怎 可看出, 当 赠 大时它将远离(员员)点, 也远离(园园)点。因此最优控制开始应取为 怎 $> 原 \lambda_{员}$ 这时最优轨线是 怎 显然 怎 不能达到原点, 因为

$$\begin{cases} \text{员} \text{ 原 } 栽 > \text{园} \\ \text{员} \text{ 垣 } 栽 \text{ 原 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 栽} > \text{园} \end{cases}$$

无解。因此必须在某时刻 贼 切换一次才能达到原点, 解终值问题

$$\begin{cases} 粤 > 粤 & 粤(贼) > \text{园} \\ 粤 > 员 & 粤(贼) > \text{园} \end{cases}$$

得到解

$$\text{怎} \text{ 原} \begin{cases} 粤 > \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼 \text{ 原 } 贼 \text{ 原 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼} \\ 粤 > 贼 \text{ 原 } 贼 \end{cases}$$

求 怎 和 怎 的交点: 解方程组

$$\begin{cases} 贼 \text{ 原 } 贼 > \text{园} \text{ 原 } 贼 \text{ 垣 } \text{员} \\ \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼 \text{ 原 } 贼 \text{ 原 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼} > \text{园} \text{ 原 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼 \text{ 垣 } 贼 \text{ 垣 } \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{ 贼} \end{cases}$$

得到 贼 $\approx \frac{\text{园}}{\text{圆}}$ 原 贼 $\approx \frac{\text{园}}{\text{圆}}$ 因此所求最优控制为

$$\text{怎} > \begin{cases} \text{原} \lambda_{员} & \text{当 } \text{园} \leq \text{贼} \leq \frac{\text{园}}{\text{圆}} \text{ 时} \\ \text{员} & \text{当 } \frac{\text{园}}{\text{圆}} \leq \text{贼} \leq \frac{\text{园}}{\text{圆}} \text{ 时} \end{cases}$$

这是一个开环控制策略, 在 怎 作用下, 到时刻 贼 $\approx \frac{\text{园}}{\text{圆}}$ 达到原点。如能求出状态反馈策略则在应用上更方便。

远图 最大值原理的其他形式

在不同的文献和书籍中,最大值原理的叙述方法有时不同。由于必要条件式(远图),有的书称这一原理为最小值原理。

下面介绍最大值原理的其他几种叙述方法。

(员) 若令 $\Phi(x, z, u)$ 为原函数, 目标函数取为

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, z, u) dt - \Phi(x, z, u) \Big|_{t_1}^{t_0}$$

那么, 求最优控制 z 使 $J(x)$ 达最小值等价于使 $J(x)$ 达最大值。令 λ 为原哈密顿函数为 $H(x, \lambda, z, u)$, 由于 z 使哈密顿函数 $H(x, \lambda^*, z, u)$ 达最小值, 因此 z 使 $H(x, \lambda^*, z, u)$ 达最大值。从而得到最大值原理的第二种叙述: z 使

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, z, u) dt$$

达最大值的必要条件是存在协状态变量 λ , 它与 x 一起满足正则方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

并且最优控制 z 使 $H(x, \lambda^*, z, u)$ 达最大值。

(圆) 若令 λ 为原哈密顿函数取为

$$H(x, \lambda, z, u) = \Phi(x, z, u) + \lambda \Phi(x, z, u)$$

$$= \Phi(x, z, u) + \lambda \Phi(x, z, u) = H(x, \lambda, z, u)$$

则得到最大值原理的第三种叙述: z 使

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, z, u) dt$$

达最小值的必要条件是存在协状态变量 λ , 它与 x 一起满足正则方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

并且 z 使 $H(x, \lambda^*, z, u)$ 达最大值。

(猿) 若令 $\Phi(x, z, u)$ 为原函数, 则

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, z, u) dt - \Phi(x, z, u) \Big|_{t_1}^{t_0}$$

若哈密顿函数取为

$$H(x, \lambda, z, u) = \Phi(x, z, u) + \lambda \Phi(x, z, u) = \Phi(x, z, u) + \lambda \Phi(x, z, u)$$

从而得到第四种叙述方法: z 使

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, z, u) dt$$

达最大的必要条件是存在协状态变量 $\lambda_{原}^*$ (贼,它与 曾 (贼一起满足正则方程

$$\begin{cases} \text{曾越} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \lambda} \\ \lambda \text{越原} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{曾}} \end{cases}$$

并且怎使匀(曾, λ^* , 怎, 贼达最小值。

正则方程的边界条件都是一致的, 因此上面的叙述中边界条件都省略了。

远原 应用举例

火箭控制问题(如图 远缘所示)

火箭控制问题的数学模型是

$$\begin{cases} \text{曾越} \text{曾} & \text{曾(园) 越园} & \text{曾(贼) 自由} \\ \text{曾越} \text{曾} & \text{曾(园) 越园} & \text{曾(贼) 越赠} \\ \text{曾越} \frac{\text{糟}}{\text{皂}} & \text{曾(园) 越园} & \text{曾(贼) 越增} \\ \text{曾越} \frac{\text{糟}}{\text{皂}} \text{源早} & \text{曾(园) 越园} & \text{曾(贼) 越园} \end{cases}$$

式中 曾, 曾 是火箭质心的横坐标和纵坐标, 曾, 曾 为速度增的水平分量和垂直分量, ϕ 是火箭的动态姿态角(火箭轴线与水平线之间的夹角), β 是燃烧速度, 糟 是相对排气速度, 皂 是火箭的质量。

火箭所用的燃料依赖于燃烧速度 β 和火箭的动态姿态角 ϕ , 因此, 火箭控制的最省燃料问题是在约束条件 $\text{园} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ 之下, 求控制变量 β, ϕ , 使火箭由初始位置达到要求的高度 赠 所用燃烧最少, 即求 β, ϕ 使

$$\text{允}(\beta, \phi) \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{赠}} \beta \text{贼}$$

最小。

这个问题中控制变量是 β 和 ϕ , 对 ϕ 没有约束, 对 β 有约束。问题的哈密顿函数为

$$\text{匀越} \beta \text{垣} \lambda_{原} \text{曾} \text{垣} \lambda_{圆} \text{曾} \text{垣} \lambda_{猿} \frac{\text{糟}}{\text{皂}} \text{垣} \lambda_{源} \left(\frac{\text{糟}}{\text{皂}} \text{源早} \right)$$

由最大值原理, 及 匀 关于 β 的线性关系,

$$\beta \text{越} \begin{cases} \bar{\beta} & \text{当 } \text{园} \leq \text{贼} \text{约} \text{贼} \text{时} \\ \text{园} & \text{当 } \text{贼} \leq \text{贼} \leq \text{裁} \text{时} \end{cases}$$

又由于 ϕ 无约束, 有

$$\frac{\partial \text{匀}}{\partial \phi} \text{越原} \lambda_{猿} \frac{\text{糟}}{\text{皂}} \text{垣} \lambda_{源} \frac{\text{糟}}{\text{皂}} \text{越园}$$

从而解得

$$\text{哪} \text{越} \frac{\lambda_{源}}{\lambda_{猿}}$$

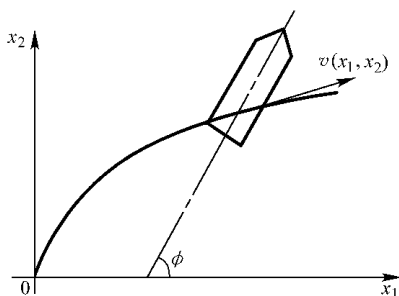


图 远缘 火箭发射示意图

下面解正则方程,首先写出协状态方程:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 > 0 \\ \dot{\lambda}_2 > 0 \\ \dot{\lambda}_3 > 0 \\ \dot{\lambda}_4 > 0 \end{cases}$$

它们的通解为

$$\lambda_1 = C_1 e^{\alpha t}, \lambda_2 = C_2 e^{\beta t}, \lambda_3 = C_3 e^{\gamma t}, \lambda_4 = C_4 e^{\delta t}$$

由于 \$x\$ 自由,得到边界条件 \$\lambda_1(0) = 0\$ 由此得到 \$C_1 = 0\$ 代入 \$\dot{x}\$ 中得到

$$\dot{x} = \frac{\alpha x}{\beta} - \gamma$$

式 \$\dot{x} = \frac{\alpha x}{\beta} - \gamma\$ 由以上推导得到

$$\beta = \begin{cases} \alpha & \text{当 } x \leq x_{lim} \text{ 时} \\ \gamma & \text{当 } x > x_{lim} \text{ 时} \end{cases}$$

这样问题就基本解决了。事实上,将上二式给出的 \$\beta\$ 和 \$\phi\$ 代入状态方程,积分时将引入源个积分常数,再加上 \$x_{lim}\$ 和 \$x_{end}\$ 共两个待定常数,它们可以由 \$x(0) = x_0, x(T) = x_{end}\$ 两个条件决定。将得到的 \$\beta\$ 和 \$\phi\$ 代入上二式就得到最优控制 \$\beta\$ 和 \$\phi\$。

升降机的快速降落问题

在第一章已经导出了升降机的数学模型,为了简单设升降机的质量 \$m\$ 于是升降机的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -g + u \end{cases}$$

\$u\$ 满足拉力约束 \$|u| \leq g\$, 为保证控制力能操纵升降机,显然应满足 \$g\$ 跃早升降机的快速降落问题是求 \$u\$ 将 \$x(0)\$ 转移到 \$x(T)\$ 使所用时间最短。

解 取目标函数为

$$J = \int_0^T dt$$

则该问题的哈密顿函数为

$$H = \lambda_1 v + \lambda_2 (-g + u)$$

由最大值原理,最优控制

$$u = \begin{cases} g & \text{当 } \lambda_2 > 0 \text{ 时} \\ -g & \text{当 } \lambda_2 < 0 \text{ 时} \\ \text{不确定} & \text{当 } \lambda_2 = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

该问题的协状态方程为

员

$$\begin{cases} \lambda_{\text{员}} > 0 \\ \lambda_{\text{圆}} < 0 \end{cases}$$

它的通解为 $\lambda_{\text{员}} > 0, \lambda_{\text{圆}} < 0$ (是一条直线,于是怎有四种情况:

员 对于 $\lambda_{\text{圆}} < 0$ (约因此怎越原配;

圆 对于 $\lambda_{\text{圆}} < 0$ (约因此怎越配;

猿 对于 $\lambda_{\text{圆}} < 0$ (由大于园切换到小于园这时控制由怎越原配切换到怎越配;

源 对于 $\lambda_{\text{圆}} < 0$ (由小于园切换到大于园这时控制由怎越配切换到怎越原配。

为进一步分析,再看状态方程的解。

当怎越配时状态方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

它的解为 $x_1 = \frac{1}{2} \omega^2 t^2 + v_1 t + x_{10}$, $x_2 = v_2 t + x_{20}$,

消去 t 得到

$$x_2 = \frac{v_2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\omega} (\frac{\omega}{2} x_1 - v_1 x_2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_1^2)}$$

它是 x_1-x_2 平面上的一族抛物线(图 2-18 中的实线族)。

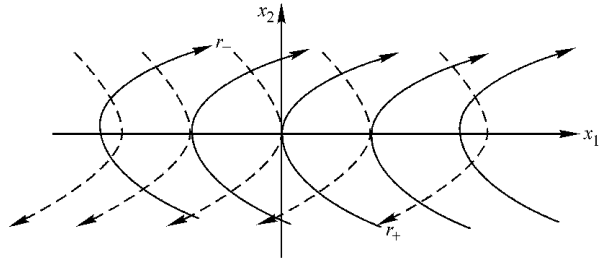


图 2-18 升降机的抛物线族

当怎越原配时状态方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 > 0 \end{cases}$$

它的解为 $x_1 = \frac{1}{2} \omega^2 t^2 + v_1 t + x_{10}$, $x_2 = \frac{1}{2} \omega^2 t^2 + v_2 t + x_{20}$, 消去 t 得到

$$x_2 = \frac{v_2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\omega} (\frac{\omega}{2} x_1 - v_1 x_2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_1^2)}$$

它也是一族抛物线(图 2-18 中的虚线族)。

图 2-18 中轨线沿时间运动的方向由箭头指出,因此只有

$$\text{当 } x_2 \in \text{I} \text{ 时, } \frac{v_2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\omega} (\frac{\omega}{2} x_1 - v_1 x_2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_1^2)} \leq 0$$

$$\text{当 } x_2 \in \text{II} \text{ 时, } \frac{v_2}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\omega} (\frac{\omega}{2} x_1 - v_1 x_2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_1^2)} \geq 0$$

可达到原点。 I 和 II 拼起来构成曲线,则它将 x_1-x_2 平面分成两部分: I 和 II (见图 2-19)。

记 $x_2 = x_2^*$ 越 $[x_2^*(0), x_2^*(\infty)]$, 于是我们得到如下反馈控制律

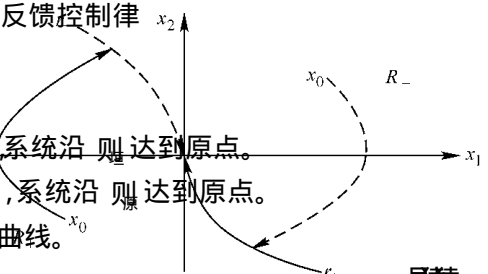
员 $x_2 \in \text{I}$, 怎越配,系统直接达到原点。

圆 $x_2 \in \text{II}$, 怎越原配,系统直接达到原点。

猿 $x_2 \in \text{I}$, 怎越原配到 II 切换为怎越配,系统沿 II 达到原点。

源 $x_2 \in \text{II}$, 怎越配到 I 切换为怎越原配,系统沿 I 达到原点。

由于怎的取值总是在 I 则上切换,因此 I 称为切换曲线。



如果定义 μ_1 包含 μ_2 , μ_2 包含 μ_3 则控制策略为

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{当 } \mu \in \mu_1 \text{ 时} \\ \mu_2 & \text{当 } \mu \in \mu_2 \text{ 时} \end{cases}$$

如果 μ_1 表示升降机达到地面, 而且升降机又不可能达到地下, 那么当 (μ_1, μ_2) 位于 μ_2 下面时说明因负的速度太大, 而升降机距地面又没有足够的距离, 即使用最大力量向上提, 到达地面时速度也不能达到 μ_1

本例所得结果表明, 最优控制或者取它的最大值或者取它的最小值, 这样的控制策略常称为 **bang-bang 控制**。最大值与最小值之间的切换仅在切换曲线上进行, 并且至多经一次切换就能达到原点。

水库的最优管理问题

设 x 是水库的水位, u 是注入水库的水的流速, 设水的最大流速为 u_1 , 于是 u 满足约束条件 $-u_1 \leq u \leq u_2$, 水库的渗透系数为 α , 水库的最优管理问题是: 求最优注入流速 u , 使得在 T 天内注入水库的水量为 V , 并且到第 T 天时水位最高。水库的状态方程是

$$\dot{x} = \alpha x + u$$

该最优控制问题是求最优注入流速 u , 使得它满足约束条件 $-u_1 \leq u \leq u_2$ 和

$$\int_0^T u dt = V, \text{ 并使 } x(T) \text{ 最大。}$$

这是一个有积分约束的最优控制问题, 处理积分约束的方法是定义一个新变量

$$z = \int_0^t u dt$$

那么 z 满足微分方程

$$\dot{z} = u$$

积分形式的约束就化为: $z(T) = V$, 这时状态方程增广为方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + u \\ \dot{z} = u \end{cases}$$

该问题的哈密顿函数为

$$H = \lambda_1 (\alpha x + u) + \lambda_2 u$$

由最大值原理, u 使哈密顿函数 H 达最大值, 因此

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{当 } \lambda_1 \alpha + \lambda_2 > 0 \text{ 时} \\ u_2 & \text{当 } \lambda_1 \alpha + \lambda_2 < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

协状态方程组为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\alpha \lambda_1 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\lambda_1 = \lambda_1(0) e^{-\alpha t}, \quad \lambda_2 = \text{常数}$$

由此得到 $\lambda_1(0) > 0$, $\lambda_1(t)$ 是单增函数, 因此 $\lambda_1(t) > 0$. 如果有符号的变化必是由小于 0 到大于 0 , 于是最优控制为

u_1

$$\text{怎越} \begin{cases} \text{园} & \text{贼} [\text{园} \tau] \\ \text{酝} & \text{贼} [\tau, \text{原园}] \end{cases}$$

水流入的速度为 酝, 由注入水库的水量为 运的约束, 流入的时间应为 运酝, 因此

$$\text{原园} \tau \text{越运酝} \quad \tau \text{越原园} \text{运酝}$$

于是得到最优控制

$$\text{怎越} \begin{cases} \text{园} & \text{贼} [\text{园} \text{原园} \text{运酝}] \\ \text{酝} & \text{贼} [\text{原园} \text{运酝}, \text{原园}] \end{cases}$$

源最优经济增长问题

在第 员章中已经导出了最优经济增长问题的模型, 状态方程为

$$\text{噪越枣噪原糟贼原}(\delta \text{ 垣则噪} \text{ 曾园) 越曾}$$

目标函数为效用的贴现值

$$\text{允糟越} \int_{\text{园}}^{\text{肆}} \text{藻}^{\rho \text{ 越}} \text{糟贼} \text{ 越}$$

消费 糟贼 应满足约束条件

$$\text{园} \leq \text{糟贼} \leq \text{枣噪}$$

最优经济增长问题是求 糟贼 使效用的贴现值 允糟 最大。

这个问题的哈密顿函数为

$$\text{匀越藻}^{\rho \text{ 越}} \text{糟垣} \lambda [\text{枣噪原糟贼原}(\delta \text{ 垣则噪} \text{ 曾园})$$

引进新的协状态变量 $\bar{\lambda}$ 越藻^{ρ 越}, 哈密顿函数可改写为

$$\text{匀越藻}^{\rho \text{ 越}} \text{糟垣} \bar{\lambda} [\text{枣噪原糟贼原}(\delta \text{ 垣则噪} \text{ 曾园})$$

考虑区间内部的解, 一阶必要条件为

$$\frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{糟}} \text{越藻}^{\rho \text{ 越}} [\text{越} \text{糟原} \bar{\lambda}] \text{越园}$$

或 $\bar{\lambda} \text{越} \text{越} \text{糟} \text{越} \bar{\lambda}$ (远源)

协状态方程为

$$\dot{\bar{\lambda}} \text{越原} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{噪}} \text{越原} \lambda \text{枣噪垣} \lambda (\delta \text{ 垣则噪})$$

用 $\bar{\lambda}$ 表示为

$$\dot{\bar{\lambda}} \text{越} \bar{\lambda} [\rho \text{ 原枣噪垣} (\delta \text{ 垣则噪})$$

正则方程组为

$$\dot{\bar{\lambda}} \text{越} \bar{\lambda} [\rho \text{ 原枣噪垣} (\delta \text{ 垣则噪})$$

这相当于将哈密顿函数写为

$$\text{匀越} \text{越} \text{糟垣} \lambda [\text{枣噪原糟贼原}(\delta \text{ 垣则噪} \text{ 曾园})$$

称为现值哈密顿函数, 将协状态方程改写为

$$\dot{\bar{\lambda}} \text{越} \rho \bar{\lambda} \text{原} \frac{\partial \text{匀}}{\partial \text{噪}}$$

在目标函数中包含贴现因子的经济系统中常这样用。

给出效用函数 $u(x, y)$ 和生产函数 $F(x, y)$ 就可以具体求解最优经济增长问题。上述必要条件中已经包含了最优解的很多信息,并且都有明确的经济含义。 λ 的经济含义是人均资本积累的影子价格,式(10.10)的经济意义是:人均资本积累的影子价格等于人均消费的边际效用。协状态方程的经济意义是:系统达到最优时净利润为零。因为涉及经济学的概念较多,这里不再逐个详述。在没有具体给出效用函数 $u(x, y)$ 和生产函数 $F(x, y)$ 的情况下,也可以做一些定性的分析。有兴趣的读者可参看文献[10]。

远缘 习题

1. 已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu, \dot{y} = Cx + Du$ 求最优控制,使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

2. 已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu, \dot{y} = Cx + Du$ 求最优控制,使 y 转移到 $y = 0$ 并使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

3. 已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu, \dot{y} = Cx + Du$ 求最优控制,使 y 自由,求最优控制,使 y 转移到 $y = 0$ 并使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

4. 已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu, \dot{y} = Cx + Du$ 求最优控制,使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

5. 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx + Du \end{cases}$$

求最优控制,使 y 转移到 $y = 0$ 并使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

6. 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cx + Du \end{cases}$$

求最优控制,使 y 转移到 $y = 0$ 并使 y 转移到 $y = 0$ 并使 y 转移到 $y = 0$ 并使

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $x(T) \leq x_f$ 并使

$$J(u) = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

已知系统 $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $x(T) \leq x_f$

(1) 求 u^* (使

$$J(u) = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

(2) 求 u^* (使

$$J(u) = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小。

设水库的数学模型为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

式中 x 是水位高, u 是流入水库的水的流速, 设 $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$,

(1) 求最优控制 u^* (使

$$J(u) = \int_0^T x^T Q x dt$$

最大。

(2) 同(1), 但附加条件 $\int_0^T u dt \leq C$ (常数)。

已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cy + Du \end{cases}$$

求 u^* 将 $x(0) = x_0$ 转移到 $x(T) = x_f$ 并使

$$J(u) = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最小, 其中 $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ 。

某基金会得到一笔 100 万元的基金, 准备存入银行, 在 10 年内奖励在某方面有特殊贡献的人。基金会准备在第 10 年时留下 100 万元处理基金会的结束事务。假设每年取用的奖金在 10 万元至 20 万元之间, 已知银行利率为年利 5%。问每年取多少钱做奖金该基金会从银行取走的钱最多。

已知系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \dot{y} = Cy + Du \end{cases}$$

写出一下最优控制问题的必要条件:(记 $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$)

(1) $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$ 自由, 求 u^* 使

$$允怎越\frac{员}{圆}[(曾原员)垣怎]越贼$$

最小。

$$(圆) 贼越员求 怎将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 并使$$

$$允怎越\frac{员}{圆}[(曾原员)垣怎]越贼$$

最小。

$$(猿) 贼越员求 怎将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 满足约束条件 渣怎渣 员并使$$

$$允怎越\frac{员}{圆}(曾原员)越贼$$

最小。

$$(源) 贼越员求 怎将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 并使$$

$$允怎越\left[\frac{员}{圆}\right]怎越贼$$

最小。

$$(缘) 贼越员求 怎将曾园转移到圆周(曾原圆)垣曾原员越园上 并使$$

$$允怎越\frac{员}{圆}怎越贼$$

最小。

$$(远) 求 怎将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 并使$$

$$允怎越贼垣\frac{员}{圆}怎越贼$$

最小。

$$(苑) 求 怎满足约束 渣怎渣 员将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 并使所用时间最短。$$

$$(愿) 贼越员求 怎将曾园转移到曾贼越\left[\frac{员}{圆}\right] 并使$$

$$允怎越\left[\frac{员}{圆}\right]渣怎渣越贼$$

最小。

第5章 鲁棒控制

本书前面讨论的关于线性系统的内容,都是完全确定的系统,假设系统的数学模型是已给的、确定的。但是在很多控制系统中,存在着不同程度的不确定因素,包括模型的误差和外部干扰的影响。一个控制系统在存在不确定性的情况下,如果能使系统仍保持预期的性能,使模型的不精确性和外干扰造成的系统的性能改变是可以接受的,则称该控制系统是稳健的,有很强适应能力的,又常简单地称这个控制系统为鲁棒(robust)控制系统。鲁棒控制是在控制中越来越受到人们重视的一个分支。由于重点在于应用,本章仅介绍鲁棒控制的基本思想和设计方法,而略去繁复的证明,对此感兴趣的读者可参看文献[12]~[14]。

5.1 鲁棒控制器

考虑系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ew \\ y &= Cx + Du + Fw \\ e &= y - y_r \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

式中 x, u, y, w, y_r 分别是 n 维状态矢量、 m 维控制矢量、 r 维输出矢量、 p 维干扰矢量和 r 维参考输入矢量。

参考输入 y_r 满足如下状态方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_r &= A_r z_r \\ y &= C_r z_r \end{aligned} \right\} \quad (5-2)$$

干扰 w 满足如下状态方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_w &= A_w z_w \\ w &= C_w z_w \end{aligned} \right\} \quad (5-3)$$

控制问题是对于按以上状态方程决定的参考输入 y_r 和干扰 w ,设计控制器,使达到输出调节,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。当实际模型的矩阵 A, B, C, D, E, F 与模型中的相应矩阵有一定误差时,称模型存在一定的扰动。如果在模型存在一定的扰动时系统仍能达到输出调节,则该系统称为鲁棒(伺服)控制系统。

5.2 鲁棒控制器存在的条件

本节讨论鲁棒控制器存在的条件。有如下定理:

定理 5-1 对于上节提出的控制问题,鲁棒控制器存在的充分必要条件是

- 1) (A, B) 可镇定
- 2) (C, A) 可检测

3) $m \geq r$

4) 对 A_r 或 A_w 的任一特征值 λ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + r \quad (5-4)$$

定理的证明见文献[31], 条件 1)、2) 意味着系统中不稳定的部分是能控能观测的, 因而可通过动态输出反馈镇定。条件 4) 则表明 A_r 或 A_w 的任一特征值 λ 都不是系统的传递零点, 这里不再详述。

如果以 $d_r(s)$ 和 $d_w(s)$ 分别表示 A_r 和 A_w 的最小多项式, 以

$$d(s) = s^q + d_1 s^{q-1} + \dots + d_{q-1} s + d_q$$

表示 $d_r(s)$ 和 $d_w(s)$ 的最小公倍式, 并定义 q 阶方阵

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -d_q & -d_{q-1} & \dots & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

则 Ω 的特征值即是 A_r 或 A_w 的特征值, 因此定理中的条件 4) 对 Ω 的所有特征值成立。

5.3 鲁棒控制器的一般结构

下面介绍 Davison 提出的一般鲁棒控制器的结构, 它由伺服补偿器和镇定补偿器构成。伺服补偿器的作用是克服干扰 w , 实现输出调节, 使系统输出跟踪参考输入, 没有稳态误差, 它的输出记为 ξ 。镇定补偿器的作用是使整个闭环系统稳定, 它以 ξ, u, y 为输入, 它的输出记为 η 。

在整个控制系统中作用于被控对象的控制矢量为

$$u = K_1 \xi + K_2 \eta \quad (5-6)$$

式中 K_1, K_2 是需要设计的反馈矩阵。

上述的鲁棒控制器的结构如图 5-1 所示。

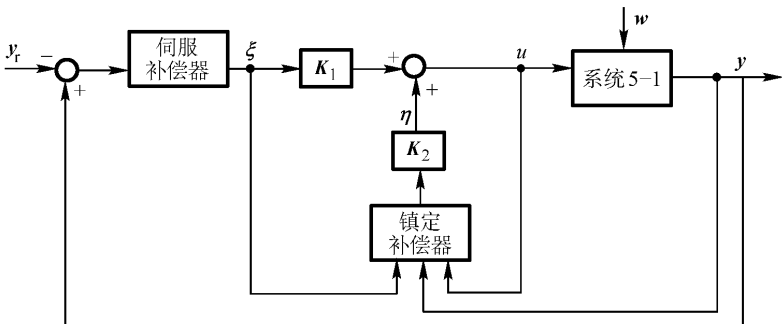


图 5-1 鲁棒伺服控制器的一般结构

5.4 鲁棒控制器的设计

5.4.1 伺服补偿器的设计

伺服补偿器的状态方程为：

$$\dot{\xi} = \Omega^* \xi + \theta^* e \quad (5-7)$$

式中

$$\Omega^* = T \text{diag}(\Omega, \Omega, \dots, \Omega) T^{-1} \quad (\text{对角线矩阵中的 } \Omega \text{ 共 } r \text{ 个}) \quad (5-8)$$

$$\theta^* = T\theta \quad (5-9)$$

是任 $r \times r$ 阶非奇异方阵, θ 是使 (Ω^*, θ^*) 能控的 $r \times r$ 矩阵。为了简单可以取

$$T = I_{rp} \quad (5-10)$$

$$\theta = \text{diag}(\varphi, \varphi, \dots, \varphi), \quad (5-11)$$

式中 $\varphi = [0, \dots, 0, 1]^T$ 是 r 维列向量, 这时 (Ω^*, θ^*) 必是能控的。

由以上伺服补偿器的设计可以看出, 伺服补偿器只由干扰矢量 w 和参考输入 y_r 的动态 (A_r 或 A_w 的特征值) 决定而与受控对象无关。前面已经说过, Ω 的特征值即是 A_r 或 A_w 的特征值, 因此称在伺服补偿器中包含了外部环境的模型。这说明欲克服外干扰, 实现输出调节需在控制器内引入一个外部动态的模型。在调节器的设计中这一事实称为内模原理。

包含伺服补偿器的增广系统为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta^* \end{bmatrix} e \quad (5-12)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{rq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (5-13)$$

以 $e = y - y_r$ 代入, 得到

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^* C & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \theta^* D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E \\ \theta^* F \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta^* \end{bmatrix} y_r \quad (5-14)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{rq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (5-15)$$

由于 (Ω^*, θ^*) 能控, (A, B) 可镇定, (C, A) 可检测, 容易证明：

$\left[\begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^* C & \Omega^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ \theta^* D \end{bmatrix} \right]$ 可镇定, $\left[\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{rq} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^* C & \Omega^* \end{bmatrix} \right]$ 可检测, 因而可设计动态输出反

馈控制器使整个闭环系统稳定, 它就可以作为鲁棒控制器的镇定补偿器。

下面我们介绍一种最简单的镇定补偿器——互补控制器。

5.4.2 互补控制器的设计

前面已经讲到, 一般的镇定补偿器以 ξ, u, y 为输入, 互补控制器比较简单, 它仅以 u 作为输入, 当被控对象开环稳定时, 互补控制器可取为

$$\dot{\eta} = A\eta + Bu \quad (5-16)$$

系统(5-16)恰是第四章讲过的不考虑干扰 w 时的一个开环状态观测器, 它完全模拟了被控对象的动态特性与被控对象互为补充, 因此称为互补控制器。余下的设计任务就是求 K_1 ,

K_2 ,使整个系统在控制(5-6)作用下闭环稳定。

下面讨论反馈矩阵 K_1, K_2 的求法。将式(5-6)代入式(5-1)、式(5-7)和式(5-16) 得到

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK_1\xi + BK_2\eta + Ew \\ \dot{\xi} &= \Omega^* \xi + \theta^*(Cx + Du + Fw) - \theta^* y_r \\ &= \theta^* Cx + (\Omega^* + \theta^* DK_1)\xi + \theta^* DK_2\eta + \theta^* Fw - \theta^* y_r \\ \dot{\eta} &= BK_1\xi + (A + BK_2)\eta \\ y &= Cx + DK_1\xi + DK_2\eta + Fw\end{aligned}$$

以上四个方程写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ \theta^* C & \Omega^* + \theta^* DK_1 & \theta^* DK_2 \\ 0 & BK_1 & A + BK_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E & 0 \\ \theta^* F & -\theta^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y_r \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-17)$$

$$y = [C \quad DK_1 \quad DK_2] \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + [F \quad 0] \begin{bmatrix} w \\ y_r \end{bmatrix}\quad (5-18)$$

为了找出求 K_1, K_2 的方法,对式(5-17)、式(5-18)做变换

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_1} & 0 \\ -I_n & 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} - \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK_2 & BK_1 & BK_2 \\ \theta^*(C + DK_2) & \Omega^* + \theta^* DK_1 & \theta^* DK_2 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E & 0 \\ \theta^* F & -\theta^* \\ -E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y_r \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5-19)$$

$$y = [C + DK_2 \quad DK_1 \quad DK_2] \begin{bmatrix} x \\ \xi \\ \eta - x \end{bmatrix} + [F \quad 0] \begin{bmatrix} w \\ y_r \end{bmatrix}\quad (5-20)$$

由此可知闭环极点由 A 的极点和

$$\begin{bmatrix} A + BK_2 & BK_1 \\ \theta^*(C + DK_2) & \Omega^* + \theta^* DK_1 \end{bmatrix}$$

的极点构成。由此我们可以得出如下结论：

1) 由于闭环极点中包含了开环极点,因此这种以开环观测器为基础的互补控制器仅能用于开环稳定的系统。

$$2) \text{ 由于 } \begin{bmatrix} A + BK_2 & BK_1 \\ \theta^*(C + DK_2) & \Omega^* + \theta^*DK_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^*C & \Omega^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \theta^*D \end{bmatrix} [K_2 \quad K_1]$$

因此,第二部分极点是增广系统(5-14)在不考虑 w 和 y_r 的作用时得到的系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^*C & \Omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \theta^*D \end{bmatrix} u$$

在 $u = K_1\xi + K_2x$ 作用下的闭环极点,而当达到稳态时 $\eta = x$,这时以上反馈等价于

$$u = K_1\xi + K_2\eta$$

由于 (A, B) 可镇定时, $\left[\begin{bmatrix} A & 0 \\ \theta^*C & \Omega^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ \theta^*D \end{bmatrix} \right]$ 可镇定,因此可以求出 K_1, K_2 使闭环系统稳定。

由于互补控制器仅能用于开环稳定的系统,对开环不稳定的系统需设计一个第四章中讲的动态补偿器作为鲁棒控制器中的镇定补偿器。

5.5 习题

1. 已给系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y &= [1 \quad 0] x \\ e &= y - y_r \end{aligned}$$

设 y_r 和 w 都是阶跃信号,构造伺服补偿器(5-7)并验证包含伺服补偿器的增广系统(5-14)完全能控。

2. 对上题的增广系统,不考虑 y_r 和 w 的作用,设计反馈

$$u = K_1x + K_2\xi$$

使得它的闭环极点为 $-1, -1+j, -1-j$ 。

3. 对第1题中的系统设计一个关于第二个状态变量 x_2 的互补控制器,并画出由1~3题得到的鲁棒控制器的结构图。

4. 已给系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] x + w \\ e &= y - y_r \end{aligned}$$

设 y_r 和 w 都是阶跃信号,设计该系统的鲁棒控制器,并画出它的结构图。

第 6 章 最优控制

6.1 最优控制问题的提法

在前几章中已经讨论了设计反馈控制,使得到的闭环系统具有要求的性能的方法。从这些讨论中可以看出,反馈是现代控制理论的一个重要的概念。本章讲的最优控制是现代控制理论的另一个重要概念。虽然在经典控制理论中也有过以过渡时间最短为指标的控制原理和方法,但真正形成控制系统以性能最优为目标的理论——最优控制理论,却是 20 世纪 50 年代末。

一般说来,控制问题可以概括为:选取控制信号使得系统的行为尽可能的好。那么“尽可能的好”的含义是什么呢?如果可以给出一个数学的判据来定量地描述系统的行为,那么就可以用完全系统化的方法设计控制系统,将一个控制系统设计的问题化为一个解数学最优化的问题。使数学的判据最大或最小设计的控制称为最优控制。例如,有的系统对控制精度要求特别高,可以设计出控制偏差最小的系统。这类问题在军事上和空间科学中经常遇到。由于这些领域拥有最先进的计算机,使最优控制有条件首先在这些领域得到应用和发展。但是近 20 年来,随着计算机性能不断提高,小型化和价格大幅度下降,最优控制已广泛应用于工业过程、交通运输、经济管理、生态环境、生物医学等领域,并得到了很大的发展。

本书将介绍两类求最优控制的方法:变分法与最大值原理和动态规划。本章介绍变分法与最大值原理,第 7 章讲解用变分法与最大值原理解线性二次型最优控制问题,第 8 章讲解离散的变分法与最大值原理,第 9 章讲解动态规划法。

变分法是数学的一个古老的分支,它的发生与发展可以追溯到 17 世纪。无约束的最优控制问题可以用变分法求解。最大值原理是变分法的近代发展,是前苏联数学家庞特里雅金(Л.С.Понрягин)在 20 世纪 50 年代末提出的,它可以求解控制变量有约束的最优控制问题。

动态规划是贝尔曼(R. Bellman)于 1957 年提出的,它是一种多阶过程的最优决策方法,可用于求最优控制策略。

本章针对连续时间系统介绍最优控制问题的一般提法和解最优控制问题的变分法与最大值原理。

6.1.1 最优控制问题的一般提法

最优控制问题,简单地说就是求一个控制规律,使控制系统的性能在某种意义上是最优的。一般来说,要使一个系统达到某种预期的目标,控制方案是多种多样的。最优控制问题是在诸方案中求出在某种意义下最优的控制方案。最优控制问题的一般提法是:

已给系统的状态方程

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0$$

和目标函数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \theta(x(t_f), t_f)$$

求最优控制 $u(t) \in U$ 使 $J(u)$ 最小(或最大)。

状态方程是描述被控对象动态行为的动力学模型,它可以是一个常微分方程组或是一个偏微分方程组。状态方程是常微分方程组的系统称为集中参数系统,状态方程是偏微分方程组的系统称为分布参数系统。本书只考虑集中参数系统,对于离散时间系统考虑由差分方程组描述的系统。

目标函数是判别控制系统性能优劣的标准,它依赖于控制函数 $u(t)$,因而也称为目标泛函。目标函数 $J(u)$ 中的 $x(t)$ 是状态方程对应于控制函数 $u(t)$ 的解。

$u(t) \in U$ 是对控制的约束,其中 U 是 R^m 的子集,可以是开集也可以是闭集。这个约束条件体现了 $u(t)$ 作为实际变量取值受到的限制,例如升降机的向上向下的拉力均小于常数 M 时,控制力 $u(t)$ 服从于约束 $|u(t)| \leq M$ 。

6.1.2 实现最优控制的必备条件

要实现最优控制有三个最基本的条件必须具备。

(1) 具有适当精度的数学模型:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x_0$$

模型的精度太差,所求的结果不能适用于实际系统,精度要求过高导致模型过于复杂,可能使最优控制的计算引入较大的误差,结果反而不一定精确。

(2) 有明确的控制约束: $u(t) \in U$, U 是允许控制集合。

(3) 有明确的目标函数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \theta(x(t_f), t_f)$$

其大小的确能反映所设计的控制系统的优劣。

当具备这三个条件时,就可以应用本书中的设计方法设计最优控制系统。

6.1.3 几种典型的最优控制问题

1. 最小时间问题

最小时间问题要求将系统的状态由初始状态 x_0 转移到指定的状态 x_f 所用的时间最短,即求 $u(t)$ 使在它的作用下 $x(t_f) = x_f$,并使

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

最小。

2. 最小能量问题

最小能量问题要求将系统的状态由初始状态 x_0 转移到指定的状态 x_f 所用的能量最小,即求 $u(t)$ 使在它的作用下 $x(t_f) = x_f$,并使

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} u^T u dt$$

最小。

更一般的最小能量问题,目标函数可改为控制变量 u_i 的加权平方和的积分,即

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} u^T R u dt$$

以体现对不同的控制变量所耗能量不同的重视程度。

3. 最省燃料问题

由于飞行体推力有限,节省了燃料就可以多载货物或乘客。超音速飞机的燃料消耗正比于推力 $u(t)$ 的绝对值,因此最省燃料问题的目标函数取为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

4. 状态调节器问题

当系统的状态 $x(t)$ 偏离平衡状态 $x_c=0$ 时,可用状态变量的平方和的积分衡量误差的积累。状态调节器问题的目标函数可取为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) dt$$

更一般的取为状态变量的加权平方和的积分:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$$

当特别重视终点的偏差时,目标函数取为

$$J(u) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt$$

这时控制 $u(t)$ 要有约束,不然最优解将需要无穷大的能量。去掉对控制能量的约束可考虑目标函数:

$$J(u) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

式中 \mathbf{F} 、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 是加权矩阵。

5. 跟踪问题

当要求状态轨线 $x(t)$ 跟踪某给定的轨线 $x_d(t)$ 时,目标函数取为

$$J(u) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_d(t_f)]^T \mathbf{F} [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_d(t_f)] \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)] + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \} dt$$

以上列举了五种最常见的最优控制问题,由于对控制系统的要求是多种多样的,这里不可能都列举出来,在以后的例中再进行讨论。

6.2 解无约束最优控制问题的变分法

变分法是数学的一个古老分支。1630年由伽利略提出的“最速降线”问题是最早出现的变分问题,60年后伯努利解决了这个问题。到17世纪末变分法逐渐发展成为一个独立的数学分支。变分法研究泛函的极值问题,在自然科学和社会科学的很多学科中得到了非常广泛的应用。最优控制的目标函数 $J(u)$ 的取值,依赖于定义在区间 $[t_0, t_f]$ 上的输入函数 $u(t)$,即最优控制的目标函数是函数 $u(t)$ 的函数,在数学上称为泛函。最优控制问题是求控制策略,使目标泛函最大或最小,因此是一个泛函极值问题,它可以用变分法求解。本节讲述解无约束最优控制问题的变分法,从最简单的变分问题入手,然后再讨论如何用变分法解无约束最优控制问题。

6.2.1 最简单的变分问题

最简单的变分问题是求一个函数 $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, 使

$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$$

并使目标泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

取极小(或极大)值。

以下讨论“相对”极小(极大)问题,即在“容许函数类”中,求一个函数 $x(t)$,使得对这个函数的“邻域”中的一切函数而言 $x(t)$ 使泛函 $J(x)$ 取极小(极大)值。这里需要说明“容许函数”和“邻域”的含义。

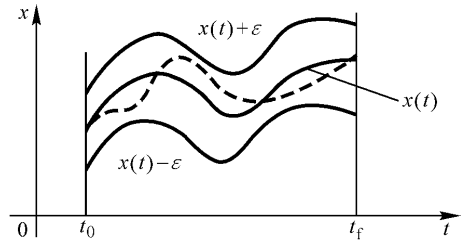


图 6-1 ϵ 邻域

容许函数 具备下列条件的一切函数构成容许函数类:

- 1) $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上二次连续可微,
- 2) $x(t)$ 满足边界条件 $x(t_0) = x_0$ 及 $x(t_f) = x_f$

函数的 ϵ 邻域 适合不等式 $|\bar{x}(t) - x(t)| < \epsilon$ ($t_0 \leq t \leq t_f$)的一切容许函数的集合称为函数 $x(t)$ 的 ϵ 邻域,见图 6-1。

6.2.2 欧拉-拉格朗日方程

设 $f(x, \dot{x}, t)$ 关于所有变量二次连续可微, $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上二次连续可微,满足边界条件 $x(t_0) = x_0$ 及 $x(t_f) = x_f$,并且使

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

达极小值,推导 $x(t)$ 必须满足的条件。由于 $x(t)$ 使 $J(x)$ 达极小值,因此对任一容许函数

$$\bar{x}(t) = x(t) + \epsilon \delta x(t) \quad \delta x(t_0) = 0 \quad \delta x(t_f) = 0$$

$$J(x + \epsilon \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x + \epsilon \delta x, \dot{x} + \epsilon \delta \dot{x}, t) dt$$

在 $\epsilon = 0$ 达到它的极值。因此

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

应用泰勒定理

$$\begin{aligned} J(x + \epsilon \delta x) &= \int_{t_0}^{t_f} f(x + \epsilon \delta x, \dot{x} + \epsilon \delta \dot{x}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \epsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \epsilon \delta \dot{x} + O(\epsilon^2) \right\} dt \end{aligned}$$

于是

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt = 0 \quad (6-1)$$

对式(6-1)的第二项应用分部积分,得到

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0 \quad (6-2)$$

由于 $\delta x(t_0)=0, \delta x(t_f)=0$,上式化为

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0 \quad (6-3)$$

式(6-3)对任意二次连续可微并且满足边界条件 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$ 的 δx 成立。为得到进一步的结果,先证明下面的引理

引理 6-1 设 $\eta(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上二次连续可微, 并且 $\eta(t_0)=0, \eta(t_f)=0$, $g(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续, 如果对满足以上条件的一切 $\eta(t)$ 有

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t)\eta(t)dt = 0$$

则在 $[t_0, t_f]$ 上 $g(t) \equiv 0$ 。

证明 反设 $g(t)$ 在点 $\xi \in [t_0, t_f]$ 上不为 0, 不妨设 $g(\xi) > 0$, 则由 $g(t)$ 的连续性, 存在包含 ξ 的区间 $[t_1, t_2]$, 使对 $t_1 \leq t \leq t_2$ 有 $g(t) > 0$ 。另一方面, 函数

$$\eta_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t_0 \leq t \leq t_1 \text{ 时} \\ (t-t_1)^4(t-t_2)^4 & \text{当 } t_1 \leq t \leq t_2 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } t_2 \leq t \leq t_f \text{ 时} \end{cases}$$

在 $[t_0, t_f]$ 上二次连续可微, 具有引理对 $\eta(t)$ 要求的性质, 而

$$\int_{t_0}^{t_f} g(t)\eta_1(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} g(t)(t-t_1)^4(t-t_2)^4 dt > 0$$

得到矛盾。引理证完。

引理 6-1 常称为变分法的基本引理, 由于式(6-3)对任意 δx 成立, 应用引理 6-1 得到 $x(t)$ 满足的必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \end{cases} \quad (6-4)$$

方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

称为欧拉方程或欧拉-拉格朗日方程。它的展开式一般是非线性二阶常微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

在 x 上的泛函与在 $x + \varepsilon \delta x$ 上的泛函的差为

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x + \varepsilon \delta x) - J(x) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \end{aligned}$$

于是

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt$$

定义 ΔJ 的线性主要部分

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \epsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \epsilon \delta \dot{x} \right\} dt$$

为泛函 $J(x)$ 的一阶变分, 记为 δJ 。因此式(6-1)等价于泛函 $J(x)$ 的一阶变分 $\delta J = 0$, 即函数 x 使泛函 $J(x)$ 达极值的必要条件是在 x 上一阶变分 $\delta J = 0$ 。

【例 6-1】 已给系统

$$\dot{x} = -x + u \quad x(0) = 1$$

求 $u(t)$, 使在它的作用下, 在 t_f 时刻将系统的状态转移到 $x(t_f) = 0$, 并使

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^2 + u^2) dt$$

最小。

解 为应用变分法求解, 由状态方程解出 $u = \dot{x} + x$ 代入 $J(u)$, 得到

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^2 + (\dot{x} + x)^2] dt$$

化为一个最简单的变分问题。对这个问题的欧拉方程为

$$x + (\dot{x} + x) - \frac{d}{dt}(\dot{x} + x) = 0$$

于是 x 使 $J(x)$ 达极小值的必要条件是

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \quad x(t_f) = 0 \end{cases}$$

以上二阶微分方程的特征方程为 $\lambda^2 - 2 = 0$, 特征值为 $\lambda = \pm\sqrt{2}$, 于是它的通解是

$$x(t) = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t}$$

由边界条件得到关系式

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Ae^{\sqrt{2}t_f} + Be^{-\sqrt{2}t_f} = 0 \end{cases}$$

解得

$$A = \frac{e^{-\sqrt{2}t_f}}{D} \quad B = \frac{-e^{\sqrt{2}t_f}}{D}$$

式中 $D = e^{-\sqrt{2}t_f} - e^{\sqrt{2}t_f}$, 将 A, B 代入通解得到

$$x(t) = \frac{1}{D} [e^{-\sqrt{2}t_f} e^{\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t_f} e^{-\sqrt{2}t}]$$

将它代入 $u = \dot{x} + x$ 即得到最优控制

$$u(t) = \frac{1}{D} [(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t_f} e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t_f} e^{-\sqrt{2}t}]$$

容许函数条件的降低 在上面的推导中假设了 $x(t)$ 的二阶导数连续, 但是只要 x 有逐段连续的一阶导数, 积分 $J(x)$ 就是有意义的。这样对 $x(t)$ 的二阶导数连续的假设是不自然的。下面的定理指出对容许函数 $x(t)$ 的要求可降低到有逐段连续的一阶导数, 这时问题的解 $x(t)$ 自动具有连续的二阶导数, 并且满足欧拉方程。

定理 6-1 (du Bois-Reymond 定理) 设 $f(x, \dot{x}, t)$ 关于其所有变元二次连续可微, $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续并有逐段连续的一阶导数, 如果

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt = 0$$

并且 δx 与 $x(t)$ 具有相同的连续可微性, $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_f) = 0$, 并假设 $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \neq 0$, 那么 $x(t)$ 具

有连续的二阶导数并且满足欧拉方程。

定理 6-1 的证明可参看文献[17]

6.2.3 可变端点问题

可变端点问题是求 $x(t)$, 使 $x(t_0) = x_0$, 并使泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

取极小(极大)值。

解可变端点问题的办法是, 先设 t_f 和 $x(t)$ 是该问题的解, 令 $x(t_f) = x_f$, 那么 $x(t)$ 也是以 t_f 为最终时刻, x_f 为边值的两端固定的变分问题的解, 因此解仍应满足欧拉方程和初始条件 $x(t_0) = x_0$, 这里缺少了必要条件式(6-4)中的另一个边界条件, 下面推导可变端点问题的另一个边界条件。引进 t_f 的改变量 $\varepsilon \delta t_f$ 和 x 的改变量 $\varepsilon \delta x$, 泛函 J 的改变量为

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt + \int_{t_f}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt + \int_{t_f}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt$$

由中值定理

$$\int_{t_f}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt = f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) \Big|_{t_f + \theta \varepsilon \delta t_f} \varepsilon \delta t_f$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\text{于是} \quad \int_{t_f}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt \approx f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f = t_f} \varepsilon \delta t_f$$

ΔJ 的一阶变分

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} \right] dt + f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f} \varepsilon \delta t_f = 0$$

消去 ε , 对上积分的第二项应用分部积分法得到

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f} \delta t_f = 0$$

由 $\delta x(t_0) = 0$ 及解满足欧拉方程, 上式化为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} \delta x(t_f) + f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f} \delta t_f = 0 \quad (6-5)$$

下面结合图 6-2 做进一步的分析。图中 BD 为 $\varepsilon \delta x$ 在 t_f 时刻的值, CF 为 $x + \varepsilon \delta x$ 在 $t_f + \varepsilon \delta t_f$ 的值与 $x(t_f)$ 的差, 两条曲线端点的 x 值的差记为 $\varepsilon \delta x_{t_f}$, 即

$$BD = \varepsilon \delta x(t_f) \quad CF = (x + \varepsilon \delta x) \Big|_{t_f + \varepsilon \delta t_f} - x(t_f) = \varepsilon \delta x_{t_f}$$

一阶近似可取 $CE = \dot{x}(t_f) \varepsilon \delta t_f$, 于是得到一阶近似式

$$\varepsilon \delta x_{t_f} = \dot{x}(t_f) \cdot \varepsilon \delta t_f + \varepsilon \delta x(t_f)$$

即

$$\delta x(t_f) = \delta x_{t_f} - \dot{x}(t_f) \delta t_f \quad (6-6)$$

应用式(6-6), 式(6-5)化为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} \cdot \delta x_{t_f} + \left[f(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t_f} \cdot \delta t_f = 0 \quad (6-7)$$

式(6-7)称为右端点的广义边界条件, 下面分三种情况讨论:

1) t_f 固定, $\delta t_f = 0$, $\delta x_{t_f} = \delta x(t_f)$ 任意, 式(6-7)化为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} \cdot \delta x(t_f) = 0$$

由此得到边界条件

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0$$

2) 完全自由端点的情况: δx_{t_f} 与 δt_f 是互相独立的,

这时式(6-7)中含 δx_{t_f} 项与含 δt_f 项的系数必分别为 0, 由

此得到边界条件

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0 \quad f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f} = 0$$

3) 如果端点 C 必须落到曲线 $x(t_f) = \varphi(t_f)$ 上, 则 $\delta x_{t_f} = \varphi(t_f) \cdot \delta t_f$, 这时式(6-7)化为

$$\left[f(x, \dot{x}, t) + (\varphi(t) - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t_f} \cdot \delta t_f = 0$$

由 δt_f 的任意性, 得到

$$\left[f(x, \dot{x}, t) + (\varphi(t) - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t_f} = 0$$

总结以上推导得到如下结论:

当 t_f 固定, $x(t_f)$ 自由时的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & x(t_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0 \end{cases} \quad (6-8)$$

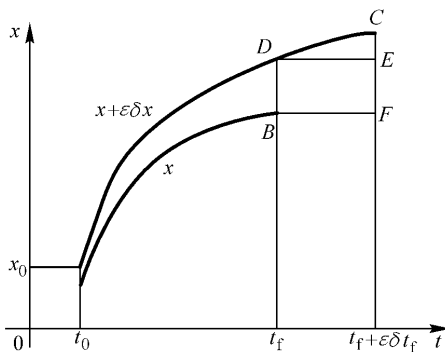


图 6-2 可动边界问题

当 $t_f, \kappa(t_f)$ 均为自由时, 可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & x(t_0) = x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 & f(x, \dot{x}, t) \Big|_{t_f} = 0 \end{cases} \quad (6-9)$$

当要求端点落到曲线 $x(t_f) = \varphi(t_f)$ 上时, 则可动边界问题的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad \left[f(x, \dot{x}, t) + (\varphi(t) - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_f} = 0 \end{cases} \quad (6-10)$$

【例 6-2】 已给系统

$$\dot{x} = ax + u \quad x(t_0) = x_0$$

求 $u(t)$ 使

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^2 + r^2 u^2) dt$$

最小。这里 t_f 是给定的。

解 为使用变分法, 由状态方程解出 $u = \dot{x} - ax$, 代入目标函数化为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^2 + r^2 (\dot{x} - ax)^2] dt$$

$x(t_0) = x_0$ 给定, $\kappa(t_f)$ 自由, 由必要条件(6-9)得到 $x(t)$ 满足条件

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{r^2} (1 + a^2 r^2) x \\ x(0) = x_0 \quad [\dot{x} - ax]_{t_f} = 0 \end{cases}$$

【例 6-3】 已给直线 $l: x = 2 - t$ 和 $x(0) = 1$ 求 $x(t)$, 使得 $x(t_f)$ 落到 l 上, 并使泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$$

最小, 即求过 A 点的曲线 $x(t)$ 使与 l 相截的线段 AB 弧长最短。

解 关于这个问题的欧拉方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0$$

或
$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \text{ (常数)} \quad \dot{x}^2 = c^2 (1 + \dot{x}^2)$$

即 $\dot{x} = \text{常数}$ 积分得
$$x = at + b$$

式中 $a = \pm \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}}$, 由条件 $x(0) = 1$ 解得 $b = 1$, 再由式(6-10)的最后一项

$$\left[\sqrt{1 + \dot{x}^2} + (-1 - \dot{x}) \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right]_{t_f} = 0$$

解得 $\dot{x}(t_f) = 1$, 由此得到满足必要条件的 $x(t)$ 为 $x = t + 1$ 。

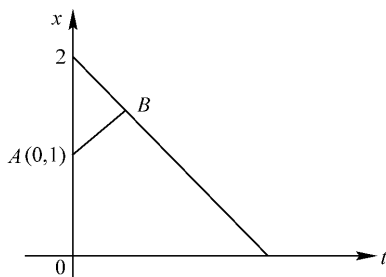


图 6-3 例 6-3 的解

由题意知问题的解一定存在,而求出的满足必要条件的曲线只有一条,因此 $x = t + 1$ 即所求。

由于有本例显示的几何意义,条件

$$\left[f(x, \dot{x}, t) + (\varphi(t) - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_f} = 0$$

常称为横截条件。

6.2.4 推广到一般泛函

在最优控制中目标函数常包含 $\theta(x(t_f), t_f)$ 项,用以表示对终端时刻的特殊要求。为讨论这一类的最优控制问题,我们考虑泛函

$$J(x) = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

的极值问题,假设 $x(t_0) = x_0$ 和 t_f 已给, $x(t_f)$ 自由。

设 $x(t)$ 使 $J(x)$ 达极小值,考虑

$$J(x + \varepsilon \delta x) = \theta(x(t_f) + \varepsilon \delta x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt$$

$$\begin{aligned} \Delta J = J(x + \varepsilon \delta x) - J(x) &= \theta(x(t_f) + \varepsilon \delta x(t_f), t_f) - \theta(x(t_f), t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \end{aligned}$$

应用泰勒定理

$$\int_{t_0}^{t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(x, \dot{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt$$

$$\theta(x(t_f) + \varepsilon \delta x(t_f), t_f) = \theta(x(t_f), t_f) + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \cdot \varepsilon \delta x(t_f) + O(\varepsilon^2)$$

$$\text{于是 } \Delta J = \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \cdot \varepsilon \delta x(t_f) + O(\varepsilon^2) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} + O(\varepsilon^2) \right\} dt$$

改变量的一阶变分

$$\delta J = \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \cdot \varepsilon \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} \right\} dt = 0$$

消去 ε , 应用分部积分得到一阶必要条件为

$$\frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \cdot \delta x(t_f) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0$$

由于 $x(t_0) = x_0$ 已给, 于是 $\delta x(t_0) = 0$, 上式化为

$$\frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_f} = 0$$

或

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_f} + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \delta x(t_f) = 0$$

因为最优的 $x(t)$ 取定后, $\dot{x}(t_f)$ 也取定了, $\dot{x}(t)$ 也是泛函

$$\int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

的 $x(t_0)$ 、 $x(t_f)$ 给定的极值问题的解, 因此 $x(t)$ 仍应满足欧拉方程, 这样得到对这个问题的解 $x(t)$ 应满足的必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = - \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \end{cases} \quad (6-11)$$

如果 t_f 也是自由的, 则问题化为求 t_f 和 $x(t)$ 使

$$J(x(t), t_f) = \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt$$

达极大或极小值。设 t_f 和 $x(t)$ 已求出, 它们使 $J(x(t), t_f)$ 达极大或极小值, 则

$$\begin{aligned} \Delta J &= \theta(x(t_f + \varepsilon \delta t_f) + \varepsilon \delta x(t_f + \varepsilon \delta t_f), t_f + \varepsilon \delta t_f) - \theta(x(t_f), t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f + \varepsilon \delta t_f} f(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} f(x, \dot{x}, t) dt \end{aligned}$$

$\theta(x(t_f + \varepsilon \delta t_f) + \varepsilon \delta x(t_f + \varepsilon \delta t_f), t_f + \varepsilon \delta t_f)$ 在 $x(t_f)$ 和 t_f 临近展开, 取到一阶项有

$$\begin{aligned} &\theta(x(t_f + \varepsilon \delta t_f) + \varepsilon \delta x(t_f + \varepsilon \delta t_f), t_f + \varepsilon \delta t_f) - \theta(x(t_f), t_f) = \\ &\frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} [\dot{x} \varepsilon \delta t_f + \varepsilon \delta x(t_f)] + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \varepsilon \delta t_f \end{aligned}$$

应用式(6-5)一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} [\dot{x} \varepsilon \delta t_f + \varepsilon \delta x(t_f)] + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \varepsilon \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \varepsilon \delta \dot{x} \right] dt + \left. f(x, \dot{x}, t) \right|_{t_f} \varepsilon \delta t_f \end{aligned}$$

于是得到必要条件

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} [\dot{x} \delta t_f + \delta x(t_f)] + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt + \left. f(x, \dot{x}, t) \right|_{t_f} \delta t_f \\ &= \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \delta x_{t_f} + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \delta t_f \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right]_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \left. f(x, \dot{x}, t) \right|_{t_f} \delta t_f = 0 \end{aligned}$$

上式的推导中应用了式(6-6)。由于 $x(t)$ 必满足初始条件和欧拉方程, 上式化为

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \right]_{t_f} \delta x_{t_f} + \left[f(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

因此, 当 δx_{t_f} 与 δt_f 互相独立时, 必要条件为:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & x(t_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = - \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \\ \left[f(x, \dot{x}, t) - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \right]_{t_f} = 0 \end{cases} \quad (6-12)$$

6.2.5 推广到多变量的情况

在应用中常遇到多个变量的泛函的极值问题。当泛函有 n 个未知函数时,变分问题为: 求 $x_1(t) \dots x_n(t)$ 使得 $x_i(t_0) = x_{i0}$ $x_i(t_f) = x_{if}$ $i = 1, 2, \dots, n$ 并使泛函 $J(x_1, \dots, x_n) = \int_{t_0}^{t_f} f(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) dt$ 达极小值。为了讨论方便,引进矢量

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad \delta \mathbf{x} = [\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n]^T$$

和梯度矢量

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \right]^T$$

考虑泛函

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$$

的两端固定的变分问题。设它在 $\mathbf{x}(t)$ 上达极值,记

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) \quad \delta \mathbf{x}(t_0) = 0 \quad \delta \mathbf{x}(t_f) = 0$$

$$J(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} f(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon \delta \dot{\mathbf{x}}, t) dt$$

在 $\varepsilon = 0$ 达到它的极值。因此

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

应用泰勒定理

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}) &= \int_{t_0}^{t_f} f(\mathbf{x} + \varepsilon \delta \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon \delta \dot{\mathbf{x}}, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \varepsilon (\delta \mathbf{x})^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \varepsilon (\delta \dot{\mathbf{x}})^T \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + O(\varepsilon^2) \right\} dt \end{aligned}$$

于是由

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

得到

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[(\delta \mathbf{x})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} + (\delta \dot{\mathbf{x}})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] dt = 0 \quad (6-13)$$

对上式的第二项应用分部积分,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[(\delta \dot{\mathbf{x}})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \delta \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \delta \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\delta x_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) dt \right\}$$

由于 $\delta x_i(t_0)=0, \delta x_i(t_f)=0$, 上式化为

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta \dot{\mathbf{x}})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} dt = - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \delta x_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) dt$$

代入式(6-13)得到

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} (\delta \mathbf{x})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} + (\delta \dot{\mathbf{x}})^T \frac{\partial f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \delta x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] dt = 0 \end{aligned}$$

由于 δx_i 是独立的, 上式等价于

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta x_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] dt = 0 \quad i = 1 \dots, m$$

由引理 6-1, 上式意味着

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad i = 1 \dots, m$$

写成矢量形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (6-4)$$

式(6-4)是必要条件式(6-4)的矢量形式。对于其他边界条件的情况, 都可以将相应的必要条件式(6-8)、式(6-9)、式(6-10)、式(6-11)、式(6-12)看作矢量形式的必要条件应用于相应的多变量问题。

6.2.6 无约束最优控制问题的解

1. 无约束最优控制问题的解

已给系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

和目标函数

$$J(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

无约束最优控制问题是求 $\mathbf{u}(t)$ 使 $J(\mathbf{u})$ 最小(或最大)。这里 t_f 已给定, $\mathbf{x}(t_f)$ 是自由的。

将状态方程作为约束条件 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} = 0$, 引入拉格朗日乘子矢量 $\lambda(t)$, 考虑泛函

$$\begin{aligned} \bar{J}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T (f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}})] dt \\ &= \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \bar{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, t) dt \end{aligned}$$

式中 $\bar{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T (f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}})$

如果 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 关于其所有变元二次连续可微, $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda$ 的一阶导数逐段连

续, 则利用上节的结果, 得到 x, u, λ 使 \bar{J} 达相对极值的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\lambda}} \right) = 0 \end{cases}$$

由 \bar{H} 的定义, 上三个必要条件可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \left(= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) \\ \dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

式中 $H(x, \lambda, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$ 称为哈密顿(Hamilton)函数。

由必要条件(6-11), 边界条件为

$$x(t_0) = x_0 \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = - \lambda(t_f) = - \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)}$$

或者
$$x(t_0) = x_0 \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)}$$

由于这里考虑 $J(x, u, t)$ 是 x, u, λ 的泛函, u, λ 在两个端点都是自由的, 因此还应成立如下四个边界条件

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{u}} \Big|_{t_0} = 0 \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{u}} \Big|_{t_f} = 0 \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\lambda}} \Big|_{t_0} = 0 \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{\lambda}} \Big|_{t_f} = 0$$

由于 \bar{H} 不依赖于 \dot{u} 和 $\dot{\lambda}$, 这些条件显然都是成立的。

综上所述, 无约束最优控制问题的必要条件为: 存在 $\lambda(t)$, 它与 $x(t)$ 一起满足正则方程组及边界条件

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} & x(t_0) = x_0 \\ \dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x} & \lambda(t_f) = \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \end{cases} \quad (6-14)$$

式中的 u 由

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (6-15)$$

确定。

如果 $x(t_f)$ 也是给定的, 则用边界条件 $x(t_f) = x_f$ 代替式 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)}$ 。

求最优控制的计算步骤

第 1 步 构造哈密顿函数

$$H(x, \lambda, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

第 7 章 线性二次型最优控制问题

7.1 线性二次型问题的重要性

7.1.1 什么是线性二次型问题

线性二次型问题是一类最优控制问题,它的状态方程是线性的,对于连续时间系统,它的状态方程是线性微分方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数是状态变量和控制变量的二次型,其一般形式为:

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + 2x^T(t) S(t) u(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

式中, x 是 n 维状态向量, u 为 m 维控制向量, Q , S 和 R 是适当维数的矩阵, t_f 给定, $x(t_f)$ 自由。问题是求 $u(t)$ 使 $J(u)$ 最小。

线性调节器问题是最常见的一类线性二次型问题。它的状态方程是上面的线性方程,系统的平衡状态是原点 $x=0$,如果系统由于某种原因已经偏离了平衡状态,控制的目的是使系统的状态 $x(t)$ 尽量接近于平衡状态 $x=0$,而所用的控制能量又不太大。控制能量一般描述为控制变量的二次型,因此目标函数选为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q(t) x + u^T R(t) u] dt$$

$Q(t)$ 和 $R(t)$ 是加权矩阵,通过调整它们的元素的大小,调整对“状态变量接近平衡状态”和“控制能量不太大”这两个不同目标的重视的程度。 Q 、 R 依赖于 t 表示上述的重要程度随时间变化。在应用中, Q 、 R 常取为对角阵,对角线上元素的大小表示相应的变量的重要程度。如果系统的平衡状态不在原点,可以通过变换将它移到原点。

另一类最常见的线性二次型问题是跟踪问题,该问题是使控制系统的输出跟踪要求的输出函数,将在 7.5 节中讨论。

【例 7-1】 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u \quad x(0) = 1$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + ru^2) dt$$

线性调节器问题是求 u 使 $J(u)$ 最小。目标函数中的 r 是一个正数,它被用来调节对“ x 尽量接近于 0”和“控制能量不要过大”两个不同目标的重视程度。由图 7-1 可以看出加权因子 r 的调节作用,较大的 r 表示设计者更重视“控制能量不要过大”,较小的 r 表示设计者更重视“ x 尽量接近于 0”。一般经计算机模拟可以选出较合适的 r 值。

7.1.2 研究线性二次型问题的重要性

线性二次型问题是一类非常重要的最优控制问题,它的重要性可以归结为以下三点:

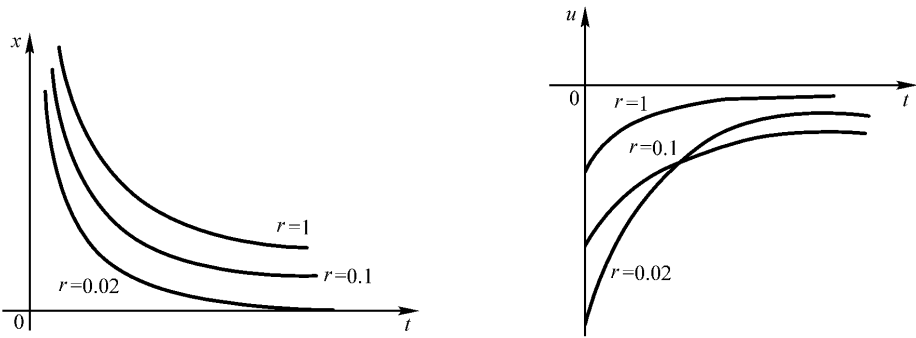


图 7-1 r 的调节作用

1) 相当多的最优控制问题是线性二次型问题。它在自动控制和其他很多领域的应用中有非常重要的地位。

2) 线性二次型问题在理论上比较完善, 因为得到的最优控制是状态变量的反馈, 所以应用也比较方便, 并且得到的闭环系统具有优良的品质。

3) 非线性最优控制问题在线执行时也需要解一个线性二次型问题。

由于线性二次型问题理论上的完善和应用上的方便, 所以, 深受广大工程技术人员的欢迎。在遇到的最优控制问题中只要能化为线性二次型问题的, 就化为线性二次型问题处理。

在非线形最优控制问题中设状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0$$

目标函数为

$$J(u) = \theta(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt$$

可应用变分法或最大值原理求出最优控制 $u^*(t)$ 和相应的最优轨线 $x^*(t)$ 。它们是离线求出的, 并作为理想的控制和轨线。在实际系统运行时, 应用控制 $u^*(t)$ 得到的状态轨线常常不是 $x^*(t)$, 这是因为实际系统与模型总有一定的差异。因此需要某种反馈使偏差减小。即在控制矢量上加一个增量 δu , 应用控制矢量 $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$, 使偏差 $x(t) - x^*(t)$ 减小。图 7-2 是这一过程的示意图。图中的控制器是通过解一个线性二次型问题得到的。其状态方程为

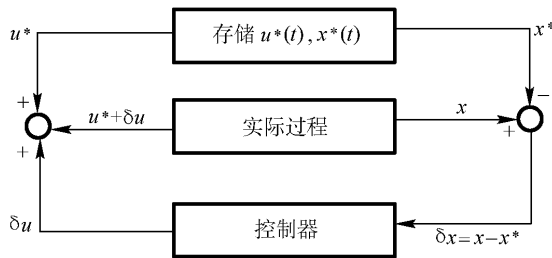


图 7-2 非线性系统最优控制的在线执行

$$\delta \dot{x} = A_0(t) \delta x + B_0(t) \delta u$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \delta x^T(t_f) F \delta x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\delta x^T Q(t) \delta x + 2 \delta x^T S(t) \delta u + \delta u^T R(t) \delta u] dt$$

也就是说, 非线性最优控制问题在线执行时需要解一个线性二次型问题。这个线性二次型问题的具体的推导可参看文献[21]。

7.2 线性二次型问题的解

在应用中提出的线性二次型问题的目标函数中经常不出现交叉项 $2x^T(t)S(t)u(t)$, 本节讨论一类最常见的线性二次型问题: 系统的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0 \quad (7-1)$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (7-2)$$

式中 F 和 Q 为对称半正定矩阵, R 是对称正定矩阵, 求 u 使 $J(u)$ 最小

线性二次型问题可用变分法或最大值原理求解。首先写出哈密顿函数

$$H(x, \lambda, u, t) = \frac{1}{2}[x^T Q(t)x + u^T R(t)u] + \lambda^T [A(t)x + B(t)u]$$

由必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = B^T(t)\lambda(t) + R(t)u(t) = 0$$

解得

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (7-3)$$

正则方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u = A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Q(t)x - A^T(t)\lambda \end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -S(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

式中

$$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \quad (7-5)$$

边界条件为:

$$x(t_0) = x_0 \quad \lambda(t_f) = Fx(t_f) \quad (7-6)$$

设 $\Phi(t, t_0)$ 是正则方程组(7-4)的状态转移矩阵, 并记为如下的分块形式

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

式中 $\phi_{ij}(t, t_0)$ 是 n 阶方阵, $i, j = 1, 2$, 那么

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

或者

$$x(t_f) = \phi_{11}(t_f, t)x(t) + \phi_{12}(t_f, t)\lambda(t)$$

$$\lambda(t_f) = \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)\lambda(t) = Fx(t_f)$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda(t_f) &= F\phi_{11}(t_f, t)x(t) + F\phi_{12}(t_f, t)\lambda(t) \\ &= \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)\lambda(t) \end{aligned}$$

由此得到 $[\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]\lambda(t) = [F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t)$

可以证明 矩阵 $[\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]$ 可逆^[27], 因此由上式可解出

$$\lambda(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]^{-1}[F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t)$$

或者记 $P(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - F\phi_{12}(t_f, t)]^{-1}[F\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]$ (7-7)

则 $\lambda(t) = P(t)x(t)$

代入式(7-3) 得到最优控制

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \quad (7-8)$$

或 $u(t) = -K(t)x(t) \quad K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$

式中的 $K(t)$ 称为反馈增益矩阵。

按式(7-7)计算 $P(t)$, 需要计算 $2n$ 阶方阵 $\Phi(t_0, t)$, 还需计算一个 n 阶方阵的逆矩阵, 比较复杂。下面我们讨论计算 $P(t)$ 的其他方法。

由 $\lambda(t) = P(t)x(t)$ 两边对 t 微分得到

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P(t)\dot{x} = \dot{P}x + P(t)A(t)x - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$$

另一方面, 由协状态方程得到

$$\dot{\lambda} = [-Q(t) - A^T(t)P(t)]x(t)$$

比较上二式右端得到:

$$[\dot{P} + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t)]x(t) = 0$$

由于上式对状态方程的任意解 $x(t)$ 成立, 因而

$$\dot{P} + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0$$

因此, $P(t)$ 满足矩阵微分方程:

$$\dot{P} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t) \quad (7-9)$$

由边界条件 $\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) = Fx(t_f)$, 得到 $P(t)$ 满足的边界条件:

$$P(t_f) = F \quad (7-10)$$

式(7-9)称为矩阵里卡蒂微分方程, 它是包含 n^2 个微分方程的方程组。下面我们将证明 $P(t)$ 是对称矩阵, 因此式(7-9)实质上包含 $n(n+1)/2$ 个微分方程。

$P(t)$ 是对称矩阵的证明 式(7-9)、式(7-10)两边转置得到:

$$\begin{cases} \dot{P}^T = -A^T(t)P^T(t) - P^T(t)A(t) + P^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P^T(t) - Q(t) \\ P^T(t_f) = F \end{cases}$$

这表明 $P^T(t)$ 和 $P(t)$ 是同一个微分方程的终值问题的解, 由微分方程终值问题解的惟一性, 得到 $P(t) = P^T(t)$, $P(t)$ 为对称矩阵。

以上推导得到如下结论:

- (1) 控制是状态的反馈;
- (2) 求反馈增益矩阵的关键步骤是解矩阵里卡蒂微分方程, 可以离线进行;
- (3) 在线控制的计算量很小, 只需在线计算 $-K(t)x(t)$ 。

更一般的线性二次型问题在目标函数中可能出现交叉项 $2x^T(t)S(t)u(t)$, 这时经适当的变换可以化为现在讨论过的(7-1)、(7-2)的形式。

【例 7-2】 考虑线性二次型问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}u^2] dt$$

对该问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

由式(7-8),最优控制为

$$u^* = -2[0 \ 1] \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2(p_{12}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t))$$

式中 $p_{11}(t)$ 、 $p_{22}(t)$ 是如下的矩阵里卡蒂方程的终值问题解：

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{12} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P(3) = F$$

以上矩阵里卡蒂方程的终值问题等价于

$$\begin{cases} \dot{p}_{11} = 2p_{12}^2(t) - 2 & p_{11}(3) = 1 \\ \dot{p}_{12} = -p_{11}(t) + 2p_{12}(t)p_{22}(t) - 1 & p_{12}(3) = 0 \\ \dot{p}_{22} = -2p_{12}(t) + 2p_{22}^2(t) - 4 & p_{22}(3) = 2 \end{cases}$$

里卡蒂微分方程组一般是非线性微分方程组,其终值问题一般需要用数值方法求解。

以上,我们根据最优控制满足的必要条件导出了解式(7-8)。下面证明解式(7-8)给出的 $u(t)$ 必是线性二次型问题式(7-1)、式(7-2)的解。

为了明确表示里卡蒂微分方程的解对终端时刻 t_f 的依赖关系,记式(7-8)中的 $P(t)$ 为 $P(t, t_f)$, 则有如下引理:

引理 7-1 $u(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)$ 必使 $J(u)$ 达最小值,并且 $J(u)$ 的最小值为

$$J^*(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0)$$

证明 先计算

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)] = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\dot{\mathbf{P}}(t, t_f)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\dot{\mathbf{x}}$$

由里卡蒂方程和状态方程,上式化为

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)] = -\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$+ [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{R}(t) [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)]$$

由 t_0 到 t_f 积分上式得到:

$$\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{P}(t_f, t_f)\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{R}(t) [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)] dt$$

由于 $\mathbf{P}(t_f, t_f) = \mathbf{F}$, 上式化为

$$2J(\mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)]^T \mathbf{R}(t) [\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)] dt$$

由于 $\mathbf{R}(t)$ 是正定矩阵, 因此仅当 $\mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t) = 0$ 时 $J(\mathbf{u})$ 最小, 即

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)$$

使 $J(\mathbf{u})$ 达最小值:

$$J^*(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0)$$

引理 7-2 在 $\mathbf{Q}(t)$ 半正定、 $\mathbf{R}(t)$ 正定的假设下, 里卡蒂方程的解 $\mathbf{P}(t, t_f)$ 是半正定的。如进一步假设 $\mathbf{Q}(t)$ 正定, 则 $\mathbf{P}(t, t_f)$ 也是正定的。

证明

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{x}(t), t) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^{*T}(t_f)\mathbf{F}\mathbf{x}^*(t_f) + \frac{1}{2} \int_t^{t_f} [\mathbf{x}^{*T}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{x}^*(\tau) + \mathbf{u}^{*T}(\tau)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{u}^*(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{Q}(t)$ 半正定, $\mathbf{R}(t)$ 正定, 上式右端大于等于 0, 因而

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t) \geq 0$$

$\mathbf{P}(t, t_f)$ 半正定。如果 $\mathbf{Q}(t)$ 也是正定的, 则上式右端大于零, 因而 $\mathbf{P}(t, t_f)$ 也是正定的。

综合本节以上的讨论, 得到以下定理

定理 7-1 在线性二次型问题中假设 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{Q}(t)$ 、 $\mathbf{R}(t)$ 连续可微分, $\mathbf{Q}(t)$ 半正定, $\mathbf{R}(t)$ 正定, 那么 $\mathbf{u}^*(t)$ 是最优控制的充分必要条件是

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)\mathbf{x}(t)$$

式中 $\mathbf{P}(t, t_f)$ 是里卡蒂方程的终值问题

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P} - \mathbf{Q}(t) \quad \mathbf{P}(t, t_f) = \mathbf{F}$$

的解, $\mathbf{P}(t, t_f)$ 是对称半正定矩阵, 并且当 $\mathbf{Q}(t)$ 正定时, $\mathbf{P}(t, t_f)$ 也是正定矩阵。当 $\mathbf{u}(t)$ 取为最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 时, 目标函数的最小值为

$$J^*(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0, t_f)\mathbf{x}(t_0)$$

最优轨线是初值问题:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t, t_f)]\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

的解。

定理中 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{Q}(t)$ 、 $\mathbf{R}(t)$ 连续可微的假设保证了里卡蒂方程的解 $\mathbf{P}(t, t_f)$ 存在。

由以上讨论可以看出, 线性二次型问题的最优解是状态 \mathbf{x} 的反馈, 反馈矩阵 $\mathbf{K}(t)$ 可以离线计算, 只需在线计算 $-\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$, 在线计算量很小。由于线性二次型问题的最优解有以上优点, 因此在应用中凡是能化为线性二次型问题的都尽量化为线性二次型问题处理。

7.3 非时变状态调节器

在上节中得到的线性二次型问题的最优控制是状态变量的反馈,这在应用上比较方便。解式 $u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)x(t)$ 中 $P(t, t_f)$ 是里卡蒂微分方程的解,当 A, B, Q, R 都是常数矩阵时,由于 $P(t, t_f)$ 是里卡蒂微分方程的终值问题

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \\ P(t, t_f) &= F \end{aligned}$$

的解,一般情况下 $P(t, t_f)$ 仍然是时间 t 的函数,也就是说当 A, B, Q, R 都是常数矩阵时得到的反馈增益矩阵 $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t, t_f)$,仍依赖于时间 t ,应用时需要在控制器上存一个依赖于时间 t 的矩阵 $K(t)$ 。如果当 A, B, Q, R 均为常数矩阵时能得到常增益反馈,这样在控制器上只需存一个常数矩阵 K ,在应用上将更为方便。从下面的分析可以看出,当 A, B, Q, R 都是常数矩阵,并且 $t_f \rightarrow \infty$ 时,能够得到常增益反馈控制,这时得到的控制器称为非时变状态调节器。

7.3.1 非时变状态调节器的设计

考虑定常线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

求 u 使 $J(u)$ 最小。这里假设 R, Q 为正定矩阵, (A, B) 完全能控。

讨论这个问题的方法是利用上节的结果,令 $t_f \rightarrow \infty$ 进行分析。

引理 7-3 设 (A, B) 能控,那么

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \hat{P} \text{ (常数矩阵)}$$

证明 先证明极限

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$$

存在,方法是证明 $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$ 单增有上界。然后再证明 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f)$ 存在并且是常数矩阵。

因为 (A, B) 能控,对任意 x_0 , 存在 $t_1 > t_0$ 和 $\tilde{u}(t)$ 使在它的作用下 $x(t_1) = 0$ 。取 t_f 为有限时间,由上节的结果

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) &= \min \left[\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + \tilde{u}^T R \tilde{u}] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q x + \bar{u}^T R \bar{u}] dt < \infty \end{aligned}$$

式中

$$\bar{u} = \begin{cases} \tilde{u}, & t \in (t_0, t_1) \\ 0, & t \in (t_1, \infty) \end{cases}$$

这样就证明了 $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$ 有上界。下面再证明 $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$ 关于 t_f 单增。设 $t_{f1} < t_{f2}$ ，并设在区间 (t_0, t_{f1}) 上的最优控制为 $u_1^*(t)$ ，在区间 (t_0, t_{f2}) 上的最优控制为 $u_2^*(t)$ ，它们相应的轨线分别为 x_1^* 、 x_2^* ，那么

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0, t_{f1})x(t_0) &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_{f1}} [x_1^{*T}Qx_1^* + u_1^{*T}Ru_1^*] dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_{f2}} [x_2^{*T}Qx_2^* + u_2^{*T}Ru_2^*] dt = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0, t_{f2})x(t_0) \end{aligned}$$

这就证明了 $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$ 单增有上界，因而

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0)$$

存在。

因为 $P(t_0, t_f)$ 不依赖于 $x(t_0)$ ，当我们取 $x(t_0) = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T$ 时，即只有 $x(t_0)$ 的第 i 个分量为 1，其他分量均为 0 时， $x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) = P_{ii}(t_0, t_f)$ 。这表明 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} p_{ii}(t_0, t_f)$ 存在。当取 $x(t_0) = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T$ ，即除 $x(t_0)$ 的第 i 个元素和第 j 个元素为 1 外，其他元素均为 0 时，

$$x^T(t_0)P(t_0, t_f)x(t_0) = p_{ii}(t_0, t_f) + p_{jj}(t_0, t_f) + p_{ij}(t_0, t_f) + p_{ji}(t_0, t_f)$$

由于上式左边极限存在，右边 p_{ii}, p_{jj} 极限存在，而 $p_{ij}(t_0, t_f) = p_{ji}(t_0, t_f)$ ，所以 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} p_{ij}(t_0, t_f)$ 存在。这样我们就证明了 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$ 存在。

由于 A, B, Q, R 是常数矩阵，所以不论 t_0 取何值，只要向量 $x(t_0)$ 相同， J 的最小值就不变，因此 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f)$ 为常数矩阵，记它为 \hat{P} ，即

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P}$$

由 t_0 的任意性，即得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \hat{P}$$

引理证完。

由引理 7-2，当矩阵 Q, R 均为正定矩阵时 $P(t, t_f)$ 为正定矩阵，因此 \hat{P} 也是正定矩阵。可以证明，当 Q 为正定矩阵的条件降低为 Q 为半正定矩阵，并且 $Q = C^T C$ (C, A) 能观测时， \hat{P} 仍然是正定矩阵，事实上成立如下引理。

引理 7-4 \hat{P} 正定的充分必要条件是 (C, A) 能观测。

引理 7-4 的证明见文献[29]

引理 7-5 设 $P(t_0, t_f)$ 是里卡蒂方程的终值问题的解，那么

$$\hat{P} = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t_0, t_f)$$

证明 已证明 $\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P}$ 。由于 A, B, Q, R 都是常数矩阵，因此有

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t_0, t_f) = \hat{P} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} P(0, t_f - t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(0, t_f - t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t_f, t_0)$$

引理证完。

由引理 7-3, \hat{P} 是非线性代数方程组

$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} - Q = 0$$

的解, 上述方程(组)称为代数里卡蒂方程(组)。下面证明最优调节器问题的解为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$$

定理 7-2 设(A, B)能控, Q, R 为正定矩阵, 那么最优调节器问题的解由

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t) \quad (7-11)$$

给出, 式中 \hat{P} 是代数里卡蒂方程

$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} - Q = 0 \quad (7-12)$$

的对称正定解。最优轨线是微分方程的初始问题

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

的解, 目标函数的最小值为

$$J^*(x(t_0), t_0) = \frac{1}{2}x^T(t_0)\hat{P}x(t_0)$$

证明(1)先证明当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 极限

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt = \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$$

式中 $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x^*(t)$, x^* 是相应的轨线。为此先证明

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \leq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \geq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0)$$

同时成立, 然后再令 $t_f \rightarrow \infty$ 。

以上的 u^* 代入目标函数中得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^{*T} [Q + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}] x^* dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^{*T} [-A^T \hat{P} - \hat{P}A + 2\hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}] x^* dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [-x^{*T} \hat{P} x^*] dt \\ & = \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) - \frac{1}{2} x^{*T}(t_f) \hat{P} x^*(t_f) \leq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^*] dt \leq \frac{1}{2} x^T(t_0) \hat{P} x(t_0) \quad (7-13)$$

$$\text{等式} \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^{*\top} [-\mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A} + 2\hat{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}}] \mathbf{x}^* dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [-\mathbf{x}^{*\top} \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}^*] dt$$

可将积分中的微分展开,再以 $\dot{\mathbf{x}}$ 代入经整理得到。

$$\text{另一方面} \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{*\top} \mathbf{Q}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{R}\mathbf{u}^*] dt \geq \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t_0)$$

令 $t_f \rightarrow \infty$ 得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{*\top} \mathbf{Q}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{R}\mathbf{u}^*] dt \geq \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t_0) \quad (7-14)$$

由式(7-13)和(7-14)得到

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{*\top} \mathbf{Q}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{R}\mathbf{u}^*] dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t_0)$$

(2) 证明 $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t)$ 是最优控制。反设 \mathbf{u}^* 不是最优控制,则存在 $\mathbf{u}_1(t)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_1] dt &< \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^{*\top} \mathbf{Q}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{R}\mathbf{u}^*] dt \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{*\top} \mathbf{Q}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{R}\mathbf{u}^*] dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t_0) \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \mathbf{P}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0) \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{x}_1(t)$ 是 $\mathbf{u}_1(t)$ 的相应的轨线。另一方面

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_1] dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_1] dt$$

因此上面的不等式化为

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_1] dt < \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \mathbf{P}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0)$$

于是对充分大的 t_f 成立不等式

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_1] dt < \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \mathbf{P}(t_0, t_f) \mathbf{x}(t_0)$$

这与定理 7-1 矛盾。因此 $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t)$ 给出问题的最优解。定理证毕。

代数里卡蒂方程是一个包含 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个方程的非线性代数方程组,它的解法将在 7.3.3 中介绍。

7.3.2 闭环系统的稳定性

定理 7-3 定理 7-2 中得到的闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \hat{\mathbf{P}})\mathbf{x}$$

是渐近稳定的。

证明 用李雅谱诺夫第二方法,取 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top(t) \hat{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t)$ 。因为 $\hat{\mathbf{P}}$ 是正定矩阵, $V(\mathbf{x}) > 0$ 。它的时间导数

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T \hat{P}x(t) + x^T(t) \hat{P}\dot{x} = [(A - BR^{-1}B^T \hat{P})x]^T \hat{P}x + x^T \hat{P}[A - BR^{-1}B^T \hat{P}]x \\ &= x^T [A^T \hat{P} - \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} + \hat{P}A - \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}]x = -x^T Qx - x^T \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}x\end{aligned}$$

由于定理 7-2 中假设了 Q, R 为正定矩阵, 因此上式右端 < 0 , 即 $\dot{V} < 0$, 因此闭环系统渐近稳定。定理证完。

该定理的证明中用到了 Q 为正定矩阵的条件, 这个条件可以降低为 Q 为半正定矩阵, 并且可以分解为 $Q = C^T C$ (C, A) 能观测。

定理 7-4 如果 Q 为半正定矩阵, 并且 $Q = C^T C$ (C, A) 能观测, 则闭环系统

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x$$

是渐近稳定的。

证明 同定理 7-3 的证明, 取 $V(x) = x^T(t) \hat{P}x(t)$ 。因为 \hat{P} 是正定矩阵, $V(x) > 0$ 。它的时间导数

$$\dot{V} = -x^T Qx - x^T \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}x \leq 0$$

由关于稳定性的定理, 如果再证明: 沿着从原点以外出发的解, \dot{V} 不恒为 0, 那么由定理 2-4 闭环系统就是渐近稳定的。下面用反证法, 设从某个 $x(t_0) \neq 0$ 出发的解使得 $\dot{V} \equiv 0$, 那么由上式必须

$$x^T Qx \equiv 0 \quad x^T \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P}x \equiv 0$$

由后者可以推出

$$B^T \hat{P}x \equiv 0 \quad u(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t) \equiv 0 \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

由 $x^T Qx \equiv 0$ 又导出

$$x^T(t_0)e^{A^T(t-t_0)}C^T C e^{A(t-t_0)}x(t_0) \equiv 0$$

即 $Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) \equiv 0$, 与 (C, A) 能观测矛盾, 定理证完。

定理 7-3 和定理 7-4 表明, 在一定条件下, 尽管原来的系统开环可能是不稳定的, 用本节设计的反馈得到的闭环系统一定是渐近稳定的。

7.3.3 代数里卡蒂方程的解法

非时变调节器问题的求解最终化为求解代数里卡蒂方程(7-12)的问题, 它是一个非线性代数方程组。对里卡蒂方程的研究已经引起广泛的重视, 人们已经提出了多种解法, 这里介绍代数里卡蒂方程最常用的的 3 种解法。

(1) 直接解非线性代数方程组

关于直接解非线性代数方程组的方法, 仅用以下例子说明。

【例 7-3】 已给系统的状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

目标函数

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2] dt$$

式中 $a - b^2 > 0, b > 0$, 求 u 使 $J(u)$ 最小。

解 对这个问题

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad R = 1$$

显然(A, B)能控, R、Q 正定。由解式(7-11)

$$u^*(t) = - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - (P_{12}x_1(t) + P_{22}x_2(t))$$

代数里卡蒂方程为

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此得到

$$\begin{cases} -p_{12}^2 + 1 = 0 \\ p_{11} - p_{12}p_{22} + b = 0 \\ -2p_{12} + p_{22}^2 - a = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} p_{12} = \pm 1 \\ p_{22} = \pm \sqrt{a + 2p_{12}} \\ p_{11} = p_{12}p_{22} - b \end{cases}$$

由于要求代数里卡蒂方程的解为正定矩阵, 所以选 $p_{11} > 0, p_{22} > 0$, 再由 $b > 0$ 的假设, 及 $p_{11} = p_{12}p_{22} - b$ 。得到 $p_{12} > 0$, 因此 $p_{12} = 1$ 。由此得到 $p_{22} = \sqrt{a + 2}$ 。于是得到最优控制

$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{a + 2}x_2(t)$$

应用最优控制时得到闭环系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{a + 2} \end{bmatrix} x \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

闭环系统的特征值为 $\lambda = -\frac{\sqrt{a+2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{a-2}}{2}$ 。

这是一个二阶系统的例, 里卡蒂方程是包含 3 个非线性方程的方程组。除了 $n \leq 3$ 的低阶系统和一些极特殊的高阶系统外, 一般解非线性代数方程组都要用数值方法, 具体方法可参看有关数值计算的著作。

(2) 求里卡蒂微分方程的稳态解

由引理 7-4

$$\hat{P} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} P(t, t_f) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} P(t_0, t_f)$$

因此可以用数值方法解微分方程的初问题

$$\begin{cases} \dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

由 $t = 0$ 向 $t \rightarrow -\infty$ 方向求解, 得到稳态解即 \hat{P} 。求解里卡蒂微分方程的方法也可以在有关数值计算的著作中找到。

(3) 哈密顿矩阵法

定常线性系统在最优化控制 $u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}x(t)$ 作用下得到闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\hat{P})x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

设 λ 是闭环系统矩阵 $A - BR^{-1}B^T\hat{P}$ 的特征值, η 是相应的特征矢量。因此成立关系式

$$\lambda\eta = (A - BR^{-1}B^T\hat{P})\eta \quad (7-15)$$

哈密顿矩阵法是构造一个哈密顿矩阵 H , 一个 $2n$ 阶方阵, 使它的 n 个特征值为 n 阶方阵 $A - BR^{-1}B^T\hat{P}$ 的特征值 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, 它的另外 n 个特征值为 n 阶方阵 $-(A - BR^{-1}B^T\hat{P})$ 的特征值 $\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_n\}$ 。这样的哈密顿矩阵 H , 可以按以下方法产生:

令 $\xi = \hat{P}\eta$, 式(7-15)化为

$$\lambda\eta = A\eta - BR^{-1}B^T\xi$$

或

$$\lambda\hat{P}^{-1}\xi = A\eta - BR^{-1}B^T\hat{P}\eta$$

即

$$\lambda\xi = (\hat{P}A - \hat{P}BR^{-1}B^T\hat{P})\eta$$

由代数里卡蒂方程, 上式又可化为

$$\lambda\xi = (-Q - A^T\hat{P})\eta = -Q\eta - A^T\xi$$

由 $\lambda\eta$ 和 $\lambda\xi$ 的两个表示式得到

$$\lambda \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}$$

式中

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (7-16)$$

就是要求的哈密顿矩阵。为了说明 H 就是要求的哈密顿矩阵, 分析它的特征值, 为此令

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \hat{P} & I_n \end{bmatrix}$$

对 H 做变换

$$\begin{aligned} T^{-1}HT &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\hat{P} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \hat{P} & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T\hat{P} & -BR^{-1}B^T \\ -Q - A^T\hat{P} - \hat{P}A + \hat{P}BR^{-1}B^T\hat{P} & -(A - BR^{-1}B^T\hat{P})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T\hat{P} & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BR^{-1}B^T\hat{P})^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这表明矩阵 H 的特征值集为

$$\begin{aligned} \sigma(H) &= \sigma(A - BR^{-1}B^T\hat{P}) \cup \sigma(-(A - BR^{-1}B^T\hat{P})^T) \\ &= \sigma(A - BR^{-1}B^T\hat{P}) \cup \sigma(-(A - BR^{-1}B^T\hat{P})) \end{aligned}$$

即对 $A - BR^{-1}B^T\hat{P}$ 的每个特征值 λ 哈密顿矩阵 H 有一对特征值 λ 和 $-\lambda$ 。

现假设哈密顿矩阵有不同的特征值导出代数里卡蒂方程的解。设 $\lambda_i (i=1, \dots, m)$ 表示它的有负实部的特征值, 用 $-\lambda_i (i=1, \dots, m)$ 表示它的另外 n 个特征值。用 $[\eta_i^T, \xi_i^T]^T$ 表示 λ_i 的特征矢量。令

$$V_1 = [\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n] \quad V_2 = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n]$$

由于 $\xi_i = \hat{P}\eta_i$ 于是有

$$\hat{P}V_1 = V_2$$

又由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是闭环系统的不同的特征值, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是相应的特征矢量, 因此 V_1 可逆, 于是由上式解得

$$\hat{P} = V_2 V_1^{-1}$$

这就得到了代数里卡蒂方程的解。

哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程的步骤:

第一步 按式(7-16)构造哈密顿矩阵 H 。

第二步 求闭环系统的(也是 H 的) n 个不同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和 H 的与它们相应的 n 个特征矢量记为

$$\begin{bmatrix} \eta_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

记

$$V_1 = [\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n] \quad V_2 = [\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n]$$

第三步 计算

$$\hat{P} = V_2 V_1^{-1}$$

即所求代数里卡蒂方程的解。

前面假设了 H 有不同的特征值, 关于 H 有重特征值的情况的处理可参看[26]。

7.3.4 设计非时变状态调节器的 MATLAB 程序

设计非时变状态调节器的 MATLAB 函数是 `lqr`, 它的调用格式是

$$[K, P, ev] = lqr(A, B, Q, R)$$

输入矩阵 A, B, Q, R 程序输出反馈增益矩阵 K , 里卡蒂方程的解 P 和闭环系统的特征值 `ev`。

【例 7-4】 考虑非时变状态调节器问题,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T Q x + u^2] dt \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

得到的非时变控制器为 $u^*(t) = Kx(t) = -R^{-1}B^T\hat{P}x(t)$, 式中 \hat{P} 是代数里卡蒂方程的解, 应用 `[K, P, ev] = lqr(A, B, Q, R)` 得到

$$K = [1.0000 \quad 2.2361] \quad P = \begin{bmatrix} 1.2361 & 1 \\ 1 & 2.2361 \end{bmatrix} \quad ev = -1.6180 \quad -0.6180$$

与例 7-3 中 $b=1, a=3$ 时的结果相同。

也可以用哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程的解,再代入以上解式求最优控制。哈密顿矩阵法求代数里卡蒂方程的 MATLAB 程序:

```
A=[0 1 0 0];
B=[0 1];
Q=[1 1 1 3];
R=1;
H=[A-B*inv(R)*B';-Q -A'];
[X D]=eig(H);
j=1;
for i=1:rank(H)
    if real(D(i,i))<0
        temp(: ,j)=X(: ,i);
        j=j+1;
    end
end
j=j-1;
for i=1:j
    V1(i ,:)=temp(i ,:);
    t=i+j;
    V2(i ,:)=temp(t ,:);
end
P=V2*(inv(V1))
```

运行结果:

```
P=
    1.2361    1.0000
    1.0000    2.2361
```

所得结果与前面一致。

7.3.5 非时变状态调节器的频率特性

1. 最优性的频率条件

为了进一步研究非时变状态调节器,对单输入的情况导出最优性的频率条件并对最优控制系统的增益裕度和相位裕度进行分析。

单输入非时变状态调节器问题的状态方程和目标函数为

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q x + r u^2] dt$$

假设 (A, b) 能控, Q 为正定矩阵(或者 Q 为半正定矩阵, $Q = C^T C$, (C, A) 能观测), $r > 0$, 则最优控制为

$$u^* = -\frac{1}{r} b^T \hat{P} x(t) = -k^T x(t) \quad k^T = \frac{1}{r} b^T \hat{P}$$

式中 \hat{P} 是代数里卡蒂方程

$$-\hat{P}A - A^T \hat{P} + \hat{P}B \frac{1}{r} B^T \hat{P} - Q = 0 \quad (7-17)$$

的正定解。

当有外界干扰时,考虑

$$\dot{x} = Ax + b(u + w) \quad u = -k^T x$$

或

$$\dot{x} = Ax + bv \quad v = u + w \quad u = -k^T x$$

图 7-3a 是这个系统的示意图,在频域中用传递函数表示得到图 7-3b,再经变换化为图 7-3c。

图 7-3c 的闭环传递函数为

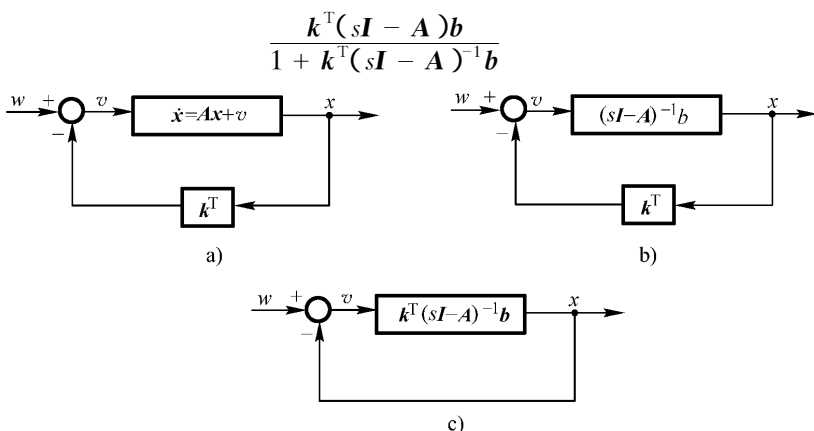


图 7-3 单输入系统的等价框图

以下将根据奈魁斯特判据,由开环传递函数 $k^T(\omega jI - A)b$ 的奈魁斯特图,导出最优控制系统的相位裕度和增益裕度,为此先证明以下不等式

$$|1 + k^T(\omega jI - A)^{-1}b| \geq 1 \quad (7-18)$$

式(7-18)是单输入最优系统必定满足的频率条件,称为最优性的频率条件。下面证明这个不等式。

首先将代数里卡蒂方程(7-17)改写为

$$-\hat{P}(sI - A) - (-sI - A^T)\hat{P} - \frac{1}{r}\hat{P}bb^T\hat{P} + Q = 0 \quad (7-19)$$

式(7-19)左乘 $-r^{-1/2}b^T(-sI - A^T)^{-1}$,右乘 $(sI - A)^{-1}br^{-1/2}$ 然后两端加 1,得到

$$\begin{aligned} & r^{-1/2}b^T(-sI - A^T)^{-1}\hat{P}br^{-1/2} + r^{-1/2}b^T\hat{P}(sI - A)^{-1}br^{-1/2} - \\ & r^{-1/2}b^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}br^{-1/2} \\ & + r^{-1/2}b^T(-sI - A^T)^{-1}\frac{1}{r}\hat{P}bb^T\hat{P}(sI - A)^{-1}br^{-1/2} + 1 = 1 \end{aligned}$$

利用 $k^T = \frac{1}{r}b^T\hat{P}$ 化简上式,得到

$$[1 + k^T(-sI - A)^{-1}b][1 + k^T(sI - A)^{-1}b] = 1 + \frac{1}{r}b^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}b$$

上式中令 $s = \omega j$ 得到

$$[1 + k^T(-\omega jI - A)^{-1}b][1 + k^T(\omega jI - A)^{-1}b] = |1 + k^T(\omega jI - A)^{-1}b|^2$$

$$= 1 + \frac{1}{r} b^T (-\omega j I - A^T)^{-1} Q (\omega j I - A)^{-1} b$$

由于 $Q > 0$, 所以 $b^T (-\omega j I - A^T)^{-1} Q (\omega j I - A)^{-1} b \geq 0$, 因此上式得到最优性的频率条件

$$|1 + k^T (\omega j I - A)^{-1} b| \geq 1$$

该式仅在孤立的 ω 点上等号成立, 因为等号成立的点必使

$$\frac{1}{r} b^T (-\omega j I - A^T)^{-1} Q (\omega j I - A)^{-1} b = 0$$

令 $Q = C^T C$, 由上式得到 $C(\omega j I - A)^{-1} b = 0$ 。如果该式对 ω 的某个区间成立, 考虑到逆拉普拉斯变换 $L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = e^{At}$, 上式意味着 $Ce^{At}b = 0$ 在某个区间上成立, 这与 (C, A) 能观测矛盾。

证明了最优性的频率条件就可以应用奈魁斯特判据讨论最优控制系统的相位裕度和增益裕度。

如果开环传递函数为

$$W(s) = k^T (sI - A)^{-1} b$$

记在复平面上的奈魁斯特曲线为

$$\gamma: W(\omega j) = k^T (\omega j I - A)^{-1} b$$

假设 $W(s)$ 在虚轴上没有极点, 奈魁斯特判据为: 如果 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时, 开环频率响应的奈魁斯特图逆时针绕 $(-1, 0)$ 点的圈数等于开环传递函数在右半开平面上极点的个数, 则闭环系统是渐近稳定的。

为了应用奈魁斯特判据分析最优控制系统的相位裕度和增益裕度, 还需说明最优性的频率条件的几何意义。最优性的频率条件 $|1 + k^T (\omega j I - A)^{-1} b| \geq 1$ 表明奈魁斯特曲线 γ 位于以 $(-1, 0)$ 为中心的单位圆外, 见图 7-4。

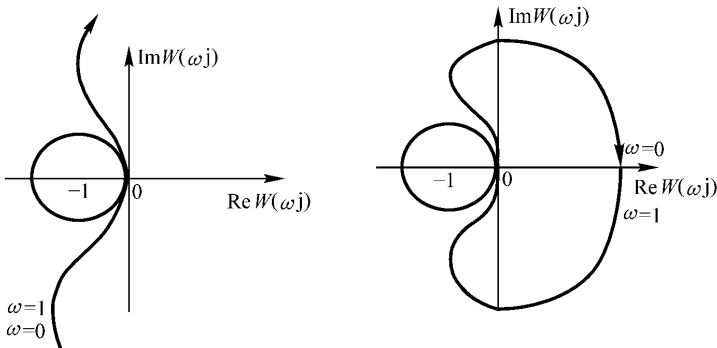


图 7-4 最优性的频率条件图释

下面应用这一结论和奈魁斯特判据分析相位裕度和增益裕度。

2. 增益裕度

最优控制系统的增益裕度需分析开环传递函数为

$$W_{\beta}(s) = \beta k^T (sI - A)^{-1} b$$

的闭环系统 S_{β} , 当 β 在什么范围内变化时仍是渐近稳定的。如果 β 增大到某个 $\bar{\beta}$ 闭环系统变为不稳定的, 而 $\beta < \bar{\beta}$ 时系统还是稳定的, 则称 $\bar{\beta}$ 为它的增益裕度。

画出开环传递函数 $W_{\beta}(s)$ 的奈魁斯特曲线

$$\gamma_\beta : W_\beta(\omega j) = \beta k^T(\omega j I - A)^{-1} b$$

由于 γ_β 与 γ 仅差一个因子 β 因此 γ_β 绕 $(-1, 0)$ 的圈数等于 γ 绕 $(-1/\beta, 0)$ 的圈数, 又因为当 $\beta > 1/2$ 时, $(-1/\beta, 0)$ 在以 $(-1, 0)$ 为中心的单位圆内, 而 γ 在这一单位圆外, 因此 γ 绕 $(-1/\beta, 0)$ 的圈数等于 γ 绕 $(-1, 0)$ 的圈数。由于原闭环系统渐近稳定, γ 绕 $(-1, 0)$ 的圈数又等于 $W(s)$ 在右半开平面上极点的个数。由于 $\beta k^T(sI - A)^{-1} b$ 与 $k^T(sI - A)^{-1} b$ 有相同的极点, $W(s)$ 在右半开平面上极点的个数又等于 $W_\beta(s)$ 在右半开平面上极点的个数, 这样就证明了只要 $\beta > 1/2$, γ_β 绕 $(-1, 0)$ 的圈数就等于 $W_\beta(s)$ 在右半开平面上极点的个数, 由奈魁斯特判据, 只要 $\beta > 1/2$, 系统 S_β 就是渐近稳定的, 这表明以上设计的最优状态调节器有无穷大的增益裕度。

3. 相位裕度

相位裕度是使系统达到不稳定的边缘所需要的额外的相位滞后量。在这里它是使奈魁斯特曲线的 $\omega \geq 0$ 部分恰好通过 $(-1, 0)$ 点而必须引进的负相角, 因为这时开环频率响应的奈魁斯特图逆时针绕 $(-1, 0)$ 点的圈数将不再等于开环传递函数在右半开平面上极点的个数。为分析相位裕度, 先在复平面上画以原点为中心的单位圆 L_0 和以 $(-1, 0)$ 为中心的单位圆, 设 γ 与 L_0 相交于 N 点。由于闭环系统渐近稳定, 由图 7-5, 显然 $\phi \geq \pi/3$, 因此相位裕度至少为 $\pi/3$ 。

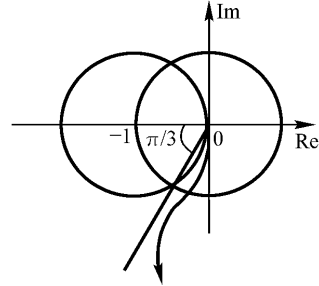


图 7-5 最优反馈系统的相位裕

7.4 具有指定稳定度的最优调节器

在 7.3 中, 已经证明了闭环系统 $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T \hat{P})x$ 渐近稳定, 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x \rightarrow 0$ 。如果 x 至少已以 $e^{-\alpha t}$ 的速度趋向于 0, 这时称闭环系统具有稳定度 α 。这相当于要求闭环系统的特征值的实部小于 $-\alpha$ 或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} x = 0$$

因此, 为设计具有稳定度 α 的最优调节器, 考虑如下线性二次型问题

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha t} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt$$

在目标函数中增加因子 $e^{2\alpha t}$ 的目的是显而易见的, 令 $\tilde{x} = e^{\alpha t} x$, $\tilde{u} = e^{\alpha t} u$, 则线性二次型问题化为

$$\dot{\tilde{x}} = (A + \alpha I)\tilde{x} + B\tilde{u}$$

$$J(\tilde{u}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\tilde{x}^T(t)Q(t)\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)R(t)\tilde{u}(t)] dt$$

这是一个一般的调节器问题。如果能证明 (A, B) 能控等价于 $(A + \alpha I, B)$ 能控, 则可以在 (A, B) 能控 $Q > 0, R > 0$ 的假设下解这个线性二次型问题。

定理 7-5 (A, B) 能控等价于 $(A + \alpha I, B)$ 能控。

证 关于 $A + \alpha I$ 显然成立

$(A + \alpha I)^i = A^i + f_i(A)$ $f_i(A)$ 是 A 的次数低于 i 的多项式

$$\begin{aligned} \text{于是 } \text{rank}[B(A + \alpha I)B \dots (A + \alpha I)^{n-1}B] &= \text{rank}[BAB + \alpha B \dots A^{n-1}B + f_{n-1}(A)B] \\ &= \text{rank}[BAB \dots A^{n-1}B] \end{aligned}$$

定理证完。

有了这个定理就可以应用线性二次型问题的已有结果,得到

$$\tilde{u}^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}_\alpha \tilde{x}(t)$$

\hat{P}_α 是代数里卡蒂方程

$$-\hat{P}(A + \alpha I) - (A + \alpha I)^T \hat{P} + \hat{P}BR^{-1}B^T \hat{P} - Q = 0 \quad (7-20)$$

的解,于是原问题的解为

$$u(t) = e^{-\alpha t} \tilde{u}^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}_\alpha e^{-\alpha t} \tilde{x}(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}_\alpha x(t) \quad (7-21)$$

由于

$$\dot{\tilde{x}} = [(A + \alpha I) - BR^{-1}B^T \hat{P}_\alpha] \tilde{x}$$

渐近稳定,因而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}^*(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} x^*(t) = 0$$

即闭环系统有要求的稳定度。

总结上面的讨论得到如下定理:

定理 7-6 当 (A, B) 能控, Q, R 正定时调节器问题

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha t} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt$$

有最优解

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}_\alpha x(t)$$

式中 \hat{P}_α 是代数里卡蒂方程(7-20)的正定解,在 $u^*(t)$ 作用下闭环系统具有稳定度 α 。

注:在定理 7-6 中关于 Q 正定的条件可以降低到 Q 半正定, $Q = C^T C$, (C, A) 能观测。这时可以类似地证明: (C, A) 能观测等价于 $(C, A + \alpha I)$ 能观测。

【例 7-5】 已给系统的状态方程和目标函数为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + u^2) dt$$

设计稳定度 $\alpha = 1$ 的状态调节器。简记

$$\hat{P}_\alpha = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

由式(7-21)该问题的解为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \hat{P}_\alpha x(t) = -[0 \quad a] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} x = -a(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

式中 p_{12} 和 p_{22} 是代数里卡蒂方程

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

它等价于非线性方程组

$$\begin{cases} 2p_{11} - a^2 p_{12}^2 + 1 = 0 \\ p_{11} + 2p_{12} - a^2 p_{12} p_{22} = 0 \\ 2p_{12} + 2p_{22} - a^2 p_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

该方程组的解为

$$p_{11} = \frac{1}{a^2} \left[2 + 2\sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2} (2 + 2\sqrt{1+a^2})^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$p_{12} = \frac{1}{a^2} \left[1 + \sqrt{1+a^2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}} \right]$$

$$p_{22} = \frac{1}{a^2} \left[2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}} \right]$$

于是最优控制为

$$u^*(t) = -\frac{1}{a} \left[(1 + \sqrt{1+a^2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}}) x_1 + (2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}}) x_2 \right]$$

在它的作用下得到闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 p_{12} & -a^2 p_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

它的特征方程为

$$s^2 + (2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}})s + (1 + \sqrt{1+a^2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}}) = 0$$

特征值的实部

$$\text{Res} = - \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1+a^2}} \right) < -1$$

7.5 跟踪问题

设具有外输入 $w(t)$ 的系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{w}(t)$$

输出方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}$$

跟踪问题是求控制矢量 $\mathbf{u}(t)$ 使系统的输出跟踪要求的输出 $\mathbf{y}^d(t)$ 。这个问题可以归为线性二次型问题：求 $\mathbf{u}(t)$ 使

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} [\mathbf{y}(t_f) - \mathbf{y}^d(t_f)]^T \mathbf{F} [\mathbf{y}(t_f) - \mathbf{y}^d(t_f)] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^d(t)] + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \} dt \end{aligned}$$

最小。

解 先写出哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} \{ [y(t) - y^d(t)]^T Q(t) [y(t) - y^d(t)] + u^T R u \} + \lambda^T [A(t)x + B(t)u + w]$$

由必要条件 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 得到

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$$

写出协状态方程和和协状态的边界条件

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -C^T(t)Q(t)[C(t)x - y^d(t)] - A^T(t)\lambda$$

$$\lambda(t_f) = C^T(t_f)F[C^T(t_f)x(t_f) - y^d(t_f)] = C^T(t_f)FC(t_f)x(t_f) - C^T(t_f)Fy^d(t_f)$$

考虑到构成 $\lambda(t_f)$ 的两项,令

$$\lambda(t) = P(t)x(t) - \xi(t)$$

与解线性二次型问题的步骤类似,该式对 t 求导数再与协状态方程比较得到

$$[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t)]x(t) + [-\dot{\xi} + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\xi(t) - A^T(t)\xi(t) + P(t)w(t) - C^T(t)Q(t)y^d(t)] = 0$$

这一等式对状态空间的任意 x 成立,于是得到:

$P(t)$ 是如下的微分方程的终值问题的解

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t) &= 0 \\ P(t_f) &= C^T(t_f)FC(t_f) \end{aligned}$$

$\xi(t)$ 是如下的微分方程的终值问题的解

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -[A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T \xi(t) + P(t)w(t) - C^T(t)Q(t)y^d(t) \\ \xi(t_f) &= C^T(t_f)Fy^d(t_f) \end{aligned}$$

于是解化为

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x + R^{-1}(t)B^T(t)\xi$$

最优解由两项构成,第一项是调节器部分,它是状态的反馈与要求的输入和干扰无关;第二项是开环补偿部分,它依赖于要求的输入和外部干扰。

对跟踪问题,当 A 、 B 、 Q 、 R 均为常数矩阵, $t_f = \infty$ 时,矩阵 P 也是相应的微分方程的稳态解,这里不再详细讨论。

7.6 带有观测器的最优调节器

对线性调节器问题,状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

目标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

最优控制

$$u = -Kx \quad K = R^{-1}B^T P$$

是状态的反馈,式中 P 为里卡蒂方程的对称正定解。当不是所有状态变量都能用作反馈时,可设计观测器,估计系统的状态。设系统的输出方程为

$$y = Cx$$

那么观测器为:

$$\dot{z} = (A + GC)z + Bu - Gy$$

当系统有外输入 v 时,考虑由反馈 $u = -Kx + v$ 得到的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{z} = (A + GC)z + Bu - Gy \\ u = -Kz + v \end{cases}$$

应用与定理 3-14 同样的方法,可以证明带有观测器的最优调节器的极点是原调节器的闭环极点和观测器的极点。

还可以证明,带有观测器的最优调节器的传递函数阵与不带有观测器的最优调节器的传递函数阵相同,现证明如下。

闭环系统的增广的状态方程与式(3-33)相同,为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A + GC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

经变换

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$

系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵化为:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A + GC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + GC \end{bmatrix} \\ \overline{B} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overline{C} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = [C \quad 0] \end{aligned}$$

由此得到带有观测器的最优调节器的极点集为 $(A + BK)$ 的极点集与 $(A + GC)$ 的极点集的并集。

下面看传递函数阵

$$\begin{aligned} \overline{G}(s) &= \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} sI - (A - BK) & -BK \\ 0 & sI - (A + GC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI - (A - BK))^{-1}B \end{aligned}$$

即带观测器的最优调节器与原最优调节器有相同的传递函数阵。综合以上讨论得到如下结论:

- 1) 带有观测器的最优调节器的极点集合由调节器的极点与观测器的极点构成。
- 2) 带有观测器的最优调节器与不带观测器的最优调节器有相同的传递函数阵,对研究输入输出关系来讲两者是相同的。

7.7 习题

1. 已给状态方程

$$\dot{x} = -x + u$$

和目标函数

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (3x^2 + u^2) dt$$

求 u 使 $J(u)$ 最小。(提示: 解里卡蒂微分方程时令 $P(t) = -\dot{W}(t)/W(t)$)。

2. 已给状态方程

$$\dot{x} = -2x + u$$

和目标函数

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^2 + u^2) dt$$

求 u 使 $J(u)$ 最小。

3. 已给

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_2^2 + 0.1u^2) dt$$

求 u 使 $J(u)$ 最小。

4. 已给

$$\dot{x} = u \quad x(t_0) = x_0$$

$$J(u) = \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt$$

t_f 给定, 求 u 使 $J(u)$ 最小, 并求相应的最优轨线 $x^*(t)$ 。

5. 已给

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + mx_2^2 + nu^2) dt \quad m \geq 0 \quad n > 0$$

(1) 求 u 使 $J(u)$ 最小,

(2) 求最优闭环极点,

(3) 求 m, n 使闭环极点为 $(-2, -2)$,

(4) 当 $m=0$ 时, 求 n 使闭环极点为 $\sqrt{2}(-1 \pm i)$ 。

6. 已给

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad x(0) = x_0$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q x + ru^2] dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad q_1 \geq 0 \quad q_2 \geq 0 \quad q_1 + q_2 \neq 0 \quad r > 0$$

(1) 求 u 使 $J(u)$ 最小,

(2) 求最优闭环极点,

(3) 当 $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, q_1 = 0, q_2 = 1$ 时, 求出最优控制和相应的闭环系统的极点。当 $r = 0.03, r = 0.05, r = 0.1, r = 0.5, r = \infty$ 时, 求出闭环系统的极点, 并据此画出闭环系统的极点随 r 变化的图形。

7. 试导出线性二次型问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + 2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

的最优控制, 并求出相应的目标函数的最小值。

第 8 章 离散时间系统的最优控制

在实际中很多动态系统是离散时间系统,解离散时间最优控制问题可以应用离散的变分法和最大值原理,也可以应用动态规划。本章讲解离散的变分法和最大值原理。

离散时间最优控制问题的状态方程是一个一阶差分方程组,其一般形式为

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad x(k_0) = x_0$$

离散时间最优控制问题是:求最优控制序列 $u(k_0), u(k_0+1), \dots, u(k_f-1)$ 使目标函数

$$J(u) = \theta(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} L(x(k), u(k), k)$$

最小或最大。

8.1 解离散时间无约束最优控制问题的变分法

8.1.1 最简单的离散型变分问题

已给泛函

$$J(x) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f_k = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x(k), x(k+1), k) \quad (8-1)$$

和边界条件

$$x(k_0) = x_0 \quad x(k_f) = x_f$$

最简单的变分问题是:求一个序列 $x(k)$, 使 $x(k_0) = x_0, x(k_f) = x_f$ 并使 $J(x)$ 达到极大或极小值。

假设 $f(x(k), x(k+1), k)$ 关于它的所有变量连续可微, $x(k)$ 是所求序列, 下面将导出 $x(k)$ 满足的必要条件。

在式(8-1)中, 用 $x(k) + \varepsilon \delta x(k)$ 代替 $x(k)$ 得到

$$J(x + \varepsilon \delta x) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x(k) + \varepsilon \delta x(k), x(k+1) + \varepsilon \delta x(k+1), k) \quad (8-2)$$

将 $J(x + \varepsilon \delta x)$ 看作 ε 的函数, 因为 $x(k)$ 使 $J(x)$ 达到极大或极小值, 所以 $J(x + \varepsilon \delta x)$ 在 $\varepsilon = 0$ 达到极大或极小值, 于是

$$\left. \frac{dJ(x + \varepsilon \delta x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

将上式具体化, 得到

$$\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x(k)} \cdot \delta x(k) + \frac{\partial f}{\partial x(k+1)} \cdot \delta x(k+1) \right] = 0 \quad (8-3)$$

在式(8-3)左边第二项中令 $k = m - 1$, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial f}{\partial x(k+1)} \cdot \delta x(k+1) &= \sum_{m=k_0+1}^{k_f} \frac{\partial f(x(m-1), x(m), m-1)}{\partial x(m)} \delta x(m) \\ &= \sum_{m=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial f(x(m-1), x(m), m-1)}{\partial x(m)} \delta x(m) + \left[\frac{\partial f(x(m-1), x(m), m-1)}{\partial x(m)} \delta x(m) \right]_{k_0}^{k_f} \end{aligned}$$

式中 $\left[\cdot \right]_{k_0}^{k_f}$ 表示方括号中的函数在 k_f 的值与在 k_0 的值的差, 在上式中仍用 k 代替 m 作自变量, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial f}{\partial x(k+1)} \delta x(k+1) &= \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \delta x(k) + \\ &\left[\frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \delta x(k) \right]_{k_0}^{k_f} \end{aligned}$$

代入式(8-3)得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right] \delta x(k) \\ + \left[\frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \delta x(k) \right]_{k_0}^{k_f} = 0 \end{aligned} \quad (8-4)$$

由于边界条件 $x(k_0) = x_0$, $x(k_f) = x_f$ 是给定的, 那么 $\delta x(k_0) = 0$, $\delta x(k_f) = 0$ 于是式(8-4)化为

$$\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right] \delta x(k) = 0$$

由推导过程可知, 上式对任意 $\delta x(k_0+1)$, $\delta x(k_0+2)$, ..., $\delta x(k_f-1)$ 都成立, 从而得到

$$\frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 \quad k = k_0+1, k_0+2, \dots, k_f-1 \quad (8-5)$$

式(8-5)称为离散的欧拉方程。

若 $x(k)$ 是上述最简单变分问题的解, 则 $x(k)$ 满足的必要条件是:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & (k = k_0+1, \dots, k_f-1) \\ x(k_0) = x_0 & x(k_f) = x_f \end{cases} \quad (8-6)$$

8.1.2 自由端点问题

如果在上面讨论的变分问题中, k_f 给定, 但 $x(k_f)$ 是自由的, 我们称这一变分问题是自由端点问题。

当一个自由端点问题的解已经求出时, 它的端点的值就确定了, 所以它也应该是一个确定的两端固定问题的解, 因此欧拉方程应仍然满足。不难看出, 此时式(8-4)化为

$$\left[\frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \delta x(k) \right]_{k=k_f} = 0$$

由于 $x(k_f)$ 是自由的, 所以 $\delta x(k)$ 是任意的, 于是由上式得到

$$\left. \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right|_{k=k_f} = 0$$

那么自由端点问题的必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k_f - 1 \\ x(k_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right|_{k=k_f} = 0 \end{cases} \quad (8-7)$$

8.1.3 推广到一般形式的变分问题

在控制问题中需要考虑如下形式的更一般的泛函极值问题, 即对泛函

$$J(x) = \theta(x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x(k), x(k+1), k) \quad (8-8)$$

求 $x(k)$, 使 $J(x)$ 取极大值(或极小值)。该问题中, $x(k_0) = x_0$ 和 k_f 是给定的, $x(k_f)$ 是自由的, $\theta(x(k_f), k_f)$ 是它的所有变量的连续可微函数。

设 $x(k)$ 是这一变分问题的解, 以 $x(k) + \varepsilon \delta x(k)$ 代入式(8-8)得到

$$J(x + \varepsilon \delta x) = \theta(x(k_f) + \varepsilon \delta x(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x(k) + \varepsilon \delta x(k), x(k+1) + \varepsilon \delta x(k+1), k)$$

$J(x + \varepsilon \delta x)$ 应在 $\varepsilon = 0$ 达到极大(或极小)值。于是有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)} \delta x(k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} \delta x(k) \right. \\ & \left. + \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k+1)} \delta x(k+1) \right] = 0 \end{aligned}$$

对上式左边最后一项作类似于在式(8-3)左边第二项中的变量代换, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)} \delta x(k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \left[\frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right] \delta x(k) \\ & + \left[\frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \delta x(k) \right]_{k_0}^{k_f} = 0 \end{aligned}$$

同样可论述, 一旦 $x(k)$ 已求出, 那么它必须仍是一个最简单的变分的极值问题的解, 因为这时 $x(k_f)$ 也固定了, θ 项是一个固定的数, 也可不考虑。因而欧拉方程仍应满足, 于是导出 $x(k)$ 应满足的必要条件是:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \\ x(k_0) = x_0 \\ \left. \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right|_{k=k_f} = - \frac{\partial \theta(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)} \end{cases} \quad (8-9)$$

如果令 $\theta(x(k_f), k_f) = f(x(k_f), x(k_f+1), k_f)$ 将目标泛函改写为

$$J(x) = \sum_{k=k_0}^{k_f} f(x(k), x(k+1), k)$$

则必要条件(8-9)也可以直接由式(8-7)得到。

8.1.4 推广到多变量问题

前面导出的所有结果都可以容易地推广到多变量的情况。设 $x(k)$ 是 n 维列矢量, 考虑泛函

$$J(x) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x(k), x(k+1), k) \quad (8-10)$$

和边界条件

$$x(k_0) = x_0 \quad x(k_f) = x_f$$

若 $x(k)$ 满足上述边界条件, 并使 $J(x)$ 达极大(或极小)值, 那么

$$J(x_1 + \epsilon_1 \delta x_1, \dots, x_n + \epsilon_n \delta x_n) = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} f(x_1(k) + \epsilon_1 \delta x_1(k), \dots, x_n(k) + \epsilon_n \delta x_n(k), x_1(k+1) + \epsilon_1 \delta x_1(k+1), \dots, x_n(k+1) + \epsilon_n \delta x_n(k+1), k)$$

看作 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 的函数, 应在 $\epsilon_1 = 0, \dots, \epsilon_n = 0$ 达到极大(或极小)值, 其中 $x_i(k)$ 是 $x(k)$ 的第 i 个分量。根据多元函数极值的必要条件得到

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} \\ \dots \\ \frac{\partial J}{\partial \epsilon_n} \end{bmatrix}_{\epsilon=0} = 0 \quad \epsilon = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]^T$$

由此可导出与式(8-6)类似的必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \\ x(k_0) = x_0 \quad x(k_f) = x_f \end{cases} \quad (8-11)$$

式(8-11)中应用了梯度矢量

$$\frac{\partial f}{\partial x(k)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1(k)}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n(k)} \right]^T$$

经过类似地说明, 对于多变量的情况, 自由端点问题的必要条件(8-7)相应地化为

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \\ x(k_0) = x_0 \quad \left. \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right|_{k=k_f} = 0 \end{cases} \quad (8-12)$$

一般形式的变分问题的必要条件(8-9)化为

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x(k), x(k+1), k)}{\partial x(k)} + \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} = 0 & k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \\ x(k_0) = x_0 \quad \left. \frac{\partial f(x(k-1), x(k), k-1)}{\partial x(k)} \right|_{k=k_f} = - \frac{\partial \theta(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)} \end{cases} \quad (8-13)$$

8.1.5 解离散无约束最优控制问题的变分法

设离散控制系统的状态方程为

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad x(k_0) = x_0$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_f - 1,$$

初始状态为

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

目标函数为

$$J(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k})$$

式中 $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}), L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}), \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f)$ 都是其所有变量的连续可微函数。无约束最优控制问题是求最优控制序列 $\mathbf{u}(k_0), \mathbf{u}(k_0 + 1), \dots, \mathbf{u}(k_f - 1)$, 使 $J(\mathbf{u})$ 达到极大(或极小)值。这里 $\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)$ 分别是 n 维状态矢量和 m 维控制矢量。

引进拉格朗日乘子, 考虑泛函

$$J(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} [L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1)(f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) - \mathbf{x}(k+1))]$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}(k)$ 是 n 维矢量。令

$$\bar{H}_k = L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1)[f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) - \mathbf{x}(k+1)]$$

利用式(8-13)的结果, 不难得到这一最优控制问题的解满足的必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \mathbf{x}(k)} + \frac{\partial \bar{H}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}(k)} = 0 \\ \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \boldsymbol{\lambda}(k)} + \frac{\partial \bar{H}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{\lambda}(k)} = 0 \\ \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \mathbf{u}(k)} + \frac{\partial \bar{H}_{k-1}}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \\ \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \quad \left. \frac{\partial \bar{H}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{k=k_f} = - \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) \\ \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \\ \mathbf{x}(K_0) = \mathbf{x}_0 \quad \boldsymbol{\lambda}(k_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} \end{cases} \quad (8-14)$$

令

$$H_k = H(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) = L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1)f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) \quad (8-15)$$

上面的必要条件又可以改写为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{k}) & \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(k) = \frac{\partial H(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\lambda}(k+1), \mathbf{u}(k), \mathbf{k})}{\partial \mathbf{x}(k)} & \boldsymbol{\lambda}(k_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(k_f), \mathbf{k}_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} \end{cases} \quad (8-16)$$

$$\frac{\partial H(x(k), \lambda(k+1), u(k), k)}{\partial u(k)} = 0 \quad k = k_0 + 1, \dots, k_f - 1 \quad (8-17)$$

函数 $H(x(k), \lambda(k+1), u(k), k)$ 称为哈密顿函数。式(8-16)的第二个方程称为协状态方程。式(8-16)是包含 $2n$ 个未知函数的差分方程组,它带有 n 个初值条件, n 个边值条件,称为差分方程组的两点边值问题。

根据必要条件(8-16)、(8-17),无约束最优控制问题的求解步骤如下:

第1步 写出哈密顿函数

$$H(x(k), \lambda(k+1), u(k), k) = L(x(k), u(k), k) + \lambda^T(k+1)f(x(k), u(k), k)$$

并由
$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = 0$$

导出 $u = u(x(k), \lambda(k))$ 。

第2步 将上一步得到的 $u = u(x(k), \lambda(k))$ 代入式(8-16),解这个两点边值问题得到 $x(k), \lambda(k)$ 。

第3步 将上一步得到的 $x(k), \lambda(k)$ 代入 $u = u(x(k), \lambda(k))$ 中,则得最优控制 $u = u(k)$ 。

注1:上面得到的条件(8-16)、(8-17)是 $u = u(k)$ 作为最优控制所满足的必要条件。因此从理论上并不保证按上述步骤算出的 $u = u(k)$ 一定是最优控制。但是,如果从具体问题知道所提出的最优控制问题一定有解,而且按上述步骤求出的最优控制 $u = u(k)$ 又只有一个,那么它就一定是所求的最优控制。

注2:如果 $x(k_f)$ 也是固定的,则在式(8-16)中的边界条件

$$\lambda(k_f) = \frac{\partial \theta(x(k_f), k_f)}{\partial x(k_f)}$$

应代之以 $x(k_f) = x_f$,其他条件不变。

【例 8-1】 已给离散系统

$$x(k+1) = x(k) + au(k) \quad x(0) = 1$$

a 是已知常数,求 $u(k), k = 0, 1, \dots, 9$,使得 $x(10) = 0$ 并使

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 u^2(k)$$

最小。这里 $x(k), u(k)$ 都是标量。

第1步 写出哈密顿函数

$$H(x(k), \lambda(k+1), u(k)) = \frac{1}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + au(k)]$$

由
$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = u(k) + a\lambda(k+1) = 0$$

得到
$$u(k) = -a\lambda(k+1)$$

第2步 由式(8-16)所确定的两点边值问题为

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + au(k) & x(0) = 1 \\ \lambda(k) = \lambda(k+1) & x(10) = 0 \end{cases}$$

式中 $\lambda(k)$ 的边界条件已由 x 的边值代替。以 $u(k) = -a\lambda(k+1)$ 代入得到

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) - \alpha^2 \lambda(k+1) & x(0) = 1 \\ \lambda(k) = \lambda(k+1) & x(10) = 0 \end{cases}$$

由协状态方程得到 $\lambda(k) = \text{常数}$, 设 $\lambda(k) = c$ 则状态方程化为

$$x(k+1) = x(k) - \alpha^2 c$$

于是有

$$x(1) = x(0) - \alpha^2 c$$

$$x(2) = x(1) - \alpha^2 c = x(0) - 2\alpha^2 c$$

...

$$x(10) = x(0) - 10\alpha^2 c$$

由条件 $x(0) = 1$ 和 $x(10) = 0$ 得到 $c = 1/10\alpha^2$, 因此, 最优控制为

$$u^*(k) = -1/10\alpha \quad k = 1, 2, \dots, 9$$

【例 8-2】 系统的状态方程同例 8-1:

$$x(k+1) = x(k) + \alpha u(k) \quad x(0) = x_0$$

求 $u(0), u(1)$ 使

$$J = \frac{1}{2} S x^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 \alpha u^2(k)$$

最小, α, S 是已知常数。

第 1 步 写出哈密顿函数

$$H = \frac{\alpha}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + \alpha u(k)]$$

由

$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = \alpha u(k) + \alpha \lambda(k+1) = 0$$

得到 $u(k) = -\lambda(k+1)$ 。

第 2 步 写出两点边值问题:

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + \alpha u(k) & x(0) = x_0 \\ \lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x(k)} = \lambda(k+1) & \lambda(2) = Sx(2) \end{cases}$$

那么

$$\lambda(k) = c (\text{常数}) \quad u(k) = -c$$

于是

$$x(2) = x(1) + \alpha u(1) = x(0) + \alpha u(0) + \alpha u(1) = x(0) - 2c\alpha$$

再由 $\lambda(2) = Sx(2)$, 得到 $c = (x(0) - 2c\alpha)S$, 从而解得

$$c = \frac{Sx(0)}{1 + 2\alpha S}$$

将 c 代入前面的解式, 得到最优控制

$$u^*(0) = u^*(1) = -\frac{S}{1 + 2\alpha S} x_0$$

8.2 离散的最大值原理

最大值原理是解连续时间最优控制问题的非常有效的方法, 离散的最大值原理可以看作是它在离散时间系统的推广。严格地说, 应用离散的最大值原理需要考虑系统的凸性条件, 这

里不严格叙述这些条件,只着重介绍如何应用最大值原理,求出满足必要条件的控制策略。

设离散时间系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \quad (8-18)$$

目标函数为

$$J = \theta(\mathbf{x}(k_f), k_f) + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (8-19)$$

控制 $\mathbf{u}(k)$ 满足约束条件

$$\mathbf{u}(k) \in U \quad (8-20)$$

U 是 R^m 中的一个已给的集合,求 $\mathbf{u}(k_0), \mathbf{u}(k_0+1), \dots, \mathbf{u}(k_f-1)$ 使满足约束 $\mathbf{u}(k) \in U$ 并使 J 最小(最大)。

对有约束的离散时间最优控制问题,有如下定理(参见文献[22])。

定理 8-1(离散的最大值原理) 假设在式(8-18)、(8-19)和(8-20)中,对 $k_0, \dots, k_f-1, L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$ 连续可微,对 $k_f, \theta(\mathbf{x}(k_f), k_f)$ 连续可微,对 k_0, \dots, k_f-1 和 $\mathbf{u} \in U, \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$ 连续可微,集合 $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k) | \mathbf{u} \in U\}$ 对 $k = k_0, \dots, k_f-1$ 和 $\mathbf{u}(k) \in U$ 是凸的。那么使 J 最小的最优控制 $\mathbf{u}(k_0), \mathbf{u}(k_0+1), \dots, \mathbf{u}(k_f-1)$ 满足如下的必要条件:存在协状态向量 $\lambda(k)$ 它和 $\mathbf{x}(k)$ 一起满足正则方程组

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) & \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \\ \lambda(k) = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}(k)} & \lambda(k_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} \end{cases} \quad (8-21)$$

对所有的 k_0, \dots, k_f-1 满足

$$H_k(\mathbf{x}^*(k), \lambda^*(k+1), \mathbf{u}^*(k), k) = \min_{\mathbf{u} \in U} H_k(\mathbf{x}^*(k), \lambda^*(k+1), \mathbf{u}(k), k) \quad (8-22)$$

式中 H_k 由式(8-15)给出。

注 1:式(8-21)中的协状态方程与连续时间系统的协状态方程差一个符号。利用差分符号,如果状态方程为

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

式中 $\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$, 目标函数的形式不变,那么正则方程应改为

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) & \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \\ \Delta \lambda(k) = -\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}(k)} & \lambda(k_f) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}(k_f), k_f)}{\partial \mathbf{x}(k_f)} \end{cases} \quad (8-23)$$

这样形式上就与连续时间的最大值原理一致了,下面推导这个结论。事实上只要将状态方程改写为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \mathbf{x}(k)$$

应用定理 8-1 的结果就可以导出上面的正则方程。因为这时相应的哈密顿函数为

$$\bar{H}_k = L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \lambda^T(k+1)[\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) + \mathbf{x}(k)]$$

由此导出协状态方程化为

$$\lambda(k) = \frac{\partial \bar{H}_k}{\partial \mathbf{x}(k)} = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}(k)} + \lambda(k+1)$$

即

$$\lambda(k+1) - \lambda(k) = -\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}(k)}$$

或

$$\Delta \lambda(k) = -\frac{\partial H_k}{\partial x(k)}$$

注 2 如果问题是求 u 使 $J(u)$ 最大, 则定理 8-1 中的式(8-22)应用下式代替:

$$H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u^*(k), k) = \max_{u \in U} H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u(k), k) \quad (8-24)$$

其他条件不变。

【例 8-3】 设离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = 1.3x(k) - 0.3u(k) \quad x(0) = 5$$

求 $u(k)$ 使 $0.5 \leq u(k) \leq 1$ 并使目标函数

$$J = \sum_{k=0}^3 0.25[x(k) + u(k)]$$

最小。

解 该问题的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H_k &= 0.25[x(k) + u(k)] + \lambda(k+1)[1.3x(k) - 0.3u(k)] \\ &= 0.25x(k) + 1.3\lambda(k+1)x(k) + [0.25 - 0.3\lambda(k+1)]u(k) \end{aligned}$$

由最大值原理, $u^*(k)$ 应在约束条件 $0.5 \leq u(k) \leq 1$ 之下使 H_k 达最小值, 于是

$$u^*(k) = \begin{cases} 0.5 & \text{当 } 0.25 - 0.3\lambda(k+1) > 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } 0.25 - 0.3\lambda(k+1) < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

协状态方程为

$$\lambda(k) = 0.25 + 1.3\lambda(k+1)$$

边界条件是 $\lambda(4) = 0$ 。由此可逐次解出: $\lambda(3) = 0.25$, $\lambda(2) = 0.575$, $\lambda(1) = 0.9975$ 。由于 $0.25 - 0.3\lambda(1) < 0$, $0.25 - 0.3\lambda(2) > 0$, $0.25 - 0.3\lambda(3) > 0$, $0.25 - 0.3\lambda(4) > 0$, 得到最优控制序列为 $u^*(0) = 1$, $u^*(1) = 0.5$, $u^*(2) = 0.5$, $u^*(3) = 0.5$ 。

【例 8-4】 设有若干台同样的机器, 每台机器可以做两种工作, 如果用于做第一种工作, 每年每台可获利润 3 万元, 机器的损坏率为 $2/3$; 如果用于做第二种工作, 每年每台可获利润 2.5 万元, 机器的损坏率为 $1/3$ 。现考虑三年的生产周期, 问如何安排生产计划可获得最大利润。

解 设第 k 年可用机器的台数为 $x(k)$, 第 k 年分配做第一种工作的机器为 $u(k)$ 台, 显然 $u(k)$ 满足不等式 $0 \leq u(k) \leq x(k)$, 这是约束条件。描述这个系统的状态方程是:

$$x(k+1) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{2}{3}[x(k) - u(k)]$$

经整理化为

$$x(k+1) = \frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k)$$

目标函数为

$$J = \sum_{k=0}^2 [3u(k) + 2.5(x(k) - u(k))] = \sum_{k=0}^2 [2.5x(k) + 0.5u(k)]$$

问题是求 $u^*(0)$, $u^*(1)$, $u^*(2)$ 使满足约束条件 $0 \leq u(k) \leq x(k)$, 并使 J 最大。

该问题的哈密顿函数为

$$H_k = 2.5x(k) + 0.5u(k) + \lambda(k+1) \left[\frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k) \right]$$

$$= 2.5x(k) + \frac{2}{3}\lambda(k+1)x(k) + \left[0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1)\right]u(k)$$

由必要条件(8-24)

$$u^* = \begin{cases} x(k) & \text{当 } 0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } 0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

协状态方程和边界条件为

$$\lambda(k) = 2.5 + \frac{2}{3}\lambda(k+1) \quad \lambda(3) = 0$$

由此可解出 $\lambda(2) = 2.5$, $\lambda(1) = \frac{12.5}{3}$, 因此有

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(1) < 0 \quad u^*(0) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(2) < 0 \quad u^*(1) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(3) > 0 \quad u^*(2) = x(2)$$

由此得到最优生产计划为:前两年用全部机器做第二种工作,第三年将全部剩下的机器做第一种工作,这样获总利润最多。

8.3 离散的线性二次型问题

8.3.1 离散的线性二次型问题的解

设系统的状态方程是线性的:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad x(0) = x_0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8-25)$$

目标函数是状态变量和控制变量的二次型:

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Fx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)] \quad (8-26)$$

矩阵 $F, Q(k)$ 是对称半正定矩阵, $R(k)$ 是对称正定矩阵。离散的线性二次型问题是求最优控制序列 $u(k)$ 使 J 最小。

下面导出线性二次型问题的解式。首先写出该问题的哈密顿函数

$$H_k = \frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k) + \frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k) + \lambda^T(k+1)[A(k)x(k) + B(k)u(k)]$$

由必要条件

$$\frac{\partial H_k}{\partial u(k)} = 0$$

得到

$$R(k)u(k) + B^T(k)\lambda(k+1) = 0$$

由于 $R(k)$ 是正定矩阵,由上式可解出

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)$$

协状态方程及其边界条件为

$$\lambda(k) = Q(k)x(k) + A^T(k)\lambda(k+1) \quad \lambda(N) = Fx(N)$$

与解连续时间线性二次型问题一样,设

$$\lambda(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k)$$

代入状态方程和协状态方程得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ \lambda(k) &= \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \end{aligned} \quad (8-27)$$

由此可解出

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{I} + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$$

代入式(8-27)得到

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)$$

由于上式对状态方程的任意解 $\mathbf{x}(k)$ 成立, 所以有

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k)\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1}\mathbf{A}(k) \quad (8-28)$$

由边界条件 $\lambda(N) = \mathbf{F}\mathbf{x}(N)$ 又得到 $\mathbf{P}(k)$ 满足的边界条件

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{F} \quad (8-29)$$

由于

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{I} + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)]^{-1} \\ &= \{[\mathbf{I} + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)]\mathbf{P}^{-1}(k+1)\}^{-1} \\ &= [\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)]^{-1} \end{aligned}$$

式(8-28)化为

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k)[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)]^{-1}\mathbf{A}(k) \quad (8-30)$$

称为里卡蒂差分方程。

由以上讨论得到最优控制

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\lambda(k+1) = -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)] \end{aligned}$$

由此式可解出

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}(k)]^{-1}\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \quad (8-31)$$

或者

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= -\{\mathbf{R}(k)[\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}(k)]\}^{-1}\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \\ &= -[\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}(k)]^{-1}\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (8-32)$$

利用求逆公式(见[19]或[3]附录3)

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}$$

令

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{R}(k) \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{B}^T(k) \quad \mathbf{A}_{22} = -\mathbf{P}^{-1}(k+1) \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{B}(k)$$

得到

$$\begin{aligned} &-\{\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}(k)\}^{-1}\mathbf{B}^T(k)\mathbf{P}(k+1) \\ &= -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)]^{-1} \end{aligned}$$

解式(8-32)又可以改写为

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)]^{-1}\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) \quad (8-33)$$

还可以利用求逆公式(见[3]附录3)

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}$$

令 $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{P}^{-1}(k+1)$, $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{B}(k)$, $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{B}^T(k)$, $\mathbf{A}_{22} = -\mathbf{R}(k)$ 得到

$$[P^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1} \\ = P(k+1) - P(k+1)B(k)[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)P(k+1)$$

应用这一等式可将式(8-30)改写为

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)A(k) - A^T(k)P(k+1)B(k) \\ [R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)P(k+1)A(k) \quad (8-34)$$

利用式(8-32)和式(8-34)求最优解比较方便,为了节省计算量,对这两式中常用到的量引进如下记号:

$$Z_1(k) = Q(N-k) + A^T(N-k)P(N-k+1)A(N-k) \quad (8-35)$$

$$Z_2(k) = B^T(N-k)P(N-k+1)A(N-k) \quad (8-36)$$

$$Z_3(k) = R(N-k) + B^T(N-k)P(N-k+1)B(N-k) \quad (8-37)$$

最优控制的计算步骤:

第1步 令 $P(N) = F$

第2步 对 $k=1$ 计算 $Z_1(k)$, $Z_2(k)$, $Z_3(k)$

第3步 计算 $K(N-k) = -Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$

第4步 计算 $P(N-k) = Z_1(k) - Z_2^T(k)Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$

第5步 对 $k=2, \dots, N$ 重复第2至第4步

第6步 $u^*(k) = K(k)x(k)$ 即所求

【例 8-5】 设系统的状态方程为

$$x(k+1) = a(k)x(k) + b(k)u(k)$$

初始状态为 $x(0) = 2$ 求 $u(k)$ 使

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 [q(k)x^2(k) + r(k)u^2(k)] + \frac{1}{8}x^2(3)$$

最小, 式中

$$a(0) = \frac{1}{2} \quad b(0) = \frac{1}{6} \quad q(0) = 0 \quad r(0) = 1$$

$$a(1) = 3 \quad b(1) = \frac{1}{2} \quad q(1) = 12 \quad r(1) = 2$$

$$a(2) = 4 \quad b(2) = 2 \quad q(2) = 2 \quad r(2) = 1$$

解 按上述求解步骤

第1步 令 $P(3) = \frac{1}{4}$

第2步 对 $k=1$

$$Z_1(1) = q(2) + a^2(2)P(3) = 6 \quad Z_2(1) = b(2)P(3)a(2) = 2$$

$$Z_3(1) = r(2) + b^2(2)P(3) = 2$$

第3步 计算

$$K(2) = -Z_3^{-1}(1)Z_2(1) = -1$$

第4步 计算

$$P(2) = Z_1(1) - Z_2^T(1)Z_3^{-1}(1)Z_2(1) = 4$$

第5步 对 $K=2, 3$ 重复第2~4步, 得到

$$K(1) = -2 \quad K(0) = -\frac{3}{2}$$

第6步 所求最优控制为

$$u^*(0) = -\frac{3}{2}x(0) \quad u^*(1) = -2x(1) \quad u^*(2) = -x(2)$$

以上是按必要条件求出最优控制 u^* 。下面的定理保证我们求出的解 u^* 一定是线性二次型问题的最优控制。

定理 8-2 控制矢量

$$u(k) = -[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

是线性二次型问题的解, 并且 J 的最小值为

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0)$$

式中 $P(k)$ 是式(8-34)的解。

定理的证明类似于定理 7.1 的证明, 这里略去, 读者可参看文献[3]。

与连续的线性二次型问题类似, 当 $A(k), B(k), Q(k), R(k)$ 都是常阵, Q, R 正定, (A, B) 能控, 并且 $N = \infty$ 时, 得到非时变控制器

$$u^*(k) = -[R + B^T P B]^{-1} B^T P A x(k) \quad (8-38)$$

式中 P 是代数里卡蒂方程

$$P = Q + A^T P A - A^T P B [R + B^T P B]^{-1} B^T P A \quad (8-39)$$

的解。

应用控制(8-38)时得到的闭环系统是渐进稳定的。

以上结论不再一一推证, 读者可参看文献[3]。

式(8-39)是一个非线性代数方程组, 可用解非线性代数方程组的数值方法求解, 但有时会遇到选初值的麻烦。下面介绍一种递推算法(参见文献[23])。

首先取任意一个对称正定矩阵 P_0 , 例如取 $P_0 = I$ 。以 $P(k+1) = P_0$ 代入式

$$P(k) = Q + A^T P(k+1)A - A^T P(k+1)B [R + B^T P(k+1)B]^{-1} B^T P(k+1)A \quad (8-40)$$

算出 $P(k) = P_1$, 然后再令 $P(k+1) = P_1$, 代入(8-40), 计算 $P(k)$ 得到 $P(k) = P_2, \dots$, 这样继续迭代, 直到 $P(k+1) = P(k)$ (在一定的精度要求范围内), 这时得到的 $P(k)$ 就可以作为代数里卡蒂方程的解。

当 $Q = C^T C$ (C, A) 能观测时, 以上结果仍成立。

【例 8-6】 已给定常线性系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

求 u 使

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + u^2(k) \right]$$

最小。

解 取 $P_0 = I$, 由式(8-40)算出

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0833 & 1.3166 \\ 1.3166 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

继续迭代可得到(P_2, P_3 的计算结果略)

$$P_4 = P_5 = \begin{bmatrix} 2.2402 & 0.7900 \\ 0.7900 & 0.5159 \end{bmatrix}$$

将它取为 P ,代入解式(8-38)得到最优控制 :

$$u^*(k) = [-0.5694 \quad -0.4514]x(k)$$

文献[30]中给出了求离散的里卡蒂方程的特征值、特征向量法,该方法类似于第七章中介绍的解代数里卡蒂方程的哈密顿矩阵法。

8.3.2 解离散的线性二次型问题的 MATLAB 程序

设计离散时间非时变控制器的 MATLAB 函数是 `dlqr` ,调用格式为

$$[K, P, E] = dlqr(A, B, Q, R)$$

对例 8-6 应用该函数得到

$$K = [0.5694 \quad 0.4514] \quad P = \begin{bmatrix} 2.2402 & 0.7900 \\ 0.7900 & 0.5159 \end{bmatrix} \quad E = 0.0139 \pm 0.2427i$$

与例 8-6 的结果相同。

解变系数离散线性二次型问题例 8-5 的 MATLAB 程序 :

```
A=[0.5 3 4];
```

```
B=[1/6 0.5 2];
```

```
Q=[0 12 2];
```

```
R=[1 2 1];
```

```
F=0.25;
```

```
N=3;
```

```
P(N+1)=F;
```

```
for k=1:N
```

```
    Z1(k)=Q(N-k+1)+A(N-k+1)'*P(N-k+2)*A(N-k+1);
```

```
    Z2(k)=B(N-k+1)'*P(N-k+2)*A(N-k+1);
```

```
    Z3(k)=R(N-k+1)+B(N-k+1)'*P(N-k+2)*B(N-k+1);
```

```
    K(N-k+1)=-inv(Z3(k))*Z2(k);
```

```
    P(N-k+1)=Z1(k)-Z2(k)'*inv(Z3(k))*Z2(k);
```

```
end
```

运行结果 :

```
K =
```

```
-1.5000 -2.0000 -1.0000
```

8.4 习题

1. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k), \quad x(0) = 1,$$

求 $u(0), u(1)$ 使 $x(2) = 0$ 并使

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k)$$

最小。

2. 已给系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) + u^2(k)]$$

求 $u(k), k=0, 1, 2, 3$ 使 $J(u)$ 最小。

3. 已给状态方程

$$x(k+1) = 0.5x(k) + 0.3u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2), u(3)$ 使满足 $0 \leq u(k) \leq x(k)$ 并使

$$J(u) = \sum_{k=0}^3 [3x(k) - u(k)]$$

最小。

4. 设系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

目标函数为

$$J = \sum_{k=0}^{k_f-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) \mathbf{S} \mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)]$$

试证明, 当 \mathbf{R} 正定时, 经变换 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{M}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{R}^{-1}$, 可化为

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}(k)$$

$$J = \sum_{k=0}^{k_f-1} [\tilde{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k) \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}(k)]$$

第 9 章 动态规划

9.1 动态规划的基本思想

前面已经讲了解最优控制问题的变分法和最大值原理,动态规划是用来解最优控制问题的另一种方法。在本世纪 50 年代,贝尔曼在研究多阶决策问题时提出了动态规划法。离散系统的最优控制问题可以看做一个多阶决策问题,因此可用动态规划求解。由于动态规划的主导思想简单,可以方便地将一个复杂的多阶决策问题化为一系列的一阶决策问题,使问题得到简化,可以顺序求解,因而它已成为解多阶决策问题的一种有效方法。动态规划已被广泛应用于解很多技术领域的动态最优化问题,如生产管理问题,经济决策问题,资源分配问题,设备更新问题,多级工艺设备的优化设计问题和工程控制问题等。动态规划还可以方便地应用于随机最优控制问题,这方面的情况将在第十章中介绍。

9.1.1 多阶决策问题

为了直观地说明动态规划的基本思想,先解一个最优途径问题,然后再介绍动态规划的基本原理。

1. 最优途径问题

最优途径问题可以看做是多阶决策过程的一个例子,通过它可以了解利用动态规划解多阶决策问题的基本思想。

考虑如图 9-1 的最优途径问题。设汽车需由 S 点出发到终点 F , P_i 和 Q_i 是一些可以通过的点。两点之间标出的数字是汽车走过这一段路程所需的时间(小时)。最优途径问题是确定一种走法,使汽车由 S 到 F 所用时间最短。

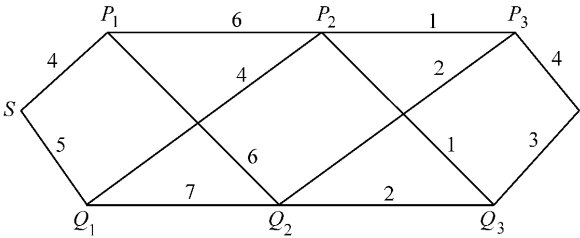


图 9-1 最优途径问题

对于最优途径,存在一个非常明显的原理,即最优途径的一部分也是最优途径。换句话说,如果 $SQ_1P_2Q_3F$ 是所求的最优途径,那么汽车从这一途径上任一点,例如 P_2 ,出发到 F 的最优途径必为 P_2Q_3F 。这一原理称为最优性原理。根据这一原理,我们可以由后向前递推求解最优途径问题。

如果汽车已到 Q_3 ,由 Q_3 直接到 F 用 3 小时;如果汽车已到 P_3 ,由 P_3 直接到 F 用 4 小时,这两个数字分别标在图 9-2 中 Q_3 、 P_3 旁边的方括号内。再向前推一步,如果汽车已到 Q_2 点,从 Q_2 到 F 有两种走法,经 P_3 需 $2+4=6$ 小时,经 Q_3 需 $2+3=5$ 小时。这样从 Q_2 出发经 Q_3 到 F 所需时间最短,需 5 小时。我们将 5 记在 Q_2 旁边的方括号内, Q_3 记在方括号的右下角。类似地可算出汽车分别从 P_2 、 Q_1 、 P_1 、 S 出发到 F 所需的最短时间及途径,每算一个点只需做两次加法。将从每一点出发到达 F 所需的最短时间,记在方括号内,并通过下标表明走向,见图 9-2。

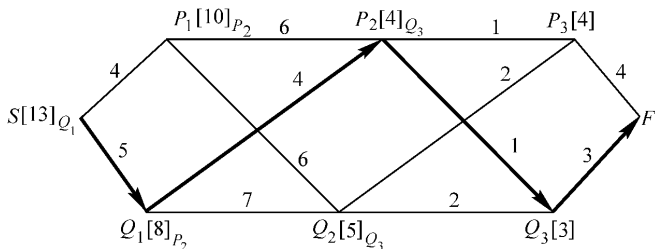


图 9-2 最优途径

从图 9-2 可以得到汽车从任何一点出发到达 F 点需时最短的路径,以及相对应的最短时间。可以看出,汽车从 S 点出发时,最快达到 F 的途径是 $SQ_1P_2Q_3F$,需 13 小时。按照前面的方法(建立在最优性原理上)构造图 9-2 共需要做 10 次加法运算,如果将所有可能的途径一一列出,计算每种途径所需要的时间,然后再选出需要时间最短的途径,这样共需做 24 次加法。由后向前递推的方法节省了大量运算,当汽车可经过的点增多时节省的运算次数会更加明显。

最优途径问题可以看做是一个多阶段决策问题,由 S 到 P_1 或 Q_1 做为第一阶段,由 P_1, Q_1 到 P_2, Q_2 做为第二阶段,由 P_2, Q_2 到 P_3, Q_3 做为第三阶段,由 P_3, Q_3 到 F 做为第四阶段。上面的求最优途径的方法,是把一个四阶段的最优决策问题,化成四个互相嵌套的子问题求解,从而使问题得到简化,这种方法叫动态规划法。

2. 多阶段决策问题的一般提法

设系统的状态方程为

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

目标函数为

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k), k)$$

J_N 表示控制 N 步时的目标函数。

多阶段决策问题就是求最优控制策略序列 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ 使 J_N 最小(或最大)。显然在这里多阶段决策问题也就是一个 N 步最优控制问题。

为了简化讨论,不妨假设状态方程中的 f 和目标函数 L 都不明显地依赖于时间变量 k , x 和 u 都是标量,这时的状态方程为

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (9-1)$$

目标函数为

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k)) \quad (9-2)$$

假设初始状态 $x(0) = x_0$ 是给定的,对目标函数式(9-2)逐次应用式(9-1),可以得到

$$\begin{aligned} J_N &= L(x(0), u(0)) + L(x(1), u(1)) + \dots + L(x(N-1), u(N-1)) \\ &= L(x(0), u(0)) + L(f(x(0), u(0)), u(1)) + \dots \\ &\quad + L(f(f(\dots(f(x(0), u(0)), u(1)), \dots, u(N-2)), u(N-1)) \end{aligned}$$

上式表明 J_N 只依赖于 $x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ 这样可记为

$$J_N = J_N(x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1))$$

如果已用某种方法求出最优策略 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$, 那么 J_N 的最小值只依赖于初始值 $x(0)$, 把这个最小值记为 $J_N^*(x(0))$, 于是

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u(0), \dots, u(N-1)} J_N(x(0), u(0), \dots, u(N-1))$$

初始状态 $x(0)$ 是可以变化的, 用 $J_N^*(x)$ 表示初始条件为 x , 控制步数为 N 的目标函数的最小值。在解多阶决策问题之前, 先导出最优性原理。

9.1.2 最优性原理

在最优途径问题中所讲的最优性原理, 对一般多阶决策问题也是成立的。简单地说, 最优性原理就是“最优策略序列的任何一部分也构成一个最优策略序列。”具体地说有如下定理。

定理 9-1(最优性定理) 如果 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 是最优策略序列, 那么 $u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)$ 也是一个最优控制策略序列, 其初始状态是

$$x(k) = f(x^*(k-1), u^*(k-1)) \quad k \geq 1$$

证明 用反证法, 设 $u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)$ 不是最优策略序列, 而 $v^*(k), v^*(k+1), \dots, v^*(N-1)$ 是最优策略序列, 那么

$$J_{N-k}(x(k), u^*(k), \dots, u^*(N-1)) > J_{N-k}(x(k), v^*(k), \dots, v^*(N-1))$$

对 N 阶过程应用策略序列 $u^*(0), \dots, u^*(k-1), v^*(k), \dots, v^*(N-1)$ 则有

$$\begin{aligned} & J_N(x(0), u^*(0), \dots, u^*(k-1), v^*(k), \dots, v^*(N-1)) \\ &= J_k(x(0), u^*(0), \dots, u^*(k-1)) + J_{N-k}(x(k), v^*(k), \dots, v^*(N-1)) \\ &< J_k(x(0), u^*(0), \dots, u^*(k-1)) + J_{N-k}(x(k), u^*(k), \dots, u^*(N-1)) \\ &= J_N(x(0), u^*(0), \dots, u^*(N-1)) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & J_N(x(0), u^*(0), \dots, u^*(k-1), v^*(k), \dots, v^*(N-1)) \\ &< J_N(x(0), u^*(0), \dots, u^*(N-1)) \end{aligned}$$

这与 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 是最优策略序列矛盾, 证毕。

9.2 动态规划的基本方程

9.2.1 动态规划基本方程的推导

动态规划的基本方程给出了 N 阶决策问题的目标函数的最优值与它的子问题(一个 $N-1$ 阶决策问题)的目标函数的最优值之间的递推关系。它是应用动态规划解多阶决策问题(N 步最优控制问题)的基础。

设 $u^*(0)$ 已求出, 那么求 $u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 的问题构成一个初始条件为

$$x(1) = f(x(0), u(0))$$

的 $N-1$ 阶决策问题。以 $J_N^*(x(0))$ 表示初值为 $x(0)$, 控制步数为 N 时目标函数的最小值, 以 $J_{N-1}^*(x(1))$ 表示初值为 $x(1)$, 控制步数为 $N-1$ 时目标函数的最小值, 可以导出 $J_N^*(x(0))$ 与 $J_{N-1}^*(x(1))$ 之间的关系如下:

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u(0), \dots, u(N-1)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k)) \right\}$$

$$= \min_{u(0) \dots u(N-1)} \{L(x(0), u(0)) + \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} L(x(k), u(k)) \right\}\}$$

上式第一项 $L(x(0), u(0))$ 不依赖于 $u(1), \dots, u(N-1)$, 因此上式可改写为

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u(0)} \{L(x(0), u(0)) + \min_{u(1) \dots u(N-1)} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} L(x(k), u(k)) \right\}\}$$

$$= \min_{u(0)} \{L(x(0), u(0)) + J_{N-1}^*(x(1))\}$$

这样就得到了递推关系

$$J_N^*(x(0)) = \min_{u(0)} \{L(x(0), u(0)) + J_{N-1}^*(x(1))\} \quad (9-3)$$

式中 $x(1) = f(x(0), u(0))$

以上方程称为动态规划的基本方程。

类似于上面的推导, 可以得到动态规划基本方程的更一般的形式

$$J_{N-i}^*(x(i)) = \min_{u(i)} \{L(x(i), u(i)) + J_{N-i-1}^*(x(i+1))\} \quad (9-4)$$

式中 $x(i+1) = f(x(i), u(i))$

利用这一递推关系, 可以把一个多阶决策问题化为若干个子问题, 在每个子问题中只对一个变量进行最优化, 例如:

$$J_1^*(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{L(x(N-1), u(N-1))\}$$

是一个对单变量 $u(N-1)$ 的最优化问题, 当 $J_1^*(x(N-1))$ 求出后, 由动态规划的基本方程(9-4)得到

$$J_2^*(x(N-2)) = \min_{u(N-2)} \{L(x(N-2), u(N-2)) + J_1^*(x(N-1))\}$$

式中 $x(N-1) = f(x(N-2), u(N-2))$

这又是对变量 $u(N-2)$ 的最优化问题。依次类推, 通过解一系列的单变量最优化问题即可得到最优控制序列 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 。

前面的讨论假设了 $x(k), u(k)$ 是标量, 所得结果对它们都是向量的情况也适用。这时式(9-1)化为

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

式(9-2)化为

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} L(x(k), u(k))$$

动态规划的基本方程(9-4)化为

$$J_{N-i}^*(x(i)) = \min_{u(i)} \{L(x(i), u(i))\} + J_{N-i-1}^*(x(i+1)) \quad (9-5)$$

【例 9-1】 将前面讨论的最优途径问题看作一个四阶段决策问题, 可以看出前面的解法实质上是在逐次利用动态规划基本方程求解。

最后一个阶段(阶段 4)达到终点的最短时间为:

$$J_1^*(P_3) = 4 \quad J_1^*(Q_3) = 3$$

向前递推一步, 考虑 3 A 两个阶段, 利用动态规划基本方程得到

$$J_2^*(P_2) = \min\{P_2 P_3 + J_1^*(P_3), P_2 Q_3 + J_1^*(Q_3)\} = \min\{1+4, 1+3\} = 4 \text{ (选 } Q_3 \text{)}$$

$$J_2^*(Q_2) = \min\{Q_2 P_3 + J_1^*(P_3), Q_2 Q_3 + J_1^*(Q_3)\} = \min\{2+4, 2+3\} = 5 \text{ (选 } Q_3 \text{)}$$

$$J_3^*(P_1) = \min\{P_1P_2 + J_2^*(P_2), P_1Q_2 + J_2^*(Q_2)\} = \min\{6 + 4, 6 + 5\} = 10 (\text{选 } P_2)$$

$$J_3^*(Q_1) = \min\{Q_1P_2 + J_2^*(P_2), Q_1Q_2 + J_2^*(Q_2)\} = \min\{4 + 4, 7 + 5\} = 8 (\text{选 } P_2)$$

$$J_4^*(S) = \min\{SP_1 + J_3^*(P_1), SQ_1 + J_3^*(Q_1)\} = \min\{4 + 10, 5 + 8\} = 13 (\text{选 } Q_1)$$

于是得到最优途径是 $SQ_1P_2Q_3F$ 。

9.2.2 应用动态规划的基本方程解最优控制问题

动态规划基本方程可用来解各类离散的最优控制问题, 以下列实例说明。

【例 9-2】 设系统的状态方程为

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k)$$

式中 a, b 是常数。目标函数是

$$J_3 = \sum_{k=0}^2 [x^2(k) + qu^2(k)] \quad q > 0$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使 J_3 最小。

先考虑一步最优控制问题。此时

$$J_1 = x^2(2) + qu^2(2)$$

$$J_1^*(x(2)) = \min_{u(2)} \{x^2(2) + qu^2(2)\}$$

当 $u(2)=0$ 时 $x^2(2) + qu^2(2)$ 达最小值, 因此

$$u^*(2) = 0 \quad J_1^*(x(2)) = x^2(2)$$

由动态规划的基本方程

$$\begin{aligned} J_2^*(x(1)) &= \min_{u(1)} \{x^2(1) + qu^2(1) + J_1^*(x(2))\} \\ &= \min_{u(1)} \{x^2(1) + qu^2(1) + x^2(2)\} \end{aligned}$$

将状态方程 $x(2) = ax(1) + bu(1)$ 代入上式, 得到

$$J_2^*(x(1)) = \min_{u(1)} \{x^2(1) + qu^2(1) + (ax(1) + bu(1))^2\}$$

花括号中的函数对 $u(1)$ 求导数, 并令它等于零, 得到

$$u^*(1) = \frac{-ab}{q + b^2} x(1)$$

代入 $J_2^*(x(1))$ 中, 得到

$$\begin{aligned} J_2^*(x(1)) &= x^2(1) + q \frac{a^2 b^2}{(q + b^2)^2} x^2(1) + \left[ax(1) - \frac{ab^2}{q + b^2} x(1) \right]^2 \\ &= \left(1 + \frac{ab^2}{q + b^2} \right) x^2(1) \end{aligned}$$

再一次利用基本方程, 有

$$\begin{aligned} J_3^*(x(0)) &= \min_{u(0)} \{x^2(0) + qu^2(0) + J_2^*(x(1))\} \\ &= \min_{u(0)} \{x^2(0) + qu^2(0) + \left(1 + \frac{qa^2}{q + b^2} \right) [ax(0) + bu(0)]^2\} \end{aligned}$$

花括号中的函数对 $u(0)$ 求导数, 并令它等于零, 得到

$$u^*(0) = -\frac{ab(q + b^2 + qa^2)}{(q + b^2)^2 + qa^2 b^2} x(0)$$

这样通过三步计算得到最优控制序列为

$$u^*(0) = -\frac{ab(q+b^2+qa^2)}{(q+b^2)^2+qa^2b^2}x(0) \quad u^*(1) = \frac{-ab}{q+b^2}x(1) \quad u(2) = 0$$

它们都是状态变量的反馈。

通过这个例子可以看出,利用动态规划解这个最优控制问题的思路是反复利用基本方程,把求 $u^*(0), u^*(1), u^*(2)$ 使 $J_3(x(0), u(0), u(1), u(2))$ 达到最小的问题,化成了三次对一个变量求最小的问题,从而简化了计算。

【例 9-3】 系统的状态方程为

$$x(k+1) = 0.5x(k) + 0.3u(k)$$

目标函数为

$$J_4 = \sum_{k=0}^3 [3x(k) - u(k)]$$

求 $u^*(0), u^*(1), u^*(2), u^*(3)$ 使满足约束条件 $0 \leq u(k) \leq x(k)$ 并使 J_4 最小。

解 由最后一步开始

$$J_1^*(x(3)) = \min_{0 \leq u(3) \leq x(3)} \{3x(3) - u(3)\}$$

显然 $u^*(3) = x(3)$ 时 $3x(3) - u(3)$ 最小,这时

$$J_1^*(x(3)) = 2x(3)$$

由动态规划的基本方程

$$\begin{aligned} J_2^*(x(2)) &= \min_{0 \leq u(2) \leq x(2)} \{3x(2) - u(2) + J_1^*(x(3))\} \\ &= \min_{0 \leq u(2) \leq x(2)} \{3x(2) - u(2) + 2[0.5x(2) + 0.3u(2)]\} \\ &= \min_{0 \leq u(2) \leq x(2)} \{4x(2) - 0.4u(2)\} \end{aligned}$$

显然 $u^*(2) = x(2)$ 使 $4x(2) - 0.4u(2)$ 最小,这时

$$J_2^*(x(2)) = 3.6x(2)$$

再一次应用动态规划的基本方程

$$\begin{aligned} J_3^*(x(1)) &= \min_{0 \leq u(1) \leq x(1)} \{3x(1) - u(1) + J_2^*(x(2))\} \\ &= \min_{0 \leq u(1) \leq x(1)} \{3x(1) - u(1) + 3.6x(2)\} \\ &= \min_{0 \leq u(1) \leq x(1)} \{3x(1) - u(1) + 3.6(0.5x(1) + 0.3u(1))\} \\ &= \min_{0 \leq u(1) \leq x(1)} \{4.8x(1) + 0.08u(1)\} \end{aligned}$$

显然 $u^*(1) = 0$ 使 $4.8x(1) + 0.08u(1)$ 最小,这时

$$J_3^*(x(1)) = 4.8x(1)$$

类似地

$$\begin{aligned} J_4^*(x(0)) &= \min_{0 \leq u(0) \leq x(0)} \{3x(0) - u(0) + J_3^*(x(1))\} \\ &= \min_{0 \leq u(0) \leq x(0)} \{5.4x(0) + 0.44u(0)\} \\ u^*(0) &= 0 \quad J_4^*(x(0)) = 5.4x(0) \end{aligned}$$

求出的最优控制序列是

$$u^*(0) = 0, u^*(1) = 0, u^*(2) = x(2), u^*(3) = x(3).$$

在这个例子中应用动态规划方法求解了有约束的最优控制问题,这说明该方法能方便地处理有约束的问题,应用面比较广。

【例 9-4】 生产库存系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - S(k)$$

式中 $x(k)$ 、 $u(k)$ 、 $S(k)$ 分别是第 k 季度开始时的库存量、第 k 季度的生产量和销售量。假设生产费用等于 $0.005u^2(k)$, 库存费用等于 $x(k)$ 那么四个季度的总费用是

$$J_4 = \sum_{k=0}^3 [0.005u^2(k) + x(k)]$$

现设初始库存量 $x(0)=0$, 四个季度的订货分别为

$$S(0) = 600 \text{ 件} \quad S(1) = 700 \text{ 件} \quad S(2) = 500 \text{ 件} \quad S(3) = 1200 \text{ 件}$$

生产库存系统的管理问题是求最优生产策略 $u^*(0)$ 、 $u^*(1)$ 、 $u^*(2)$ 、 $u^*(3)$ 使 $x(4)=0$ (满足销售并到年底没有积压) 并且使总费用 J_4 最小。

解

第 1 步 先从最后一个季度考虑起,

$$J_1 = 0.005u^2(3) + x(3)$$

由状态方程和终端条件 $x(4)=0$ 得到

$$x(4) = x(3) + u(3) - S(3) = x(3) + u(3) - 1200 = 0$$

从而得到

$$u^*(3) = 1200 - x(3)$$

将上式代入 J_1 得到

$$J_1^*(x(3)) = 0.005[1200 - x(3)]^2 + x(3) = 7200 - 11x(3) + 0.005x^2(3)$$

第 2 步 考虑三、四两个季度。这时动态规划的基本方程为

$$\begin{aligned} J_2^*(x(2)) &= \min_{u(2)} \{0.005u^2(2) + x(2) + J_1^*(x(3))\} \\ &= \min_{u(2)} \{0.005u^2(2) + x(2) + 7200 - 11x(3) + 0.005x^2(3)\} \end{aligned}$$

式中 $x(3) = x(2) + u(2) - S(2) = x(2) + u(2) - 500$

把它代入上式得到

$$\begin{aligned} J_2^*(x(2)) &= \min_{u(2)} \{0.005u^2(2) + x(2) + 7200 - 11[x(2) + u(2) - 500] \\ &\quad + 0.005[x(2) + u(2) - 500]^2\} \end{aligned}$$

$u(2)$ 应使上式右端花括号中的函数取最小值, 令

$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u(2)} = 0.02u(2) - 16 + 0.01x(2) = 0$$

可解出

$$u^*(2) = 800 - 0.5x(2)$$

为了保证 $u^*(2) \geq 0$, 必须 $x(2) \leq 1600$ 。将 $u^*(2)$ 的表示式代入 $J_2^*(x(2))$ 得到

$$\begin{aligned} J_2^*(x(2)) &= 0.005[800 - 0.5x(2)]^2 + x(2) + 7200 \\ &\quad - 11[x(2) + 800 - 0.5x(2) - 500] \\ &\quad + 0.005[x(2) + 800 - 0.5x(2) - 500]^2 \\ &= 7550 - 7x(2) + 0.0025x^2(2) \end{aligned}$$

第3步 考虑第二至第四的三个季度。这时动态规划的基本方程为

$$\begin{aligned} J_3^*(x(1)) &= \min_{u(1)}\{0.005u^2(1) + x(1) + J_2^*(x(2))\} \\ &= \min_{u(1)}\{0.005u^2(1) + x(1) + 7550 - 7x(2) + 0.0025x^2(2)\} \end{aligned}$$

式中 $x(2) = x(1) + u(1) - 700$ 将 $x(2)$ 代入 $J_3^*(x(1))$ 得到

$$\begin{aligned} J_3^*(x(1)) &= \min_{u(1)}\{0.005u^2(1) + x(1) + 7550 - 7[x(1) + u(1) - 700] \\ &\quad + 0.0025[x(1) + u(1) - 700]^2\} \end{aligned}$$

令
$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u(1)} = 0.015u(1) - 7 + 0.005[x(1) - 700] = 0$$

可解出
$$u^*(1) = 700 - \frac{1}{3}x(1)$$

将上式代入 $J_3^*(x(1))$ 得到

$$J_3^*(x(1)) = 10000 - 6x(1) + \frac{0.005}{3}x^2(1)$$

第4步 四个季度一起考虑,这时动态规划的基本方程为

$$J_4^*(x(0)) = \min_{u(0)}\{0.005u^2(0) + x(0) + J_3^*(x(1))\}$$

由于 $x(0) = 0$, $x(1) = u(0) - 600$, 上式化为

$$J_4^*(x(0)) = \min_{u(0)}\{0.005u^2(0) + 10000 - 6(u(0) - 600) + \frac{0.005}{3}(u(0) - 600)^2\}$$

令
$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u(0)} = 0.01u(0) - 6 + \frac{0.01}{3}(u(0) - 600) = 0$$

解得
$$u^*(0) = 600$$

把它代入 $J_4^*(x(0))$ 中, 得到 $J_4^*(x(0)) = 11800$ 。

于是该生产库存系统的最优管理策略和相应的库存量是

$$x(0) = 0 \quad u^*(0) = 600 \quad x(1) = 0 \quad u^*(1) = 700$$

$$x(2) = 0 \quad u^*(2) = 800 \quad x(3) = 300 \quad u^*(3) = 900$$

$$x(4) = 0$$

在这一管理策略下,总费用为 11800 元。如果每个季度都按订货量安排生产,即 $u(0) = 600$, $u(1) = 700$, $u(2) = 500$, $u(3) = 1200$, 这时每个季度的库存量都是零,那么总费用 $J_4 = 12700$ 元。比最优策略要多用 900 元。

从上面三个例子可以看出,由于对多阶决策问题反复应用了动态规划的基本方程,使得一个多阶决策问题分解成一系列的相互嵌套的子问题,对每个子问题只需要解一个决策变量的最优化问题,使问题得到简化。从这三个例子还可以看到,应用动态规划解最优控制问题,首先反向逐次回答如果从时间 k 的状态 $x(k)$ 开始到终端,目标函数的最小值是多少,然后再求最优控制,方法是目标函数关于 u 求最小。

9.2.3 应用动态规划解最优经济增长问题

1. 考虑技术进步的最优经济增长问题

在第六章中已经介绍过最优经济增长问题,现在讨论考虑技术进步的最优经济增长问题,采用离散时间模型。

以 $K(k)$ 表示第 k 周期开始时的资本存量, $C(k)$ 表示第 k 周期的消费, $Z(k)$ 表示第 k 周

期的技术度量 假设是已知的。设生产函数为 $K^\alpha(k)Z(k)$ (它是单位劳动在周期 k 的产出 并已包含了周期 k 的经折旧的资本存量, α 是已知的常数) 则资本存量的变化由以下状态方程描述:

$$K(k+1) = Z(k)K^\alpha(k) - C(k) \quad K(0) = K_0 \quad (9-6)$$

目标函数为总的效用贴现值 效用函数取为 $U(C) = \ln C$, 于是目标函数为

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k \ln C(k) \quad (9-7)$$

式中 β 为贴现因子。

于是上述最优经济增长问题是: 求最优消费策略 $C(0), C(1), \dots, C(N-1)$ 使总效用的贴现值 J_N 最大。

2. 应用动态规划解最优经济增长问题

由于 $K(N)$ 对 J_N 没有贡献 因此要使效用最大必使 $K(N) = 0$ 。由此出发有:

$$K(N) = Z(N-1)K^\alpha(N-1) - C(N-1) = 0$$

解得

$$C^*(n-1) = Z(N-1)K^\alpha(N-1) \quad (9-8)$$

于是一步最优的目标函数的最大值为

$$J_1^*(K(N-1)) = \beta^{N-1} \ln C(N-1) = \beta^{N-1} \ln [Z(N-1)K^\alpha(N-1)]$$

应用动态规划的基本方程有

$$\begin{aligned} J_2^*(K(N-2)) &= \text{Max}_{C(N-2)} \{ \beta^{N-2} \ln C(N-2) + J_1^*(K(N-1)) \} \\ &= \text{Max}_{C(N-2)} \{ \beta^{N-2} \ln C(N-2) + \beta^{N-1} \ln [Z(N-1)K^\alpha(N-1)] \} \\ &= \text{Max}_{C(N-2)} \{ \beta^{N-2} \ln C(N-2) + \beta^{N-1} [\ln Z(N-1) + \alpha \ln K(N-1)] \} \\ &= \text{Max}_{C(N-2)} \{ \beta^{N-2} \ln C(N-2) + \beta^{N-1} [\ln Z(N-1) \\ &\quad + \alpha \ln (Z(N-2)K^\alpha(N-2) - C(N-2))] \} \end{aligned}$$

由一阶必要条件:

$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial C(N-2)} = \beta^{N-2} \frac{1}{C(N-2)} - \beta^{N-1} \frac{\alpha}{Z(N-2)K^\alpha(N-2) - C(N-2)} = 0$$

由此解出

$$C^*(N-2) = (1 + \alpha\beta)^{-1} Z(N-2)K^\alpha(N-2) \quad (9-9)$$

计算两步最优的目标函数的最小值 $J_2^*(K(N-2))$ 再次利用递推公式可得到

$$C^*(N-3) = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2)^{-1} Z(N-3)K^\alpha(N-3)$$

一般地有:

$$C^*(N-k) = (1 + \alpha\beta + \dots + \alpha^{k-1}\beta^{k-1})^{-1} Z(N-k)K^\alpha(N-k)$$

当 N 充分大时

$$C^*(t) = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \dots)^{-1}Z(t)K^\alpha(t) = (1 - \alpha\beta)Z(t)K^\alpha(t) \quad (9-10)$$

对任意 t 近似成立。

于是得到如下结论: 最优消费策略 $C^*(t)$ 是产出 $Z(t)K^\alpha(t)$ 的 $1 - \alpha\beta$ 倍。当贴现因子 β 减小时, $1 - \alpha\beta$ 增大, 表示更重视当前的消费。

9.3 应用动态规划解一般线性二次型问题

9.3.1 一般的离散时间线性二次型问题

在第 8 章中已经用离散的变分法与最大值原理导出了线性二次型问题的解, 可以将线性二次型问题看作一个 N 步决策问题, 用动态规划的基本方程自后向前递推, 然后逐步导出它的解, 得到与上一章完全相同的结果。这里将不直接用动态规划导出线性二次型问题的解, 而是研究一类更一般的离散时间线性二次型问题, 第 8 章讲的线性二次型问题和跟踪问题是它的特殊情况。

在离散控制系统中常常遇到跟踪问题。假设线性系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (9-11)$$

式中, $\mathbf{w}(k)$ 是外干扰。系统的输出方程为

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \quad (9-12)$$

有些离散控制系统要求设计控制器, 使系统的输出 $\mathbf{y}(k)$ 跟踪给定的 $\bar{\mathbf{y}}(k)$ 。 $\bar{\mathbf{y}}(k)$ 是希望得到的输出轨线。这一类问题称为离散时间跟踪问题。离散时间跟踪问题可叙述为求 $\mathbf{u}(k)$ 使

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{k=0}^{N-1} [(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k))^T \mathbf{Q}(k)(\mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [(\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k))^T \mathbf{Q}(k)(\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k)] \end{aligned}$$

最小。这一目标函数又可以化为

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) - 2\bar{\mathbf{y}}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \\ &\quad + \bar{\mathbf{y}}^T(k)\mathbf{Q}(k)\bar{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k)] \end{aligned}$$

不继续解这个问题, 而考虑一类更一般的线性二次型问题: 对系统(9-11) 求 $\mathbf{u}(k)$ 使

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{S}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{d}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k)\mathbf{u}(k) + g(k)] + \mathbf{x}^T(N)\mathbf{F}\mathbf{x}(N) + \mathbf{h}\mathbf{x}(N) + i \quad (9-13) \end{aligned}$$

最小。

显然离散时间线性二次型问题和跟踪问题都是它的特殊情况。

为了推导简单, 下面先就一维情况导出其解式, 然后再给出多维情况的结果。

9.3.2 一维问题的解

考虑如下的一维问题:

状态方程为

$$x(k+1) = a(k)x(k) + b(k)u(k) + w(k) \quad (9-14)$$

目标函数为

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} [q(k)x^2(k) + s(k)x(k)u(k) + r(k)u^2(k) + d(k)x(k) + e(k)u(k) + g(k)] + fx^2(N)hx(N) + i \quad (9-15)$$

式中 $w(k)$ 是外界对系统的已知输入; $a(k), b(k), q(k), s(k), r(k), d(k), e(k), g(k)$ 是给定的函数; f, h, i 是三个已知常数。问题是求 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ 使 J_N 最小。

下面应用动态规划导出这一问题的解。

先考虑最后一步, 一步最优的目标函数的最小值为

$$J_1^*(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{ [q(N-1)x^2(N-1) + s(N-1)x(N-1)u(N-1) + r(N-1)u^2(N-1) + d(N-1)x(N-1) + e(N-1)u(N-1) + g(N-1)] + fx^2(N) + hx(N) + i \}$$

为了与以后的公式符号相一致, 令

$$P(N) = f, \quad l(N) = h, \quad j(N) = i$$

并记

$$J_0^*(x(N)) = fx^2(N) + hx(N) + i = P(N)x^2(N) + l(N)x(N) + j(N)$$

于是

$$J_1^*(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{ q(N-1)x^2(N-1) + s(N-1)x(N-1)u(N-1) + r(N-1)u^2(N-1) + d(N-1)x(N-1) + e(N-1)u(N-1) + g(N-1) + J_0^*(x(N)) \}$$

式中 $x(N) = a(N-1)x(N-1) + b(N-1)u(N-1) + w(N-1)$, 于是

$$J_1^*(x(N-1)) = \min_{u(N-1)} \{ q(N-1)x^2(N-1) + s(N-1)x(N-1)u(N-1) + r(N-1)u^2(N-1) + d(N-1)x(N-1) + e(N-1)u(N-1) + g(N-1) + P(N)[a(N-1)x(N-1) + b(N-1)u(N-1) + w(N-1)]^2 + l(N)[a(N-1)x(N-1) + b(N-1)u(N-1) + w(N-1)] + j(N) \}$$

令

$$\frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial u(N-1)} = 0$$

得到

$$u^*(N-1) = - \{ [s(N-1) + 2P(N)a(N-1)b(N-1)]x(N-1) + e(N-1) + 2P(N)b(N-1)w(N-1) + l(N)b(N-1) \} / \{ 2[r(N-1) + P(N)b^2(N-1)] \}$$

把上式代入 $J_1^*(x(N-1))$ 得到

$$J_1^*(x(N-1)) = P(N-1)x^2(N-1) + l(N-1)x(N-1) + j(N-1)$$

式中

$$P(N-1) = q(N-1) + P(N)a^2(N-1) - \{ [s(N-1) + 2P(N)a(N-1)b(N-1)]^2 \} / \{ 4[r(N-1) + P(N)b^2(N-1)] \}$$

$$l(N-1) = d(N-1) + 2P(N)w(N-1)a(N-1) + l(N)a(N-1)$$

$$\begin{aligned}
& -\{[s(N-1) + 2P(N)a(N-1)b(N-1)]e(N-1) \\
& \quad + 2P(N)b(N-1)\omega(N-1) + l(N)b(N-1)\} \\
& \quad \sqrt{2[r(N-1) + P(N)b^2(N-1)]} \\
j(N-1) = & g(N-1) + P(N)\omega^2(N-1) + l(N)\omega(N-1) + j(N) \\
& -\{[e(N-1) + 2P(N)b(N-1)\omega(N-1) + l(N)b(N-1)]\} \\
& \quad \sqrt{4[r(N-1) + P(N)b^2(N-1)]}
\end{aligned}$$

以后的递推几乎是重复上面的过程, 只要用 $N-2$ 代替 $N-1$, 用 $N-1$ 代替 N 就可以了。因此, 可以由 $P(N)=f$, $l(N)=h$, $j(N)=i$ 出发, 用下面的递推公式由 $P(k)$, $l(k)$, $j(k)$ 计算 $P(k-1)$, $l(k-1)$, $j(k-1)$:

$$P(k-1) = q(k-1) + P(k)a^2(k-1) - \frac{[s(k-1) + 2P(k)a(k-1)b(k-1)]^2}{4[r(k-1) + P(k)b^2(k-1)]} \quad (9-16)$$

$$\begin{aligned}
l(k-1) = & d(k-1) + 2P(k)\omega(k-1)a(k-1) + l(k)a(k-1) \\
& \frac{[s(k-1) + 2P(k)a(k-1)b(k-1)]e(k-1) + 2P(k)b(k-1)\omega(k-1) + l(k)b(k-1)}{2[r(k-1) + P(k)b^2(k-1)]}
\end{aligned} \quad (9-17)$$

$$\begin{aligned}
j(k-1) = & g(k-1) + P(k)\omega^2(k-1) + l(k)\omega(k-1) + j(k) \\
& \frac{[e(k-1) + 2P(k)b(k-1)\omega(k-1) + l(k)b(k-1)]^2}{4[r(k-1) + P(k)b^2(k-1)]}
\end{aligned} \quad (9-18)$$

最优控制是

$$\begin{aligned}
u^*(k-1) = & -\{[s(k-1) + 2P(k)a(k-1)b(k-1)]x(k-1) + e(k-1) + \\
& \frac{2P(k)b(k-1)\omega(k-1) + l(k)b(k-1)}{2[r(k-1) + P(k)b^2(k-1)]}
\end{aligned} \quad (9-19)$$

应用式(9-16)至式(9-19), 解线性二次型问题是很方便的。下面利用式(9-16)至式(9-19), 再解例 9-3。在这里

$a(k)=1$, $b(k)=1$, $r(k)=0.005$, $d(k)=1$, $q(k)=0$, $s(k)=0$, $e(k)=0$, $g(k)=0$, $f=0$, $h=0$, $i=0$, $\omega(k)=-S(k)$ 。

因此式(9-16)至式(9-18)分别化为

$$\begin{aligned}
P(k-1) &= P(k) - \frac{P^2(k)}{0.005 + P(k)} \\
l(k-1) &= 1 - 2P(k)S(k-1) + l(k) - \frac{P(k)[l(k) - 2P(k)S(k-1)]}{0.005 + P(k)} \\
j(k-1) &= P(k)S^2(k-1) - l(k)S(k-1) + j(k) - \frac{[-2P(k)S(k-1) + l(k)]^2}{4[0.005 + P(k)]}
\end{aligned}$$

由于已给 $x(4)=0$ 由状态方程可解出

$$u^*(3) = 1200 - x(3)$$

将它代入 $J_1^*(x(3))$ 得到

$$J_1^*(x(3)) = 0.005x^2(3) - 11x(3) + 7200$$

因而 $P(3)=0.005$, $l(3)=-11$, $j(3)=7200$ 。从这三个值出发 ,利用上面的递推式(9-16)至式(9-18)可逐次算出

$$\begin{array}{lll} P(2)=0.0025 & l(2)=-7 & j(2)=7550 \\ P(1)=0.005/3 & l(1)=-6 & j(1)=10000 \\ P(0)=0.005/4 & l(0)=-5 & j(0)=11800 \end{array}$$

由式(9.19)得到

$$u^*(k-1) = -\frac{2P(k)x(k-1) - 2P(k)S(k-1) + l(k)}{2[0.005 + P(k)]}$$

将 $P(k)$, $l(k)$, $j(k)$ 和 $S(k)$ 的值 ,代入上式中 ,得到最优控制策略为

$$\begin{aligned} u^*(0) &= -\frac{1}{4}x(0) + 600 \\ u^*(1) &= -\frac{1}{3}x(1) + 700 \\ u^*(2) &= -\frac{1}{2}x(2) + 800 \end{aligned}$$

由 $x(0)=0$ 得到 $u^*(0)=600$ 将其代入状态方程 ,可算出 $x(1)=0$,于是 $u^*(1)=700$,再代入状态方程又可算出 $x(2)=0$,那么 $u^*(2)=800$,类似地可算得 $x(3)=300$,以及 $u^*(3)=900$,这样我们得到了与例 9-3 中相同的结果。

下面应用 MATLAB 解这个例 :

```

a=[1 1 1 1];
b=[1 1 1 1];
r=[0.005 0.005 0.005 0.005];
d=[1 1 1 1];
q=[0 0 0 0];
s=[0 0 0 0];
e=[0 0 0 0];
g=0;
f=0;
h=0;
i=0;
w=[-600 -700 -500 -1200];
N=3;
X0=0;
x(N+1)=0;
x(1)=X0;
tempx=-a(N+1)/b(N+1);
tempc=-w(N+1)/b(N+1);
f=f+q(N+1)+s(N+1)*tempx+r(N+1)*tempx*tempx;
h=h+s(N+1)*tempc+r(N+1)*2*tempx*tempc+d(N+1)+e(N+1)*

```

temp_x ;

$i = i + r(N + 1) * \text{tempc} * \text{tempc} + e(N + 1) * \text{tempc} + g ;$

$P(N + 1) = f ;$

$l(N + 1) = h ;$

$j(N + 1) = i ;$

for temp_k = 0 :N - 1

$k = N + 1 - \text{tempk} ;$

$\text{temp} = s(k - 1) + 2 * P(k) * a(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = \text{temp} * \text{temp} ;$

$\text{temp1} = r(k - 1) + P(k) * b(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp1} = \text{temp1} * 4 ;$

$\text{temp} = \text{temp} / \text{temp1} ;$

$P(k - 1) = q(k - 1) + P(k) * a(k - 1) * a(k - 1) - \text{temp} ;$

$\text{temp} = s(k - 1) + 2 * P(k) * a(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp1} = e(k - 1) + 2 * P(k) * b(k - 1) * w(k - 1) + 1(k) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = \text{temp} * \text{temp1} ;$

$\text{temp1} = 2 * r(k - 1) + 2 * P(k) * b(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = \text{temp} / \text{temp1} ;$

$1(k - 1) = d(k - 1) + 2 * P(k) * w(k - 1) * a(k - 1) + 1(k) * a(k - 1) - \text{temp} ;$

$\text{temp} = e(k - 1) + 2 * P(k) * b(k - 1) * w(k - 1) + 1(k) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = \text{temp} * \text{temp} ;$

$\text{temp1} = r(k - 1) + P(k) * b(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp1} = \text{temp1} * 4 ;$

$\text{temp} = \text{temp} / \text{temp1} ;$

$j(k - 1) = g + P(k) * w(k - 1) * w(k - 1) + 1(k) * w(k - 1) + j(k) - \text{temp} ;$

end

for k = 2 :N + 1

$\text{temp} = s(k - 1) + 2 * P(k) * a(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = \text{temp} * x(k - 1) + e(k - 1) + 2 * P(k) * b(k - 1) * w(k - 1) + 1(k) * b(k - 1) ;$

$\text{temp} = - \text{temp} ;$

$\text{temp1} = r(k - 1) + P(k) * b(k - 1) * b(k - 1) ;$

$\text{temp1} = \text{temp1} * 2 ;$

$u(k - 1) = \text{temp} / \text{temp1} ;$

$x(k) = a(k - 1) * x(k - 1) + b(k - 1) * u(k - 1) + w(k - 1) ;$

end

$u(N + 1) = - w(N + 1) / b(N + 1) - a(N + 1) * x(N + 1) / b(N + 1) ;$

得到 $u(0)$ $u(1)$ $u(2)$ $u(3)$ 和 $x(0)$ $x(1)$ $x(2)$ $x(3)$ 为：

u =

600 700 800 900

$x =$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 300 \end{matrix}$$

当 $w(k), s(k), d(k), e(k), g(k), h, i$ 均为零时, 式(9-16)至式(9-19)与在 9.2 中讨论的一维线性二次型问题的解相同。

9.3.3 推广到多变量的情况

当 $x(k), u(k)$ 分别是 n 维和 m 维矢量时, 考虑更一般的线性二次型问题, 设系统的状态方程为式(9-11):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k)$$

目标函数为式(9-13):

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + x^T(k)S(k)u(k) + u^T(k)R(k)u(k) + d(k)x(k) + e(k)u(k) + g(k)] + x^T(N)Fx(N) + hx(N) + i$$

求 $u(k)$ 使 J_N 最小。其中 $Q(k), R(k)$ 和 F 是对称矩阵, S, d, e, h 是适当维数的矩阵或矢量; i 是常数。

类似于 9.3.2 中一维问题的解的推导, 可以得到如下结果:

$$J_{N-k}^*(x(k)) = x^T(k)P(k)x(k) + l(k)x(k) + j(k) \quad (9-20)$$

式中

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)A(k) - \frac{1}{4}[U^T(k)V^{-1}(k)U(k)] \quad (9-21)$$

$$l(k) = d(k) + 2w^T(k)P(k+1)A(k) + l(k+1)A(k) - \frac{1}{2}[T^T(k)V^{-1}(k)U(k)] \quad (9-22)$$

$$j(k) = g(k) + w^T(k)P(k+1)w(k) + l(k+1)w(k) + j(k+1) - \frac{1}{4}[T^T(k)V^{-1}(k)T(k)] \quad (9-23)$$

$$T(k) = e^T(k) + 2B^T(k)P(k+1)w(k) + B^T(k)l^T(k+1) \quad (9-24)$$

$$U(k) = S^T(k) + 2B^T(k)P(k+1)A(k) \quad (9-25)$$

$$V(k) = R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k) \quad (9-26)$$

最优控制为

$$u^*(k) = -\frac{1}{2}V^{-1}(k)[U(k)x(k) + T(k)] \quad (9-27)$$

终端条件为

$$P(N) = F, l(N) = h, j(N) = i \quad (9-28)$$

可以由 $P(N) = F, l(N) = h, j(N) = i$ 出发递推计算 $P(k), l(k), j(k)$, 从而得到最优控制 $u^*(k)$ 。

显然, 当 $w(k)=0, s(k)=0, d(k)=0, e(k)=0, g(k)=0, h=0, i=0$ 时, 问题退化为线性二次型问题, 由式(9-27)给出的解与线性二次型中给出的解相同。

9.3.4 应用 MATLAB 解离散的跟踪问题举例

考虑离散的跟踪问题, 状态方程为

$$x(k+1) = A(k)x(k) + Bu(k)$$

输出方程为

$$y = Cx(k)$$

目标函数为

$$J_N = \frac{1}{2} (y(N) - \bar{y}(N))^T F (y(N) - \bar{y}(N)) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [(y(k) - \bar{y}(k))^T Q (y(k) - \bar{y}(k)) + u^T(k) R u(k)]$$

设已给

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 0.01$$

要求 $y_1(k) = x_1(k)$ 跟踪 $\bar{y}_1(k) = 2$ 则

$$J = \frac{1}{2} [x^T(N) F x(N) - [4 \ 0] x(N) + 4] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [x^T(k) Q x(k) - [4 \ 0] x(k) + 4] + 0.01 u^2(k) \}$$

这相当于在式(9-13)中

$$F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, h = [-2 \ 0], i = 2, Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S = 0, R = 0.05, d = [-2 \ 0], e = 0, g$$

= 2

解该题的 MATLAB 程序如下：

$$A = [0.8 \ 1 \ 0 \ 0.6];$$

$$B = [1 \ 0.5];$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$$Q = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$S = 0;$$

$$R = 0.005;$$

$$d = [-2 \ 0];$$

$$e = 0;$$

$$g = 2;$$

$$F = [0.5 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$h = [-2 \ 0];$$

$$i = 2;$$

$$w = [0 \ 0];$$

$$N = 10;$$

$$x1(1) = 5;$$

$$x2(1) = 3;$$

$$\% P(N+1) = L;$$

$$P11(N+1) = F(1, 1);$$

$$P12(N+1) = F(1, 2);$$

$$P_{21}(N+1) = F(2, 1);$$

$$P_{22}(N+1) = F(2, 2);$$

$$\%q(N+1) = h;$$

$$l_1(N+1) = h(1);$$

$$l_2(N+1) = h(2);$$

$$\%r(N+1) = i;$$

$$j(N+1) = i;$$

$$x_1(1) = 5;$$

$$x_2(1) = 3;$$

for k = N-1 :-1 0

$$P_k = [P_{11}(k+2) \ P_{12}(k+2); P_{21}(k+2) \ P_{22}(k+2)];$$

$$l_k = [l_1(k+2) \ l_2(k+2)];$$

$$T(k+1) = e' + 2 * B' * P_k * \omega + B' * l_k';$$

$$U_k = S' + 2 * B' * P_k * A;$$

$$U_1(k+1) = U_k(1);$$

$$U_2(k+1) = U_k(2);$$

$$V(k+1) = R + B' * P_k * B;$$

$$P = Q + A' * P_k * A - 0.25 * (U_k' * \text{inv}(V(k+1)) * U_k);$$

$$l = d + 2 * \omega' * P_k * A + l_k * A - 0.5 * (T(k+1)' * \text{inv}(V(k+1)) * U_k);$$

$$P_{11}(k+1) = P(1, 1);$$

$$P_{12}(k+1) = P(1, 2);$$

$$P_{21}(k+1) = P(2, 1);$$

$$P_{22}(k+1) = P(2, 2);$$

$$l_1(k+1) = l(1);$$

$$l_2(k+1) = l(2);$$

end

for k = 0 :N-1

$$U = [U_1(k+1) \ U_2(k+1)];$$

```

x = [x1(k+1) ; x2(k+1)];
u(k+1) = -0.5 * (inv(V(k+1)) * (U * x + T(k+1)));
xk = A * x + B * u(k+1) + w;
x1(k+2) = xk(1,1);
x2(k+2) = xk(2,1);
end

```

% 得到结果 :

x1 =

Columns 1 through 8

5.0000 2.0614 1.9930 1.9988 1.9997 1.9998 1.9998 1.9998

Columns 9 through 11

1.9999 2.0005 1.9965

x2 =

Columns 1 through 8

3.0000 -0.6693 0.1050 0.2127 0.2216 0.2222 0.2222 0.2222

Columns 9 through 11

0.2222 0.2225 0.2203

u =

Columns 1 through 8

-4.9386 1.0132 0.2993 0.1881 0.1784 0.1778 0.1778 0.1778

Columns 9 through 10

0.1778 0.1778

本节中用动态规划导出了推广的线性二次型问题的解的递推算式, 推导中没有仔细论述需对问题加的假设条件, 只要每步递推中, 求逆运算可以进行, 就可算出最优控制序列。

9.4 连续时间系统的动态规划法

考虑连续时间最优控制问题, 其状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, t), x(t_0) = x_0$$

目标函数为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \theta(x(t_f), t_f)$$

记系统从 t 时刻的状态 $x(t)$ 到 t_f 时刻的目标函数的最小值为

$$J^*(x(t), t_f - t) = \min_{u(t)} \left\{ \theta(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(s), u(s), s) ds \right\} \quad (9-29)$$

最优性原理 如果 $u^*(s)(t \leq s \leq t_f)$ 是由时刻 t 状态 $x(t)$ 开始到时刻 t_f 的最优控制, 那么 $u^*(s)(t + \delta t \leq s \leq t_f)$ 必是由时刻 $t + \delta t$ 状态 $x(t + \delta t)$ 开始到时刻 t_f 的最优控制。

记 $J^*(x(t + \delta t), t_f - (t + \delta t)) = \min_{u(t)} \{ \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t+\delta t}^{t_f} L(x(s), u(s), s) ds \}$

于是式(9-29)可改写为

$$J^*(x(t), t_f - t) = \min_{u(t)} \{ \theta(x(t_f), t_f) + \int_{t+\delta t}^{t_f} L(x(s), u(s), s) ds + \int_t^{t+\delta t} L(x(s), u(s), s) ds \}$$

$$\text{即 } J^*(x(t), t_f - t) = \min_{u(t)} \{ \int_t^{t+\delta t} L(x(s), u(s), s) ds + J^*(x(t + \delta t), t_f - (t + \delta t)) \} \quad (9-30)$$

$$\int_t^{t+\delta t} L(x(s), u(s), s) ds \approx L(x(t), u(t), t) \delta t$$

对充分小的 δt

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t) \cdot \delta t$$

$$J^*(x(t + \delta t), t_f - (t + \delta t)) \approx J^*(x(t) + \dot{x}(t) \delta t, t_f - (t + \delta t))$$

$$\text{于是 } J^*(x(t + \delta t), t_f - (t + \delta t)) \approx J^*(x(t), t_f - t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T \dot{x} \delta t - \frac{\partial J^*}{\partial t_r} \delta t \quad (9-31)$$

式中 $t_r = t_f - t$ 是剩余时间。于是式(9-30)可近似表示如下

$$J^*(x(t), t_r) = \min_{u(t)} \{ L(x(t), u(t), t) \delta t + J^*(x(t), t_r) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T \dot{x} \delta t - \frac{\partial J^*}{\partial t_r} \delta t \}$$

由此得到

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_r} = \min_{u(t)} \{ L(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T \dot{x} \} \quad (9-32)$$

边界条件为

$$J^*(x(t), t_r) \Big|_{t_r=0} = \theta(x(t_f), t_f) \quad (9-33)$$

方程(9-32)是关于 $J^*(x, t_r)$ 的偏微分方程, 称为哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, 简称 **H-J-B** 方程。

解 **H-J-B** 方程是用动态规划解连续时间最优控制问题的关键, 它的复杂程度依赖于系统的类型, 目标函数和约束条件。如果系统是线性的, 状态方程是线性微分方程

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad x(t_0) = x_0$$

目标函数是状态变量和控制变量的二次型

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

没有约束, 则 **H-J-B** 方程是

$$\frac{\partial J^*}{\partial t_r} = \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T [A(t)x + B(t)u] \right\} \quad (9-34)$$

为使 $\{ \cdot \}$ 中的函数关于 $u(t)$ 最小, 必须

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{2} [x^T Q(t)x + u^T R(t)u] + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x} \right]^T [A(t)x + B(t)u] \right\} \\ = R(t)u + B^T(t) \frac{\partial J^*}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

由此导出最优控制的形式为

$$u^* = -R^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial J^*}{\partial x}$$

从离散的动态规划所导出的结果得到启发, 设

$$J^*(x(t), t_r) = \frac{1}{2} x^T(t) P(t_r) x(t) \quad (9-35)$$

式中, $P(t_r)$ 是对称矩阵。于是

$$\frac{\partial J^*}{\partial x} = P(t_r)x(t) \quad \frac{\partial J^*}{\partial t_r} = \frac{1}{2} x^T(t) \frac{dP}{dt_r} x(t)$$

H-J-B 方程化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^T(t) \frac{dP}{dt_r} x(t) = \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \\ \frac{1}{2} (-R^{-1}(t)B^T(t)P(t_r)x(t))^T R(t) (-R^{-1}(t)B^T(t)P(t_r)x(t)) + \\ x^T(t)P(t_r)[A(t)x(t) + B(t)(-R^{-1}(t)B^T(t)P(t_r)x(t))] \end{aligned}$$

经化简得到

$$x^T(t) \frac{dP}{dt_r} x(t) = x^T(t) [Q(t) - PB(t)R^{-1}(t)B(t)P + 2PA(t)] x(t) \quad (9-36)$$

因为 $P(t_r)$ 是对称矩阵, 式中最后一项

$$\begin{aligned} x^T(t) [2PA(t)] x(t) = x^T(t) [PA(t) + A^T(t)P] x(t) \\ + x^T(t) [PA(t) - A^T(t)P] x(t) \end{aligned}$$

而 $x^T(t) [PA(t) - A^T(t)P] x(t) = 0$, 因此式(9-75)可改写为

$$\begin{aligned} x^T(t) \frac{dP}{dt_r} x(t) = x^T(t) [Q(t) - PB(t)R^{-1}(t)B(t)P \\ + PA(t) + A^T(t)P] x(t) \end{aligned} \quad (9-37)$$

由于式(9-37)对状态空间的任意状态 x 成立, 因此

$$\frac{dP}{dt_r} = Q(t) + PA(t) + A^T P - PBR^{-1}BP$$

又由于 $t_r = t_f - t$, 上式化为

$$\frac{dP}{dt} = -PA(t) - A^T(t)P + PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P - Q(t) \quad (9-38)$$

同样得到了第 7 章中的里卡蒂微分方程。

9.5 习题

1. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使 $x(3) = 0$ 并使

$$J_3 = \sum_{k=0}^2 u^2(k)$$

最小。

2. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = 0.74x(k) + 0.26u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使

$$J = \sum_{i=0}^2 [x^2(i) + 0.2u^2(i)]$$

最小。

3. 系统的状态方程和目标函数同上题, 求反馈控制策略, 使 $x(3) = 0$ 并使 J 最小。

4. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使

$$J = \sum_{i=0}^2 [x^2(i) + u^2(i)]$$

最小。

5. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使

$$J = x^2(3) + \sum_{k=0}^2 [kx^2(k) + u^2(k)]$$

最小。

6. 已给系统的状态方程为

$$x(k+1) = 0.5x(k) + 0.3u(k)$$

求 $u(0), u(1), u(2)$ 使满足约束条件 $0 \leq u(k) \leq x(k)$ 并使

$$J_3 = \sum_{k=0}^2 [3x(k) - u(k)]$$

最小。

7. 应用动态规划解例 8-4。

8. 已知生产库存系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - S(k)$$

目标函数为

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} [h(x(i) - I_0)^2 + c(u(i) - u_0)^2]$$

应用 9.3 节的结果导出该问题的解式。

第 10 章 卡尔曼滤波与线性二次型高斯问题

在第 8、第 9 章中,讨论了确定型线性二次型问题,得到的控制 $u(k)$ 是状态 $x(k)$ 的反馈 $u(k) = -K(k)x(k)$,如果不是所有状态都能用做反馈,系统又是能观测的,则可以设计一个观测器,由输出 $y(k)$ 和输入 $u(k)$ 产生对状态 $x(k)$ 的估计值 $\hat{x}(k)$,然后应用反馈 $u(k) = -K(k)\hat{x}(k)$ 进行控制。

如果被控系统受到随机干扰,状态方程中包含了随机干扰项,并且对输出的测量有观测误差,则问题成为一个随机线性二次型问题,如果描述随机干扰和测量误差的随机变量是高斯白噪声,则称之为线性二次型高斯问题,简称 LQG 问题。

10.1 线性二次型高斯问题的提法

设随机线性系统的状态方程为

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (10-1)$$

输出方程为:

$$y(k) = C(k)x(k) + v(k) \quad k=1, 2, \dots, N \quad (10-2)$$

式中 $w(k)$ 是系统的随机干扰, $v(k)$ 是系统的量测误差。为了讨论简化,对 $w(k)$, $v(k)$ 做如下假设:

$w(k)$, $v(k)$ 是互相独立的,

$$E(v(k)w^T(j)) = 0 \quad \text{对任 } k, j \text{ 成立} \quad (10-3)$$

式中 E 是期望算子。

$w(k)$, $v(k)$ 是 0 均值的高斯白噪声(0 均值, $Ew(k) = 0$, $E v(k) = 0$, 正态分布);

$$Ew(k)w^T(k) = R_1(k) \quad R_1 \geq 0 \quad (10-4)$$

$$Ew(k)w^T(j) = 0 \quad (j \neq k) \quad (10-5)$$

$$E v(k)v^T(k) = R_2(k) \quad R_2 \geq 0 \quad (10-6)$$

$$E v(k)v^T(j) = 0 \quad (j \neq k) \quad (10-7)$$

假设初始状态 $x(0)$ 是服从正态分布的随机矢量,其均值为 $\bar{x}(0)$,协方差 $E x(0)x^T(0) = R_0$, $x(0)$ 和 $w(k)$, $v(k)$ 互相独立。

由于状态方程中有随机变量 $w(k)$ 的干扰,因此 $x(k)$ 也是一个随机变量,目标函数需改写为:

$$J_N(u) = E\{x^T(N)Fx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)]\} \quad (10-8)$$

式中 $Q(k) \geq 0$, $R(k) > 0$, $F \geq 0$

LQG 问题是:假设 (A, B) 能达, (C, A) 能观测,求 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ 使 $J_N(u)$ 最小。

本章将得出的一个重要结论是分离定理:如果 $u^* = -Lx$ 是当方程(10-1)、(10-2)中不

含随机项 $w(k)$ 、 $v(k)$ 时的确定型线性二次型问题的最优解, 则 LQG 问题(10-1)至(10-8)的最优解为 $u^* = -Lx$ 。 \hat{x} 是 x 的滤波, 它是由带有噪声的状态方程和观测方程得到对系统的状态的估计, 是通过卡尔曼(Kalman)滤波得到的。

在 10.2 中, 将介绍卡尔曼滤波, 它给出系统状态的最优估计, 在 10.3 中证明分离定理。

10.2 卡尔曼滤波——最优线性递推滤波

10.2.1 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波是 20 世纪 60 年代初由 R. E. Kalman 提出的一种滤波方法。卡尔曼滤波广泛应用于航空、航天、工业控制和管理等领域。对促进现代控制理论的形成和发展起了很大的作用。下面介绍离散时间随机线性系统的卡尔曼滤波。

对于由式(10-1)、(10-2)描述的系统, 在已知数据为 $Y_k = \{y(i), u(i) | i \leq k\}$ 的条件下, 估计系统的状态 $x(k+m)$, 那么

- 当 $m < 0$ 时, 对状态的估计称为平滑估计,
 - 当 $m = 0$ 时, 对状态的估计称为滤波估计,
 - 当 $m > 0$ 时, 对状态的估计称为预测估计,
- 三者统称为状态滤波。

本书前面讲过的很多设计方法得到的控制是所有状态的反馈, 当系统有随机干扰和观测噪声时, 需要引进卡尔曼滤波对状态进行估计, 然后再用状态的估计进行反馈。

回顾一下观测器的有关结果, 对于确定的离散时间系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad y = Cx(k)$$

其状态 $x(k)$ 的估计 $z(k)$ 由离散的观测器

$$z(k+1) = (A + GC)z(k) + Bu(k) - Gy(k)$$

给出, 它可以改写为:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ z(k+1) &= Az(k) + Bu(k) - G[y(k) - Cz(k)] \end{aligned} \quad (10-9)$$

$z(k+1)$ 是在已知 $u(k), y(k)$ 时对 $x(k+1)$ 的估计, 现在将它记为 $\hat{x}(k+1/k)$ 。同样, $z(k)$ 是在已知 $u(k-1), y(k-1)$ 时对 $x(k)$ 的估计, 记为 $\hat{x}(k/k-1)$ 则(10-9)式化为

$$\hat{x}(k+1/k) = A\hat{x}(k/k-1) + Bu(k) + G[y(k) - C\hat{x}(k/k-1)]$$

对线性随机系统(10-1)、(10-2), 可以同样假设对状态的估计具有这样的形式:

$$\hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k/k-1) + B(k)u(k) + K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k/k-1)] \quad (10-10)$$

表达式的第一部分(前两项)是应用 Y_{k-1} 及 $u(k)$ 按模型计算 $\hat{x}(k+1/k)$; 第二部分(第三项)是由于增加了新数据 $y(k)$ 得到的新息对估计值的修改。需要解决的问题是如何求 $K(k)$, 使估计最好。为了描述“估计最好”引进估计误差

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k/k-1) \quad (10-11)$$

那么 $\tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + w(k) - K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k/k-1)]$

或 $\tilde{x}(k+1) = [A(k) - K(k)C(k)]\tilde{x}(k) + w(k) - K(k)v(k) \quad (10-12)$

问题化为如何求 $K(k)$ 使得到状态的最优估计。对此有多种描述方法,这里仅介绍卡尔曼滤波。

卡尔曼滤波是求 $K(k)$, 使误差的方差 $S(k/k-1)$ 最小, 误差的方差为

$$S(k/k-1) = E[\tilde{x}(k) - E\tilde{x}(k)] [E\tilde{x}(k) - E\tilde{x}(k)]^T \quad (10-13)$$

由(10-12)

$$E\tilde{x}(k+1) = [A(k) - K(k)C(k)] E\tilde{x}(k) \quad (10-14)$$

记 $x(0)$ 的均值为

$$\hat{x}(0/-1) = \bar{x}(0) \quad (10-15)$$

则

$$E\tilde{x}(0) = E[x(0) - \hat{x}(0/-1)] = E[x(0) - \bar{x}(0)] = 0$$

由(10-14) $E\tilde{x}(k) = 0$ 对任意 k 成立, 于是(10-13)化为

$$S(k/k-1) = E\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k) \quad (10-16)$$

$$S(k+1/k) = E\tilde{x}(k+1)\tilde{x}^T(k+1)$$

$$= E[(A(k) - K(k)C(k))\tilde{x}(k) + w(k) - K(k)v(k)] [(A(k) - K(k)C(k))\tilde{x}(k) + w(k) - K(k)v(k)]^T$$

利用式(10-4)至(10-7)上式可以化为

$$S(k+1/k) = [A(k) - K(k)C(k)] S(k/k-1) [A(k) - K(k)C(k)]^T + R_1(k) + K(k)R_2(k)K^T(k) \quad (10-17)$$

由于假设了

$$E\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0) = E[x(0) - \bar{x}(0)] [x(0) - \bar{x}(0)]^T = R_0 \geq 0$$

再形式地定义

$$S(0/-1) = R_0$$

由 $R_0 \geq 0, R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$ 及(10-17) 得到 $S(k+1/k) \geq 0$ 。

对任意 $\alpha \in R^n$, 引进目标函数

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \alpha^T S(k+1/k) \alpha = \alpha^T \{ [A(k) - K(k)C(k)] S(k/k-1) [A(k) - K(k)C(k)]^T \\ &\quad + R_1(k) + K(k)R_2(k)K^T(k) \} \alpha \\ &= \alpha^T \{ A(k)S(k/k-1)A^T(k) + R_1(k) - K(k)C(k)S(k/k-1)A^T(k) \\ &\quad - A(k)S(k/k-1)C^T(k)K^T(k) + K(k)[R_2 + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]K^T(k) \} \alpha \end{aligned} \quad (10-18)$$

利用配完全平方的方法上式可化为

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \alpha^T S(k+1/k) \alpha \\ &= \alpha^T \{ A(k)S(k/k-1)A^T(k) + R_1(k) + A(k)S(k/k-1)C^T(k)[R_2(k) \\ &\quad + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]^{-1}C(k)S(k/k-1)A^T(k) \} \alpha \\ &\quad + \alpha^T \{ [K(k) - A(k)S(k/k-1)C^T(k)][R_2(k) + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]^{-1} \\ &\quad [R_2(k) + C(k)S(k/k-1)C^T(k)] [K(k) - A(k)S(k/k-1)C^T(k)][R_2(k) \\ &\quad + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]^{-1} \} \alpha \end{aligned} \quad (10-19)$$

上式中二次型的第一项不依赖于 $\mathbf{K}(k)$ 第二项 ≥ 0 因此为使 J_{k+1} 最小应选取：

$$\mathbf{K}(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} = 0$$

即
$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} \quad (10-20)$$

以(10-20)代入(10-19)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(k+1/k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_1(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k) \\ &\quad \times [\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{A}^T(k) \end{aligned} \quad (10-21)$$

初始条件为：

$$\mathbf{S}(0/-1) = \mathbf{R}_0 \quad (10-22)$$

总结以上的结果 滤波公式为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1/k) &= \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] \\ \mathbf{K}(k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} \\ \mathbf{S}(k+1/k) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_1(k) - \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k) \\ &\quad \times [\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{A}^T(k) \\ \mathbf{S}(0/-1) &= \mathbf{R}_0 \end{aligned}$$

由以上滤波公式构成的系统可用来估计系统(10-1)、(10-2)的状态。这一系统称为最小方差线性滤波器或卡尔曼滤波器。

以上是用 \mathbf{Y}_k 估计 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 即只用了 k 时刻以前(包括 k 时刻)的数据 因此是预测估计。也可以用直到 $k+1$ 时刻的数据 \mathbf{Y}_{k+1} 估计 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 这时得到滤波估计 以上滤波公式改为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1/k+1) &= \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}(k+1) \\ &\quad \times [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)(\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k))] \end{aligned} \quad (10-23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0/0) = \bar{\mathbf{x}}(0)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{R}_2(k) + \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1)\mathbf{C}^T(k)]^{-1} \quad (10-24)$$

$$\mathbf{S}(k/k-1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k-1/k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{R}_1(k) \quad (10-25)$$

$$\mathbf{S}(k/k) = \mathbf{S}(k/k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k/k-1) \quad (10-26)$$

$$\mathbf{S}(0/0) = \mathbf{R}_0 \quad (10-27)$$

【例 10-1】 考虑系统

$$x(k+1) = x(k) \quad y(k) = x(k) + v(k)$$

假设 $E_x(0) = 5$, $R_0 = 0.5$, $R_2 = E v(k)v^T(k) = \sigma^2$ 。按式(10-10)状态估计为

$$\hat{x}(k+1/k) = \hat{x}(k/k-1) + K(k)[y(k) - \hat{x}(k/k-1)]$$

记 $S(k) = S(k/k-1)$ 则

$$K(k) = \frac{S(k)}{\sigma^2 + S(k)} \quad S(k+1) = S(k) - \frac{S^2(k)}{\sigma^2 + S(k)} = \frac{\sigma^2 S(k)}{\sigma^2 + S(k)}$$

【例 10-2】 考虑系统

$$x(k+1) = ax(k) + w(k) \quad y(k) = x(k) + v(k)$$

已给
$$E w(k)w^T(k) = r_1 > 0 \quad E v(k)v^T(k) = r_2 > 0$$

按式(10-10)状态估计为

$$\hat{x}(k+1/k) = a\hat{x}(k/k-1) + K(k)[y(k) - \hat{x}(k/k-1)]$$

引用同上例的记号 $S(k)$ 则有

$$K(k) = \frac{aS(k)}{r_2 + S(k)} \quad S(k+1) = a^2S(k) + r_1 - \frac{a^2S^2(k)}{r_2 + S(k)} = \frac{a^2S(k)r_2}{r_2 + S(k)} + r_1$$

按定义,例 10-1 和例 10-2 得到的都是预测估计,下面举一个滤波估计的例。

【例 10-3】

设系统的状态方程为：

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k) + w(k)$$

$$y(k) = x(k) + v(k)$$

$\{w(k), k=0, 1, \dots\}$ 和 $\{v(k), k=0, 1, \dots\}$ 是零均值正态白噪声序列, 它们的方差分别为 25 和 15。初始状态 $x(0)$ 是 0 均值正态随机变量, 并且与 $w(k), v(k)$ 独立, $x(0)$ 的方差为 $K100$ 。下面构造由式(10-23)至(10-27)构成的卡尔曼滤波器。

已知

$$R_0 = 100, R_1 = 25, R_2 = 15$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k/k) + 2u(k) + K(k+1)[y(k+1) - (\hat{x}(k/k) + 2u(k))]$$

式中
$$K(k+1) = S(k+1/k)[15 + S(k+1/k)]^{-1}$$

$$S(k+1/k) = S(k/k) + 25$$

$$S(k+1/k+1) = S(k+1/k) - K(k+1)S(k+1/k)$$

$$S(0/0) = 100$$

下面逐次求出 $K(k+1)$ ：

$$S(0/0) = 100$$

$$S(1/0) = 100 + 25 = 125$$

$$K(1) = 125[15 + 125]^{-1} = 0.893$$

$$S(1/1) = 125 - 0.893 \times 125 = 13.375$$

$$S(2/1) = 13.375 + 25 = 38.375$$

$$K(2) = 38.375(15 + 38.375)^{-1} = 0.720$$

$$S(2/2) = 10.745 - 0.72 \times 38.375 = 10.745$$

$$S(3/2) = 10.745 + 25 = 35.745$$

$$K(3) = 35.745(15 + 35.745)^{-1} = 0.704$$

$$S(3/3) = 35.745 - 0.704 \times 35.745 = 10.58$$

依次可以继续计算下去, 这里就计算这三步。将所求的卡尔曼滤波器的增益

$$K(1) = 0.893 \quad K(2) = 0.720 \quad K(3) = 0.704$$

代入滤波公式

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k/k) + 2u(k) + K(k+1)[y(k+1) - (\hat{x}(k/k) + 2u(k))]$$

就可以根据量测数据 $y(k+1)$ 估计 $\hat{x}(k+1/k+1)$ 。

在前面的讨论中假设了 $\hat{x}(0/-1) = \hat{x}(0)$, 即假设了初始估计是无偏的。可以证明在这一假设下得到的递推估计也是无偏的。证明见文献[3]

10.2.2 稳态卡尔曼滤波器

如果 LQG 问题中 A, B, C, R_1, R_2 都是常数矩阵, 且 $R_1 = PP^T, (A, P)$ 能达, (C, A) 能观

测,这时 $S(k|k-1)$ 是常数矩阵,记为 S 。 S 满足矩阵方程:

$$S = [I - SC^T(R_2 + CSC^T)^{-1}C \mathbb{I}ASA^T + R_1] \quad (10-28)$$

当上述条件成立时,式(10-28)有惟一正定解。 S 满足的矩阵方程(10-28)恰是由式(10-24)至式(10-26)中令 $S(k|k-1) = S$ 得到的。设 S 为式(10-28)的解,则

$$K = SC^T[R_2 + CSC^T]^{-1} \quad (10-29)$$

于是由(10-23)给出的滤波器为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) &= A\hat{x}(k|k) + Bu(k) + K[y(k+1) - C(A\hat{x}(k|k) + Bu(k))] \\ &= [I - KC \mathbb{I}A\hat{x}(k|k) + Bu(k)] + Ky(k+1) \end{aligned} \quad (10-30)$$

因为 K 不依赖于 k ,所以称为稳态卡尔曼滤波器。它应用更为方便,在线运算量更小,只需存储常数矩阵 K 。

【例 10-4】 $\alpha - \beta$ 滤波器,考虑二维系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) = (1 \ 0)x(k) + v(k)$$

设 $R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \ \sigma \ 1]$, $R_2 = r^2$, $\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$ 能达, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 能观测。于是卡尔曼滤波器(10-30)为:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = [I - K(1 \ 0)] \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k|k) + Ky(k+1)$$

式中
$$K = S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [r^2 + (1 \ 0)S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]^{-1}$$

S 是方程

$$S = I - S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(r^2 + (1 \ 0)S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \ 0) [ASA^T + R_1]$$

的惟一正定解。令

$$K = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix},$$

则关于 K 的方程化为

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{bmatrix} \frac{1}{r^2 + s_{11}} \quad \text{或} \quad \alpha = \frac{s_{11}}{r^2 + s_{11}} \quad \beta = \frac{s_{21}}{r^2 + s_{11}}$$

式中的 s_{11}, s_{21} 可由关于 S 的方程解出。

滤波器:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \left[I - \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k|k) + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} y(k+1)$$

只依赖于常数 α, β 。称为 $\alpha - \beta$ 滤波器。

10.3 线性二次高斯问题的解

线性二次型高斯问题(LQG 问题)中状态方程、输出方程和目标函数分别为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

$$J_N = E\{\mathbf{x}^T(N)\mathbf{F}\mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k)]\}$$

关于 $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ 和 $\mathbf{x}(0)$ 的假设同前。以下用动态规划法求解 LQG 问题:

第 1 步:

$$\text{令 } J_0^*(N) = E\{\mathbf{x}(N)\mathbf{F}\mathbf{x}(N)\}$$

由附录 A 设 $E\mathbf{x} = \mathbf{m}$ 则

$$E\{\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}\} = \mathbf{m}^T\mathbf{M}\mathbf{m} + \text{tr}\{\mathbf{M}E(\mathbf{x} - \mathbf{m})(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T\}$$

$$\text{于是 } J_0^*(\mathbf{x}(N)) = [E\mathbf{x}(N)]^T\mathbf{F}E\mathbf{x}(N) + \text{tr}\mathbf{F}\mathbf{S}(N|N-1)$$

由前面提到的估计的无偏性,

$$E\mathbf{x}(N) = E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)$$

于是上式又可以化为

$$J_0^*(\mathbf{x}(N)) = [E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)]^T\mathbf{F}E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) + \text{tr}\mathbf{F}\mathbf{S}(N|N-1)$$

第 1 步中的数学期望是对 \mathbf{Y}_N 的条件数学期望, 因此有 $E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) = \hat{\mathbf{x}}(N|N-1)$, 于是

$$J_0^*(\mathbf{x}(N)) = \hat{\mathbf{x}}^T(N|N-1)\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) + \text{tr}\mathbf{F}\mathbf{S}(N|N-1)$$

$$\text{式中 } \mathbf{S}(N|N-1) = E[\mathbf{x}(N) - \hat{\mathbf{x}}(N|N-1)][\mathbf{x}(N) - \hat{\mathbf{x}}(N|N-1)]^T$$

为了以后符号统一, 便于递推, 记

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{m}(N) = \text{tr}\mathbf{P}(N)\mathbf{S}(N|N-1)$$

$$\text{则上式化为 } J_0^*(\mathbf{x}(N)) = \hat{\mathbf{x}}^T(N|N-1)\mathbf{P}(N)\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) + \mathbf{m}(N) \quad (10-31)$$

第 2 步:

利用动态规划的基本方程:

$$J_1^*(\mathbf{x}(N-1)) = \min_{\mathbf{u}(N-1)} E\{\mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{Q}(N-1)\mathbf{x}(N-1) + \mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + J_0^*(\mathbf{x}(N))\} \quad (10-32)$$

式中 $J_0^*(\mathbf{x}(N))$ 由(10-31)给出。下面计算 $EJ_0^*(\mathbf{x}(N))$:

该式中的 $\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)$ 由以下预测估计公式给出:

$$\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) = \mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + \mathbf{K}(N-1)[\mathbf{y}(N-1) - \mathbf{C}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)]$$

$$\text{于是 } E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) = \mathbf{A}(N-1)E\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)$$

在这一步中的数学期望是对 \mathbf{Y}_{N-1} 的条件数学期望, 因而

$$E\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) = \hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)$$

$$E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1) = \mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)$$

$[\mathbf{y}(N-1) - \mathbf{C}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)]$ 的方差为

$$\mathbf{C}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2)\mathbf{C}^T(N-1) + \mathbf{R}_2(N-1)$$

式中 $\mathbf{S}(N-1|N-2) = E[\mathbf{x}(N-1) - \hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)]\mathbf{I}[\mathbf{x}(N-1) - \hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)]^T$

于是 $\hat{\mathbf{x}}(N-1)$ 的方差

$$\text{cov}[\hat{\mathbf{x}}(N-1)] = \mathbf{K}(N-1)[\mathbf{C}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2)\mathbf{C}^T(N-1) + \mathbf{R}_2(N-1)]\mathbf{K}^T(N-1)$$

因此,由(10-31)及附录 A 有

$$\begin{aligned} EJ_0^*(\mathbf{x}(N)) &= E[\hat{\mathbf{x}}^T(N|N-1)\mathbf{P}(N)\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)] + \mathbf{m}(N) \\ &= [E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)]^T\mathbf{P}(N)[E\hat{\mathbf{x}}(N|N-1)] + \{\text{tr}\mathbf{P}(N)\mathbf{S}(N|N-1)\} \\ &= [\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)]^T\mathbf{P}(N) \\ &\quad [\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)] + \text{tr}\mathbf{P}(N)\mathbf{K}(N-1) \\ &\quad [\mathbf{C}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2)\mathbf{C}^T(N-1) + \mathbf{R}_2(N-1)]\mathbf{K}^T(N-1) + \mathbf{m}(N) \end{aligned}$$

于是(10-32)化为(再一次对 $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ 利用附录 A)

$$\begin{aligned} J_1^*(\hat{\mathbf{x}}(N-1)) &= \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{\hat{\mathbf{x}}^T(N-1|N-2)\mathbf{Q}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) \\ &\quad + \text{tr}\mathbf{Q}_{N-1}\mathbf{S}(N-1|N-2) \\ &\quad + \mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + [\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) \\ &\quad + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)]^T\mathbf{P}(N)[\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)] \\ &\quad + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + \text{tr}\mathbf{P}(N)\mathbf{K}(N-1) \\ &\quad [\mathbf{C}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2)\mathbf{C}^T(N-1) \\ &\quad + \mathbf{R}_2(N-1)]\mathbf{K}^T(N-1) + \mathbf{m}(N)\} \end{aligned} \quad (10-33)$$

为使上式中花括号内的函数关于 $\mathbf{u}(N-1)$ 最小,令

$$\frac{\partial \{\cdot\}}{\partial \mathbf{u}(N-1)} = 0$$

即

$$\mathbf{R}(N-1)\mathbf{u}(N-1) + \mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)[\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{B}(N-1)\mathbf{u}(N-1)] = 0$$

由上式解出 $\mathbf{u}(N-1)$ 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(N-1) &= -[\mathbf{R}(N-1) \\ &\quad + \mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{B}(N-1)]^{-1}\mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{A}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) \\ &\triangleq -\mathbf{L}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) \end{aligned} \quad (10-34)$$

将 $\mathbf{u}^*(N-1)$ 代入(10-33)得到

$$J_1^*(\mathbf{x}(N-1)) = \hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2)\mathbf{P}(N-1)\hat{\mathbf{x}}(N-1|N-2) + \mathbf{m}(N-1) \quad (10-35)$$

$$\text{式中 } \mathbf{L}(N-1) = [\mathbf{R}(N-1) + \mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{B}(N-1)]^{-1}\mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{A}(N-1) \quad (10-36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N-1) &= \mathbf{Q}(N-1) + \mathbf{A}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{A}(N-1) - \mathbf{L}^T(N-1) \\ &\quad \times [\mathbf{R}(N-1) + \mathbf{B}^T(N-1)\mathbf{P}(N)\mathbf{B}(N-1)]^{-1}\mathbf{L}(N-1) \end{aligned} \quad (10-37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(N-1) &= \mathbf{m}(N) + \text{tr}\mathbf{Q}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2) + \text{tr}\mathbf{P}(N)\mathbf{K}(N-1) \\ &\quad \times [\mathbf{C}(N-1)\mathbf{S}(N-1|N-2)\mathbf{C}^T(N-1) + \mathbf{R}_2(N-1)]\mathbf{K}^T(N-1) \end{aligned} \quad (10-38)$$

第3步：

再一次应用动态规划的基本方程

$$J_2^*(x(N-1)) = \min_{u(N-2)} E\{x^T(N-2)Q(N-2)x(N-2) + u^T(N-2)R(N-2)u(N-2) + J_1^*(x(N-1))\} \quad (10-39)$$

注意到 式(10-39)只不过把式(10-32)中的 N 换成 $N-1$, $N-1$ 换成 $N-2$ 。因此在式(10-34)~(10-38)中将 N 换成 $N-1$, $N-1$ 换成 $N-2$, $N-2$ 换成 $N-3$ 即可得到

$$u^*(N-2) = -L(N-2)\hat{x}(N-2|N-3)$$

$$J_2^*(x(N-2)) = \hat{x}^T(N-2|N-3)P(N-2)\hat{x}(N-2|N-3) + m(N-2)$$

$$L(N-2) = [R(N-2) + B^T(N-2)P(N-1)B(N-2)]^{-1}B^T(N-2)P(N-1)A(N-2)$$

$$P(N-2) = Q(N-2) + A^T(N-2)P(N-1)A(N-2) - L^T(N-2)[R(N-2) + B^T(N-2)P(N-1)B(N-2)]^{-1}L(N-2)$$

$$m(N-2) = m(N-1) + trQ(N-2)S(N-2|N-3) + trP(N-1)K(N-2)[C(N-2)S(N-2|N-3)C^T(N-2) + R_2(N-2)]K^T(N-2)$$

...

第 k 步：

依次类推, 得到 LQG 问题的最优解：

最优控制为

$$u^*(N-k) = -L(N-k)\hat{x}(N-k|N-k-1)$$

目标函数的最小值为

$$J_k^*(x(N-k)) = \hat{x}^T(N-k|N-k-1)P(N-k)\hat{x}(N-k|N-k-1) + m(N-k)$$

式中

$$L(N-k) = [R(N-k) + B^T(N-k)P(N-k+1)B(N-k)]^{-1}B^T(N-k)P(N-k+1)A(N-k)$$

$$P(N-k) = Q(N-k) + A^T(N-k)P(N-k+1)A(N-k) - L^T(N-k)[R(N-k) + B^T(N-k)P(N-k+1)B(N-k)]^{-1}L(N-k)$$

$$m(N-k) = m(N-k+1) + trQ(N-k)S(N-k|N-k-1) + trP(N-k+1)K(N-k)[C(N-k)$$

$$S(N-k|N-k-1)C^T(N-k) + R_2(N-k)]K^T(N-k)$$

根据以上公式, 可以由

$$P(N) = F \quad m(N) = trP(N)S(N|N-1)$$

开始递推求解。

由于假设了 $R(k)$ 是正定矩阵, F 和 $Q(k)$ 是半正定矩阵, 由计算 $P(N-k)$ 的公式知 $P(k)$ 是半正定矩阵, 因此 $[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]$ 是正定矩阵, 是可逆的, 这保证上述求解过程可以顺利进行。

综合以上讨论的得到如下定理：

定理 10-1 (分离定理) 在线性系统

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k)$$

$$y(k) = C(k)x + v(k)$$

中,假设 $w(k)$ 和 $v(k)$ 为零均值高斯白噪声,它们的协方差阵分别是 $R_1(k)$ 和 $R_2(k)$ 。随机变量 $x(0)$ 是高斯的,均值为 $\bar{x}(0)$, 方差为 $R_0(0)$, $x(0)$ 与 $w(k)$ 和 $v(k)$ 互相独立,使

$$J_N = E\{x^T(N)Fx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)]\}$$

最小的最优控制由

$$u^*(k) = -L(k)\hat{x}(k|k-1)$$

给出,式中

$$L(k) = [R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)P(k+1)A(k)$$

$P(k)$ 满足

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)A(k) - L^T(k)[R(k) + B^T(k)P(k)B(k)]^{-1}L(k)$$

$$P(N) = F$$

状态的最优估计由下式递推得到

$$\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k-1) + B(k)u(k) + K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

式中的 $K(k)$ 由下式计算

$$K(k) = A(k)S(k/k-1)C^T(k)[R_2(k) + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]^{-1}$$

$$S(k+1/k) = A(k)S(k/k-1)A^T(k) + R_1(k) - A(k)S(k/k-1)C^T(k)[R_2(k) + C(k)S(k/k-1)C^T(k)]^{-1}C(k)S(k/k-1)A^T(k)$$

初始条件为:

$$S(0/-1) = R_0$$

由这个定理可以看出,线性二次高斯问题的最优解是状态的最优估计的线性反馈,反馈增益矩阵 $L(k)$ 的计算与线性二次型问题相同,测量数据只通过对状态的估计 $\hat{x}(k/k-1)$ 影响最优控制。这样可以分别解线性二次型问题和最优状态估计问题,用得到的最优状态估计做反馈,就可以得到线性二次型高斯问题的最优解。线性二次型高斯问题的这个性质称为分离性,因此该定理称为分离定理。

注 定理 10-1 中用状态的预测估计 $\hat{x}(k/k-1)$ 作反馈得到线性二次高斯问题的最优解,也可以用状态的滤波估计 $\hat{x}(k/k)$ 作反馈得到线性二次高斯问题的最优解,这时最优解为

$$u^*(k) = -L(k)\hat{x}(k|k)$$

$\hat{x}(k/k)$ 由滤波估计的公式计算。

【例 10-5】 考虑例 10-3 中的系统,状态方程为:

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k) + w(k)$$

$$y(k) = x(k) + v(k)$$

对 $w(k)$, $v(k)$, $x(0)$ 的假设同例 10-3, 设目标函数为

$$J_3 = E[x^2(3) + \sum_{k=0}^2 u^2(k)]$$

求最优控制 $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ 使 J_3 最小。

根据分离定理分别解线性二次型问题和状态估计问题。状态估计问题已在例 10-3 中解出,下面解线性二次型问题。按第七章中的解式不难算出(请读者自己完成):

$$u^*(0) = -0.154\hat{x}(0/0), u^*(1) = -0.222\hat{x}(1/1), u^*(2) = -0.400\hat{x}(2/2)$$

解式中的 $\hat{x}(0/0) = \bar{x}(0)$ 是 $x(0)$ 的均值, $\hat{x}(1/1)$, $\hat{x}(2/2)$ 由例 10-3 构造的卡尔曼滤波器和量测值得到。

10.4 习题

1. 已给系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 0.5x(k) + w(k) & y(k) &= x(k) + v(k) \\ Ew^2(k) &= 1 & Ev^2(k) &= 2 & x(0) &= 0 & R_0 &= 1 \end{aligned}$$

求 $x(k)$ 的滤波估计。

2. 考虑系统

$$x(k+1) = x(k) \quad y(k) = x(k) + v(k)$$

假设 $Ex(0) = 5$, $R_0 = 0.5$, $R_2 = Ev(k)v^T(k) = \sigma^2$ 。求状态的预测估计。

3. 已给系统的状态方程和输出方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + w(k) \quad y(k) = [1 \quad 0] x(k) + v(k)$$

$w(k)$, $v(k)$ 是零均值白噪声序列, 其协方差分别为 $R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $R_2(k) = 2 + (-1)^k$, 初始

状态 $x(0)$ 是正态随机矢量, 其协方差矩阵为 $R_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, 计算预测估计公式中的 $K(1)$, $K(2)$ 。

附 录

附录 A 二次型的期望值的计算

设 $Ex = m$ 则有 $E\{x^T Mx\} = m^T Mm + tr\{ME(x - m)(x - m)^T\}$

证明

$$\begin{aligned} E\{x^T Mx\} &= E(x - m)^T M(x - m) + Em^T Mx + Ex^T Mm - m^T Mm \\ &= E(x - m)^T M(x - m) + m^T Mm \end{aligned}$$

利用公式

$$tr[A^T B] = tr[BA^T]$$

得到

$$(x - m)^T M(x - m) = tr[(x - m)^T M(x - m)] = tr[M(x - m)(x - m)^T]$$

因此

$$E(x - m)^T M(x - m) = Etr[M(x - m)(x - m)^T] = tr[ME(x - m)(x - m)^T]$$

于是得到公式

$$E\{x^T Mx\} = m^T Mm + tr\{ME(x - m)(x - m)^T\}$$

附录 B MATLAB 简介及本书使用的 MATLAB 程序

MATLAB(Matrix Laboratory)是一种基于矩阵的数学与工程计算系统,可以认为 MATLAB 是一种专门为矩阵计算设计的语言。MATLAB 命令和矩阵函数是分析和设计控制系统强有力的工具。

本书中使用 MATLAB 程序的目的是为了让读者更好地理解书中涉及的系统设计步骤和问题的求解过程。应用这些程序,读者可以方便地对系统的多种参数或多种方案进行分析对比,这对于深入学习本课程是非常有益的。

本书章节中给出的程序不是完整的程序,在附录中给出了部分算法的完整程序,只需要将其存储为 *.m 文件,即可在 MATLAB 环境下运行。

建议参考一些有关 MATLAB 的基础教程或联机帮助。

一、MATLAB 通用命令介绍:

1. 管理命令和函数:

help	在线帮助文本
doc	装入超文本说明
what	M、MAT、MEX 文件的目录列表
type	列出 M 文件
lookfor	通过 help 条目搜索关键字
which	定位函数和文件

demo 运行演示示例
path 控制 MATLAB 的搜索路径

2. 管理变量和工作空间

who 列出当前变量
whos 列出当前变量(长表)
load 从磁盘文件中恢复变量
save 保存工作变量空间
clear 从内存中清除变量和函数
pack 整理工作空间内存
size 矩阵尺寸
length 矢量的长度
disp 显示矩阵和文本

二、常用操作符：

+、-、*、./、.* (数组乘)、.^、.^.(数组幂)、./、./.(数组除)、&(与)、|(或)、~(非)

三、本书中程序使用到的部分命令：

eye 单位矩阵
rank 矩阵的秩
poly 特征多项式
inv 矩阵的逆
zeros 零矩阵
fprintf 屏幕打印命令

四、本书中编写的程序命令：

nengkong.m 判断是否能控
nengguan.m 判断是否能观测

kong.m 将系统化为能控结构形式
guan.m 将系统化为能观测结构形式
fankui.m siso 单输入系统的极点配置
fankui2.m mimo 多输入系统的极点配置
guance.m 观测器的设计
LQ.m 线性二次型问题的解
genzong.m 跟踪问题的解

五、部分算法的程序

```
%%%%%%%%%%  
% 判断能控性程序 %  
%%%%%%%%%%  
%输入变量 :A  
% B  
%输出变量 :显示系统能控或不能控
```

```

function nengkong(A ,B) ;
[m n]= size(A) ;
U = ctrb(A ,B) ;
r= rank(U) ;
fprintf(' \ n') ;
if(r = m)
    disp('(A ,B)能控') ;
else
    disp('(A ,B)不完全能控') ;
end
fprintf(' \ n') ;

%%%%%%%%%%%%%%
%                判断能观测性程序                %
%%%%%%%%%%%%%%
% 输入变量 :C
%          A
% 输出变量 :显示系统能观测或不能观测

```

```

function nengguan(C ,A) ;
[m n]= size(A) ;
V = obsv(A ,C) ;
r= rank(V) ;
fprintf(' \ n') ;
if(r = m)
    disp('(C ,A)能观测') ;
else
    disp('(C ,A)不完全能观测') ;
end
fprintf(' \ n') ;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%
%                化能控结构形式程序                %
%%%%%%%%%%%%%%
% 输入变量 :A
%          B
%          C
% 输出变量 :a1

```



```
%      b1
%      c1
```

```
function [a1 ,b1 ,c1 ]= kong(a ,b ,c ) ;
[m ,n ]= size(a ) ;
temp = eye(size(a)) ;
for i = 1 : m
    temp0( : ,i) = temp * b ;
    temp = temp * a ;
end
```

```
r = rank(temp0) ;
```

```
temp2( : ,1) = temp0( : ,1) ;
for i = 1 : r
    for j = 1 : m
        temp2( : ,i) = temp0( : ,j) ;
        if rank(temp2) = = i
            break
        end
    end
end
end
```

```
temp1 = eye(size(a)) ;
for i = r + 1 : m
    for j = 1 : m
        temp2( : ,i) = temp1( : ,j) ;
        if rank(temp2) = = i
            break
        end
    end
end
end
t = temp2
t1 = inv(t) ;
a = t1 * a * t
b = t1 * b
```

```

c = c * t
a1 = a ;
b1 = b ;
c1 = c ;
%%%%%%%%%%%%%%
%           化能观测结构形式程序           %
%%%%%%%%%%%%%%
% 输入变量 :
%           原系统 A ,B ,C
% 输出变量 :
%           已化为能观测系统的 A ,B ,C

```

```
function [A ,B ,C ]= guan(A ,B ,C ) ;
```

```
[m n ]= size(A ) ;
```

```
temp = eye(size(A )) ;
```

```
for i = 1 :m
```

```
    temp0(i , :)= C * temp ;
```

```
    temp = temp * A ;
```

```
end
```

```
temp0 = null(temp0) ;
```

```
r = rank(temp0) ;
```

```
temp = eye(size(A )) ;
```

```
for i = r + 1 :m
```

```
    for j = 1 :m
```

```
        temp0( : j)= temp( : j) ;
```

```
        if rank(temp0) = i
```

```
            break
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
t = temp0
```

```
t1 = inv(t) ;
```

```
A = t1 * A * t
```

```
B = t1 * B
```

```
C = C * t
```

```

%%%%%%%%%%%%%%
%           单输入系统极点配置程序           %
%%%%%%%%%%%%%%
%输入变量 :A
%           B
%           aa :将极点写成对角阵形式 ,例 :aa=[ -1 0 0 0 -1 0 0 0 1 ];代表三个极点
%为 -1 , -1 , 1
%输出变量 :K

```

```
function K = fankui(A ,B aa)
```

```

[m n ]= size(A ) ;
j= poly(A ) ;
jj= poly(aa ) ;
for I=1 :m
    k( : ,I)=j(m+2-I)-jj(m+2-I) ;
end
temp= eye(m) ;
temp1(m)= 1 ;
for I=1 :m
    temp2( : ,I)= temp * B ;
    temp= temp * A ;
end
q= temp1 * inv(temp2) ;
temp= eye(m) ;
for I=1 :m
    t1( : ,I)= (q * temp)' ;
    temp= temp * A ;
end
t1= t1' ;
K= k * t1 ;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%
%           多输入系统极点配置程序           %
%%%%%%%%%%%%%%
%输入变量 :A
%           B
%           aa :为将极点写成对角阵形式 ,例 :aa=[ -1 0 0 0 -1 0 0 0 1 ];代表三个极
%点为 -1 , -1 , 1
%输出变量 :K

```

```
function K = fankui2(A, B, aa)
```

```
[m n] = size(B);
```

```
%%%%%%%%%%%%%% 计算 Q, S, K1 %%%%%%%%%%
```

```
u(m) = 0;
```

```
u = u + 1;
```

```
x = 1;
```

```
temp = eye(m);
```

```
Q = zeros(m);
```

```
for i = 1:m
```

```
    Q(:i) = temp * B(:x);
```

```
    if rank(Q) ~ = i
```

```
        u(x) = u(x) - 1;
```

```
        x = x + 1;
```

```
        Q(:i) = B(:x);
```

```
        temp = A;
```

```
    else
```

```
        u(x) = u(x) + 1;
```

```
        temp = temp * A;
```

```
    end
```

```
end
```

```
y = 0; z = 2;
```

```
S = zeros(size(B'));
```

```
t = eye(size(B'));
```

```
for j = 1:m
```

```
    y = y + u(j);
```

```
    if(y < m)
```

```
        S(:y) = t(:z);
```

```
        z = z + 1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
K1 = S * inv(Q);
```

```
%%%%%%%%%%%%%% 计算 k %%%%%%%%%%
```

```
a1 = A + B * K1;
```

```
j = poly(a1);
```

```
jj = poly(aa);
```

```
for i = 1:m
```

```

    k(:,i)=j(m+2-i)-jj(m+2-i);
end
%%%%%%%%%%%%% 计算 q %%%%%%%%%%%%%%
temp=eye(m);
temp1(m)=1;
for i=1:m
    temp2(:,i)=temp*b(:,i);
    temp=temp*a1;
end
q=temp1*inv(temp2);
%%%%%%%%%%%%% 计算 t1 %%%%%%%%%%%%%%
temp=eye(m);
for i=1:m
    t1(:,i)=(q*temp)';
    temp=temp*a1;
end
t1=t1';
%%%%%%%%%%%%% 计算 k1 K %%%%%%%%%%%%%%
k1=k*t1;
temp3=zeros(size(b));
temp3(:,1)=(k1)';
K=K1+temp3'
%%%%%%%%%%%%%
%           观测器设计程序           %
%%%%%%%%%%%%%
%输入变量 :A
%           B
%           aa 将极点写成对角阵形式
%输出变量 :G

%% 参数中的 aa 为将极点写成对角阵形式
function G = guance(A ,B ,aa)

A = A' ;
B = C' ;
[m ,n ]= size(A) ;
%%%%%%%%%%%%% 计算 Q ,S K1 %%%%%%%%%%%%%%
u(m)=0 ;
u=u+1 ;

```

```

x = 1 ;
temp = eye(m) ;
Q = zeros(m) ;
for i = 1 :m
    Q( : , i) = temp * B( : , x) ;
    if rank(Q) ~ = i
        u(x) = u(x) - 1 ;
        x = x + 1 ;
        Q( : , i) = B( : , x) ;
        temp = A ;
    else
        u(x) = u(x) + 1 ;
        temp = temp * A ;
    end
end
y = 0 ; z = 2 ;
S = zeros(size(B')) ;
t = eye(size(B')) ;
for j = 1 :m
    y = y + u(j) ;
    if(y < m)
        S( : , y) = t( : , z) ;
        z = z + 1 ;
    end
end
K1 = S * inv(Q) ;

%%%%%% 计算 k %%%%%%%%%
a1 = A + B * K1 ;
j = poly(a1) ;
jj = poly(aa) ;
for i = 1 :m
    k( : , i) = j(m + 2 - i) - jj(m + 2 - i) ;
end
%%%%%% 计算 q %%%%%%%%%
temp = eye(m) ;
temp1(m) = 1 ;
for i = 1 :m
    temp2( : , i) = temp * B( : , i) ;

```

```

temp= temp * a1 ;
end
q= temp1 * inv(temp2) ;
%%%%%% 计算 t1 %%%%%%%%%
temp= eye(m) ;
for i= 1 :m
    t1( :i)=(q * temp)' ;
    temp= temp * a1 ;
end
t1= t1' ;
%%%%%% 计算 k1 , K %%%%%%%%%
k1= k * t1 ;
temp3( :1)=(k1)' ;
temp3( :2)=0 ;
K= K1 + temp3' ;
K= K' ;
fprintf('\ n') ;
fprintf('所求观测器 Z=(A + GC)z + BU - Gy 其中') ;
G= K

```

```

%%%%%%%%%%
%                线性二次型问题求解程序                %
%%%%%%%%%%

```

```
function K= LQ(A ,B ,Q ,R ,F ,N)
```

```
%
```

```
%输入变量 :A
```

```
%          B
```

```
%          Q
```

```
%          R
```

```
%          F
```

```
%          N
```

```
% 输出变量(反馈增益矩阵) :K
```

```
P(N+1)= F ;
```

```
for k= 1 :N
```

```
    Z1(k)= Q(N-k+1)+ A(N-k+1)' * P(N-k+2) * A(N-k+1) ;
```

```
    Z2(k)= B(N-k+1)' * P(N-k+2) * A(N-k+1) ;
```

```
    Z3(k)= R(N-k+1)+ B(N-k+1)' * P(N-k+2) * B(N-k+1) ;
```

```
    K(N-k+1)= - inv(Z3(k)) * Z2(k) ;
```

$$P(N-k+1) = Z1(k) - Z2(k)' * \text{inv}(Z3(k)) * Z2(k);$$

end

K

```
%%%%%%%%%%%%%%
%           跟踪问题求解的程序           %
%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function [u x]=genzong(a b r d q s e w f l h i N x0)
```

```
%
% 输入变量 a b r d q s e w f l h i 为已经给定的系统参数
%           N 为叠代次数
%           x0 为系统初始值
% 输出变量 u 所求控制
%           x 系统状态
```

```
x(N+1)=0;
x(1)=x0;
tempx = -a(N+1)/b(N+1);
tempc = -w(N+1)/b(N+1);
f = f + q(N+1) + s(N+1)*tempx + r(N+1)*tempx*tempx;
h = h + s(N+1)*tempc + r(N+1)*2*tempx*tempc + d(N+1) + e(N+1)*tempx;
i = i + r(N+1)*tempc*tempc + e(N+1)*tempc + g;
P(N+1)=f;
l(N+1)=h;
j(N+1)=i;
```

```
for tempk=0:N-1
    k=N+1-tempk;
    %%%%%%%%%%%%%%%
    temp = s(k-1) + 2*P(k)*a(k-1)*b(k-1);
    temp = temp*temp;
    temp1 = r(k-1) + P(k)*b(k-1)*b(k-1);
    temp1 = temp1*4;
    temp = temp/temp1;
    P(k-1) = q(k-1) + P(k)*a(k-1)*a(k-1) - temp;
    %%%%%%%%%%%%%%%
```



```

temp = s(k-1) + 2 * P(k) * a(k-1) * b(k-1);
temp1 = e(k-1) + 2 * P(k) * b(k-1) * w(k-1) + Q(k) * b(k-1);
temp = temp * temp1;
temp1 = 2 * r(k-1) + 2 * P(k) * b(k-1) * b(k-1);
temp = temp/temp1;
l(k-1) = d(k-1) + 2 * P(k) * w(k-1) * a(k-1) + l(k) * a(k-1) - temp;
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
temp = e(k-1) + 2 * P(k) * b(k-1) * w(k-1) + l(k) * b(k-1);
temp = temp * temp;
temp1 = r(k-1) + P(k) * b(k-1) * b(k-1);
temp1 = temp1 * 4;
temp = temp/temp1;
j(k-1) = g + P(k) * w(k-1) * w(k-1) + l(k) * w(k-1) + j(k) - temp;
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %

```

end

```
for k = 2 : N + 1
```

```

temp = s(k-1) + 2 * P(k) * a(k-1) * b(k-1);
temp = temp * x(k-1) + e(k-1) + 2 * P(k) * b(k-1) * w(k-1) + l(k) * b(k-1);
temp = - temp;
temp1 = r(k-1) + P(k) * b(k-1) * b(k-1);
temp1 = temp1 * 2;
u(k-1) = temp/temp1;
x(k) = a(k-1) * x(k-1) + b(k-1) * u(k-1) + w(k-1);
end
u(N + 1) = - w(N + 1)/b(N + 1) - a(N + 1) * x(N + 1)/b(N + 1);

```

参 考 文 献

- 1 (美)Katsuhiko Ogata. 现代控制工程. 卢伯英,于海勋等译.第3版.北京:电子工业出版社,2000
- 2 王翼编著.自动控制中的基础数学——微分方程与差分方程.北京:科学出版社,1987
- 3 王翼编著.离散控制系统.北京:科学出版社,1987
- 4 涂奉生,董达生,杨勇编著.多变量线性控制系统.北京:煤炭工业出版社,1988
- 5 关肇直,陈翰馥著.线性控制系统的能控性和能观测性.北京:科学出版社,1975
- 6 Chui C K, Chen G. Linear Systems and Optimal Control. Berlin Heidelberg:Spring-verlag press,1989
- 7 王翼.极点配置问题算法的改进.自动化学报,1981,7(1):25~31
- 8 王翼.极点配置问题一种简化算法.控制理论与应用,自动化学报,1985,2(1):115~120
- 9 Kucers V. Analysis and Design of Discrete Linear Control. Englewood Cliffts:Prentice-Hall,1991
- 10 韩京清,何关钰,许可康编著.线性控制系统理论代数基础.沈阳:辽宁科学技术出版社,1985
- 11 王恩平,秦化淑,王世林编著.线性控制系统理论引论.广州:广东科技出版社,1991
- 12 沈绍信编著.线性系统理论.大连:大连理工大学出版社,1989
- 13 王诗宓编著.多变量控制系统的分析与设计.北京:中国电力出版社,1996
- 14 蒋慰孙,叶银忠编著.多变量控制系统分析与设计.北京:中国石化出版社,1997
- 15 王翼编著.现代控制论基础.北京:高等教育出版社,1995
- 16 王翼编著.经济系统的分析预测与控制.北京:中国城市出版社,2001
- 17 (德)Courant R, Hilbert D. 数学物理方法 卷 I. 钱敏,郭敦仁译.北京:科学出版社,1958
- 18 (前苏联)庞特里雅金等.最佳过程的数学理论.上海:上海科学技术出版社,1965
- 19 (日)须田信英,玉慎三,池田雅夫.自动控制中的矩阵理论.北京:科学出版社,1979
- 20 关肇直,韩京清,秦化淑著.极值控制与极大值原理.北京:科学出版社,1980
- 21 Athans M Falb. Optimal Control —An Introduction to the theory and its Applications. New York: McGraw-Hill Book Company,1966
- 22 Sage A P, White III CC. Optimum Systems Control. Englewood Cliffts:Prentice-Hall,1977
- 23 Streic V. State Space Theory of Discrete Linear Control. New York:Awiley Interseiece Publication, 1981
- 24 (美)Richard C Dorf, Robert H Bishop. 现代控制系统. 谢卫红等译.第8版.北京:高等教育出版社,2001
- 25 Chen C T. Linear System Theory and Design. Third Edition. Oxford University Press. 1999
- 26 Martensson. On the Matrix Riccati Equation. Inf.Sci.,1971,3:17-49
- 27 R E Kalman. Contributions to the theory of optimal Control. Bol. Soc. Mat. Mex. 1960, (5):102-119
- 28 Stephen J Turnovsky. Methods of Microeconomic Dynamics, Second Edition. MIT Press. 2000
- 29 (日)市川邦彦. 自动控制系统的理论.北京:机械工业出版社,1982
- 30 C H Houpis, G B Lamoni. Digital Control Systems Theory, Hardware, Software. New York: McGraw-Hill Inc. 1992
- 31 J Davison, A Goldenberg. Robust Control of a general Servomechanism Problem: The Servo Compensator. Automatica. 1975, Vol. 11: 461-471
- 32 Karl J Astrom, Bjorn Wittenmark. Computer-Controlled Systems - Theory and Design. Third Edition. Prentice Hall. 1997
- 33 N E Leonard, W S Levine. Using MATLAB to Analyze and Design Control Systems. Second Edition.

- Menlo park ,California :Addison-Wesley Publishing Company. 1995
- 34 William L Brogan. Modern Control Theory. Third Edition. New Jersey :Prentice Hall. 1991
- 35 符曦. 系统最优化及控制. 北京 机械工业出版社 2001
- 36 Patel R V ,Munro N. Multivariable System Theory and Design. Oxford Pergamon Press. 1982
- 37 P N Paraskevopoulos. Modern Control Engineering. New York :Marcel Dekker ,Inc. 2002
- 38 R T Stefaini ,B Shanian ,C J Savant ,Jr ,G H Hostetter. Design of Feedback Control Systems. Oxford Univercity Press 2002
- 39 D S Naidn. Optimal Control System. New York :CRC Press. 2003
- 40 B Kisacanin ,G C Agarwal. Linear Control Systems with Solved Problems and MATLAB examples. New York :Kluwer Academic/Plenum Publishers. 2001
- 41 J H Chow ,N W Chbat. Discrete time Control Problems-Using MATLAB and the Control System Toolbox . Brocks/Cole a division of Thomson Learning ,Inc. 2003
- 42 Ashish Tewari. Modern Control System Design-with MATLAB andSIMULINK. Johnwiley & Sons , Ltd. 2002
- 43 F Szidarovszky. Linear Systems Theory. CRC Press. 1992
- 44 P L Falb ,W A Wolovich. Decoupling in the Dsign and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE Transations on Automatic Control ,Vol. AC - 12 ,No.6 ,Dec.1967 651 - 659
- 45 David G.Hull Optimal Control Theory for Applications. SpringerVerlag New York /inc. 2003
- 46 Robert H Bishop. Modern Control Systems Analysis & Design-using MATLAB & SIMULINK . Menlo Park ,California ,1997
- 47 (意大利)G 甘道尔夫. 经济动态学. 北京 :中国经济出版社 2003
- 48 魏克新 ,王云亮 ,陈智敏编著. MATLAB 语言与自动控制系统设计. 北京 机械工业出版社 2002