

土木工程研究生系列教材

---

# 结 构 动 力 学

刘晶波 杜修力 主编

刘晶波 杜修力 李宏男 夏 禾 李鸿晶 编著  
欧进萍 主审

机 械 工 业 出 版 社

本书是土木工程研究生系列教材之一。本书在介绍基本概念和基本理论的同时，注重介绍本研究领域的前沿动态和存在的关键性问题，注重读者解决问题能力的培养和研究发展方向的指点。

本书通过对单自由度体系、多自由度体系和分布参数体系的系列介绍，使读者系统掌握结构动力学的基本理论和分析方法；通过结构动力问题分析中的数值分析方法、离散化分析和随机振动分析的系列介绍，使读者初步具有分析和解决结构动力学的理论研究和实际工程问题的能力。

本书可作为大土木专业研究生的教材和从事土木工程研究的技术人员学习参考书。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

结构动力学 刘晶波, 杜修力主编 北京: 机械工业出版社, 2004  
土木工程研究生系列教材  
ISBN 7-111-15666-9

I 刘... II 刘...②杜... III 结构动力学 原研  
究生 教材 IV

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 15666 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)  
责任编辑: 季顺利 版式设计: 张世琴 责任校对: 吴美英  
封面设计: 张 静 责任印制: 洪汉军  
北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行  
2004 年 1 月第 1 版 · 第 1 次印刷  
开本: 787mm×1092mm 1/32 印张: 1.5 千字  
定价: 25.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换  
本社购书热线电话 (010) 68995093  
封面防伪标均为盗版

# 土木工程研究生系列教材编审委员会

顾问：(以姓氏笔画为序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 刘宝琛 | 刘祖德 | 刘怀恒 | 王正宏 |
| 林 皋 | 任爱珠 | 朱博鸿 | 沈世钊 |
| 沈祖炎 | 欧进萍 | 陈英俊 | 周 氏 |
| 周锡元 | 钟善桐 | 赵国藩 | 殷宗泽 |
| 顾晓鲁 | 蔡美峰 |     |     |

主任委员：江见鲸

副主任委员：(以姓氏笔画为序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 朱合华 | 李宏男 | 李 奇 | 李爱群 |
| 陈云敏 | 张永兴 | 杜修力 | 张素梅 |
| 尚守平 | 姜忻良 | 夏 禾 | 徐志胜 |
| 廖红建 |     |     |     |

委员：(以姓氏笔画为序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 卫 军 | 王 钊 | 王清湘 | 卢廷浩 |
| 朱召泉 | 李正良 | 李英民 | 李洪泉 |
| 李鸿晶 | 刘晶波 | 吴知丰 | 陈国兴 |
| 杨果林 | 张家生 | 张毅刚 | 张耀春 |
| 郑 刚 | 易伟建 | 单 建 | 周朝阳 |
| 赵树德 | 徐礼华 | 袁迎曙 | 康清良 |
| 盛宏玉 |     |     |     |

秘书长：季顺利

# 土木工程研究生系列教材

## 序

随着我国高等教育的发展,普通本科教育已由精英式教育发展成为大众式教育。我国科学技术的高速发展,对具有高级专业知识、高级专业技能的专门人才的需求,日益迫切,这为硕士研究生教育的发展提供了广阔空间。一些高等院校,硕士研究生的招生规模,近年来正以 ~~飞快~~ ~ ~~飞快~~ 的速度发展。对一些研究型重点高校,在“十五”期间,本科生与研究生的招生比例要大致相当。许多高校已获得工程硕士的培养授权,这为研究生培养又开辟了新途径。

硕士研究生招生规模的扩大,对传统的研究生教育模式提出了挑战。过去硕士生的培养基本套用博士生的培养模式,主要靠传帮带式的教育模式,而对数量增大的研究生教育,必须建立整建制的培养模式,即要求硕士研究生的教育培养模式向公共化、规范化方向发展。对此,硕士研究生的教材,特别是研究生教育的平台课、学位课的教材建设就显得特别重要了。

机械工业出版社根据当前土木工程研究生教育发展现状,本着“大土木工程”的教育思想,组织国内部分高校土木工程专业教授,对土木工程研究生用教材建设进行了研讨,并组织编写了土木工程研究生系列教材。为保证教材的编写质量,组织成立了教材编审委员会,聘请了一批学术造诣深、德高望重的专家作顾问和教材主审。本套系列教材编写、出版的思路是:先基础课、平台课教材,后专业课教材。教材组织由长期给研究生授课的老师合作编写,达到“学校优势互补,质量上乘”的目标。教材体系设计本着“重基本理论、重学科发展,结合学生现状和人才培养要求”的原则。教材编写质量本着“出精品、主编负责、主审把关”的原则,符合国务院学位委员会设定的专业要求。

本套系列教材将于 ~~四五年~~ 陆续出版。我们相信,本套系列教材的出版将对我国土木工程研究生教育的发展和教学质量的提高及人才培养,产生积极作用,为我国经济建设和社会发展做出贡献。

王见第

# 前 言

本书为土木工程研究生结构动力学教材。本书作者多年来从事结构动力学或相关课程的教学工作，编写了多部《结构动力学》校内教材，在此基础上编写了本教材。本书在选材上注重基础理论和基本概念，同时注重培训解决理论研究和工程问题的能力，在介绍结构动力学基础知识的同时，也介绍该研究领域的前沿动态和存在的关键性问题。在本书的编写中，作者力求避免教材内容、论述和思路跳跃过大，使初学者难以理解的弊病；内容的安排上力求循序渐进、由浅入深、系统性和层次感突出，易于理解和自学；避免内容过于偏重某一专业，对基本原理和方法予以全面介绍，使教材内容有较宽的涵盖面，适用于大土木专业研究生的学习和教学的需要，使学习的知识具有较强的通用性，并能在一定程度上反映结构动力学研究的新成果。为配合教学，本书安排了适当的例题和习题，以利于对课程内容的理解和掌握。

本书系统介绍了结构动力学基础理论知识和分析方法。通过单自由度体系、多自由度体系和分布参数体系的系列介绍，使学生系统掌握结构动力学的基本理论和分析方法；通过结构动力问题分析中的数值分析方法、离散化分析和随机振动分析的系列介绍，使学生初步具备分析和解决理论研究和实际工程问题的能力；通过介绍若干重要的前沿研究成果，使学生能较迅速接触到结构动力学研究领域的前沿。本书主要内容包括：①结构动力学概述：结构动力分析的目的，动力荷载类型，结构动力计算的特点，结构离散化方法；②运动方程的建立方法：基本动力体系，刚度法原理，虚位移原理，能量法原理，运动的微分方程，重力的影响，地基运动的影响；③单自由度体系：自由振动、对简谐荷载、周期荷载和任意荷载的反应，自振频率、自振周期，阻尼比，对数衰减率，振动中的能量，共振，动力放大系数，结构粘性阻尼比的确定，复阻尼理论，振动的测量，隔振（震）原理，传递函数积分，频响函数变换，反应谱；④多自由度体系：运动的特征方程和频率方程，振型的正交性，振型叠加法，结构中的阻尼和阻尼矩阵的构造，振型加速度方法和静力修正法；⑤分布参数体系：梁的偏微分运动方程，自振频率和振型，剪切变形和转动惯性的影响，振型的正交性，梁的动力反应，均直梁轴向振动分析，分布参数结构动力分析；⑥数值分析方法：结构动

力反应数值分析的显式方法和隐式方法，结构非线性反应，数值算法中的基本问题；⑦实用振动分析：矩阵迭代法，矩阵迭代法，矩阵迭代法，矩阵迭代法，子空间迭代法；⑧离散化分析：建筑物的模型化，变分直接法，加权残值法，动力有限元方法，动力有限元法的模拟精度和误差；⑨随机振动分析：不确定性理论概述，随机过程及其时域和频域特征，功率谱密度函数，窄带与宽带随机过程，几种常见的地面运动随机过程，线性单自由度和多自由度体系随机反应，虚拟激励法，结构随机反应分析的状态空间法；⑩专题介绍：结构地震反应分析中的多点、多维输入问题，复模态分析方法，动态子结构法，结构动力分析中的物理非线性和几何非线性问题，结构动力参数识别和动力检测。

本书共分 15 章，其中第 1 章、第 2 章和第 3 章由刘晶波执笔，第 4 章、第 5 章和第 6 章由杜修力执笔，第 7 章由夏禾执笔，第 8 章和第 9 章由李宏男执笔，第 10 章由李鸿晶执笔。全书由刘晶波、杜修力定稿。研究生王艳、刘阳冰、谷音、刘琳、赵密在书稿的校对、习题和插图等方面做了大量工作。

本书主审欧进萍院士仔细阅读了全部书稿，并提出了十分有益的建议和修改意见。

由于作者水平所限和时间关系，本书在内容安排和各章节的衔接上还有考虑不周之处，疏漏和错误也在所难免，欢迎读者批评指正。

作 者  
刘晶波 等  
2000 年秋

# 主要符号表

|                |                           |
|----------------|---------------------------|
| [悦]            | 阻尼矩阵                      |
| 悦              | 阻尼系数                      |
| 悦 <sub>土</sub> | 振型阻尼                      |
| 糰              | 临界阻尼系数                    |
| 糰              | 阻尼矩阵中的元素                  |
| 耘              | 弹性模量                      |
| 耘              | 梁截面抗弯刚度                   |
| 耘              | 一个振动循环内阻尼引起的能量耗散, 即阻尼力做的功 |
| 耘              | 一个振动循环内外力做的功              |
| 耘 <sub>东</sub> | 一个振动循环内弹性力做的功             |
| 耘 <sub>运</sub> | 一个振动循环内惯性力做的功             |
| 枣              | 频率 (匀)                    |
| 枣              | 自振频率 (匀)                  |
| 藺              | 惯性力                       |
| 藺              | 阻尼力                       |
| 藺              | 弹性或非弹性的(弹簧)恢复力            |
| 匀(蚤)           | 复频反应函数                    |
| 澡(贼)           | 单位脉冲反应函数                  |
| [运]            | 刚度矩阵                      |
| 运 <sub>土</sub> | 振型刚度                      |
| 噪              | 刚度                        |
| 噪              | 刚度矩阵中的元素                  |
| [酝]            | 质量矩阵                      |
| 酝 <sub>土</sub> | 振型质量                      |
| 酝              | 集中质量、质量线密度, 弯矩            |
| 皂              | 质量矩阵中的元素                  |
| 晕              | 轴力, 自由度数                  |
| 孕              | 简谐荷载的幅值                   |
| 孕, {孕}         | 外荷载, 外荷载向量                |
| 匝              | 广义力, 剪力                   |
| 择              | 广义坐标                      |
| 砸(ω)           | 动力放大系数                    |

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| $\bar{c}$         | 传递系数        |
| $\bar{c}$         | 周期, 动能      |
| $\bar{c}_d$       | 自振周期        |
| $\bar{c}_d$       | 阻尼体系自振周期    |
| $\bar{c}$         | 时间          |
| $\bar{c}$         | 脉冲作用时间      |
| $\{\bar{c}\}$     | 位移向量        |
| $\bar{c}_0$       | 初始位移        |
| $\bar{c}_0$       | 初始速度        |
| $\bar{c}$         | 位移          |
| $\bar{c}_{eq}$    | 等效静位移       |
| $\bar{c}_m$       | 简谐位移的幅值     |
| $\bar{c}$         | 速度          |
| $\bar{c}$         | 加速度         |
| $\bar{c}_g$       | 地面运动位移      |
| $\bar{c}_g$       | 地面运动加速度     |
| 灾                 | 应变能, 势能, 剪力 |
| 曾                 | 坐标, 输入荷载    |
| 赠                 | 坐标, 位移反应    |
| $\zeta$           | 阻尼比         |
| $\zeta_{cr}$      | 临界阻尼比       |
| $\zeta_d$         | 二阶振型阻尼比     |
| $\eta$            | 滞变阻尼参数      |
| $\omega$          | 圆频率, 外荷载频率  |
| $\omega_d$        | 自振圆频率       |
| $\omega_d$        | 阻尼体系自振圆频率   |
| $\omega_{cr}$     | 频率比         |
| $\phi$            | 相位角         |
| $\{\phi\}_d$      | 二阶振型        |
| $[\Phi]$          | 振型矩阵        |
| $\rho$            | 质量密度        |
| $\theta$          | 转角, 相位角     |
| $\delta(\bar{c})$ | 单位脉冲        |
| $\Delta\bar{c}$   | 时间步长        |

# 目 录

土木工程研究生系列教材序

前言

主要符号表

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| 第 1 章 概述 .....              | 1 |
| 1.1 结构动力分析的目的 .....         | 1 |
| 1.2 动力荷载的类型 .....           | 1 |
| 1.3 结构动力计算的特点 .....         | 1 |
| 1.4 结构离散化方法 .....           | 1 |
| 习题 .....                    | 1 |
| 第 2 章 分析动力学基础及运动方程的建立 ..... | 2 |
| 2.1 基本概念 .....              | 2 |
| 2.1.1 广义坐标与动力自由度 .....      | 2 |
| 2.1.2 功和能 .....             | 2 |
| 2.1.3 实位移、可能位移和虚位移 .....    | 2 |
| 2.1.4 广义力 .....             | 2 |
| 2.1.5 惯性力 .....             | 2 |
| 2.1.6 弹簧的恢复力 .....          | 2 |
| 2.1.7 阻尼力 .....             | 2 |
| 2.1.8 线弹性体系和阻尼弹性体系 .....    | 2 |
| 2.1.9 非弹性体系 .....           | 2 |
| 2.2 基本力学原理及运动方程的建立 .....    | 2 |
| 2.2.1 牛顿第二定律 .....          | 2 |
| 2.2.2 虚功原理 .....            | 2 |
| 2.2.3 哈密顿原理 .....           | 2 |
| 2.2.4 拉格朗日方程 .....          | 2 |

|     |                               |   |
|-----|-------------------------------|---|
| 圆   | 重力的影响 .....                   | 獭 |
| 圆   | 地基运动的影响 .....                 | 獭 |
| 习   | 题 .....                       | 獭 |
| 第 猿 | 章 单自由度体系 .....                | 獭 |
| 獭   | 无阻尼自由振动 .....                 | 獭 |
| 獭   | 有阻尼自由振动 .....                 | 獭 |
| 獭   | 临界阻尼和阻尼比 .....                | 獭 |
| 獭   | 低阻尼体系 .....                   | 獭 |
| 獭   | 运动的衰减和阻尼比的测量 .....            | 獭 |
| 獭   | 自由振动试验 .....                  | 獭 |
| 獭   | 库仑（悦造）阻尼自由振动 .....            | 獭 |
| 獭   | 单自由度体系对简谐荷载的反应 .....          | 獭 |
| 獭   | 无阻尼体系的简谐荷载反应 .....            | 獭 |
| 獭   | 有阻尼体系的简谐荷载反应 .....            | 獭 |
| 獭   | 共振反应 .....                    | 獭 |
| 獭   | 动力放大系数 .....                  | 獭 |
| 獭   | 阻尼体系动力反应与荷载的相位关系 .....        | 獭 |
| 獭   | 用简谐振动（强迫振动）试验确定体系的粘性阻尼比 ..... | 獭 |
| 獭   | 体系的阻尼和振动过程中的能量 .....          | 獭 |
| 獭   | 自由振动过程中的能量 .....              | 獭 |
| 獭   | 粘性阻尼体系的能量耗散 .....             | 獭 |
| 獭   | 等效粘性阻尼 .....                  | 獭 |
| 獭   | 滞变阻尼（复阻尼）理论 .....             | 獭 |
| 獭   | 振动的测量 .....                   | 獭 |
| 獭   | 加速度计（强震仪） .....               | 獭 |
| 獭   | 位移计（地震仪） .....                | 獭 |
| 獭   | 隔振（震）原理 .....                 | 獭 |
| 獭   | 力的传递和隔振 .....                 | 獭 |
| 獭   | 基底振动的隔离 .....                 | 獭 |
| 獭   | 单自由度体系对周期荷载的反应 .....          | 獭 |
| 獭   | 单自由度体系对任意荷载的反应 .....          | 獭 |
| 獭   | 时域分析方法——阅造积分 .....            | 獭 |
| 獭   | 频域分析方法——云造变换法 .....           | 獭 |
| 獭   | 结构地震反应分析的反应谱法 .....           | 獭 |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| 习题 .....                  | 愿 |
| 第 源章 多自由度体系 .....         | 愿 |
| 源 两自由度体系的振动分析 .....       | 愿 |
| 源 无阻尼自由振动 .....           | 愿 |
| 源 坐标的耦联 .....             | 愿 |
| 源 多自由度体系的无阻尼自由振动 .....    | 愿 |
| 源 频率方程 .....              | 愿 |
| 源 振型分析 .....              | 愿 |
| 源 多自由度体系动力反应的振型叠加法 .....  | 愿 |
| 源 正则坐标变换 .....            | 愿 |
| 源 无阻尼体系动力反应的振型叠加法 .....   | 愿 |
| 源 有阻尼体系动力反应的振型叠加法 .....   | 愿 |
| 源 结构中的阻尼和阻尼矩阵的构造 .....    | 愿 |
| 源 阻尼实测的例子 .....           | 愿 |
| 源 阻尼器阻尼 .....             | 愿 |
| 源 扩展的 阻尼器阻尼 (悦恩阻尼) .....  | 愿 |
| 源 利用振型阻尼矩阵直接叠加 .....      | 愿 |
| 源 非经典阻尼矩阵的构造 .....        | 愿 |
| 源 静力修正方法 .....            | 愿 |
| 源 振型加速度法 .....            | 愿 |
| 习题 .....                  | 愿 |
| 第 缘章 动力反应数值分析方法 .....     | 愿 |
| 缘 数值算法中的基本问题 .....        | 愿 |
| 缘 分段解析法 .....             | 愿 |
| 缘 中心差分法 .....             | 愿 |
| 缘 增量法 .....               | 愿 |
| 缘 辛法 .....                | 愿 |
| 缘 结构非线性反应计算 .....         | 愿 |
| 习题 .....                  | 愿 |
| 第 远章 分布参数体系 .....         | 愿 |
| 远 梁的偏微分运动方程 .....         | 愿 |
| 远 弯曲梁 (欧拉梁) 的横向振动方程 ..... | 愿 |

|      |                            |    |
|------|----------------------------|----|
| 远园园  | 考虑轴向力影响的梁的弯曲振动方程 .....     | 员源 |
| 远园园  | 考虑转动惯量的梁的横向振动方程 .....      | 员缘 |
| 远园园  | 考虑剪切变形和转动惯量的梁的横向振动方程 ..... | 员苑 |
| 远园园  | 考虑阻尼影响的梁的振动方程 .....        | 员怨 |
| 远园   | 梁的自振频率和振型 .....            | 员园 |
| 远园园  | 弯曲梁的自振频率和振型 .....          | 员园 |
| 远园园  | 轴向力对梁的自振特性的影响 .....        | 员元 |
| 远园园  | 剪切变形和转动惯性对自振频率的影响 .....    | 员愿 |
| 远园   | 振型的正交性 .....               | 员园 |
| 远园   | 梁的动力反应 .....               | 员园 |
| 远园园  | 广义坐标 .....                 | 员猿 |
| 远园园  | 振型叠加法 .....                | 员源 |
| 远园园  | 梁的强迫振动 .....               | 员远 |
| 远园   | 简支梁在移动荷载作用下的振动 .....       | 员园 |
| 远园园  | 简支梁在移动力作用下的振动 .....        | 员园 |
| 远园园  | 简支梁在移动质量作用下的振动 .....       | 员猿 |
| 远园园  | 简支梁在移动车轮加簧上质量作用下的振动 .....  | 员缘 |
| 远园   | 均直梁轴向振动分析 .....            | 员园 |
| 远园   | 分布参数结构振动分析(动力直接刚度法) .....  | 员源 |
| 远园园  | 分布参数结构的自振特性分析 .....        | 员源 |
| 远园园  | 动力直接刚度法 .....              | 员缘 |
|      | 习题 .....                   | 园猿 |
| 第 苑章 | 实用振动分析 .....               | 园元 |
| 苑园   | 矩阵乘法 .....                 | 园元 |
| 苑园   | 矩阵乘积求逆法 .....              | 园怨 |
| 苑园   | 矩阵迭代法 .....                | 园园 |
| 苑园园  | 用矩阵迭代法求基频和振型 .....         | 园园 |
| 苑园园  | 用矩阵迭代法求高阶频率和振型 .....       | 园缘 |
| 苑园   | 高斯-塞德尔(雅可比)迭代法 .....       | 园园 |
| 苑园   | 子空间迭代法 .....               | 园猿 |
|      | 习题 .....                   | 园源 |
| 第 愿章 | 连续体动力模型的离散化 .....          | 园元 |
| 愿园   | 集中质量法及建筑物的模型化 .....        | 园元 |

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 质量集中化 .....                 | 圆苑 |
| 力学分析模型 .....                | 圆苑 |
| 圆园 变分直接法 .....              | 圆怨 |
| 基本思想 .....                  | 圆怨 |
| 试函数的选择及其分类 .....            | 圆员 |
| 圆员 加权残值法 .....              | 圆员 |
| 第一种形式的加权残值法 .....           | 圆圆 |
| 第二种形式的加权残值法 .....           | 圆猿 |
| 圆源 动力有限元法 .....             | 圆源 |
| 有限元离散化 .....                | 圆源 |
| 基本分析过程 .....                | 圆缘 |
| 圆缘 有限元法单元位移模式及插值函数的构造 ..... | 圆远 |
| 圆远 有限元分析中的基本要素 .....        | 圆愿 |
| 单元刚度矩阵 .....                | 圆愿 |
| 单元质量矩阵 .....                | 圆园 |
| 等效节点荷载 .....                | 圆猿 |
| 圆苑 动力有限元法的精度 .....          | 圆苑 |
| 习题 .....                    | 圆愿 |
| 第 怨章 结构随机振动 .....           | 圆怨 |
| 概述 .....                    | 圆怨 |
| 圆 随机过程及其时域特征 .....          | 圆员 |
| 圆 随机过程的概念 .....             | 圆员 |
| 圆 随机过程的概率描述 .....           | 圆猿 |
| 圆 随机过程的数字特征 .....           | 圆源 |
| 圆 平稳随机过程 .....              | 圆远 |
| 圆 导数过程的相关函数 .....           | 圆苑 |
| 圆 随机过程的频域特征 .....           | 圆愿 |
| 圆 平稳过程的功率谱密度 .....          | 圆愿 |
| 圆 谱密度的性质 .....              | 圆怨 |
| 圆 导数过程的谱密度 .....            | 圆园 |
| 圆 窄带与宽带随机过程 .....           | 圆员 |
| 圆 互谱密度及其性质 .....            | 圆员 |
| 圆 随机地震地面运动模型 .....          | 圆圆 |
| 圆 理想白噪声模型 .....             | 圆圆 |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| 金井清 (远建原模型) .....         | 源 |
| 改进的金井清模型 .....            | 源 |
| 缘 线性单自由度体系随机反应 .....      | 源 |
| 脉冲反应函数和复频反应函数 .....       | 缘 |
| 反应过程的均值 .....             | 苑 |
| 反应过程的自相关 .....            | 苑 |
| 反应过程的自谱密度 .....           | 愿 |
| 激励和反应的互相关和互谱密度 .....      | 怨 |
| 远 线性多自由度体系随机反应 .....      | 怨 |
| 直接方法 .....                | 园 |
| 振型叠加分析方法 .....            | 源 |
| 苑 结构随机反应分析的虚拟激励法 .....    | 远 |
| 单输入情形 .....               | 远 |
| 多输入情形 .....               | 愿 |
| 愿 结构随机反应分析的状态空间法 .....    | 怨 |
| 状态空间的基本概念 .....           | 园 |
| 单自由度体系 .....              | 园 |
| 多自由度体系 .....              | 园 |
| 第 5 章 结构动力学专题 .....       | 源 |
| 结构地震反应分析中的多点输入问题 .....    | 源 |
| 动力方程 .....                | 源 |
| 振型叠加法 .....               | 缘 |
| 结构地震反应分析中的多维输入问题 .....    | 远 |
| 非对称结构在多维地震输入时的振型叠加法 ..... | 远 |
| 多维地震作用下的反应谱方法 .....       | 苑 |
| 复模态分析方法 .....             | 愿 |
| 状态变量与状态空间 .....           | 愿 |
| 复特征值问题 .....              | 怨 |
| 复特征值向量的正交性 .....          | 园 |
| 复模态叠加法 .....              | 园 |
| 动态子结构法 .....              | 园 |
| 模态综合法 .....               | 园 |
| 界面位移综合法 .....             | 远 |
| 结构动力分析中的物理非线性问题 .....     | 愿 |

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| 几个重要的恢复力曲线模型 .....             | 愿 |
| 双向恢复力模型 .....                  | 困 |
| 结构动力分析中的几何非线性问题 .....          | 源 |
| 孕原 $\Delta$ 效应 .....           | 源 |
| 多自由度体系的 孕原 $\Delta$ 效应问题 ..... | 像 |
| 结构动力参数识别和动力检测 .....            | 范 |
| 动力参数频域识别方法 .....               | 范 |
| 动力检测的激励和测量方面的考虑 .....          | 园 |
| 参考文献 .....                     | 猿 |

# 第 1 章 概 述

## 1.1 结构动力分析的目的

自然界中，除静力问题外，还存在大量的动力问题。例如地震作用下建筑结构的振动问题；机器转动产生的不平衡力引起的大型机器基础的振动问题；风荷载作用下大型桥梁、高层结构的振动问题；车辆运行中由于路面不平顺引起的车辆振动及车辆引起的路面振动；爆炸荷载作用下防护工事的冲击动力反应问题等等，量大而面广。

虽然在一般情况下，对结构设计和结构分析而言，静力问题是首先要面对的，而且是问题的主要方面，但有时动力荷载引起的破坏却是致命的，是引起结构毁灭性破坏的主要原因。例如，地震引起的结构倒塌破坏；风振引起的大桥破坏；飞机撞击核电站、大楼等，其造成破坏和损失的程度远胜于静荷载。因此，在工程结构的研究、设计和安全性评价时，进行结构的动力反应分析是重要的。虽然在某些结构设计规范或结构动力反应分析中，为简化起见，采用了一些拟静力计算方法，例如，结构抗震规范中的反应谱法，抗风分析中用等效静力形式的风压代替实际的风压。但在这些方法中仍必须进行结构动力分析，例如需要确定结构的自振周期，而在多自由度体系的反应谱法分析时还需要确定结构振型等。

结构动力分析的目的是确定动力荷载作用下结构的内力和变形，并通过动力分析确定结构的动力特性。结构动力学是研究结构体系的动力特性及其在动力荷载作用下的动力反应分析原理和方法的一门理论和技术学科，该学科的目的是为改善工程结构体系在动力环境中的安全性和可靠性提供坚实的理论基础。

## 1.2 动力荷载的类型

引起结构静力反应和动力反应不同的原因是荷载的不同。根据荷载是否随时间变化，或随时间变化速率的不同，可以把荷载分为静荷载和动荷载两大类。静荷载是大小、方向和作用点不随时间变化或缓慢变化的荷载，如结构的自重、雪荷载等；动荷载是随时间快速变化或在短时间内突然作用或消失的荷载。荷载随时间变化是指其大小、方向或作用点随时间改变，其中作用点随时间变化的荷载称为移动荷载，例如车辆荷载。

根据荷载是否已预先确定，动荷载可以分为两类：确定性（非随机）荷载和非确定性（随机）荷载。预先的含义是指在进行结构动力分析之前。

确定性荷载是荷载随时间的变化规律已预先确定，是完全已知的时间过程；非确定性荷载是荷载随时间的变化规律预先不可以确定，是一种随机过程。根据这两类动荷载的不同，结构动力分析方法可划分为两类：确定性分析和随机振动分析。当不考虑结构体系的不确定性时，选用哪种分析方法将依据荷载的类型而定。

应注意的是,随机的含义是指非确定的,而不是指复杂的;简单的荷载可以是随机的,而复杂的荷载也可以是确定性的。例如,振幅  $\sigma$  或初始相角  $\phi$  具有不确定性的简谐荷载  $\sigma \sin(\omega t + \phi)$ ,虽然其形式极为简单,但它是随机的。而对于已记录到的地震或脉动风引起的作用于建筑结构的地震作用或风荷载,虽然其随时间变化规律非常复杂,但当用于结构动力反应分析时,它属于确定性荷载。当然,建筑物未来遭遇的地震作用、风荷载是未知的,在将来任一段时间内的确切量值无法事先确定,属于随机荷载。对于地震作用和风荷载而言,一个确定的记录相当于随机事件的一个样本,每一个具体的样本都是确定性的,但所有样本的集合反映出事件的随机规律性。

根据荷载随时间的变化规律, 动力荷载一般可以划分为两类, 即周期荷载和非周期荷载。而根据结构对不同荷载的反应特点或采用的动力分析方法的不同, 周期荷载又可分为简谐荷载和非简谐周期荷载, 非周期荷载又分为冲击荷载和一般任意荷载。

张简谐荷载

荷载随时间周期性变化，并可以用简谐函数来表示，例如云 贼越粤粤粤贼云 贼越月粤粤贼 简谐荷载作用下结构的动力反应分析是重要的，因为不仅实际工程中存在这类荷载，而且由于非简谐的周期荷载可以用一系列简谐荷载的和来表示，这样，一般周期荷载作用下结构的动力反应问题可以转化为一系列简谐荷载作用下的反应问题。而且结构对简谐荷载的反应规律可以反映出结构的动力特性。

### 圆非简谐周期荷载

荷载随时间作周期性变化,是时间  $t$  的周期函数,但不能简单地用简谐函数来表示。例如,平稳情况下波浪对堤坝的动水压力;轮船螺旋桨产生的推力等。

### 獾冲击荷载

荷载的幅值（大小）在很短时间内急剧增大或急剧减小。例如，爆炸引起的冲击波、突加重量等。

源一般任意荷载

荷载的幅值变化复杂,难以用解析函数表示的荷载。例如,由环境振动引起的地脉动、地震引起的地震动,以及脉动风引起的结构表面的风压时程等。

图 5.1.1 给出了以上四种类型荷载的时程曲线。

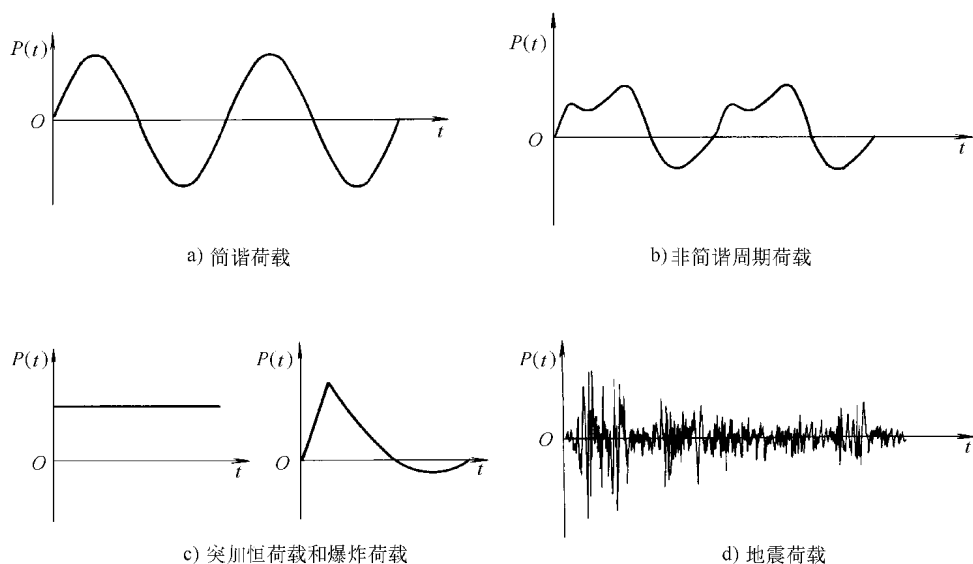


图 11-1 动力荷载的类型

## 11.1 结构动力计算的特点

与静力问题相比，结构动力计算的特点反映在两个方面：

(1) 动力反应要计算全部时间点上的一系列解，比静力问题复杂且要消耗更多的计算时间。使结构反应成为动力反应的外因是作用于结构的荷载是动力的，即荷载随时间变化。但仅此外因并不足以引起结构静、动力反应产生重大不同，因为如果仅有此外因，而与静力反应相比没有新的重要的因素影响到结构反应，则结构动力反应分析将变成求解一系列真正的静力问题，而无需发展一系列动力问题的分析方法。

(2) 与静力问题相比，由于动力反应中结构的位置随时间迅速变化，从而产生惯性力，惯性力对结构的反应又产生重要影响。

如图 11-2 所示，一均匀简支梁在梁中受荷载  $P$  作用，如果  $P$  是静力荷载，则简支梁所受的力仅有已知的外力  $P$  和支座反力；但如果  $P$  是动荷载，则在  $P$  的作用下，梁的位置会发生迅速变化，梁中所受的力除外力  $P$  和支座反力外，还受到沿梁轴线分布的惯性力作用。惯性力的大小与梁的运动有关，同时对梁的运动又产生重要影响。惯性力的出现使结构的反应分析变得大为复杂。

当加载速率较快时，由惯性力引起的结构附加反应（相对静力问题而言）可能比相应的静力反应大得多。如图 11-3 所示，一弹簧-质量点体系，计算质点在重力荷载作用下的反应。如果重力荷载按静力加载，即相当于将质量块缓慢放于

弹簧之上，则按静力学分析，弹簧的静位移等于  $\frac{mg}{k}$ ，但如果质量块是突然放到弹簧之上并立即松手，则弹簧原质点体系将发生动力反应，此时质点的动力反应曲线如图 1.1.1 所示，可以发现，动力反应的振幅等于圆 5，是静力反应的圆 5 倍，即动力反应大于静力反应。

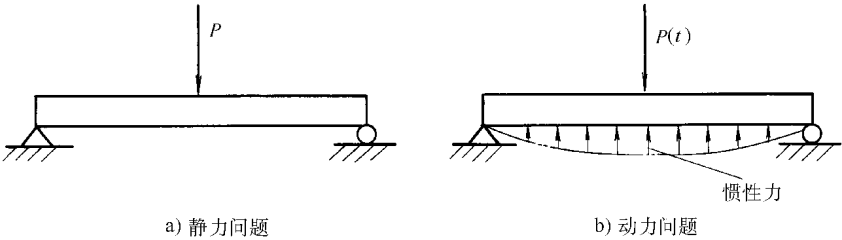


图 1.1.1 静力问题和动力问题受力的区别

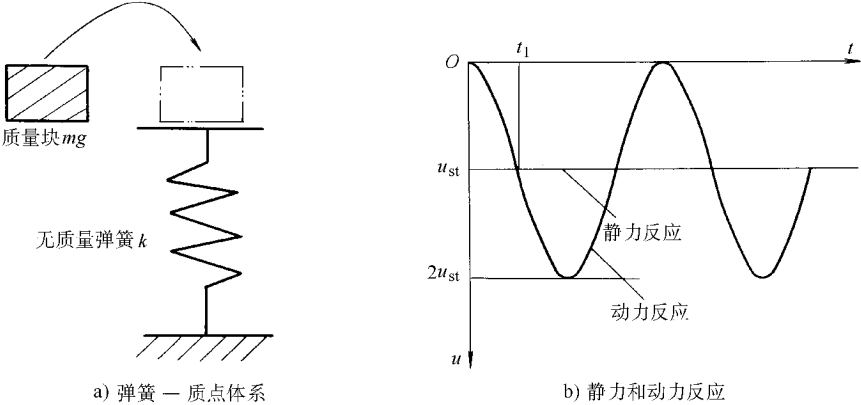


图 1.1.2 静力问题和动力问题位移反应的区别

结构动力计算需要在全部时间域内进行分析，并考虑惯性力的影响。惯性力的出现使分析工作变得复杂，而对惯性力的了解和有效处理又可使复杂的动力问题分析得以简化。

惯性力的出现，或说考虑惯性力的影响，是结构动力学和静力学的一个本质的、重要的区别。在结构动力反应分析中，有时可通过对惯性力的假设而使动力计算大为简化，如在框架结构地震反应分析中常采用的层模型。

惯性力是使结构产生动力反应的本质因素，而惯性力的产生又是由结构的质量引起的。因此，对结构中质量位置及其运动的描述是结构动力分析中的关键，这也导致了结构动力学和结构静力学中对结构体系自由度定义的不同。在结构动力学中动力自由度（数目）的定义为：动力分析中为确定体系任一时刻全部质量

的几何位置所需要的独立参数的数目。这些独立参数也称为体系的广义坐标，可以是位移、转角或其他广义量。关于广义坐标与动力自由度的概念将在第 12 章详细介绍。

## 11.1 结构离散化方法

由于惯性力是导致结构产生动力运动和振动反应的根本原因，因此对惯性力的合理描述和考虑是至关重要的。

惯性力与结构质量有关，大小等于质量与加速度之积，方向与加速度方向相反。实际结构的质量都是连续分布的，因而在实际问题中，大小和方向随时间变化的惯性力是在结构中连续分布的。如果要准确考虑和确定全部的惯性力，就必须确定结构上每一点的运动。这时，结构上各点的位置都是独立的变量，导致结构有无限个自由度。如果所有结构都按无限自由度来分析计算，则不仅十分困难，而且实际证明也没有必要。因此，通常对计算模型加以简化，一般称之为结构离散化方法。动力分析中常用的结构离散化方法有集中质量法、广义坐标法和有限元法。

离散化方法也就是把无限自由度问题转化为有限自由度的过程。

### 11.1.1 集中质量法

集中质量法是结构动力分析最常用的处理方法，它把连续分布的质量集中为几个质点，这样就把一个原为无限（动力）自由度的问题简化为有限自由度。

图 11-1 是两个连续分布质量的结构，通过集中质量法将无限自由度问题化为有限自由度的例子。其中图 11-1(a)为一简支的连续梁，通过把连续分布的质量集中到如图 11-1(b)所示的梁中三个点上，即用集中质点代替连续分布质量，将梁化为具有三个质点的有限自由度体系。如果仅考虑梁平面内的横向运动，则集中质量简支梁具有三个横向位移自由度。图 11-1(c)为三层平面框架结构，如果把每一层柱和梁的质量集中到相应楼层梁的中点，则框架结构成为具有三个集中质点的有限自由度体系。

### 11.1.2 广义坐标法

广义坐标：能决定体系几何位置的彼此独立的量，称为该体系的广义坐标。

在数学中常采用级数展开法求微分方程的解，在结构动力分析中，可以采用相同的方法进行求解。例如，对于一个具有分布质量的简支梁（如图 11-2(a)所示），其变形（挠）曲线可用三角级数的和来表示，即

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L w(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (11-1)$$

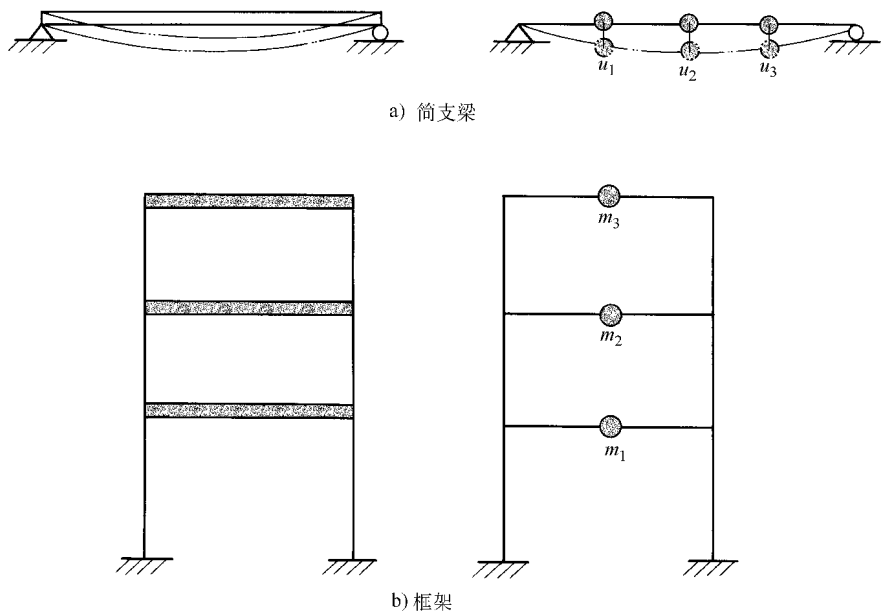


图 1-1 结构集中质量法离散化示意图

式中， $l$  为梁长； $u(x,t)$  为形函数（形状函数），它是满足边界条件的给定函数； $q(t)$  为广义坐标，是一组待定参数，对动力问题而言，它是时间的函数。

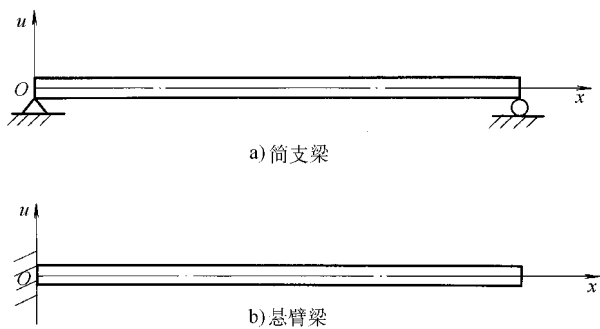


图 1-2 用广义坐标法离散化的简支梁和悬臂梁模型

由于形函数是预先给定的，是确定的函数，梁的变形即由无限多个广义坐标  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  所确定。这时，简支梁动力反应分析中梁应具有无限个自由度。与数学分析中的处理方法相同，在实际分析中仅取级数的前几项，例如

取 1 项, 则有

$$\delta u \approx \sum_{i=1}^n \delta u_i \quad (1.1)$$

这样, 简支梁被简化为具有 1 个自由度的体系。

对于如图 1.1 所示的悬臂梁结构, 也可以用幂级数展开表示, 即

$$\delta u \approx \sum_{i=1}^n \delta u_i \quad (1.2)$$

根据约束边界条件, 在 0 处, 位移  $\delta u = 0$  和转角  $\delta \theta = 0$ , 因此  $\delta u_i = 0$  则

$$\delta u \approx \sum_{i=1}^n \delta u_i \quad (1.3)$$

取前 1 项, 即

$$\delta u \approx \delta u_1 \quad (1.4)$$

这样问题就又化为具有 1 个自由度的问题。

对更一般的问题, 结构的位移表示式可写为

$$\delta u \approx \sum_{i=1}^n \delta u_i \quad (1.5)$$

式中,  $\delta u_i$  为形函数的幅值, 即广义坐标;  $\phi_i(x)$  为形函数, 满足边界条件, 一般是连续函数 (已知的)。

虽然广义坐标表示了形函数的大小, 如果形函数是位移量, 则广义坐标具有位移的量纲, 但只有 1 项叠加后才是真实的位移物理量, 因而广义坐标实际上并不是真实的物理量。

### 有限元法

有限元法可以看作是广义坐标的一种特殊应用。一般的广义坐标法中, 广义坐标是形函数的幅值, 有时没有很明确的物理意义, 并且在广义坐标法中, 形函数是针对整个结构定义的。而有限元法则采用具有明确物理意义的参数作为广义坐标, 且形函数是定义在分片区域上的。在有限元分析中, 形函数被称为插值函数。

例如, 对一个连续梁, 可分为 1 个单元 (梁段), 相邻单元的交点称为节点, 取节点位移参数 (线位移  $\delta$  和转角  $\theta$ ) 为广义坐标。在图 1.2 中, 1 项即采用三个有限单元离散化的情形。

图 1.2 给出的有限元模型共有六个广义坐标 (位移参数):  $\delta_1, \theta_1, \delta_2, \theta_2, \delta_3, \theta_3$ 。每个节点的位移参数只在与节点相邻的单元内引起位移, 图 1.3 也给出了与节点位移参数  $\delta_1, \theta_1, \delta_2, \theta_2, \delta_3, \theta_3$  相应的形函数  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6$

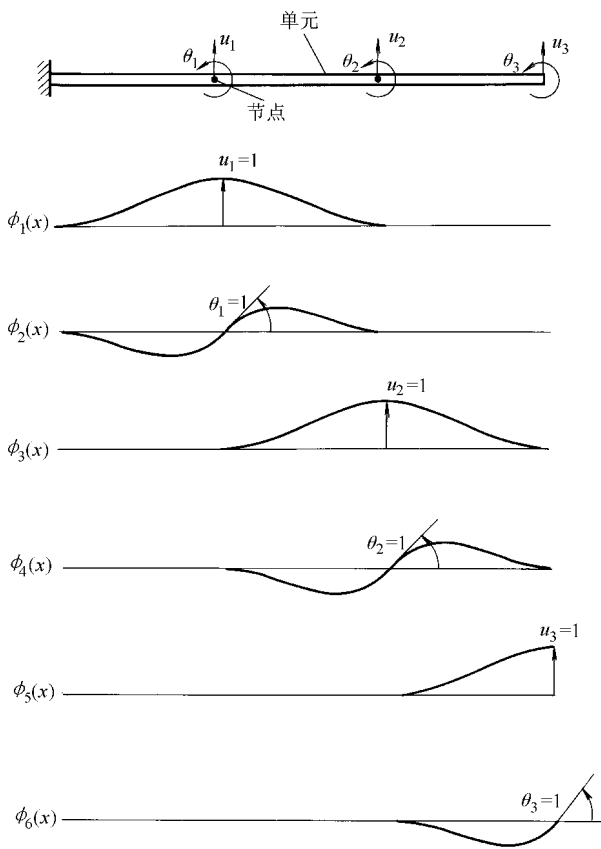


图 1.1.1 有限元法离散化示意图

对于采用  $n$  个单元离散化的悬臂梁模型，共有  $2n$  个广义坐标，梁的位移可以用  $2n$  个广义坐标及其形函数表示如下

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2n} \phi_i(x) q_i \quad (1.1.1)$$

通过这样的方法，将无限自由度的梁转化为具有  $2n$  个有限自由度的体系。

- 有限元法综合了集中质量法和广义坐标法的特点：
- (1) 与广义坐标法相似，有限元法采用了形函数的概念。但不同于广义坐标法在全部体系（结构）上插值（即定义形函数），而是采用了分片的插值（即定义分片形函数），因此形函数的表达式（形状）可以相对简单。
  - (2) 与集中质量法相比，有限元法中的广义坐标也采用了真实的物理量，具有直接、直观的优点，这与集中质量法相同。

## 习题

4-1 结构动力学与静力学的主要区别是什么？

4-2 采用集中质量法、广义坐标法和有限元法都可使无限自由度体系简化为有限自由度体系，它们所采用的手法有什么不同？

4-3 图 4-1 所示弹簧-质点体系，静力加载时，质量块受力为  $P$ ，而动力加载受力为  $P \sin \omega t$ ，在  $0 \sim \frac{\pi}{2\omega}$  时间段， $\omega$  为正，即  $P \sin \omega t \approx P \omega t$ ，为什么动力反应的结果不小于静力反应值？

# 第 四 章 分析动力学基础及 运动方程的建立

力学分析方法一般可分为两大类：一是以牛顿基本定律为基础的矢量力学；另一类是以普遍的变分原理为基础的标量力学。后者是利用标量形式的广义坐标来代替前者的矢量形式的矢径表述，以对能量和功的分析来代替对力和动量的分析，从而可以方便地利用纯粹数学分析的方法来建立力学体系的运动控制方程。结构动力学分析中也大量采用了分析力学的方法，使问题的建模和求解得以简化并且能方便运用微分几何等近现代数学分析手段。本章简单介绍了经典分析动力学中的一些基本概念和力学原理及其在建立动力学运动方程方面的应用。

## 四 基本概念

### 四 广义坐标与动力自由度

质点、质点系和刚体是力学分析中抽象出来的三种理想模型。质点是指只有质量、没有大小的物体；质点系是由若干质点组成的、有内在联系的集合；刚体则是一种特殊的质点系，其中的任意两质点间的距离是不变的。分析力学的研究对象主要是质点系。质点系各质点的空间位置的有序集合决定了该质点系的位置和形状，称为该质点系的位形。研究描述质点系位形变化过程的运动方程、初边值条件及其运动方程的求解是分析力学的主要内容。广义地讲，离散化的结构体系都可理解为质点系。

一般说来，某个质点经过一定时间后其位置发生移动的现象称为运动。描述质点运动需要一定的参照标准来作为度量基准，这种参照标准就是坐标系。在工程问题中，可以不考虑地球的运动，这时可以认为基础坐标系与地球固结在一起。直接与基础坐标系相关联的运动称为“绝对运动”。通常用图 4-1 所示的右手坐标系作为表示质点空间位置的坐标系。也可以用半径向量  $\vec{r}_i$  来表示。

如果质点系的每一个质点都可以相对于基础坐标系在各方向自由运动，则

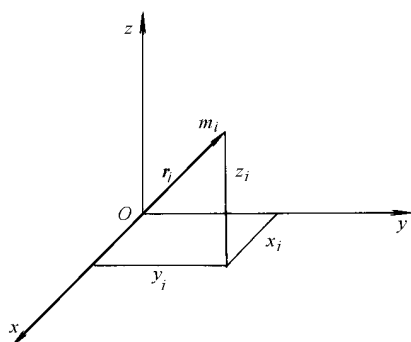


图 4-1 右手坐标系示意图

称为自由质点系，简称自由系，否则称为非自由系。

对非自由系各质点的位置和速度所加的几何的或运动学的限制称为“约束”。注意这里的约束与通常的力学常识中的“约束”的区别，如“弹性约束”就不属于分析力学中定义的“约束”。因为这种“约束”并不成为限制质点运动的设施。因此，只有从几何或运动学方面限制质点运动的设施才能在分析力学中被称为“约束”。下面不作特别说明时均指这种“约束”。

由于“约束”的存在使得非自由质点系各质点的位置坐标值不是独立的变量。换句话说讲，即不需要这些坐标值的全部就可决定所有质点的空间位置。如图 4-1 所示的双质点系，两杆均为无重刚杆，设此体系只能在  $xy$  平面中运动。很显然，两质点在任意时刻的位置可用位置坐标  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  来确定。但是，由于两刚杆所起的约束作用，质点  $m_1$  和  $m_2$  的直角坐标值  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  之间必须满足两个约束方程，即

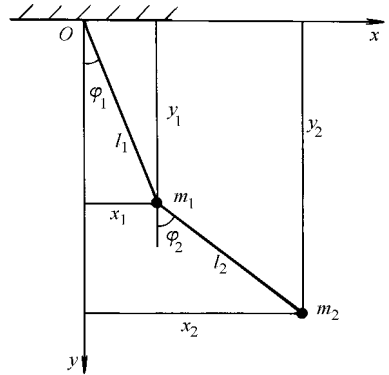


图 4-1 双质点系模型和坐标系

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_1^2 + l_2^2 \\ & (x_1 - x_2) \cos \varphi_1 + (y_1 - y_2) \sin \varphi_1 = l_1 \end{aligned}$$

由上述两个方程可以消去两个坐标值，因而只有两个可以独立改变的几何参数。

广义坐标：能决定质点系几何位置的彼此独立的量称为该质点系的广义坐标。广义坐标可以取长度量纲的量，也可以用角度甚至面积和体积来表示。

广义坐标的选取可以有多种，但必须是相互独立的参数。如图 4-1 所示，广义坐标可以为  $(x_1, x_2)$ 、 $(y_1, y_2)$ 、 $(x_1, y_2)$ 、 $(x_2, y_1)$  或  $(\varphi_1, \varphi_2)$ ，但不能选择  $(x_1, y_1)$  或  $(x_2, y_2)$ 。广义坐标的选择原则是使解题方便。

下面再来介绍结构体系动力自由度的概念。

定义：结构体系在任意瞬时的一切可能的弹性变形中，决定全部质量位置所需的独立参数的数目称为结构的动力自由度。

显然，对于大多数工程结构体系（这里均指的是完整系，其“约束”可以表示为  $\dot{x} = 0$ ），即约束方程中不含坐标对时间的导数），广义坐标数目与动力自由度是相同的。

下面举几个例子加以说明。

图 4-2 所示的门式框架，忽略柱的轴向变形和质量。由于楼盖只能作水平运

动，因此该体系是单自由度的。

图 圆源 所示杆系结构，杆的轴向变形不能忽略时，皂<sub>员</sub>、皂<sub>圆</sub>均可作上下、左右运动，体系的动力自由度数为 源 若再考虑质量 皂<sub>员</sub>、皂<sub>圆</sub>的转动惯性，则体系的动力自由度数为 远

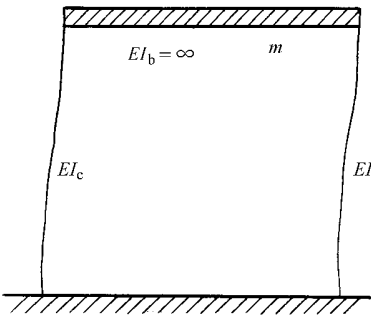


图 圆缘 门式框架模型

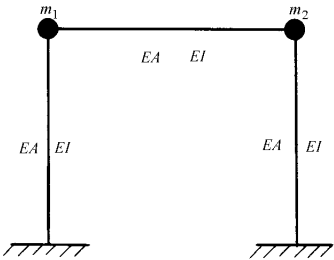


图 圆源 杆系结构模型

若体系自由度数大于 员且为有限，通常称之为多自由度体系。  
当结构体系较为复杂，自由度不易直接看出时，可外加约束固定各质点，使体系所有质点均被固定所必需的最少的外加约束的数目就等于其自由度数。图 圆缘 所示刚架，具有四个质点。忽略杆的轴向变形，则只需加入三根支杆便可限制其全部质点的位置，如图 圆缘 所示，故其动力自由度为 猿

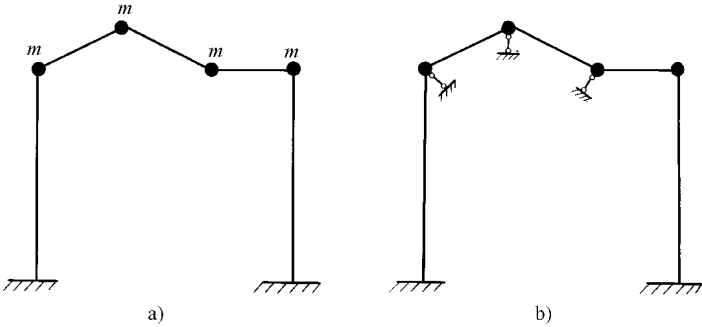


图 圆缘 外加约束求体系自由度

由上面的例子可见，动力自由度数目不完全取决于质点的数目，也与结构是否静定无关。当然，自由度数目是随计算要求的精确度不同而有所改变的。实际上，工程结构的质量分布是非常复杂的，一般均为连续分布的质量体系，其自由度数目为无限。完全按实际结构计算是十分困难的。因此，针对具体问题，采用一定的简化措施是必要的。

下面比较结构静力学中的自由度与动力学中动力自由度概念的区别。

静力学中自由度的概念：确定体系在空间中的位置所需的独立参数的数目。

对工程结构来讲，其体系的空间位置及内部变形实际上都与质量相关联，这时质量是分布参数。因此，结构体系的动力自由度和静力自由度应该是一样的。但是，为了数学处理上的简单，人们在建立结构体系的简化力学模型时可能忽略了一些对惯性影响不大的因素，这时就可能导致两种自由度的不同。如图 10-1 所示框架结构体系，假设各节点是刚性的，忽略构件的轴向和剪切变形以及节点的转动惯性。平面框架中共有 10 个可动节点，总共有 15 个静力自由度。再由动力自由度的定义可知图 10-1 的框架体系是三自由度。因为  $u_1, u_2, u_3$  三个水平位移就完全确定了各节点上集中质量的位置。如节点的转动惯性不能忽略，则结构的动力自由度数为 15，与静力自由度相同。由此可见，对于同一结构模型，动、静自由度之所以发生不相同的情况，完全是由于动力自由度与静力自由度的定义不同而导致的，也受到对力学模型简化的影响。

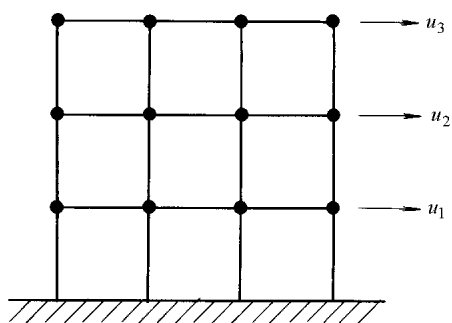


图 10-1 框架结构体系模型

## 10.1 功和能

### 10.1.1 功的定义

如图 10-2 所示， $m$  为一运动着的质点， $F$  为作用在质点  $m$  上的力，当质点作微量位移  $du$  时，力  $F$  所作的元功  $dW$  被定义为

$$dW = F \cdot du \quad (10.1)$$

在质点  $m$  由  $A$  移至  $B$  的过程中，力  $F$  所作的功为

$$W = \int_A^B F \cdot du \quad (10.2)$$

其中  $u$  为由  $A$  到  $B$  的曲线。若力  $F$  的大小、方向不变时， $F$  所作的功可进一步表示为

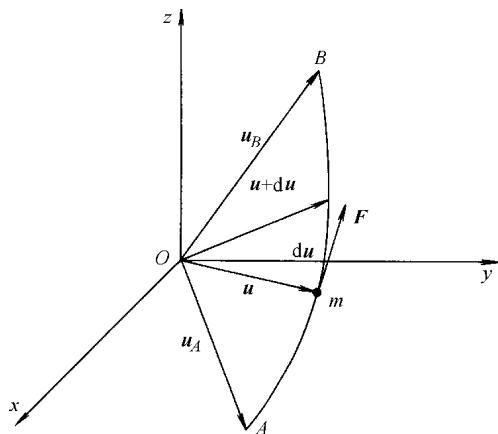


图 10-2 质点运动示意图

宰<sub>云</sub>( 兽原兽)垣<sub>云</sub>( 赠原赠)垣<sub>云</sub>( 拈原拈) (圆源)

在功的定义中,对位移是由什么原因引起的,并无任何限制。在应用式(圆源)时,只要求力<sub>云</sub>的大小和方向不变,对质点<sub>皂</sub>是经由什么途径从<sub>粤</sub>移动到<sub>月</sub>的,也无任何限制。

值得指出的是,上述功的定义仅适用于力的受力点和力点的运动情况是一致的,这对绝大多数工程问题是适合的。

### 圆有势力和势能

设质点系中的每一个质点<sub>皂</sub>上所受的力为<sub>云</sub>(可以是约束反力),若满足下述两种性质,则可称之为有势力:

(员) 这些力中每一个力的大小和方向只决定于体系所有各质点的位置。

(圆) 体系从某一位置<sub>粤</sub>移动到另一位置<sub>月</sub>(蚤越员,圆,...,晕;晕为质点数目),各力所作的功之和只决定于位置<sub>粤</sub>和<sub>月</sub>,而与各质点运动的路径无关。

由有势力的上述特性可推得

$$\oint \text{云} \text{宰} \text{越宰} \text{越园} \quad (\text{圆源})$$

这表明有势力(又称保守力)云沿任何封闭路线所作的功为零。

先取体系的某一位置<sub>韵</sub>作为体系的“零位置”,则势能定义为体系从位置<sub>粤</sub>移至<sub>韵</sub>过程中各力所作的功之和。有势力所作的功仅与体系前后的位置有关,而与路径无关。因此,当确定了体系的“零位置”后,体系的任意状态的势能将是各质点位置的单值函数,表示为

$$\text{哉} \text{越哉} \text{兽,赠,拈} \quad (\text{圆缘})$$

在“零位置”时势能为零。函数<sub>哉</sub>称为势函数。

设<sub>哉</sub>是位置<sub>粤</sub>时体系的势能,<sub>哉</sub>是位置<sub>月</sub>时体系的势能,则由<sub>粤</sub>到<sub>月</sub>时体系势能的变化可表示为

$$\text{哉} \text{原哉} \text{越宰} \text{越原哉} \quad (\text{由} \text{粤} \text{到} \text{月} \text{势能的增量})$$

$$\sum_{\text{皂} \text{越员}}^{\text{晕}} \text{宰} \text{越} \sum_{\text{皂} \text{越员}}^{\text{晕}} (\text{云} \text{宰} \text{兽} \text{垣} \text{云} \text{宰} \text{赠} \text{垣} \text{云} \text{宰} \text{拈}) \text{越原哉} \quad (\text{圆远})$$

$\sum \text{宰}$ 表示微元功,由式(圆远)可有

$$\text{云} \text{越原} \frac{\partial \text{哉}}{\partial \text{兽}} \quad \text{云} \text{越原} \frac{\partial \text{哉}}{\partial \text{赠}} \quad \text{云} \text{越原} \frac{\partial \text{哉}}{\partial \text{拈}} \quad (\text{圆苑})$$

式(圆苑)表明,有势力<sub>云</sub>可表示为势函数的负梯度形式

$$\text{云} \text{越原} \text{宰} \text{哉} \quad (\text{圆愿})$$

### 动能

设质点系中任一质点<sub>皂</sub>的速度为<sub>怎</sub>,加速度为<sub>怎</sub>,再由牛顿定律

云<sub>质</sub>皂<sub>质</sub>怎<sub>质</sub>将其代入式 (4.4) 有

$$\begin{aligned} \Delta T &= \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt + \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt \\ &= \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt + \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt \\ &= \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt + \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt - \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

定义质点系的动能为

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 \quad (4.6)$$

由式 (4.5) 可知：质点系从一位置移动到另一位置时，其动能的增量等于作用于该质点系的力在给定运动过程中所作的功。

## 4.2 实位移、可能位移和虚位移

可能位移：满足所有约束方程的位移称为体系的可能位移。

实位移：如果位移不仅满足约束方程，而且满足运动方程和初始条件，则称为体系的实位移。

虚位移：在某一固定时刻，体系在约束许可的情况下可能产生的任意组微小位移，称为体系的虚位移。

从上面的定义可见，实位移即为体系的真实位移，它必为可能位移中的一员。虚位移与可能位移的区别在于虚位移是约束冻结后许可产生的微小位移。当对于约束方程中不显含时间的稳定约束体系中虚位移与可能位移相同时，实位移必与某一虚位移重合。

## 4.3 广义力

对于完整约束的质点系，任一质点  $\alpha$  的空间位置  $\mathbf{r}_{\alpha}$  可表示为其广义坐标  $q_1, q_2, \dots, q_n$  和时间  $t$  的函数

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (4.7)$$

该质点所受力为  $\mathbf{F}_{\alpha}$ ，于是在虚位移  $\delta \mathbf{r}_{\alpha}$  上所作虚功为

$$\delta W_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} \quad (4.8)$$

$\delta W_{\alpha}$  可表示为广义坐标的虚位移  $\delta q_i$  的函数

$$\delta W_{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (4.9)$$

将式 (4.9) 代入式 (4.8) 有

$$\delta \Sigma \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial \delta q_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial \delta q_i}$$

(图例)

质点系的虚功为

$$\delta \Sigma \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}}$$

(图例)

定义

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}}$$

(图例)

为对应于广义坐标  $q_i$  的广义力。

由上面的定义可见，广义力是标量而非矢量，广义力与广义坐标的乘积具有功的量纲。

广义力的计算方法：

(1) 式(图例) 写成投影形式

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}} \cos \alpha_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}} \sin \alpha_{ij} \right)$$

(图例)

式中， $\frac{\partial W}{\partial \delta q_{ij}}$  为质点  $i$  所受力  $F_{ij}$  在  $q_i$  轴上的投影； $\alpha_{ij}$  为  $F_{ij}$  与  $q_i$  轴的坐标位置。当  $\alpha_{ij}$  可容易地表示为广义坐标的函数时，由式(图例)求  $Q_i$  是便捷的。

(2) 若记  $\delta W$  为  $\delta q_i$  对应的虚功，此时其余广义坐标不变，则  $Q_i$  对应的广义力可按下式计算

$$Q_i = \frac{\delta W}{\delta q_i}$$

(图例)

算例 图 图例所示的双质点系， $F_1$  和  $F_2$  为作用于质点  $m_1$  和  $m_2$  上的外力。广义坐标选择  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ，求对应的广义力。

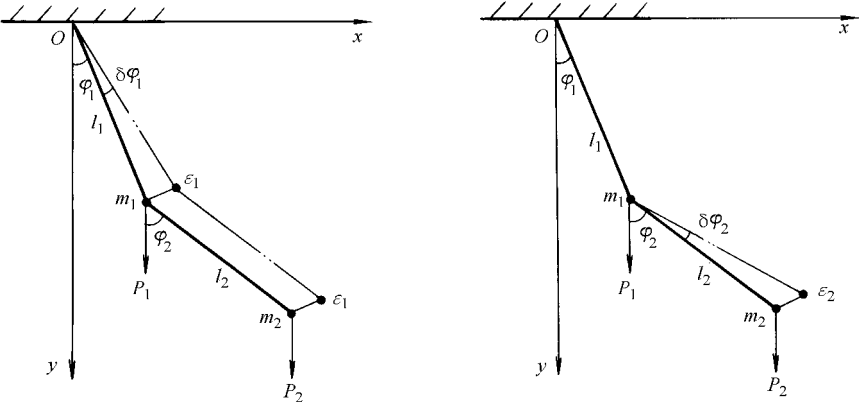


图 图例 算例 图例模型

解：方法一

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}}$$

由于  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}}$  为零。因此，只需写出由广义坐标  $\varphi_{\text{员}}$  和  $\varphi_{\text{圆}}$  表达的  $\mathcal{L}$  和  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}}$  即可，即

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}^2 + \frac{1}{2} m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}}^2 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} &= m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} = m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} &= m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} = m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}} \end{aligned}$$

方法二

先令  $\varphi_{\text{员}}$  有一虚位移  $\delta \varphi_{\text{员}}$ ,  $\varphi_{\text{圆}}$  不变，则质点系对应的虚功为

$$\delta \mathcal{W} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} \delta \varphi_{\text{员}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} \delta \varphi_{\text{圆}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} \delta \varphi_{\text{员}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} \delta \varphi_{\text{圆}}$$

将其代入式 (4.10) 可求得

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} = m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} = m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}}$$

再令  $\varphi_{\text{圆}}$  有一虚位移  $\delta \varphi_{\text{圆}}$ ,  $\varphi_{\text{员}}$  不变，则质点系对应的虚功为

$$\delta \mathcal{W} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} \delta \varphi_{\text{员}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} \delta \varphi_{\text{圆}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} \delta \varphi_{\text{员}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} \delta \varphi_{\text{圆}}$$

相应的

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{圆}}} = m_{\text{圆}} \dot{\varphi}_{\text{圆}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{员}}} = m_{\text{员}} \dot{\varphi}_{\text{员}}$$

## 四、惯性力

在中学物理或大学本科的理论力学中已接触到惯性力的概念。惯性是保持物体运动状态的能力。质量不同的物体，运动状态不同时，其惯性力也不相同。惯性的作用表现在，当物体的运动状态改变时，惯性将反抗运动的改变，提供一种反抗物体运动状态改变的力。这种力被称为惯性力，用  $\mathbf{F}_{\text{惯}}$  表示，大小等于物体

的质量与加速度的乘积，方向与加速度的方向相反，即

$$F = -mu$$

(图 1-1)

式中， $m$  表示惯性； $m$  为质量； $u$  为加速度。

## 1.2 弹簧的恢复力

当质点离开初始平衡位置产生位移时，弹簧被拉伸或压缩（对结构体系而言，是产生变形），弹簧（结构构件）对质点产生作用力，将质点拉回到平衡位置，这种力称为恢复力，记为  $F_s$ 。一般情况下，弹簧的恢复力与弹簧的变形有关，可表示成质点位移的函数，方向指向体系的平衡位置。图 1-2 给出了弹簧恢复力与位移的关系。当力与位移关系为线性时，弹簧的恢复力也被称为弹性恢复力，其大小等于弹簧刚度与位移之积，即

$$F_s = ku$$

(图 1-2)

式中，下标  $s$  表示弹簧； $F_s$  为弹性恢复力； $k$  为弹簧的刚度； $u$  为质点位移。

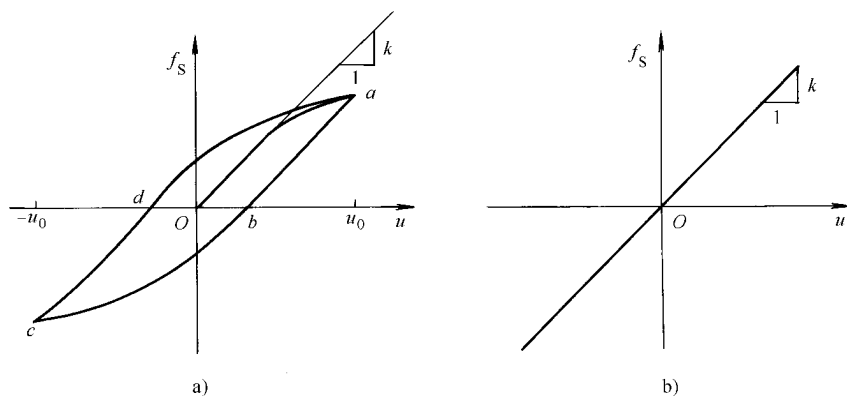


图 1-2 弹簧恢复力与位移的关系

当单层框架结构的梁与柱的刚度比为有限值，在水平力作用下结构变形时，梁也将发生变形，如图 1-3 所示，此时可将结构质量集中到梁的中点，并仅考虑质点的水平位移，使结构化为单自由度体系。如果框架结构宽为  $b$ ，高为  $h$ ，弹性模量为  $E$ ，梁和柱的截面弯曲惯性矩分别为  $I_b$  和  $I_c$ ，则单自由度体系的刚度为

$$k = \frac{12EI_b}{h^3} + \frac{12EI_c}{h^3}$$

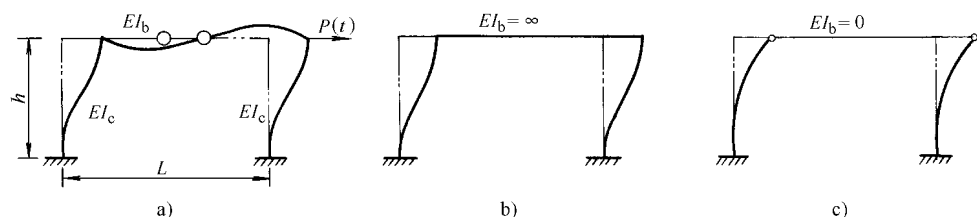


图 4-4 弹簧恢复力与位移关系

当梁的抗弯刚度远大于柱的抗弯刚度时 (图 4-4b 所示),  $\rho \rightarrow 1$ , 此时, 体系的刚度为

$$\frac{EI_b}{h^3}$$

当梁的抗弯刚度为零时 (图 4-4c 所示),  $\rho \rightarrow 0$ , 体系的刚度为

$$\frac{EI_c}{h}$$

可见对于框架结构体系, 梁的抗弯刚度对体系的水平刚度影响很大。

## 4.3 阻尼力

对于弹簧-质点体系, 给一初始的扰动 (初始位移或初始速度) 后, 质点在平衡点附近作往复振动, 称之为自由振动。如果结构体系仅由理想的弹簧和质量块组成, 而没有其他影响因素存在, 那么, 自由振动将持续下去, 直到永远。而实际问题并不存在这样的振动, 任何振动在没有持续外力作用下, 经过一段时间都将衰减到零, 结构最后趋向静止。说明任何实际结构在自由振动过程中一定存在能量的消耗。引起结构能量的耗散, 使结构振幅逐渐变小的这种作用称为阻尼, 也称为阻尼力。

结构振动过程中阻尼力有多种来源。产生阻尼力的物理机制有很多, 例如:

(1) 固体材料变形时的内摩擦, 或材料快速应变引起的热耗散。

(2) 结构连接部位的摩擦, 例如钢结构焊缝螺栓连接处的摩擦; 混凝土中微裂纹的张开和闭合; 结构构件与非结构构件之间的摩擦, 例如填充墙与主体结构间的摩擦等。

(3) 结构周围外部介质引起的阻尼。例如, 空气、流体的影响等。

实际问题中, 以上影响因素几乎同时存在, 将其分开几乎是不可能的。在结构动力反应问题中一般采用高度理想化的方法来考虑阻尼, 往往采用粘性阻尼假设, 阻尼系数采用粘性阻尼消耗的能量等于所有阻尼机制引起的能量消耗的方法确定。在单自由度体系中, 粘性阻尼力可表示为

式中, 下标  $D$  表示阻尼;  $f_D$  为阻尼力;  $c$  为阻尼系数;  $\dot{u}$  为质点的运动速度。

图 4-1 给出了结构动力分析中常采用的粘性阻尼及其与速度的关系。

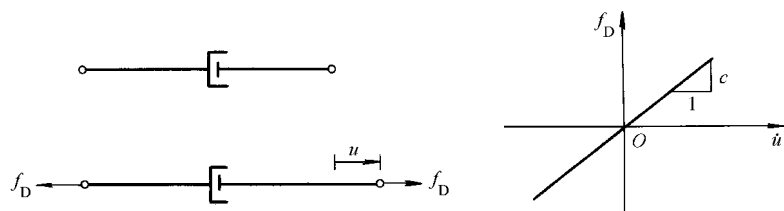


图 4-1 粘性阻尼力与速度关系

在考虑阻尼影响时, 单质点弹性体系中的阻尼力可表示为: 粘性阻尼力的大小与速度成正比, 方向与速度相反, 起阻碍介质运动的作用。

阻尼系数  $c$  不能像结构刚度  $k$  那样可通过结构几何尺寸、构件尺寸等来获得, 因为  $c$  是反映了多种耗能因素综合影响的系数。阻尼系数  $c$  一般是通过结构原型振动试验的方法得到。粘性阻尼理论仅是多种阻尼中最为简单的一种, 除此之外, 还有以下常用的阻尼:

摩擦阻尼: 阻尼力大小与速度大小无关, 一般为常数。

滞变阻尼: 阻尼力大小与位移成正比 (相位与速度相同)。

流体阻尼: 阻尼力与质点速度的平方成正比, 例如, 由空气 (风)、水产生的阻力。

## 4.1 线弹性体系和阻尼弹性体系

线弹性体系: 由线性弹簧 (或线性构件) 组成的体系。当结构处于小变形状态, 并忽略介质的阻尼时, 结构体系成为线弹性体系。这是一种最简单的理想化力学模型。

阻尼弹性体系: 当线弹性体系中进一步考虑阻尼的影响时, 结构体系被称为阻尼弹性体系。阻尼弹性体系是结构动力分析中最基本的力学模型。

## 4.2 非弹性体系

只有当结构处于小变形状态时, 结构的反应才表现为弹性状态。而在高强度荷载作用下, 例如强地震作用下, 结构将进入大变形状态, 结构构件的力-位移关系将出现非线性关系, 结构刚度不再为常数, 这时构件 (或弹簧) 的恢复力  $F$  可表示为

柔是位移  $u$  和速度  $\dot{u}$  的非线性函数, 此时结构体系为非弹性体系。

(10-10)

工程结构是属于弹性体系还是非弹性体系, 一般主要由结构变形的大小决定。图 10-10 是一典型钢结构构件的力 (弯矩) 与位移 (曲率或转角) 关系曲线。可见, 当结构的变形 (位移) 较小时, 力与位移之间呈现线性关系, 结构处于线性阶段, 结构的反应为弹性反应; 而当结构的变形变大, 超过了弹性极限时, 反应进入非线性阶段, 结构属于非弹性体系, 此时, 构件或弹簧恢复力  $F$  的确定将变得复杂。

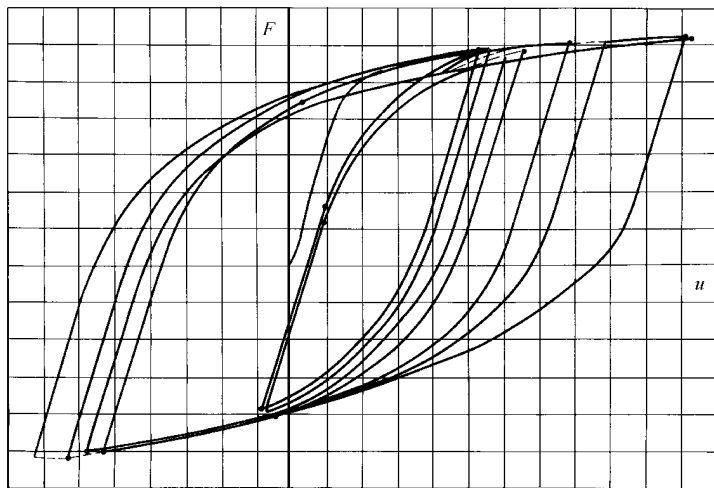


图 10-10 非弹性体系中结构构件的力与位移的关系

## 10.1 基本力学原理及运动方程的建立

### 10.1.1 达朗贝尔原理

将质点系所受之力分为主动力、“约束”反力和惯性力, 则质点系的达朗贝尔原理可表述为: 在质点系运动的任意瞬时, 如果除了实际作用于每一质点的主动力和约束反力外, 再加上假想的惯性力, 则在该瞬时质点系将处于假想的平衡状态, 称之为动力平衡状态。

记  $F_i$ 、 $F_{ci}$ 、 $F_{ci}^*$  分别为质点  $m_i$  所受之主动力、惯性力和约束反力, 则达朗贝尔原理可表示为

$$F_i + F_{ci}^* + F_{ci} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10-11)$$

(10-11)

通常主动力  $F_i$  包括外荷载  $F_i^e$ 、阻尼力  $F_i^d$  和弹性恢复力  $F_i^s$

必须指出, 对质点来说惯性力是假想中施加的, 而非实际作用于质点上的

力。但对施力物体而言，则是为了克服质点 皂 的惯性所需的力，因此，惯性力是作用于施力物体之上的。

用 阅 造 皂 皂 原理来建立质点系运动方程的方法称为“动静法”或“惯性力法”。  
算例 圆 圆 图 圆 圆 所示体系，质量 皂 上受外力 孕 贼 作用，试列出体系的运动方程。

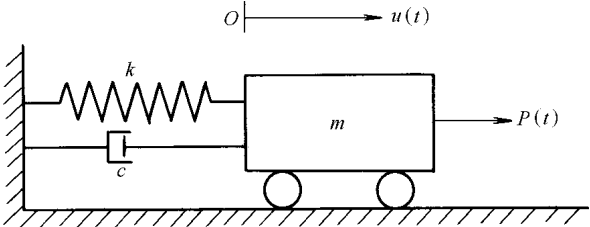


图 圆 圆 算例 圆 圆 模型示意图

解：质量 皂 只能作水平运动，因此，该体系为单自由度体系。设 怎 贼 为质量块 皂 的位移坐标，则质量块 皂 所受的主动动力为

云 贼 越 原 怎 贼 原 怎 贼 垣 孕 贼

惯性力为

皂 怎 贼 越 原 皂 怎 贼

对于约束反力不作功的理想约束体系（下面我们还将介绍这一概念），由于约束限制了体系的运动，因此，在列运动方程时，仅考虑运动方向上的受力，此时约束反力自然是没的。

将上面两式代入式（圆 圆 圆 有

皂 怎 贼 垣 怎 贼 垣 皂 怎 贼 越 孕 贼

算例 圆 圆 图 圆 圆 所示两质点动力体系，求运动方程。

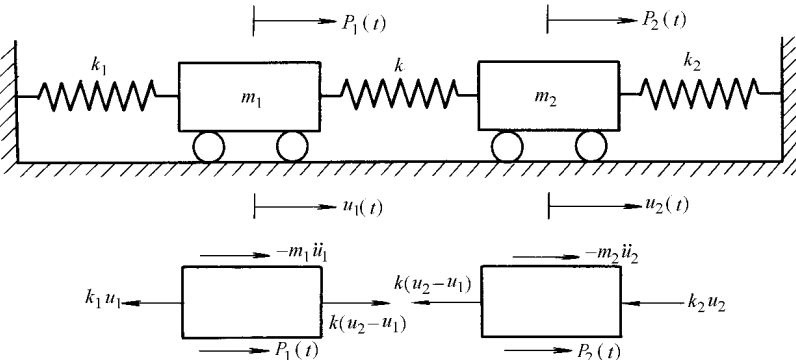


图 圆 圆 算例 圆 圆 模型示意图

解：皂<sub>1</sub>上所受的主动动力：云( 贼越孕( 贼垣噪怎( 贼原怎( 贼)原噪怎( 贼 惯性力：枣( 贼越原皂怎( 贼

皂<sub>2</sub>上所受的主动动力：云( 贼越孕( 贼原噪怎( 贼原怎( 贼)原噪怎( 贼 惯性力：枣( 贼越原皂怎( 贼  
代入动平衡方程有

$$\begin{aligned} & \text{孕( 贼垣 怎( 贼原怎( 贼)噪京噪怎( 贼原皂怎( 贼越园} \\ & \text{孕( 贼原 怎( 贼原怎( 贼)噪京噪怎( 贼原皂怎( 贼越园} \end{aligned}$$

整理后写成矩阵形式得

$$[ \text{酝} ] \text{怎垣运} [ \text{怎越孕} ]$$

其中

$$[ \text{酝} ] \text{越} \begin{bmatrix} \text{皂} & \text{园} \\ \text{园} & \text{皂} \end{bmatrix} [ \text{运} ] \text{越} \begin{bmatrix} \text{噪垣噪} & \text{原噪} \\ \text{原噪} & \text{噪垣噪} \end{bmatrix} \{ \text{怎越怎} \text{怎} \} \text{裁}$$

$$\{ \text{怎越怎} \text{怎} \} \text{裁} \{ \text{孕越孕} \text{孕} \} \text{裁}$$

算例 图 所示具有 灶个集中质量的无重简支动力体系，列出其运动方程（忽略阻尼力作用）。

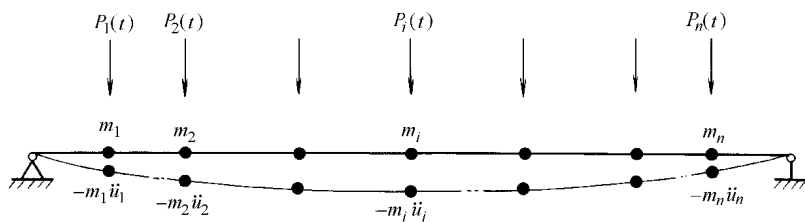


图 算例 模型示意图

解：设第 蚤个质点的位移为 怎( 贼，若假定 噪( 躁坐标单位位移所引起的对应于 蚤坐标的力，这可由结构力学方法求得）已知，那么，质点 皂<sub>蚤</sub>上所受主动力为

$$\text{云越孕( 贼原噪怎原噪怎原... 原噪怎}$$

惯性力为

$$\text{枣越原皂怎}$$

将上面两式代入动平衡方程有

$$\text{皂怎垣噪怎垣噪怎垣... 垣噪怎越孕( 贼}$$

对于具有 灶个质点的体系来说，相应地可建立 灶个独立方程，写成矩阵形

式为

$$[K] \{u\} = \{F\}$$

其中

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} \\ \{F\} &= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

通过以上算例可知，应用“动静法”列运动方程的步骤如下：

(1) 分析体系各质量所受的主动力和惯性力。

(2) 沿质量的各自由度方向列平衡方程。

## 虚功原理

动力学虚功原理：具有理想约束的质点系运动时，在任意瞬时，主动力和惯性力在任意虚位移上所作的元功之和等于零。

理想约束：在任意虚位移下，约束反力所作元功之和恒等于零， $\sum \delta W_{\text{约束}} = 0$ ，也即约束反力不作功。设体系第  $i$  质点所受的主动力合力为  $F_i$ ，惯性力为  $-m_i \ddot{x}_i$ ，虚位移为  $\delta x_i$ ，由虚功原理写出如下虚功方程

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \quad (1)$$

由于虚位移  $\delta x_i$  的任意性，上式得以满足的充要条件是

$$F_i - m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

这表明虚功原理是和平衡法等价的。因此，在用虚功原理建立方程时，首先要确定体系各质量上所受的力，包括惯性力。然后引入相应于每个自由度的虚位移，并使所作的功等于零，这样就可得出运动方程。

利用虚功原理解题的主要优点是：虚功为标量，可以按代数方式相加。而作用于结构上的力为矢量，它只能按矢量叠加。因此，对于不便于列平衡方程的复杂体系，虚功方法较平衡法方便。

下面举例来说明虚功原理的应用。

算例 04-01 图 04-01 所示的动力体系，试列出其运动方程。

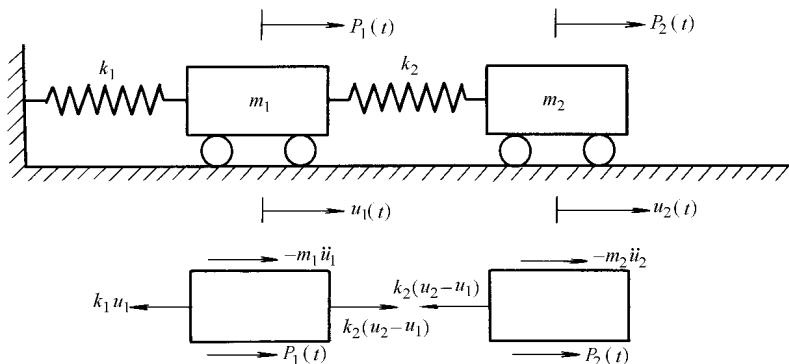


图 04-01 算例 04-01 模型示意图

解：质量 皂<sub>1</sub> 受力分析：主动力合力：云( 贼越孕( 贼垣噪( 怎原怎) 原噪怎

惯性力：枣( 贼越原皂<sub>1</sub> 怎

对应的虚位移为 δ怎

质量 皂<sub>2</sub> 的受力分析：主动力合力：云( 贼越孕( 贼原噪( 怎原怎) 原皂<sub>2</sub> 怎

惯性力：枣( 贼越原皂<sub>2</sub> 怎

对应的虚位移为 δ怎

列虚功方程：

$$(孕( 贼垣噪( 怎原怎) 原噪怎原皂<sub>1</sub> 怎)δ怎垣孕( 贼原噪( 怎原怎) 原皂<sub>2</sub> 怎)δ怎越园$$

由于 δ怎、δ怎 的任意性，于是有

$$\begin{cases} 孕垣噪( 怎原怎) 原噪怎原皂<sub>1</sub> 怎越园 \\ 孕原噪( 怎原怎) 原皂<sub>2</sub> 怎越园 \end{cases}$$

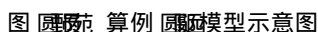
整理后写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 皂_1 & 园 \\ 园 & 皂_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 怎 \\ 怎 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 噪垣噪 & 原噪 \\ 原噪 & 噪 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 怎 \\ 怎 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 孕 \\ 孕 \end{Bmatrix}$$

算例 04-02 图 04-02 所示动力体系。粤为均布质量刚杆，月为无质量刚杆，皂为集中质量。以 月点位移 怎越怎 为广义坐标，试求体系的运动方程。

解：(员) 忽略轴向力影响：

粤杆受力分析：垂直向主动力：孕、枣、枣、枣，相应各点的虚位移：



月兑杆受力分析：垂直向主动力  $\vec{F}$ ，相应虚位移  $\delta y$ ；质点  $B$  的惯性力

求，相应的虚位移为  $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}\delta$  怎

列虚功方程：

孕猿怎原猿怎原猿怎原猿怎原猿怎原猿怎原猿怎原猿怎越

其中：孕越愿葬（贼，束越愿皂怎，束越愿皂怎，分越愿皂怎

越國隔阻怎能隔阻越過，來員越源一猿，來猿越源一猿，來猿越源一猿，來猿越源一猿

将以上各式代入上面的虚功方程，整理后有体系的运动方程为

酝\* 怎贼垣悦\* 怎贼垣运\* 怎贼越孕\* (贼

酝\* 越 源 皂 源 皂  
 猿 猿 怨 圆  
 悦\* 越 员 糗 垣 糗  
 阮 阮

运\*越<sup>怨</sup>噪垣<sup>员</sup>噪<sup>怨</sup> 孕\* (贼越<sup>孕</sup>孽(贼

酝<sup>\*</sup>、悦<sup>\*</sup>、运<sup>\*</sup>、孕<sup>\*</sup> 分别为广义质量、广义阻尼、广义刚度和广义力。

(圓) 考慮軸向力影响：

由图 15 所示, 轴向力所作虚功可以表示为  $\delta W_{\text{轴}}$ ,  $\delta W_{\text{轴}}$  为由  $\delta \sigma$  引起的

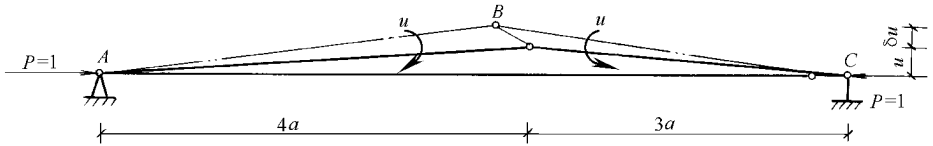


图 4-15 考虑轴向力影响的体系示意图

点的水平虚位移，可用虚功方程求机构位移的方法来求解。

给图 4-15 所示刚体体系一组平衡力（包括单位轴力及作用在铰 B 两侧杆端的力偶  $M$ ）。在虚位移  $\delta u$  上，此平衡力系所作虚功之和应等于零，即

$$M \delta \varphi_{\text{左}} + M \delta \varphi_{\text{右}} + P \delta u = 0$$

由此得

$$\delta \varphi_{\text{左}} = -\delta \varphi_{\text{右}} - \frac{P}{M} \delta u$$

小位移情况时有

$$\delta \varphi_{\text{左}} = -\delta \varphi_{\text{右}} - \frac{P}{M} \delta u$$

于是

$$\delta \varphi_{\text{左}} = -\delta \varphi_{\text{右}} - \frac{P}{M} \delta u$$

将  $\delta \varphi_{\text{右}}$  引入上面的虚功方程仍可导出上面的运动方程，只是广义刚度  $K^*$  应改写为

$$K^* = \frac{EI}{L} \left( 1 - \frac{PL}{EI} \right)$$

由上式可见，轴向压力使广义刚度减小，轴向拉力使其增大。由轴向力引起的刚度变化称为“几何刚度”。注意到当综合广义刚度  $K^* \rightarrow 0$  时，体系进入随遇平衡状态，即临界状态。由上式可得

$$K^* = \frac{EI}{L} \left( 1 - \frac{PL}{EI} \right)$$

## 4.1.2 哈密顿原理

哈密顿（哈密顿）原理可表述为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) = 0 \quad (4-16)$$

式中， $T$  为体系的总动能； $V$  为保守力产生的体系的势能； $W$  为作用于体系上的非保守力所作的功； $\delta$  为指定时段内所取的变分。

注意，这里研究的是固定边界条件下的泛函极值问题，因此有  $\delta u|_{t=0} = \delta u|_{t=T} = 0$ ， $\delta u$  在  $t=0$  和  $t=T$  时， $\delta u$  恒为零。

匀变原理也可用于静力问题，此时动能项不存在，而方程式 (10.10) 的积分中剩余项是不随时间改变的，于是方程简化为

$$\delta \Pi = 0 \quad (10.11)$$

匀变原理与虚功原理一样不是直接给出的体系真实运动的公共性质，而是提供一种准则，这种准则将真实运动与满足同样条件的一切可能运动区别开来。通常将这一类的力学原理称为变分原理。

变分原理的表述形式是

$$\delta \Pi = 0 \quad (10.12)$$

匀是一种泛函，简单讲也就是函数的函数。匀从某种意义上定义了满足一定条件的一切可能运动的集合（从一种状态到另一种状态）。式 (10.12) 则表明：在这些所有的可能运动中，惟有真实的运动使泛函  $\Pi$  取驻值。变分原理将描述体系真实运动的公共性质的基本方程归结为一个物理概念明确的简单方程  $\delta \Pi = 0$ ，表现了自然定律的最完美的形式。

应用匀变原理可以推导出体系的运动方程。

匀变原理的优点：不明显使用惯性力和弹性力，而分别用对动能和位能的变分代替。因而对这两项来讲，仅涉及标量处理，即能量。而在虚功原理中，尽管虚功本身是标量，但用来计算虚功的力和虚位移则都是矢量。

算例 10.1 如图 10.1 所示体系，用匀变原理求其运动方程。

解：质量  $m$  的动能： $T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$

体系的势能（保守力）： $V = \frac{1}{2} k u^2$

非保守力做功的变分等于非保守力在位移变分  $\delta u$  上做的功，即

$$\delta W = P(t) \delta u$$

将以上各式代入匀变原理，得

$$\delta \left( \frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 \right) + \int_0^T P(t) \delta u dt = 0$$

又因为

$$\int_0^T \left( m \dot{u} \delta \dot{u} - k u \delta u \right) dt + \int_0^T P(t) \delta u dt = 0$$

$$\int_0^T \left( m \frac{d}{dt} (\dot{u} \delta u) - m \dot{u}^2 - k u \delta u \right) dt + \int_0^T P(t) \delta u dt = 0$$

$$\left[ m \dot{u} \delta u \right]_0^T - \int_0^T m \dot{u}^2 dt - \int_0^T k u \delta u dt + \int_0^T P(t) \delta u dt = 0$$

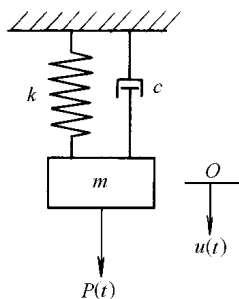


图 10.1 算例 10.1 模型示意图

$$\int_{\text{原}}^{\text{越}} \left( \frac{\partial \text{皂}}{\partial \text{怎}} \right) \delta \text{怎} = 0$$

所以

$$\int_{\text{原}}^{\text{越}} \left( \frac{\partial \text{皂}}{\partial \text{怎}} \right) \delta \text{怎} = 0$$

由于  $\delta \text{怎}$  的任意性, 有

$$\frac{\partial \text{皂}}{\partial \text{怎}} = 0$$

## 拉格朗日方程

设质点系的动力自由度为  $n$ , 质点系有  $N$  个质点, 则对于完整约束的质点系, 任意质点的坐标可用  $n$  个广义坐标表示为:

$$\text{怎} = \text{怎}(\text{择}, \text{择}, \dots, \text{择}; t) \quad (4.1)$$

假定这些函数对于  $\text{择}(\text{择}, \text{择}, \dots, \text{择})$  和  $t$  是二次可微函数。于是有

$$\frac{\partial \text{怎}}{\partial \text{择}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \text{怎}}{\partial \text{择}_i} \frac{\partial \text{择}_i}{\partial \text{择}} \quad (4.2)$$

质点系的动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \text{怎}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (4.3)$$

由式 (4.2) 和式 (4.3) 可知, 动能  $T$  可表示为广义坐标及它们对时间的导数

$$T = T(\text{择}, \text{择}, \dots, \text{择}; \dot{\text{择}}, \dot{\text{择}}, \dots, \dot{\text{择}}; t) \quad (4.4)$$

同样, 假定体系的保守力对应的势能可表示为

$$V = V(\text{择}, \text{择}, \dots, \text{择}) \quad (4.5)$$

非保守力所做功的变分为

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \text{匹}_i \delta \text{择}_i \quad (4.6)$$

这里  $\text{匹}_i$  是非有势力对应于广义坐标  $\text{择}_i$  的广义力函数。

将式 (4.4)、式 (4.5)、式 (4.6) 代入 匀变速原理方程式 (4.1), 可推得 拉格朗日(拉格朗日) 方程

$$\frac{\partial}{\partial \text{择}} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\text{择}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \text{择}} + \frac{\partial V}{\partial \text{择}} = \text{匹} \quad (\text{择}, \text{择}, \dots, \text{择}) \quad (4.7)$$

推导过程如下:

对于具有  $n$  个自由度的结构体系, 体系的动能和位能分别由式 (4.3) 和式 (4.5) 给出, 因此动能和位能的变分为

$$\delta \pi_{\text{裁}} = \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \quad (\text{葬})$$

$$\delta \pi_{\text{灾}} = \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{灾}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} \quad (\text{遭})$$

非保守力所做功的变分为

$$\delta \pi_{\text{宰}} = \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} \quad (\text{糟})$$

将式 (葬) 式 (遭) 和式 (糟) 代入匀变速原理式 (圆愿), 得

$$\int_{\text{贼}}^{\text{灶}} \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \left( \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \frac{\partial \pi_{\text{灾}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} + \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \right) \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \left( \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \right) \quad (\text{凿})$$

对式 (凿) 的第二项进行分部积分, 得

$$\int_{\text{贼}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \left[ \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \right]_{\text{贼}}^{\text{灶}} - \int_{\text{贼}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} + \left[ \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \right]_{\text{贼}}^{\text{灶}} - \int_{\text{贼}}^{\text{灶}} \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} + \left[ \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \right]_{\text{贼}}^{\text{灶}} \quad (\text{藻})$$

式 (藻) 代入式 (凿), 得

$$\sum_{\text{躁}}^{\text{灶}} \int_{\text{贼}}^{\text{灶}} \left( \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{灾}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} \right) \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \left[ \frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \varphi_{\text{躁}}} \delta \varphi_{\text{躁}} \right]_{\text{贼}}^{\text{灶}} \quad (\text{枣})$$

由  $\delta \dot{\varphi}_{\text{躁}}$  的任意性, 可知式 (枣) 中括号内的项恒为零, 这样就得到了 匀变速原理方程, 即

$$\frac{\partial \pi_{\text{裁}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{宰}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} + \frac{\partial \pi_{\text{灾}}}{\partial \dot{\varphi}_{\text{躁}}} \delta \dot{\varphi}_{\text{躁}} = 0 \quad (\text{躁员圆...灶})$$

算例 圆愿 算例 圆愿中图 圆愿所示的两自由度体系, 利用 匀变速原理方程建立关于广义坐标  $\varphi_{\text{员}}$   $\varphi_{\text{圆}}$  的运动方程。(假设  $\varphi_{\text{员}}$   $\varphi_{\text{圆}}$  为小量, 即体系线性微振)

解: 物理坐标与广义坐标的关系

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{员}} &= \varphi_{\text{员}} \\ \varphi_{\text{圆}} &= \varphi_{\text{圆}} \end{aligned}$$

$$\text{质点 皂员的动能: } \pi_{\text{裁}} = \frac{1}{2} m_{\text{员}} (\dot{\varphi}_{\text{员}})^2$$

$$\text{质点 皂员的势能: } \pi_{\text{灾}} = \frac{1}{2} k_{\text{员}} \varphi_{\text{员}}^2 + \frac{1}{2} k_{\text{圆}} \varphi_{\text{圆}}^2$$

$$\text{质点 皂圆的动能: } \pi_{\text{裁}} = \frac{1}{2} m_{\text{圆}} (\dot{\varphi}_{\text{圆}})^2$$

$$\text{质点 皂圆的势能: } \pi_{\text{灾}} = \frac{1}{2} k_{\text{圆}} \varphi_{\text{圆}}^2 + \frac{1}{2} k_{\text{员}} \varphi_{\text{员}}^2$$



$$\left( \begin{matrix} \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} \\ \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} \\ \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{matrix} \right\} \left( \begin{matrix} \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} & \text{恒} \\ \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} & \text{早} \\ \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} & \text{造} \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi \end{matrix} \right\}$$

以上介绍了四种用于建立体系运动方程的基本力学原理。虚功原理是一种简单、直观的建立运动方程的方法，得到了广泛的应用，更重要的是虚功原理建立了动平衡的概念，使得在结构静力分析中的一些建立控制方程的方法可以直接推广到动力问题，例如虚位移原理。当结构具有分布质量和弹性时，直接应用虚功原理，用动力平衡的方法来建立体系的运动方程可能是困难的。这时采用虚位移原理可能更方便，它部分避免了矢量运算，在获得体系虚功后，可以采用标量运算建立体系的运动方程，这简化了运算。而能量法原理是另外一种建立运动方程的能量方法，如果不考虑非保守力作的功（主要是阻尼力），它是完全的标量运算。但实际上直接采用能量法原理建立运动方程并不多。能量法原理的美妙在于它以一个极为简洁的表达式概括了复杂的数学（力学）问题。与虚功原理相比，能量法原理得到更多的应用，它和虚功原理一样，除非保守力（阻尼力）外，是一个完全的标量分析方法，不必直接分析惯性力和保守力（主要是弹性恢复力），而惯性力和弹性恢复力是建立运动方程时最为困难的处理对象。关于阻尼力，实际上它一般不是通过数学推理分析，从材料、结构构件的几何尺寸等推演得到的，而往往是通过实验、测试的方法得到（至少对结构动力学是如此）。因此，由阻尼产生的非保守力引起的困难并不大。这可能与纯粹的连续介质力学很不同，连续介质力学阻尼主要由介质本身引起，而结构动力学阻尼来源更广、更复杂，无法简单推出，而采用试验加假设方法。例如采用阻尼器模型，阻尼系数由实测或经验给出。表 1-1 给出了以上介绍的四种建立运动方程方法的特点。

表 1-1 四种建立运动方程方法的特点

| 方 法   | 特 点                 |
|-------|---------------------|
| 虚功原理  | 矢量方法，直观，建立了动平衡概念    |
| 虚位移原理 | 半矢量法，可处理复杂分布质量和弹性问题 |
| 能量法原理 | 标量方法，表达简洁           |
| 能量法方程 | 标量方法，运用面广           |

以上介绍的四种方法对建立运动方程完全是等同的，可以推得完全相同的运动方程。在实际问题中选用哪一种方法，一般取决于处理问题的方便，同时取决于个人的习惯和爱好。

重力的影响

在实际工程结构中，重力总是存在的，作为已知的外力，重力对结构的内力和变形影响很大。重力问题，特别是结构自重，一般都属于静力问题，用结构力

学的方法去研究。重力对结构动力反应，对建立结构运动方程有什么影响，是这一小节要讨论的问题。分析结果表明：如果结构是线弹性的，或说结构反应处于线弹性范围，并且是小变形，包括小位移阶段，重力问题的分析和动力问题的分析可以分别讨论，即静力问题和动力问题的分析可以分开进行。

如图 10-10 所示悬吊的单质点弹簧原质点体系，在自重作用下和动力荷载作用下的变形过程如图 10-10 中的各分图所示。

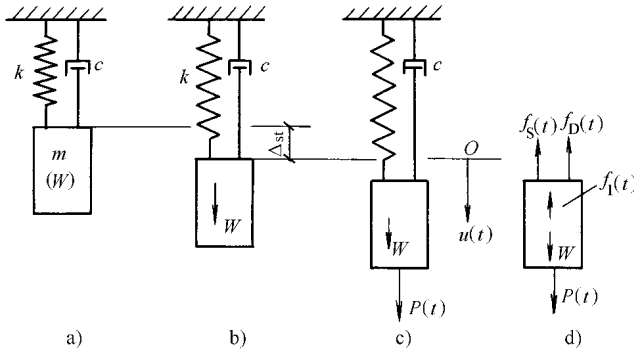


图 10-10 考虑重力影响时单自由度体系受力分析

在自重作用下，质量块产生一竖向位移  $\Delta_{st}$ ，即重力作用下弹簧伸长了  $\Delta_{st}$ ，注意自重作用下位移分析是一个静力问题，按静力学的方法可得到重力单独作用下体系的静位移为

$$\Delta_{st} = \frac{W}{k}$$

在静力荷载（自重）作用下结构所处的位置叫做静平衡位置。对于实际结构，这个位置就是受到动力作用以前结构所处的实际位置。

取结构的静平衡位置为坐标的原点，此时结构上受动力荷载作用，质点的动力位移、速度、加速度分别为  $u(t)$ ， $\dot{u}(t)$ ， $\ddot{u}(t)$ 。质点受到的惯性力、阻尼力和弹性恢复力分别为

$$\begin{aligned} F_I(t) &= -m\ddot{u}(t) \\ F_D(t) &= -c\dot{u}(t) \\ F_s(t) &= -k u(t) \end{aligned}$$

而外荷载包括动力荷载和自重，即  $P(t) + W$ 。

应用达朗贝尔原理得到质点的平衡方程为

$$-m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - k u(t) + P(t) + W = 0$$

将  $W = k\Delta_{st}$  代入上式得

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k u(t) = P(t)$$

再将式  $\Delta_{\text{静}}$  代入上式，则得到考虑重力影响的结构体系的运动方程为

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = F(t) + m \ddot{u}_g$$

可见，考虑重力影响的结构体系的运动方程与无重力影响时的运动方程完全一样，此时  $\ddot{u}_g$  是由动荷载引起的动力反应。可见在研究结构的动力反应时，可以完全不考虑重力的影响，建立体系的运动方程，直接求解动力荷载作用下的运动方程，即可得到结构体系的动力解。当需要考虑重力影响时，结构的总位移（变形）等于静力解加动力解，即叠加原理成立。

因此，在结构反应问题中，应用叠加原理可将静力问题（一般是重力问题）和动力问题分开计算，将其结果相加即得到真实结构的反应。

同时也要注意，并不是对任何结构动、静力反应问题都可以这样处理，因为在以上推导中，假设弹簧的刚度  $k$  为常数，即结构是线弹性的，因此只有对线弹性结构（如果是二维或三维问题，还要加上小变形（位移）的限制）才可以使用叠加原理，将静力、动力问题分开考虑。

以后对线弹性、小变形结构分析时，要经常直接应用叠加原理，并不再给予证明。

应当注意的是，在以上推导过程中，假设悬挂的弹簧原质点体系只发生竖向振动，在动荷载作用之前，重力被弹簧的弹性变形所平衡，而施加荷载后，重力始终被弹性变形所平衡。如果重力的影响没有预先被平衡，则在施加动力荷载产生进一步变形后，可以产生二阶影响问题，例如 孕原 $\Delta$  效应。最简单的例子是倒立摆，当倒立摆产生水平振动后，摆的重力引起的附加弯矩是一个新的量，它并没有预先被平衡，将对体系的动力反应产生影响，这种影响必然反映到结构的运动方程中。

## 圆原 地基运动的影响

结构动力学中研究的一个重要课题是地震作用下结构的动力反应。在结构地震反应问题中，结构的动力反应不是由直接作用到结构上的动力引起的，而是由地震引起的结构基础的运动引起的，是地基运动问题。下面建立由地基运动引起的结构的运动方程。为直观起见，取图 圆圆所示的单自由度体系讨论，其中， $u_g$  是地基的位移， $u$  是相对于固定在地基之上的相对坐标系的位移，反映了结构本身的变形， $u' = u_g + u$  是质点相对于绝对坐标系的位移， $\ddot{u}' = \ddot{u}_g + \ddot{u}$ 。因为惯

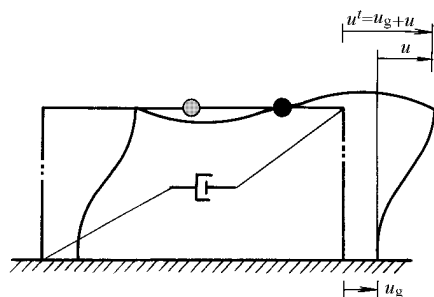


图 圆圆 考虑地基运动影响时  
体系运动与变形的关系

性力与绝对加速度成正比，弹性力仅与相对变形的大小有关，同时认为结构阻尼主要与结构变形有关，则体系的惯性力、阻尼力和弹性恢复力分别为

$$F_I = -m \ddot{u}$$

$$F_D = -c \dot{u}$$

$$F_E = -k u$$

根据平衡方程：  $\sum F = 0$  可得

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = P(t)$$

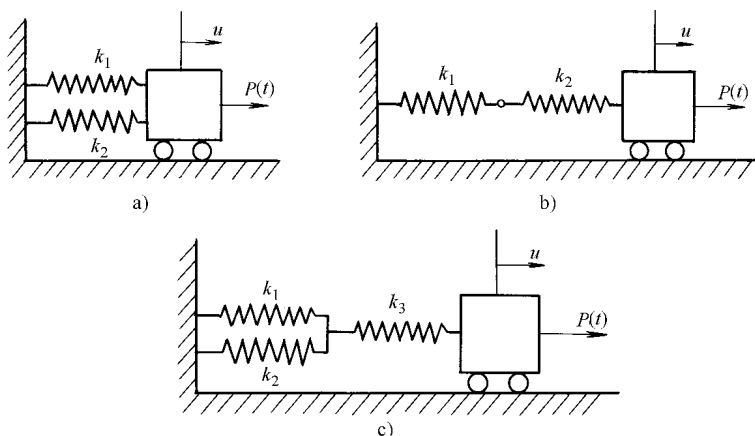
$$P(t) = -m \ddot{u}_g$$

$P(t)$  表示由地基运动产生的等效荷载，大小等于结构的质量与地面加速度之积，方向与地面加速度方向相反。结构由地基运动引起的反应问题化为在等效荷载作用下基底固定结构的动力反应问题。注意到如此得到的结构反应是相对运动，相当于结构的形变部分。

由于地面运动引起的等效荷载  $P(t)$  与地面的加速度有关，因此在结构地震反应问题中，输入的地震动一般为加速度时程。

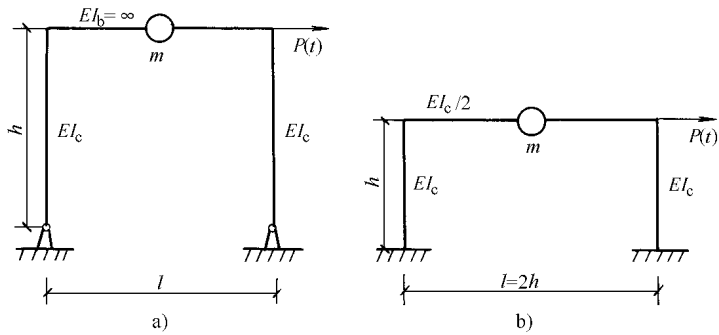
## 习题

习题 4-1 建立题 4-1 图所示的三个弹簧-质点体系的运动方程（要求从刚度的基本定义出发确定体系的等效刚度）。



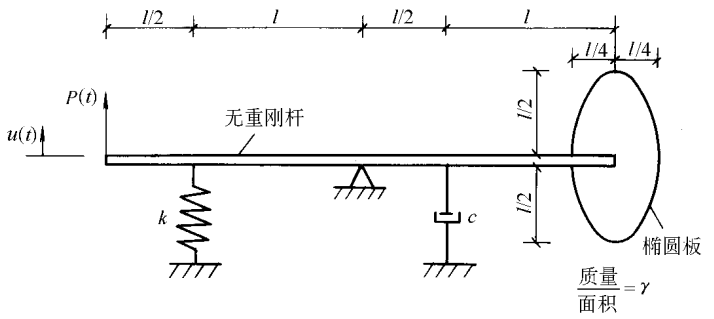
题 4-1 图

题 10-10 建立题 10-10图所示梁框架结构的运动方程（集中质量位于梁中，框架分布质量和阻尼忽略不计）。



题 10-10 图

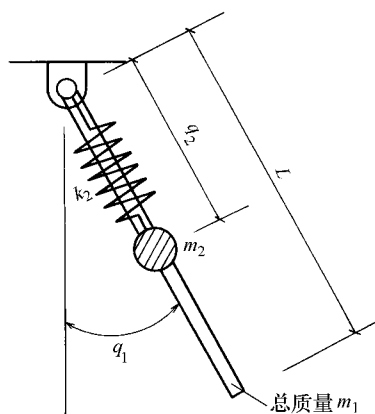
题 10-11 试建立题 10-11图所示体系的运动方程，给出体系的广义质量  $M$ 、广义刚度  $K$ 、广义阻尼  $C$  和广义荷载  $F(t)$ ，其中位移坐标  $u(t)$  定义为无重刚杆左端点的竖向位移。



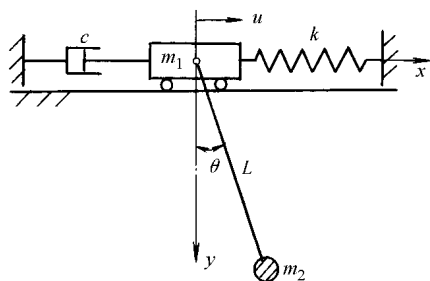
题 10-11 图

题 10-12 一总质量为  $M$ 、长为  $l$  的均匀刚性直杆在重力作用下摆动。一集中质量  $m$  沿杆轴滑动并由一刚度为  $k$  的无质量弹簧与摆轴相连，见题 10-12图。设体系无摩擦，并考虑大摆角，用图中的广义坐标  $\theta$  和  $x$  建立体系的运动方程。弹簧  $k$  的自由长度为  $l_0$ 。

题 10-13 如题 10-13图所示一质量为  $M$  的质量块可水平运动，其右端与刚度为  $k$  的弹簧相连，左端与阻尼系数为  $c$  的阻尼器相连。摆锤  $m$  以长为  $l$  的无重刚杆与滑块以铰相连，摆锤只能在图示铅垂面内摆动。建立以广义坐标  $x$  和  $\theta$  表示的体系的运动方程（坐标原点取静平衡位置）。



题 4-1 图



题 4-2 图

# 第 3 章 单自由度体系

结构动力分析中最简单的结构是单自由度（简称 SDOF）体系（简称单自由度体系）。在单自由度体系中，结构的运动状态仅需用一个几何参数就可以确定，例如单质点的弹簧摆、弹簧振子等。单自由度体系虽然比较简单，但是非常重要。这是因为，第一，单自由度体系包括了结构动力分析中涉及的所有物理量及基本概念；第二，很多实际的动力问题可以直接按单自由度体系进行分析计算，例如单层厂房、水塔等。有时为简化分析，也将多自由度体系等效为单自由度体系进行求解，例如土 原结构动力相互作用问题简化分析中，有时将上部结构等效为单质点结构。而求解多自由度体系振动问题的振型叠加法则直接将多自由度问题化成一系列单自由度问题求解。图 3-1 给出了几种结构动力分析中常用的单自由度体系力学模型。

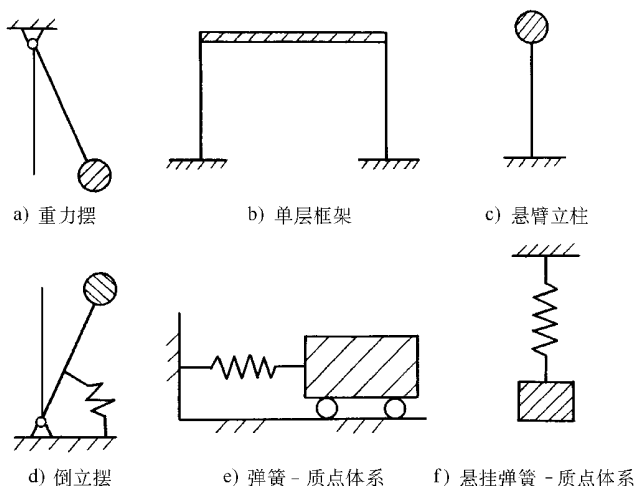


图 3-1 结构动力分析中常用的单自由度体系力学模型

单自由度体系的动力分析是多自由度体系动力分析的基础，只有牢固地打好这个基础，才能顺利地学习更复杂的结构动力学的内容。本章介绍单自由度体系动力反应的特点和计算方法。

## 3.1 无阻尼自由振动

结构的自由振动是指结构受到扰动离开平衡位置以后，不再受任何外力影响的振动过程。通过对单自由度体系无阻尼和有阻尼自由振动的分析，可以学习和

掌握结构的自振频率、阻尼比的概念，并了解它们的特点。

单自由度体系无阻尼(糟越园)自由振动(孕 贼越园)的运动方程为

$$\text{皂 怎垣噪越园} \quad (\text{猿猿})$$

引起体系自由振动的扰动可以用初始条件表示，即由于初始扰动的影响而使体系产生一个非零的初始位移或速度，定义初始条件为

$$\text{怎} \Big|_{\text{贼越园}} = \text{越}, \text{怎} \Big|_{\text{贼越园}} = \text{越} \quad (\text{猿圆})$$

运动方程(猿猿)是一个二阶齐次常微分方程，可以用常微分方程的分析方法求解。设解的形式如下

$$\text{怎 贼越粤藻} \quad (\text{猿猿})$$

其中，常数 泽是待定的；粤为常系数（只有当 泽为纯虚数时 粤才代表振幅）。

将式(猿猿)代入运动方程(猿猿)得

$$(\text{皂泽垣噪}) \text{粤藻越园} \quad (\text{猿源})$$

由式(猿源)可以解得两个虚根为

$$\text{泽越蚤}, \text{泽越原蚤} \quad (\text{猿缘})$$

式中，蚤越 $\sqrt{-1}$ 为单位虚数， $\omega$ 越 $\sqrt{\text{噪皂}}$ 为仅与结构性质有关的常数。

因此，运动方程(猿猿)的通解为

$$\text{怎 贼越粤藻}^{\text{泽贼}} \text{垣粤藻}^{\text{泽贼}} \text{越粤藻}^{\text{蚤贼}} \text{垣粤藻}^{\text{原蚤贼}} \quad (\text{猿远})$$

式中，粤、粤为未知的待定常数。

式(猿远)是一复指数解，利用指数函数与三角函数的关系式

$$\text{藻}^{\text{蚤贼}} \text{越粤曾垣蚤曾}$$

$$\text{藻}^{\text{原蚤贼}} \text{越粤曾原蚤曾}$$

可以把通解式(猿远)用正弦函数和余弦函数表示

$$\text{怎 贼越粤曾}^{\omega \text{贼}} \text{越垣粤}^{\omega \text{贼}} \text{月曾}^{\omega \text{贼}} \quad (\text{猿苑})$$

式中 粤、月是两个新的待定常数，将由体系的初始条件确定。

式(猿苑)对时间求得

$$\text{怎 贼越原}\omega \text{贼} \text{粤曾}^{\omega \text{贼}} \text{垣}\omega \text{贼} \text{月曾}^{\omega \text{贼}} \quad (\text{猿愿})$$

体系的运动应满足初始条件式(猿圆)，即

$$\text{怎} \Big|_{\text{贼越园}} = \text{越粤越}\omega \text{贼} \quad (\text{猿怨})$$

$$\text{怎} \Big|_{\text{贼越园}} = \omega \text{月越}\omega \text{贼}$$

由式(猿怨)可解得

$$\text{粤越}\omega \text{贼}, \text{月越} \frac{\omega \text{贼}}{\omega \text{贼}}$$

代入式 (1.1.1) 得到体系无阻尼自由振动的解为

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (1.1.2)$$

而

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad (1.1.3)$$

式 (1.1.2) 表明, 体系的无阻尼振动是一个简谐运动 (即运动是时间的正弦函数或余弦函数)。在物理学中,  $\omega_n$  被称为圆频率或角速度。

图 1.1.1 给出体系运动随时间  $t$  的变化曲线, 在初始时刻 ( $t=0$ ), 曲线值等于初始位移  $u_0$ , 曲线的斜率等于初始速度  $\dot{u}(0)$ , 然后曲线沿斜率方向变化, 经过一段时间, 曲线达到其最大值  $u_0$ , 即

$$u_0 = \sqrt{u_0^2 + \left[ \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \right]^2} \quad (1.1.4)$$

称为体系自由振动的振幅。此时, 体系运动速度为零, 弹性恢复力最大, 然后结构向负方向, 即向静平衡点运动, 当到达静平衡点时, 质点的速度达到最大 (绝对值), 此时弹性恢复力为零。在惯性作用下, 质点越过静平衡点继续运动直到负向最大位移点, 然后结构又向正向、向静平衡点运动, 这样往复循环。

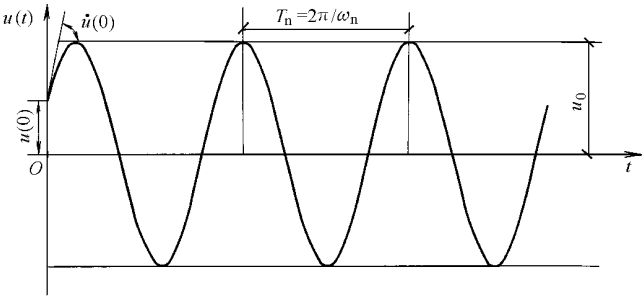


图 1.1.1 无阻尼体系的自由振动

分析式 (1.1.2) 可以发现, 每经过一个时间段  $T_n$ , 有

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (1.1.5)$$

结构的运动就完成一个振动循环, 而  $T_n$  是使结构运动完成一次循环所需要的时间, 称为结构的自振周期 (即固有周期)。

自振周期  $T_n$  是体系的固有特性。当体系为线弹性时, 无论初始条件如何, 例如振幅较大或很小 (由初始条件决定), 但体系完成一个振动循环所用的时间

总是相等的，即等于  $\omega_{\text{灶}}$

工程和理论研究中也常常用频率作为结构振动快慢的度量，其定义为

$$\omega_{\text{灶}} = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{猿园})$$

称为结构的自振频率（ $\omega_{\text{灶}}$  和  $\omega_{\text{灶}}$  的关系，可以给出  $\omega_{\text{灶}}$  的关系式，即

$$\omega_{\text{灶}} = \frac{\omega_{\text{灶}}}{2\pi} \quad (\text{猿员})$$

可见，在结构无阻尼自由振动分析中，出现了三个表示结构动力性质的物理量： $\omega_{\text{灶}}$ 、 $\omega_{\text{灶}}$  和  $\omega_{\text{灶}}$ ，它们的关系示于表 猿员

表 猿员 结构自振频率和自振周期及其关系

| 物 理 量                                  | 名 称   | 单 位           |
|----------------------------------------|-------|---------------|
| $\omega_{\text{灶}} \sqrt{\frac{m}{k}}$ | 自振圆频率 | 弧度/秒 (rad/s)  |
| $\frac{2\pi}{\omega_{\text{灶}}}$       | 自振周期  | 秒 (s)         |
| $\frac{\omega_{\text{灶}}}{2\pi}$       | 自振频率  | Hz (赫兹, 周次/秒) |

有时为把自振频率  $\omega_{\text{灶}}$  和自振圆频率  $\omega_{\text{灶}}$  区分开，称  $\omega_{\text{灶}}$  为工程频率，而在不引起混淆的情况下，也将  $\omega_{\text{灶}}$  简称为自振频率。

结构自振频率  $\omega_{\text{灶}}$  仅与结构的刚度  $k$  和质量  $m$  有关，因而自振频率  $\omega_{\text{灶}}$  和自振周期  $T$  都是结构的固有特性，仅与结构本身有关。自振周期和自振频率有时也称为固有周期和固有频率。

结构的自振周期（频率）是反映结构动力特性的主要物理量，在描述一个结构的动力特性或实际测量结构动力特性时必须给出。不同结构的自振周期可能相差很大，从一般单层房屋的  $0.1 \sim 0.2$  到  $10 \sim 20$  左右高度的超高层结构的  $10 \sim 20$  到大型悬索桥的  $10 \sim 20$

对单自由度的弯曲（扭转）弹簧构成的弹簧—质量体系，自振频率的计算公式为

$$\omega_{\text{灶}} = \sqrt{\frac{k}{J}}$$

式中， $k$  为弯曲（扭转）刚度； $J$  为体系的转动惯量。

有阻尼自由振动

虽然在真实的结构中，阻尼是由于几种不同能量耗散机制共同引起的，但为

了便于数学上的分析,常常把这些阻尼理想化为等效的粘性阻尼,即阻尼力的大小与质点的速度成正比,方向与之相反。

令  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$ , 得到有阻尼单自由度体系自由振动的运动方程为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1.1.1)$$

同样令  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$  代入运动方程(1.1.1)得

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.1.2)$$

式中,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  是前面所定义的无阻尼体系的自振频率。当结构体系的刚度和质量一定时, 式中根号内式子的取值完全取决于阻尼系数  $\zeta$ 。当阻尼系数  $\zeta$  较大时, 根号内的数值可能大于零, 而  $\zeta$  较小时, 则可能小于零, 这对应于两种完全不同的运动状态。当根号内的值大于零时,  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  是两个实数, 体系的运动将不会发生往复的振动; 而当根号内的值小于零时,  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  是两个不同的复数, 其解代表着振动; 而使根号内数值为零时的阻尼值代表着这两种完全不同运动状态的分界线, 这个阻尼值称为临界阻尼。

## 1.1.3 临界阻尼和阻尼比

令式(1.1.1)中的根式等于零, 则得到临界阻尼值  $\zeta_c$  为

$$\zeta_c = \omega_n / 2 \quad (1.1.3)$$

可见临界阻尼  $\zeta_c$  也是完全由结构的刚度和质量决定的常数, 当结构的阻尼系数  $\zeta$  正好等于临界阻尼时, 即

$$\zeta = \zeta_c = \omega_n / 2$$

时, 解的两个特征根为

$$\omega_1 = \omega_2 = -\omega_n / 2$$

微分方程的特征方程有两个相同的实根, 则方程的解为

$$x = e^{-\omega_n t} (A + Bt)$$

式中,  $A$ 、 $B$  是待定系数, 由初始条件确定。

满足初始条件的临界阻尼体系运动的最终形式为

$$x = e^{-\omega_n t} (1 - \omega_n t) \quad (1.1.4)$$

上式表明, 具有临界阻尼的体系自由反应不会出现在静平衡位置附近的往复振动, 其典型的运动曲线如图 1.1.4 所示。

图 1.1.4 所示曲线表明, 当结构的阻尼等于临界阻尼时, 结构的运动是按指数衰减的运动, 随时间的增加而逐步衰减到零, 回复到静平衡位置, 不会出现往复的振动。

当结构体系的阻尼大于临界阻尼时， $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是两个不等的负实根，对应的运动方程的解同样是按指数衰减的运动，而只有当体系的阻尼小于临界阻尼时，体系才会出现自由振荡运动。

临界阻尼可以定义为：体系自由振动反应中不出现往复振动所需的最小阻尼值。

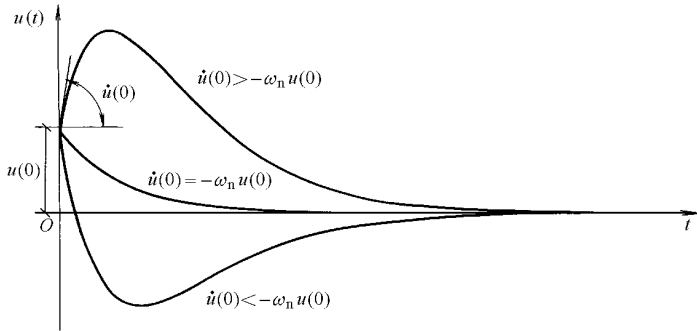


图 猿-10 临界阻尼体系的自由振动

结构的阻尼系数  $\zeta$  是结构在每一振动循环中消耗能量大小的度量，其量值可能在很大范围内变化，由于结构的阻尼往往靠试验得到，采用阻尼系数  $\zeta$  不利于对结构阻尼进行合理性判断和对不同结构间阻尼大小的比较。因此，在有阻尼的结构动力反应分析中，均采用阻尼系数  $\zeta$  和临界阻尼  $\zeta_{cr}$  的比值  $\zeta$  来表示结构的阻尼的大小，即

$$\zeta = \frac{\zeta}{\zeta_{cr}} \quad (\text{猿-11})$$

阻尼比  $\zeta$  是一个量纲为一的系数。

(员) 当  $\zeta < 1$  时，称为低阻尼（欠阻尼），结构体系称为低阻尼体系。

(圆) 当  $\zeta = 1$  时，称为临界阻尼（临界阻尼），结构体系称为临界阻尼体系。

(猿) 当  $\zeta > 1$  时，称为过阻尼（过阻尼），结构体系称为过阻尼体系。

采用阻尼比  $\zeta$  来研究不同类型结构的阻尼性质（大小）发现具有很好的规律性，例如，对于钢结构，阻尼比  $\zeta$  约在 0.01~0.05 左右；而对于钢筋混凝土结构，在脉动（微振）情况下，阻尼比  $\zeta$  约在 0.02~0.05 左右，而在中、小强度的地震时，阻尼比  $\zeta$  约在 0.05~0.1 左右。

结构动力特性的现场测量得到的阻尼量值为阻尼比  $\zeta$ ，由阻尼比就可以给出动力分析计算时的阻尼系数  $\zeta_{cr}$ 。

图 猿-11 给出分别对应于低阻尼、临界阻尼和过阻尼三种不同阻尼比时结构的自由振动时程曲线。

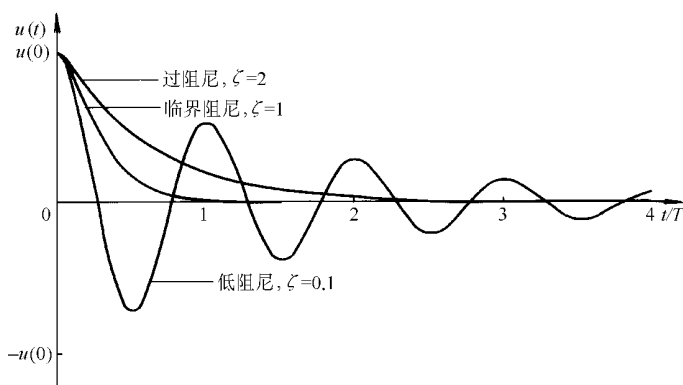


图 10-1 低阻尼、临界阻尼和过阻尼体系的自由振动曲线

## 10.1 低阻尼体系

低阻尼体系是指结构的阻尼小于临界阻尼，即  $\zeta < 1$ ，即阻尼比  $\zeta$  约等于 0.1。将  $\zeta = 0.1$  代入式 (10-1) 得

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[ u(0) \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (10-2)$$

采用与无阻尼自由振动相同的分析方法，可得到低阻尼体系满足初始条件的自由振动解，即

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[ u(0) \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (10-3)$$

其中，

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (10-4)$$

当阻尼比  $\zeta$  趋近于 0 时，式 (10-3) 退化成无阻尼自由振动的解式 (10-1)。

式 (10-3) 表明，有阻尼体系的自由振动为一振幅衰减的振动过程。方括号内的项代表了一个简谐振动。其简谐振动的幅值为

$$\rho = \sqrt{\left[ u(0) \right]^2 + \left[ \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_d} \right]^2} \quad (10-5)$$

而振动的圆频率为  $\omega_d$ ，因此  $\omega_d$  为阻尼体系的自振频率。可见，由于阻尼的存在，使体系自由振动的自振频率变小。由关系式  $T_d = 2\pi / \omega_d$ ，得到有阻尼体系的自振周期为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10-6)$$

可见阻尼的存在使体系的自振周期变长，当  $\zeta$  趋近于 0 时，自振周期  $T_d$  趋近于  $T$ 。

有阻尼体系振动的幅值按指数规律衰减，直至为 0。图 10-1 给出了阻尼比  $\zeta$  趋近于 0 时，体系自振衰减与时间关系曲线，图中也给出了无阻尼体系的时程曲线。

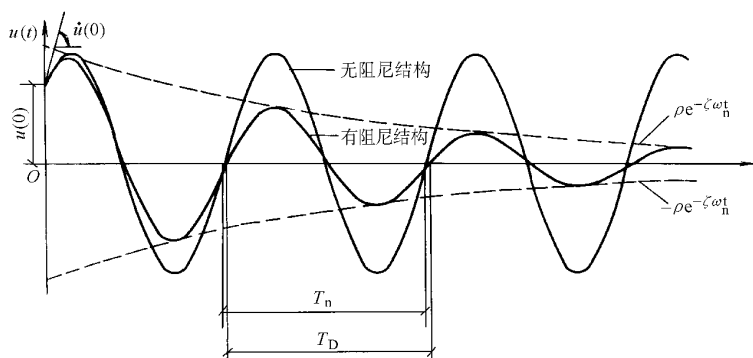


图 4-10 阻尼对自由振动的影响

前面的分析结果表明，有阻尼体系的自振频率（或自振周期）与无阻尼体系的自振频率（或自振周期）是不同的。阻尼使体系的自振频率变小，自振周期延长。结构自振周期和自振频率是重要的结构动力特性，是结构动力特性现场测量和结构计算分析中必须给出的重要参数。在现场测量中自然考虑了阻尼的影响，因而给出的结果是  $\omega_{\text{测}}$  和  $T_{\text{测}}$ 。而在用计算机进行结构特征值分析时，则不考虑阻尼的影响，给出的是  $\omega_{\text{灶}}$  和  $T_{\text{灶}}$ ，一般不加以区分，都称为结构的自振频率和自振周期。因此，研究  $\omega_{\text{测}}$  和  $\omega_{\text{灶}}$  的关系也是必要的。

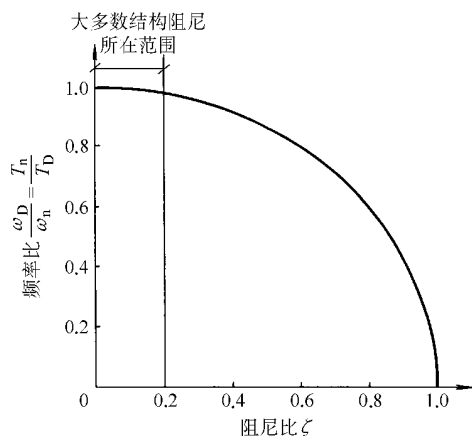


图 4-11 阻尼对自振频率和自振周期的影响

图 4-11 给出  $\omega_{\text{测}}/\omega_{\text{灶}}$  或  $T_{\text{测}}/T_{\text{灶}}$  的关系随阻尼比  $\zeta$  变化曲线。由图 4-11 可见，由于工程中结构的阻尼比  $\zeta$  在 0.05 ~ 0.15 之间，一般不超过 0.2，因此有阻尼体系的自振频率（或自振周期）与无阻尼体系的自振频率（或自振周期）之间的差别一般不超过 5%，可以用有阻尼体系的结果代替无阻尼的结果。

为便于直观和定量地了解低阻尼体系中阻尼的大小对结构自由振动衰减的影响，选择自振频率相同而阻尼比  $\zeta$  分别为 0.05、0.1、0.15 和 0.2 的体系，绘出给定初始位移而初始速度为零时的自由振动曲线，如图 4-12 所示。从中可以发现，低阻尼体系的阻尼对结构自由振动的影响很大，因而，合理地确定体系的阻尼是结构动力问题研究中的一项重要工作。同时，由于阻尼对体系自由振动的衰减影响大，通过对体系衰减曲线的分析，可以有效地分辨出不同体系的阻尼比。

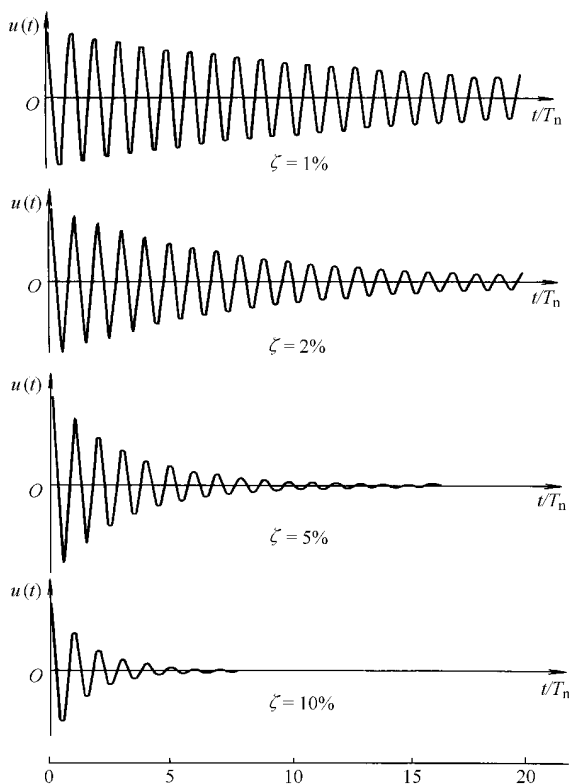


图 8-10 阻尼不同时体系自由振动时程曲线

## 运动的衰减和阻尼比的测量

结构的阻尼比是结构的重要动力特性参数，利用结构自由振动试验可以获得结构的阻尼比  $\zeta$ 。通过对有阻尼体系自由振动解式 (8-10) 进行分析，可以得到任意两个相邻振动峰值 (如图 8-10 所示) 之比为

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{e^{\zeta \omega_d T_n}}{e^{\zeta \omega_d T_n}} = e^{\zeta \omega_d T_n} \quad (8-11)$$

由图 8-10 可见，相邻振动峰值比 (有时也称为相邻振幅比) 仅与阻尼比有关，而与  $\omega_d$  的取值无关。相邻振动峰值比的自然对数值称为对数衰减率，用  $\delta$  表示

$$\delta = \ln \frac{u_1}{u_2} = \frac{\zeta \omega_d T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8-12)$$

因此，阻尼比  $\zeta$  可由对数衰减率  $\delta$  得到

$$\zeta = \frac{\delta \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_d T_n} \quad (8-13)$$

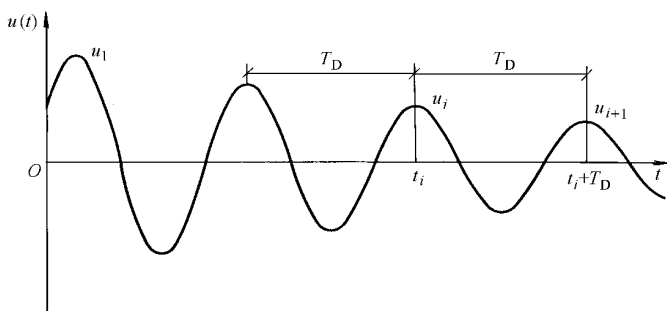


图 4-10 相邻振动峰值的定义

当阻尼比  $\zeta$  较小时,  $(1 - \zeta^2)^{1/2} \approx 1$ , 由式 (4-10) 可以得到小阻尼体系的阻尼比近似计算式

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (4-11)$$

当结构的阻尼很小时, 自由振动衰减很慢, 这时为获得更高的精度, 可以采用相隔几周的振动峰值比来计算结构的阻尼比。比如相隔  $n$  周, 振动由  $u_1$  衰减到  $u_n$ , 则比值为

$$\frac{u_1}{u_n} = \frac{e^{\delta/2}}{e^{\delta/2}} = e^{\delta/2} \dots e^{\delta/2} = e^{n\delta/2}$$

由此可以得到对数衰减率为

$$\delta = \frac{2\pi}{n} \ln \frac{u_1}{u_n}$$

代入小阻尼体系阻尼比的近似计算式 (4-11) 得

$$\zeta \approx \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{u_1}{u_n} \quad (4-12)$$

在实验中, 有时也用振动峰值衰减至  $1/e$  所需的次数  $n$  来计算阻尼比, 此时

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_1}{u_n} \quad \zeta \approx \frac{1}{2\pi n} \ln \frac{u_1}{u_n} \quad (4-13)$$

用以上方法计算体系的阻尼比时, 仅用到了体系振动衰减曲线上两个峰值点的信息。另外一种利用更多信息的方法是拟合振动的峰值衰减关系全曲线, 通过对峰值点衰减曲线的拟合分析获得振动幅值的指数衰减规律, 进而得到对振动衰减有重要影响的阻尼比。

## 4.10 自由振动试验

因为对于实际结构, 阻尼比  $\zeta$  不能通过理论分析方法确定, 而需要由试验

确定。自由振动试验提供了一种确定结构阻尼比的途径。根据上面推导,当结构阻尼较小时,例如阻尼比  $\zeta \approx 0.05$  时,阻尼比的计算式为

怎么越躁怎么躁 (猜谜)

因为在现场实测中为提高测量精度,往往采用加速度传感器(拾振器)。传感器记录到的测量信号是加速度时程,如图 3-10 所示。容易证明,可以直接用加速度振幅值计算阻尼比

越员怎  
圆躁怎

而结构的自振周期  $T_n$  可以通过相邻振幅的时间间隔来计算。

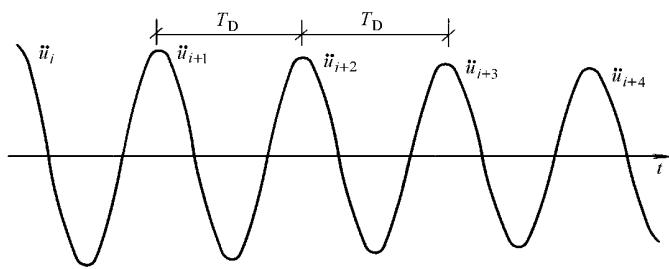


图 7-2-2 自由振动的加速度记录时程

算例 1 用自由振动法研究一单层框架结构的性质, 试验中用一钢索给结构的屋面施加 孕越 越 越 的水平力, 使框架结构产生  $\Delta_{\text{源}}$  的水平位移, 突然切断钢索, 让结构自由振动, 经过 圆 结构振动完成了 源 周循环, 振幅变为 圆 。从以上数据计算: ①阻尼比  $\zeta$ ; ②无阻尼自振周期  $T_{\text{灶}}$ ; ③等效刚度  $K$ ; ④等效质量  $M$ ; ⑤阻尼系数  $C$ ; ⑥位移振幅衰减到 圆 时所需的振动周数。

解：①将  $\frac{1}{x} = t$  代入方程（猿圆）得

(越圆躁怎愿造缘越园园园元圆院豫)是小阻尼体系。

②有阻尼自振周期  $T_{\text{有}} \approx T_{\text{无阻}} \approx \frac{2\pi}{\omega_d}$  因为体系是小阻尼, 则有  $\zeta \approx 0$ ,  $T_{\text{有}} \approx T_{\text{无阻}}$

③刚度 噪越孕轱 越妨穰零轱圆豫象 越元源圆零轱

④自振频率  $\omega_{灶}$

等效质量皂越 $\frac{\omega}{\rho}$ 越 $\frac{V_{\text{原}}}{V_{\text{影}}}$ 越 $\frac{A_{\text{原}}}{A_{\text{影}}}$

⑤ 阻尼系数槽成(圆√噪)越远期近伊尹√源园尹哪哪量泽皂越福厨量泽皂

⑥由式(7-13)得, 跨中截面转角为

算例 7-1 如果算例 7-1 中框架结构的屋面再附加上一质量为  $m$  的质量块, 求有附加质量后结构的自振周期和阻尼比 (不考虑质量块本身的阻尼以及结构振动过程中质量块和屋面之间的摩擦阻尼影响)。

解: 此时结构的总质量  $M$ , 结构的刚度不变, 则结构的自振周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

不考虑附加质量块引起的附加阻尼影响, 结构的阻尼系数不变, 因此, 有

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{MK}}$$

当结构的质量增加时, 其自振周期变长, 而附加质量对结构阻尼比的影响则是一个稍微复杂的问题。

## 7.3 库仑 (Coulomb) 阻尼自由振动

实际结构中的阻尼是由几种不同的耗能机制引起的, 在一般情况下, 粘性阻尼可以给出较好的模拟, 但对一些特殊的问题, 则不能令人满意。在工程结构的减振中常采用摩擦阻尼器减振, 而隔振中有时也采用摩擦型的隔振技术, 此时采用库仑阻尼更适合。

库仑阻尼是由于两接触面的干摩擦引起的, 摩擦力大小可表示为  $F_f = \mu N$ , 其中  $\mu$  为摩擦系数 (对静、动力情况相等),  $N$  等于摩擦面上的法向力。库仑摩擦假设摩擦力与运动的速度无关而方向与运动方向相反。当运动方向改变时, 摩擦力的方向 (符号) 也随之改变, 因此需要两个运动方程描述, 并给出两个解式。

图 7-10 是一个弹簧-质点体系, 质点置于摩擦面上滑动, 图 7-10(a) 和 (b) 是质点的隔离体受力图, 当质点从右向左滑动时, 运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = -F_f \quad (7-14)$$

运动方程的解为

$$x = \frac{F_f}{k} + A \cos(\omega_d t + \phi) \quad (7-15)$$

式中,  $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$  为体系自振频率。

当质点由左向右滑动时, 运动方程及其解为

$$m\ddot{x} + kx = F_f \quad (7-16)$$

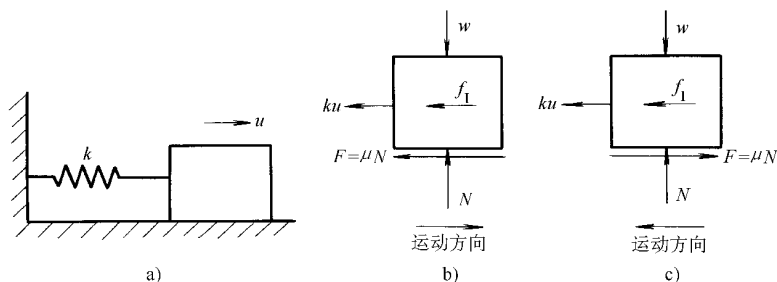


图 10-10 具有库仑摩擦阻尼的弹簧质点体系

怎样求解具有库仑摩擦阻尼的弹簧质点体系的运动方程

(10-10)

从考虑库仑摩擦阻尼体系振动解式(10-10)和式(10-11)可以看出,仅有库仑阻尼时,体系自由振动的频率与无阻尼体系自振频率  $\omega_d$  相同。式(10-10)和式(10-11)中  $C_1$ 、 $C_2$  是待定系数,由初始条件确定。由于库仑阻尼的影响,使体系的运动方程不惟一,在确定待定系数时也不像粘性阻尼体系那样便于确定,由于运动方程的解式(10-10)或式(10-11)仅适用于半周循环,即由右向左,或由左向右。初始条件需要对应于每周循环确定。以该半周循环的初始时刻,即前半周循环的终止状态来定该半周循环的待定系数。下面仅结合一个具体的初始条件说明待定系数的确定及说明库仑阻尼体系运动的特点。

设在初始时刻  $t=0$  的初始条件为

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

在第一个半周循环 ( $0 \leq t \leq T/2$ ):

将解式(10-10)代入以上初始条件得

$$C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t = x_0, \quad -C_1 \omega_d \sin \omega_d t + C_2 \omega_d \cos \omega_d t = \dot{x}_0$$

满足初始条件的解为

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos \omega_d t} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d \sin \omega_d t} \cos \omega_d t, \quad 0 \leq t \leq T/2$$

上式代表一个余弦函数,振幅为  $\frac{x_0}{\cos \omega_d t}$ ,但其中轴向上偏移  $\frac{\dot{x}_0}{\omega_d \sin \omega_d t}$

当  $t = T/2$  ( $\omega_d t = \pi$ ) 时,质点达到负向最大值,即

$$x(\pi) = -x_0 \cos \pi = x_0, \quad \text{而 } \dot{x}(\pi) = -\dot{x}_0 \sin \pi = 0$$

在第二半周循环 ( $T/2 \leq t \leq T$ ):

将上半周循环终止时刻之运动条件作为初始条件,即

$$x(\pi) = x_0, \quad \dot{x}(\pi) = 0$$

代入解式(10-10)得

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos \omega_d (t - T/2)} + \frac{0}{\omega_d \sin \omega_d (t - T/2)} \cos \omega_d (t - T/2), \quad T/2 \leq t \leq T$$

上式是一个振幅为  $u(0)$  的余弦函数，而中轴向下偏移  $\frac{u_F}{2}$  的余弦函数。

采用相同的方法，可以递推求得全部时域解，例如，在第三个半周循环内（ $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ ）

$$u(t) = \frac{u_F}{2} + \left( \frac{u_F}{2} - u(2\pi) \right) \cos(t - 2\pi)$$

从以上分析可见，在每一周循环中，振幅衰减了  $u_F$ ，即

$$u(t) = \frac{u_F}{2} + \left( \frac{u_F}{2} - u(2\pi) \right) \cos(t - 2\pi)$$

式中  $u(0)$  和  $u(2\pi)$  代表相邻的峰值点。图 4-10 为以上具有库仑摩擦阻尼的弹簧质点体系的自由振动时程曲线。

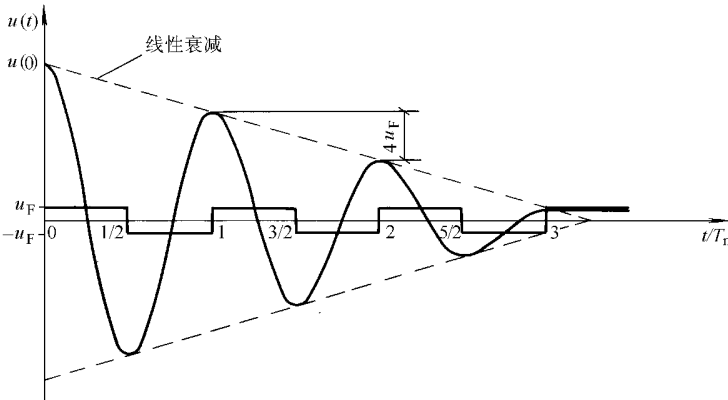


图 4-10 具有库仑摩擦阻尼的弹簧质点体系的自由振动方程

由图 4-10 可以清楚地看到，库仑阻尼体系自由振动随时间变化的外包络线（峰值点的连线）是直线，不像粘性阻尼体系那样是按指数衰减的曲线，这可以保证使运动快速衰减至静止状态。

4.3 单自由度体系对简谐荷载的反应

单自由度体系在简谐荷载作用下的反应是结构动力学中的一个经典内容。不仅工程实际中存在这种形式的荷载，而且简谐荷载作用下单自由度体系的解（反应）提供了了解结构动力特性和用于更复杂荷载作用下体系反应分析的手段和方法。

4.3.1 无阻尼体系的简谐荷载反应

当体系上作用的外荷载为简谐荷载，同时忽略体系的阻尼时，单自由度体系的运动方程为

$$m \ddot{u} + ku = F \sin \omega t \quad (4-11)$$

式中,  $P_0$  为简谐荷载的幅值;  $\omega$  为简谐荷载的圆频率。

体系的初始条件由下式给出：

怎么越怎么,怎么越怎么 (猜谜)

式(7.6.1)和式(7.6.2)是一个带有初值条件的二阶常微分方程,其全解分为两部分,一是齐次方程的通解(对应齐次方程),二是特解(对应非齐次方程)。通解对应的方程是一个自由振动方程,其解为无阻尼自由振动

怎(賊越粵聲)賊恒月對(賊) (猿猿)

ω灶越√噪皂

而特解即是满足式 (1) 的解, 记为  $x_p$ 。特解, 是由动荷载  $P \sin pt$  直接引起的振动解。设特解为

怎(賊越悅) 怎(賊恒) 怎(賊) (猜謎)

将式 (猿源) 代入式 (猿猿) 可得

悦越<sub>噪</sub>员<sub>京</sub>( $\omega$  轱什)圆, 阅越园 (猿源)

式中,  $\omega$  称为频率比, 即外荷载的激振频率与结构自振频率之比。

运动方程的全解 (恒量守恒定律) 等于通解和特解之和

怎 賊 越 怎 賊 垣 怎 賊 越 粵 聲 賊 月 豈 賊 孕 員 澤 賊 猿 園

式 (7.1.10) 中的待定系数  $\alpha$  由初始条件式 (7.1.9) 确定, 将式 (7.1.10) 代入式 (7.1.8) 得

粵越 $\frac{\omega_{灶}}{\omega_{灶}}$ 原 $\frac{\omega_{灶}}{\omega_{灶}}$  (猿)

最后得到满足初始条件的解为

$$\text{怎賊越怎園精} \frac{\omega \text{ 轉灶}}{\text{原園}} \left[ \frac{\text{怎園}}{\omega \text{ 灶}} \frac{\text{孕園}}{\text{噪原}} \frac{\omega \text{ 轉灶}}{\text{員原}} \right] \text{澤灶賊怎園} \frac{\text{員}}{\text{員原}} \frac{\omega \text{ 轉灶}}{\text{圖}} \text{澤灶賊}$$

(猿題)

式(7.1.1)中的第三项是直接由动荷载引起的,其振动频率与外荷载频率 $\omega$ 相同,称为稳态反应;第一和第二项相当于自由振动,振动的频率等于体系的自振频率 $\omega_{\text{灶}}$ ,称为瞬态反应,因为实际问题中体系的阻尼一定存在,阻尼将使自由振动项很快衰减为零。由于在实际情况中瞬态反应会很快衰减,最后结构的反应仅有由外荷载直接引起的稳态反应,因此,一般情况下稳态反应是最重要的和最关心的。

下面将仅讨论体系的稳态反应，如果记

怎么越孕越厉害 (猿猴象)

称为等效静位移或静位移，相当于 图 4-10 静止作用的结果，而  $\Delta_{st}$  为稳态反应的振幅，即

$$\Delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

则位移放大系数定义为

$$\mu = \frac{\Delta}{\Delta_{st}}$$

称为动力放大系数。图 4-11 给出无阻尼体系动力放大系数  $\mu$  随频率的变化曲线，分析动力放大系数可以发现：

(1)  $\omega \rightarrow 0$  时， $\mu \rightarrow 1$ ，此时动力问题已转化成静力问题。

(2)  $\omega = \omega_n$  时， $\mu \rightarrow \infty$ ，此时动力反应趋于无穷大，称为共振。

(3)  $\omega > \omega_n$  时， $\mu < 1$ ，此时体系的动力反应小于静力反应。

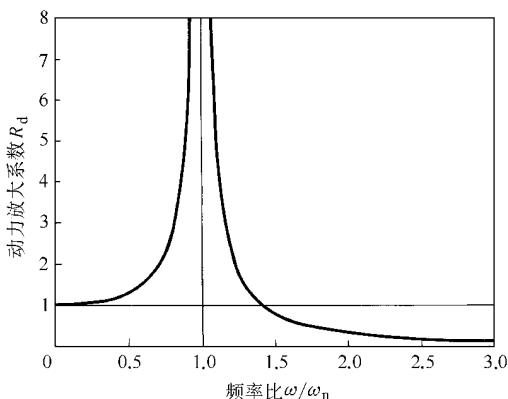


图 4-11 体系无阻尼强迫振动时的动力放大系数

当  $\omega \rightarrow \omega_n$  时，运动方程的特解为  $\Delta_{st} \cos(\omega t)$ ，而满足零初始条件的全解为

$$\Delta = \Delta_{st} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \sin(\omega t)$$

图 4-12 给出零初始条件下共振时体系的动力反应随时间增大过程。可以看到，当体系发生共振时，共振反应是逐渐增大的过程，而不是瞬时趋于无穷大的。

### 4.2 有阻尼体系的简谐荷载反应

简谐荷载作用下单自由度体系的运动方程和初始条件为

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega t)$$

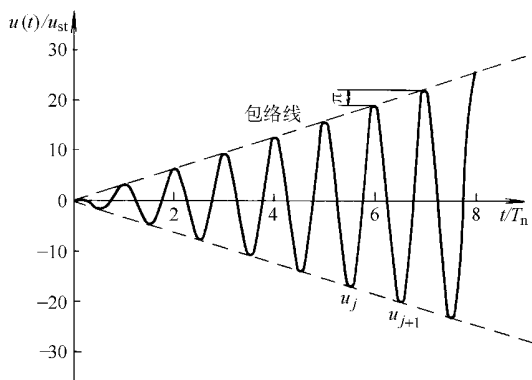


图 4-12 共振时无阻尼体系的动力反应随时间增大过程

运动方程两边同除  $m$ ，将

阻尼比代替  $\zeta$ ，得到如下形式的运动方程

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \ddot{u}_g \quad (10.1.1)$$

齐次方程的通解  $u_h$  对应于有阻尼自由振动反应，并设  $\zeta$  为常数，则

$$u_h = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (10.1.2)$$

而  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  为有阻尼体系的自振频率。

运动微分方程的特解  $u_p$  可以设为如下形式

$$u_p = C \cos \omega_g t \quad (10.1.3)$$

将式 (10.1.3) 代入运动方程 (10.1.1) 得

$$[-C(\omega_n^2 - \omega_g^2) + 2\zeta\omega_n\omega_g] \cos \omega_g t = \ddot{u}_g \cos \omega_g t$$

由时间的任意性，可得如下两个关于系数  $C$  的联立方程

$$\begin{cases} C(\omega_n^2 - \omega_g^2) = -\ddot{u}_g \\ 2\zeta\omega_n\omega_g C = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} C = \frac{\ddot{u}_g}{\omega_n^2 - \omega_g^2} \\ C = 0 \end{cases} \quad (10.1.4)$$

则运动方程的全解

$$u = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + \frac{\ddot{u}_g}{\omega_n^2 - \omega_g^2} \cos \omega_g t \quad (10.1.5)$$

当阻尼比  $\zeta \rightarrow 0$  时，上式退化为无阻尼体系的解式 (10.1.1)。

由式 (10.1.5) 可以清楚看到，振动频率等于体系的自振频率  $\omega_n$  的瞬态反应项，会由于阻尼的存在而很快衰减为零，最后结构的反应仅有由外荷载直接引起的稳态反应。图 10.1.1 给出有初始条件影响的动力反应时程，其中虚线为稳态反应项，而实线为在稳态反应项上叠加了瞬态反应项后的总体反应（全解）。

虽然一般情况下，感兴趣的是分析稳态反应项，但也应当注意，在特殊情况下，在反应的初始阶段瞬态反应项可能远远大于稳态反应项，从而成为结构最大反应的控制量，对于这种情况，在结构的动力反应分析或结构设计时瞬态反应项的影响不能忽略。当然，如果采用的分析方法能自动包括全解，例如采用后面将介绍的时域逐步积分法进行分析，则不会出现忽略瞬态反应项的问题，因为这时所获得的解中既包含了稳态项也包括了瞬态项。

由于瞬态反应项以结构的自振频率振动，因此它可以反映结构的动力特性；而稳态反应项以外荷载的激振频率振动，它可以反映输入荷载的性质。

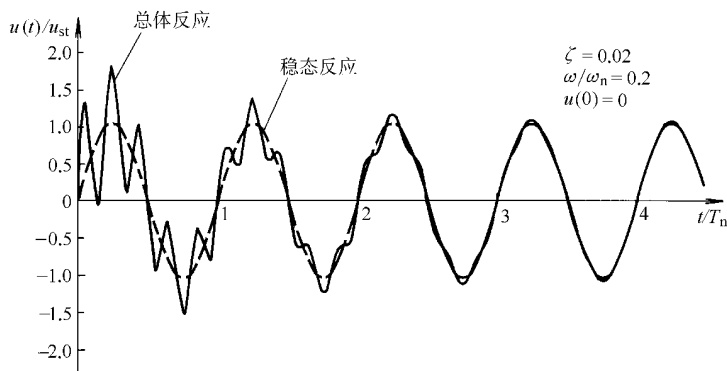


图 4-10 有初始条件影响的动力反应时程

## 4.3 共振反应

结构发生共振时,  $\omega$  越  $\omega_{\text{灶}}$ , 由式 (4-10) 可得

$$u(t) = \frac{u_{\text{st}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[ \sin(\omega t) - \zeta \cos(\omega t) \right] \quad (4-11)$$

将式 (4-11) 代入式 (4-10), 再令其满足零初始条件  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  可得

$$u(t) = \frac{u_{\text{st}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[ \sin(\omega t) - \zeta \cos(\omega t) \right] \quad (4-12)$$

最后得满足零初始条件的共振反应为

$$u(t) = \frac{u_{\text{st}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[ \sin(\omega t) - \zeta \cos(\omega t) \right] \quad (4-13)$$

当阻尼较小时,  $\omega$  越  $\omega_{\text{灶}}$ , 而式 (4-13) 中正弦项的影响不大, 此时式 (4-13) 成为

$$u(t) = \frac{u_{\text{st}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega t) \quad (4-14)$$

当  $\zeta$  越小时, 由式 (4-14) 可以得到满足零初始条件的共振反应为

$$u(t) = \frac{u_{\text{st}}}{\omega_{\text{灶}}} \sin(\omega_{\text{灶}} t) \quad (4-15)$$

与无阻尼时的结果完全相同。图 4-11 给出有阻尼体系共振反应时程。

## 4.4 动力放大系数

由于简谐荷载作用下体系振动的瞬态项会由于阻尼的影响而很快衰减, 经过一段时间后, 体系的振动将仅有稳态解。下面讨论稳态振动的特点, 为此把稳态项写为如下形式

$$u(t) = u_{\text{st}} \sin(\omega t - \phi) \quad (4-16)$$

式中， $u_0$  为稳态振动的振幅； $\phi$  为相角，反映体系振动位移与简谐荷载的相位关系；而  $u(t)$  由 (7.1.1) 给出。

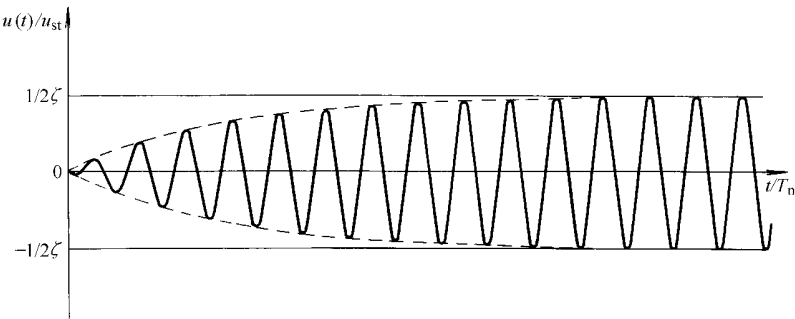


图 7.1.2 有阻尼体系共振反应时程

利用三角公式得

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \phi \quad (7.1.2)$$

将式 (7.1.1) 给出的  $u(t)$  代入上式，得

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \phi \\ \phi &= \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

而动力放大系数  $\eta$  定义为

$$\eta = \frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7.1.4)$$

图 7.1.3 给出阻尼比  $\zeta$  取不同的值时，体系动力放大系数  $\eta$  和相角  $\phi$  随动力荷载频率的变化曲线。

由图 7.1.3 可以得到简谐荷载作用下结构动力反应的特点和规律，这对了解结构的动力特性很重要。分析图 7.1.3 可以发现：

(1) 当  $\zeta \geq 1$  时， $\eta \leq 1$ ，即体系不发生放大反应。

(2) 当  $\zeta < 1$  时， $\eta$  跃升，动力放大系数的最大值 ( $\eta_{max}$ ) 为  $\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$ ，最大值对应的频率为  $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$ 。

- (猿) 当  $\omega$  越  $\omega_n$  时,  $R_d$  越  $\infty$ 。
- (源) 当  $\omega > \omega_n$  时,  $R_d < 1$  对任意  $\zeta$  均成立。

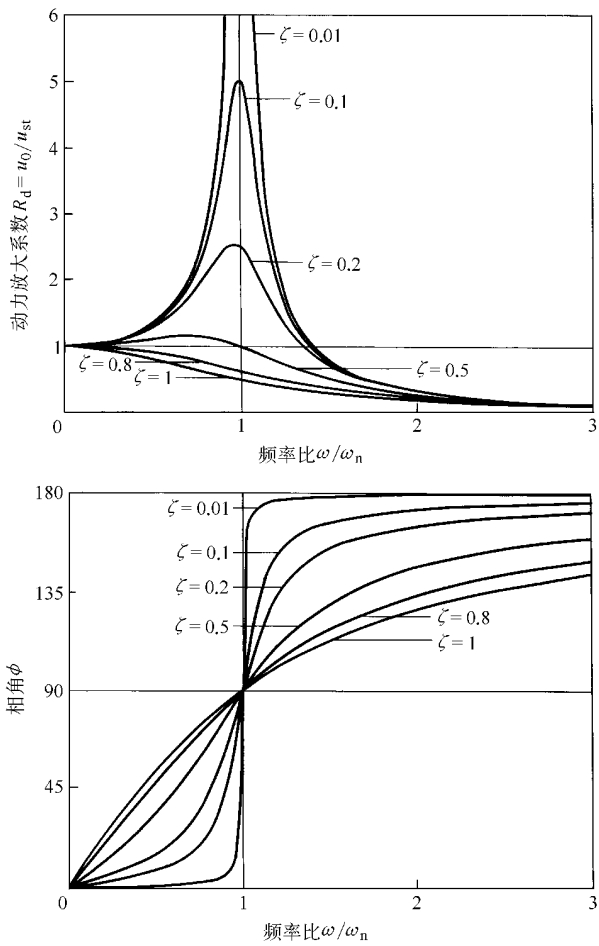


图 4-10 阻尼体系动力放大系数  $R_d$  和相角  $\phi$

有时也称最大值（峰值）对应的频率为共振频率，对比（圆）和（猿）可以发现，当阻尼比较小时，两种不同定义的共振频率差别不大，大阻尼时则存在较大的差别。因此，共振频率的定义有时要根据题意和实际情况理解。

4.3.3 阻尼体系动力反应与荷载的相位关系

下面再介绍一下相角  $\phi$  的含义。在动力荷载作用下，有阻尼体系的动力反应（位移、速度、加速度）一定要滞后动力荷载一段时间，即存在反应滞后现

象。这个滞后的时间即由相角  $\phi$  反映，如果滞后时间为  $\tau$ ，则  $\phi = \omega \tau$ 。由计算  $\phi$  的公式可知，滞后的相角与频率比  $\omega/\omega_n$  和阻尼大小均有关系。图 7-16 给出阻尼比  $\zeta$  越小时，相应于不同频率比  $\omega/\omega_n$  时的外力  $P(t)$  和位移  $u(t)$  曲线及滞后相角  $\phi$ 。相角  $\phi$  实际是反映结构体系位移相应于动力荷载的反应滞后时间，从图中可以发现，频率比越大，即外荷载作用得越快，动力反应的滞后时间越长。

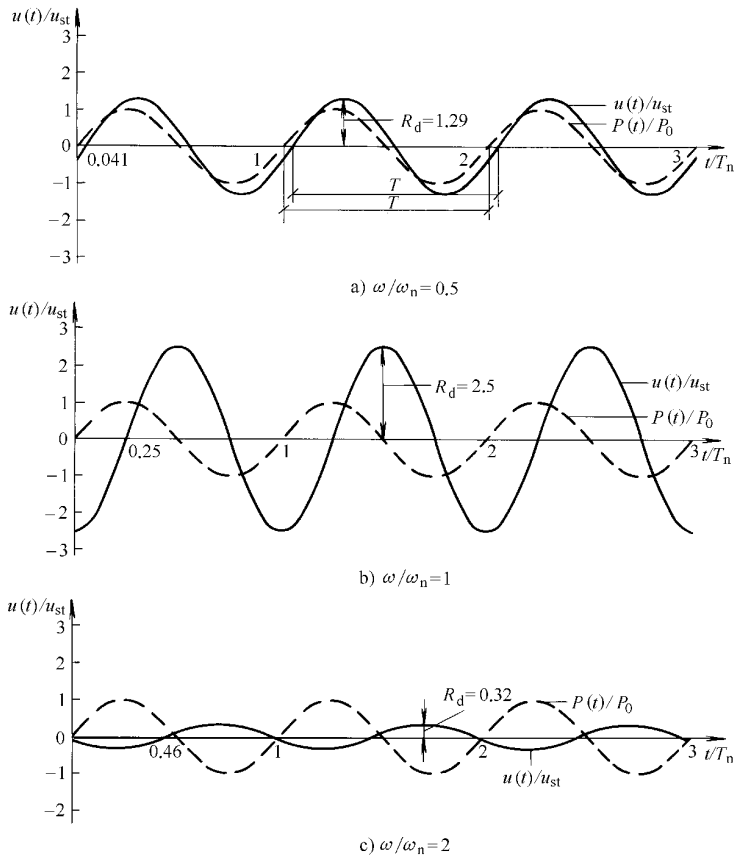


图 7-16 相应于不同频率比时阻尼体系的稳态反应

从具有不同阻尼比体系的相角与振动频率的关系图可以发现，荷载频率愈大，结构反应愈滞后。而荷载频率等于零、共振和趋于无限大时，是三种特殊的情形，当频率接近零时，体系的反应与静荷载作用结果相同，位移与荷载同相，则反映位移滞后效应的相角  $\phi$  趋于零；当共振时，位移与荷载相差  $\pi/2$ ；而当荷载频率非常大时，位移和荷载相位相差  $\pi$ ，即两者之间完全反向。表 7-1 给出相应于这三种情况的物理解释。

表 猿圆 三种特殊情况时体系振动位移与简谐荷载的相位关系

| 由 $\phi$ 原 $\omega$ 轳灶图判断     | 物理解释<br>(根据关系 : 零 < 怎 < 零 < 怎 < 零 < 怎 < 原 $\omega$ 圆怎)                                                                |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\omega$ 轳灶 > 园时 $\phi$ > 园 | $\omega \rightarrow$ 园则 怎 < 怎 > 园即 零 < 零 > 园<br>则 零 < 孕 贼, 即 零 < 孕 贼, 怎 < 孕 贼 相位相同                                    |
| ② $\omega$ 轳灶 越 园时 $\phi$ 越 园 | 零 越 怎 < 怎 < 原 $\omega$ 圆怎 < 怎 < 原 零 则 零 < 零 < 园<br>则 零 < 孕 贼, 即 零 < 孕 贼, 怎 < 孕 贼 同相, 而 怎 < 怎 相差 园 则<br>怎 贼 < 孕 贼 相差 园 |
| ③ $\omega$ 轳灶 > 肆时 $\phi$ 越 园 | $\omega \rightarrow$ 肆 则 零 < 零 < 零 则 零 < 孕 贼, 而 惯性力与位移反相, 所以位<br>移与 孕 贼 相差 园 则 $\phi$ 越 园                             |

猿圆 用简谐振动（强迫振动）试验确定体系的粘性阻尼比

在单自由度体系自由振动一节中已介绍了一种求单自由度体系粘性阻尼比的方法——对数衰减率法，由自由振动振幅比的对数值  $\delta$  可以得到体系的阻尼比。可以用自由振动方法求阻尼比  $\zeta$  的原因是由于自由振动衰减的快慢由  $\zeta$  控制，或说衰减规律可以明显反映出阻尼比  $\zeta$  的影响。而动力放大系数同样受  $\zeta$  控制，曲线形状可以反映出  $\zeta$  的影响，其影响主要有两点：①峰值大小；②曲线的胖瘦。

利用体系对简谐荷载反应的结果可以得到体系的阻尼比，有两种主要方法：共振放大法和半功率点（带宽）法，其原理均是基于对动力放大系数 的分析。

共振放大法

根据式（猿）给出的动力放大系数 员

$$\text{员} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}$$

当发生共振（ $\omega$  轳灶 越 园）时

$$\text{员}(\omega/\omega_n) \text{ 越 } \frac{1}{2\zeta}$$

一旦得到动力放大系数 曲线，就可以定出阻尼比

$$\zeta \text{ 越 } \frac{1}{2 \text{员}(\omega/\omega_n)} \text{ 越 } \frac{1}{2 \text{员}(\omega/\omega_n)} \quad (\text{猿})$$

由于从动力放大系数曲线确定  $\text{员}(\omega/\omega_n)$  不容易，一般用峰值 怎 代替，怎 越 怎，则

$$\zeta \approx \frac{1}{2 \text{员}(\omega/\omega_n)} \quad (\text{猿})$$

当阻尼比较小时（例如  $\zeta$  约 0.05），这一替换引起的误差很小。

用共振放大法确定体系的阻尼比，方法简单，但实际工程中测得的动力放大系数曲线一般以 图 1-10 给出，为用式 (1-10) 或式 (1-11) 计算体系的阻尼比，还需要得到零频时的静位移值，实际测量静载位移 总 无论从加载设备和记录（拾振）设备都有一定的困难，即实现动力加荷和测量动力信号的设备不能在零频率时工作。因此工程中往往采用半功率点（带宽）法从动力试验中得到阻尼比  $\zeta$ 。

半功率点（带宽）法

从动力放大系数  $R_d$  的图形可以看到， $R_d$  曲线形状完全由阻尼比  $\zeta$  控制，阻尼比  $\zeta$  大时， $R_d$  胖（宽）； $\zeta$  小时， $R_d$  瘦（窄）。可以用半功率点的宽度确定体系的阻尼比。设  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别是  $R_d$  上振幅值等于 共振 最大振幅的两个频率点（如图 1-10 所示），称为半功率点。当阻尼比较小时，半功率点与阻尼比  $\zeta$  的关系如下

$\zeta$  越 大  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}$  越 大 (1-12)

或者

$\zeta$  越 大  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}$  越 大 (1-13)

有时也采用工程频率计算阻尼比，即用

$\zeta$  越 大  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n}$  越 大

计算，其中  $\omega_n$  为工程频率。

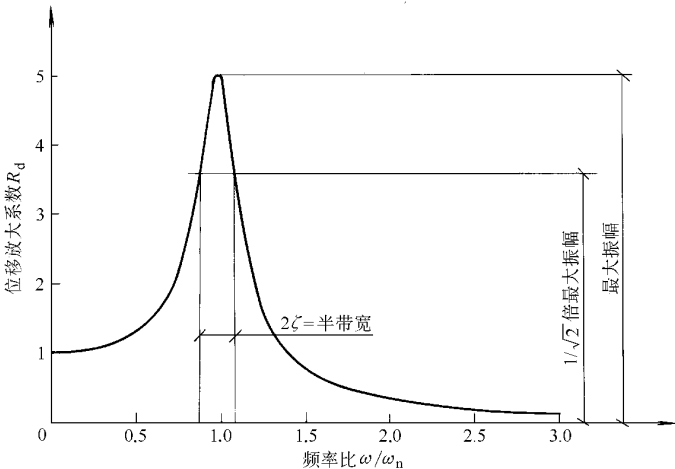


图 1-10 半功率带宽示意图

证明：

由  $\eta_{\text{静}}$  的定义可知， $\eta_{\text{静}}$  的最大值 ( $\eta_{\text{静}}^{\text{max}}$ ) 为  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ ，而振幅等于  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$  倍 ( $\eta_{\text{静}}^{\text{max}}$ ) 对应的频率满足以下方程

$$\frac{1}{\sqrt{[1-\zeta^2(\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (葬)$$

对式 (葬) 两边同时取倒数、并开平方，整理后得

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1 = 1 - \zeta^2 \quad (遭)$$

式 (遭) 是关于  $(\omega/\omega_n)^2$  的一元二次方程，可得两个根为

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = \zeta^2 \pm \sqrt{1-\zeta^2} \quad (糟)$$

式 (糟) 取正号时对应数值较大的根  $\omega_{\text{遭}}$ ，负号对应较小的根  $\omega_{\text{葬}}$ 。一般的工程结构，阻尼比较小，式 (糟) 中  $\zeta$  的平方项可忽略，因此

$$\frac{\omega}{\omega_n} \approx \sqrt{1-\zeta^2} \approx 1-\zeta^2$$

则对应于半功率点的两个根为

$$\frac{\omega_{\text{遭}}}{\omega_n} \approx 1+\zeta^2, \quad \frac{\omega_{\text{葬}}}{\omega_n} \approx 1-\zeta^2 \quad (遛)$$

由式 (遛) 得到半功率点频率  $\omega_{\text{遭}}$  和  $\omega_{\text{葬}}$  与阻尼比  $\zeta$  的关系为

$$\frac{\omega_{\text{遭}} - \omega_{\text{葬}}}{\omega_n} \approx 2\zeta^2 \quad (藻)$$

由此得到式 (猿)。若再用式 (遛) 的关系  $\frac{\omega_{\text{遭}} + \omega_{\text{葬}}}{\omega_n} \approx 2$  代入式 (藻)，又得到式 (猿)。

以上共介绍了三种测量结构阻尼的方法：对数衰减率法、共振放大法和半功率点（带宽）法，虽然是针对单自由度体系推导的，但这些方法对多自由度体系同样适用。下面对这三种方法作简要的总结。

**对数衰减率法：**采用自由振动试验，测一阶振型的阻尼比较容易。测量高阶振型阻尼比的关键是能激发出按相应振型进行的自由振动。例如，对于大型悬索桥钢拉索的试验，用简谐强迫振动激发共振振型，完全去掉外力，使索按某一振型自由振动，由此测量得到相应于该振型的阻尼比。

**共振放大法：**采用强迫振动试验，由于静（零频）荷载下的位移较难确定，应用上存在一定的技术困难，但通过一定数学上的处理还是可用的，例如，通过利用接近零频的非零频位移的插值外推得到零频时的位移值。

**半功率点（带宽）法：**采用强迫振动试验，不但能用于单自由度体系也可用

于多自由度体系，对多自由度体系要求共振频率稀疏，即多个自振频率应相隔较远，保证在确定相应于某一自振频率的半功率点时不受相邻频率的影响。

用简谐振动试验确定体系的粘性阻尼比的关键是得到体系的动力放大系数。虽然这里定义的是简谐振动试验，其实并不必须要求动力荷载本身一定是简谐形式的，例如利用结构的脉动反应结果也可以得到结构的动力放大系数，这可在相关的书籍中看到，当然从现有知识看，只有“扫频”分析才能得到体系的动力放大系数  $H_{eq}$

## §8.1 体系的阻尼和振动过程中的能量

### §8.1.1 自由振动过程中的能量

对于自由振动，输入到单自由度体系中的能量有两个来源，初始位移  $x_0$  和初始速度  $\dot{x}_0$ ，前者使弹簧产生应变能，而后者使质点产生动能。用  $E_0$  表示体系初始时刻具有的总能量，则

$$E_0 = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 \quad (8.1.1)$$

在自由振动过程中的任意时刻，体系中的总能量包括两部分，质点的动能  $E_k$  和弹簧变形产生的应变能  $E_p$ ，即

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2)$$

首先讨论一下无阻尼体系中的能量，将无阻尼体系自由振动的解式 (8.1.3)

$$x = x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t$$

代入动能和势能的表达式 (8.1.2)，有

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \left[ -x_0 \omega_d \sin \omega_d t + \dot{x}_0 \cos \omega_d t \right]^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k \left[ x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.4)$$

而总的能量

$$E = E_k + E_p \quad (8.1.5)$$

将式 (8.1.4) 代入式 (8.1.5)，并利用关系式  $\omega_d = \omega_n$ ，可得体系任意时刻的总能量为

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = E_0 \quad (8.1.6)$$

以上从理论上证明了,无阻尼体系自由振动过程中的总能量守恒,不随时间变化,等于初始时刻输入的能量。

对于有阻尼体系,在自由振动过程中位移和速度的振幅在不断减小,由式(4-10)和式(4-11)可知,体系中的能量将不断减小,这些减小的能量是被体系的阻尼所耗散,在任一时刻由粘性阻尼耗散的能量  $\Delta E_d$  可用下式计算,即

$$\Delta E_d = \int_{t_1}^{t_2} c \dot{x}^2 dt = \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt \quad (4-12)$$

由式(4-12)可见,与弹簧不同,阻尼在体系振动过程中始终在消耗能量,随着  $t \rightarrow \infty$ ,体系中的总能量将完全被阻尼所消耗,当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\Delta E_d = E$

### 4.1.3 粘性阻尼体系的能量耗散

下面分析单自由度体系在简谐荷载  $P \sin \omega t$  作用下,在一个振动循环内能量的耗散,分别定义:  $\Delta E_d$  为一个振动循环内阻尼引起的能量耗散,即阻尼力做的功;  $\Delta E_f$  为一个振动循环内外力做的功;  $\Delta E_s$  为一个循环内弹性力做的功;  $\Delta E_m$  为一个振动循环内惯性力做的功。

在简谐荷载  $P \sin \omega t$  作用下,单自由度体系的位移为

$$x = \frac{P}{k} \sin(\omega t - \phi)$$

(1) 阻尼引起的能量耗散  $\Delta E_d$ :

$$\Delta E_d = \int_{t_1}^{t_2} c \dot{x}^2 dt = \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt = \frac{c}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{P}{k} \omega \cos(\omega t - \phi) \right)^2 dt = \frac{c P^2 \omega^2}{2 k^2} \int_{t_1}^{t_2} \cos^2(\omega t - \phi) dt \quad (4-13)$$

$$= \frac{c P^2 \omega^2}{2 k^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\phi)}{2} dt = \frac{c P^2 \omega^2}{4 k^2} \int_{t_1}^{t_2} (1 + \cos(2\omega t - 2\phi)) dt$$

$$= \frac{c P^2 \omega^2}{4 k^2} \left[ t + \frac{\sin(2\omega t - 2\phi)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{c P^2 \omega^2}{4 k^2} (t_2 - t_1) \quad (4-14)$$

在式(4-14)推导中用到关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{\omega} (\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1)$$

由式(4-14)可以看到粘性阻尼引起的耗散与振幅  $\frac{P}{k}$  的平方成正比,与阻尼比  $\zeta$  和外荷载的频率  $\omega$  成正比。

(2) 外力做的功  $\Delta E_f$ :

$$\Delta E_f = \int_{t_1}^{t_2} P \dot{x} dt = \frac{P}{k} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt = \frac{P}{k} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{P}{k} \omega \cos(\omega t - \phi) \right)^2 dt = \frac{P^2 \omega^2}{k^2} \int_{t_1}^{t_2} \cos^2(\omega t - \phi) dt \quad (4-15)$$

$$= \frac{P^2 \omega^2}{k^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\phi)}{2} dt = \frac{P^2 \omega^2}{2 k^2} \int_{t_1}^{t_2} (1 + \cos(2\omega t - 2\phi)) dt$$

$$= \frac{P^2 \omega^2}{2 k^2} \left[ t + \frac{\sin(2\omega t - 2\phi)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{P^2 \omega^2}{2 k^2} (t_2 - t_1) \quad (4-16)$$

在上式推导中用到

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{\omega} (\cos \omega t_2 - \cos \omega t_1)$$

(3) 弹性力的功:

$$W_{\text{弹}} = \int_{-u_0}^{u_0} F_{\text{弹}} du = \int_{-u_0}^{u_0} ku du = \frac{1}{2}ku_0^2 - \frac{1}{2}k(-u_0)^2 = 0 \quad (10-10)$$

$$W_{\text{惯}} = \int_{-u_0}^{u_0} F_{\text{惯}} du = \int_{-u_0}^{u_0} -m\ddot{u} du = -m\dot{u} \Big|_{-u_0}^{u_0} = 0 \quad (10-11)$$

(源) 惯性力的功：

$$W_{\text{阻}} = \int_{-u_0}^{u_0} F_{\text{阻}} du = \int_{-u_0}^{u_0} -c\dot{u} du = -c\dot{u}u \Big|_{-u_0}^{u_0} = 0 \quad (10-12)$$

$$W_{\text{外}} = \int_{-u_0}^{u_0} F_{\text{外}} du = \int_{-u_0}^{u_0} F_0 \cos(\omega t + \phi) du = F_0 \sin(\omega t + \phi) \Big|_{-u_0}^{u_0} = 2F_0 \sin(\omega t + \phi) \sin \phi \quad (10-13)$$

可见在简谐振动中的一个循环内，弹性力和惯性力做功均等于零，而由阻尼耗散的能量等于外力做的功。

## 10.3 等效粘性阻尼

粘性阻尼是一种理想化的阻尼，具有简单和便于分析计算的优点。工程中结构的阻尼源于多方面，其特点和数学描述更为复杂，这时可以将复杂的阻尼在一定的意义上等效成粘性阻尼，一般采用基于能量等效的原则，下面首先介绍可反映阻尼耗散能量大小的阻尼力滞回曲线的概念和特点。

### 10.3.1 阻尼力的滞回曲线

所谓阻尼力的滞回曲线，是指阻尼力与位移之间的关系曲线，即  $F_{\text{D}}-u$  曲线。将简谐荷载作用下体系振动的解  $u = u_0 \sin(\omega t + \phi)$  代入粘性阻尼力计算公式，可得

$$F_{\text{D}} = c\dot{u} = c\omega u_0 \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{2}c\omega u_0 \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}c\omega u_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (10-14)$$

图 10-3 给出了粘性阻尼力的滞回关系曲线。

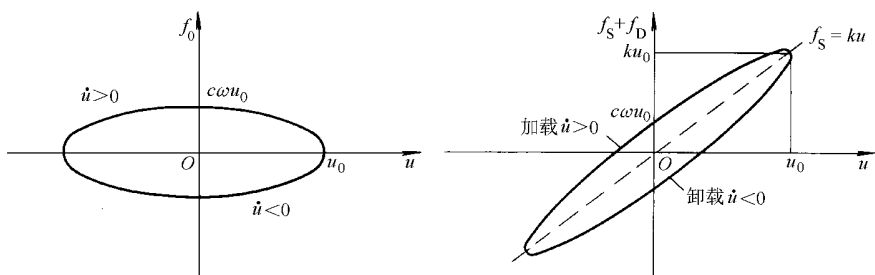


图 10-3 粘性阻尼力和抗力的滞回关系曲线

对式 (10-14) 整理可以得到

$$\left( \frac{F_{\text{D}}}{\sqrt{2}c\omega u_0} \right)^2 + \left( \frac{u}{u_0} \right)^2 = 1 \quad (10-15)$$

可见, 对于粘性阻尼, 其阻尼力的滞回曲线是一椭圆。

力在一个循环内所做的功等于滞回曲线所包围的面积, 这可以从功的意义直接得出。对于上面给出的阻尼力滞回曲线, 可以直接进行证明, 根据以上给出的粘性阻尼的椭圆形滞回环, 其面积为

$$W_{\text{回}} = \oint F_{\text{D}} du = \oint \zeta \omega u \dot{u} dt = \zeta \omega \oint u \dot{u} dt = \zeta \omega \oint u du = \zeta \omega \pi u_0^2$$

对于图 4-10 中的右图, 其面积与左图面积相等, 而  $F_{\text{D}}$  有时称为抗力, 因此抗力的滞回曲线包围的面积等于阻尼力做的功。在实际测量时, 量测到的量是抗力, 得到的滞回曲线的形状与右图相近。

### 等效粘性阻尼比

确定等效粘性阻尼比的原则是基于能量耗散相等的原理, 即在一个振动循环内让等效粘性阻尼做的功等于实际阻尼所做的功。

实际测量的抗力滞回曲线如图 4-11a 所示, 其中滞回曲线包围的面积为  $E_{\text{D}}$ ,  $E_{\text{D}}$  为一个循环内实际阻尼力作的功。如果等效成粘性阻尼, 如图 4-11b 所示, 设等效阻尼比为  $\zeta_{\text{eq}}$ , 则在原个循环内等效阻尼力作的功为

$$W_{\text{回}} = \oint F_{\text{D}} du = \oint \zeta_{\text{eq}} \omega u \dot{u} dt = \zeta_{\text{eq}} \omega \oint u du = \zeta_{\text{eq}} \omega \pi u_0^2 \quad (4-11)$$

由

$$E_{\text{D}} = \zeta_{\text{eq}} \omega \pi u_0^2 \quad (4-12)$$

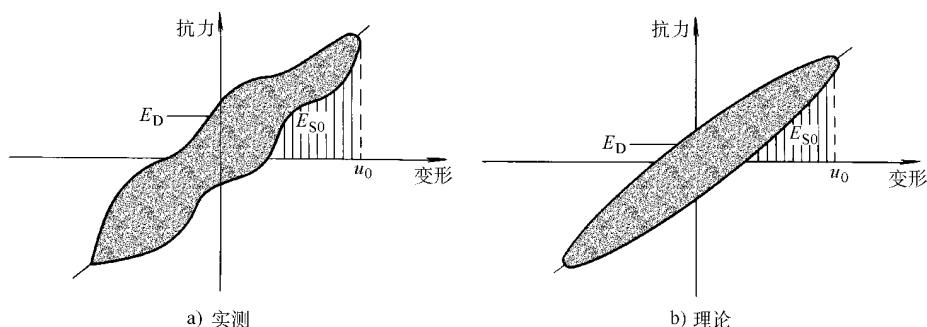


图 4-11 实测和理论的抗力滞回曲线

即可以确定  $\zeta_{\text{eq}}$ , 因为  $\omega$ 、 $u_0$  为已知, 式 (4-12) 代入式 (4-11) 得到

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{E_{\text{D}}}{\omega \pi u_0^2} \quad (4-13)$$

在实际测量中, 共振时结构反应更明显。因此, 一般采用共振时的测量结果。此时,  $\omega = \omega_n$ , 则

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

(复阻尼)

有时采用最大弹性应变能  $\frac{1}{2}kx_m^2$  来表示, 即

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

(复阻尼)

由  $\omega_n$  确定的等效阻尼比  $\zeta$  对于其他频率可能并不完全正确, 但提供了一个满意的近似。工程中这种等效方法广泛应用, 对多自由度体系也是适用的。

## 滞变阻尼 (复阻尼) 理论

粘性阻尼由于其在建立运动方程和求解时的方便性, 而在工程中得到广泛应用。但它也存在一个严重的缺陷, 即粘性阻尼的能量耗散与激振频率有关。例如在每一振动循环中耗散的能量为

$$\Delta W = \frac{c}{\omega} \pi x_m^2 \omega$$

对于任一结构体系, 阻尼比  $\zeta$  为常数, 固定振幅  $x_m$ , 则  $\Delta W \propto (\omega)$ , 即在每一振动循环中耗散的能量与激振频率成正比, 这与结构试验结果不符。试验结果表明, 阻尼力或其耗能与频率基本是无关的。为此, 人们发展了滞变阻尼理论 (滞变阻尼理论)。

滞变阻尼: 阻尼力大小与位移幅值成正比而与速度同相。有三种形式的定义:

①  $F_d = \eta \dot{x}$ ; ②  $F_d = \eta x$ ; ③  $F_d = \eta \dot{x}$ , 其中  $\eta$  为滞变阻尼参数。

第一种形式的定义直接套用滞变阻尼的定义; 第二种是滞变阻尼的复数形式; 第三种是从构造频率无关阻尼的构思出发。

上述三种形式在复数域是完全等价, 例如假设  $F_d = \eta \dot{x}$ , 则阻尼力  $F_d$  均为  $\eta \dot{x}$ 。但在实数域则不尽相同, 其中第一种和第三种的原型滞回曲线相差极大, 共同点是耗能与频率无关, 但具体耗能值不同。定义的第一种滞变阻尼在一个振动循环内耗能为

$$\Delta W = \pi c x_m \omega$$

第三种滞变阻尼在一个振动循环内耗能为

$$\Delta W = \pi \eta x_m^2 \omega$$

从滞回曲线形状分析, 第一种滞变阻尼形式与实际相差太大, 不可接受。从阻尼力的表达式看, 第三种定义的阻尼力中出现与外荷载相关的频率项, 因而其时域的运动方程将出现与频率有关的部分, 不易理解, 特别当外载是任意的动荷载时。

下面讨论第三种滞变阻尼与粘性阻尼的关系，由等效阻尼比计算公式（式 3-20）得

$$\zeta = \frac{\eta}{2\pi \omega \sqrt{1 + \eta^2 / (4\pi^2 \omega^2 k^2)}}$$

将在一个循环内实际阻尼力的功  $\pi \eta \omega$  用滞变阻尼的结果  $\pi \eta \omega$  代替，由上式可得到粘性阻尼比  $\zeta$  与滞变阻尼系数  $\eta$  的关系，即

$$\zeta = \frac{\eta}{2\pi \omega \sqrt{1 + \eta^2 / (4\pi^2 \omega^2 k^2)}} \quad (3-21)$$

当发生共振时

$$\eta \gg 2\pi \omega$$

上述两式即是目前确认的滞变阻尼参数  $\eta$  与粘性阻尼比  $\zeta$  之间的关系式。

应注意到关系式  $\eta \gg 2\pi \omega$  是在  $\omega \gg \omega_n$  时取得的，对  $\omega \neq \omega_n$  时并不成立。

图 3-21 给出了粘性阻尼与滞变阻尼耗能与激振频率  $\omega$  的关系曲线，可清楚地看到两种阻尼理论耗能的不同。滞变阻尼的耗能接近实际，而粘性阻尼当外力频率较低时，低估了体系的耗能能力；而外力频率较高时，又会过高估计耗能能力。因此，希望通过阻尼比的选取使粘性阻尼理论能正确反映所有频率情况下体系的耗能是不可能的，一个较为稳妥的方法是使阻尼比  $\zeta$  的选取能较为正确地反映感兴趣频段内的耗能能力。这可以通过设外荷载频率等于感兴趣频率的方法实现。实际的做法是取外荷载频率等于结构自振频率，此时结构的反应最大，是阻尼影响最大的点。由于结构往复试验时，在不同频率下得到的滞回环面积基本相等，因此可以用共振时的公式来定阻尼比，而不考虑实际加载频率，这样得到的阻尼比对反映共振时的耗能能力相对准确。

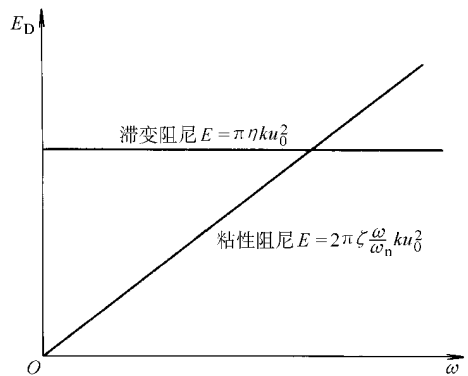


图 3-21 粘性阻尼与滞变阻尼耗能与激振频率  $\omega$  的关系

将  $\zeta = \frac{\eta}{2\pi \omega \sqrt{1 + \eta^2 / (4\pi^2 \omega^2 k^2)}}$  代入粘性阻尼力的表达式  $F_D = \zeta k \dot{u}$  得

$$F_D = \frac{\eta}{2\pi \omega \sqrt{1 + \eta^2 / (4\pi^2 \omega^2 k^2)}} \dot{u}$$

即为第三种滞变阻尼的表达式。

滞变阻尼第二种表达式  $F_D = \eta \dot{u}$  也称为复阻尼，在复阻尼理论中，将阻

尼力和弹性恢复力合在一起构成复刚度，即

$$k^* = k + j\omega\eta \quad (1.1.1)$$

在复数形式的简谐荷载作用下质点的运动方程可写成

$$m\ddot{x} + k^*x = F_0 e^{j\omega t} \quad (1.1.2)$$

方程(1.1.2)的稳态解可设为

$$x = X e^{j\omega t} \quad (1.1.3)$$

而加速度为

$$\ddot{x} = -\omega^2 X e^{j\omega t} \quad (1.1.4)$$

将式(1.1.3)和式(1.1.4)代入运动方程(1.1.2)得

$$[-m\omega^2 + k^*]X = F_0$$

由此可以解得

$$X = \frac{F_0}{[-m\omega^2 + k^*]} \quad (1.1.5)$$

则稳态反应为

$$x = \frac{F_0}{[-m\omega^2 + k^*]} e^{j\omega t} \quad (1.1.6)$$

$k^*$ 是一个复函数，可以写成它的模与单位复数积的形式，即

$$k^* = |k^*| e^{j\theta} \quad (1.1.7)$$

可以证明

$$\left. \begin{aligned} |k^*| &= \sqrt{[k^2 - 2k\eta\omega + \eta^2\omega^2]} \\ \theta &= \arctan \frac{\eta\omega}{k - \eta\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

时域解可取式(1.1.6)或式(1.1.8)的实部或虚部(实部相当于  $\cos\omega t$  作用的结果，虚部相当于  $\sin\omega t$  作用的结果)。

将以上采用复阻尼得到的简谐荷载作用下的解与采用粘性阻尼时的解式(1.1.9)对比可以发现，只要取

$$\eta = \eta'(\omega)$$

则复阻尼理论与粘性阻尼理论的解完全相同，以上关系式已由式(1.1.10)给出。

可以证明采用复阻尼时，在每一振动循环阻尼消耗的能量为

$$\Delta E = \pi \eta u_m^2$$

与第三种滞变阻尼的结果相同。

复阻尼理论与试验结果相符，广泛应用于频域分析，即简谐反应分析中。

## 7.2 振动的测量

在结构工程中常常进行运动量（位移、速度或加速度）的测量，例如地震动时程的测量；振动台试验中结构模型动力反应的测量；脉动作用下结构物的振动测量；大桥、超高层结构风振的测量；大型机器设备、动力基础的振动测量等。用于测量振动量的仪器（拾振仪）主要有三种：

加速度计：测量加速度时程（强震仪）。

位移计：测量位移时程（地震仪）。

速度计：测量速度。

虽然现代振动测量仪器制造得更为精密，构造更为复杂，但其最基本原理是相同的。最简单的测量仪器模型是一单自由度的弹簧-质量-阻尼体系，被封闭在一个刚性盒子里，振动测量仪器构造如图 7-2 所示。

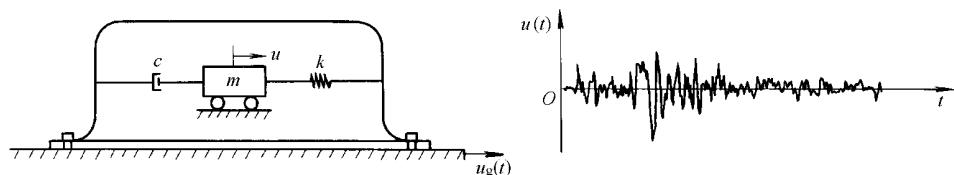


图 7-2 振动测量仪器构造示意图

振动测量仪器可以是单分量的，也可以是多分量的，即可以同时测量二、三个分量。仪器输出的量是相对位移。

对测量仪器的要求是能在一定频段内精确再现被量测运动的时程曲线。下面分别分析加速度计和位移计的工作原理。

### 7.2.1 加速度计（强震仪）

加速度计测量的是加速度，在基底加速度运动作用下仪器质点的运动方程为

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = -m \ddot{u}_g(t) \quad (7-2)$$

实际要测量的加速度运动时程是任意变化的，包含在一定频段分布的一系列简谐分量，我们可以先分析仪器对一个简谐分量的测量。

仪器基底加速度时程

怎样越怎样怎样 (猪圈)

为简谐运动，其中怎样为地面运动加速度振幅。将式 (猪圈) 代入运动方程 (猪圈)，可得仪器质点的相对位移怎样为

怎样越怎样怎样 (猪圈)

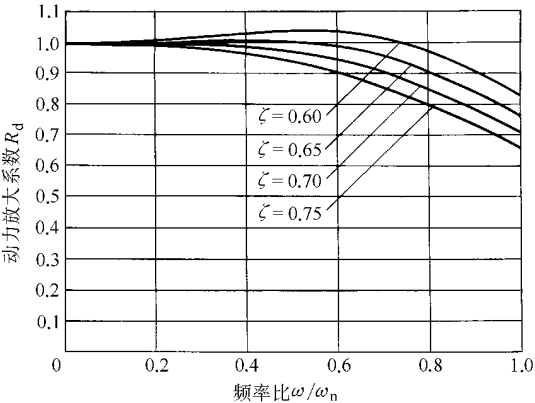
怎样越怎样怎样 (猪圈)

为简单起见，以下仅讨论怎样的振幅怎样

怎样越(怎样)怎样 (猪圈)

作为一把标尺，或说一种量测仪器，其测量物体时的长度单位可以不同（例如，采用怎样或怎样等单位），但一定要成比例。

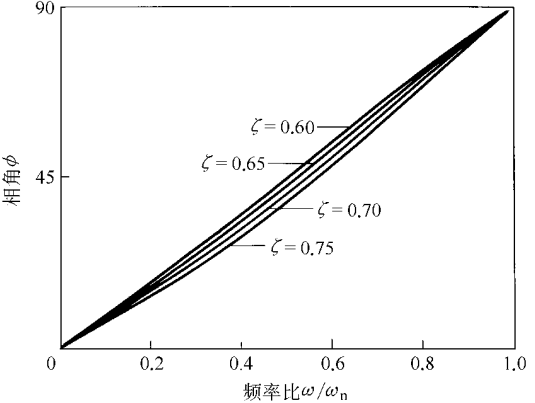
由式 (猪圈) 可见，仪器记录值怎样和被量测的地面加速度值之间关系的变化由动力放大系数怎样决定，而动力放大系数怎样是  $\omega$  的函数，观察不同阻尼比时动力放大系数曲线图猪圈可以发现，当  $\zeta$  越怎样时，在频段  $\omega \leq \omega_n$  范围内，怎样为常数。



即在以上频段范围内，仪器反应的振幅量怎样，或者说是仪器的记录与仪器要测量的加速度振幅成线性关系（对不同的简谐运动均如此）。这时可以用仪器反应怎样来度量要测量的加速度。为保证加速度的不同简谐分量的频率  $\omega$  都满足

$\omega \leq \omega_n \leq \omega$

可以采用提高  $\omega_n$  的方法来实现，因  $\omega_n \propto \sqrt{\frac{K}{m}}$ ，一般情况下，质量怎样不变，可以采用提高加速度计中弹簧刚度怎样的方法来实现提高  $\omega_n$  的目的。因



图猪圈 不同频率比下的动力放大系数和相角

此,加速度计或强震仪中弹簧刚度比较大,仪器是比较刚性的。

## 4.2.1 位移计(地震仪)

位移计是用来测量仪器基底的位移量,设任一简谐位移为

$$x_g = X_g \sin \omega t \quad (4.2.1)$$

其中  $X_g$  为地面运动位移振幅。将  $x_g = X_g \sin \omega t$  代入运动方程(4.1.1)解得仪器的相对位移反应为

$$x = \frac{X_g}{\sqrt{1 - 2\zeta^2 + 1}} \sin(\omega t - \phi) \quad (4.2.2)$$

相对位移反应的振幅为

$$\frac{x}{X_g} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2 + 1}} \quad (4.2.3)$$

与加速度计的原理相同,我们希望在所量测的振动频率范围内,对于不同的频率分量均有  $\frac{x}{X_g}$  和  $\frac{x}{X_g}$  之间的比例系数  $(\frac{\omega}{\omega_n})^2 R_d$  接近常量。图 4.2.1 给出了  $(\frac{\omega}{\omega_n})^2 R_d$  随频率  $\omega/\omega_n$  的变化曲线。

由图 4.2.1 给出的  $(\frac{\omega}{\omega_n})^2 R_d$  随频率比  $\omega/\omega_n$  变化

的曲线可见,当阻尼比  $\zeta$  趋近于 0 时,在频率范围  $\omega/\omega_n$  跃升时,  $(\frac{\omega}{\omega_n})^2 R_d$  接近于常数,因此可以用位移计来测量频率范围在  $\omega/\omega_n$  频段范围内的位移量。为保证被测位移的频率满足  $\omega/\omega_n$ , 可通过降低仪器自振频率  $\omega_n$  的方法来实现,实际中取降低弹簧刚度或增大质量的方法实现。因此,位移计一般都是比较柔的。

从以上分析看到,无论是加速度计还是位移计都是在一定频段内工作的。

## 4.2.2 隔振(震)原理

工程中的隔振(震)分两种情况:

(1) 阻止振动的输出。例如,大型动力机器振动向地基中的传播;地铁车辆振动传播。

(2) 阻止振动的输入。例如,结构抗震问题中的隔震设计,在振动的结构或地基上安装的精密仪器设备的隔振问题。

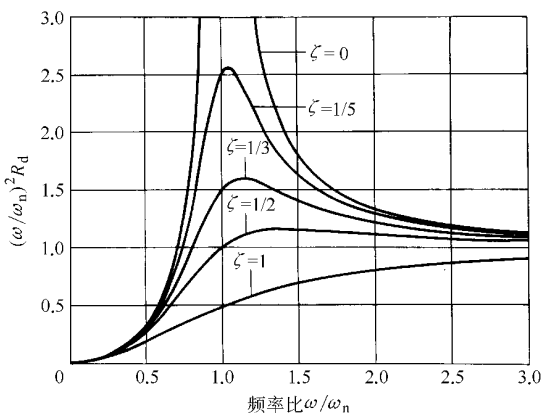


图 4.2.1 不同阻尼比时  $\frac{x}{X_g}$  和  $\frac{x}{X_g}$  之间的比例系数  $(\frac{\omega}{\omega_n})^2 R_d$

力的传递和隔振

第一种隔振情况实际上是力的隔离，即使动力机器产生的不平衡力或地铁车辆产生的冲击力降低，不传入或少传入到地基中，其力学模型如图 7-1 中左图所示。

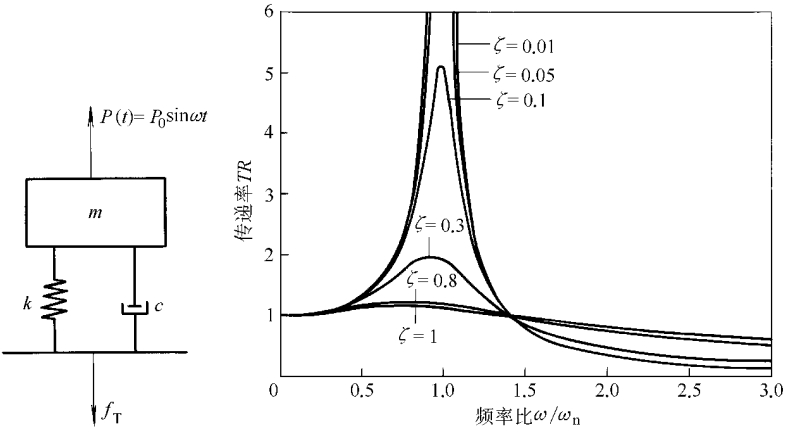


图 7-1 不同频率时的传递率

图 7-1 中， $P(t)$  为机器的不平衡力； $\omega$  为机器的转速（角速度）； $m$  为机器质量（设为刚性质量块）； $k$  为隔振元件的总刚度和阻尼； $c$  为从隔振元件传到地基上的力。

而通过隔振元件传递到地基的力为

$$F_T = P_0 \sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2} \quad (7-1)$$

这是一单质点体系的简谐振动问题，其解为

$$x = X \sin(\omega t - \phi) \quad (7-2)$$

代入式 (7-1)，则可得到传到地基上的力为

$$F_T = P_0 \sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2} \sin(\omega t - \phi) \quad (7-3)$$

作用力  $F_T$  的最大值为

$$F_{Tmax} = P_0 \sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2} \quad (7-4)$$

将  $x = X \sin(\omega t - \phi)$  代入上式得

$$F_{Tmax} = P_0 \sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2 / \omega_n^2} \quad (7-5)$$

将作用地基上的力的最大值  $F_{Tmax}$  与体系上作用力的幅值  $P_0$  之比称为传递率，它是反映隔振效果的量，用  $TR$ （ $Transmissibility$ ）表示，即

$$\text{传递率} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \omega^2}{1 + 4\zeta^2 \omega_0^2}} \quad (4-10)$$

不同频率时力的传递率可从图 4-10 中看到, 当

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \text{ 时, 传递率}$$

即, 提高隔振体系的频率比 ( $\omega/\omega_0$ ) 可实现隔振, 即使  $\zeta \approx 0$ 。因此, 为达到隔振的目的, 可采用降低  $\omega_0$  的办法, 即通过减小隔振元件刚度或增加仪器质量的方法提高隔振效果。实际的减振设计方案应在尽量小的刚度和可接受的静位移之间优化选取。

从图 4-10 中可以看到, 当满足  $\omega/\omega_0 \gg 1$  时, 阻尼对隔振产生不利影响, 是否选择无阻尼最好? 这要考虑实际情况。机器工作时, 运转的频率  $\omega$  是由零逐渐增大, 最后达到工作频率的。在某一时刻, 其荷载的频率  $\omega$  总要与体系自振频率重合, 在这一瞬时, 体系发生共振, 虽然重合的时间一般不会太长, 共振反应不会达到其稳态值, 但也可能达到较大值, 对机器的工作和隔振是不利的。因此, 实际上隔振体系需要合适的阻尼。

### 4.1.2 基底振动的隔离

第二种隔振情况实际上是基底振动的隔离, 其力学模型与前者相似, 如图 4-11 所示, 而作用的是基底 (地面) 的振动位移  $y_0 \sin \omega t$ , 质点的绝对位移为

$$y_0 \sin \omega t + y \sin \omega t$$

而  $y$  为相对位移。

对基底隔振的要求是  $y \ll y_0$ , 即设备或结构的振动小于基底的振动。输入基底运动的位移时程为

$$y_0 \sin \omega t$$

与前述位移计一节的推导完全相同, 可以得到质点相对位移解  $y$  为

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

则质点的总位移  $y_0$  为

$$y_0 = y_0 \sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2} \sin(\omega t - \phi)$$

由此可以得到位移的传递率  $T_y$  为

$$T_y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\zeta^2 \omega^2}}$$

可见位移的传递率关系与力的传递率完全相同, 说明两种隔振问题是相同的, 其隔振设计方法也基本相同。

对建筑结构的隔振问题与以上讨论的单质点体系有类似的地方，例如都是试图通过降低体系自振频率的方法来提高隔振（震）效率，也有不同的地方。建筑结构体系是多自由度体系，其隔振效率的研究更复杂，而且地震动是宽频带的震动过程，总有与结构自振频率相同的频率成分存在，无法通过避开地震动频率的方法来实现隔振（震）的目的，对此问题的研究已成为一专门的课题。

在基底隔振研究中有时专门研究对加速度的隔振，此时给出加速度的传递率

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2}{1 - \omega_0^2/\omega^2}}$$

可见加速度的传递率与位移的传递率完全相同。

算例 某工程场地竖向加速度为  $\ddot{y}$ ，振动频率为  $\omega$ ，安放一个重量为  $G$  的敏感仪器，仪器固定在刚度为  $K$ ，阻尼比为  $\zeta$  的橡胶隔振垫上，问：①传递到仪器上的加速度是多少？②如果仪器只能承受  $\ddot{x}_{\text{max}}$  的加速度，给出解决方案。

解：①求  $\ddot{x}$

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2}{1 - \omega_0^2/\omega^2}}$$

代入传递率计算公式

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2}{1 - \omega_0^2/\omega^2}}$$

②给出解决方案：降低体系的自振频率  $\omega_0$ ，即增大  $\omega_0$  可以提高隔振效率，由于隔振垫参数不易改变，可以通过增加附加质量办法降低  $\omega_0$ ，先假设附加质量  $G_1$ ，则体系总质量  $G + G_1$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{G + G_1}$$

增加附加质量后，体系阻尼不变，但阻尼比发生变化，阻尼系数为

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{(G + G_1)K}}$$

可见方案是成功的, 因为

算例 汽车在多跨连续桥梁上行驶, 桥梁跨度均为

桥面由于长时徐变效应而产生挠度 (如图 所示)。桥面可以用振幅为的正弦曲线来近似, 汽车可以用一个单质点体系模拟, 如果车重 等效弹簧刚度 等效阻尼比  $\zeta$ , 求: ① 车以 行驶时, 汽车的竖向运动 的振幅; ② 发生共振时汽车的行驶速度 (此处指使振幅最大时的速度)。

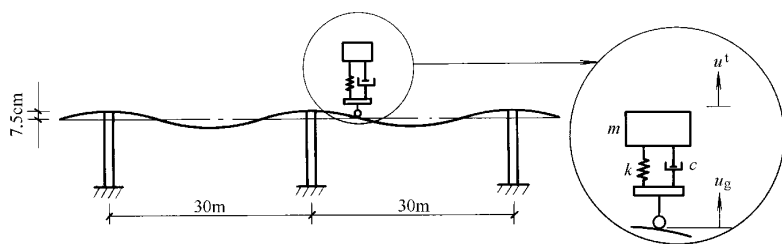


图 算例 模型示意图

解: ① 求汽车竖向运动的振幅:

汽车相当于受振幅为 波长为 的简谐运动 的干扰。简谐运动的周期 载重 (原伊面电转) 越

车辆的固有周期 越  $\omega_{\text{灶}}$

频率比  $\beta$  越  $\omega_{\text{灶}}$

根据对基底振动的解

$$\text{越} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \text{越} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

所以汽车竖向运动的振幅 越

② 共振时的车速 (此处指使振幅最大时的行驶速度) 及振幅:

如果体系的阻尼比  $\zeta$  很小, 当  $\omega$  越 时 最大, 而本问题阻尼比  $\zeta$  很大, 因此使 取最大值时的频率  $\omega$  不一定等于汽车的自振频率  $\omega_{\text{灶}}$ , 此时要采用取极值条件求使 达到最大的频率  $\omega$ 。由于当 取最大值时 也取最大值。而

$$\text{越} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

由  $\frac{\partial z}{\partial \beta}$  越远可得  $\beta_{\text{最}}$ , 而  $\beta_{\text{最}}$  是使  $z$  越取最大值的频率比。再由  $\beta_{\text{最}} = \frac{\omega_{\text{最}}}{\omega_{\text{灶}}}$  越得  
到使车辆发生共振时的周期  $z$  越越越越。而  $z$  越越越越, 增即为使车辆振幅达到  
最大时的车速。对于本算例

$$\beta_{\text{最}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{z_{\text{灶}}}}} \quad z_{\text{灶}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{灶}}} = \frac{2\pi}{v_{\text{灶}}}$$
$$z_{\text{灶}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{灶}}} = \frac{2\pi}{v_{\text{灶}}} = \frac{2\pi}{\frac{v_{\text{灶}}}{r}} = \frac{2\pi r}{v_{\text{灶}}}$$

且,  $z_{\text{灶}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{灶}}} = \frac{2\pi}{\frac{v_{\text{灶}}}{r}} = \frac{2\pi r}{v_{\text{灶}}}$

所以, 怎越越越, 越越越越, 越越越越, 越越越越  
即, 当汽车的行驶速度为  $v_{\text{灶}}$  越越越越时, 车辆的振幅达到最大值  $z_{\text{灶}}$  越越越越

猿范 单自由度体系对周期荷载的反应

有了结构体系的简谐振动解, 就可以进一步分析在任意周期性荷载作用下的  
解。在开展这一分析前, 再补充余弦力作用下体系的解。

设外荷载为

$$F \cos(\omega t + \phi)$$

运动方程为

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + kz = F \cos(\omega t + \phi)$$

设稳态解为

$$z = z_{\text{稳}} \cos(\omega t + \phi)$$

将稳态解代入运动方程得

$$z_{\text{稳}} = \frac{F}{m \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{灶}}^2})^2 + \frac{c^2}{4m^2 \omega^2}}}$$
$$z_{\text{稳}} = \frac{F}{m \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{灶}}^2})^2 + \frac{c^2}{4m^2 \omega^2}}}$$

如将  $z_{\text{稳}}$  越越越越

$$z_{\text{稳}} = \frac{F}{m \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{灶}}^2})^2 + \frac{c^2}{4m^2 \omega^2}}}$$

则有

$$z_{\text{稳}} = \frac{F}{m \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{灶}}^2})^2 + \frac{c^2}{4m^2 \omega^2}}}$$
$$\phi = \arctan \frac{c \omega}{2m(\omega_{\text{灶}}^2 - \omega^2)}$$

可见在余弦力作用下体系动力反应解的形式与正弦力作用的结果相似, 仅需把正

弦函数改成余弦函数，而动力放大系数  $\mu$  和滞后相位  $\phi$  完全相同。实际上这个结果在前面求复数形式简谐荷载作用的解时已经给出。

在得到单自由度体系对简谐荷载反应分析结果以后，就可以方便地分析单自由度体系对周期性荷载的反应。实际上简谐荷载就是一种最简单、最具代表性的周期荷载，而任意周期性荷载均可以分解成简谐荷载的代数和，所用的手段就是采用傅里叶级数展开方法。

任意周期为  $T$  的周期荷载  $P(t)$ ，可以展开成傅里叶级数，即

$$P(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt e^{in\omega t} \quad (4-10)$$

其中， $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ， $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，而

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned} \quad (4-11)$$

当用傅里叶级数展开法时，隐含假设周期函数是从原时开始到  $T$ 。初始条件 ( $t=0$ ) 的影响到  $t=T$  时已完全消失，仅需计算稳态解即特解。

记  $P_0$  为常荷载  $P(t)$  作用下体系的反应， $P_1$  为余弦简谐荷载  $P(t) = P_0 \cos \omega t$  作用下体系的反应， $P_2$  为正弦简谐荷载  $P(t) = P_0 \sin \omega t$  作用下体系的反应。可以容易求出

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{P_0}{\omega^2} \\ P_1 &= \frac{P_0}{\omega^2} \frac{\cos \omega t}{\beta^2} \\ P_2 &= \frac{P_0}{\omega^2} \frac{\sin \omega t}{\beta^2} \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$\omega_n$  为体系的自振频率。

则任意周期荷载作用下体系总的稳态反应为

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt e^{in\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt e^{in\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^T P(t) e^{-in\omega t} dt e^{in\omega t} \end{aligned} \quad (4-13)$$

从以上公式看到,通过云<sub>云云云云</sub>级数展开,把任意周期性荷载表示成一系列简谐荷载的叠加。对每一简谐荷载作用下结构的反应可以容易得到其稳态解,再求和得到结构在任意周期性荷载作用下的反应。

也可用复指数形式的云<sub>云云云云</sub>级数展开周期性荷载,进而得到复数形式的解。将周期荷载用复数形式的云<sub>云云云云</sub>级数展开,即

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\omega t} \quad (1.1.1)$$

其中,  $P_n$  为复数简谐力的振幅。

令  $Y_n$  为单位复数简谐荷载  $e^{in\omega t}$  作用下体系稳态解的复振幅值,即

$$Y_n = \frac{1}{M(\omega)} e^{in\omega t} \quad (1.1.2)$$

式(1.1.2)代入运动方程,有

$$M \ddot{Y}_n + C \dot{Y}_n + K Y_n = P_n e^{in\omega t}$$

得到

$$Y_n = \frac{P_n}{M(\omega)} e^{in\omega t} \quad (1.1.3)$$

$Y_n$  称为复频反应函数,也称为传递函数或频响函数。

则周期荷载作用下体系的解为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n Y_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \frac{1}{M(\omega)} e^{in\omega t} \quad (1.1.4)$$

可以证明式(1.1.4)与时域分析给出的解式(1.1.1)完全相同。

## 单自由度体系对任意荷载的反应

在实际工程中,很多动力荷载既不是简谐荷载,也不是周期性荷载,而是随时间任意变化的荷载。为此需要采用更通用的方法来研究任意荷载作用下单自由度体系的动力反应问题。本节首先介绍一种时域分析方法——云<sub>云云云云</sub>积分法,然后介绍一种频域分析方法——云<sub>云云云云</sub>变换法,这两种方法适用于处理线弹性结构的动力反应问题。

### 时域分析方法——云<sub>云云云云</sub>积分

#### 单位脉冲反应函数

单位脉冲:作用时间很短,冲量等于  $1$  的荷载,实际上就是数学中的特殊函数—— $\delta$  函数。 $\delta$  函数是线性问题中描述点源或瞬时量的用途非常广泛的一个广义函数,它的应用使一些很复杂的极限过程能够以非常简洁的数学形式来表示。

$\delta$  函数的定义为

$$\delta(\tau - \tau_0) = \begin{cases} \infty, & \tau = \tau_0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau_0) d\tau = 1$$

在  $\tau = \tau_0$  时刻的一个单位脉冲  $\delta(\tau - \tau_0)$  作用在单自由度体系上, 使结构的质点获得一个单位冲量, 在脉冲结束后, 质点获得一个初速度, 即

$$v(\tau_0 + \epsilon) - v(\tau_0 - \epsilon) = \int_{\tau_0 - \epsilon}^{\tau_0 + \epsilon} \delta(\tau - \tau_0) d\tau = 1$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时

$$v(\tau_0) = 1$$

由于脉冲作用时间很短, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 由单位脉冲引起的质点的位移为零

$$x(\tau_0) = 0$$

求体系在单位脉冲作用下的反应, 即是求解单位脉冲作用后的自由振动问题。单位脉冲的作用相当于给出一个初始条件, 将  $\tau_0$  时刻脉冲作用后的初值条件  $x(\tau_0) = 0$  和  $\dot{x}(\tau_0) = 1$  代入单自由度体系自由振动的一般解式 (式 3-10) 或式 (式 3-11), 可以得到无阻尼和阻尼体系的单位脉冲反应函数。

单位脉冲反应函数用  $x(\tau - \tau_0)$  表示, 其中  $\tau_0$  为结构体系动力反应的时间, 而  $\tau$  则表示单位脉冲作用的时刻。

对无阻尼体系, 单位脉冲反应函数为

$$x(\tau - \tau_0) = \frac{1}{\omega_d} \sin[\omega_d(\tau - \tau_0)] \quad (\text{式 3-12})$$

阻尼体系的单位脉冲反应函数为

$$x(\tau - \tau_0) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_d(\tau - \tau_0)} \sin[\omega_d(\tau - \tau_0)] \quad (\text{式 3-13})$$

图 3-10 给出了单位脉冲及在单位脉冲作用下无阻尼体系和阻尼体系动力反应时程, 即单位脉冲反应函数  $x(\tau - \tau_0)$ 。

3. 对任意荷载的反应

在前面任意周期荷载反应分析中, 把荷载分解成一系列简谐荷载, 通过分析获得任一简谐荷载的反应, 再叠加求得体系的总体反应。采用相似的方法, 我们也可以把荷载分解成一系列脉冲, 然后获得每一个脉冲作用下结构的反应, 最后叠加每一脉冲作用下的反应得到结构总的反应。图 3-11 给出将任意荷载离散成一系列脉冲以及各个脉冲动力反应时程示意图。

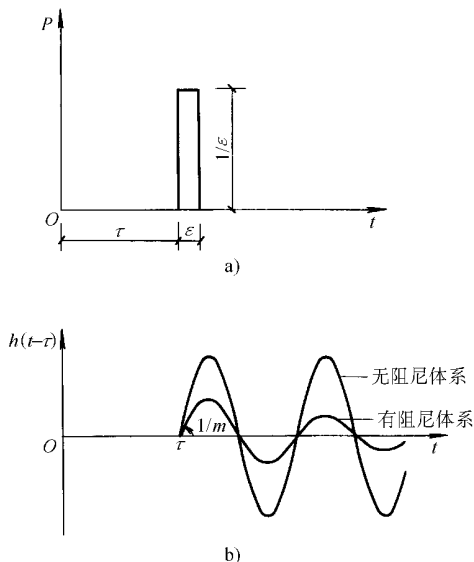


图 10-10 单位脉冲及单位脉冲反应函数

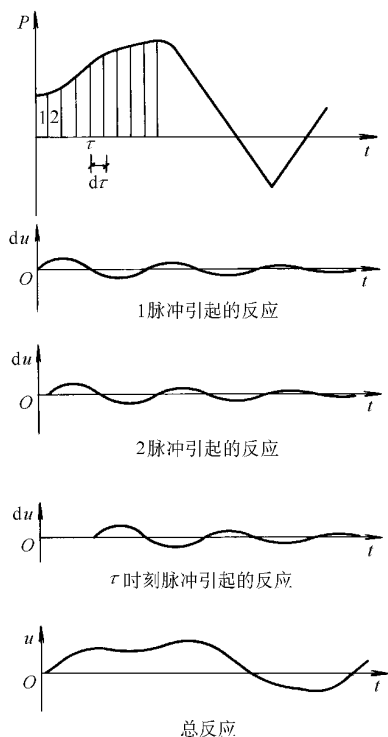


图 10-11 任意荷载离散成一系列脉冲以及各个脉冲动力反应

如果已经将作用于结构体系的外荷载  $P(t)$  离散成一系列脉冲，首先计算其中任一脉冲  $P(t)$  的动力反应。此时，由于脉冲的冲量等于  $P(t)$ ，则直接利用单位脉冲反应函数可得在该脉冲作用下结构的反应为

$$u(t, \tau) = \frac{1}{m} h(t - \tau) P(\tau) \quad (10-10)$$

在任意时间  $t$  结构的反应，就是在  $t$  以前所有脉冲作用下反应之和

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{m} h(t - \tau) P(\tau) d\tau \quad (10-11)$$

将式 (10-10) 和式 (10-11) 分别代入式 (10-9) 得到求解无阻尼和阻尼体系动力反应的积分公式

$$u(t) = \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \frac{1}{\omega_d} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau \quad (10-12)$$

$$u(t) = \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \frac{1}{\omega_d} e^{-\gamma(t - \tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau \quad (10-13)$$

其中  $\omega_d$  和  $\gamma$  分别为无阻尼和阻尼体系的自振频率。

阅读本章(杜哈曼)积分给出的解是一个由动力荷载引起的相应于零初始条件的特解。如果初始条件不为零,则需要再叠加上由非零初始条件引起的自由振动,其解的形式已在前面给出。例如,对于无阻尼体系,当存在非零初始条件时,问题的完整解为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

阅读本章积分法给出了计算线性单自由度体系在任意荷载作用下动力反应的一般解,适用于线弹性体系。因为使用了叠加原理,因此它限于弹性范围而不能用于非线性分析。如果荷载  $\ddot{x}_0(\tau)$  是简单的函数,则封闭解(闭式解)是可以得到的。如果  $\ddot{x}_0(\tau)$  是一个很复杂的函数,也可以通过数值积分得到问题的解,其计算仅涉及简单的代数运算。但从实际应用上看,采用阅读本章积分法求解时,其计算效率不高,因为对于计算任一个时间点的反应,积分都要从 0 积到  $t$  而实际要计算一时间点系列,可能要有几百到几千个点。这时可采用效率更高的数值解法,这将在以后介绍。

虽然在实际的计算中并不常用阅读本章积分方法,但它给出了以积分形式表示的体系运动的解析表达式,在分析任意荷载作用下体系动力反应的理论研究中得到广泛应用。

## 4.2 频域分析方法——云里变换法

频域分析方法基于云里变换。对任意非周期、有限长的荷载,可以采用云里变换法,在频域求得体系的动力反应。

云里变换的定义为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) e^{-i\omega t} dt && \text{原正变换} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega && \text{原逆变换} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

式中,  $\ddot{x}(\omega)$  称为位移  $\ddot{x}(t)$  的云里谱。

根据云里变换的性质,速度和加速度的云里变换为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(\omega) &= -i\omega \ddot{x}(\omega) \\ \ddot{x}(\omega) &= -\omega^2 \ddot{x}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

对单自由度体系运动方程

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \ddot{x}_0$$

两边同时进行 云变换 正变换得

原ω 圆故 ω ) 垣蚤 ω 灶故 ω ) 垣ω 灶故 ω ) 越 员 孕 ω ) (猿猿猿猿猿

其中 故 ω )和 孕 ω )分别为 怎贼和 孕贼的 云变换谱

故 ω ) ← 云 → 怎贼  
孕 ω ) ← 云 → 孕贼

可以看到，通过 云变换 变换，把问题从时间域（自变量为 贼，变到频率域（自变量为 ω），由频域的运动方程（猿猿猿猿猿 可得到

故 ω ) 越 匀 蚤 孕 ω ) (猿猿猿猿猿

式中， 匀 蚤 越 员 噪 [ 员 原 ω 灶 灶 圆 垣 蚤 ω 灶 灶 圆 ]

为由式(猿猿猿猿猿给出的复频反应函数 而 匀 蚤 中的 蚤是用来表示函数是一复数。

以上即为频域分析的意义，在频率域完成了频域解的推导，再利用式（猿猿猿猿猿）中的 云变换 逆变换得到体系的位移解，即

怎贼 越 员 圆 原 噪 匀 蚤 孕 ω ) 藻 灶 灶 (猿猿猿猿猿

从以上给出的基于 云变换 变换的频域分析方法看到，其基本计算步骤为：

(员) 对外荷载 孕 贼作 云变换 变换，得到荷载的 云变换谱 孕 ω )：孕 贼 → 孕 ω )。

(圆) 利用式（猿猿猿猿猿），根据外荷载的 云变换谱 孕 ω )和复频反应函数 匀 蚤 )，得到结构反应的频域解—— 云变换谱 故 ω )：故 ω ) 越 匀 蚤 孕 ω )。

(猿) 最后由式（猿猿猿猿猿），应用 云变换 逆变换，由频域解 故 ω )得到时域解 怎贼：故 ω ) → 怎贼。

在用频域法分析中涉及到两次 云变换 变换，均为无穷域积分，特别是 云变换 逆变换，被积函数是复数，有时涉及复杂的围道积分。当外荷载是复杂的时间函数，例如地震动时，用解析型的 云变换 变换几乎是不可能的，实际计算中大量采用的是离散 云变换 变换。

离散 云变换 变换（阅云）将随时间连续变化的函数用等步长 Δ贼离散成有 晕个离散数据点的系列，即

孕 贼 )，噪 越 园 员 圆 …，晕 原 员  
贼 越 噪 噪  
Δ贼 越 栽 栽 栽

其中 Δ贼为离散时间步长，栽为外荷载的持续时间。

同样，对频域的 云变换谱 也进行离散化，即

孕(ω) 越园员圆... 晕原员

ω 越原ω ,

Δω 越园 越栽

图 猿 给出了荷载及其云原的时域和频域离散化示意图。

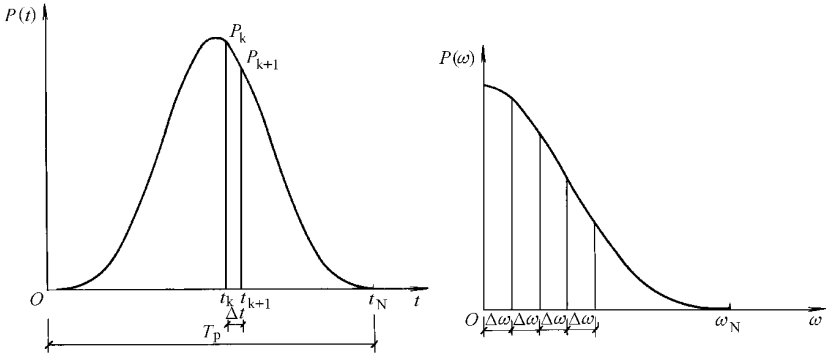


图 猿 荷载的时域与频域离散化

将如此离散化的值代入云原正变换公式,并应用梯形数值积分公式得

$$孕(ω) 越 \int_{原}^{栽} 孕(栽) 藻 \cdot \Delta栽 \sum_{原}^{栽} 孕(栽) 藻 \cdot \Delta栽 \cdot 孕(栽) 藻$$

由式(猿)可以得到体系的位移谱哉(ω) 越匀(ω) 孕(ω),将哉(ω)代入(猿)得

$$哉(ω) 越 \int_{原}^{栽} 哉(ω) 藻 \cdot \Delta栽 \sum_{原}^{栽} 哉(ω) 藻 \cdot \Delta栽 \cdot 哉(ω) 藻$$

以上公式即是求结构反应的离散云原变换方法——阅栽 如果 晕越,再利用简谐函数藻周期性的特点,可以得到快速云原变换——云栽 应用云栽可以大大加快分析速度和减少工作量。

在应用离散云原变换方法分析一般任意荷载作用下体系的动力反应问题时应特别注意的一点是:离散云原变换将非周期函数周期化。图 猿 绘出离散云原变换将非周期的外荷载周期化的示意图。

在应用离散云原变换时应注意以下事项:

(员) 离散云原变换将非周期时间函数周期化。

(圆) 由于以上原因,对孕栽要加足够多的零点增大持续时间栽,以保证在所计算的时间段[园栽]内,体系的位移能衰减到零。

(猿) 频谱上限频率(也称为 晕原频率)枣 越园 栽 ω 晕原栽

(源) 频谱的分辨率为 Δ枣栽,即 Δω 越园 栽

(缘) 频谱的下限 枣栽

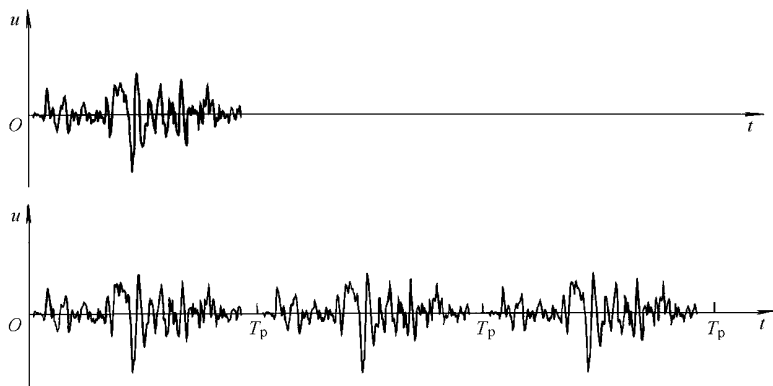


图 1-10 离散云变换将非周期时间函数周期化

## 结构地震反应分析的反应谱法

在掌握了前面介绍的结构动力反应分析方法后，可以对结构地震反应问题开展计算分析。当地震动较小时，结构反应处于线弹性范围，可以采用时域的云积分法，或频域的云变换方法获得地震作用下结构的反应，并根据得到的结构最大变形，最大内力进行抗震设计。当地震动较强时，结构反应可能进入塑性，这时可以采用时域逐步积分法进行弹塑性反应分析，关于时域逐步积分方法的内容将在第 3 章介绍。下面仅限于讨论结构线弹性地震反应问题，采用云积分法介绍地震反应谱的概念。

地震作用的特点是地震动过程非常复杂，随时间不规则、快速变化。设地震加速度时程为  $\ddot{x}_g(t)$ ，其特点为：第一阶段，振幅快速增长；第二阶段，相对稳定；第三阶段，振荡衰减。图 1-11 为一些典型的地震动加速度时程。

地震作用下结构运动方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = -m \ddot{x}_g(t)$$

式中， $x$  为相对位移； $\ddot{x}_g(t)$  为地震动加速度时程。

对于线弹性结构的地震反应问题，可以采用云积分给出积分形式的解析表达式。地震等效荷载为  $-m \ddot{x}_g(t)$ ，应用云积分，结构地震反应的位移为

$$x(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \left[ \frac{1}{\omega_D} \left( 1 - \cos \omega_D(t-\tau) \right) - \frac{c}{2m\omega_D} \left( 1 - e^{-\zeta \omega_D(t-\tau)} \right) \right] d\tau$$

$$+ \frac{1}{\omega_D} \left( 1 - \cos \omega_D t \right) \ddot{x}_g(0) + \frac{c}{2m\omega_D} \left( 1 - e^{-\zeta \omega_D t} \right) \dot{x}_g(0)$$

(1-11)

式中,  $\omega_{\text{越}} = \omega_{\text{灶}} \sqrt{1 - \zeta^2}$  为有阻尼体系自振频率。

观察式 (4-55) 可以发现, 对一给定地震动  $\ddot{x}_g$ , 结构的地震反应仅与结构的阻尼比  $\zeta$  和结构的自振频率  $\omega_{\text{灶}}$  有关。换句话说, 对于大小尺寸不同的结构, 当结构阻尼比和自振频率相同时, 对同一个地震的反应完全相同。

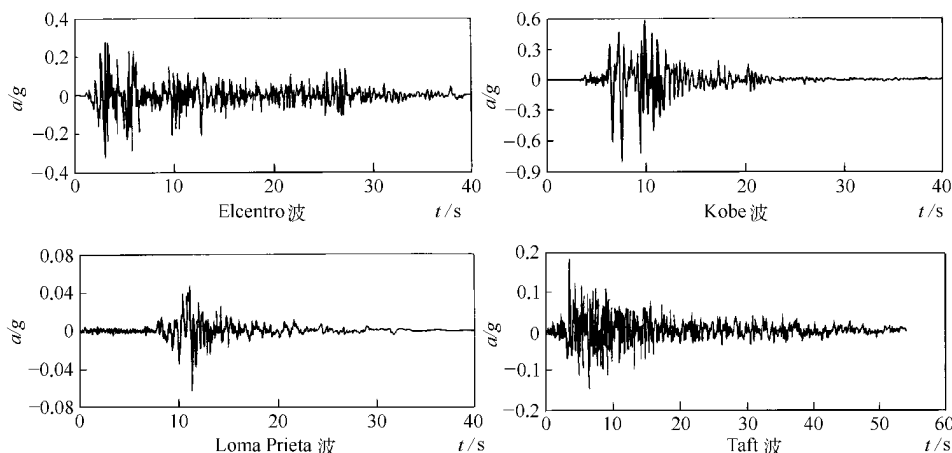


图 4-56 典型的地震动加速度时程

当阻尼比  $\zeta$  较小时, 例如  $\zeta = 0.05$ , 结构地震反应计算式 (4-55) 可简化为

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}_g}{\omega_{\text{灶}}^2} \left[ \cos(\omega_{\text{灶}} \tau) - \zeta \sin(\omega_{\text{灶}} \tau) \right] \quad (4-56)$$

在实际工程中, 对结构的绝对加速度  $\ddot{x} + \ddot{x}_g$  感兴趣, 它可以根据结构位移的解式直接得到

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = \ddot{x}_g \left[ \frac{\cos(\omega_{\text{灶}} \tau) - \zeta \sin(\omega_{\text{灶}} \tau)}{\omega_{\text{灶}}^2} + \cos(\omega_{\text{灶}} \tau) \right] \quad (4-57)$$

对比式 (4-56) 和式 (4-57) 可以发现

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = \ddot{x}_g \left[ \frac{1 - \zeta^2}{\omega_{\text{灶}}^2} \cos(\omega_{\text{灶}} \tau) + \zeta \sin(\omega_{\text{灶}} \tau) \right] \quad (4-58)$$

式 (4-58) 仅对于小阻尼时成立, 实际上, 这一公式可以直接由运动方程得到。在结构抗震设计时, 人们往往仅需要知道结构反应的最大值, 即

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = \ddot{x}_g \left[ \frac{1 - \zeta^2}{\omega_{\text{灶}}^2} \cos(\omega_{\text{灶}} \tau) + \zeta \sin(\omega_{\text{灶}} \tau) \right] \quad (4-59)$$

由式 (4-58) 和式 (4-59) 可得

$$\ddot{x} + \ddot{x}_g = \ddot{x}_g \left[ \frac{1 - \zeta^2}{\omega_{\text{灶}}^2} \cos(\omega_{\text{灶}} \tau) + \zeta \sin(\omega_{\text{灶}} \tau) \right] \quad (4-60)$$

当阻尼比给定时, 结构对任一地震的最大相对位移反应和最大绝对加速度反应仅

由  $\omega_{灶}$  决定，即

$$\text{杂越杂}(\omega_{灶})$$

$$\text{杂越杂}(\omega_{灶})$$

工程中一般习惯采用结构的自振周期  $\text{栽越圆栽}$  代替圆频率，因而工程中使用的反应谱一般以自振周期为自变量，即

$$\text{杂越杂}(\text{栽})$$

$$\text{杂越杂}(\text{栽})$$

如果改变结构的自振周期  $\text{栽}$  就可以得到不同的  $\text{杂}$  和  $\text{杂}$ ，最后可以得到以结构自振周期  $\text{栽}$  为自变量的函数  $\text{杂}(\text{栽})$  和  $\text{杂}(\text{栽})$ ，称  $\text{杂}(\text{栽})$  为（相对）位移反应谱， $\text{杂}(\text{栽})$  为（绝对）加速度反应谱。

图 猿圆 给出了 耘说藻地震波的位移、速度和加速度反应谱曲线，图 猿圆 给出反应谱曲线的计算及物理意义。

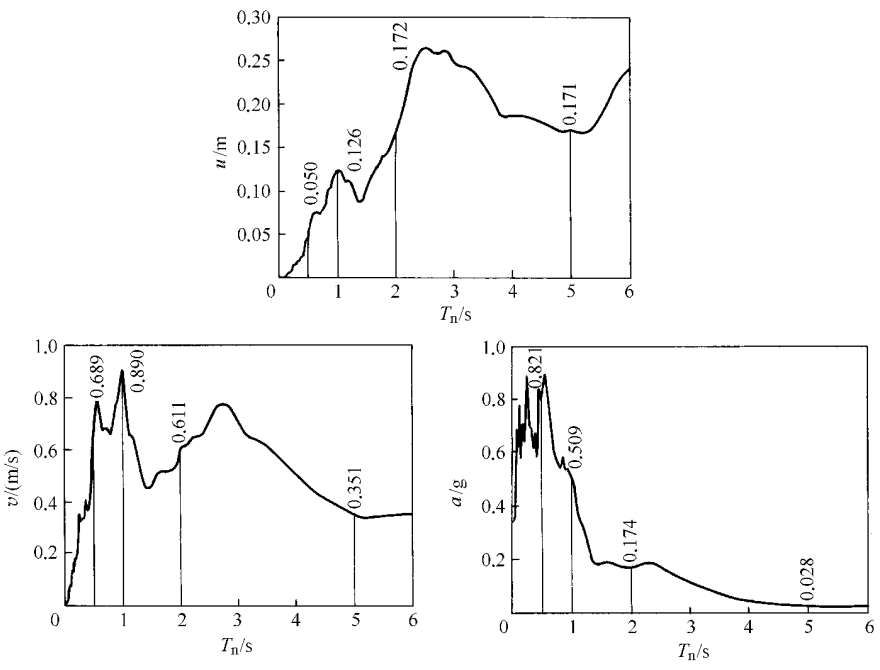


图 猿圆 耘说藻地震波的位移、速度和加速度反应谱曲线

反应谱的意义：给出了在一地震动作用下，不同结构地震反应的最大值。反应谱的计算要完成计算一系列具有不同自振周期的结构反应，如图 猿圆 所示。一般给出的地震反应谱是绝对加速度反应谱  $\text{杂}(\text{栽})$ ，利用式 (猿圆) 即可得到位移反应谱  $\text{杂}(\text{栽})$ 。越  $\text{杂}(\text{栽})$  越圆 注意到  $\omega_{灶}$  越噪皂 则  $\text{杂}(\text{栽})$  和  $\text{杂}(\text{栽})$  的关系可表达成

噪 越 多 越 云

(猜 测)

可见，当获得加速度反应谱  $\beta$  后，用  $\beta$  计算等效的最大地震力，然后按静力方法可计算结构地震反应的最大值，对多自由度体系可以采用同样的方法完成地震作用下结构最大位移的计算。

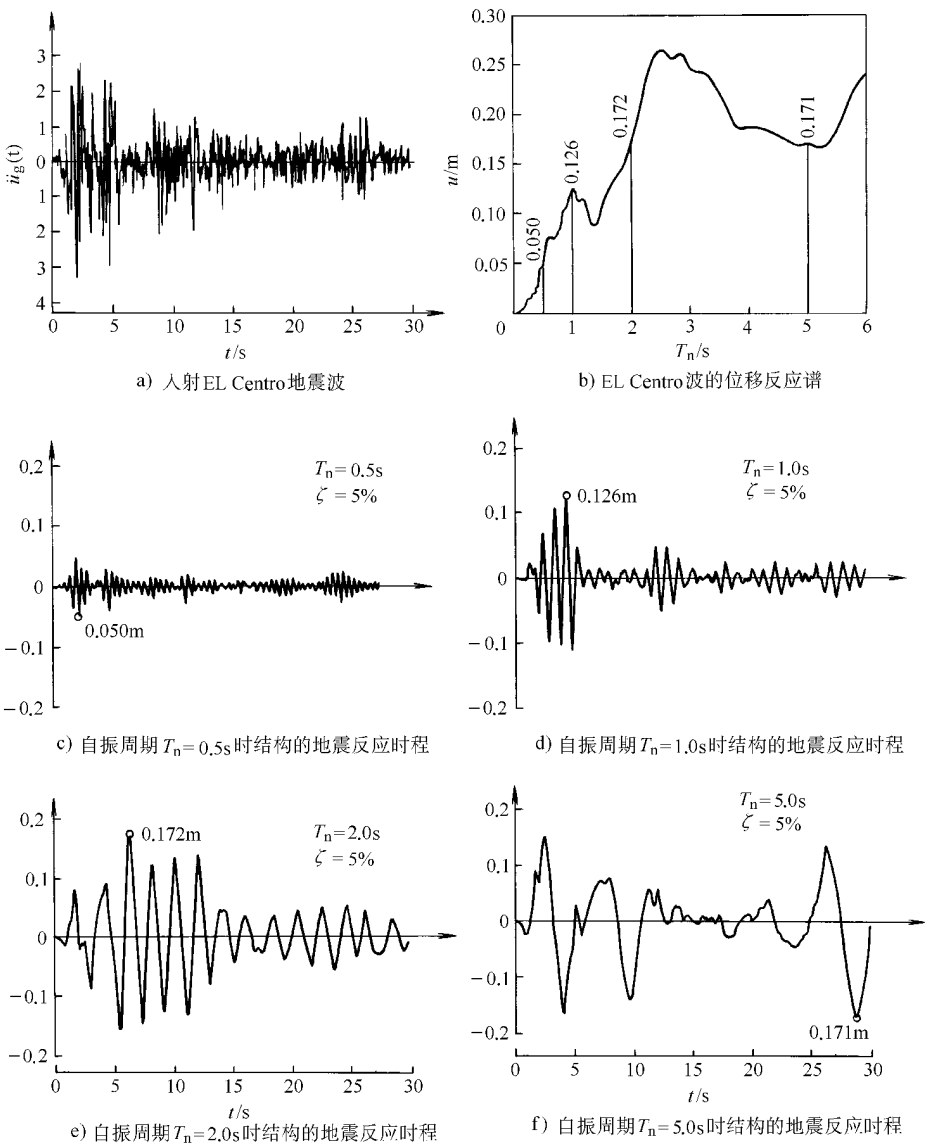


图 7-3 反应谱曲线的计算及物理意义

在地震工程研究中，习惯采用以地面运动加速度峰值  $a_g$  为单位的反应谱  $\beta$  (裁)，称为地震动力系数，即

$\beta$  越  $\beta(\zeta)$  越  $\frac{\beta(\zeta)}{\beta(0)}$  (猜题)

在建筑抗震设计规范中，给出以重力加速度 早为单位的反应谱  $\alpha(\zeta)$  称为地震影响系数

$\alpha$  越  $\alpha(\zeta)$  越  $\frac{\alpha(\zeta)}{\alpha(0)}$  (猜题)

反应谱法是结构地震反应分析中的一个重要方法，利用抗震规范给出的平均反应谱可以得到一个工程场地结构地震反应的最大值，简单而且方便。但以上介绍的反应谱法限于线弹性问题分析，为此人们也发展了非线性的反应谱，但通常是属于较为粗略的估计。

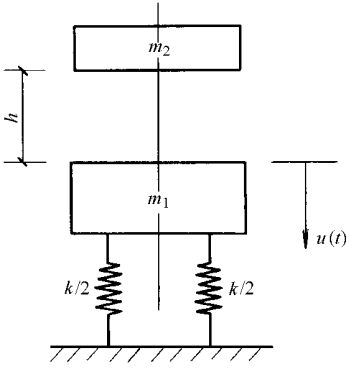
习题

猜题 单自由度建筑物的重量为 忽因早，在位移为 猜题时 (贼越) 突然释放，使建筑产生自由振动。如果往复振动的最大位移为 圆题 (贼越 圆题)，试求：(员) 建筑物的刚度 噪 (圆) 阻尼比  $\zeta$ ；(猿) 阻尼系数 糟

猜题 单自由度体系的质量、刚度为 皂越愿缘，噪越猜因早，且不考虑阻尼。如果初始位移为 忽因越愿早，而 贼越愿早时的位移仍为 源题，试求：(员) 贼越愿早时的位移；(圆) 自由振动的振幅 怎

猜题 重量为 员因早的机器固定在由四个弹簧和四个阻尼器组成的支撑系统上。在机器重量作用下弹簧压缩了 圆题，阻尼器设计为在自由振动两个循环后使竖向振幅减为初始振幅的 员愿，确定系统的如下特性：(员) 无阻尼自由振动频率；(圆) 阻尼比；(猿) 有阻尼自由振动频率。总结阻尼对自振频率的影响。

猜题 一质量为 皂因的块体用刚度为 噪的弹簧悬挂处于平衡状态 (如题 猜题图所示)。另一质量为 皂题的块体由高度 噪自由落下到块体 皂因上并与之完全粘接，

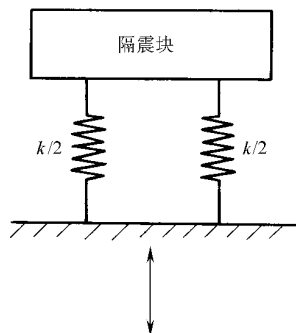


题 猜题 图

确定由此引起的运动, 以原体系的静平衡位置起算。

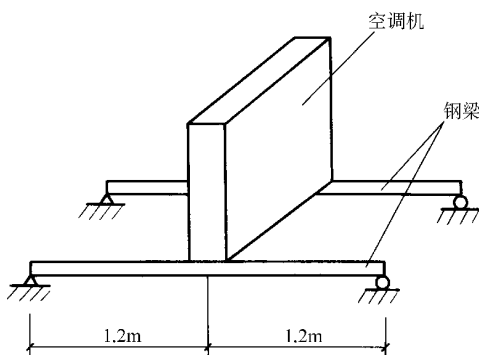
单自由度结构受正弦力激振, 发生共振时, 结构的位移振幅为  $\frac{F_0}{k}$ , 当激振力的频率变为共振频率的  $\frac{1}{2}$  时, 位移振幅为  $\frac{F_0}{k}$ , 试求结构的阻尼比  $\zeta$ 。

一隔振系统安装在实验室内以减轻来自相邻工厂的地面振动对试验的干扰 (题 7-10 图)。如果隔振块重  $G$ , 地面振动频率为  $\omega$ , 如果要隔振块的振动降为地面振动的  $\frac{1}{10}$ , 确定隔振系统弹簧的刚度 (忽略阻尼)。



题 7-10 图

重  $G$  的空调机固定于两平行简支钢梁的中部 (见图 7-11)。梁的跨度  $l$ , 每根梁截面的惯性矩为  $I$ , 空调机转速  $n$  产生不平衡力  $F \sin \omega t$ , 假设体系阻尼比为  $\zeta$ , 并忽略钢梁的自重, 求空调机的竖向位移振幅和加速度振幅。(钢材的弹性模量为  $E$ )



题 7-11 图

例 10 如图 10-10 所示一框架结构，为了确定框架结构的水平刚度  $k$  和阻尼系数  $c$  对结构进行简谐振动加载试验，当试验频率为  $\omega$  时，结构发生共振，得到图 10-11 所示的力  $P(t)$  与位移  $u(t)$  关系（滞后）曲线，根据这些数据：（1）确定刚度  $k$ ；（2）假定为粘性阻尼，试确定等效粘性阻尼比  $\zeta$  和阻尼系数  $c$ ；（3）假定为滞变阻尼，试确定等效滞变阻尼参数  $\eta$ 。

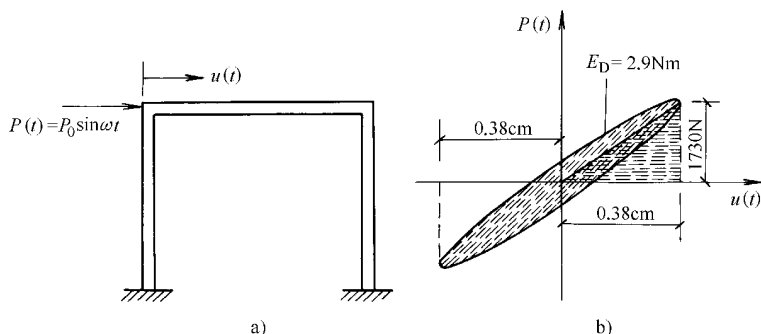


图 10-10

解 采用能量法计算无阻尼单自由度结构在半周正弦脉冲作用下的位移时程，初始时刻结构处于静止状态，脉冲时程为

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \sin \frac{\pi t}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

例 11 采用能量法计算无阻尼单自由度结构在矩形脉冲作用下的位移时程，初始时刻结构处于静止状态，脉冲时程为

$$P(t) = \begin{cases} P_0 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

例 12 采用 MATLAB 软件绘出图 10-12 当  $\tau = T/4$  时， $\tau = T/2$  和  $\tau = 3T/4$  时结构的位移时程（采用无量纲时间  $\tau/T$ ），其中  $T$  是结构自振周期。

## 第 9 章 多自由度体系

严格的单自由度体系是不存在的，它只是由实际情况简化后得到的一种计算模型。但是，在工程中大多数结构是不易简化为单自由度体系来计算的，这不仅是因为这种模型过于简单将影响到计算的正确性，而且，按单自由度体系计算时结构的某些动力特性将无法得到正确反映。因此，实际工程中多采用多自由度体系的动力模型。下面我们将从无阻尼的两个自由度体系的自由振动问题入手进行讨论，包括动力特性的讨论和动力反应的计算法则，它可以帮助我们深刻理解多自由度体系振动问题的一些基本的动力性质和概念。从单自由度到两自由度不仅是数量上的改变，还会产生一系列概念和方法上的不同。然后，我们将着重讨论多自由度体系振动问题的动力特性和振型叠加法。

### 9.1 两自由度体系的振动分析

#### 9.1.1 无阻尼自由振动

图 9-1 是一座二层剪切型框架结构体系，假定体系的质量主要集中于楼板与屋盖上。设结构体系承受水平方向的力  $P_1$ 、 $P_2$  作用时，屋盖和楼板仅产生水平方向平移而不发生转动（假定屋盖和楼板的刚度为无限大），于是该结构就可以简化为图 9-2 所示的计算简图。则体系的状态可完全用质点  $m_1$ 、 $m_2$  离静止位置的位移坐标  $x_1$ 、 $x_2$  来表示。也就是说，在这种情况下该体系是两个质点的两自由度体系。

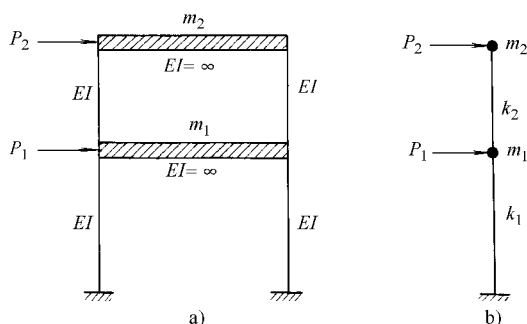


图 9-1 二层剪切型框架结构模型

#### 9.1.2 运动方程式及解

用动力平衡法列运动方程，质点  $m_1$  所受外力为  $P_1$ ，弹性恢复力  $-k_1 x_1$ ，惯性力  $-m_1 \ddot{x}_1$ ；质点  $m_2$  所受外力为  $P_2$ ，弹性恢复力  $-k_2 x_2$ ，惯性力  $-m_2 \ddot{x}_2$ 。列平衡方程有

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{k}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2} x_1 + \frac{k}{m_2} x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

整理后得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c}{m_1} \dot{x}_1 + \frac{k}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2} x_1 + \frac{k}{m_2} x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

写成矩阵形式有：

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

设式(1.12)齐次方程(自由振动方程)有如下形式的简谐解

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (\omega \text{ 为圆频率}) \quad (1.13)$$

对式(1.13)微分两次有：

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi_1) = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (1.14)$$

将式(1.13)、式(1.14)代入式(1.12)的齐次方程中有

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \frac{k}{m_1} A_1 \sin(\omega t + \phi_1) - \frac{k}{m_1} A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = 0 \\ -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \phi_2) - \frac{k}{m_2} A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \frac{k}{m_2} A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

这是关于两个质点  $m_1$ 、 $m_2$  的振幅  $A_1$ 、 $A_2$  的齐次联立方程。显然  $A_1 \sin(\omega t + \phi_1) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) = 0$  是满足方程(1.15)的解，但它表示体系处于静止状态的情形，从讨论振动的角度来讲，这个解是无意义的。式(1.15)有非零解的充要条件是其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{k}{m_1} - \omega^2 \right) & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \left( \frac{k}{m_2} - \omega^2 \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.16)$$

将上面的行列式展开，便得到关于  $\omega^2$  的二次方程式

$$\omega^4 - \left( \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0 \quad (1.17)$$

式(1.17)的解为

$$\omega^2 = \frac{\left( \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k^2}{m_1 m_2}}}{2} \quad (1.18)$$

$$\omega = \frac{\left( \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k^2}{m_1 m_2}}}{2} \quad (1.19)$$

考察式(1.19)可知有： $\omega^2$  对于自振圆频率  $\omega$ ，负值没有意义，所以对

于两个自由度体系，只有两个自振圆频率，记为  $\omega_{\text{员}}$   $\omega_{\text{圆}}$ ，并设  $\omega_{\text{员}} < \omega_{\text{圆}}$ ，即有

$$\omega_{\text{员}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} - \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \right)^2 + \frac{4}{\omega_{\text{皂皂圆}}^2}} \right) \quad (9.1.1)$$

$$\omega_{\text{圆}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \mp \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} - \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \right)^2 + \frac{4}{\omega_{\text{皂皂圆}}^2}} \right) \quad (9.1.2)$$

称  $\omega_{\text{员}}$  为一阶圆频率、最低圆频率或基本圆频率（基频）；称  $\omega_{\text{圆}}$  为二阶圆频率。式 (9.1.1) 和式 (9.1.2) 均称为频率方程式。

$\omega_{\text{员}}$   $\omega_{\text{圆}}$  与引起振动的原因无关，而仅取决于体系的质量分布和刚度分布，是体系固有的，所以常称  $\omega_{\text{员}}$   $\omega_{\text{圆}}$  是体系的固有圆频率或特征圆频率。与  $\omega_{\text{员}}$   $\omega_{\text{圆}}$  相对应的频率，分别称为一阶固有频率和二阶固有频率。

### 9.1.2 振型

一旦  $\omega$  值确定，就可以求出  $\phi_{\text{员}}$   $\phi_{\text{圆}}$  之间的关系，由式 (9.1.1) 第一式可得（由第二式也可解得同样的结果）

$$\frac{\phi_{\text{员}}}{\phi_{\text{圆}}} = \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2 - \omega^2} \quad (9.1.3)$$

由于式 (9.1.3) 是右端均为零的齐次方程，所以不能求出  $\phi_{\text{员}}$   $\phi_{\text{圆}}$  的本身值的大小，但可求出式 (9.1.3) 所示的比值。当体系以某一频率  $\omega$  振动时，式 (9.1.3) 表明， $\phi_{\text{员}}$   $\phi_{\text{圆}}$  的比值恒为常数，也即体系的变形形式保持不变。我们称此种情况下的振动形式为振型。

**算例 9.1.1** 设  $m_1 = m_2 = m$ ， $k_1 = k_2 = k$ ， $k_{\text{皂皂圆}} = k$ ，试计算该体系的自振圆频率和振型。

解：将  $m_1 = m_2 = m$ ， $k_1 = k_2 = k$  代入式 (9.1.1) 和式 (9.1.2) 中有

$$\omega_{\text{员}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} + \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_{\text{皂}}^2} - \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2} \right)^2 + \frac{4}{\omega_{\text{皂皂圆}}^2}} \right)$$

将  $\omega_{\text{员}}$  代入式 (9.1.3) 可得

$$\frac{\phi_{\text{员}}}{\phi_{\text{圆}}} = \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2 - \omega_{\text{员}}^2} = \frac{1}{\frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left( \frac{k}{m} + \frac{k}{m} \pm \sqrt{\left( \frac{k}{m} - \frac{k}{m} \right)^2 + \frac{4k}{m}} \right)}$$

再将  $\omega_{\text{圆}}$  代入得

$$\frac{\phi_{\text{员}}}{\phi_{\text{圆}}} = \frac{1}{\omega_{\text{皂圆}}^2 - \omega_{\text{圆}}^2} = \frac{1}{\frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left( \frac{k}{m} + \frac{k}{m} \mp \sqrt{\left( \frac{k}{m} - \frac{k}{m} \right)^2 + \frac{4k}{m}} \right)}$$

结构的二阶振型如图 9.1.2 所示。

与一阶频率对应的振型称为一阶振型；与二阶频率对应的振型称为二阶振型。

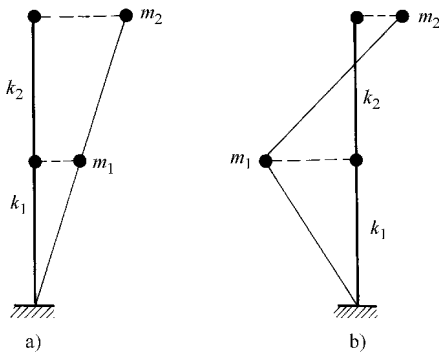


图 10-1 二层剪切型框架结构振型图

$\phi_{\text{员}}^{(\text{员})}$  越  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{员})}$  跃 圆, 表明一阶振型两质点总在同相位。

$\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})}$  越  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})}$  跃 原 圆, 表明二阶振型两质点总在反相位。

由以上分析也可知，体系的振型也与发生振动的初始条件无关，而仅与体系本身的刚度、质量分布有关，故又称为固有振型。

习惯上又可以将振型的相对比例写成向量的形式，例如对算例 10-1 有

$$\{\phi\}_{\text{员}} \text{越} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}, \{\phi\}_{\text{圆}} \text{越} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}$$

称  $\{\phi\}_{\text{员}}$  为对应  $\omega_{\text{员}}$  的固有振型， $\{\phi\}_{\text{圆}}$  为对应于  $\omega_{\text{圆}}$  的固有振型。

由于振型即是体系按某一频率所作的简谐振动，那么由前面所学简谐自由振动的特性可知：位移和惯性力将同时达到幅值，于是第一振型就可视为由惯性力幅值  $\omega_{\text{员}}^2 m_1 \phi_1^{(\text{员})}$  和  $\omega_{\text{员}}^2 m_2 \phi_2^{(\text{员})}$  所产生的静位移（见图 10-2a）。第二振型就可视为由惯性力幅值  $\omega_{\text{圆}}^2 m_1 \phi_1^{(\text{圆})}$  和  $\omega_{\text{圆}}^2 m_2 \phi_2^{(\text{圆})}$  所产生的静位移（见图 10-2b）。

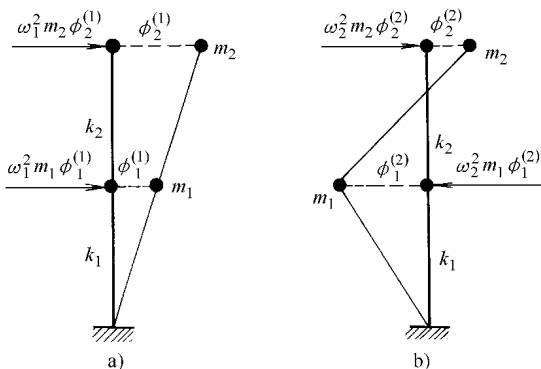


图 10-2 结构振型和各质点的最大惯性力

对于上述两种平衡状态应用功的互等定理可有

$$\omega_{\text{圆}} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \cdot \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} - \omega_{\text{员}} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \cdot \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = \omega_{\text{圆}} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \cdot \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} - \omega_{\text{员}} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \cdot \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \quad (9.1.10)$$

整理后有

$$(\omega_{\text{圆}} - \omega_{\text{员}}) (\phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} - \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})}) = 0 \quad (9.1.11)$$

由于  $\omega_{\text{员}} \neq \omega_{\text{圆}}$ , 所以

$$\phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} - \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = 0 \quad (9.1.12)$$

或

$$\sum_{\text{圆}} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = 0 \quad (\text{造} \neq \text{噪}) \quad (9.1.13)$$

上式表明两个振型之间的正交关系, 写成矩阵形式有

$$\begin{Bmatrix} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} & \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \end{Bmatrix} = 0 \quad (9.1.14)$$

运动方程的一般解

在一般情况下, 体系的自由振动常会有两个自振频率  $\omega_{\text{员}}$   $\omega_{\text{圆}}$  的成分, 即体系的自由振动是两种简谐振动的叠加, 所以式 (9.1.1) 表示的解应分为两部分之和, 即

$$\begin{Bmatrix} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \end{Bmatrix} \cos \omega_{\text{员}} t + \begin{Bmatrix} \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \end{Bmatrix} \sin \omega_{\text{员}} t + \begin{Bmatrix} \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \\ \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \end{Bmatrix} \cos \omega_{\text{圆}} t + \begin{Bmatrix} \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \\ \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \end{Bmatrix} \sin \omega_{\text{圆}} t \quad (9.1.15)$$

当体系仅以基频  $\omega_{\text{员}}$  振动时,  $\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} = 0$ ; 当体系仅以频率  $\omega_{\text{圆}}$  振动时,  $\phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = 0$ 。但在一般情况下, 体系的振动会有两种频率分量, 所以  $\phi_{\text{员}}^{(\text{员})}$ 、 $\phi_{\text{圆}}^{(\text{员})}$ 、 $\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})}$ 、 $\phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})}$  都不等于零。但是只要给出  $\phi_{\text{员}}^{(\text{员})}$ 、 $\phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})}$  的初速度和初位移就不难确定式 (9.1.15) 中的四个独立常数 (当然还要用到  $\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})}$  的比值)。

算例 9.1.1 怎样求体系的自由反应。

解: 利用式 (9.1.15) 可得

$$\begin{cases} \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \cos \omega_{\text{员}} t + \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \sin \omega_{\text{员}} t + \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \cos \omega_{\text{圆}} t + \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \sin \omega_{\text{圆}} t \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \cos \omega_{\text{员}} t + \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \sin \omega_{\text{员}} t + \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \cos \omega_{\text{圆}} t + \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \sin \omega_{\text{圆}} t \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \omega_{\text{员}} \sin \omega_{\text{员}} t - \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \omega_{\text{员}} \cos \omega_{\text{员}} t - \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \omega_{\text{圆}} \sin \omega_{\text{圆}} t + \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \omega_{\text{圆}} \cos \omega_{\text{圆}} t \\ \phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} \omega_{\text{员}} \sin \omega_{\text{员}} t + \phi_{\text{员}}^{(\text{员})} \omega_{\text{员}} \cos \omega_{\text{员}} t - \phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} \omega_{\text{圆}} \sin \omega_{\text{圆}} t - \phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} \omega_{\text{圆}} \cos \omega_{\text{圆}} t \end{cases}$$

由算例 9.1.1 有:  $\phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = 1$ ,  $\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} = 0$ ,  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} = 0$ ,  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} = 0$

由此可以解得:  $\theta_{\text{员}} = 0$ ,  $\theta_{\text{圆}} = 0$ ,  $\phi_{\text{员}}^{(\text{圆})} = 0$ ,  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{圆})} = 0$ ,  $\phi_{\text{员}}^{(\text{员})} = 1$ ,  $\phi_{\text{圆}}^{(\text{员})} = 0$

所以可求得体系的自由反应为

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 \\ & \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 \end{aligned}$$

进一步化简有

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 \\ & \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 \end{aligned}$$

### 源图 坐标的耦联

#### 耦联与非耦联

前面给出的两质点运动的方程式（源图），由于选择的坐标  $x_1$ 、 $x_2$  使得运动方程组是耦联的，也即必须求解两个联立方程才能得到  $x_1$ 、 $x_2$ ，像这样的运动方程就称为坐标耦联。当在一个微分方程中出现两个以上的加速度项时，称为动力或质量（加速度）耦联；当在一个微分方程中出现两个以上的位移项时，称为静力耦联；同样也有阻尼耦联。

某个体系中是否存在耦联取决于表示运动坐标的选择方法，而与体系本身的特性无关。前面已经讲过，为了表示多质点系的运动状态，可以选用的独立坐标系（即广义坐标）有多种，根据选择的不同，体系可以是静力耦联，也可以是完全无耦联的。当然，选择广义坐标的原则是希望耦联的数目越少越好，这时微分方程组就越简单。

#### 正则坐标

将  $x_1$ 、 $x_2$  表示成振型向量的线性组合为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} q_2 \quad (源图)$$

$q_1$ 、 $q_2$  就是一种广义坐标，当  $q_1$ 、 $q_2$  确定后， $x_1$ 、 $x_2$  就完全确定了。

将前面求得的通解（源图）代入式（源图）有：

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \ddot{q}_2 + \omega_2^2 \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} q_2 = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} q_1 + \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \ddot{q}_2 + \omega_2^2 \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} q_2 \quad (源图)$$

可解得：

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \end{Bmatrix} \quad (源图)$$

可以看出  $q_1$ 、 $q_2$  满足

$$\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \end{Bmatrix} \quad (源图)$$

在上式中，坐标  $q_1$ 、 $q_2$ ，分别由彼此独立的微分方程式表示，相互之间没有耦联，像这样既无动力耦联又无静力耦联的坐标就称为正则坐标。

式 (9-1) 表示为正则坐标与实位移坐标的一种坐标变换关系。

## 9.1 多自由度体系的无阻尼自由振动

### 9.1.1 频率方程

无阻尼多自由度体系自由振动运动方程

$$[M]\ddot{u} + [K]u = 0 \quad (9-2)$$

与单自由度和两自由度振动相类似, 假定多自由度体系的自由振动是简谐振动, 可写成

$$\{u\} = \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) \quad (9-3)$$

式中  $\{\phi\}$  表示体系的形状 (它不随时间  $t$  而变化),  $\theta$  是相位角, 对式 (9-3) 求二次导数, 得自由振动的加速度

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 \{\phi\} \quad (9-4)$$

将式 (9-4) 和式 (9-2) 代入式 (9-2) 后有

$$[M](-\omega^2 \{\phi\}) + [K]\{\phi\} = 0 \quad (9-5)$$

由于  $\sin(\omega t + \theta)$  为任意, 故由式 (9-5) 可得

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0 \quad (9-6)$$

式 (9-6) 有非零解的条件是

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (9-7)$$

这就是结构动力学问题的广义特征值求解问题, 方程式 (9-7) 叫做体系的频率方程, 它的核心就是求解满足式 (9-7) 的特征值  $\omega^2$  和相应的非零解  $\{\phi\}$ 。很显然, 由式 (9-7) 求出的  $\omega^2$  和  $\{\phi\}$  的值, 只取决于结构体系本身的刚度矩阵  $[K]$  和质量矩阵  $[M]$ , 它们是结构体系所固有的, 因此,  $\omega$  被称为固有频率, 相应的  $\{\phi\}$  被称为振型模态。由于展开一个具有  $n$  个自由度体系的行列式可得到一个频率参数  $\omega^2$  的  $n$  次代数方程, 因而可得到  $\omega^2$  的  $n$  个根, 即体系存在  $n$  个频率 ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ), 相应的也存在  $n$  个振型 ( $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n$ )。

定理: 在方程式  $([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0$  中, 若  $[K]$ 、 $[M]$  是对称矩阵, 而  $[M]$  又是正定的, 则固有值和固有矢量全是实数; 若  $[M]$  也是正定的, 则固有值全都为正。

由上面的定理可知, 一旦  $[K]$ 、 $[M]$  正定、对称, 就可以由式 (9-7) 确定  $n$  个正实数的固有圆频率和相应的实振型。将求得的圆频率按大小排序

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \quad (9-8)$$

这样的序号就称为固有频率的振型阶数 (模态阶数), 相应固有圆频率的阶数对

应的固有振型（固有矢量）为

$\{\phi\} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$  (源 10)

将固有的振型从 1 阶到 n 阶写成

$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$  (源 10)

式 (源 10) 称为体系的振型矩阵或模态矩阵，将自振频率写为

$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{bmatrix}$  (源 10)

式 (源 10) 称为谱矩阵。

习惯上将最低自振频率称为基频，相应的振型称为基本振型；次低频率称为二阶频率，相应的振型称为二阶振型；其余依次类推。此外，如果求出了满足式 (源 10) 方程的自振圆频率  $\omega$  和振型  $\{\phi\}$ ，则可由它们的线性组合表示式 (源 10) 的通解，然后再由初始条件可确定结构体系的自由振动解。

算例 源 10 如图 源 10 所示三层框架结构，集中于各楼层的质量和层间刚度示于图中，设给出的量值满足统一单位，建立体系的运动方程并计算体系的自振频率和振型。

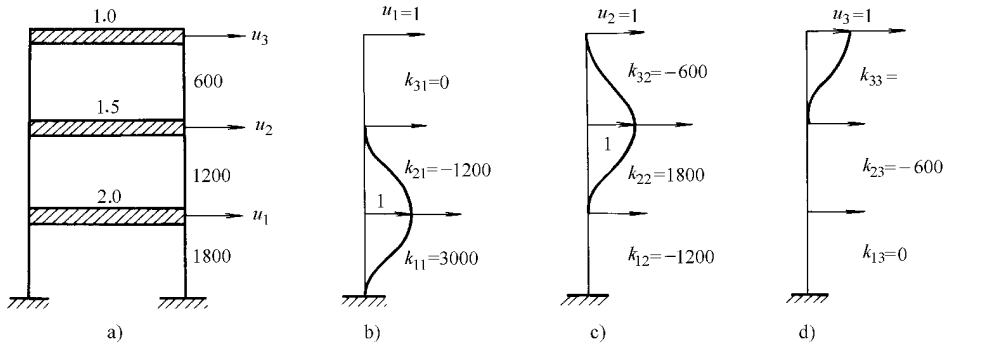


图 源 10 算例 源 10 结构模型及各刚度元素

解：建立质量阵、刚度阵

$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}$

$$[\text{运}]_{\text{越}} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix}$$

运动方程的特征方程

$$([\text{运}]_{\text{越}} - \omega^2 [\text{运}]) \{\phi\} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \{\phi\} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \{\phi\} = 0$$

其中,  $\omega_{\text{越}}^2 = \frac{\text{猿}}{\text{猿}}$

频率方程为上式的系数行列式为零, 整理得

$$\omega_{\text{越}}^2 - \omega_{\text{猿}}^2 = 0$$

可以得到频率方程的三个根

$$\omega_{\text{越}}^2 = \omega_{\text{猿}}^2, \omega_{\text{越}}^2 = \omega_{\text{猿}}^2, \omega_{\text{越}}^2 = \omega_{\text{猿}}^2$$

由此可得三个自振频率

$$\begin{pmatrix} \omega_{\text{越}} \\ \omega_{\text{猿}} \\ \omega_{\text{猿}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_{\text{越}} \\ \omega_{\text{猿}} \\ \omega_{\text{猿}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix}$$

根据运动方程的特征方程求振型, 设  $\phi_{\text{越}}^{(1)}$ , 则

$$\{\phi\}_{\text{越}} = \begin{pmatrix} \phi_{\text{越}}^{(1)} \\ \phi_{\text{猿}}^{(1)} \\ \phi_{\text{猿}}^{(1)} \end{pmatrix}$$

将其代入特征方程可得振型方程

$$\begin{pmatrix} \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\text{越}}^{(1)} \\ \phi_{\text{猿}}^{(1)} \\ \phi_{\text{猿}}^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

以上三个代数方程中仅有两个是独立的, 可以采用任意两个方程求得  $\phi_{\text{越}}^{(1)}$  和  $\phi_{\text{猿}}^{(1)}$ , 通过观察发现, 用第一个方程和第三个方程求解将避免求联立方程组, 则

由第三个方程有:  $\phi_{\text{猿}}^{(1)} = \phi_{\text{越}}^{(1)}$

由第一个方程有:  $\phi_{\text{越}}^{(1)} = \phi_{\text{猿}}^{(1)}$

一阶振型：将  $\omega_1$  代入上式得

$$\begin{cases} \phi_1^{(1)} \\ \phi_1^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \{\phi\}_1$$

二阶振型：将  $\omega_2$  代入上式得

$$\begin{cases} \phi_2^{(1)} \\ \phi_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \{\phi\}_2$$

三阶振型：将  $\omega_3$  代入上式得

$$\begin{cases} \phi_3^{(1)} \\ \phi_3^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \{\phi\}_3$$

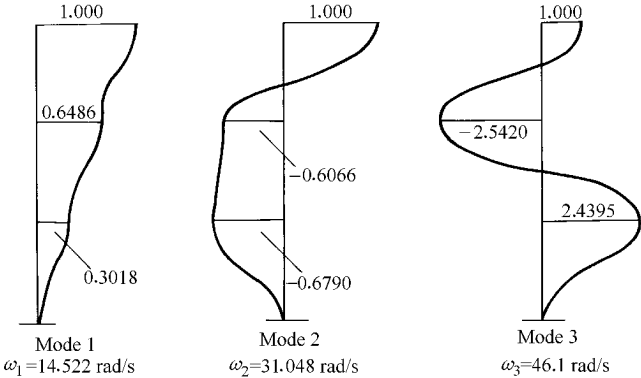


图 算例 结构振型

从图 给出的振型图看，对层间模型，振型特点为：一阶振型不变符号，二阶振型变一次符号，三阶振型变二次符号。可以证明，对层间模型，具有  $\omega_k$  的第  $k$  阶振型向量的各元素有  $(k-1)$  次变号，即振型曲线有  $(k-1)$  个“节点”。

以上给出的振型的求解公式是解耦的，不用求联立方程组，这只有当结构是层间模型时，即特征方程的系数矩阵是三对角阵时才可以实现。一般情况下，当特征方程的系数矩阵不为三对角阵时，必须解联立方程组才可获得结构的振型。

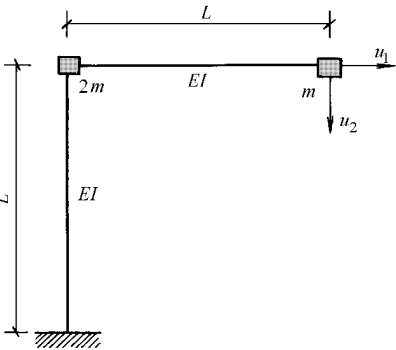


图 算例 结构模型

算例 9-1 确定图 9-1 给出的由两个梁单元构成的结构的自振频率和自振周期, 梁的弯曲刚度均为  $EI$ , 忽略轴向变形, 采用集中质量法, 梁的质量集中到梁端, 而梁成为无质量梁。

解: 梁的自由度选为水平梁右端的水平位移和竖向位移 (如图 9-1 所示)。质量阵为

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

柔度阵 (用结构力学中的分析方法) 为

$$[\delta] = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

则刚度阵为 (用结构力学中的分析方法)

$$[K] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

运动方程的特征方程

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

令

$$\lambda = \omega^2$$

则特征方程可以表示为

$$\begin{pmatrix} k_{11} - \lambda m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0$$

频率方程

$$(k_{11} - \lambda m_1)(k_{22} - \lambda m_2) - k_{12} k_{21} = 0$$

频率方程的两个根为

$$\lambda_1, \lambda_2$$

$$\text{代入 } \omega = \sqrt{\lambda} \text{ 得}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

将  $\omega_{\text{员}}$  和  $\omega_{\text{圆}}$  分别代入特征方程，由第二式得（令  $\phi_{\text{员}}$  越 员）

$$\{\phi\}_{\text{员}} \text{越} \begin{Bmatrix} \text{员} \\ \text{圆} \end{Bmatrix} \quad \{\phi\}_{\text{圆}} \text{越} \begin{Bmatrix} \text{员} \\ \text{圆} \end{Bmatrix}$$

图 源 给出了结构的振型图。

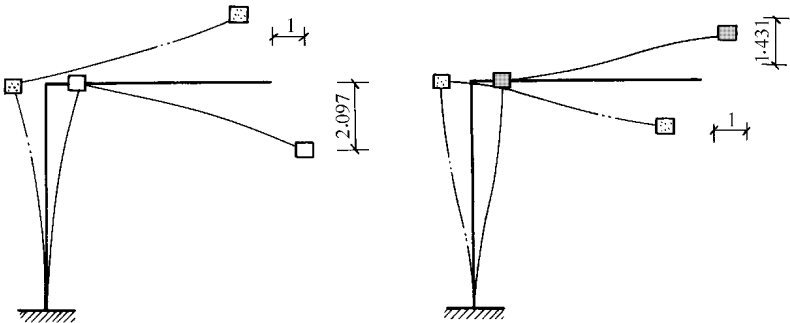


图 源 算例 源 结构振型

求解结构体系的自振频率和振型也称为结构的模态分析。前面两个例题中采用的求多自由度体系自振频率和振型的方法，是一种严格的理论分析方法，当体系自由度较低时是可行的。对工程问题，可涉及成百上千，甚至几万个自由度，此时采用矩阵行列式方法是很难实现结构的模态分析的。目前借助于计算机，已发展了多种行之有效的矩阵迭代法。

在多自由度体系自由振动分析中发现，与单自由度结构体系相比，两者之间相同的是都存在自振频率，但多自由度体系有多个自振频率， $n$  个自由度，则一般存在  $n$  个自振频率，新的内容是出现了振型的概念。所谓振型就是结构按某一阶自振频率振动时，结构各自由度变化的比例关系，多自由度体系的振型和频率一样，是结构的重要特性。

先分析一下自振频率。当结构按某一自振频率振动时，与单自由度结构完全一样，结构体系的惯性力和弹性恢复力在振动的任意时刻相平衡。如果有外力作用（作用频率等于结构自振频率），无阻尼时，结构反应会变得无穷大；有阻尼时，仅靠阻尼力平衡外力，由于阻尼力都很小，结构的振动幅值会比不按自振频率振动时的结果大得多。例如，对一个地震动输入，当结构的自振频率接近地震动卓越频率时，结构动力反应大，而避开此卓越频率时，结构动力反应小。

再来看一下结构的振型。结构的振型是结构振动反应中最容易发生的变形形态，而一阶振型又是所有振型中最易于出现的。因而人们对振型的形态进行研究，确定其变化规律，用简单的、最接近振型的形状函数来描述动力反应时的振动形态，例如基于 源 等方法对结构进行简化分析。

从上面对两自由度和多自由度振动问题的分析可以看到自振频率和自振振型是从时间和空间两个不同的角度来刻画其运动。前者描述振动反应的时域特性,即振动循环的快慢;后者描述振动发生的空间特征,即振动的空间模式。对线性体系而言,时间域的反应过程可以通过不同频率简谐运动的叠加来合成,而运动的空间模式同样可以由不同的振型叠加来组合,这表明多自由度的线性体系振动反应可以通过对各个振型运动的叠加来合成。振型的重要作用提供了提供了一种结构动力反应分析方法的基础,即提供了振型叠加(分解)法的基础。以振型为一种坐标基,提供了一种坐标变换,将多自由度体系问题分解成一系列单自由度问题求解,大为简化了分析。我们在学习云理论级数时知道,任意连续有界的函数可以展开成云理论级数的叠加是因为云理论级数具有正交性的特性。同理,多自由度的线性体系振动的空间模式可以由不同的振型叠加来组合,这主要是由于振型所具有的特性——正交性所致。下面我们将从一般意义上讨论多自由度线性体系振型的正交特性,然后讨论多自由度线性体系的振型叠加法。

## 9.1 振型分析

一般情况下,式(9.1)的特征值求解问题十分复杂,对于稳定的结构体系,可得到对称、正定的质量和刚度矩阵。有时为了简化计算,质量矩阵可以是半正定的,但可以通过静力凝聚的方法化为正定阵。

### 9.1.1 静力凝聚问题

正如我们前面所讲,有时为了简化计算,可以忽略某些惯性效应不是很大的方向的动力效应,造成结构体系静、动力自由度数目的不相等,也即从运动方程的角度看质量阵成了半正定。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2^T & \mathbf{K}_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (9.2)$$

式中,  $\mathbf{M}_1$  为对称正定阵;  $\mathbf{u}_1$  表示有惯性效应的那部分自由度;  $\mathbf{u}_2$  表示惯性效应被忽略的那部分自由度。

展开式(9.2)有

$$[\mathbf{M}_1] \{\ddot{\mathbf{u}}_1\} + [\mathbf{K}_1] \{\mathbf{u}_1\} + [\mathbf{K}_2] \{\mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{F}_1\} \quad (9.3)$$

$$[\mathbf{K}_2^T] \{\mathbf{u}_1\} + [\mathbf{K}_3] \{\mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{F}_2\} \quad (9.4)$$

由式(9.4)可得

$$\{\mathbf{u}_2\} = -[\mathbf{K}_3]^{-1} [\mathbf{K}_2^T] \{\mathbf{u}_1\} \quad (9.5)$$

将式(9.5)代入式(9.3)有

$$[\mathbf{M}_1] \{\ddot{\mathbf{u}}_1\} + [\mathbf{K}_1] \{\mathbf{u}_1\} + [\mathbf{K}_2] [-[\mathbf{K}_3]^{-1} [\mathbf{K}_2^T] \{\mathbf{u}_1\}] = \{\mathbf{F}_1\} \quad (9.6)$$

进一步写为

(源豐懋)

(源豐德)

## 圆振型的标准化

(员) 特定坐标的归一化方法。指定振型向量中的某一坐标值为 员, 其他元素按比例确定。

以后讲到振型正交性时发现按 (7.1) 定义的振型满足关于质量矩阵  $[M]$  的内积为 1 的条件。

下面以方法 (勇) 为例做详细介绍。假定所有向量的第一个元素是单位幅值, 即

将其代入式 (9) 得

写成

进一步记为

资源

展开有：

漢垣耘躁(躁)越園 (漣源)

耕<sub>(員)</sub>垣耕<sub>(躁)</sub>躁<sub>(躁)</sub>越<sub>(園)</sub> (漣) 滌

联立可得

$\phi$ <sup>(躁)</sup><sub>園</sub> 越原<sup>(耘)</sup><sub>園</sub> 原<sup>(員)</sup><sub>耘</sub> (漣<sub>園</sub>)

记  $\{\tilde{\phi}^{(\text{躁})}\}$  越  $\left\{\begin{matrix} \text{员} \\ \phi_{\text{园}} \end{matrix}\right\}$ , 则规格化振型矩阵可为

[ $\phi$ ] 越  $\phi^{(員)}$   $\phi^{(圓)}$  ...  $\phi^{(暈)}$  ] (源) (源)

### 猿位移的振型分解

由于各振型向量是线性独立的，因此，自由振动的通解可表示为

{曾越择[φ]<sub>員</sub>垣择[φ]<sub>員</sub>垣..垣择[φ]<sub>量</sub>}量 (源愿)

称  $\{ \varphi_{\alpha} \}$  为坐标变换式。其中  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  为广义坐标。仿照两自由度的同样推导, 可知它们是正则坐标, 因而振型矩阵是正则矩阵。

### 源振型的正交性

所谓振型的正交性，是指在多自由度体系以及无限自由度体系中，任意两个不同频率的振型之间存在下述关系

{φ}<sup>栽</sup>[酏Kφ]<sub>灶</sub>越园 皂≠灶 (源源)

{φ}<sup>裁</sup>[运]{φ}<sub>灶</sub>越园 皂≠灶 (源越园)

式(9.9.9)是振型关于质量阵的带权正交性,称为第一正交关系;式(9.9.10)是振型关于刚度阵的带权正交性,称为第二正交关系。正交性在结构动力分析中是非常有用的,它可以用能量定律证明,前面我们在学习两个自由度体系的自由振动时已经介绍过这种方法,下面我们从另一角度来证明。

设  $\omega_{\text{皂}}$  是第皂阶频率, 其相应的振型为  $\{\phi\}_{\text{皂}}$ , 设  $\omega_{\text{灶}}$  是第灶阶频率, 其相应的振型为  $\{\phi\}_{\text{灶}}$ , 它们分别满足如下关系式

(〔运〕原<sup>圓</sup>〔馥〕〔φ〕<sub>皇</sub>越园 (源缘)

(〔运〕原<sup>圆</sup>〔酝〕〔 $\phi$ 〕<sup>灶</sup>越园 (源缘)

现以  $\{\phi\}^{\text{裁判}}$ ,  $\{\phi\}^{\text{裁判}}$  分别左乘式 (源<sub>整</sub>) 和式 (源<sub>整</sub>) 有

{φ}([运]<sub>栽</sub>原<sub>ω</sub>[酝]<sub>圆</sub>){φ}<sub>阜</sub>越园 (源<sub>源</sub>)

$\{\phi\}_{\text{裁}}([ \text{运} ]_{\text{原}} \omega [ \text{酝} ]_{\text{灶}}) \{ \phi \}_{\text{灶}} \text{越园}$  (源缘)

注意式(源)和式(源)右端是零,故其左端也是一个数。其转置不变。现对式(源)转置后有

{φ}栽<sub>息</sub>(〔运栽<sub>ω</sub>原<sub>息</sub>〔酝栽〕{φ})灶越园 (源<sub>豫</sub>)

又因为

[运]裁越[运], [酝]裁越[酝]

所以  $\{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}}([\text{运}]_{\text{原}}^{\text{圆}}[\text{酝}]\chi\phi)_{\text{灶}}^{\text{越园}} \quad (\text{源缘})$

由式 (源缘) 减去式 (源) 有

$$(\omega_{\text{灶}}^{\text{圆}}\text{原}\omega_{\text{皂}}^{\text{圆}})\chi\phi_{\text{灶}}^{\text{裁}}[\text{酝}]\chi\phi)_{\text{灶}}^{\text{越园}} \quad (\text{源})$$

由于  $\omega_{\text{灶}} \neq \omega_{\text{皂}}$ , 所以必有

$$\{\phi\}_{\text{皂}}^{\text{裁}}[\text{酝}]\chi\phi)_{\text{灶}}^{\text{越园}} \quad (\text{源})$$

将式 (源) 代入式 (源) 中有

$$\{\phi\}_{\text{皂}}^{\text{裁}}[\text{运}]\chi\phi)_{\text{灶}}^{\text{越园}} \quad (\text{源})$$

注意正交性的条件是 [酝] [运] 矩阵是对称、正定的实矩阵。

下面检验一下前面算例 源给出的振型的正交性。在算例 源中, 结构的质量阵和刚度阵分别为

$$[\text{酝}]_{\text{越园}}^{\text{越园}} = \begin{pmatrix} \text{园园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{员缘} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{员园} \end{pmatrix}$$
$$[\text{运}]_{\text{越园}}^{\text{越园}} = \begin{pmatrix} \text{缘} & \text{原园} & \text{园} \\ \text{原园} & \text{猿} & \text{原员} \\ \text{园} & \text{原员} & \text{员} \end{pmatrix}$$

而振型为

$$\{\phi\}_{\text{员}}^{\text{越园}} \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{员} \end{Bmatrix} \quad \{\phi\}_{\text{圆}}^{\text{越园}} \begin{Bmatrix} \text{原园缘园} \\ \text{原缘园} \\ \text{员} \end{Bmatrix} \quad \{\phi\}_{\text{猿}}^{\text{越园}} \begin{Bmatrix} \text{园缘缘} \\ \text{原缘园} \\ \text{员} \end{Bmatrix}$$

关于质量阵的正交性, 有

$$\{\phi\}_{\text{员}}^{\text{裁}}[\text{酝}]\{\phi\}_{\text{圆}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{园缘园} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘园} & \text{园缘园} & \text{园缘园} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix}$$
$$\{\phi\}_{\text{圆}}^{\text{裁}}[\text{酝}]\{\phi\}_{\text{猿}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{园缘园} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘园} & \text{园缘园} & \text{园缘园} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix}$$
$$\{\phi\}_{\text{猿}}^{\text{裁}}[\text{酝}]\{\phi\}_{\text{员}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{园缘园} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} & \text{园缘缘} & \text{园缘园} \\ \text{园缘园} & \text{园缘园} & \text{园缘园} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix}$$

关于刚度阵的正交性, 有

$$\{\phi\}_{\text{员}}^{\text{裁}}[\text{运}]\{\phi\}_{\text{圆}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{缘} & \text{原园} & \text{园} \\ \text{原园} & \text{猿} & \text{原员} \\ \text{园} & \text{原员} & \text{员} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{原园缘园} \\ \text{原缘园} \\ \text{员} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{原园缘园} \\ \text{原缘园} \\ \text{员} \end{Bmatrix}$$
$$\{\phi\}_{\text{圆}}^{\text{裁}}[\text{运}]\{\phi\}_{\text{猿}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{缘} & \text{原园} & \text{园} \\ \text{原园} & \text{猿} & \text{原员} \\ \text{园} & \text{原员} & \text{员} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix}$$
$$\{\phi\}_{\text{猿}}^{\text{裁}}[\text{运}]\{\phi\}_{\text{员}} = \text{越园} \begin{pmatrix} \text{缘} & \text{原园} & \text{园} \\ \text{原园} & \text{猿} & \text{原员} \\ \text{园} & \text{原员} & \text{员} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{园缘园} \\ \text{园缘缘} \\ \text{园缘园} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

对于其他振型之间的正交性同理可以检验，例如

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_2 = 0$$

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_3 = 0$$

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_4 = 0$$

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_5 = 0$$

如用算例 9-1 的结果更为简单。算例 9-1 中结构的质量阵和刚度阵分别为

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

而振型为

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

关于质量阵的正交性，有

$$\{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1 = 2$$

误差来自数值运算的舍入误差，是在小数点后第四位，而给出的有效数值是小数点后第三位。

关于刚度阵的正交性，有

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{\phi\}_1^T [K] \{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2$$

$$\{\phi\}_2^T [K] \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2$$

当进行结构振型和自振频率求解时，检验计算结果是否正确的方法之一是检验振型是否满足正交性。

如果把振型和自振频率满足的方程

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\} \quad (9-1)$$

两边同时前乘  $\{\phi\}_{灶}^{裁}$ ，则有

$$\overline{\omega}_{灶}^{越} \overline{\phi}_{灶}^{圆} \quad (源圆苑)$$

其中

$$\overline{\omega}_{灶}^{越} \{\phi\}_{灶}^{裁} \overline{\omega}_{灶} \{\phi\}_{灶}^{圆} \overline{\phi}_{灶}^{裁} \{\phi\}_{灶}^{圆}$$

可以得到表达式

$$\omega_{灶}^{越} \sqrt{\frac{\overline{\omega}_{灶}}{\overline{\phi}_{灶}}} \quad (源圆愿)$$

这与单自由度体系自振频率的计算公式一样。有时称  $\overline{\phi}_{灶}$  和  $\overline{\omega}_{灶}$  为振型质量和振型刚度。

在振型的归一化方法中，有时要求归一化以后的振型满足

$$\{\overline{\phi}\}_{灶}^{裁} \overline{\phi}_{灶} \{\overline{\phi}\}_{灶}^{圆} \overline{\omega}_{灶} \quad (源圆怨)$$

其中上标“原”代表是归一化以后的振型。

如果求得的振型  $\{\phi\}_{灶}$  不满足以上归一化条件，则可令

$$\{\phi\}_{灶}^{越} \alpha \{\overline{\phi}\}_{灶} \quad (源圆园)$$

其中  $\{\overline{\phi}\}_{灶}$  为归一化振型， $\alpha$  为一待定常数。可以写成上式的原因是同一振型的不同表达仅相差一常数。由振型质量公式得

$$\{\phi\}_{灶}^{裁} \overline{\phi}_{灶} \{\phi\}_{灶}^{圆} \overline{\omega}_{灶} \quad (源圆员)$$

而

$$\{\phi\}_{灶}^{裁} \overline{\phi}_{灶} \{\phi\}_{灶}^{圆} \overline{\omega}_{灶} \alpha \{\overline{\phi}\}_{灶}^{裁} \overline{\phi}_{灶} \alpha \{\overline{\phi}\}_{灶}^{圆} \overline{\omega}_{灶} \quad (源圆圆)$$

得到

$$\alpha \overline{\omega}_{灶} \quad (源圆猿)$$

则归一化以后的振型为

$$\{\overline{\phi}\}_{灶}^{越} \frac{\overline{\omega}_{灶}}{\alpha} \{\phi\}_{灶}^{越} \overline{\phi}_{灶} \quad (源圆源)$$

这即是前面介绍的三种振型归一化方法中的第三种方法。

## 源圆 多自由度体系动力反应的振型叠加法

### 源圆员 正则坐标变换

如前面所述，只要坐标选择合适，就可能得到一组非耦联的多自由度体系的运动方程，这样的坐标为正则坐标。另外，振型矩阵起着将正则坐标转换成空间几何坐标的作用，它是一种坐标映射，这种映射又称为正则坐标映射（或变换）。

$$\{\xi\}^{越} \phi \{\eta\} \quad (源圆缘)$$

由于各振型向量是线性独立的, 故  $[\phi]$  的逆矩阵存在。

$$\{\delta\} = [\phi]^{-1} \{\delta\} \quad (9-10)$$

上述方法就是 坐标变换法, 把物理空间中的 个位移 (分) 量变换到 个广义坐标  $\{\delta\}$  的空间中, 而振型  $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n$  是坐标变换的坐标基。可以证明, 对于保守系统 (无能量交换), 个独立的振型是完备的, 即任何结构振动位移的形态都可以用其 个振型线性表示。表达式 (9-10) 表示位移可以用振型展开。

广义坐标  $\{\delta\}_1, \{\delta\}_2, \dots, \{\delta\}_n$  也称为正规坐标, 或振型坐标。

对于任意一个位移向量  $\{\delta\}$ , 当用振型来展开时, 可以利用振型的正交性来获得振型坐标的值。例如, 对位移  $\{\delta\}$  的振型展开式两边同时左乘  $\{\phi\}_1^T$   $[\phi]$ , 得到

$$\{\phi\}_1^T [\phi] \{\delta\} = \{\phi\}_1^T \{\phi\}_1 \delta_1 + \{\phi\}_1^T \{\phi\}_2 \delta_2 + \dots + \{\phi\}_1^T \{\phi\}_n \delta_n \quad (9-11)$$

根据振型的正交性, 上式右端 项公式中, 只有第 项不等于零, 则

$$\{\phi\}_1^T [\phi] \{\delta\} = \{\phi\}_1^T \{\phi\}_1 \delta_1 \quad (9-12)$$

则

$$\delta_1 = \frac{\{\phi\}_1^T [\phi] \{\delta\}}{\{\phi\}_1^T \{\phi\}_1} \quad (9-13)$$

将 从 1 取到  $n$ , 则得到 个振型坐标  $\{\delta\}_1, \{\delta\}_2, \dots, \{\delta\}_n$  的值。

利用以上公式就可以得到相应于各振型的振型坐标  $\{\delta\}$

例如对于算例 9-1

$$[\phi] \{\delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \{\phi\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

若将位移向量  $\{\delta\} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}^T$  用振型展开, 则振型坐标为

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

[illegible]

验证：

$$\sum_{\text{猿越员}} \{ \phi \}_{\text{猿越员}} \left\{ \begin{array}{l} \text{猿越员} \\ \text{猿越员} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{猿越员} \\ \text{猿越员} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{猿越员} \\ \text{猿越员} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{猿越员} \\ \text{猿越员} \end{array} \right\}$$

从以上分析看到，结构任一位移反应（状态）都可以用振型展开。这样，求解多自由度体系的位移反应问题，可以转化为求振型坐标问题。从上面求振型坐标的公式可以发现利用振型的正交性，可使求振型坐标问题解耦，计算公式各自独立，即将耦联的  $n$  个自由度问题化为  $n$  个独立的单自由度问题分析。

## 源例 无阻尼体系动力反应的振型叠加法

无阻尼多自由度体系的强迫振动方程为

[ 酖 ] [ 怎 ] 垣 运 [ 怎 ] 越 孕 ( 漶 陨 )

首先将位移  $\{u\}$  按振型展开，也即作正则坐标变换

{ 急 越  $\phi$  K 掙

将上式代入式 (源) 有

〔酖〕 $\phi$  〔掙垣〕 $\text{un}$   $\phi$  〔掙越〕 $\text{yn}$  (滙) 〔掙〕

前乘  $[\phi]$  裁, 变为

〔𦵑〕𦵑醢 〔𦵑〕𦵑掎垣 〔𦵑〕𦵑运 〔𦵑〕𦵑掎越 〔𦵑〕𦵑孕 (源随)

展开式 (9.1.10), 再由振型的正交性有:  $[\phi]^T [\phi]$  和  $[\phi]^T [\eta]$  是对角阵, 对角线元素为

$$\{\phi\}_i^T [\eta] \{\phi\}_i = \eta_i$$

$$\{\phi\}_i^T [\eta] \{\phi\}_i = \eta_i$$

再记  $\eta_i$  为  $\eta_i$  (9.1.11)

$\eta_i$ 、 $\eta_i$ 、 $\eta_i$  分别称为振型质量、振型刚度和振型荷载, 于是有

$$[\eta]^{-1} [\eta] \{\eta\}_i = \{\eta\}_i \quad (\eta_i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1.12)$$

这是第  $i$  阶振型的单自由度方程, 若各时刻的  $\eta_i$  (由 (9.1.12) 求得后, 就可由式 (9.1.12) 求得体系的空间坐标值。

振型坐标表示的运动方程式 (9.1.12) 两边同除  $\eta_i$  得

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{1}{\eta_i} \{\eta\}_i \quad (\eta_i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1.13)$$

这是  $n$  个非耦联的单自由度体系的强迫振动方程, 可以用单自由度受任意荷载时的分析方法求解, 例如用 9.1.13 积分、云里曼变换等。若用 9.1.13 积分, 可得

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\eta_i} \int_0^t \{\eta\}_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau, \quad (\eta_i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1.14)$$

求得  $\eta_i$  后, 利用式

$$\{\eta\}_i = \sum_{j=1}^n \{\phi\}_j \eta_j \quad (9.1.15)$$

将  $n$  个振型反应叠加可以得到多自由度体系在任一时刻的位移  $\{\eta\}_i$ 。如果外力是简谐荷载和周期性荷载, 则可以用前面讲的有关公式得到解 (利用动力放大系数  $\eta_i$  等)。

以上分析方法叫振型叠加法, 有时也称为振型分解法。用 9.1.13 积分得到的解是满足零初始条件时的特解, 当有非零初始条件时, 需计算初始条件引起的通解, 即体系的自由振动。此时可以把初始条件也用振型展开, 即直接利用公式有

$$\{\eta\}_i = \sum_{j=1}^n \{\phi\}_j \eta_j$$

得到用振型坐标表示的初始位移条件

$$\{\eta\}_i = \sum_{j=1}^n \{\phi\}_j \eta_j \quad (9.1.16)$$

和初始速度条件

$$\{\dot{\eta}\}_i = \sum_{j=1}^n \{\phi\}_j \dot{\eta}_j \quad (9.1.17)$$

将以上两式左乘  $\{\phi\}_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}] (\text{灶越员, 圆, …, 晕})$  并利用振型的正交性, 有

$$\left. \begin{aligned} \text{择}(\text{园}) & \text{越} \frac{\{\phi\}_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}] \{\text{怎园}\}}{\text{酝}_{\text{灶灶}}} \\ \text{择}(\text{园}) & \text{越} \frac{\{\phi\}_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}] \{\text{怎园}\}}{\text{酝}_{\text{灶灶}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{源圆愿})$$

得到以振型坐标表示的初始条件后, 可直接根据单自由度体系自由振动的解式, 得到由初始条件引起的各广义坐标的自由振动  $\text{择}(\text{灶})$  为

$$\text{择}(\text{灶}) \text{越} \text{择}(\text{园}) \text{宰} \frac{\text{择}(\text{园})}{\omega_{\text{灶灶}}} \text{泽}(\omega_{\text{灶灶}} \text{灶}) \quad (\text{源圆怨})$$

由初始条件引起的体系的自由振动  $\{\text{怎}(\text{灶})\}$  为

$$\{\text{怎}(\text{灶})\} \text{越} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{晕}} \{\phi\}_{\text{裁灶}}^T \text{择}(\text{灶}) \quad (\text{源圆园})$$

将强迫振动引起的振动和初始条件引起的振动叠加, 就得到结构反应完整的解, 即

$$\{\text{怎}(\text{灶})\} \text{越} \{\text{怎}(\text{灶})\} \text{垣} \{\text{怎}(\text{灶})\} \text{越} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{晕}} \{\phi\}_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}_{\text{灶灶}} \text{择}(\text{灶}) \text{垣} \text{择}(\text{灶})] \quad (\text{源圆员})$$

## 源圆猿 有阻尼体系动力反应的振型叠加法

有阻尼多自由度体系的强迫振动的运动方程为

$$[\text{酝}] \ddot{\text{怎}} \text{垣} [\text{悦}] \dot{\text{怎}} \text{垣} [\text{运}] \text{怎} \text{越} \text{孕} \quad (\text{源圆圆})$$

设  $[\phi]$  为式 (源圆圆) 无阻尼自由振动方程的振型矩阵。仍作下列坐标变换

$$\{\text{怎}\} \text{越} \phi [\text{择}]$$

将上式代入式 (源圆圆)

$$[\text{酝}] \phi [\text{择}] \ddot{\text{怎}} \text{垣} [\text{悦}] \phi [\text{择}] \dot{\text{怎}} \text{垣} [\text{运}] \phi [\text{择}] \text{怎} \text{越} \text{孕} \quad (\text{源圆猿})$$

前乘  $[\phi]_{\text{裁灶}}^T$  有

$$[\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}] \phi [\text{择}] \ddot{\text{怎}} \text{垣} [\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{悦}] \phi [\text{择}] \dot{\text{怎}} \text{垣} [\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{运}] \phi [\text{择}] \text{怎} \text{越} [\phi]_{\text{裁灶}}^T \text{孕} \quad (\text{源圆源})$$

由前面所学可知,  $[\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{酝}] [\phi]$ ,  $[\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{运}] [\phi]$  为对角矩阵。但是与阻尼  $[\text{悦}]$  有关的  $[\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{悦}] [\phi]$  一般来讲却不能保证是对角阵。因此, 式 (源圆源) 虽无质量和刚度耦联, 却依然存在阻尼 (速度) 耦联, 不能对全部坐标实行解耦, 这意味着当体系存在阻尼时, 按式 (源圆源) 定义的新坐标通常不是正则坐标。

但为了分析方便, 往往可以忽略式 (源圆源) 中的速度耦联项, 而把  $[\phi]_{\text{裁灶}}^T [\text{悦}] [\phi]$  近似的看作是对角阵



$$\{ \phi \}_{\xi}^T \{ \ddot{u} \} = \{ \ddot{u} \}$$

由非零初始条件引起的自由振动解为（以振型坐标表示）

$$\{ u \}_{\xi} = \sum_{\xi} \{ \phi \}_{\xi} \{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega_{\xi} t) + \frac{\{ \dot{u} \}_{\xi}}{\omega_{\xi}} \sin(\omega_{\xi} t) \quad (1)$$

问题的全解为

$$\{ u \}_{\xi} = \sum_{\xi} \{ \phi \}_{\xi} \{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega_{\xi} t) + \frac{\{ \dot{u} \}_{\xi}}{\omega_{\xi}} \sin(\omega_{\xi} t) + \{ u \}_{\xi} \cos(\omega_{\xi} t) \quad (2)$$

如果采用频域分析方法，当振型阻尼比  $\zeta_{\xi}$  约等于 0 时，特解（直接由外荷载引起的反应）可表示为

$$\{ u \}_{\xi} = \int_0^t \{ \phi \}_{\xi} \{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega_{\xi} t) dt \quad (3)$$

其中

$$\{ u \}_{\xi}(\omega) = \int_0^t \{ \phi \}_{\xi} \{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega_{\xi} t) dt \quad (4)$$

为振型荷载的 云 云 云

$$\{ u \}_{\xi}(\omega) = \frac{\{ \phi \}_{\xi} \{ \ddot{u} \}_{\xi}}{[\text{原}(\omega_{\xi})^2 - \omega^2]} \quad (5)$$

为复频反应函数，而  $\text{原}$  为振型刚度。

如果存在非零初始条件，则采用与上面类似的方法可以得到由初始条件引起的各广义坐标表示的自由振动，再利用振型叠加公式，可以得到位移的时域解。

如果外荷载向量  $\{ \ddot{u} \}_{\xi}$  为简谐荷载，例如， $\{ \ddot{u} \}_{\xi} = \{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega t)$  其中  $\{ \ddot{u} \}_{\xi}$  为常向量，即简谐外力的幅值向量。则可以采用单自由度体系在简谐荷载作用下的方法分析，振型坐标运动方程为

$$\{ \ddot{u} \}_{\xi} \cos(\omega t) = \text{原}(\omega_{\xi})^2 \{ u \}_{\xi} \cos(\omega t) \quad (6)$$

则振型反应为

$$\{ u \}_{\xi} = \frac{\{ \ddot{u} \}_{\xi}}{[\text{原}(\omega_{\xi})^2 - \omega^2]} \cos(\omega t) \quad (7)$$

其中

$$\{ u \}_{\xi} = \frac{\{ \ddot{u} \}_{\xi}}{\sqrt{[\text{原}(\omega_{\xi})^2 - \omega^2]^2 + 4\zeta_{\xi}^2 \omega_{\xi}^2 \omega^2}} \cos(\omega t) \quad (8)$$

$$\varphi_{\text{灶}} = \frac{\varphi_{\text{灶}}(\omega_{\text{灶}})}{\varphi_{\text{灶}}(\omega_{\text{灶}})} \quad (\text{源})$$

称为相应于灶阶自振频率的动力放大系数，称为振型反应的动力放大系数。

从以上分析可以看出，对于满足阻尼正交条件的结构体系，当采用振型叠加法分析时，多自由度体系的动力反应问题即转化为一组单自由度体系的反应问题，并可以考虑初始条件的影响。此时在单自由度体系分析中采用的各种分析方法都可以用于计算分析多自由度体系的动力反应问题，使问题的分析得到极大简化，因为求解一个独立的方程比求解一个方程组要简便得多。

对于自由度很多的结构，例如具有上万个自由度的大型结构体系，计算全部的特征值（自振频率）和特征向量（振型）是不需要或者说不可能的，因为需花费的计算时间太多，即便是求解几个独立运动方程所需的时间也显得太多，因为每个方程的解都对应一条时间函数。计算中发现，对多自由度体系的动力反应问题，高阶振型起的作用小，而低阶振型起的作用大。在振型叠加法分析中，实际并不需要采用所有的振型进行计算，因高阶振型的影响极小，仅取前有限项振型即可以取得精度良好的计算结果。例如对于源万个自由度超高层结构的地震反应，仅取前源阶振型就可以达到所需的精度。抗震规范规定，一般情况下，仅保证在一个振动方向上有前三阶振型就可以。因此振型叠加法大大加快了计算速度，但对于一些大型特殊的结构，例如悬索桥，可能需要使用上百个振型才可以取得满意的计算结果。

虽然振型叠加法有计算速度快、节省时间这些突出的优点，但存在局限性。主要局限是由于采用了叠加原理，因而原则上仅适用于分析线弹性问题，限制了使用范围；第二个局限是由于要求阻尼正交，对实际工程中存在的大量不满足阻尼正交条件的问题，迫使采用额外的处理方法，近似处理方法包括采用正交阻尼代替非正交阻尼，或采用复模态方法，但复模态分析将使问题维数扩大一倍。

针对这两个问题近期已取得一些新的进展：

(员) 关于线性限制：目前已把振型叠加方法推广用于处理非线性问题，例如杂源图，但计算中要采用足够多的振型。

(圆) 关于非正交阻尼限制：除对阻尼进行近似处理（正交化）或复模态方法外，还发展了迭代算法。

### 圆 非经典阻尼

当结构的振型不满足关于阻尼阵正交条件时，用振型叠加法，或说采用振型坐标变换后得到的方程成为一组耦合的运动方程，而不是前面满足阻尼正交条件时得到的非耦合的一系列单自由度的运动方程。这时若直接采用以振型坐标表示的运动方程求解，即采用振型叠加法求解，必须考虑耦合项的影响。但若仅采用前有限阶振型展开，可以把一个多自由度问题化为用更少振型坐标表示的小自

由度问题。

采用振型展开

$$\{\xi\} = \sum_{k=1}^N \{\phi_k\} \xi_k \quad (1)$$

其中  $\xi_k$  为第  $k$  阶振型坐标，而  $\xi_k$  为第  $k$  阶振型坐标

用  $\{\phi_k\}$  (灶越员 圆 ... , 蕴) 左乘用振型坐标展开后的运动方程

$$\sum_{k=1}^N ([\phi_k]^T \xi_k) \xi_k \quad (2)$$

后得

$$\begin{pmatrix} \phi_1^T & \phi_2^T & \dots & \phi_N^T \\ \phi_2^T & \phi_1^T & \dots & \phi_N^T \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_N^T & \phi_N^T & \dots & \phi_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \dots \\ \phi_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \phi_1^T & \phi_2^T & \dots & \phi_N^T \\ \phi_2^T & \phi_1^T & \dots & \phi_N^T \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \phi_N^T & \phi_N^T & \dots & \phi_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \dots \\ \phi_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (4)$$

式 (1) 虽然仍是一个耦联的方程组，但是一个低阶方程组，因此可以使计算量大为降低。

阅读本章积分已经不再适合对式 (1) 的求解，可以采用频域分析方法 (拉普拉斯变换)，或时域的逐步积分法求解。

在采用时域逐步积分法时也可以采用迭代算法避免求解联立方程组，此时把阻尼力项移到方程的右端，当作已知的外荷载，则可以得到解耦的方程 (形式上解耦的)

$$\phi_k^T \xi_k \quad (5)$$

对上式采用时域逐步积分法计算，在求解的每一步中采用迭代法，可以得到满足所给定精度要求的解，而避免了解联立方程组。

另外一种求解阻尼不满足正交条件的方法是采用复模态分析法。模态分析等

于振型分析，英语上是同一个词。

复模态分析是将运动方程改写成状态方程。首先介绍一下状态变量。状态变量是用来描述体系状态的一组变量，对于一般的线性动力系统，其任一时刻的状态可用该时刻的位移和速度来表示，则位移和速度就构成该体系的状态变量。开始时刻的值称为初态，即体系的初始条件。

阻尼体系自由振动方程为

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = 0 \quad (9-1)$$

而状态变量为

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \quad (9-2)$$

状态变量对时间的导数

$$\dot{\{z\}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} \quad (9-3)$$

再补充恒等式

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = 0 \quad (9-4)$$

阻尼体系自由振动方程化为状态方程

$$[M]\dot{\{z\}} + [C]\{z\} + [K]u = 0 \quad (9-5)$$

其中

$$[M] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}$$

状态方程 (9-5) 与无阻尼体系自由振动方程的形式完全一样。对状态方程 (9-5) 可以同样分析其特征值和特征向量，即自振频率和振型，而其振型亦满足关于  $[K]$  和  $[M]$  的正交性，可以用振型叠加法求解用状态方程表示的有阻尼强迫振动问题，并得到解耦的独立方程。

复模态分析的特点：

(1)  $[C]$  和  $[M]$  是  $n \times n$  阶矩阵，因而特征值分析时，需要花费更多的时间。

(2) 自振频率和振型（模态）都是复数。

(3) 复模态反应分析要花费更多的时间。

## 9.1 结构中的阻尼和阻尼矩阵的构造

阻尼不但对结构的动力反应有重要的影响，而且对计算方法也产生影响。因而结构动力学中阻尼是一个重要的研究课题，目前已经发展了很多阻尼理论和构造结构阻尼矩阵的方法。试图通过从结构的尺度、结构构件尺寸、结构材料阻尼

的性质来像形成结构刚度阵或质量阵那样直接构造阻尼矩阵是不现实的（虽然也有给出从材料阻尼系数开始计算阻尼阵的公式）。对连续介质尚可以考虑，但对建筑结构问题较大，结构阻尼除材料本身外，构件间摩擦是阻尼的重要来源，对此很难用理论方法确定。结构的阻尼一般都是通过实测得到的，通过统计分析得到不同类型结构阻尼值。由实测得到的阻尼值一般都是振型阻尼比，例如采用前面讲的半功率点法进行分析确定。

振型阻尼比（~~配建普特克早明福森~~，记为  $\zeta_{\text{灶}}$ ，为对应于 灶阶振型反应的阻尼比。从模拟精度来讲，用振型阻尼比来描述结构线弹性反应中的阻尼性质是足够的。

下面先通过一个实际例子介绍一下结构的阻尼，从中可以发现结构阻尼比的大小并不是固定值，而是与结构振动的幅值有关。然后介绍阻尼矩阵的构造，主要是 ~~砸糖望渠~~ 阻尼，最后介绍非经典阻尼的构造。

### 源原质 阻尼实测的例子

在 ~~悦梁建~~ 的《结构动力学》一书中给出了一个典型的结构阻尼测量的实例——加州理工学院 ~~配圣森社~~ 图书馆阻尼比的测量。该图书馆为九层钢筋混凝土结构，建于 ~~员怨远~~~~~员怨苑~~ 年，结构尺寸为 ~~圆宅伊圆宅伊源皂~~（高）。建筑进行了起振机简谐振动试验（采用半功率点法）。经历了 ~~蕴糖制湖糖巢~~ 地震（~~员怨苑圆~~），~~酝越~~ 震中距为 ~~远源皂~~。旧金山地震（~~员怨苑圆~~），~~酝越~~ 震中距为 ~~猿园皂~~。

在建筑中都得到了实际地震记录（屋顶和基底）。由起振机振动试验和两次实际地震得到的结构的阻尼比列于下面 ~~源民~~ 表中。

表 ~~源质~~ ~~酝圣森社蕴糖制湖糖巢~~ 的自振周期和振型阻尼比  $\zeta$

| 方向          | 震源                | 加速度峰值<br>转                       | 一阶振型                            |                                 | 二阶振型           |                              |
|-------------|-------------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------|------------------------------|
|             |                   |                                  | 栽转                              | $\zeta_{\text{原}}(\text{豫})$    | 栽转             | $\zeta_{\text{原}}(\text{豫})$ |
| 南<br>北<br>向 | 起振机               | <del>园圆原豫</del> ~ <del>园圆原</del> | <del>园圆原</del> ~ <del>园圆豫</del> | <del>员圆圆</del> ~ <del>员圆愿</del> | 没测             | 没测                           |
|             | <del>蕴糖制湖糖巢</del> | <del>园圆原豫</del>                  | <del>园圆圆</del>                  | <del>园圆豫</del>                  | <del>园圆圆</del> | <del>员圆圆</del>               |
|             | 旧金山               | <del>园圆原圆</del>                  | <del>园圆圆</del>                  | <del>远圆原</del>                  | <del>园圆原</del> | <del>源圆范</del>               |
| 东<br>西<br>向 | 起振机               | <del>园圆原转</del> ~ <del>园圆范</del> | <del>园圆远</del> ~ <del>园圆愿</del> | <del>园圆范</del> ~ <del>员圆豫</del> | 数据不可靠          | 数据不可靠                        |
|             | <del>蕴糖制湖糖巢</del> | <del>园圆原豫</del>                  | <del>园圆原</del>                  | <del>园圆圆</del>                  | <del>园圆愿</del> | <del>猿圆近</del>               |
|             | 旧金山               | <del>园圆原愿</del>                  | <del>园圆愿</del>                  | <del>苑圆圆</del>                  | <del>园圆圆</del> | <del>缘圆原</del>               |

从以上实测结果可以发现：

结构的自振周期和振型阻尼比随振幅的不同而变化，随振动强度的增大，自振周期变长，振型阻尼比变大。但自振周期的变化小于振型阻尼比的变化。

微振时，阻尼比较小，为 员缘~ 圆缘；  
微、小振（震）时，阻尼比达 猿缘；  
小、中振（震）时，阻尼比可达 缘缘~ 苑缘。

一般当我们做结构的振动反应分析时，除在机器基础等设计时涉及到微振外，大部分都涉及小、中振（震）分析，因此一般取钢筋混凝土阻尼比为 缘缘是一个平均值。

从以上结果也看到，不同振型阻尼比是有差别的。

以上仅是一个具体的例子，其中也一定存在误差，特别是在用实际地震记录推算阻尼比方面，但仍为一个很典型的、具有普遍意义的例子。

上面仅给出了一个定性的分析，下面给出一个量化的结果。表 源缘给出一般情况下工程中钢筋混凝土结构和木结构阻尼比的推荐值。

表 源缘 阻尼比推荐值

| 应力水平          | 结构类型和构造                            | 阻尼比 $\zeta$ (豫)  |
|---------------|------------------------------------|------------------|
| 工作应力不超过 员缘屈服点 | 预应力混凝土结构<br>质量好的钢筋混凝土结构<br>(仅有微裂缝) | 圆- 猿             |
|               | 有一定裂纹的钢筋混凝土                        | 猿- 缘             |
|               | 钉或螺栓连接的木结构                         | 缘- 苑             |
| 接近屈服点         | 预应力钢筋混凝土<br>(无全部损失预应力)             | 缘- 苑             |
|               | 预应力钢筋混凝土<br>(预应力已损失)               | 苑- 苑圆            |
|               | 钢筋混凝土                              | 苑- 苑圆            |
|               | 螺栓连接的木结构<br>钉连接的木结构                | 苑圆- 员缘<br>员缘- 圆圆 |

以上取值限于线弹性范围。

源缘 阻尼矩阵

阻尼矩阵简单、方便，因而在结构动力分析中得到了广泛应用。  
阻尼矩阵假设结构的阻尼矩阵是质量矩阵和刚度矩阵的组合，即

[悦]越葬[酝]垣葬[运] (源缘)

其中 葬和 葬是两个比例系数，分别具有 泽和 泽的量纲。

在前一节内容中已讲，结构的振型是关于质量阵和刚度阵正交的，很容易想到，质量矩阵和刚度矩阵的线性组合必定满足正交条件，因此 阻尼矩阵是一

种正交阻尼。满足振型正交条件的阻尼也称为经典阻尼。式(源苑苑)中,  $\zeta_{\text{越}}$  和  $\zeta_{\text{越}}$  是待定的两个常数, 可以用实际测量得到的结构阻尼比来确定(实测可直接给出结构的振型阻尼比), 或通过给定的两个振型阻尼比的值来确定, 为此要把式(源苑苑)化成由阻尼比表示的形式。

将式(源苑苑)分别左乘振型的转置  $\{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}}$  和右乘振型  $\{\phi\}_{\text{灶}}$  得

$$\zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} + \zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} = \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} \quad (\text{源苑苑})$$

其中  $\zeta_{\text{越}}$ 、 $\zeta_{\text{越}}$ 、 $\omega_{\text{灶}}^2$  分别是第  $\text{灶}$  阶振型的阻尼系数、振型质量和刚度, 其表达式前面已讲, 即

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{越}} &= \frac{\{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}}}{\omega_{\text{灶}}^2} \\ \zeta_{\text{越}} &= \frac{\{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}}}{\omega_{\text{灶}}^2} \\ \omega_{\text{灶}}^2 &= \frac{\{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}}}{\omega_{\text{灶}}^2} \end{aligned}$$

如果假设结构体系的阻尼满足正交条件, 并采用振型叠加法求解, 则不必构造整体阻尼矩阵, 而直接采用振型阻尼比  $\zeta_{\text{灶}}$  即可, 因为实际结构阻尼测量中都是直接给出阻尼比。构造整体阻尼矩阵的目的是用于时域逐步积分分析, 这时满足正交条件的假设, 或称采用 砸鞣鞣鞣 的目的, 一是矩阵构造方便; 二是用正交条件来确定系数  $\zeta_{\text{越}}$ 、 $\zeta_{\text{越}}$ 。

将公式

$$\zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} + \zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} = \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} \quad (\text{源苑苑})$$

代入式(源苑苑)得

$$\zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} + \zeta_{\text{越}} \omega_{\text{灶}}^2 \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} = \{\phi\}_{\text{灶}}^{\text{裁}} \{\phi\}_{\text{灶}} \quad (\text{源苑苑})$$

如果给定任意两个振型阻尼比  $\zeta$  (自振频率是已知的), 分别代入上式, 即得到关于系数  $\zeta_{\text{越}}$  和  $\zeta_{\text{越}}$  的两个线性代数方程组, 可以解得  $\zeta_{\text{越}}$  和  $\zeta_{\text{越}}$ , 则 砸鞣鞣鞣 阻尼也就确定了, 假设  $\zeta_{\text{蚤}}$  和  $\zeta_{\text{躁}}$  给定, 可写出计算  $\zeta_{\text{越}}$  和  $\zeta_{\text{越}}$  的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{\text{蚤}}} & \frac{1}{\omega_{\text{躁}}} \\ \frac{1}{\omega_{\text{蚤}}} & \frac{1}{\omega_{\text{躁}}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{\text{越}} \\ \zeta_{\text{越}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_{\text{蚤}} \\ \zeta_{\text{躁}} \end{Bmatrix} \quad (\text{源苑苑})$$

对式(源苑苑)给出的二元一次方程组, 可以直接给出其解析表达式

$$\begin{Bmatrix} \zeta_{\text{越}} \\ \zeta_{\text{越}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_{\text{蚤}} \omega_{\text{躁}}} \begin{pmatrix} \omega_{\text{躁}} & \omega_{\text{蚤}} \\ \omega_{\text{蚤}} & \omega_{\text{躁}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_{\text{蚤}} \\ \zeta_{\text{躁}} \end{Bmatrix} \quad (\text{源苑苑})$$

当振型阻尼比  $\zeta_{\text{蚤}} \rightarrow 0$ 、 $\zeta_{\text{躁}} \rightarrow 0$  时, 式(源苑苑)简化为

$$\left\{ \begin{matrix} \zeta_{\text{质}} \\ \zeta_{\text{刚}} \end{matrix} \right\} \text{越} \frac{1}{\omega_{\text{质}} \omega_{\text{刚}}} \left\{ \begin{matrix} \omega_{\text{质}} \\ \omega_{\text{刚}} \end{matrix} \right\} \quad (\text{源图9-10})$$

采用以上公式, 经过简单的运算就可以得到进行结构动力反应计算所需的阻尼矩阵。为保证构造的阻尼矩阵合理、可靠, 在确定  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  时, 必须遵循一定的原则, 否则构造的阻尼阵可能导致计算结果的严重失真。为此, 下面分析  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  的特点。

将  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  分成两项, 一项与质量 (阵) 成正比, 一项与刚度 (阵) 成正比, 即

$$[\zeta] = \zeta_{\text{质}} [M] + \zeta_{\text{刚}} [K] \quad (\text{源图9-11})$$

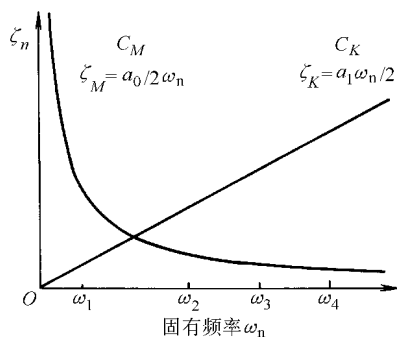
式中,  $[\zeta] = \zeta_{\text{质}} [M] + \zeta_{\text{刚}} [K]$

相应地, 阻尼比也分成两项, 与质量成正比项  $\zeta_{\text{质}}$  和与刚度成正比项  $\zeta_{\text{刚}}$ , 即

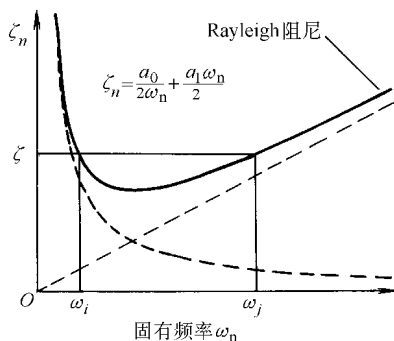
$$\zeta_{\text{质}} \text{越} \frac{1}{\omega_{\text{质}}} \zeta_{\text{刚}} \text{越} \omega_{\text{刚}} \quad (\text{源图9-12})$$

式中,  $\zeta_{\text{质}} \text{越} \frac{1}{\omega_{\text{质}}} \zeta_{\text{刚}} \text{越} \omega_{\text{刚}}$ 。

当常数  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  确定后,  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  仅与  $\omega_{\text{质}}$  有关, 图 9-12 给出阻尼比随频率  $\omega_{\text{质}}$  的变化规律曲线。



a)



b)

图 9-12 振型阻尼比与自振频率关系

由图 9-12 可见, 与质量成正比的部分当频率趋于零时, 变得无穷大, 随着频率的增加而迅速变小; 与刚度成正比的部分, 则随频率的增加而线性增加。

$\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  在两个自振频率  $\omega_{\text{质}}$  和  $\omega_{\text{刚}}$  (用于确定  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  的振型阻尼比对应的自振频率) 点处等于给定的阻尼比  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$ 。如果确定阻尼常数  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  所用的阻尼比  $\zeta_{\text{质}}$  和  $\zeta_{\text{刚}}$  相等 (这是工程中常采用的, 一般取各振型阻尼比均相同), 则当振动频率  $\omega$  在  $[\omega_{\text{质}}, \omega_{\text{刚}}]$  区间之内时, 阻尼比将小于或等于给定阻尼比, 而当频率在这一区间之外时, 其阻尼比均大于给定阻尼比, 而且距离

越远，阻尼比越大。

因此，确定  $\zeta$  的原则是：选择的两个用于确定常数  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  的频率点  $\omega_1$  和  $\omega_2$  要覆盖结构分析中感兴趣的频段。

感兴趣频率（频段）的确定要根据作用于结构上的外荷载的频率成分和结构的动力特性综合考虑。

在频段  $[\omega_1, \omega_2]$  内，阻尼比略小于给定的阻尼比  $\zeta$ （在  $\omega_1$  和  $\omega_2$  点有  $\zeta < \zeta_1$  和  $\zeta < \zeta_2$ ）。这样，在该频段内由于计算的阻尼略小于实际阻尼，结构的反应将略大于实际的反应，这样的计算结果对工程设计而言是安全的。如果  $\omega_1$  和  $\omega_2$  选择的好，则可以保证这种增大程度很小。

在频段  $[\omega_1, \omega_2]$  以外，其阻尼比将迅速增大，这样频率成分的振动反应会被抑制，其计算值将远远小于实际值，但这一部分不是需要考虑的，或可以忽略的。但是，如果存在对结构设计有重要影响的频率分量，则可能导致严重的不安全。

因此，随意找两个自振频率及相应阻尼比来确定  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  的方法是不对的，有可能导致严重的误判。例如，简单地采用前两阶自振频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  及阻尼比  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  来确定常数  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  的方法应予纠正。

### 扩展的 $\zeta$ 阻尼（扩展阻尼）

$\zeta$  阻尼仅可能在两个（自振）频率点上满足等于给定的阻尼比，如果希望在更多的频率点上满足等于给定的阻尼比，则必须构造更多项的线性组合。采用如下形式构造的阻尼矩阵可以达到这一目的，即

$$[\zeta] = \sum_{i=1}^n \zeta_i [\phi_i] [\phi_i]^T \quad (1)$$

共有  $n$  个常数  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  需要确定。

将式 (1) 左乘  $\{\phi\}^T$ ，右乘  $\{\phi\}$ ，并利用振型方程

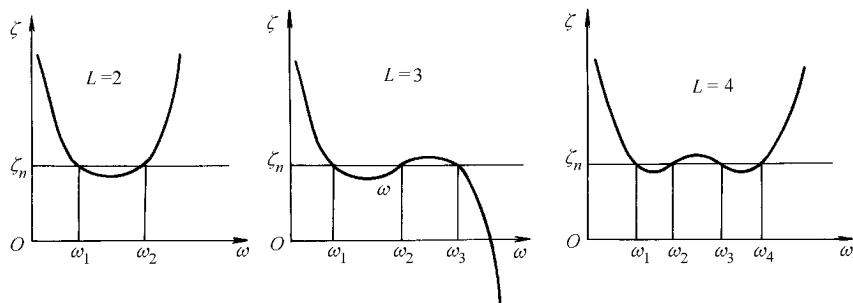
$$[\zeta] \{\phi\} = \omega^2 \{\phi\}$$

可以得到

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \zeta_i \frac{\phi_i^T \phi}{\phi_i^T \phi_i} \quad (2)$$

将  $n$  个已确定的振型阻尼比  $\zeta_i$  和自振频率  $\omega_i$  分别代入上式，则得到  $n$  个关于系数  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  的代数方程组。由此代数方程组可以解得扩展的  $\zeta$  阻尼（矩阵）的  $n$  个待定常数，这样就确定了扩展的  $\zeta$  阻尼。这一阻尼特点：在  $n$  个给定的频率点上，阻尼比精确等于给定的阻尼比。若  $n \rightarrow \infty$ ，则所有

的振型阻尼比都将满足。图 9-2-10 所示为扩展的阻尼比与自振频率的关系。

图 9 扩展的碾磨器阻尼比和频率点个数  $N$  的关系

### 彌爾原 利用振型阻尼矩阵直接疊加

将振型阻尼,  $\{\phi\}^T [c] \{\phi\}$  越悦, 灶越灶, 灶越灶, 灶越灶, 圆 ... , 晕写成矩阵的形式, 有

[ $\phi$  裁悦][ $\phi$  越悦] (源 源 源)

[悦]是待构造的； $[\phi]$ 和 $[\text{悦}]_{\frac{\phi}{\psi}}$ 是已知的（因为 $\text{悦} \leq_{\frac{\phi}{\psi}} \text{越}$ ）。由式（源）

可以~~直接~~得到结构的阻尼矩阵

「悦」越〔 $\phi$ 〕裁原「悦」〔 $\phi$ 〕原 (瀬野)

式(19)中涉及到  $[\phi]_{\text{截}}$  和  $[\phi]$  的逆矩阵, 计算工作量很大, 可以用振型质量阵的对角性质得到  $[\phi]_{\text{截}}$  和  $[\phi]$  的逆矩阵。

### 振型质量阵公式

[ $\phi$ ] 耕 酉 [ $\phi$ ] 越 酉<sup>上</sup> (漣陽縣)

其中  $[ \varphi_{灶灶} ]$  为对角阵, 元素  $\varphi_{灶灶}(\phi) = (\varphi_{灶灶}^1(\phi), \varphi_{灶灶}^2(\phi), \dots, \varphi_{灶灶}^n(\phi))$ , 对式 (源式) 左乘  $[ \varphi_{灶灶} ]^{\text{原}}$ , 右乘  $[ \phi ]^{\text{原}}$  得

[酉<sub>土</sub>]<sub>原</sub> [艮<sub>土</sub>] 越 [酉<sub>土</sub>]<sub>原</sub> (澤風大過)

对 (源式) 式左乘  $([\phi])^{\text{原}}$ , 右乘  $[\text{酝}]^{\text{原}}$  得

〔酏Ⅰ $\phi$ Ⅱ酏<sub>++</sub>〕<sub>原</sub>越〔 $\phi$ 裁〕<sub>原</sub> (源與類)

因为  $[Y_{\text{社}}]$  为对角阵, 其逆矩阵很容易求得, 因此式 (源圆) 和式 (源) 代入式 (源) 得

[悦]<sub>越</sub>[酝]<sub>Ⅰ</sub>∅[酝]<sub>Ⅱ</sub>[原]<sub>原</sub>)[悦]<sub>悦</sub>[酝]<sub>Ⅱ</sub>[原]<sub>原</sub>∅[制]<sub>制</sub>[酝]<sub>Ⅱ</sub> (涯原韵)

展开得

[悦越酖]  $\left( \sum_{灶=1}^{\text{量圆}} \frac{\text{燂灶}}{\text{皂灶}} \{ \phi \} \{ \phi \} \text{裁灶} \right)$  [酖] (溥博南)

可见上式用到了结构体系的全部 晕个振型阻尼比，实际上这对大型结构分析是不必要的，而且如果忽略某一阶振型，则相当于认为这一振型的阻尼比等于零。

源源缘 非经典阻尼矩阵的构造

如果结构的两部分或更多部分的阻尼存在明显的差异时，经典阻尼的假设便不再成立。例如，当需要考虑土—结构动力相互作用时，土的阻尼（比）与结构阻尼（比）明显不同，前者可达 员豫（中震、中等变形），而后者为 猿豫 ~ 缘豫，像核电站、大型结构的地震反应问题都要求考虑土—结构动力相互作用。再如结构本身的两部分构成的材料不同，像部分钢结构、部分混凝土结构，明显的例子是悬索桥结构，索和桥面是钢结构，而桥塔是钢筋混凝土结构（例如青马大桥），钢结构的阻尼比为 员豫，而混凝土的阻尼比为 猿豫 ~ 缘豫，这时采用前面构造经典阻尼矩阵的方法，例如采用 砸豫普果阻尼去构造结构的阻尼矩阵，则结构各部分的阻尼（比）均相同。若采用一个折中阻尼，则计算的结果将高估钢筋混凝土桥塔的反应，而低估了钢结构的悬索和桥面的反应，导致较大的计算误差。再一个例子就是在耗能减震结构中，在结构的某些部位要设置高阻尼的耗能构件或阻尼器，其阻尼将大大高于结构的其他部分，从而导致结构阻尼矩阵成为非经典阻尼阵。

对于结构体系为非经典阻尼时，不能像经典阻尼那样对整个结构体系建立阻尼矩阵。这时可以先将结构分为几个子结构，每个子结构中阻尼（特性）是相同的，这样，在各子结构部分阻尼是经典的，可以对每一个子结构采用前面介绍的处理经典阻尼的方法，建立其子结构的阻尼矩阵，最后把几个子结构的阻尼矩阵集成得到结构总体阻尼阵。

例如对核电站，其结构—土动力相互作用模型如图 源源园所示。

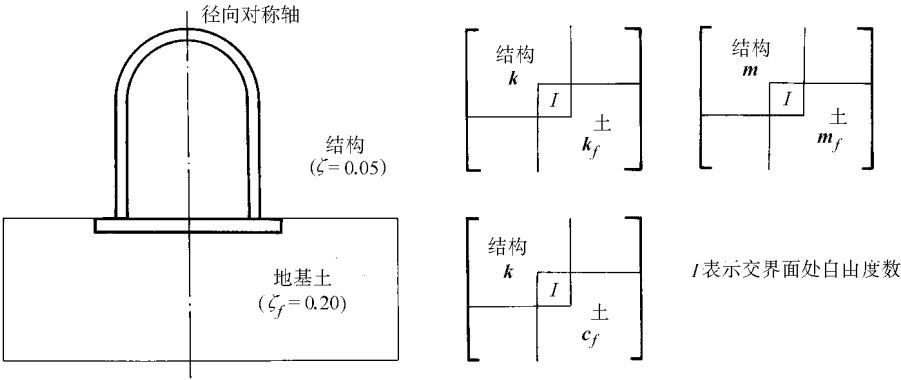


图 源源园 结构—土动力相互作用模型及子结构矩阵的组装

对于结构部分其阻尼比相同，而土体部分也相同，对各自部分可以采用前面介绍的对经典阻尼的处理方法分别构造其阻尼矩阵。例如采用 比例阻尼，构造的结构和土的阻尼阵分别为

$$[C]_{\text{结}} = 2\zeta_{\text{结}} \omega_{\text{结}} [M]_{\text{结}}$$

$$[C]_{\text{土}} = 2\zeta_{\text{土}} \omega_{\text{土}} [M]_{\text{土}}$$

对整个土—结构体系，根据前面所讲确定两频率的原则，定出  $\omega_{\text{结}}$  和  $\omega_{\text{土}}$ 。对结构部分取  $\zeta_{\text{结}}$ ，对土体部分取  $\zeta_{\text{土}}$ ，可以定出  $C_{\text{结}}$  和  $C_{\text{土}}$ ；对土体部分，取  $\zeta_{\text{土}}$ ，可以定出  $C_{\text{土}}$  和  $C_{\text{结}}$ ，代入计算  $[C]_{\text{结}}$  和  $[C]_{\text{土}}$  的公式，这样就分别求出了结构部分和土体部分的子结构阻尼阵，然后集合得到整个体系的阻尼矩阵。

几点结论：

(1) 构造结构阻尼矩阵的目的是为了在时域逐步积分法或其他分析方法（例如频域法）中使用。

(2) 前面讲的构造经典阻尼矩阵的方法，不是刻意地去构造一种满足正交条件的阻尼矩阵，而是利用经典阻尼的特点来建立构造阻尼矩阵的公式（或方法）。

(3) 如果已知结构各构件的单元阻尼矩阵，则可以直接生成阻尼阵。

(4) 如果采用振型叠加法分析经典阻尼体系时，则根本不用生成结构的总体阻尼矩阵。

## 9.2 静力修正方法

实际的工程结构，自由度数一般都很大，在采用振型叠加法求解时，不能把所有的振型都予考虑，而仅能采用有限的低阶振型，忽略高阶振型的影响。虽然通过选择合适的振型数目，可保证足够的计算精度，但也会产生一定的误差。为进一步减小由忽略高阶振型影响而引起的误差，可以采用静力修正法。所谓静力修正法是指在采用振型叠加法进行求解时，考虑所有高阶振型的影响，但高阶振型相应的振型坐标反应的求解并不通过直接求解动力方程而获得，而是采用简化的静力分析方法。

采用振型叠加法，振型叠加的公式和振型坐标满足的运动方程为

$$\{ \ddot{u} \} + \sum_{i=1}^n \{ \phi \}_i \ddot{\eta}_i = \{ f \}$$

$$[M] \ddot{\eta} + [C] \dot{\eta} + [K] \eta = \{ f \}$$

注意到，高阶振型坐标  $\eta_i$  对应的自振频率  $\omega_{\text{结}} / \omega_{\text{土}}$  也较大，即对应的是一个等效的比较“刚”的单自由度结构，这时结构中惯性力和阻尼力的影响相对较小，可以忽略，这可以从单自由度结构动力放大系数特性的分析中很清楚的理解。这样对阶数足够高的振型，其振型坐标  $\eta_i$  可以通过静力求解。

为采用静力修正法，将振型叠加法求和计算公式分成两部分

$$\{\delta\}_{\text{总}} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \delta_j + \sum_{j=n+1}^m \{\phi_j\} \delta_j \quad (10.1.1)$$

其中前  $n$  项相应于低阶振型项，可认为是一般振型叠加法中实际采用的前  $n$  项，动力影响明显，而  $n+1$  项至  $m$  项为高阶振型项，其振型的反应可以通过静力法计算，即

$$\delta_j = \frac{1}{\omega_j^2} \ddot{\delta}_j, \quad j = n+1, \dots, m \quad (10.1.2)$$

其中

$$\ddot{\delta}_j = \frac{1}{m_j} \{F_j\} - \omega_j^2 \delta_j, \quad \ddot{\delta}_j = \frac{1}{m_j} \{F_j\}$$

将上式代入振型叠加法公式，得到采用静力修正法后结构位移计算的公式为

$$\{\delta\}_{\text{总}} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \delta_j + \sum_{j=n+1}^m \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.3)$$

采用上式直接进行求解的缺点是，需要计算结构所有的  $m$  阶振型，而这对自由度较大的结构体系将导致花费大量的时间计算，对大型结构甚至是不可能的。因此对  $n+1$  项至  $m$  项的计算还需要采用一定的技巧，如果对等效静力反应  $\{F_j\}$ ，满足

$$[\ddot{\delta}_j] = \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.4)$$

采用振型分解法

$$\{\delta\}_{\text{总}} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \delta_j \quad (10.1.5)$$

求解，则可得振型反应

$$\delta_j = \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.6)$$

则等效静力解为

$$\{\delta\}_{\text{总}} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.7)$$

而直接采用整体平衡方程也可以得到等效静力解为

$$\{\delta\}_{\text{总}} = [\ddot{\delta}] \{F\} \quad (10.1.8)$$

上式中  $[\ddot{\delta}]$  为总体刚度阵的逆矩阵，因此可以得到

$$\sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} = [\ddot{\delta}] \{F\} \quad (10.1.9)$$

根据上式可把  $n+1$  项至  $m$  项的求和用前  $n$  项表示如下

$$\sum_{j=n+1}^m \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} = [\ddot{\delta}] \{F\} - \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.10)$$

这样就可以得到实际计算中采用的静力修正方法计算公式

$$\{\delta\}_{\text{总}} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \delta_j + [\ddot{\delta}] \{F\} - \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \frac{1}{\omega_j^2} \{F_j\} \quad (10.1.11)$$

将  $\{ \ddot{u}_g \}$  代入上式得

$$\{ \ddot{u} \} = \sum_{j=1}^n \{ \phi_j \} \ddot{u}_{gj} \left( [ \ddot{u} ]_{\text{原}} + \sum_{j=1}^n \frac{\{ \phi_j \} \{ \phi_j \}^T}{\omega_j^2} \{ \ddot{u} \} \right) \quad (9.2.10)$$

以上静力修正方法计算公式中的第一项是通常采用前  $n$  阶振型进行分析的振型叠加法计算公式，而后一项则为反映  $n$  阶至  $\infty$  阶振型影响的静力修正项，它等于一个常量矩阵与外荷载向量的积。同时也可以看到，在静力方法中仅需计算前  $n$  阶振型，与一般振型叠加法对振型数目的要求相同。

当外荷载向量  $\{ \ddot{u}_g \}$  按一定分布形式成比例变化时，即满足

$$\{ \ddot{u}_g \} = \ddot{u}_g \{ \phi \} \quad (9.2.11)$$

其中  $\{ \phi \}$  为常数向量，表示外荷载的分布形式，而  $\ddot{u}_g$  为标量函数，表示外荷载随时间的变化，则相应的计算公式可表示为

$$\{ \ddot{u} \} = \sum_{j=1}^n \{ \phi_j \} \ddot{u}_{gj} \left( [ \ddot{u} ]_{\text{原}} + \sum_{j=1}^n \frac{\{ \phi_j \} \{ \phi_j \}^T}{\omega_j^2} \ddot{u}_g \right) \quad (9.2.12)$$

此时静力修正项的计算变得非常简便。

当必须采用很多高阶振型以反映特别的外荷载分布形式  $\{ \phi \}$ ，而仅有  $n$  个低阶振型坐标  $\{ \phi_j \}$  对荷载  $\ddot{u}_g$  的动力反应有明显的放大（动力放大系数明显大于 1）时，静力修正法将具有明显的效果和计算效率。此时采用很少几阶振型给出的动力反应再叠加上静力修正项后给出的分析结果将十分接近采用很多振型的通常振型叠加法所给出的结果。

如果时间函数  $\ddot{u}_g$  是一个离散函数的数值信号，例如数字地震记录。静力修正方法由于避免采用数值时域逐步积分方法求解高阶振型反应而可以显著节省计算时间，这是由于采用数值方法计算高阶振型方程的数值解时，时间步长必须取得非常小才能得到满足精度要求的结果。

## 9.3 振型加速度法

在采用振型叠加法分析结构动力反应问题时，为了避免忽略高阶振型带来的误差，加快收敛速度，除静力修正法外，也曾发展了称为振型加速度法的叠加方法，实际振型加速度法比静力修正法要早几十年。

振型加速度法将振型位移  $\{ u \}$  用振型加速度和速度表示为

$$\{ u \} = \sum_{j=1}^n \frac{\{ \phi_j \}}{\omega_j^2} \ddot{u}_{gj} + \sum_{j=1}^n \frac{\{ \phi_j \}}{\omega_j} \dot{u}_{gj} + \sum_{j=1}^n \{ \phi_j \} u_{gj} \quad (9.3.1)$$

其中  $\omega_j$  为第  $j$  阶振型的圆频率。上式由振型位移控制方程直接得到。将  $\{ u \}$  代入振型叠加公式可以得到结构的位移反应

$$\{\ddot{x}\} \approx \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \ddot{x}_k \approx \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \frac{\ddot{x}_k}{\omega_k} \approx \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \left[ \frac{1}{\omega_k} \ddot{x}_k + \frac{\omega_k}{\omega_k} \ddot{x}_k \right] \quad (10.10)$$

对于上式中的第一项，在静力修正法中已经证明

$$\sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \frac{\ddot{x}_k}{\omega_k} \approx \sum_{k=1}^n \frac{\{\phi\}_k \{\phi\}_k^T}{\omega_k} \ddot{x} \approx \ddot{x} \quad (10.11)$$

将式(10.11)代入式(10.10)，并将式(10.10)中第二项求和号的  $\ddot{x}_k$  改为  $\ddot{x}$ ，则得到振型加速度法的计算公式

$$\{\ddot{x}\} \approx \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \ddot{x}_k \approx \ddot{x} + \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \left[ \frac{1}{\omega_k} \ddot{x}_k + \frac{\omega_k}{\omega_k} \ddot{x}_k \right] \quad (10.12)$$

之所以称为振型加速度法是因为在振型叠加法公式中用到的是振型加速度  $\ddot{x}_k$  (包括振型速度  $\dot{x}_k$ )，由此也称经典的振型叠加法为振型位移法。

振型加速度法中，与振型位移法相同，也仅需计算前  $n$  阶振型。实际计算表明，振型加速度法比振型位移法有更快的收敛性，通常采用较少的振型就可以得到与采用很多振型的振型位移法同样精确的分析结果。一般认为在求和公式中，包含了  $\frac{1}{\omega_k}$  和  $\omega_k$  系数项，而相应于高阶振型，其系数可变得更小，因此加速了收敛的速度，使忽略高阶振型引起的误差变得更小。

通过比较静力修正法和振型加速度法的计算公式可以发现，振型加速度法中也包含了等效静力反应的计算，下面把这两种方法比较一下，静力修正法的计算公式可以改写成如下形式

$$\{\ddot{x}\} \approx \ddot{x} + \sum_{k=1}^n \left[ \{\phi\}_k \ddot{x}_k + \frac{\{\phi\}_k \ddot{x}_k}{\omega_k} \right] \approx \ddot{x} + \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \left[ \ddot{x}_k + \frac{\ddot{x}_k}{\omega_k} \right] \quad (10.13)$$

而由振型反应方程可得

$$\ddot{x}_k + \frac{\ddot{x}_k}{\omega_k} \approx \frac{1}{\omega_k} \ddot{x}_k + \frac{\omega_k}{\omega_k} \ddot{x}_k \quad (10.14)$$

代入(10.13)得

$$\{\ddot{x}\} \approx \ddot{x} + \sum_{k=1}^n \{\phi\}_k \left[ \frac{1}{\omega_k} \ddot{x}_k + \frac{\omega_k}{\omega_k} \ddot{x}_k \right] \quad (10.15)$$

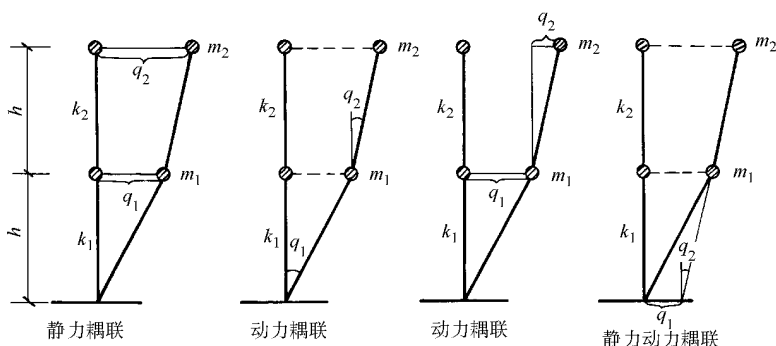
上式即为振型加速度的计算公式，可见实际上振型加速度法与静力修正法是相同的，但静力修正法可以更合理地解释加快收敛的原因。而振型加速法的解释

有时说服力不强,因为对于高阶振型而言,振型加速度  $\ddot{y}_n(t)$  可以是比振型位移  $y_n(t)$  更大的值。如果外力作用是简谐荷载,则更可以看出这一点(此时  $\ddot{y}_n(t)$  越大,  $\omega_n^2 y_n(t)$  仅从包含了  $\ddot{y}_n(t)$  或  $\ddot{y}_n(t)$  系数项来解释,显然是不充分的,但如果参照静力修正法的推导过程,则可以容易理解振型加速度法比振型位移法收敛快的原因。因为在振型加速度法的推导中,公式的第一项  $\ddot{y}_n(t)$  是考虑了所有振型的结果,这才是加速收敛的根本原因。

静力修正法和振型加速度法除数值计算引起的误差外,给出的结果应是相同的,实际应用中采用哪一种方法取决于哪一种方法更容易实现。比较而言,静力修正法更方便一些,因为在它的计算中仅涉及到相对简单的振型位移计算,而振型加速度法中则要涉及振型加速度和速度,但对计算机而言,这种差异导致的工作量又是可以忽略的。

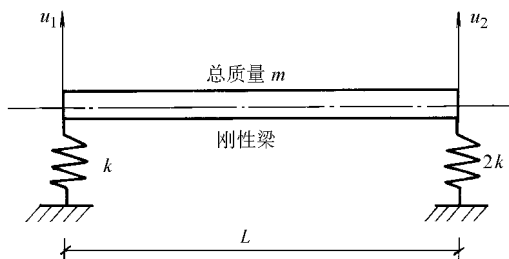
## 习题

习题 9-1 试证明在选取题 9-1 图所示几种广义坐标的情况下结构的耦合性。



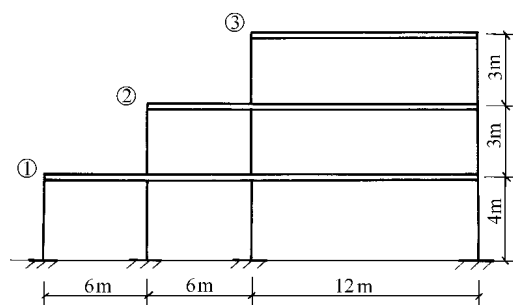
题 9-1 图

习题 9-2 如图 9-2 所示,一总质量为  $m$  的刚性梁两端由弹簧支撑,梁的质量均匀分布、两弹簧的刚度分别为  $k$  和  $2k$ 。定义的两个自由度  $u_1$  和  $u_2$  示于图中,建立结构体系的运动方程,并计算结构的振型和自振频率。

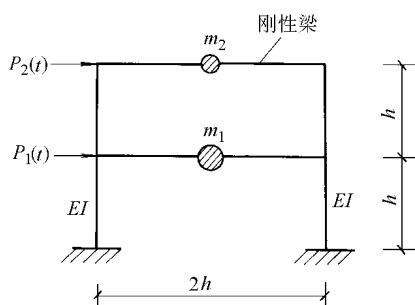


题 9-2 图

题 10-1 如图 10-1 所示一框架结构, 各楼层单位长度的质量为  $m$  (吨/米), 柱截面的抗弯刚度均为  $EI$  (吨·米<sup>2</sup>/秒<sup>2</sup>), 其余参数示于图中。假设楼板为刚性, 计算结构的自振频率和振型; 如果初始时刻各楼层的位移为  $y_0$ , 初始速度均为  $v_0$ , 用振型将初始速度向量  $\{v_0\}$  按  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$  展开。



题 10-1 图

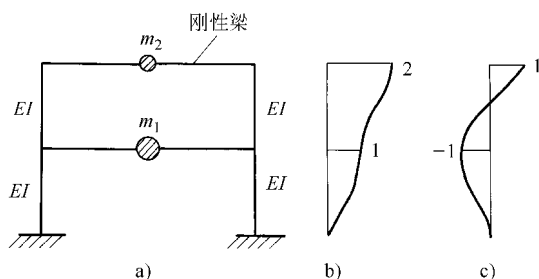


题 10-2 图

题 10-2 如图 10-2 所示的二层结构, 柱截面抗弯刚度均为  $EI$ , 采用集中质量法近似, 将结构的质量集中于刚性梁的中部, 分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 建立结构在外荷载  $P_1(t)$  和  $P_2(t)$  作用下的强迫运动方程。

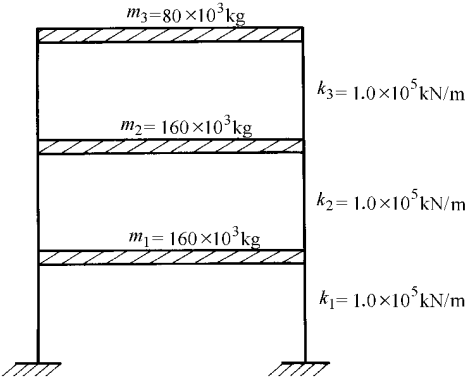
题 10-3 对题 10-2 给出的二层结构, 设  $y_0$  和  $v_0$  为  $\{y_0\}$  和  $\{v_0\}$ , 确定结构的自振频率和振型 (用  $\phi_1$  和  $\phi_2$  表示); (圆) 验证振型的正交性; (獭) 按正交标准化 (归一化) 方法将振型标准化; (源) 比较未标准化和标准化的振型质量和振型刚度, 并用两种振型质量和振型刚度计算结构的自振频率。

题 10-4 如果题 10-2 中二层结构的初始速度为  $v_0$  而初始位移如图 10-4 所示, 突然释放使结构自由振动, 忽略结构的阻尼, 确定结构的运动。



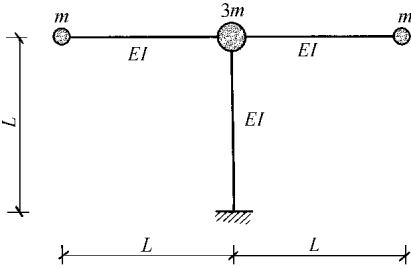
题 10-4 图

题 10-5 如图 10-5 所示三层剪切型结构, 各楼层集中质量和层间刚度示于图中, 忽略柱的质量, ① 采用  $\phi_1$  和  $\phi_2$  计算结构的自振频率和振型, ② 采用  $\phi_1$  和  $\phi_2$  阻尼, 用结构的前两阶振型阻尼比确定结构的阻尼矩阵 (设  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  为  $\phi_1$  和  $\phi_2$  的阻尼比)。



题 源图

源愿 如题 源愿图由一根柱和二根梁构件组成的结构，柱的下端固接于地面，梁和柱截面抗弯刚度均为  $EI$ ，长度为  $L$ 。采用集中质量法近似，将各构件的质量分别集中于相应构件的两端，分别为  $m$ 、 $3m$  和  $m$ ，忽略构件的轴向变形，建立结构的刚度矩阵和质量矩阵，如果地面发生一水平向单位加速度脉冲的作用，即  $\ddot{x}_g(t) = \delta(t)$ ，求结构的动力反应。



题 源愿图

## 第 缘章 动力反应数值分析方法

### 缘章 数值算法中的基本问题

第 猿章介绍了两种在任意荷载作用下结构动力反应分析方法：时域分析方法——~~阅读者通~~积分法和频域分析方法——~~云~~频域变换方法。当外荷载  $q(t)$  为解析函数时，采用这两种方法一般可以得到体系动力反应的解析解，当荷载变化复杂时无法得到解析解，但通过数值计算可以得到动力反应的数值解。这两种分析方法的特点是均基于叠加原理，要求结构体系是线弹性的，当外荷载较大时，结构反应可能进入弹塑性，或结构位移较大时，结构可能进入几何非线性，这时叠加原理将不再适用。此时可以采用时域逐步积分法（~~杂~~时域逐步积分法）求解运动微分方程。目前已发展了一系列结构动力反应的时域直接数值计算方法，一般称为时域逐步积分法，例如：

- (员) 分段解析法。
- (圆) 中心差分法。
- (猿) 平均常加速度法。
- (源) 线性加速度法。
- (缘) ~~晕~~线性加速度  $\beta$  法。
- (远) ~~宰~~线性加速度  $\theta$  法。

基于叠加原理的时域和频域分析方法（~~阅读者通~~积分法，~~云~~频域变换法），假设结构在全部反应过程中都是线性的，即结构的应力  $\sigma$  应变  $\epsilon$ ，或力（弯矩） $M$  位移（转角） $\theta$  关系曲线是一条直线；而时域逐步积分法，只假设结构本构关系在一个微小的时间步距内是线性的，相当于用分段直线来逼近实际的曲线。时域逐步积分法是结构动力问题中一个得到广泛研究的课题。

时域逐步积分法研究的是离散时间点上的值，例如位移  $u_i$ ，速度  $\dot{u}_i$ ，加速度  $\ddot{u}_i$ ， $i=0, 1, 2, \dots$ 。而这种离散化正符合计算机存储的特点。一般情况下采用等步长离散， $\Delta t$  为时间离散步长。与运动变量的离散化相对应，体系的运动微分方程也不一定要求在全局时间上都满足，而仅要求在离散时间点上满足。

一种逐步积分法的优劣，主要由以下四个方面判断：

- (员) 收敛性：当时间离散步长  $\Delta t \rightarrow 0$  时，数值解是否收敛于精确解。
- (圆) 计算精度：截断误差与时间步长  $\Delta t$  的关系，若误差  $\propto (\Delta t)^p$ ，则称

方法具有 1 阶精度。

(3) 稳定性：随计算时间步数  $n$  的增大，数值解是否变得无穷大（即远离精确解）。

(4) 计算效率：所花费计算时间的多少。

一个好的数值分析方法必须是收敛的、有足够的精度（例如 1 阶精度，满足工程要求）、良好的稳定性以及较高的计算效率。在逐步积分法的发展过程中，也的确发展了一些具有高精度但很费时的方法，因而得不到应用和推广。

按是否需要联立求解耦联方程组，逐步积分法又可分为两大类：

(1) 隐式方法：逐步积分计算公式是耦联的方程组，需联立求解。隐式方法的计算工作量大，增加的工作量至少与自由度的平方成正比，例如 4 阶隐式法、辛普森法。

(2) 显式方法：逐步积分计算公式是解耦的方程组，无需联立求解。显式方法的计算工作量大，增加的工作量与自由度成线性关系，如中心差分方法。

下面首先介绍分段解析算法，然后再重点介绍两种常用的时域逐步积分法——中心差分法和 4 阶隐式法，同时也介绍一下辛普森法，最后针对结构非线性反应问题，结合中心差分法和 4 阶隐式法的计算公式，介绍结构非线性反应分析的迭代方法。平均加速度法可以作为 4 阶隐式法的一个特例，而线性加速度法可以包含在辛普森法之中。

时域逐步积分法即可用于单自由度体系也可以用于多自由度体系的动力反应分析，为表述简洁起见，本章主要以单自由度体系为对象，推导不同时域逐步积分法的计算公式和非线性反应分析方法，但也给出了多自由度体系的相应计算格式。

## 5.1 分段解析法

在分段解析法中，对外荷载  $P(t)$  进行离散化处理，相当于对连续函数的采样。在采样点之间的荷载值采用线性内插取值，分段解析法对外荷载的离散化过程如图 5-1 所示，图中离散时间点的荷载为

$$P_i, P_{i+1}, \dots, P_n$$

(5-1)

分段解析法的误差仅来自对外荷载的假设，假设在  $t_i \leq t < t_{i+1}$  时段内

$$P(\tau) = P_i + \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t_i} \tau \quad (5-2)$$

$$\alpha = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t_i} \quad (5-3)$$

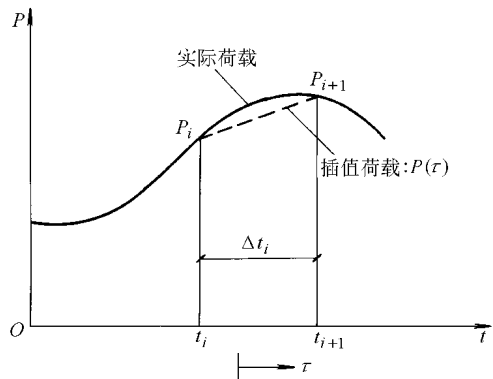


图 5-1 分段解析法对外荷载的离散

其中，局部时间坐标  $\tau$  示于图 2.10 中。如果实际荷载  $p(t)$  采用了数值采样，即为离散的数值记录，则以上定义的荷载可以认为是“精确”的。

分段解析法一般适用于单自由度体系动力反应分析，对于多自由度体系，有时可以采用等效方法在满足一定近似的条件下将多自由度体系化为单自由度问题进行分析，这时也可以采用分段解析法完成体系的动力反应分析。在时间段  $[t_0, t_1]$  内，假设结构是线性的，单自由度体系的运动方程为

$$m \ddot{x}(\tau) + c \dot{x}(\tau) + kx(\tau) = p(\tau) \quad (2.10)$$

初值条件为

$$x(\tau)|_{\tau=t_0} = x_0, \quad \dot{x}(\tau)|_{\tau=t_0} = \dot{x}_0 \quad (2.11)$$

采用与第 2 章类似的解法，可求得运动方程的特解和通解。

运动方程式 (2.10) 的特解为

$$x_p(\tau) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi$$

通解为

$$x(\tau) = x_p(\tau) + C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}$$

将全解

$$x(\tau) = x_p(\tau) + C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}$$

代入边界条件 (2.11) 确定系数  $C_1, C_2$ ，最后得

$$x(\tau) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi + C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}$$

其中

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{\omega_d} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi - \frac{\lambda_1}{\omega_d} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi \right)$$

当  $\tau \rightarrow t_0$  时，由式 (2.12) 得到

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad (2.13)$$

而系数  $C_1, C_2$  等于

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{\omega_d} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi - \frac{\lambda_1}{\omega_d} \int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\omega_{\text{越}}}{\omega_{\text{灶}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \left( \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right) \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \\
& \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \\
& \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \\
& \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \\
& \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right] \left[ \frac{\omega_{\text{灶}}}{\omega_{\text{越}}} \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}} \right]
\end{aligned}$$

其中,  $\omega_{\text{越}} = \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}}$ ,  $\omega_{\text{灶}} = \sqrt{\frac{\zeta_{\text{圆}}}{\zeta_{\text{圆}}}}$ 。可见系数  $\omega_{\text{越}}$ 、 $\omega_{\text{灶}}$  是结构刚度、质量、阻尼比  $\zeta$  和时间步长  $\Delta t$  的函数。式 (5-10) 给出了根据  $t=0$  时刻运动及外荷载计算  $t=\Delta t$  时刻运动的递推公式。如果结构是线性的, 并采用等时间步长, 则系数  $\omega_{\text{越}}$ 、 $\omega_{\text{灶}}$  均为常数, 分段解析法的计算效率将非常高, 而且是精确解 (在荷载  $P(t)$  离散采样的定义下); 但如果在计算的不同时间段采用了不相等的时间步长, 则系数  $\omega_{\text{越}}$ 、 $\omega_{\text{灶}}$  对应于不同的时间步长均为变量, 计算效率会大为降低。

分段解析法仅对外荷载进行了离散化处理, 但对运动方程是严格满足的, 体系的运动在连续时间轴上均满足运动微分方程。而一般的时域逐步积分法则进一步放松要求, 不仅对外荷载进行离散化处理, 对体系的运动也进行离散化, 相应地, 运动方程不要求在全部的时间轴上满足, 而仅在离散的时间点上满足, 这相当于对体系的运动放松了约束。

## 5.2 中心差分法

中心差分方法基于用有限差分代替位移对时间的求导 (即速度和加速度)。如果采用等时间步长,  $\Delta t$  则速度和加速度的中心差分近似为

$$\begin{aligned}
\dot{u} & \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad (5-11) \\
\ddot{u} & \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (5-12)
\end{aligned}$$

而离散时间点的运动为

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \quad (5-13)$$

体系的运动方程为

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t) \quad (5-14)$$

将速度和加速度的差分近似公式 (5-11) 和式 (5-12) 代入由式 (5-14) 给出

的在  $t_{n+1}$  时刻的运动方程可以得到

$$\frac{1}{\Delta t^2} \left( \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \dot{u}_n + \frac{3}{2} \dot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} \quad (1.1.1)$$

在式 (1.1.1) 中, 假设  $\ddot{u}_n$  和  $\dot{u}_n$  是已知的, 即  $t_n$  及  $t_n$  以前时刻的运动已知, 则可以把已知项移到方程的右边, 整理得

$$\left( \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \dot{u}_n + \frac{3}{2} \dot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{2} \ddot{u}_n + \frac{3}{2} \ddot{u}_{n+1} \quad (1.1.2)$$

由式 (1.1.2) 就可以根据  $t_n$  及  $t_n$  以前时刻的运动, 求得  $t_{n+1}$  时刻的运动, 如果需要, 利用式 (1.1.1) 和式 (1.1.2) 可以求得体系的速度和加速度值。式 (1.1.2) 即为结构动力反应分析的中心差分法逐步计算公式。

对于多自由度体系, 中心差分法逐步计算公式为

$$\left( \frac{1}{2} [M] \ddot{u}_n + \frac{1}{2} [M] \ddot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{2} \dot{u}_n + \frac{3}{2} \dot{u}_{n+1} \right) + \frac{1}{2} [K] \ddot{u}_n + \frac{3}{2} [K] \ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{2} [K] \ddot{u}_n + \frac{3}{2} [K] \ddot{u}_{n+1} \quad (1.1.3)$$

式中,  $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$  分别为体系的质量、阻尼和刚度矩阵;  $\{\ddot{u}_n\}$  和  $\{\ddot{u}_{n+1}\}$  分别为  $t_n$  时刻体系的位移和外荷载向量,  $\{\dot{u}_n\}$  和  $\{\dot{u}_{n+1}\}$  分别为  $t_n$  时刻体系的速度和外荷载向量。

时域逐步积分方法分为单步法和多步法 (两步法及两步以上方法), 单步法在计算某一时刻的运动时, 仅需已知前一时刻的运动, 而两步法则需要前两个时刻的运动。从式 (1.1.2) 可以看到, 中心差分法在计算  $t_{n+1}$  时刻的运动  $\ddot{u}_{n+1}$  时, 需要已知  $t_n$  和  $t_n$  两个时刻的运动  $\ddot{u}_n$  和  $\dot{u}_n$ , 因此, 中心差分法属于两步法。用两步法进行计算时存在起步问题, 因为仅根据已知的初始位移和速度, 并不能自动进行运算, 而必需给出两个相邻时刻的位移值, 方可开始逐步计算。对于地震作用下结构的反应问题和一般的零初始条件下的动力问题, 可以采用式 (1.1.2) 直接进行逐步计算, 因为总可以假设初始的两个时间点 (一般取  $t_0$  和  $t_1$ ) 的位移等于零 (即  $\ddot{u}_0 = \ddot{u}_1 = 0$ )。但是, 当对应于非零初始条件或零时刻外荷载很大时, 需要进行一定的分析, 建立两个起步时刻 (即  $t_0$  和  $t_1$ ) 的位移值, 这即是逐步积分的起步问题。下面介绍一种中心差分逐步计算方法的起步处理方法。

假设给定的初始条件为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_0 &= \ddot{u}_1 \\ \dot{u}_0 &= \dot{u}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

下面根据初始条件 (1.1.4) 确定  $\ddot{u}_0$  在零时刻速度和加速度的中心差公式为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} \\ & \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

由式 (5.10) 消去  $z_i$  得

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} \quad (5.11)$$

而零时刻的加速度值  $\ddot{z}_0$  可用  $t = \Delta t$  时的运动方程

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t}$$

确定, 即

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t} \quad (5.12)$$

这样就可以根据初始条件  $z_0$ ,  $\dot{z}_0$  和初始荷载  $P_0$ , 由式 (5.11) 和式 (5.12) 定出  $z_1$  应取的值。

下面给出采用中心差分法分析时的具体计算步骤:

(1) 基本数据准备和初始条件计算

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}$$

(2) 计算等效刚度和中心差分计算公式 (5.11) 中的系数

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t}$$

(3) 根据  $\ddot{z}_0$  及  $\ddot{z}_0$  以前时刻的运动, 计算  $t = \Delta t$  时刻的运动

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t}$$

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t}$$

如果需要, 可计算

$$\ddot{z}_0 = \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} - \frac{z_0 - z_{-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta t}{T} \ll 1 \quad (1.10)$$

(源) 下一步计算中用  $\frac{\Delta t}{T}$  代替  $\Delta t$  对于线弹性体系, 重复第 猿计算步骤, 对于非线性弹性体系, 重复第 圆和第 猿计算步骤。

以上给出的中心差分逐步计算公式具有 圆阶精度, 即误差  $\varepsilon \propto (\Delta t)^2$ ; 并且是有条件稳定的, 稳定条件为

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} \quad (1.11)$$

式中,  $T$  为结构的自振周期, 对于多自由度体系则为结构的最小自振周期。

稳定性的含义是: 当离散时间步长  $\Delta t$  满足稳定性条件时, 数值计算得到的运动  $u(t)$  为有限值; 当不满足稳定性条件时, 随着计算时间步数的增加, 逐步计算给出的运动趋向发散, 即, 当  $\Delta t > \frac{T}{\pi}$  时,  $u(t) \rightarrow \infty$ 。图 1.10 给出数值计算稳定性示意图, 图中虚线为满足稳定性条件时的结果, 而实线即为当时时间步长不满足稳定性条件时的数值计算结果。

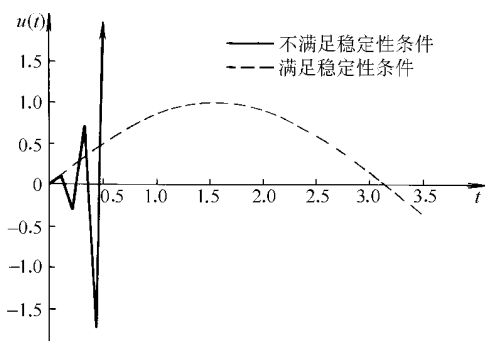


图 1.10 数值计算稳定性示意图

下面简单介绍一下中心差分法稳定性条件的推导。为简单起见, 设体系为无阻尼 系统。由于算法的稳定性与外荷载无关, 令外荷载  $P(t) = 0$ , 则中心差分法的递推公式 (1.9) 可以写成如下形式

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2} \omega^2 u_i \quad (1.12)$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.13)$$

令离散方程式 (1.12) 的解为

$$u_i = \lambda^i \quad (1.14)$$

$\lambda$  为待定常数, 式 (1.14) 代入运动方程 (1.12) 得

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \frac{\Delta t^2}{2} \omega^2 \lambda = 0 \quad (1.15)$$

求解式 (1.15) 可以得到

$$\lambda = 1 \pm \frac{\Delta t}{T} \sqrt{1 - \frac{\Delta t^2}{T^2}} \quad (1.16)$$

从式 (5-10) 可直观看出, 为在时域逐步计算过程中保证 稳定 (即 稳定) 时, 必须有界, 要求 分析式 (5-10) 可以发现, 仅当  $\Omega \leq \omega$  时, 其余情况均有 即稳定性条件要求

$$\Omega \leq \omega \quad (5-11)$$

将式 (5-10) 代入式 (5-11) 得

$$\Delta t \leq \frac{\omega}{\pi}$$

上式即为中心差分逐步计算方法的稳定性条件式 (5-12)。采用同样的分析步骤, 也可以得到有阻尼体系逐步计算的稳定性条件, 对于中心差分方法, 有阻尼和无阻尼体系的稳定性条件是相同的。

一般情况下, 逐步积分法的稳定性可以通过对逐步积分公式中传递矩阵特征值的分析获得。将逐步积分格式写成如下形式

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5-13)$$

则稳定性条件为

$$\rho([A]) \leq 1 \quad (5-14)$$

其中  $\rho$  为传递矩阵  $[A]$  的谱半径, 即为传递矩阵的最大特征值。

分析中心差分法计算公式 (5-10) 可以发现, 对于多自由度体系, 当体系的阻尼矩阵和质量矩阵为对角阵时, 多自由度体系的中心差分计算公式成为解耦的方法, 即为显式计算方法, 在每一步计算中不要求解联立方程组, 计算效率很高; 如果体系的阻尼矩阵或质量矩阵为非对角时, 计算方法成为隐式方法。由于显式方法可以获得更高的计算效率, 因此受到重视, 目前对显式的中心差分逐步计算方法的研究取得了进展, 已发展了几种有阻尼体系动力反应分析的显式差分计算格式, 可以在近几年的文献中找到。但普遍存在的问题是稳定条件比中心差分法的稳定条件  $\Delta t \leq \frac{\omega}{\pi}$  更严格。

虽然中心差分逐步计算方法是有条件稳定的, 但由于其具有计算效率高的优点, 在很多情况下得到广泛的应用。

## 5.2 增量法

增量法同样将时间离散化, 运动方程仅要求在离散的时间点上满足。假设在  $t_n$  时刻的运动  $\dot{u}_n, u_n$  均已求得, 然后计算  $t_{n+1}$  时刻的运动。与中心差分法不同的是, 它不是用差分对  $t_n$  时刻的运动方程展开, 得到外推计算  $t_{n+1}$  的公式, 而是通过对  $t_n$  至  $t_{n+1}$  时段内加速度变化规律的假设, 以  $t_n$  时刻的运动量为初始值, 通过积分方法得到计算  $t_{n+1}$  时刻的运动公式。

离散时间点  $t_i$  和  $t_{i+1}$  时刻的加速度值为  $\ddot{u}_i$  和  $\ddot{u}_{i+1}$ ， $\beta$  法假设在  $t_i$  和  $t_{i+1}$  之间的加速度值是介于  $\ddot{u}_i$  和  $\ddot{u}_{i+1}$  之间的某一常量，记为  $\ddot{u}$ ，如图 10-1 所示。

根据  $\beta$  法的基本假设，有

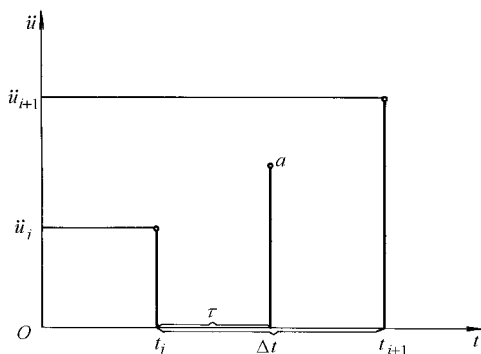


图 10-1  $\beta$  法离散时间点及加速度假设

$$\ddot{u} = \gamma \ddot{u}_i + (1 - \gamma) \ddot{u}_{i+1} \quad (10-1)$$

为得到稳定和高精度的算法， $\beta$  也用另一控制参数  $\beta$  表示，即

$$\ddot{u} = \beta \ddot{u}_i + (1 - \beta) \ddot{u}_{i+1} \quad (10-2)$$

通过在  $t_i$  到  $t_{i+1}$  时间段上对加速度  $\ddot{u}$  积分，可得  $t_{i+1}$  时刻的速度和位移

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \ddot{u} \Delta t \quad (10-3)$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u} \Delta t^2 \quad (10-4)$$

分别将式 (10-1) 代入式 (10-3) 和将式 (10-2) 代入式 (10-4) 得

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + [\gamma \ddot{u}_i + (1 - \gamma) \ddot{u}_{i+1}] \Delta t \\ u_{i+1} &= u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} [\gamma \ddot{u}_i + (1 - \gamma) \ddot{u}_{i+1}] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (10-5)$$

式 (10-5) 是  $\beta$  法的两个基本递推公式，由式 (10-5) 可解得  $t_{i+1}$  时刻的速度和加速度的计算公式

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t} (\dot{u}_i - \ddot{u}_i \Delta t) + \frac{1}{\beta} \ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\dot{u}_i - \ddot{u}_i \Delta t) + \frac{\gamma}{\beta} \ddot{u}_{i+1} \Delta t + u_i \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

由式 (10-6) 给出的运动满足  $t_{i+1}$  时刻的运动控制方程

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = F_{i+1} \quad (10-7)$$

将式 (10-6) 代入式 (10-7) 得  $t_{i+1}$  时刻位移  $u_{i+1}$  的计算公式

$$u_{i+1} = \frac{F_{i+1}}{k} \quad (10-8)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \\ \hat{v}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \\ \hat{a}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \end{aligned}$$

可见  $\hat{u}_{i+1}$  是由  $t_i$  时刻的位移、速度、加速度和  $t_{i+1}$  时刻的外荷载决定的，是已知的和预先已求得的，则用式 (5-10) 可求得  $t_{i+1}$  时刻的位移  $\hat{u}_{i+1}$ ，再利用式 (5-11) 可求得  $t_{i+1}$  时刻的速度  $\hat{v}_{i+1}$  和加速度  $\hat{a}_{i+1}$ ，循环以上步骤，得到所有离散时间点上的位移、速度和加速度。

对于多自由度体系，Newmark- $\beta$  法的逐步积分公式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \\ \hat{v}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \\ \hat{a}_{i+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{u}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{v}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{a}_i \right] \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

而等效刚度阵和等效荷载向量分别为

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{K}_0 + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{K}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{K}_2 + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{K}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{K}_2 \right] \\ \hat{F} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ \frac{\gamma}{\beta} \hat{F}_0 + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{F}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{F}_2 + \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{F}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{F}_2 \right] \end{aligned}$$

Newmark- $\beta$  法的求解过程如下：

(1) 基本数据准备和初始条件计算：

(2) 选择时间步长  $\Delta t$ ，参数  $\beta$  和  $\gamma$ ，并计算积分常数

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; \quad \hat{K}_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; \quad \hat{K}_2 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}; \quad \hat{K}_3 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$

$$\hat{F}_0 = \frac{\gamma}{\beta} \hat{F}_0; \quad \hat{F}_1 = \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{F}_1; \quad \hat{F}_2 = \frac{\Delta t^2}{2} \hat{F}_2; \quad \hat{F}_3 = \frac{\gamma}{\beta} \Delta t \hat{F}_1$$

(3) 确定运动的初始值  $\hat{u}_0$ 、 $\hat{v}_0$  和  $\hat{a}_0$

(圆) 形成刚度矩阵 [ 运], 质量矩阵 [ 酝] 和阻尼矩阵 [ 悦]

(猿) 形成等效刚度矩阵 [ 运], 即

$$[ 运]_{越} = [ 运]_{垣} [ 酝]_{垣}^{-1} [ 悦]_{垣}$$

(源) 计算 贼时刻的等效载荷

$$\{ 孕\}_{越} = [ 运]_{垣}^{-1} [ 酝]_{垣}^{-1} [ 悦]_{垣} \{ 孕\}_{垣}$$

$$[ 悦]_{垣} \{ 孕\}_{垣} = [ 悦]_{垣} \{ 孕\}_{垣}$$

(缘) 求解 贼时刻的位移, 即

$$[ 运]_{越} \{ 孕\}_{越} = [ 酝]_{越} \ddot{u}$$

(远) 计算 贼时刻的加速度和速度

$$\{ 孕\}_{越} = [ 酝]_{越} \ddot{u} + [ 运]_{越} u$$

$$\{ 孕\}_{越} = [ 酝]_{越} \ddot{u} + [ 运]_{越} u$$

循环第 (源) 至 (远) 计算步骤, 可以得到线弹性体系在任一时刻的动力反应, 对于非线性问题, 则应循环第 (圆) 至 (远) 步完成计算。

在 晕葬皂葬原孕 法中, 控制参数  $\beta$  和  $\gamma$  的取值影响着算法的精度和稳定性, 可以证明, 只有当  $\gamma$  取 员圆时, 这个方法才具有二阶精度, 因此一般均取  $\gamma$  越 员圆, 圆  $\leq \beta \leq$  员源

晕葬皂葬原孕 法的稳定性条件为

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi \sqrt{\gamma}} \frac{1}{\omega} \quad (缘)$$

当  $\gamma$  越 员圆,  $\beta$  越 员源时, 稳定性条件为  $\Delta t \leq \frac{1}{\pi \omega}$ , 即算法成为无条件稳定的。实际上也有取  $\gamma$  原圆, 越 员的参数组合以形成无条件稳定算法, 例如, 当  $\beta$  越 员远时, 对加速度的假设等价于线性加速度法, 此时为保证方法为无条件稳定的, 而取  $\gamma$  越 员猿

表 缘 参数取不同值时 晕葬皂葬原孕 法所对应的逐步积分法

| 参数取值                        | 对应的逐步积分法 | 稳定性条件                                       |
|-----------------------------|----------|---------------------------------------------|
| $\gamma$ 越 员圆, $\beta$ 越 员源 | 平均常加速度法  | 无条件稳定                                       |
| $\gamma$ 越 员圆, $\beta$ 越 员远 | 线性加速度法   | $\Delta t \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi \omega}$ |
| $\gamma$ 越 员圆, $\beta$ 越 圆  | 中心差分法    | $\Delta t \leq \frac{1}{\pi \omega}$        |

增量法为单步法，即体系每一时刻运动的计算仅与上一时刻的运动有关，不需要额外处理计算的“起步”问题，属于自起步方法。

在时域逐步积分计算方法研究中，发展了一批计算方法，例如，平均常加速度方法、线性加速度方法等。

增量法中控制参数  $\beta$  取不同的值，可以得到相应的计算方法。表 5-1 给出了参数  $\beta$  取不同值时

增量法所对应的逐步积分法，分别为平均常加速度法、线性加速度法和中心差分法。图 5-2 给出平均常加速度法和线性加速度法在

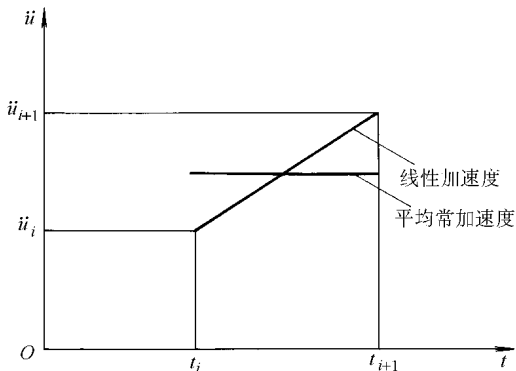


图 5-2 线性加速度法和平均常加速度法的加速度变化规律

## 5.2 辛普森法

辛普森法是在线性加速度法的基础上发展的一种数值积分方法。图 5-3 给出

辛普森法的基本思路 and 实现方法，这一方法假设加速度在时间段  $[t_i, t_{i+1}]$  内线性变化，首先采用线性加速度法计算体系在  $t_{i+1}$  时刻的运动，其中参数  $\theta \geq 1$ ，然后采用内插计算公式得到体系在  $t_{i+1}$  时刻的运动。由于内插计算有助于提高算法的稳定性，因此当  $\theta$  足够大时，将给出稳定性良好的积分方法，可以证明当  $\theta$  足够大时，辛普森法是无条件稳定的。

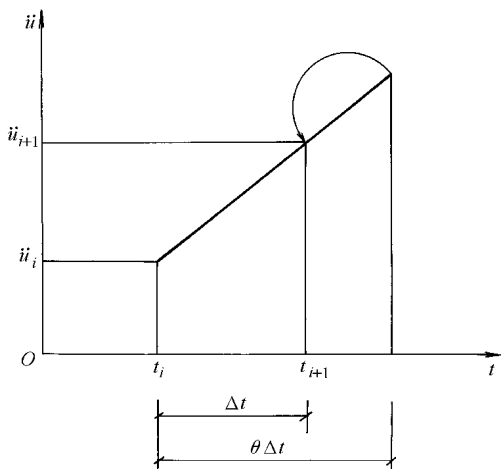


图 5-3 辛普森法原理示意图

下面推导辛普森法的逐步

积分公式。根据线性加速度假设，加速度在区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上可表示为

$$a(\tau) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{\theta \Delta t} \tau \quad (5-2)$$

其中  $\tau$  为局部时间坐标，坐标原点位于  $t_i$

对式 (5-2) 进行积分，得到速度和位移为

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \frac{\tau}{\text{圆} \Delta \text{贼}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau)] \quad (\text{缘豫})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \frac{\tau}{\text{圆} \Delta \text{贼}} \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \frac{\tau}{\text{远} \Delta \text{贼}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\tau)] \quad (\text{缘豫})$$

当  $\tau$  越  $\theta \Delta \text{贼}$  时, 由式 (缘豫) 和式 (缘豫) 得到

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \frac{\theta \Delta \text{贼}}{\text{圆}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})] \quad (\text{缘豫})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \frac{(\theta \Delta \text{贼})^2}{\text{远}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})] \quad (\text{缘豫})$$

由式 (缘豫) 和式 (缘豫) 可解得用  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  表示的  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  和  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$ , 即

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \frac{\text{远}}{(\theta \Delta \text{贼})^2} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})] \text{ 原 } \frac{\text{远}}{\theta \Delta \text{贼}} \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \quad (\text{缘豫})$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \frac{\text{猿}}{\theta \Delta \text{贼}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})] \text{ 原 } \frac{\theta \Delta \text{贼}}{\text{圆}} \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \quad (\text{缘豫})$$

在  $\theta \Delta \text{贼}$  时刻, 体系的运动应满足运动方程

$$\text{皂} \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \quad (\text{缘豫})$$

其中外荷载向量  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  可用线性外推获得

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})] \quad (\text{缘豫})$$

式 (缘豫)、式 (缘豫) 和式 (缘豫) 代入式 (缘豫), 得到计算  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  的方程

$$\hat{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \hat{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \quad (\text{缘豫})$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } & \frac{\text{远}}{(\theta \Delta \text{贼})^2} \text{皂} \frac{\text{猿}}{\theta \Delta \text{贼}} \text{皂} \\ & \hat{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \text{ 越 } \hat{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼}) \left[ \frac{\text{远}}{(\theta \Delta \text{贼})^2} \text{皂} \frac{\text{远}}{\theta \Delta \text{贼}} \text{皂} \right. \\ & \left. \left( \frac{\text{猿}}{\theta \Delta \text{贼}} \text{皂} \frac{\theta \Delta \text{贼}}{\text{圆}} \text{皂} \right) \right] \end{aligned}$$

由式 (缘豫) 得到  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  代入式 (缘豫) 求得  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$ , 再把  $\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\theta \Delta \text{贼})$  代入式 (缘豫), 并取  $\tau$  越  $\Delta \text{贼}$  得到

$$\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\Delta \text{贼}) \text{ 越 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\Delta \text{贼}) \frac{\text{远}}{\theta \Delta \text{贼}} [\dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\Delta \text{贼}) \Delta \text{贼} \text{ 原 } \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\Delta \text{贼})] \text{ 原 } \frac{\text{远}}{\theta \Delta \text{贼}} \dot{\mathbf{z}}_{\text{圆}}(\Delta \text{贼}) \quad (\text{缘豫})$$

令式 (5-10) 和式 (5-11) 中的  $\theta$  趋近于 0 并取  $\tau$  趋近于  $\Delta t$  可得到  $t_{n+1}$  时刻的速度和位移为

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}) \quad (5-12)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{u}_n + \dot{u}_{n+1}) \quad (5-13)$$

式 (5-12) 至式 (5-13) 构成了单自由度体系动力反应分析的 辛普森法 计算公式。

对于多自由度体系，辛普森法的逐步积分公式为

$$\left. \begin{aligned} & [\ddot{u}]_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left( \dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n \right) \\ & \left\{ \ddot{u}_{n+1} \right\} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ \dot{u}_{n+1} \right\} - \left\{ \dot{u}_n \right\} \right) \\ & \left\{ \ddot{u}_{n+1} \right\} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ \dot{u}_{n+1} \right\} - \left\{ \dot{u}_n \right\} \right) \\ & \left\{ \ddot{u}_{n+1} \right\} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ \dot{u}_{n+1} \right\} - \left\{ \dot{u}_n \right\} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

其中等效刚度矩阵和等效荷载向量分别为

$$\begin{aligned} & [K]_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} [K]_{n+1} \\ & \left\{ F \right\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ F \right\}_{n+1} - \left\{ F \right\}_n \right) \\ & [K]_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ F \right\}_{n+1} - \left\{ F \right\}_n \right) \\ & [F]_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left( \left\{ F \right\}_{n+1} - \left\{ F \right\}_n \right) \end{aligned}$$

当  $\theta$  趋近于 0 时，辛普森法即退化为线性加速度法。在时域逐步积分法发展的早期，辛普森法曾得到广泛应用。粗略分析，辛普森法采用了线性加速度假设比无条件稳定的 平均加速度法 (即平均加速度法) 更精确，而且也是无条件稳定的，应是一种优秀的逐步积分法。但随着对数值算法特性研究的深入，发现辛普森法存在一系列弊病，这可以从图 5-10 和图 5-11 给出的计算结果看到。

图 5-10 和图 5-11 给出了不同数值积分方法计算精度的比较及算法特性的分析结果。目前，平均加速度法，特别是  $\beta$  趋近于 0 格式得到广泛应用。此外，中心差分法虽然稳定性差一些，但因其简单、高效的特点也得到一系列的应用，对于一些特殊的问题，计算精度的要求有时与稳定性条件的要求相近。

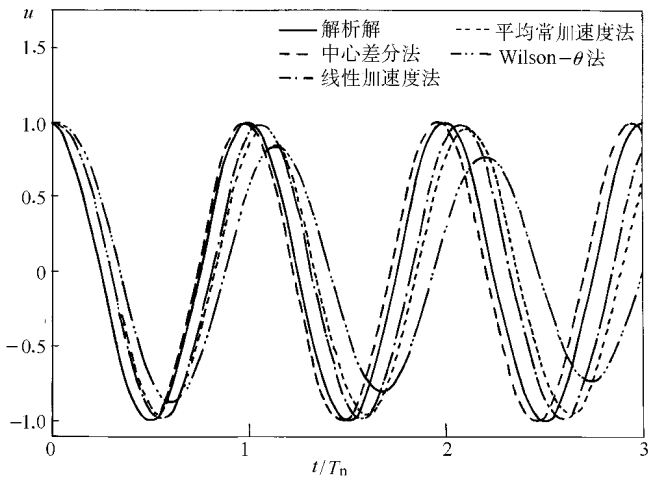


图 9-1 不同方法的计算精度 (单自由度体系无阻尼自由振动,  $\Delta t/T_n$  越小越好)

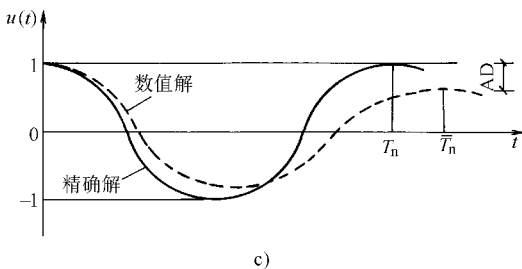
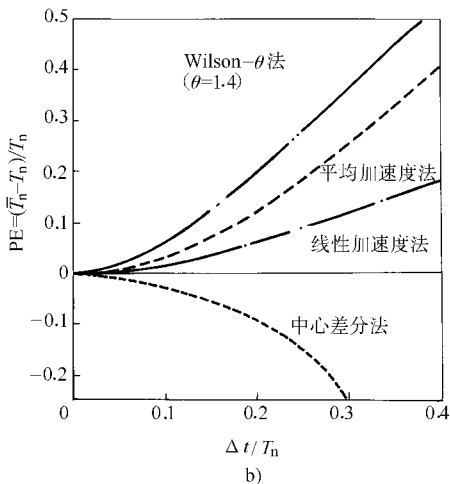
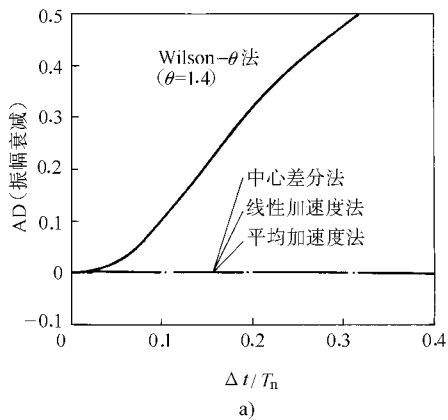


图 9-2 不同方法的振幅衰减 (a) 和周期延长 (b) 与  $\Delta t/T_n$  的关系 (c) (单自由度无阻尼自由振动)

## 结构非线性反应计算

在强荷载（例如强地震）作用下，结构可能发生较大的变形，构件将出现塑性变形，结构反应进入弹塑性，主要表现是结构的弹性恢复力，此时也称为抗力，与结构的位移或变形不再保持为线性关系（如图 2.2.1 所示），即

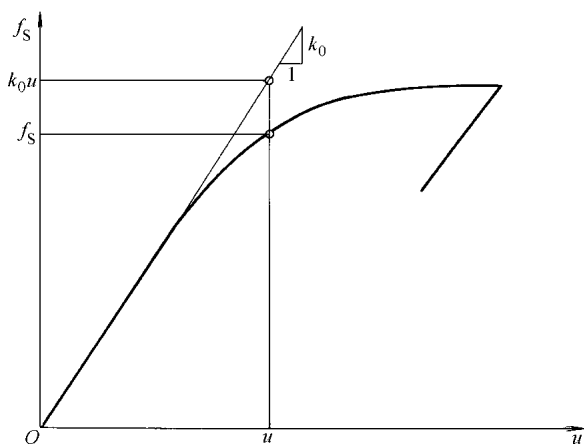


图 缘愿 非线性位移和抗力关系

而是位移的函数

枣越枣(怎)

此时如果采用中心差分法求解非线性反应，其计算仍然很容易，仅需把时刻  $t$  的运动方程中的  $\dot{u}$  用  $(\dot{u})_t$  代替，而

(枣) 越枣 (怎)

而  $x_1$  是已计算得到的 贼时刻的位移, 所以  $(x_1, t_1)$  也是已知的, 则采用与 边缘节点完全相同的计算公式可以得到 贼时刻的位移  $x_2$

可见如果采用中心差分法计算，计算公式的格式和计算软件均无需做较大的修改，仅需对计算抗力（ $R$ ）的有关项进行相应的改动，此时，中心差分计算公式为

[illegible]

在用中心差分逐步积分法计算时,由于结构一般是软化结构,即随变形的增加而变软,刚度降低,但质量不变,则结构的自振周期  $T_n$  (越圆轆(噪呢)) 变长,计算的稳定性变好。

若采用增量平衡方程<sup>[3]</sup>进行结构非线性动力计算,则采用增量平衡方程较合适。所谓“增量”是与以前的“全量”相比而言,可以分别给出时刻运动方程,即

皂怎垣槽垣(枣)越孕

### 和 贼 时刻运动方程

皂怎音品 垣音品 糲音品 垣(枣)音品 越孕音品

由 式(1)减去 式(2)得运动的增量平衡方程,即

$\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$  (缘圆)

其中

$\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$   
 $\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$   
 $\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$   
 $(\Delta u_i) = (\Delta u_i)_{原}$   
 $\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$

虽然结构反应进入非线性，但只要时间步长  $\Delta t$  足够小，可以认为在  $[t_i, t_{i+1}]$  区间内结构的本构关系是线性的，则

$(\Delta u_i) = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$  (缘圆)

为  $t_i$  和  $t_{i+1}$  点之间的割线刚度 (如图 缘所示)。

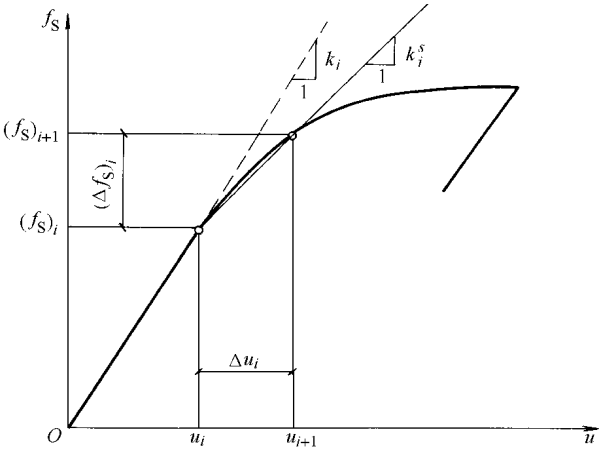


图 缘  $[t_i, t_{i+1}]$  区间内结构的本构关系

但由于  $k_i$  未知，因此  $\Delta u_i$  不能预先准确估计，这时可以采用  $t_i$  点的切线刚度  $k_i$  代替  $k_i^s$

$(\Delta u_i) \approx \frac{1}{k_i} \Delta f_i$  (缘圆)

式 (缘圆) 代入式 (缘圆) 得到结构的增量平衡方程为

$\Delta u_i = \frac{1}{k_i} \Delta f_i$  (缘圆)

上式是一个线性形式的运动方程，系数  $k_i$  和  $\Delta f_i$  均为已知。

在用 缘法求解时，仅需把前面所讲的全量形式的 缘法逐步积分方程改写成增量的形式即可。为此，将式 (缘圆) 改写成如下增量的形

式

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{蚤}} \text{怎} & \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{越} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{贼} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{原} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{贼} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{圆} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{怎} \\ \Delta_{\text{蚤}} \text{怎} & \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{越} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{贼} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{原} \xrightarrow{\frac{\gamma}{\beta}} \Delta_{\text{蚤}} \text{怎} \end{aligned} \right\} \quad (\text{缘缘})$$

将式 (缘豫) 代入式 (缘豫), 得到计算  $\Delta z$  的方程为

$$\left. \begin{aligned} & \text{噪} \triangle_{\text{重}} \text{怎} \triangle_{\text{重}} \text{孕} \triangle_{\text{重}} \\ & \text{噪} \triangle_{\text{重}} \text{越} \text{噪} \triangle_{\text{重}} \text{垣} \frac{\text{员}}{\beta \triangle_{\text{重}} \text{贼}} \text{皂} \triangle_{\text{重}} \frac{\gamma}{\beta \triangle_{\text{重}} \text{贼}} \text{糟} \\ & \triangle_{\text{重}} \text{孕} \triangle_{\text{重}} \text{越} \triangle_{\text{重}} \text{孕} \triangle_{\text{重}} \text{垣} \left( \frac{\text{员}}{\beta \triangle_{\text{重}} \text{贼}} \text{怎} \triangle_{\text{重}} \text{垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{怎} \triangle_{\text{重}} \right) \text{皂} \triangle_{\text{重}} \left[ \frac{\gamma}{\beta \triangle_{\text{重}}} \text{怎} \triangle_{\text{重}} \text{垣} \frac{\triangle_{\text{重}} \text{贼}}{\text{圆}} \left( \frac{\gamma}{\beta \triangle_{\text{重}}} \text{原} \triangle_{\text{重}} \text{怎} \triangle_{\text{重}} \right) \right] \text{糟} \end{aligned} \right\} \text{(缘缘缘)}$$

用式 (缘豫) 求得  $\Delta$  后, 则可以计算 贼 时刻的总位移为

怎么越怎么怪△怎么 (缘起)

再利用 晕差法<sup>[1]</sup>法中的两个基本公式 (缘圆), 可以得到

$$\left. \begin{aligned} & \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{越}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \Delta \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{原}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \left( \frac{\gamma}{\beta\Delta} \right) \text{原}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \\ & \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{越}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \Delta \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{原}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \left( \frac{\gamma}{\beta\Delta} \right) \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{原}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \left( \frac{\gamma}{\beta\Delta} \right) \text{怎}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \text{原}_{\frac{\gamma}{\beta\Delta}} \end{aligned} \right\} \text{(缘缘)}$$

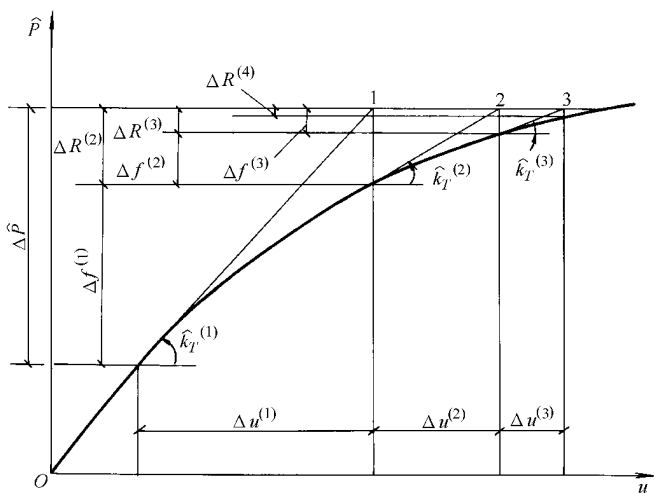
这样，全员时刻的运动全部求得。

在用以上步骤计算时的主要误差，是由于对抗力计算时采用了近似的计算公式（ $\Delta \sigma = \frac{\sigma}{E} \Delta \epsilon$ ）引起的，即用切线刚度代替割线刚度引起的，这是非线性分析的共性。注意到方程  $\Delta \sigma = \frac{\sigma}{E} \Delta \epsilon$  从形式上看与静力问题的方程完全一样，可以用静力问题中的非线性分析方法进行迭代求解，例如采用 增量法或修正的 增量法求解。这两种方法计算迭代过程如图 10-10 所示，增量法采用不断变化的切线刚度，在每一迭代步中，刚度是变化的，而修正的 增量法，在不同迭代步中的刚度不变，因此，也常称 增量法为变刚度迭代法，而修正的 增量法为常刚度迭代法。变刚度迭代法的优点是迭代的收敛速度比常刚度法快，缺点是在迭代过程中需要反复修正刚度矩阵；常刚度迭代法的优点是在每一时间步中的迭代过程中，无需对刚度阵进行反复的修正运算，缺点是收敛速度比变刚度迭代法慢，但可以在一定程度上避免由刚度退化过度而出现的刚度阵的病态问题。

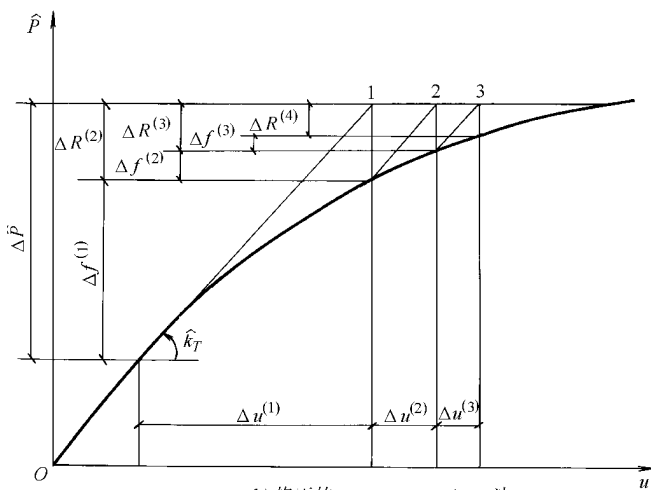
用以上迭代方法，求得  $\Delta_{\text{总}}^{(1)}$ ,  $\Delta_{\text{总}}^{(2)}$ , ... 以后，叠加得

△怎越△怎<sup>(员)</sup>垣△怎<sup>(圆)</sup>垣.. (缘<sup>(四)</sup>)

收敛条件为：当进行了  $k$  次迭代计算后，令



a) Newton—Raphson法



b) 修正的Newton—Raphson法

图 5.10 牛顿法和修正的牛顿法的迭代过程

$$\Delta u_{\text{总}} = \sum_{i=1}^n \Delta u_{\text{总}}^{(i)}$$

(5.10)

如果

$$\frac{\Delta u_{\text{总}}^{(n)}}{\Delta u_{\text{总}}} \approx \epsilon$$

(5.11)

则认为迭代收敛，达到要求的精度，停止迭代计算。 $\epsilon$  为一个给定的小量，例如

一般情况下，经过有限次的迭代计算即可以收敛。

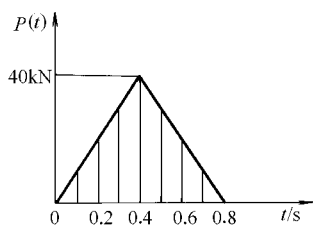
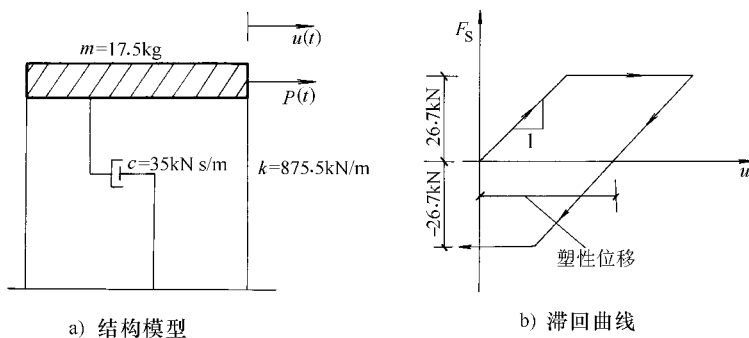
## 习题

分析如下时域逐步积分算法的稳定性（设阻尼系数  $\zeta = 0$ ）。

$$\frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \Delta t \frac{du}{dt} + u = \frac{F(t)}{k}$$

如图 5-1 所示的单自由度结构，质量为  $m = 17.5 \text{ kg}$ ，总刚度为  $k = 875.5 \text{ kN/m}$ ，阻尼系数为  $c = 35 \text{ kN s/m}$ ，结构柱的力-位移关系为理想弹塑性，屈服强度为  $F_s = 26.7 \text{ kN}$ 。采用中心差分逐步分析方法计算结构在给定脉冲荷载作用下的弹塑性反应。建议的时间步长为  $\Delta t = 0.05 \text{ s}$ ，首先检验稳定性条件，计算的总持时为  $t = 0.8 \text{ s}$ ，初始时刻结构处于静止状态。

试用题 5-1 给出的算法重新计算题 5-1（ $\zeta = 0$ ）。



c) 外荷载时程曲线

题 5-1 图

## 第 10 章 分布参数体系

前面所描述的多自由度离散体系提供了进行任意结构动力反应分析的方法。然而，对于实际结构而言，本质上都是具有分布质量的弹性体，即分布参数体系。例如，由板、梁、柱组成的建筑结构或者由板、梁、杆组成的桥梁结构等，都是弹性体系。要描述这样的弹性体系任意瞬时的空间位置，严格地说需要无限多个广义坐标，这样的体系称为无限自由度体系。由有限数目的位移坐标来描述体系的运动，得到的只能是真实动力行为的近似解。增加分析中考虑的自由度数，可以使结果的精度达到要求的程度。但是，对于具有连续分布特性的真实结构，原则上要取无限多个坐标才可以收敛于精确解，因此要用这种方法求精确解显然是不可能的。

要严格描述无限自由度体系的振动，需要建立位移关于空间位置坐标和时间两个独立变量的连续函数，因此，描述无限自由度体系的运动方程为偏微分方程。

连续结构体系可按描绘它们动力行为分布所需的独立变量数来分类。例如，在研究薄板或薄壳结构的动力行为时，必须按照二维体系推导出两个位移变量的运动方程。然而，本章的讨论局限于一维结构，即梁结构或轴向变形的杆。假定它们的物理性质（质量、刚度、阻尼等）和动力反应（位移、速度、加速度等）可用单独一个坐标，即沿弹性轴线的位置来描述。于是，这种体系的偏微分方程可只包含两个独立变量，即时间和沿轴线的距离。

### 10.1 梁的偏微分运动方程

#### 10.1.1 弯曲梁（欧拉梁）的横向振动方程

设有如图 10-1 所示的非均匀简支梁，沿梁长度  $x$  方向变化的抗弯刚度为  $EI(x)$ ，单位长度的质量为  $m(x)$ ，作用在梁上的横向荷载  $q(x, t)$  及梁的横向位移  $w(x, t)$  均为随坐标  $x$  和时间  $t$  连续变化的函数。

首先分析梁弯曲振动的基本情况。假定梁的运动为平面弯曲，并假设变形前梁的横截面在变形后仍保持为平面，且垂直于变形后的梁轴线，即符合弯曲变形的平截面假定。对于梁的挠度与其长度相比小很多的情况，这种假定是合理的。

取梁上任一截面  $x$  处的微段  $dx$  为隔离体。该微段上除作用在两个截面上的

弯矩  $M$ 、剪力  $Q$  和分布外荷载  $P(x, t)$  外, 根据达朗伯原理, 还有假设的惯性力  $f_I(x)$  和分布质量  $m(x)$ , 其中  $f_I(x)$  为分布惯性力, 其大小等于分布质量  $m(x)$  与运动加速度  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  的乘积, 即  $f_I(x) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ 。

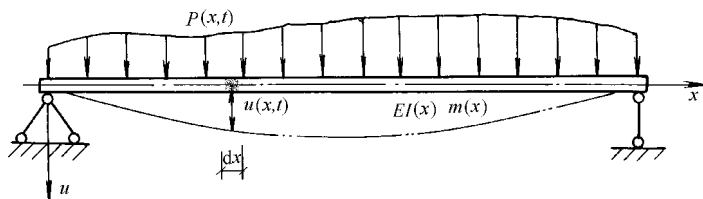


图 4-1 简支梁的弯曲变形

如图 4-1 所示, 该微梁段在运动过程中处于动平衡状态。由竖向力平衡条件, 得到第一个平衡方程

$$Q - Q + P dx + f_I dx = \frac{\partial}{\partial t} \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) \quad (4-1)$$

整理得:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = P + f_I = P + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-2)$$

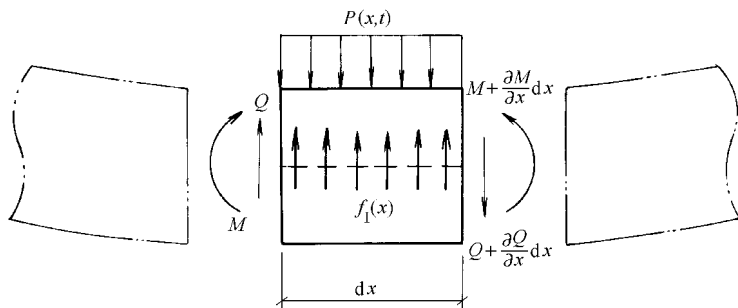


图 4-2 微梁段隔离体 (仅考虑弯曲情况)

由力矩平衡条件, 对微段右截面和  $x$  轴的交点取矩, 得到第二个平衡方程

$$M - M + Q dx - P dx \frac{dx}{2} - f_I dx \frac{dx}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) \quad (4-3)$$

略去式中的高阶微量, 整理得

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (4-4)$$

将式 (2.2.1) 代入式 (2.2.2), 得

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.3)$$

根据梁的初等变形理论, 梁的弯矩与曲率的关系式为

$$M = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.4)$$

将式 (2.2.4) 代入式 (2.2.3), 可以得到

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.5)$$

这样就得到了仅考虑弯曲情况的变截面梁的运动偏微分方程。对于等截面梁, 式 (2.2.5) 可以简化成为

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2.6)$$

在式 (2.2.3)、式 (2.2.4) 的推导过程中, 没有考虑梁在运动过程中剪切变形和转动惯量的影响。对于梁的挠度远小于其长度的情况, 即梁的弯曲半径与梁高相比大很多时, 弯曲变形是主要的, 剪切变形和转动惯量的影响很小, 可以忽略不计, 上面两个公式具有足够的精度。按照这种假定, 仅考虑弯曲变形的梁称为欧拉梁 (Euler beam), 其分析理论称为柏努利-欧拉理论 (Bernoulli-Euler theory)。

## 2.2.2 考虑轴向力影响的梁的弯曲振动方程

如果梁除了承受竖向荷载外, 还承受轴向力的作用, 那么, 因为轴向力和横向位移互相影响, 力矩平衡表达式中将会产生附加项, 微段的力矩平衡条件就会发生变化。考虑图 2.2.3 所示的梁, 为简化起见, 假定梁端作用不随时间变化的轴向力  $N$ 。

从图中可以看出轴向力对竖向力的平衡表达式没有影响, 因为它的方向不随梁的弯曲而变化, 所以方程 (2.2.6) 仍然适用。但是, 因为轴向力的作用点随梁的弯曲而改变, 所以力矩平衡方程将变为

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.7)$$

略去式中的高阶微量, 整理得

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.8)$$

将式 (2.2.8) 代入式 (2.2.7) 得

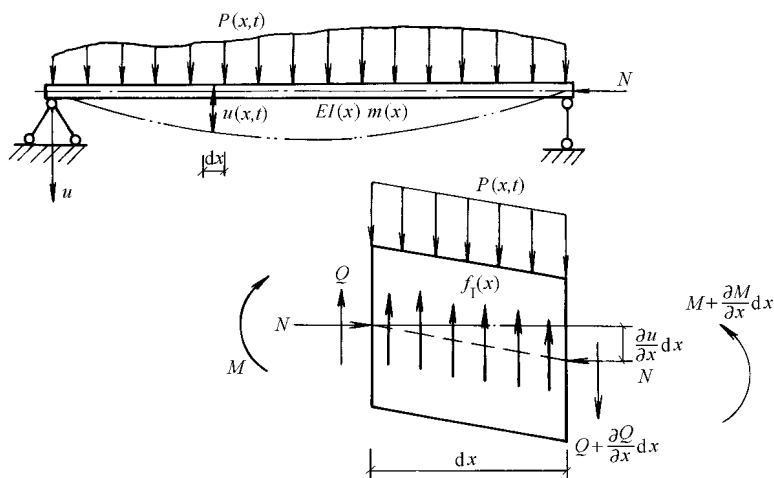


图 4-10 承受轴向力和竖向荷载的梁

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{EI(x)} \left[ N \frac{\partial u}{\partial x} + M \right] + \frac{P(x, t)}{EI(x)} \quad (4-10)$$

利用梁弯矩与曲率的关系式 (4-9)，得到考虑轴向力影响的运动方程为

$$EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = N \frac{\partial u}{\partial x} + M + \int_0^x P(\xi, t) d\xi \quad (4-11)$$

显然，轴向力和曲率的乘积形成了作用在梁上的附加竖向荷载。

### 4.1.2 考虑转动惯量的梁的横向振动方程

对于高跨比很大的梁，梁在运动过程中剪切变形和转动惯量的影响则是不能忽视的，必须加以考虑。

如图 4-11 所示，梁在振动过程中产生横向弯曲变形时，其横截面不仅沿梁的横向作平移而且同时发生转动，其转角等于弯曲变形曲线的倾角，即

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-12)$$

$$\text{相应地，截面将产生角加速度：} \ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial t} \quad (4-13)$$

因此，角加速度将会使梁截面的分布质量产生相对于中性轴的分布的转动惯性力矩  $M_r$ ，其大小等于截面的质量惯性矩  $\rho I(x)$  与角加速度  $\ddot{\theta}$  的乘积，即

$$M_r = \rho I(x) \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial t} \quad (4-14)$$

式中， $\rho$  为材料的质量密度； $I(x)$  为梁的横截面惯性矩。

此时，梁的横向弯曲振动微分方程可由图 2-10 所示的微梁段上力的平衡导出。按照小变形假定，梁的弯曲挠度很小，相应的转角也很小。略去由于截面转动而产生的二阶微量误差，由竖向力平衡条件，可以近似得到与式 (2-9) 同样形式的第一个平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ P(x, t) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (2-10)$$

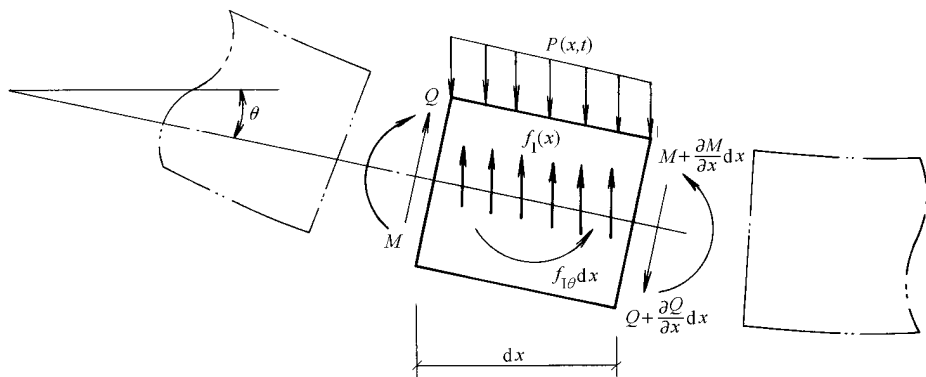


图 2-10 微梁段隔离体（考虑转动惯量的影响）

同理，对微段右截面和  $x$  轴的交点取矩，由力矩平衡条件，可以近似得到第二个平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (2-11)$$

略去式 (2-11) 中的高阶微量，整理得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (2-12)$$

将式 (2-12) 代入式 (2-10)，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (2-13)$$

由式 (2-13) 代入上式，得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (2-14)$$

这就是考虑了转动惯量但未考虑剪切变形时梁的横向弯曲运动偏微分方程，式中第二项即为考虑转动惯量的影响。

远源 考虑剪切变形和转动惯量的梁的横向振动方程

如果不但考虑了转动惯量，而且也考虑了剪切变形的影响，将得到更为精确的梁弯曲运动微分方程。

如图 远缘所示的微梁段，转动惯量是由于梁截面从垂直位置转动  $\theta$  角所引起的， $\theta$  表示不考虑剪切变形时振动曲线的斜率。如果没有剪切变形，振动过程中梁的横截面将始终与其弹性轴线保持垂直，则  $\theta$  应等于弹性轴线的斜率。如果考虑剪切变形，并假设平截面假定仍成立，且用  $\gamma$  表示剪切角，根据图 远缘，梁的轴线转角  $\theta$  与截面转角  $\theta$  和剪切角  $\gamma$  的关系为

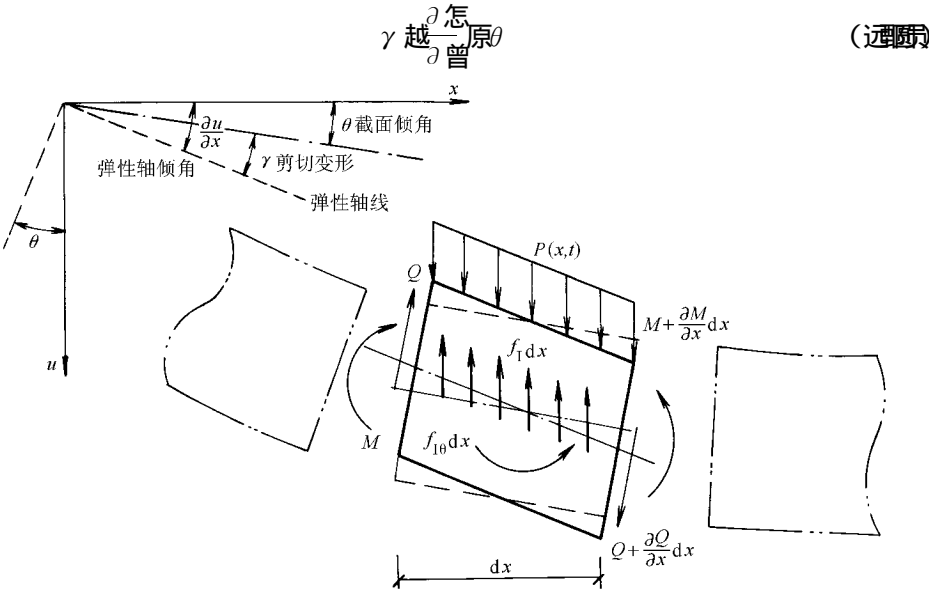


图 远缘 微梁段隔离体（考虑剪切变形的影响）

在这个微梁段隔离体中，截面倾角  $\theta$  已经不等于  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ，截面角加速度应表示为

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (远源)$$

再考察微梁段的力的平衡条件，按照小变形假定，由竖向力平衡条件，近似得到与式 (远源) 同样形式的第一个平衡方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.10)$$

对微段隔离体右截面与  $z$  轴的交点取矩，由力矩平衡条件，可近似导出第二个平衡方程

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \\ & \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

略去式 (2.1.11) 中的高阶微量，整理可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.12)$$

注意式 (2.1.12) 与式 (2.1.10) 的表达式是有区别的。

根据梁的弯曲理论，剪力  $Q$  与剪切角之间的关系式为

$$Q = k_s G A \theta \quad (2.1.13)$$

式中， $k_s$  为由截面形状决定的常数因子，称为截面的有效剪切系数； $G$  为横截面的面积； $\theta$  为剪切弹性模量。

将式 (2.1.13) 代入式 (2.1.12)，得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.14)$$

将 (2.1.13) 的关系式代入，可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.15)$$

根据梁的弯曲理论，弯矩  $M$  与曲率  $\theta$  之间的关系为

$$M = E I \theta \quad (2.1.16)$$

式中， $\theta$  表示不考虑剪切变形时振动曲线的转角，即梁横截面的转角。

将式 (2.1.16) 代入式 (2.1.15)，可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.17)$$

由式 (2.1.17)，可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=\Delta z} = 0 \quad (2.1.18)$$

式 (2.1.18) 和式 (2.1.19) 为该微梁段考虑剪切变形的两个平衡关系式。为简化起见，下面以等截面梁为例，导出考虑剪切变形和转动惯量时的振动方程。

对于等截面梁，截面积  $A$  和抗弯刚度  $EI$  均为常量。由式 (2.1.18)，并略去各

个函数中的变量，可得

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (2-2-10)$$

将式 (2-2-10) 对  $x$  求导，得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (2-2-11)$$

将式 (2-2-11) 代入式 (2-2-10)，得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (2-2-12)$$

最后，将式 (2-2-12) 代入式 (2-2-11)，整理得到

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (2-2-13)$$

这就是考虑了转动惯量和剪切变形时梁的横向弯曲运动的偏微分方程。式中的第一项为不考虑转动惯量和剪切变形的基本情况，第二项考虑转动惯量的影响，第三项考虑剪切变形的影响，第四项考虑转动惯量和剪切变形影响的耦合。按式 (2-2-13) 考虑转动惯量和剪切变形时所建立的梁称为铁木辛柯梁 (Timoshenko beam)。

## 2.2.3 考虑阻尼影响的梁的振动方程

下面讨论建立梁的运动方程时如何考虑结构在动力反应过程中的能量损耗机理。如图 2-2-10 所示，梁在振动过程中，受到两种阻尼的作用：一种是外界介质如水、空气、土等对梁体运动的阻抗，称为外阻尼；另一种是由于结构截面上的纤维反复变形，沿截面高度产生的分布阻尼应力，称为内阻尼。

这两种阻尼都是粘性阻尼，前者是梁竖向振动速度的函数，后者与梁材料的应变速度成比例。因此，可以方便地在运动方程中分别考虑以上两种形式的粘滞阻尼的影响。

外阻尼产生的阻尼力与梁体的振动速度成正比，对于图 2-2-10 所示的微段隔离体，有

$$F_d = c \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2-2-14)$$

根据隔离体竖向力的平衡关系，梁的运动方程 (2-2-13) 变成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2-2-15)$$

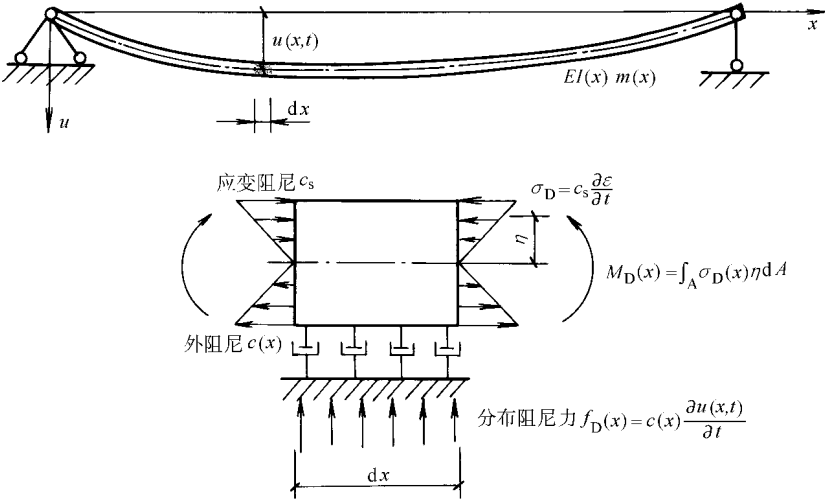


图 远远 梁的粘滞阻尼机理

内阻尼产生的阻尼应力与材料的应变速度有关，即

$$\sigma_{\text{内}}(\text{曾})=\frac{\partial \varepsilon(\text{曾}, \eta, \text{贼})}{\partial \text{贼}} \tag{远远}$$

式中， $\sigma_{\text{内}}(\text{曾})$  为应变阻尼应力； $\eta$  为应变阻尼系数， $\varepsilon(\text{曾}, \eta, \text{贼})$  为梁截面上距中性轴任意点处的应变。假设该应力沿梁截面高度方向呈线性分布，则这些阻尼应力产生阻尼弯矩，即

$$\begin{aligned} \text{酝}(\text{曾}) &= \int_{\text{粤}} \sigma_{\text{内}}(\text{曾}) \eta \text{粤} \text{越} \int_{\text{粤}} \eta \frac{\partial \varepsilon(\text{曾}, \eta, \text{贼})}{\partial \text{贼}} \text{粤} \\ &= \int_{\text{粤}} \eta \frac{\partial}{\partial \text{贼}} \left( \frac{\text{酝}(\text{曾})}{\text{粤}} \right) \text{粤} \text{越} \text{原} \frac{\partial \text{酝}(\text{曾})}{\partial \text{曾}} \end{aligned} \tag{远远}$$

式中， $\eta$  为横截面上任一点到中性轴的距离； $\text{粤}$  为横截面的面积。

这时，图 远远所示的微段隔离体上的截面弯矩等于弯曲变形弯矩与应变阻尼弯矩之和，因此，考虑内外阻尼的分布参数梁的运动方程可直接写出，即

$$\text{皂}(\text{曾}) \frac{\partial^4 \text{曾}}{\partial \text{贼}^4} + \text{垣}(\text{曾}) \frac{\partial^4 \text{曾}}{\partial \text{贼}^3} + \text{垣} \frac{\partial}{\partial \text{曾}} \left[ \eta \frac{\partial \text{酝}(\text{曾})}{\partial \text{曾}} \frac{\partial \text{曾}}{\partial \text{贼}} \right] \text{越} \text{孕}(\text{曾}) \tag{远远}$$

远圆 梁的自振频率和振型

远圆 弯曲梁的自振频率和振型

首先分析欧拉梁，即不考虑转动惯量和剪切变形时的固有振动特性。这里仅

讨论等截面直梁的情况。这时，梁的自由振动运动方程式为式 (10-1) 的齐次方程，即

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10-1)$$

上式两边同除以  $EI$  并用 “ $\frac{\partial}{\partial x}$ ” 表示对位置  $x$  的导数，用 “ $\frac{\partial}{\partial t}$ ” 表示对时间  $t$  的导数，则式 (10-1) 可写成

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10-2)$$

用分离变量法求解，假定解的形式为

$$w(x, t) = \phi(x) \psi(t) \quad (10-3)$$

式中， $\phi(x)$  表示振动的形状，它不随时间而变化； $\psi(t)$  表示随时间变化的振幅。

将式 (10-3) 代入式 (10-2)，得到

$$\phi(x) \psi''(t) + \frac{\rho A}{EI} \phi(x) \psi(t) = 0 \quad (10-4)$$

各项同除以  $\phi(x) \psi(t)$ ，将变量分离

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} + \frac{\rho A}{EI} = 0 \quad (10-5)$$

上式中左边仅为  $t$  的函数，右边仅为  $x$  的函数，如果要对所有的  $x$  和  $t$  都成立，必须都等于一个常数。设该常数为  $-\omega^2$ ，则有

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = -\omega^2 \quad (10-6)$$

由式 (10-6) 得到两个独立的常微分方程

$$\psi''(t) + \omega^2 \psi(t) = 0 \quad (10-7)$$

$$\phi''''(x) + \omega^2 \phi(x) = 0 \quad (10-8)$$

式中

$$\omega^2 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad \text{或} \quad \omega^2 = \frac{EI \omega^2}{\rho A} \quad (10-9)$$

方程 (10-7) 是单自由度体系无阻尼自由振动方程，其解为

$$\psi(t) = \psi_0 \cos \omega t + \dot{\psi}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (10-10)$$

式中的系数  $\psi_0$  和  $\dot{\psi}_0$  可以根据初始位移  $w(x, 0)$  和初始速度  $\dot{w}(x, 0)$  确定，即

$$\psi(t) = \frac{w(x, 0)}{\psi_0} \cos \omega t + \frac{\dot{w}(x, 0)}{\dot{\psi}_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (10-11)$$

方程 (10-8) 为四阶常微分方程，设其解的形式为

$\phi(\xi)$  (2.1.1)

将式 (2.1.1) 代入式 (2.1.2), 得

(2.1.3)

解得  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , 将其代入式 (2.1.1), 得到方程 (2.1.2) 的通解为

(2.1.4)

将上式中的指数函数用三角函数和双曲函数替换, 得到

(2.1.5)

式中的四个常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  决定梁振动的形状和振幅, 它们可以利用梁端的边界条件确定。每根梁的两端可分别给出位移、斜率、弯矩或剪力四个边界条件中的两个。有了这些条件, 就可以由式 (2.1.5) 得到包括四个未知数的齐次代数方程组。根据线性代数理论, 这四个常数是线性相关的, 由系数行列式为零得到关于  $\omega$  的方程, 称为频率方程, 用它可以计算频率参数  $\omega$ 。在确定  $\omega$  以后, 则可以利用齐次方程组确定  $C_1, C_2, C_3, C_4$  的关系, 最后得到振型  $\phi(\xi)$ 。其计算步骤和多自由度体系求振型和自振频率的步骤基本相同。

下面介绍如何根据边界条件确定几种常见梁的固有频率和振型。

算例 2.1.1 简支梁。如图 2.1.1 所示, 等截面简支梁两端铰接, 其边界条件可表示为:

在  $\xi=0$  处, 位移和弯矩为零, 即

(2.1.6)

在  $\xi=L$  处, 位移和弯矩为零, 即

(2.1.7)

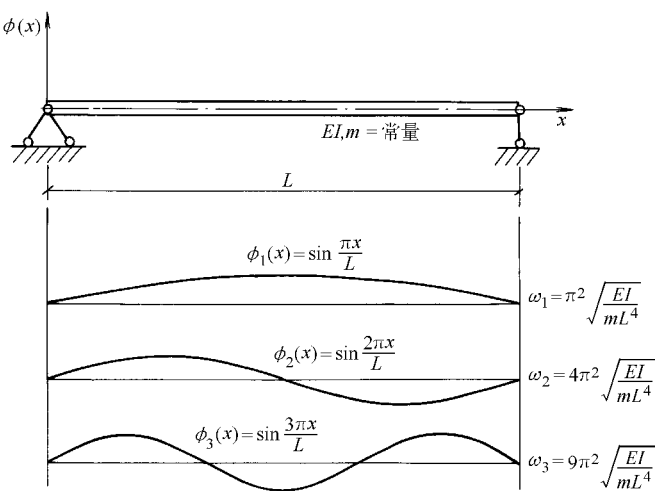


图 2.1.1 简支梁及其振型

将式 (10-10) 代入上面前两个边界条件, 得

$$\phi(0) = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) = 0 \quad (10-11)$$

$$\phi'(0) = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) = 0 \quad (10-12)$$

由此得到  $\phi(0) = 0$ , 利用后两个边界条件, 有

$$\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) = 0 \quad (10-13)$$

$$\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) = 0 \quad (10-14)$$

因为  $\phi$  和  $\phi'$  不能同时为零, 否则梁将处于静止状态, 因此这个联立方程组系数行列式的值必等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\omega^2} & \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} & \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (10-15)$$

展开得

$$\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (10-16)$$

因为  $\frac{1}{\omega^2} \neq 0$ , 所以必有

$$\frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (10-17)$$

这就是简支梁的频率方程。

根据三角函数关系, 可解得

$$\frac{1}{\omega^2} = 0, \frac{1}{\omega^2} = 0, \dots, \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (10-18)$$

因此, 频率可以由式 (10-18) 解得, 即

$$\omega = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\frac{1}{\omega^2}} \quad \left( \frac{1}{\omega^2} = 0, \dots, \frac{1}{\omega^2} = 0 \right) \quad (10-19)$$

将  $\frac{1}{\omega^2} = 0$  代入式 (10-13), 容易得出  $\phi = 0$

综上, 由式 (10-18) 得到简支梁的振型函数

$$\phi(x) = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega^2} \quad \left( \frac{1}{\omega^2} = 0, \dots, \frac{1}{\omega^2} = 0 \right) \quad (10-20)$$

其中的常数  $\frac{1}{\omega^2}$  应由初始条件确定。图 10-1 给出了  $\frac{1}{\omega^2} = 0$  时简支梁的前三阶频率和振型。

算例 10-1 悬臂梁。如图 10-2 所示, 等截面悬臂梁一端固支一端自由, 其边界条件可表示为

在  $x=0$  处, 位移和转角为零

$$\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0 \quad (10-21)$$

在  $x=l$  处, 弯矩和剪力为零

$$\phi''(l) = 0, \phi'''(l) = 0 \quad (10-22)$$

将式 (10-21) 代入上面前两个边界条件, 得

$$\phi(0) = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) = 0 \quad (10-23)$$

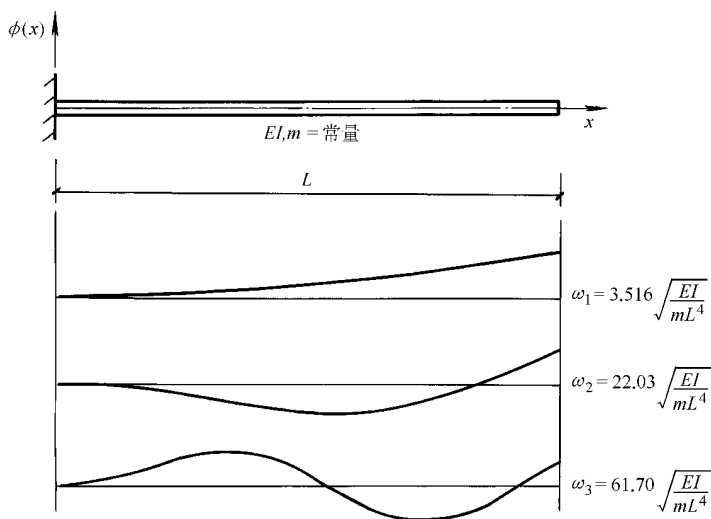


图 远愿 悬臂梁及其振型

由此得到 月越原阅, 粤越原悦, 利用后两个边界条件, 有

$$\phi''(L) = 0, \quad \phi(L) = 0$$

$$\phi'''(L) = 0, \quad \phi(L) = 0$$

利用前面得到的关系式 月越原阅, 粤越原悦, 有

$$\text{粤} = \frac{\sin \omega L}{\omega^2 L}, \quad \text{垣} = \frac{\cos \omega L}{\omega^2 L}$$

$$\text{原粤} = \frac{\sin \omega L}{\omega^2 L}, \quad \text{垣月} = \frac{\cos \omega L}{\omega^2 L}$$

使 粤 悦不能同时为零的条件是这个联立方程组系数行列式的值等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin \omega L}{\omega^2 L} & \frac{\cos \omega L}{\omega^2 L} \\ \frac{\cos \omega L}{\omega^2 L} & \frac{\sin \omega L}{\omega^2 L} \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$\frac{\sin^2 \omega L}{\omega^4 L^2} - \frac{\cos^2 \omega L}{\omega^4 L^2} = 0$$

整理得

$$\tan^2 \omega L = 1$$

这就是悬臂梁的频率方程, 解这个方程可以得到悬臂梁的固有频率。这个超越方程可以用试算法, 也可以用下面的图解法求解: 将式 (远愿) 分成 赠越精粤和 赠越原员精粤两个参数方程, 分别在同一个坐标系中画出曲线, 两个曲线的交点即为原方程的解。

从图 远愿可以看出, 前三个解为 葬越员, 源越圆, 苑越猿, 相应的前三阶自振频率为

$$\omega_{\text{圆}} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\frac{1}{L^3}}; \quad \omega_{\text{圆}} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\frac{1}{L^3}}; \quad \omega_{\text{圆}} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\frac{1}{L^3}} \quad (\text{噪})$$

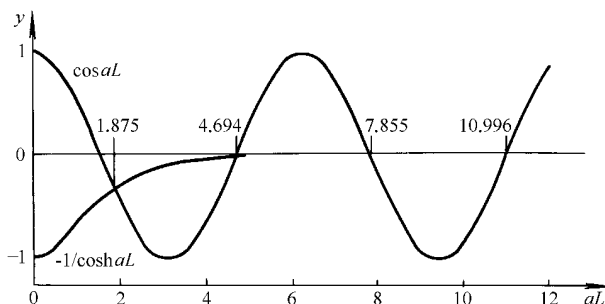


图 4-10 悬臂梁频率超越方程的图解

实际上, 由于曲线  $\frac{1}{\cosh aL}$  渐进趋近于零线, 因此, 当  $aL \rightarrow \infty$  时, 方程 (4-10) 的解可近似由  $\cos aL = 0$  确定, 即

$$aL = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{造})$$

由式 (4-9) 或式 (4-10), 可以将系数  $\omega$  用  $\omega_n$  表示, 即

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{皂})$$

利用这个关系及前面得到的关系式  $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ , 由式 (4-10) 即可得到简支梁的振型函数

$$\phi_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{远})$$

而

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{灶})$$

解频率方程 (4-10) 得到  $aL$  值后, 按上式求出  $\omega_n$ , 并代入振型函数 (4-10), 即可得到对应的振型。图 4-11 给出了悬臂梁的前三阶频率和振型。

由此可以看出, 具有分布参数的梁, 无论是怎样的边界支承条件, 其自振频率和振型都有无穷多个。

从图 4-10 和图 4-11 可以看到, 无论是哪种梁, 各振型函数的曲线 (第一阶振型除外) 均与轴线相交, 这些点在对相应振型的振动时是静止不动的, 称为结点。振型结点的数目等于振型序号  $n$  减 1。相邻振型的各个结点的位置不会重合而是互相交错排列。对于具有足够约束不发生刚体位移的结构体系, 结点的个数和排列的上述规律总是适用的。

## 图 10-1 轴向力对梁的自振特性的影响

承受轴向力的梁的自由运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10-1)$$

按前面的方法分离变量，得到

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + N \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\rho A \omega^2 \phi \quad (10-2)$$

将式 (10-2) 展开为两个独立的常微分方程，即

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} = -\rho A \omega^2 \phi \quad (10-3)$$

$$EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + N \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (10-4)$$

式 (10-3) 与无轴向力作用的时间变量方程 (10-1) 相同，说明轴向力作用时体系的自由振动仍为简谐振动。

引入符号

$$\omega_0^2 = \frac{EI}{\rho A L^4}; \quad \omega_N^2 = \frac{N}{\rho A L^2}; \quad \omega^2 = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_0^2 \quad (10-5)$$

可将式 (10-5) 写成

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{\omega_N^2}{\omega_0^2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\omega^2 \phi \quad (10-6)$$

方程 (10-6) 仍为四阶常微分方程，设解的形式为  $\phi(x) = e^{i\omega x}$ ，并将其代入式 (10-6)，得

$$(\omega_0^2 + \frac{\omega_N^2}{\omega^2}) \phi = 0 \quad (10-7)$$

解得

$$\omega = \omega_0 \quad \text{或} \quad \omega = \omega_N \quad (10-8)$$

其中

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}; \quad \omega_N = \sqrt{\frac{N}{\rho A L^2}} \quad (10-9)$$

代入  $\phi(x) = e^{i\omega x}$ ，得到方程 (10-6) 的通解

$$\phi(x) = e^{i\omega x} + e^{-i\omega x} + e^{i\omega_N x} + e^{-i\omega_N x} \quad (10-10)$$

将上式中的指数函数用三角函数和双曲函数替换，得到

$$\phi(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + C_3 \cosh \omega_N x + C_4 \sinh \omega_N x \quad (10-11)$$

式中的四个常数  $C_1 \sim C_4$  决定梁振动的形状，利用梁的边界条件确定后，即可求出轴向力作用下梁的频率和振型。

下面仅以简支梁为例，用以说明轴向力对梁自振特性的影响。

根据简支梁两端铰接的边界条件：

在  $x=0$  处,  $\phi(0)=0$ , 得:  $\delta_1=0$ ;

在  $x=l$  处,  $\phi(l)=0$ , 即

$\phi(l)=0 \Rightarrow \delta_1 \cos(\delta_1 l) + \delta_2 \sin(\delta_1 l) = 0$  (1)

得:  $(\delta_1 \cos(\delta_1 l) + \delta_2 \sin(\delta_1 l))=0$ , 因为  $\delta_1 \cos(\delta_1 l) \neq 0$ , 所以必有  $\delta_2 = -\delta_1 \tan(\delta_1 l)$

在  $x=0$  处,  $\phi'(0)=0$ , 即

$$\delta_1 \sin(\delta_1 l) - \delta_2 \cos(\delta_1 l) = 0 \quad (2)$$

$$\delta_1 \sin(\delta_1 l) - \delta_2 \cos(\delta_1 l) = 0 \quad (3)$$

因为  $\delta_1$  和  $\delta_2$  不能同时为零, 所以这个联立方程组系数行列式的值必须等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \delta_1 \sin(\delta_1 l) & -\delta_2 \cos(\delta_1 l) \\ \delta_1 \cos(\delta_1 l) & \delta_2 \sin(\delta_1 l) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

展开得

$$(\delta_1^2 \sin^2(\delta_1 l) + \delta_2^2 \cos^2(\delta_1 l)) = 0 \quad (5)$$

因为  $(\delta_1^2 \sin^2(\delta_1 l) + \delta_2^2 \cos^2(\delta_1 l)) \neq 0$ , 所以必有

$$\delta_1 \sin(\delta_1 l) = 0 \quad (6)$$

这就是考虑轴向力简支梁的频率方程。

根据三角函数关系, 可解得

$$\delta_1 l = n\pi, n=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

因此, 将上面的解代入式 (1), 并通过式 (7) 的各参数之间的关系, 得到考虑轴向力时简支梁的自振频率为

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A l^4} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{P}{EI} l^2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (2), 容易得出  $\delta_2 = -\delta_1 \tan(\delta_1 l)$

综上, 由式 (8) 得到简支梁的振型函数

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

其中的  $\delta_1$  为任意非零常数。这个函数与式 (8) 相同, 可见轴向力并不影响简支梁的振型。

从式 (8) 容易看出, 轴向力为正时, 梁承受压力, 其自振频率会有所减小, 相当于降低了梁的刚度, 且压力越大, 频率降低得越多, 当压力增加到  $\frac{EI}{l^2}$  时, 达到简支梁的稳定临界荷载, 梁的一阶自振频率等于零, 结构发生失稳; 轴向力为负时, 梁承受拉力, 其自振频率会有所增大, 相当于提高了梁的刚度。一般当轴向力远小于临界荷载时, 对梁自振频率的影响很小, 可以忽略不计。

## 10.2 剪切变形和转动惯性对自振频率的影响

在 10.1 节中，已经建立了考虑剪切变形和转动惯量的梁的运动方程（10.1），令式中的外荷载项  $\ddot{w}_0 \cos \omega t$  等于零，即得到相应的自由振动方程

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{EI}{k_s A} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10.2)$$

为简化分析，假设位移按  $w = \phi(x) \cos \omega t$  随时间简谐变化，并将其代入上式，得

$$EI \phi'''' - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{EI}{k_s A} \phi''' \right) - \rho A \omega^2 \phi = 0 \quad (10.3)$$

因为  $\phi''' \neq 0$ ，所以上式可写成

$$EI \phi'''' - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{EI}{k_s A} \phi''' \right) - \rho A \omega^2 \phi = 0 \quad (10.4)$$

令  $\phi = \frac{EI}{k_s A} \phi''$ ，并注意到  $\rho A \omega^2 = \frac{EI}{r^2}$ ，则为惯性半径，上式可改写为

$$\phi'''' - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{EI}{k_s A} \phi''' \right) - \frac{EI}{r^2} \phi = 0 \quad (10.5)$$

这是一个非常复杂的运动方程，对于其他边界条件的结构，求解比较困难。这里仅以容易求解的简支梁为例，用以说明剪切变形和转动惯量对梁自振特性的影响。

仍用前面得到的振型函数表达式

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{L^3} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.6)$$

将式 (10.6) 代入式 (10.5)，各项同除以  $\frac{EI}{L^3}$ ，得

$$\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - \frac{n\pi}{L} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3 - \frac{EI}{r^2 L^3} \left( \frac{n\pi}{L} \right) = 0 \quad (10.7)$$

注意到  $\frac{EI}{r^2 L^3} = \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$ ，整理得

$$\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - \frac{n\pi}{L} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3 - \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2} \left( \frac{n\pi}{L} \right) = 0 \quad (10.8)$$

如果仅考虑式 (10.8) 中的前两项，有

$$\left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - \frac{n\pi}{L} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3 = 0 \quad (10.9)$$

则

$$\omega_{灶越灶圆} \sqrt{\frac{\text{耘源}}{\text{皂蕴}}} \quad (灶越员圆, \dots, 肆) \quad (远源愿)$$

正是基本情况简支梁的频率解。

方程 (远源愿) 中的第三项说明了转动惯量和剪切变形的影响, 它们分别由该项括号中的  $\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  和  $\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  代表。转动惯量和剪切变形对梁振动特性的影响因材料和截面特性的不同而有所差异。对于典型材料的矩形截面梁,  $\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  的比值约为 猿, 即剪切变形的影响约为转动惯量影响的三倍。如果在基本情况中计入第三项的影响, 方程 (远源愿) 的解为

$$\text{葬越} \left( \frac{\text{灶}}{\text{蕴}} \right)^{\text{源}} \left[ \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \right]^{\text{源}} \quad (远源愿)$$

上式方括号中的内容即为考虑转动惯量和剪切变形影响后对结果的修正。容易看出, 梁型阶数越高, 或者长细比  $\frac{\text{灶}}{\text{蕴}}$  越小, 修正值就越大。当  $\frac{\text{灶}}{\text{蕴}}$  很小时, 利用级数  $(\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}})^{\text{源}} \approx \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  将方括号展开并取第一项, 有

$$\left[ \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \right]^{\text{源}} \approx \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \quad (远源愿)$$

这时, 式 (远源愿) 可以近似地写成

$$\text{葬} \approx \left( \frac{\text{灶}}{\text{蕴}} \right)^{\text{源}} \left[ \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \right] \quad (远源愿)$$

则频率解为

$$\omega_{灶越灶圆} \sqrt{\frac{\text{耘源}}{\text{皂蕴}}} \left[ \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \right]^{\frac{\text{源}}{\text{灶}}} \quad (灶越员圆, \dots, 肆) \quad (远源愿)$$

上式利用了级数  $\sqrt{\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}} \approx \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  的关系。

再考察方程 (远源愿) 中的第四项。实际情况中, 当  $\frac{\text{灶}}{\text{蕴}}$  很小时, 第四项的影响是非常次要的。下面比较这一项与转动惯量和剪切变形主要修正项 (第三项) 的相对大小。注意到  $\frac{\text{灶}}{\text{蕴}}$  很小时,  $\text{葬} \approx (\frac{\text{灶}}{\text{蕴}})^{\text{源}}$ , 所以第四项可以改写为

$$\frac{\text{葬则}}{\text{葬}} \approx \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \left[ \left( \frac{\text{灶则}}{\text{蕴}} \right) \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right) \right]^{\frac{\text{源}}{\text{灶}}} \approx \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \left( \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}} \right)^{\frac{\text{源}}{\text{灶}}} \quad (远源愿)$$

显然它与 (远源愿) 中的第三项相比是很小的。

算例 远源愿 为了说明剪切变形和转动惯量对固有频率的影响。考虑简支梁的跨度为 猿圆皂, 矩形截面宽 员缘皂, 高 远圆皂, 假定材料的  $\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$  随

截面的惯性半径 则  $\sqrt{\frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}} \approx \frac{\text{耘}}{\text{皂蕴}}$

梁的高跨比为 员缘, 长细比为 员圆 这时, 方程 (远源愿) 中的修正项为

$\frac{\text{员}}{\text{原}} \frac{\text{炷}}{\text{煮}} \frac{\text{则}}{\text{蘖}} \frac{\text{圆}}{\text{圆}}$ 
 $\frac{\text{员}}{\text{圆}} \frac{\text{耘}}{\text{颀}}$ 
 $\frac{\text{越}}{\text{越}} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \frac{\text{炷}}{\text{煮}} \frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 
 $\frac{\text{猿}}{\text{猿}} \frac{\text{猿}}{\text{猿}}$ 
 $\frac{\text{越}}{\text{越}} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \frac{\text{炷}}{\text{煮}} \frac{\text{猿}}{\text{猿}}$

当  $\zeta > 1$  时, 由剪切变形和转动惯量引起的固有频率的修正系数分别为  $\frac{1}{2\zeta^2}$ ,  $\frac{1}{2\zeta^2}$ ,  $\frac{1}{2\zeta^2}$ 。随着振型阶数的增大, 修正量将会迅速增大。

方程(2.1.15)中的第二项称为频率降低率,它表示由于剪切变形和转动惯量的影响,梁的自振频率降低的程度。图 2.1.1 给出了例 2.1.1 所示的梁在不同高跨比(改变梁跨度,保持截面不变)情况下前三阶自振频率的降低率。这个例子说明,对于高跨比很大的深梁,剪切变形和转动惯量对固有频率的影响是很大的,且高跨比越大,振型越高,影响越大。

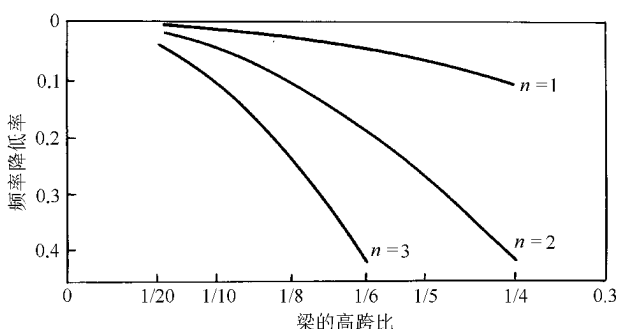


图 10-10 剪切变形和转动惯量对梁自振频率的影响

对于一般中小跨度简支梁，材料不同，则高跨比不同，例如，钢筋混凝土梁为  $\frac{1}{16} \sim \frac{1}{8}$ ，预应力混凝土梁为  $\frac{1}{18} \sim \frac{1}{10}$ ，钢板梁为  $\frac{1}{20} \sim \frac{1}{12}$ 。由于梁的惯性半径不同，剪切变形和转动惯量对其自振频率会有一定的影响，在工程中应当予以注意。

## 远藤 振型的正交性

在多自由度体系中已经讨论过的振型的正交性对于具有分布参数特性的梁同样存在。下面以梁的弯曲振动为例，进行证明。

如图 2-10 所示的简支梁，截面刚度  $EI(x)$  和质量  $m(x)$  均沿梁的长度变化。图中分别给出了第  $n$  阶和第  $m$  阶振型的形状及各自的惯性力。

根据功的互等定理,第  $\alpha$  阶振型的惯性力在第  $\beta$  阶振型位移上所做的功等于第  $\beta$  阶振型的惯性力在第  $\alpha$  阶振型位移上所做的功。根据图 10-10,这个互等定理的数学表达式为

怎(曾奉(曾,賊)曾越 怎(曾奉(曾,賊)曾 (远) (远) (远)

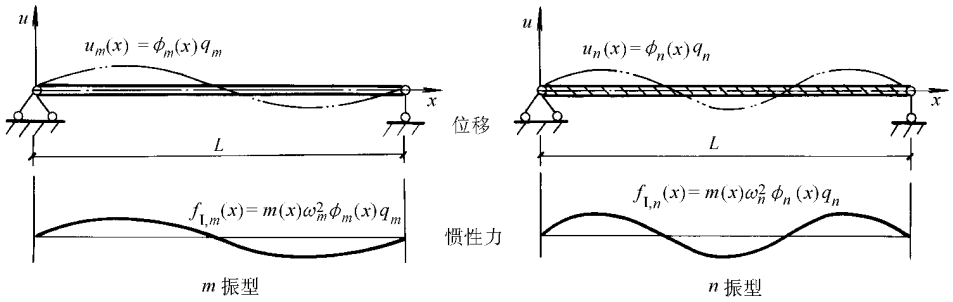


图 4-10 振型正交性的证明

当梁以某个振型振动时，其各点的位移可以表示为

$$u_m(x) = \phi_m(x) q_m \quad (4-100)$$

$$u_n(x) = \phi_n(x) q_n \quad (4-101)$$

由该振型引起的相应的分布惯性力为

$$f_{I,m}(x) = m(x) \omega_m^2 \phi_m(x) q_m \quad (4-102)$$

$$f_{I,n}(x) = m(x) \omega_n^2 \phi_n(x) q_n \quad (4-103)$$

将以上四个表达式的幅值代入功的互等定理方程 (4-100)，得

$$\int_0^L \phi_m(x) \omega_m^2 \phi_n(x) dx = \int_0^L \phi_n(x) \omega_n^2 \phi_m(x) dx \quad (4-104)$$

即

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (4-105)$$

对于一般工程结构， $\omega_m \neq \omega_n$ ，因此必有

$$\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0 \quad (4-106)$$

这就是分布参数简支梁关于分布质量的正交条件。

如果用分布刚度作为加权函数，可以得到分布参数体系关于振型第二个正交条件。对于变截面的梁，自由运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4-107)$$

根据式 (4-100) 表示的第  $m$  阶振型的振动位移，式 (4-107) 中的第二项变为

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m \omega_m^2 \phi_m(x) q_m \quad (4-108)$$

式 (远边缘) 中的第一项变为

$\frac{\partial \text{圆}}{\partial \text{曾}} \left[ \begin{smallmatrix} \text{赧} & \text{曾} & \text{怎} \\ \text{赧} & \text{曾} & \text{曾} \end{smallmatrix} \right] \text{越} \frac{\text{圆}}{\text{曾}} \left[ \begin{smallmatrix} \text{赧} & \text{曾} & \text{怎} \\ \text{赧} & \text{曾} & \text{曾} \end{smallmatrix} \right] \text{择} \frac{\text{圆}}{\text{曾}} \text{贼}$ 
(远韵)

将式 (28) 和式 (29) 代入式 (27), 有

$\frac{\text{曾}}{\text{洋曾}}$   $\left[ \begin{array}{c} \frac{\text{曾}}{\text{耕}} \\ \frac{\text{曾}}{\text{洋曾}} \end{array} \right]$   $\frac{\text{曾}}{\text{越皂曾}}$   $\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$   $\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$   $\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$  (远致愿)

将上式代入式 (2.4.10), 得到

[illegible]

这就是分布参数简支梁关于分布刚度的正交条件。

对式 (28) 进行两次分步积分, 得

$\phi$  匠  $\left| \begin{array}{c} \text{蕴} \\ \text{皂灶园} \end{array} \right.$  原  $\phi$  晒  $\left| \begin{array}{c} \text{蕴} \\ \text{皂灶园} \end{array} \right.$  垣  $\left[ \begin{array}{c} \text{蕴} \\ \text{皂灶园} \end{array} \right.$   $\phi$  义  $\phi$  曾  $\phi$  义  $\phi$  曾 耘 颖 曾 潜 曾 越 园 (远 颖 园)

上式即为一般边界条件下分布刚度作为加权系数的正交条件。式中第一项表示第  $n$  阶振型的边界剪力在第  $m$  阶振型位移上所做的功；第二项表示第  $n$  阶振型的边界弯矩在第  $m$  阶振型相应转角上所做的功。对于简支梁，边界处的位移和弯矩都等于零，所以式 (2.1.10) 中的第一项和第二项都等于零，只剩下第三项，即

蘊  
園  
義曾必曾耕願曾澤越園 (遠野園)

对于悬臂梁, 固支边界处的位移和转角都等于零, 自由边界处的弯矩和剪力都等于零, 所以式 (2.1.10) 中的第一项和第二项都等于零, 仅剩下第三项, 即关于分布刚度的正交条件与简支梁相同。然而对于端部具有弹性支承或端部有集中质量的梁, 式 (2.1.10) 中的前两项对梁产生弯矩和剪力将会有一定的贡献。

## 远隔重洋 梁的动力反应

结构的振型和频率确定之后，就可以按照与离散体系完全相同的方法，采用振型叠加法分析分布参数体系的动力反应，即把振型反应分量的幅值作为广义坐标以确定结构反应。由于分布参数体系有无限多个振型，理论上就要用无限多个这样的广义坐标。但是，在实际工程分析中，只需要考虑对动力反应较大的那些振型分量，就可以得到具有相当精度的结果。因此，对于分布参数体系而言，采用振型叠加法求解结构的动力反应，可以通过将具有无限自由度的分布参数体系转换为以广义坐标表示的离散体系，并且只用有限个振型坐标来描述体系的振动反应。

## 4.1 广义坐标

振型叠加法的基本运算就是把几何位移坐标变换为用振型幅值表示的广义坐标或正规坐标。对于梁这样的一维连续体，这个变换的表达式为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) q_k(t) \quad (4-1)$$

式中， $u(x, t)$  是体系的几何位移坐标； $q_k(t)$  是第  $k$  阶振型的广义坐标，也称振型坐标； $\phi_k(x)$  是第  $k$  阶振型的振型函数。

这个式子的物理意义是：结构上任何约束条件所容许的位移都能用此结构的具有相应幅值的各振型的叠加得到。如图 4-1 所示，悬臂梁的任意位移可以用一组振型分量的和来表示。

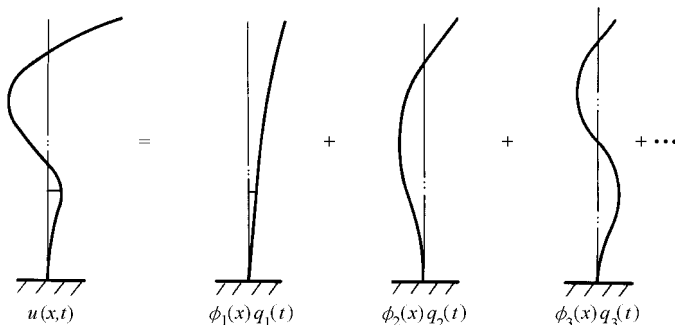


图 4-1 广义坐标表示的悬臂梁的任意位移

上一节已经证明，分布参数结构的振型具有正交性。因此，包含在任意给定形状（如图 4-1 最左边的曲线）中的振型分量可以用正交条件计算得到。为了计算第  $k$  阶振型对任意位移  $u(x, t)$  的贡献，把式 (4-1) 两边乘上  $\phi_k(x)$  并积分，得

$$\int_0^L \phi_k(x) u(x, t) dx = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \int_0^L \phi_k(x) \phi_k(x) dx \quad (4-2)$$

根据正交条件，当  $k \neq n$  时， $\int_0^L \phi_k(x) \phi_n(x) dx = 0$ ，所以右边的无穷级数只剩下了  $k=n$  的一项。由此可以直接解得第  $k$  阶振型的振幅表达式

$$q_k(t) = \frac{\int_0^L \phi_k(x) u(x, t) dx}{\int_0^L \phi_k^2(x) dx} \quad (4-3)$$

它和离散参数的表达式是一样的。

## 10.1 振型叠加法

### 10.1.1 无阻尼体系

下面首先通过简支梁的弯曲振动，说明用振型叠加法求解无阻尼分布参数体系动力反应的原理和做法。

在 9.2 节，已经求得了分布参数梁的运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10.1.1)$$

将式 (10.1.1) 代入上式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi_n(x) w_n(t) = 0 \quad (10.1.2)$$

将式 (10.1.2) 的每一项乘上  $\phi_m(x)$ ，并积分，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_m(x) \left[ \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi_n(x) w_n(t) dx = 0 \quad (10.1.3)$$

由正交条件 (9.2.1) 和式 (9.2.2)，上面级数中除  $n=m$  项外，其余各项都等于零，于是

$$\int_0^L \phi_m(x) \left[ \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi_m(x) w_m(t) dx = 0 \quad (10.1.4)$$

将式 (10.1.4) 代入上式，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \phi_m(x) \left[ \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi_n(x) w_n(t) dx = 0 \quad (10.1.5)$$

记

$$M_n = \int_0^L \phi_n^2(x) dx \quad (10.1.6)$$

$$F_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) q(x, t) dx \quad (10.1.7)$$

分别表示第  $n$  阶振型质量和对应第  $n$  阶振型力，则式 (10.1.5) 可简化为

$$M_n \ddot{w}_n(t) + F_n(t) = 0 \quad (10.1.8)$$

有阻尼体系

对于分布参数的有阻尼体系，其运动方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-2-1)$$

将式 (2-2-1) 代入上式

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \quad (2-2-2)$$

将式 (2-2-2) 的每一项乘上  $\phi_k(x)$ ，积分并利用式 (2-2-3) 和式 (2-2-4)，得

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \quad (2-2-3)$$

显然，在一般情况下，式 (2-2-3) 中的阻尼项相互耦联，因此需要联立方程组求解。但是，如果假定为经典阻尼，则运动方程中的阻尼项解耦，可以直接将运动方程改写为

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \quad (2-2-4)$$

而振型阻尼系数  $\gamma_k$  可以用振型阻尼比  $\zeta_k$  表示为

$$\gamma_k = \zeta_k \omega_k \quad (2-2-5)$$

则有阻尼振型运动方程为

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \quad (2-2-6)$$

在工程上，阻尼比  $\zeta$  通常根据经验或实测值给定。例如，欧洲规范 EN 1993-1-5 建议桥梁动力分析时阻尼比  $\zeta$  按表 2-2 采用。

表 2-2 阻尼比的建议值  $\zeta$  (豫)

| 桥梁类型         | 桥梁跨度 $L$     |           |
|--------------|--------------|-----------|
|              | $L \leq 100$ | $L > 100$ |
| 钢梁或结合梁       | 0.025        | 0.025     |
| 预应力混凝土梁      | 0.025        | 0.025     |
| 钢筋混凝土梁或衬填混凝土 | 0.025        | 0.025     |

用式 (2-2-3) 和式 (2-2-4) 算出相应的振型质量和振型荷载后，即可对结构的每一个振型建立一个形如式 (2-2-3) 或式 (2-2-6) 的方程，它们都是独立

的单自由度方程，也就是说，通过振型坐标变换，就可以将质量、阻尼和刚度矩阵由非对角项耦合的  $n$  个联立运动微分方程转换成为  $n$  个独立的振型坐标方程。对于分布参数体系，可以建立无限多个这样的单自由度方程，每个方程含有一个振型坐标。因此，在计算动力反应时，可按照单自由度体系的解法，首先分别求解每一个振型（正规）坐标的反应  $\bar{y}_i(t)$ ，然后按式（10.10.10）叠加即可得出用原始坐标表示的反应。

可见，体系的总反应等于各个振型贡献的叠加。与离散多自由度体系相同，对于大多数类型的荷载，分布参数体系各个振型所起的作用一般是频率最低的振型最大，高振型则趋向减小。因而在叠加过程中通常不需要包含所有的高振型，当动力反应达到精度要求时，即可舍弃级数的其余各项，从而大大减少了计算工作量。此外，对于复杂结构，其高阶振型的数学建模的可靠性相对较小，在动力反应分析时限定要考虑的振型数也是很必要的。

## 10.10.1 梁的强迫振动

任意支承条件的分布参数体系在任意动荷载作用下的动力反应可以用振型叠加法简单而有效地分析。振型叠加法的第一步是分析体系的固有频率  $\omega_{ni}$  和振型  $\phi_i(x)$ ，建立以振型坐标为变量的标准单自由度体系运动方程，即

$$\ddot{\bar{y}}_i + 2\zeta_i \omega_{ni} \dot{\bar{y}}_i + \omega_{ni}^2 \bar{y}_i = \frac{1}{M_i} \int_0^L \phi_i(x) \ddot{y}(x, t) dx \quad (10.10.11)$$

从式（10.10.11）可以看出，求得结构的自振特性，即频率和振型后，建立这个方程的关键是确定振型质量  $M_i$  和振型力  $\bar{F}_i(t)$ 。下面以等截面梁为例说明这两个广义参数的确定方法，以及采用振型叠加法求解分布参数体系在动荷载作用下的动力反应的几个问题。

### 1. 振型质量

对于等截面梁， $EI$  为常数，所以任意支承条件的等截面梁的振型质量根据式（10.10.11）按下式计算

$$M_i = \int_0^L \phi_i^2(x) dx \quad (10.10.12)$$

等截面梁的振型质量要用到振型函数平方的积分。在 10.10.1 节已经知道，不同支承条件的梁的振型函数是不一样的，对简支梁，令式（10.10.1）中的常数  $C_1$  等于 1，得到标准化的振型函数为

$$\phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{i\pi x}{L}$$

所以

$\text{酝} \begin{matrix} \text{越} \\ \text{灶} \end{matrix} \int \begin{matrix} \text{皂} & \text{灶} & \text{皂} \\ \text{圆} & \text{曾} & \text{圆} \end{matrix}$ 
 （灶越员圆...，肆）（远源员）

而对于悬臂梁、两端固支梁和一端固支一端简支梁，其标准化的振型函数可统一表达为

$\phi_{\text{大}}(\text{曾})$  越  $\text{葬}$  曾 京  $\text{葬}$  曾 垣 月 (精  $\text{葬}$  曾 京  $\text{葬}$  曾) (远 开 圆)

酝<sup>灶</sup>越<sup>园</sup> 耳<sup>灶</sup>泽<sup>灶</sup>博<sup>灶</sup>曾<sup>灶</sup>原<sup>灶</sup>泽<sup>灶</sup>博<sup>灶</sup>曾<sup>灶</sup>垣<sup>灶</sup>月<sup>灶</sup>精<sup>灶</sup>博<sup>灶</sup>曾<sup>灶</sup>原<sup>灶</sup>精<sup>灶</sup>博<sup>灶</sup>曾<sup>灶</sup>丁<sup>灶</sup>曾<sup>灶</sup>越<sup>灶</sup>皂<sup>灶</sup>蕴<sup>灶</sup>  
 (灶越员圆...肆) (远圆员)

圓振型力

(员) 分布荷载：任意分布荷载作用下，分布参数梁的振型力按下式计算

$$\text{孕(賊越)} \int_{\text{同}}^{\text{蘊}} \phi_{\text{越}}(\text{曾孕曾賊孕}) \quad (\text{遠野源})$$

$$\text{孕}_{灶}(\text{贼越}) \int_{\text{园}}^{\text{蕴}} \phi_{灶}(\text{曾孕贼越曾越孕贼}) \phi_{灶}(\text{曾孕曾越孕贼}) \int_{\text{园}}^{\text{蕴}} \phi_{灶}(\text{曾孕曾越孕贼}) \quad (\text{远野园缘})$$

孕(賊越孕賊)蘊灶曾(員原精毒灶)孕賊越孕賊  
 (灶越員猿緣... ,肆) (遠源四)

而对于悬臂梁、两端固支梁和一端固支一端简支梁，其均布荷载振型力可统一表达为

孕越孕贼〔泽薛曾原泽薛曾垣月〔精薛薛曾原精薛曾〕瑞曾（灶越员圆...，肆）  
（远明市）

表 2-20 各种支承条件等截面梁的振型函数积分结果

| 梁的类型      | 振 型                                                                                 |                                                                                     |                                                                                     |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|           | 员                                                                                   | 圆                                                                                   | 猿                                                                                   |
| 简支梁       |  |  |  |
| 悬臂梁       |  |  |  |
| 两端固定梁     |  |  |  |
| 一端固定一端简支梁 |  |  |  |

由于不同类型梁的特征值  $\lambda_n$  是不一样的, 其振型函数积分的结果也是不同的。从表中结果可以看出, 对于等截面简支梁和两端固支梁, 均布荷载只对奇数阶振型起作用, 偶数阶振型的振型力为零。

(圆) 集中荷载: 承受集中荷载的等截面简支梁如图 远圆猿所示, 距左端支座的距离为  $s$

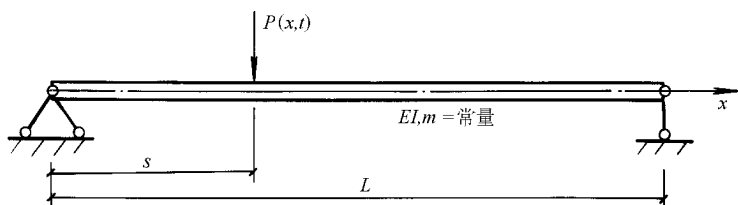


图 远圆猿 等截面简支梁在集中荷载作用下的动力分析

为了便于计算集中荷载的广义力, 将  $P(x, t)$  表示为

$$P(x, t) = P_0 \delta(x - s) \cos \omega t \quad (\text{远圆源})$$

式中,  $\delta$  为 阅圆猿函数, 这是一个非常有用的函数, 这里要用到 阅圆猿函数的两个非常有用的特性

$$\delta(x - s) = \begin{cases} \infty & x = s \\ 0 & x \neq s \end{cases} \quad (\text{远圆缘})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - s) f(x) dx = f(s) \quad (\text{远圆远})$$

集中荷载的表达式 (远圆源) 就是根据 阅圆猿函数的第一个特性写出的。集中荷载作用下梁的振型力可按下式计算

$$P_n(t) = \int_0^L \phi_n(x) P(x, t) dx = P_0 \phi_n(s) \cos \omega t \quad (\text{远圆苑})$$

式中的第二步就是根据 阅圆猿函数的第二个特性直接写出的。可见, 利用 阅圆猿函数可以极大地简化计算。对于等截面简支梁, 其振型力为

$$P_n(t) = \int_0^L \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \delta(x - s) \cos \omega t dx = \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi s}{L} P_0 \cos \omega t \quad (\text{远圆愿})$$

下面简单讨论集中力  $P_0 \cos \omega t$  作用点  $s$  在不同位置时的简支梁振型荷载的特点:

泽越蕴源, 即  $P_0 \cos \omega t$  在 员源跨时

$$P_n(t) = \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi s}{L} P_0 \cos \omega t \quad (\text{远圆怨})$$

容易看出, 当  $\frac{c}{l}$  为原的整倍数时,  $\frac{c}{l}$  此时集中力  $P$  恰好作用在这些振型的节点上, 振型力等于零, 因而对相应振型的影响为零; 当  $\frac{c}{l} \rightarrow \infty$  ... 时,  $\frac{c}{l}$  此时集中力  $P$  恰好作用在这些振型的函数最大值上, 因而对相应振型的影响最大。

即  $P$  在跨中时

$$P_n = \frac{P}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4-10)$$

容易看出, 当  $\frac{c}{l}$  为原的整倍数时,  $\frac{c}{l}$  此时集中力  $P$  恰好作用在这些振型的节点上, 振型力等于零, 因而对偶数阶振型的影响为零; 当  $\frac{c}{l} \rightarrow \infty$  ... 时,  $\frac{c}{l}$  此时集中力  $P$  恰好作用在这些振型的函数最大值上, 因而对奇数阶振型的影响最大。

如果  $P$  是个变数, 例如  $P = P_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  这时

$$P_n = \frac{P_0}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4-11)$$

式中,  $\frac{c}{l}$  表示集中力在梁上移动的速度, 即式 (4-11) 可以用来表示移动荷载的振型力。有关移动荷载作用下简支梁的反应将在下一节做介绍。

而对于悬臂梁、两端固支梁和一端固支一端简支梁, 其均布荷载振型力可由式 (4-12)、式 (4-13) 直接写出

$$P_n = \frac{P_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4-12)$$

如果集中荷载作用于跨中, 广义力为

$$P_n = \frac{P}{l} \left[ \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \right] \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4-13)$$

对于移动集中荷载, 广义力的表达式为

$$P_n = \frac{P}{l} \left[ \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l} \right] \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (4-14)$$

振型坐标方程的求解

求得结构的各阶振型质量  $M_n$  和振型力  $P_n$ , 并且确定各阶振型的阻尼比  $\zeta_n$  后, 即可建立体系的广义坐标方程

$$M_n \ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n}{M_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

任意荷载情况下, 该强迫振动方程的解为

将式(10-10)代入梁的振动位移表达式(10-9),则可得到分布参数梁的振动位移

式中,  $\omega_{n\tau}$  为第  $n$  阶有阻尼自振频率。

将式(10-10)代入梁的振动位移表达式(10-9),则可得到分布参数梁的振动位移

10.3 简支梁在移动荷载作用下的振动

本节介绍简支梁在移动荷载作用下振动分析的基本方法。由简单到复杂,分别讨论不计质量的移动荷载(移动力)、单个车轮(质量)以及单个车轮(簧下质量) 弹簧(阻尼器) 簧上质量通过简支梁时,系统的分析模型和动力平衡方程的建立及其解的表达式。

10.3.1 简支梁在移动力作用下的振动

首先讨论最简单的问题:简支梁在移动力作用下的振动。

对于简支梁,如果移动荷载的质量与梁的质量相比小得多,就可以不考虑荷载的质量惯性力而简化成为图 10-3 所示的分析模型,相当于仅考虑移动荷载的重力作用,用一个移动力  $P(t)$  来表示。

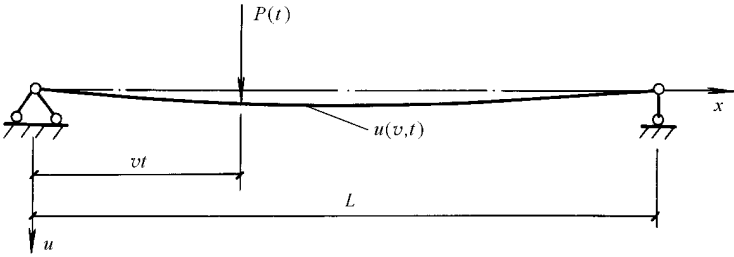


图 10-3 移动力  $P(t)$  作用下的简支梁模型

当荷载  $P(t)$  以匀速  $v$  在梁上通过时,假设梁的运动满足小变形理论并在弹性范围内,按照图 10-3 所示的坐标系,梁的强迫振动微分方程可表示为

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n(x, t)}{\partial t^2} \quad (4-10)$$

式中,  $\delta$  为 Dirac 函数, 可见用 Dirac 函数表示移动荷载是非常方便的。

从 4.1 节已经知道, 这个运动偏微分方程, 可按振型分解法求解, 即将结构的几何坐标变换成振型坐标。对一维的连续体, 这一变换的表达式为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \eta_n$$

对于等截面的简支梁, 振型函数可假定为三角函数,  $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ 。这时, 集中荷载作用下梁的振型力可根据 Dirac 函数的第二个特性, 按式 (4-10) 直接写出

$$F_n(x, t) = \int_0^L \phi_n(x) \delta(x - x_0(t)) dx = \phi_n(x_0(t)) \quad (4-11)$$

得到移动力作用下简支梁第  $n$  阶广义动力平衡方程为

$$m \ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = F_n(x_0(t)) \quad (4-12)$$

通过 Laplace 积分, 可以得到其通解为

$$\eta_n(s) = \frac{F_n(x_0(t))}{m(s^2 + \omega_n^2)} \quad (4-13)$$

将  $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$  和式 (4-13) 代入梁的振动位移表达式 (4-9), 则可得移动力作用下简支梁的振动位移为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{\omega_n} \int_0^t F_n(x_0(\tau)) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (4-14)$$

以上分析的是只有一个移动力的情况, 所得到的结果不难推广到图 4-1 所示的以不同速度  $v_n$  移动的一组集中荷载  $F_n(x)$  的情况, 这时系统的运动方程的解为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{\omega_n} \sum_{m=1}^M \int_0^t F_m(x_0^m(\tau)) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (4-15)$$

在实际分析时, 式 (4-14) 和式 (4-15) 的解可根据分析精度的需要取前几阶。例如对简支梁跨中挠度, 往往取 1 阶振型就可以得到令人满意的结果。

算例 4-1 对图 4-1 所示的简支梁, 当移动力是一个常量  $F(x)$ , 或者是简谐力  $F(x) \sin \omega t$  求体系的位移反应。

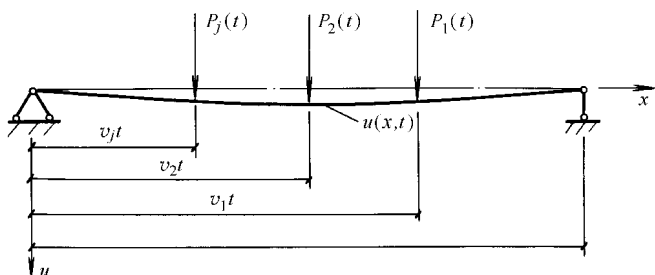


图 10-1 一组移动力荷载作用下的简支梁模型

解：(1) 当移动力等于常量  $P_{jn}$  时， $P_{jn}$  作用下简支梁第  $n$  阶广义动力平衡方程为

$$\frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] = \frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \quad (10-1)$$

式中， $\omega_n$  表示移动力第  $n$  阶振型的加载圆频率。上式与承受正弦荷载的单自由度体系是一样的，可以按照图 10-2 直接得到其稳态反应解

$$\frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] = \frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \quad (10-2)$$

式中， $\beta_n$  为第  $n$  阶加载频率与体系自振频率的比。

因此，梁的位移反应为

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (10-3)$$

(2) 当移动力等于常量  $P_{jn} \sin \omega_n t$  时，简支梁第  $n$  阶广义动力平衡方程为

$$\frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] = \frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \quad (10-4)$$

式中， $\omega_n$  表示移动简谐力的圆频率。

上式与承受正弦荷载的单自由度体系是一样的，可以直接得到其稳态反应解，即

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{jn}}{2} \left[ \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{1}{\beta_n^2} - 1 \right) \cos \beta_n \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (10-5)$$



式中圆括号内各项的物理意义如下：

第一项表示车轮所在位置桥梁振动的竖向加速度；第二项表示由于荷载的移动，使梁的竖向速度产生变化而引起的竖向加速度；第三项表示由于桥梁振动过程中产生曲率，使荷载在竖曲线上移动而产生的离心加速度。显然，后两项与桥梁的刚度及荷载的移动速度有关，对于一般的铁路桥梁（活载作用下产生的变形曲率很小）和现行的行车速度，这两项可以忽略不计。

因此，考虑移动荷载质量的简支梁动力平衡方程为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

按振型分解法求解时，将  $\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t)$  代入上式，梁荷载项可表示为

$$P(x, t) = \int_0^L \delta(x - \xi) \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] \phi_n(\xi) d\xi \quad (2.1.2)$$

对于等截面的简支梁，同样设  $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ ，而  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$  则振型力表示为

$$P_n(t) = \int_0^L \delta(x - \xi) \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right] \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi \xi}{L} d\xi \quad (2.1.3)$$

此式的最后一步未能利用振型的正交条件，这是因为实际荷载只在  $\xi = \xi(t)$  处起作用，积分并不是沿整个梁长进行的。此式的物理意义是：第  $n$  阶振型力是作用于梁上的所有外力乘上外力所在位置处该阶振型的振型函数  $\phi_n(\xi)$ 。必须注意的是作为惯性力，它与质量所在位置的实际梁体加速度而不是某个振型的加速度有关。这个事实说明，尽管采用了振型分解法，但是由于惯性力的存在，各振型之间还是互相耦联的。

将式 (2.1.1) 和式 (2.1.2) 合并整理，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \dot{q}_n(t) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \ddot{q}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) P_n(t) \quad (2.1.4)$$

进一步将等式右边的未知加速度量移到左边，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \dot{q}_n(t) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \dot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \ddot{q}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \ddot{q}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) P_n(t) \quad (2.1.5)$$

由于  $\xi_j$  肆, 这个方程有无穷多个未知变量, 而且是互相不独立的, 似乎看不出这里采用振型分解法有什么好处。但从结构动力学的基本理论可知, 结构的动力反应主要由其前面的若干个低阶振型起控制作用。对于一个复杂的结构, 如果采用振型分解法, 在计算中仅考虑少数一些振型就可以获得满意的精度。即使是具有数百个自由度的空间结构, 取几十个振型计算就可以对其整体振动进行分析, 从而大大减少了计算工作量。

对简支梁来说, 如果位移级数中取  $n$  项, 则整个简支梁的自由度将从无穷多个减少到  $n$  个, 体系运动方程的  $n$  阶矩阵表达式为

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4-10)$$

式中,  $\mathbf{u}$  为振型位移向量,  $\dot{\mathbf{u}}$  为  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n$ ;  $\mathbf{F}$  为振型力向量,  $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$ ;  $[\mathbf{M}]$  为振型质量矩阵, 即

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_1 \phi_{11}^2 & \rho_1 \phi_{12} \phi_{21} & \dots & \rho_1 \phi_{1n} \phi_{n1} \\ \rho_1 \phi_{21} \phi_{12} & m_2 \phi_{22}^2 & \dots & \rho_2 \phi_{2n} \phi_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1 \phi_{n1} \phi_{1n} & \rho_2 \phi_{n2} \phi_{2n} & \dots & m_n \phi_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{C}]$  为广义阻尼矩阵,  $[\mathbf{K}]$  为广义刚度矩阵, 两者均为对角矩阵, 即

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

式中,  $\rho_1 = \frac{m_1}{\phi_{11}^2}$ ,  $\rho_2 = \frac{m_2}{\phi_{22}^2}$ ,  $\phi_{ij}$  为第  $i$  阶振型在  $j$  时刻  $x_j$  位置的函数值, 而  $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ 。

可见, 移动质量作用下的简支梁, 在振型力作用下动力平衡方程组的质量矩阵为非对角的满阵, 它将各个方程耦联在一起, 形成新的联立方程组。对于这样的问题, 采用振型分解法虽然不能使方程组解耦, 但可以通过选择适当的阶数  $n$  而使原来的结构方程组降阶。

由于质量在梁上不断地运动, 振型质量矩阵  $[\mathbf{M}]$  中的系数  $\phi_{ij}$  在不断地变化, 式 (4-10) 成为一个时变系数的二阶微分方程组。对于这样的时变系数微分方程组, 一般只能采用逐步积分的数值法求解。

#### 4.1 简支梁在移动车轮加簧上质量作用下的振动

现代铁路或公路的车辆都装有弹簧减振装置, 这不但降低了移动车辆对桥梁的冲击作用, 也改变了车辆自身的动力性能。本节推广到更加一般的情况, 讨论

简支梁在单个移动车轮（质量）、弹簧（包括阻尼器）、簧上质量作用下的振动分析模型。

如图 2-10 所示，简支梁上的移动荷载是由移动车轮的质量  $M_1$ 、簧上质量  $M_2$ 、弹簧  $k$  和阻尼器  $c$  组成的体系。设梁的动挠度为  $w$ ，簧上质量  $M_2$  的动位移为  $z$ ，簧下质量  $M_1$  假定沿梁长移动而不脱离梁体，则其位移与它所在位置的梁的挠度是一致的，可以表示成  $w$ 。

作用在簧上质量  $M_2$  的力有惯性力  $M_2 \ddot{z}$ 、弹簧由于  $M_2$  和体系所在位置梁的相对位移而产生的弹性力  $k(z - w)$  及阻尼器由于  $M_2$  和体系所在位置梁的相对速度差而产生的阻尼力  $c(\dot{z} - \dot{w})$ 。如图 2-10 所示质量  $M_2$  上的平衡，可以直接导出关于质量  $M_2$  的动力平衡方程，即

$$M_2 \ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{w}) + k(z - w) = M_2 \ddot{w} \quad (2-10)$$

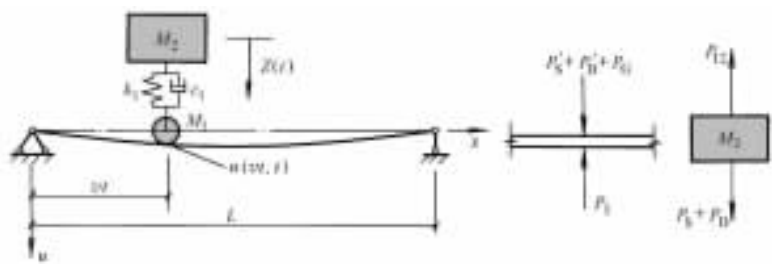


图 2-10 移动车轮加簧上质量作用下的桥梁模型

注意到  $\dot{w} = v \frac{\partial w}{\partial x}$ ，其中第一项表示荷载所在位置梁的振动速度；第二项表示由于荷载的移动，使其在桥梁振动过程中引起的斜率上移动而产生的附加速度。对于一般的桥梁（其活载作用下产生的变形斜率很小）和现行的车速，这一项可以忽略不计。

因此，上式可以写成

$$M_2 \ddot{z} + c \frac{\partial z}{\partial t} + k(z - w) = M_2 \ddot{w} \quad (2-11)$$

按照与前面同样的假定，体系以匀速  $v$  在梁上通过时，作用于梁的荷载包括：移动质量（簧下  $M_1$  簧上  $M_2$ ）的重力  $M_1 g + M_2 g$ ；簧下质量  $M_1$  的惯性力

$\frac{\Delta y}{\Delta t}$ ；弹簧由于  $\Delta y$  和体系所在位置梁的相对位移而产生的弹性力  $\Delta y$  在  $\Delta t$  内  $\Delta y$ ；阻尼器由于  $\Delta y$  和体系所在位置梁的相对

速度差而产生的阻尼力  $\frac{1}{2} \rho C_D A v^2$  在贼原  $\frac{1}{2} \rho C_D A v^2$  管贼

孕(曾,賊越)(曾原墻)孕(鄭,原孕)垣孕(集)垣孕(陳)

越⑥(曾原增)(酝垣圆)早原酝<sup>圆</sup>——<sup>圆</sup>——<sup>圆</sup>垣

囑在賊原怎曾賊]垣糟[在賊原 $\frac{\text{盜匪曾賊}}{\text{剿賊}}$ ]} (遠野遠)

注意到  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$ , 所以作用于梁的外荷载为

$$\frac{\partial \text{孕曾贼越}}{\partial \text{孕原增}} = \left( \frac{\text{孕原增}}{\text{孕原增}} \right) \frac{\partial \text{孕原增}}{\partial \text{孕原增}}$$

囑在賊原怎曾賊]垣槽〔在賊原 $\frac{\partial \text{怎曾賊}}{\partial \text{賊}}$ 〕} (远野源)

因此,考虑车轮质量、弹簧(阻尼器)、簧上质量体系的移动荷载作用下简支梁的动力平衡方程为

$$\begin{aligned} & \text{皂} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} \text{垣糟} \frac{\partial \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} \text{垣赧} \frac{\partial^{\text{源}} \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{曾}} \\ & \text{越} ( \text{曾原} \frac{\partial \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} \{ ( \text{盱} \text{垣} \frac{\partial \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} ) \text{早原} \frac{\partial^{\text{圆}} \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} \text{垣} \\ & \text{赧} \text{在贼原怎曾, 贼} ] \text{垣糟} \left[ \text{在贼原} \frac{\partial \text{怎曾, 贼}}{\partial \text{贼}} \right] \} \quad ( \text{远} \text{远} \text{远} ) \end{aligned}$$

按振型分解法求解时, 将  $\sum_{n=1}^N \phi_n(\xi) q_n(t)$  代入上式, 梁荷载项可表示为

孕(曾, 贼)越孕(曾, 贼)垣孕(曾, 贼) (远野远野)

$$\text{孕}_{\text{人}}(\text{曾}, \text{贼}, \text{越}) \int \text{蕴}_{\text{园}}(\text{曾}, \text{原}, \text{增}) \left[ (\text{酝}_{\text{员}} \text{垣} \text{酝}_{\text{圆}}) \text{早原} \text{酝}_{\text{员}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肆}} \text{择}_{\text{皂}}(\text{贼}) \phi_{\text{皂}}(\text{曾}) \right] \phi_{\text{灶}}(\text{曾}, \text{增})$$

(远界元典)

孕(曾)贼越 $\int_{\text{原}}^{\text{蕴}} \delta(\text{曾原增}) \left\{ \text{噪在贼垣糟在贼原} \sum_{\text{皂越贡}}^{\text{肆}} [\text{噪择(贼垣} \right.$   
 糟择(贼)]  $\phi_{\text{皂}}(\text{曾}) \phi_{\text{灶}}(\text{曾洋曾})$  (远苑元糟)

对于等截面的简支梁, 同样设  $\phi_{\text{灶}} = \frac{\text{灶曾}}{\text{曾越蚤}}$ , 而  $\text{曾越蚤}$  则广义力表示为

孕(曾,賊越[噪在賊垣糟在賊]爇一原Σ[噪擇(賊垣

同理，此式的最后一步未能利用振型的正交条件。

必须注意的是，加在桥梁上的弹性力、阻尼力和惯性力分别与车轮所在位置实际梁体的位移、速度、加速度，而不是某个振型的位移、速度、加速度有关。这个事实说明，尽管采用了振型分解法，但是对于这样的车轮-原弹簧（阻尼器）-原簧上质量的移动荷载体系，桥梁振型之间还是互相耦联的。

对于简支梁，由式 (远野缘) ~ 式 (远野苑)，得

进一步将等式右边的未知位移、速度、加速度量移到左边，得

再考察式 (远) 的簧上质量运动方程, 重写成下式

如果车轮所在位置的桥梁的位移也用振型叠加表示, 且同样设  $\phi_{\mu}$  (曾越



式中， $\rho_{\text{云}}$  越皂蕴， $\rho_{\text{槽}}$  越皂蕴， $\rho_{\text{噪}}$  越皂蕴， $\rho_{\text{云}}$  越皂蕴早， $\phi_{\text{灶}}$  越灶蕴为第灶阶振型在贼时刻曾越灶位置的函数值，且  $\Phi_{\text{灶}}$  越  $\phi_{\text{灶}}$

可见，移动车轮（质量）原弹簧（阻尼器）原簧上质量体系作用下的简支梁，在振型力作用下的动力平衡方程组的质量矩阵为非对角的矩阵，但与 酝圆的耦联项为零，而桥梁振型力动力平衡方程组的刚度矩阵和阻尼矩阵均为非对角的满阵，它们将各个方程耦联在一起，形成新的联立方程组。对于这样的问题，采用振型分解法虽然不能使方程组解耦，但可以通过选择适当的阶数 晕而使原来的平衡方程组降阶。

由于质量在梁上不断地运动，振型质量矩阵 [ 酝 ] 振型刚度矩阵 [ 运 ] 和振型阻尼矩阵 [ 悦 ] 中的系数  $\Phi_{\text{灶}}$  都在不断地变化，成为一个时变系数的二阶微分方程组。对于这样的时变系数微分方程组，一般只能采用逐步积分的数值法求解。

远园 均直梁轴向振动分析

前面讨论了梁的弯曲振动，其中动位移沿弹性轴线的垂直方向。虽然在一维构件的动力分析中，弯曲机理是要考虑的最重要的反应形式，但在某些动荷载作用下，横向运动可以忽略而反应只和平行于弹性轴线的位移有关。这种情形的一个典型例子是打桩过程中桩端受到的锤击。杆沿平行于轴线方向的位移的运动方程可以用类似于研究横向运动的同样过程导出，只是分析更简单，因为只要考虑一个方向而不是两个方向的平衡。

设有非均匀简支直杆，如图 远园所示，沿杆长度 曾方向变化的截面刚度为 耘艾(曾)，单位长度的质量为 皂(曾)，作用在杆上的轴向分布荷载 孕(曾, 贼) 及杆的轴向位移 怎(曾, 贼) 均为随坐标 曾和时间 贼连续变化的函数。

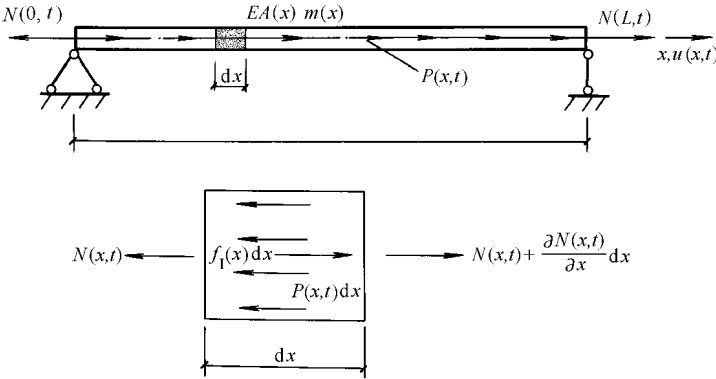


图 远园 杆的轴向振动变形

取杆上任一截面  $x$  处的微段  $dx$  为隔离体。该微段上除作用在两个截面上的轴向力  $N$ 、 $N+dxN$ 、外荷载  $q$ 、 $q+dxq$  外, 根据达朗伯原理, 还有假设的惯性力  $\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , 其中  $\rho$  为单位长度杆的惯性力, 其大小等于

$$\rho = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-1)$$

如图 4-1 所示, 杆在振动过程中该微段隔离体处于动平衡状态。取  $\Sigma F_x = 0$ , 得到力平衡方程为

$$N - (N + dxN) + q dx + \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4-2)$$

整理得

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + q + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4-3)$$

注意到轴向力与变形的关系式为

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-4)$$

其中  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  为杆的轴向应变。

因此, 直杆轴向振动的偏微分方程为

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-5)$$

一般情况下, 轴向振动杆的外荷载仅作用在杆的两端, 此时方程 (4-5) 等号右边应等于零, 而杆端外荷载  $N$  和  $N+dxN$  仅在边界处加以考虑。

直杆轴向振动的固有特性可用分离变量法求解。这里仅考虑等截面的情况, 等截面直杆的自由振动方程为

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4-6)$$

设该方程的解为

$$u(x, t) = \phi(x) \psi(t) \quad (4-7)$$

式中,  $\phi(x)$  表示振动沿轴向分布的形状, 它不随时间变化;  $\psi(t)$  表示随时间变化的振幅。将式 (4-7) 代入式 (4-6), 得到

$$EA \phi''(x) \psi(t) = \rho \phi(x) \psi''(t) \quad (4-8)$$

各项同除以  $\phi(x) \psi(t)$ , 将变量分离得

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\rho}{EA} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} \quad (4-9)$$

上式中左边仅为  $\phi$  的函数，右边仅为  $\omega$  的函数。如果要对所有的  $\phi$  和  $\omega$  都成立，必须都等于一个常数。设该常数为  $\omega^2$ ，则有

$$\frac{\phi'''}{\phi} = \omega^2 = \frac{EI}{m} \frac{u'''}{u} \quad (10-10)$$

将式 (10-10) 展开为两个独立的常微分方程

$$\phi''' = \omega^2 \phi \quad (10-11)$$

$$\phi''' = \omega^2 \phi \quad (10-12)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (10-13)$$

是杆的轴向自由振动的固有频率。

广义坐标方程 (10-11) 的解为

$$\phi = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + C_3 e^{\omega x} + C_4 e^{-\omega x} \quad (10-14)$$

式中， $C_1, C_2, C_3, C_4$  是由初始条件确定的积分常数。

方程 (10-12) 的解为

$$\phi = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + C_3 e^{\omega x} + C_4 e^{-\omega x} \quad (10-15)$$

式中的积分常数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  以及  $\omega$  由杆的边界条件确定。下面通过一个例子说明这些常数的确定方法。

**算例 10-1 悬臂杆。** 等截面悬臂杆如图 10-1 所示。在  $x=0$  处，杆端轴向位移为零，即  $\phi(0) = 0$ 。将这个边界条件代入式 (10-14)，有

$$\phi(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + C_3 e^0 + C_4 e^0 = 0 \quad (10-16)$$

解得  $C_1 = -C_3 - C_4$

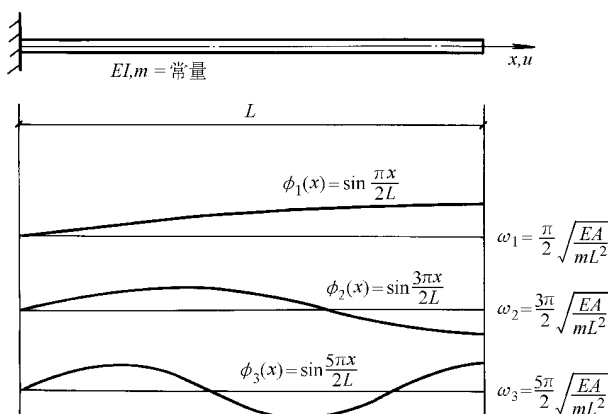


图 10-1 悬臂直杆及其振型

在  $x=0$  处, 杆端应力为零, 即  $\phi'(0) = 0$ 。将这个边界条件代入式 (2-10), 有

$$\phi'(0) = 0 \quad (2-11)$$

因为  $\phi(0) \neq 0$ , 所以必有

$$\cos(\lambda x) = 0 \quad (2-12)$$

这就是悬臂杆的频率方程。根据三角函数关系, 可解得

$$\lambda_n = \frac{(n-1)\pi}{l}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2-13)$$

于是频率可以由式 (2-10) 解得, 即

$$\omega_n = \frac{(n-1)\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-14)$$

将  $\lambda_n$  代入式 (2-10), 得到悬臂杆的振型函数

$$\phi_n(x) = C_n \cos\left(\frac{(n-1)\pi x}{l}\right) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2-15)$$

其中  $C_n$  可以是任意非零常数。

由此可以看出, 具有分布参数的悬臂杆, 其自振频率和振型有无穷多个。图 2-1 给出了悬臂杆的前三阶频率和振型。需要指出的是, 直杆的位移是指振动过程中杆上某一截面沿轴向偏离该截面原始位置的位移。

根据求得的固有频率和振型, 就可以利用振型叠加法, 写出等截面直杆轴向自由振动的全解, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left[ C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \right] \quad (2-16)$$

式中  $\phi_n(x)$  的积分常数  $C_n$  已经并入常数  $C_n$  和  $D_n$  中,  $C_n$  和  $D_n$  需要根据初始条件确定。

简单边界条件的等截面直杆的自由振动共有三种: 悬臂杆 (一端固支, 一端自由)、两端固支杆和两端自由杆。它们的固有频率和振型都可以根据式 (2-10) 和式 (2-11) 利用两种边界条件的组合求得: 刚性固支端轴向位移为零, 即  $\phi(0) = 0$ ; 自由端纵向力 (或应力) 为零, 即  $\phi'(l) = 0$ 。

杆的轴向振动振型同样具有正交性。轴向振型关于分布质量的第一个正交条件可以用功的互等定理方便地得到, 即

$$\int_0^l \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (2-17)$$

轴向振型关于分布刚度的正交性可以通过轴向自由振动方程得到。该方程为

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=0} - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=l} = 0 \quad (10.10)$$

这个方程的第  $n$  阶振型坐标方程已经解出，其形式为

$$\phi_n(\xi) = A_n \sin(\omega_n \xi) + B_n \cos(\omega_n \xi) \quad (10.11)$$

将其代入式 (10.10)，用与弯曲振动类似的方法，可以得到与式 (10.9) 类似的等式，即

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=0} - \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=l} = 0 \quad (10.12)$$

将它代入第一个正交条件，注意到  $\omega_n \neq \omega_m$ ，得到

$$\int_0^l \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = 0 \quad (10.13)$$

通过分部积分，得到

$$\phi_n(l) \phi_m(l) - \phi_n(0) \phi_m(0) + \int_0^l \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = 0 \quad (\omega_n \neq \omega_m) \quad (10.14)$$

上式为一般边界条件下分布刚度作为加权系数的正交条件。式中第一项表示第  $n$  阶振型的杆端轴力在第  $m$  阶振型杆端位移上所做的功；对于杆端固支或自由的简单边界约束的杆，杆端的位移或轴向力等于零，所以式 (10.14) 中的第一项等于零，仅剩下第二项，即

$$\int_0^l \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = 0 \quad (\omega_n \neq \omega_m) \quad (10.15)$$

然而对于端部具有弹性支承或端部有集中力（包括惯性力）的梁，式 (10.14) 中的第一项将会有一定的贡献。

## 10.4 分布参数结构振动分析（动力直接刚度法）

前面几节讨论了具有分布参数的梁的振动分析方法，本节研究更普遍的情况，即由若干杆件组成的分布参数结构的振动分析。

### 10.4.1 分布参数结构的自振特性分析

本节讨论的具有分布参数的梁的自振频率和振型的分析方法，可以直接推广到由若干杆件组成的结构。下面以一个刚架为例，说明分布参数结构的自振特性分析方法。

**算例 10.1** 刚架。图 10.1 所示刚架由两根具有不同特性的等截面杆件构成，杆件①为固定支座，杆件②为铰支座。由于两段之间是不连续的，不能用一个单一的振型函数来表达。两个杆件分别有自己独立的振型函数，由式 (10.15) 确定

为

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 0, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_1''(0) = 0, \quad \phi_1'''(0) = 0 \\ \phi_2(0) &= 0, \quad \phi_2'(0) = 0, \quad \phi_2''(0) = 0, \quad \phi_2'''(0) = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(\text{静}) \\ &(\text{遭}) \end{aligned}$$

对于两个振型函数，有八个待定系数，因此，必须通过八个边界条件来确定。

根据杆件①的边界条件，在  $x_1=0$  处，位移和转角为零，即

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 0 \\ \phi_1'(0) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(\text{静}) \\ &(\text{遭}) \end{aligned}$$

不考虑杆件②的轴向变形，因此在  $x_2=L_2$  处，位移为零，即

$$\phi_2(L_2) = 0 \quad (\text{静})$$

根据杆件②的边界条件，在  $x_2=0$  处为铰接支承，位移和弯矩为零，即

$$\begin{aligned} \phi_2(0) &= 0 \\ \phi_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(\text{静}) \\ &(\text{遭}) \end{aligned}$$

不考虑杆件①的轴向变形，因此在  $x_1=L_1$  处，位移为零，即

$$\phi_1(L_1) = 0 \quad (\text{静})$$

在  $x_1=L_1$  和  $x_2=0$  处，两根杆件的弯矩是平衡的，而转角是连续的，因此有

$$\begin{aligned} \phi_1''(L_1) &= \phi_2''(0) \\ \phi_1'(L_1) &= \phi_2'(0) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(\text{静}) \\ &(\text{遭}) \end{aligned}$$

将两根梁的振型函数式（静、式（遭）分别代入这八个边界条件，可以得到由八个系数组成的八个方程。令得到的系数矩阵的行列式等于零，即可给出体系的频率方程，进一步求得结构的自振频率，具体做法与单根梁相似。这里因参数太多，表达式过于复杂，不再详细列出，作为练习题留给读者自己推导。

从这个例子可以看出，用这种方法进行分布参数结构的振动分析时，必须计算体系每一杆段的四个常数，是非常烦琐的。实际分析时，往往采用更简单实用的方法——动力直接刚度法。

## 4.2 动力直接刚度法

本节介绍一种便捷的方法，用动力直接刚度法来进行分布参数结构体系的振动分析。首先建立梁段单元的动力刚度矩阵，然后按照与静力直接刚度法一样的过程，叠加各梁单元的贡献形成结构的总体刚度矩阵，就可按位移法进行分析，

即解整个体系的刚度方程以求得给定荷载产生的位移。

### 单元弯曲动力刚度矩阵

单元弯曲动力刚度矩阵定义为梁在弯曲变形时的动力刚度系数，即在单元梁端施加单位位移和转角所产生的杆端力和力矩。动力刚度系数与静力刚度矩阵中的刚度系数的差别在于表示节点力和位移的动力刚度系数是随时间按简谐变化的，且具有同样的相位。因此，动力刚度系数表示节点坐标处产生频率为  $\omega$  的单位幅值的简谐位移时，在节点坐标处产生相同频率的简谐力。

等截面弯曲梁单元的节点力和位移的关系如图 10-10 所示。假定该梁单元在梁段跨间不承受外荷载，即  $q(x) = 0$  时，则其运动方程由式 (10-1) 给出，即

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (10-2)$$

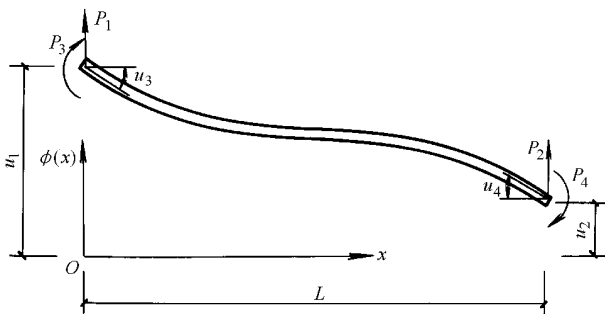


图 10-10 弯曲梁单元的节点力和位移

对频率为  $\omega$  的简谐梁端位移，方程 (10-2) 的特解为

$$u(x, t) = \phi(x) \cdot \sin(\omega t) \quad (10-3)$$

式中， $\phi(x)$  表示振动的形状，它不随时间而变化； $\sin(\omega t)$  表示随时间变化的振幅。

将式 (10-3) 代入式 (10-2)，可直接得到

$$\phi^{(4)} + k^4 \phi = 0 \quad (10-4)$$

式中

$$k^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad \text{或} \quad k^4 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (10-5)$$

方程 (10-5) 是参数  $k$  的函数，而  $k$  则是边界位移强迫频率  $\omega$  的函数，它与梁的自由振动形状函数方程式 (10-1) 具有相同的形式，不同之处是式 (10-1) 中的  $k$  是自振频率  $\omega$  的函数。因此，方程 (10-5) 的解与式 (10-1) 类似，可直接写为

$$\phi(\xi) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega_1} \cosh \omega_1 \xi + \frac{1}{\omega_2} \cosh \omega_2 \xi + \frac{1}{\omega_3} \cosh \omega_3 \xi + \frac{1}{\omega_4} \cosh \omega_4 \xi \right) \quad (4-100)$$

式中的四个常数  $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_3}, \frac{1}{\omega_4}$  决定梁单元振动的形状和振幅，它们可以利用梁端的边界条件确定。

如图 4-100 所示，利用梁段两端点的位移、斜率四个边界条件，可直接得到

$$\phi(\xi_1) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega_1} \cosh \omega_1 \xi_1 + \frac{1}{\omega_2} \cosh \omega_2 \xi_1 + \frac{1}{\omega_3} \cosh \omega_3 \xi_1 + \frac{1}{\omega_4} \cosh \omega_4 \xi_1 \right) \quad (4-101)$$

式中， $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_3}, \frac{1}{\omega_4}$  分别为节点坐标处的简谐线位移和角位移的幅值。

利用梁段两端点的剪力、弯矩四个边界条件，可直接得到

$$\phi'''(\xi_1) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega_1} \cosh \omega_1 \xi_1 + \frac{1}{\omega_2} \cosh \omega_2 \xi_1 + \frac{1}{\omega_3} \cosh \omega_3 \xi_1 + \frac{1}{\omega_4} \cosh \omega_4 \xi_1 \right) \quad (4-102)$$

式中， $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_3}, \frac{1}{\omega_4}$  分别为节点坐标处的简谐力和力矩。

将上面八个边界条件代入振型函数式 (4-100)，整理得到下面两个关系式

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 \\ \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 \\ \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 \\ \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \quad (4-103)$$

和

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 \\ \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 \\ \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 \\ \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \quad (4-104)$$

其中

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{\omega_4} = \frac{1}{\omega_1} \quad (4-105)$$

由式 (4-103) 和式 (4-104) 中将四个常数  $\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \frac{1}{\omega_3}, \frac{1}{\omega_4}$  消去，即可得到梁单元节点位移和节点力之间的关系，即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 \\ \sinh \omega_1 \xi_1 & \cosh \omega_1 \xi_1 & \sinh \omega_2 \xi_1 & \cosh \omega_2 \xi_1 \\ \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 \\ \sinh \omega_3 \xi_1 & \cosh \omega_3 \xi_1 & \sinh \omega_4 \xi_1 & \cosh \omega_4 \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} \\ \frac{1}{\omega_2} \\ \frac{1}{\omega_3} \\ \frac{1}{\omega_4} \end{pmatrix} \quad (4-106)$$

刚度矩阵的分母不能为零，因此必有

$$\frac{1}{\omega_1} \cosh \omega_1 \xi_1 + \frac{1}{\omega_2} \cosh \omega_2 \xi_1 + \frac{1}{\omega_3} \cosh \omega_3 \xi_1 + \frac{1}{\omega_4} \cosh \omega_4 \xi_1 \neq 0 \quad (4-107)$$

梁单元的弯曲动力刚度矩阵为

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{1}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{array} \right) \quad \text{对称} \quad (2.1.10)$$

可见梁单元的动力刚度系数是频率参数  $\omega$  的函数，其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.1.11)$$

考虑刚性轴向位移的单元动力刚度矩阵

在通常的刚架分析中，杆件的轴向变形与弯曲产生的变形相比非常小，因而在确定结构位移时，杆件长度的变化可以忽略不计。但在许多结构体系中，由于杆件挠曲引起的节点位移，可能使某些杆件产生平行于其轴向的刚体位移分量。在结构振动过程中，这些杆件的刚体运动会产生惯性力，从而在其支撑杆件上引起附加力。因此，必须将由此引起的附加系数加入到结构体系的动力刚度矩阵中。

图 2.1.11 给出了这种情况下杆件节点位移和力的关系。

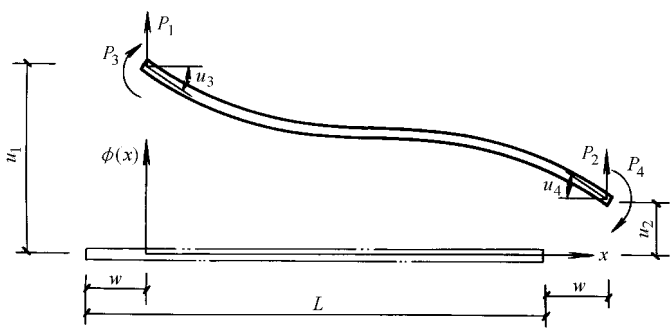


图 2.1.11 考虑轴向刚体运动的梁单元的节点力和位移

如果不计轴向力对于梁的抗弯刚度的影响，则梁的轴向位移对于横向位移和力的关系式也就没有影响。同样，横向位移对轴向力分量亦无影响。在梁的刚度矩阵中要计及轴向位移时，只需要加进表示互不耦合的轴向力和位移关系的一个附加项。因为不计梁的轴向变形，所以轴向力项就表示与梁的刚体轴向加速度相联系的惯性效应，即

$$F = -m \ddot{u} \quad (2.1.12)$$

式中， $m$  表示梁单元的质量， $\ddot{u}$  是其轴向加速度。把这一附加项加入梁的动力刚度矩阵中，导出式 (2.1.10) 的增广形式如下

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对称

式中,  $\lambda$  可以由式 (12-10) 和式 (12-11) 求得, 即

$$\lambda = \frac{EI}{L} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \quad (12-12)$$

很显然, 在静力情况下  $\lambda = 0$  但在动力分析中, 这一项的影响将是重要的。

### 12.2.1 动力直接刚度法

在导出梁的单元动力刚度矩阵之后, 可以按照与静力直接刚度法同样的过程, 组装结构体系的总体刚度矩阵, 建立整个体系的刚度方程, 即

$$\{F\} = [K] \{\Delta\} \quad (12-13)$$

式中的动力刚度系数是频率的函数, 可根据荷载向量  $\{F\}$  的频率直接算出, 然后求解得到体系的节点位移响应。

下面通过两个例子说明动力直接刚度法的用法。

**算例 12-1** 图 12-1 所示刚架由 3 个等截面的杆件组成, 三个杆件的支座均为固定约束, 在节点 1 处作用着一个按简谐变化的外力偶。设荷载的频率为  $\omega$ , 建立刚架的总体刚度矩阵并求解位移反应。

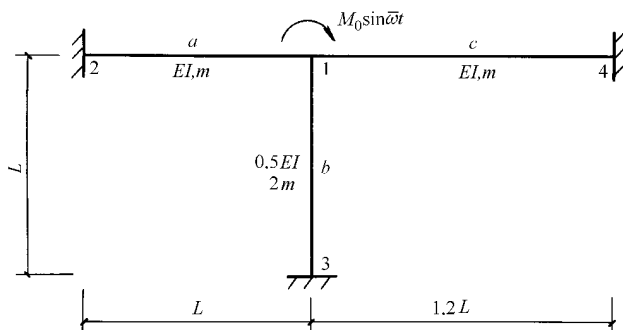


图 12-1 单自由度的刚架

由于不考虑杆件的轴向变形, 所有的杆件都只有横向位移, 这个刚架仅在节点 1 处有一个转动自由度。用动力直接刚度法, 其总体动力刚度矩阵可以由各杆

件的单元动力刚度矩阵组装而成，即

$$\begin{bmatrix} \omega_{葬} & \omega_{葬遭} & \omega_{葬糟} \\ \omega_{遭葬} & \omega_{遭遭} & \omega_{遭糟} \\ \omega_{糟葬} & \omega_{糟遭} & \omega_{糟糟} \end{bmatrix} \quad (远圆园)$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_{葬} &= \sqrt{\frac{K_{葬葬}}{M_{葬葬}}} \quad (葬) \\ \omega_{遭} &= \sqrt{\frac{K_{遭遭}}{M_{遭遭}}} \quad (遭) \\ \omega_{糟} &= \sqrt{\frac{K_{糟糟}}{M_{糟糟}}} \quad (糟) \end{aligned}$$

上式的下标（葬、遭、糟）分别表示各式中的参数均为相应杆件 葬 遭 糟 的频率参数  $\omega_{葬}$  的函数。由式（远圆园）可得

$$\omega_{葬} = \sqrt{\frac{K_{葬葬}}{M_{葬葬}}} \quad (圆)$$

在这个例题中，已知作用荷载弯矩的频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{K_{葬葬}}{M_{葬葬}}} \quad (圆)$$

则杆件 葬 的频率参数  $\omega_{葬}$  为

$$\omega_{葬} = \sqrt{\frac{K_{葬葬}}{M_{葬葬}}} \quad (枣)$$

杆件 遭 的频率参数  $\omega_{遭}$  为

$$\omega_{遭} = \sqrt{\frac{K_{遭遭}}{M_{遭遭}}} \quad (早)$$

杆件 糟 的频率参数  $\omega_{糟}$  为

$$\omega_{糟} = \sqrt{\frac{K_{糟糟}}{M_{糟糟}}} \quad (澡)$$

由式（葬、遭、糟），杆件 葬 遭 糟 的刚度系数分别为

$$\begin{aligned} K_{葬葬} &= \frac{EI}{L^3} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\omega_{葬}}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \quad (蚤) \\ K_{遭遭} &= \frac{EI}{L^3} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\omega_{遭}}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \quad (躁) \\ K_{糟糟} &= \frac{EI}{L^3} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{\omega_{糟}}{\omega} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \quad (噪) \end{aligned}$$

由此得到刚架的总刚度系数为

$$k_{11} = k_{11}^{(a)} + k_{11}^{(b)} + k_{11}^{(c)}$$
 (远)

因此，在荷载力矩  $M_0 \cos \omega t$  作用下产生的节点位移为

$$\Delta = \frac{M_0}{k_{11}} \cos \omega t$$
 (皂)

值得注意的是，在给定的荷载频率  $\omega$  下，杆件 遭对刚架总体刚度的贡献是负值，即由于该杆件较柔，它倾向于使转角增加而不是减小。

图 远圆原清楚地表明了体系总体刚度与荷载频率之间的关系。可以看出，刚架各杆件的刚度系数都随荷载频率变化，当频率超过某些临界点时，一些刚度系数出现了负值，这些点代表具有各种特定支承条件的梁的自振频率。当荷载频率达到某一数值时，刚架体系的总体刚度系数成为零，对于无阻尼的体系，刚度为零说明与荷载发生共振，也就是说，这时的荷载频率就等于体系的自振频率。对于本例中的刚架，由图 远圆原可以看出，当荷载的频率  $\omega$  越接近  $\omega_1$  时，体系的总体刚度系数  $k_{11}$  越接近零。因此，刚架自由振动的基频为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{11}}{mL^4/EI}}$$
 (灶)

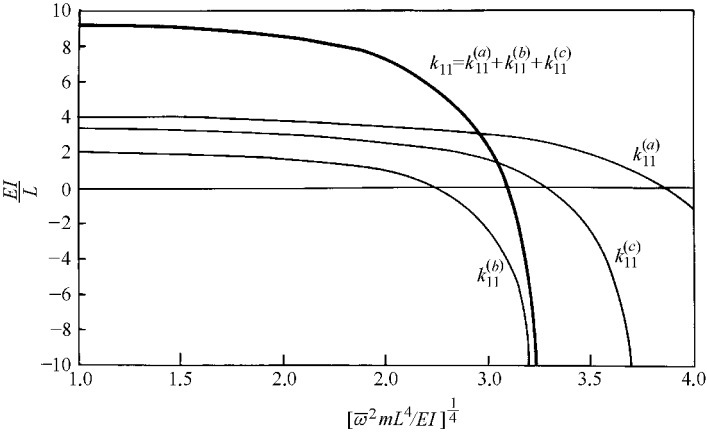


图 远圆原 刚度系数随荷载频率的变化

事实上，对于这样的结构体系，存在无限多个高阶频率，使结点的转动刚度为零，并对应于三根构件上不同位置的幅值零点。

上面是多个杆件组成的单自由度体系的情况。对于有  $n$  个自由度的结构体

系，动力刚度矩阵将成为 晕维的对称刚度方阵，而荷载和节点位移均成为 晕阶向量，可用类似的方法求解。

算例 远愿 图 远愿缘所示为一个带有侧向位移的刚架，节点上分别作用着三个简谐荷载：弯矩 酝<sub>孕</sub>、酝<sub>孕</sub>和轴向力 酝<sub>孕</sub>。为表达的简便，刚架的全部杆件具有相同的长度和截面特性。刚架有三个自由度，转角 怎、怎和线位移 怎。

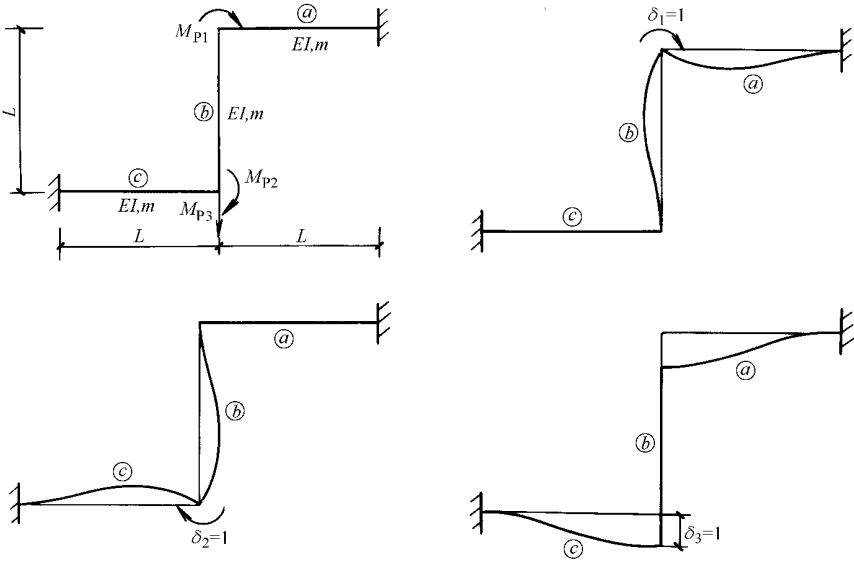


图 远愿缘 具有侧移的多自由度刚架

刚架的节点力与位移之间的关系为

$$\begin{pmatrix} 酝_{孕} \\ 酝_{孕} \\ 酝_{孕} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} \\ 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} \\ 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} & 噪_{孕孕} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 怎 \\ 怎 \\ 怎 \end{pmatrix} \quad (远愿猿)$$

刚度矩阵中，第 孕个自由度的刚度系数 噪<sub>孕孕</sub>等于与该自由度相关的各杆件的相应刚度系数的叠加。例如，当 怎<sub>孕</sub>产生单位转角时，杆件 葬<sub>孕</sub> 遭将发生转动，噪<sub>孕孕</sub>表示这两根杆件在 怎<sub>孕</sub>处产生的杆端弯矩之和，即

$$噪_{孕孕} = 噪_{孕孕} + 噪_{孕孕} + \dots + 噪_{孕孕} \quad (葬)$$

而 噪<sub>孕孕</sub>表示 怎<sub>孕</sub>产生单位转角时，杆件 遭发生转动在 怎<sub>孕</sub>处产生的杆端弯矩，即

$$噪_{孕孕} = 噪_{孕孕} + 噪_{孕孕} + \dots + 噪_{孕孕} \quad (遭)$$

类似地，可以求出其他刚度系数，即

$$k_{11} = \frac{EI}{L^3} \left[ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{槽})$$

$$k_{12} = \frac{EI}{L^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} \right) \right] \quad (\text{槽})$$

$$k_{21} = \frac{EI}{L^2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} \right) \right] \quad (\text{槽})$$

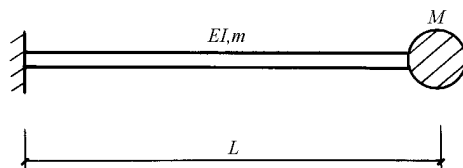
$$k_{22} = \frac{EI}{L} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} \right) \right] \quad (\text{槽})$$

与算例 4-1 类似，对于节点荷载任意给定的频率  $\omega$ ，可以求得这些刚度系数的数值，然后就可以解动力方程式 (4-10)，得到体系的简谐位移向量  $\{y\}$ 。

体系的自由振动频率可以用频率参数  $\beta$  求得，当  $\beta$  使刚度矩阵的行列式为零时，对应的  $\omega$  即为体系的自振频率，其个数应与体系的自由度数相同。

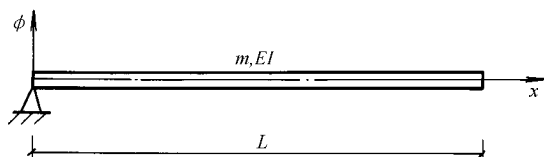
## 习题

题 4-1 对题 4-1 图示的悬臂梁， $EI$  为常数，梁端有一集中质量  $M$ ，试建立梁的频率方程并求出梁的前三阶频率和振型。



题 4-1 图

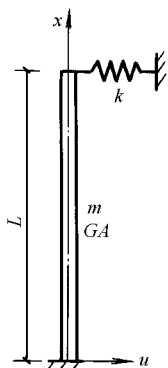
题 4-2 题 4-2 图中长为  $L$  的均匀弯曲直梁的质量线密度为  $m$ ，截面抗弯刚度为  $EI$ ，梁的一端简支而另一端自由，建立计算梁的自振频率和振型的方程式，借助 4-1 近似确定梁的前三阶自振频率并画出前三阶振型。



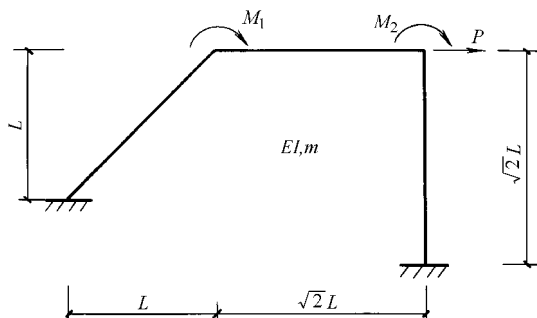
题 4-2 图

题 10-1 对于题 10-1 图给出均直剪切梁，梁的质量线密度为  $m$ ，截面抗剪刚度为  $GA$ ，梁的下端固定而上端由刚度为  $k$  的弹簧支撑，计算剪切梁的自振频率和振型，并画出前三阶振型。

题 10-2 对题 10-2 图所示的刚架，所有杆件的  $EI$  均为常数，两个节点处作用有简谐力矩  $M_1 \cos \omega t$  和  $M_2 \cos \omega t$  和简谐力  $P \cos \omega t$ ，试建立体系的动力刚度矩阵。



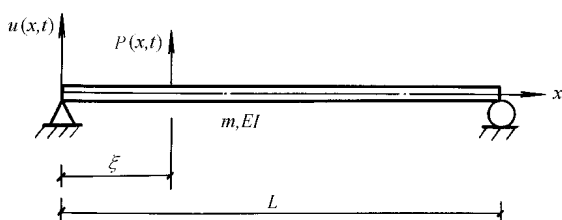
题 10-1 图



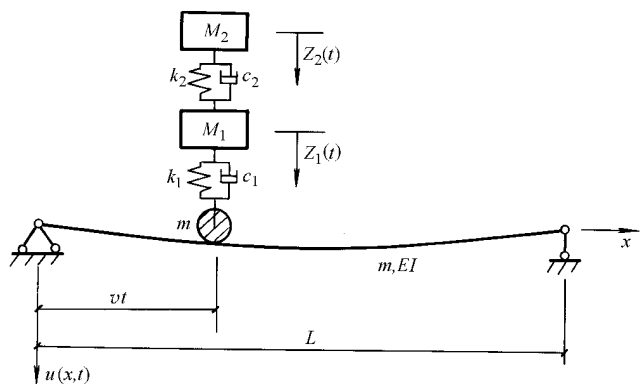
题 10-2 图

题 10-3 题 10-3 图所示为均匀简支梁上作用一横向集中荷载  $P \cos \omega t$ ，其中  $\delta(x, \tau)$  为 Dirac delta 函数，采用基本梁理论和振型叠加法求梁的横向位移  $w(x, t)$ ，截面弯矩  $M(x, t)$  和剪力  $Q(x, t)$  的级数解。通过这三个级数解讨论位移解和内力解的收敛速度比。

题 10-4 对题 10-4 图所示的简支梁， $EI$  均为常数，梁上的双层质量弹簧体系以常速  $v$  通过，设梁的振型函数为  $\sin \frac{n\pi x}{L}$ 。写出体系运动方程的通式，用矩阵表示。写出当质量弹簧体系行至  $x = \frac{L}{2}$  位置时的表达式。



题 10-4 图



题 远图

## 第 苑章 实用振动分析

由前述讨论可知,进行结构动力分析时经常要计算结构的固有频率和振型。然而,对于多自由度体系和无限自由度体系,通常用的精确解法较繁。特别是在实际工程中,一般结构都具有较多的自由度,很难得到自振特性的精确解。另外,实用中常常要迅速得到近似结果,作为初步设计和精确计算的依据。因此,寻求简捷而又具有一定精度的近似计算方法具有十分重要的实际意义。

### 苑圆 能量法

能量法是计算振动体系基频最有效、最简便的方法之一。它是根据能量守恒定律建立起来的,故也称能量法。

根据能量守恒定律,当保守体系按某个频率作自由振动时,没有能量的输入和耗损,则机械能保持为一恒量,即

栽 贼垣灾 贼越悦 (苑圆)

式中,栽为体系在某一时刻的动能;灾为体系在某一时刻的应变能;悦为一常数。

当振动体系幅值达到最大值时,动能为零,而应变能为最大;当体系经过静平衡位置的瞬时,动能为最大值,而应变能为零。根据能量守恒定律,在这两个特定的时刻,有

栽 越灾 (苑圆)

利用这一等式可得到确定频率的方程。

设弹性体系的振动位移为

$$怎 曾 贼越哉 曾 泽( 贼垣 越 )$$

速度为

$$怎 曾 贼越哉 曾 泽( 越 越 )$$

式中,哉 曾为振型函数。

体系的动能为

$$栽 越 越 员 造 皂 曾 怎 曾 贼越 员 圆 泽( 越 越 ) 皂 曾 哉 曾 泽$$

当 泽( 越 越 ) 越 员 时,体系动能最大,即

$$栽 越 越 员 圆 泽( 越 越 ) 皂 曾 哉 曾 泽 (苑圆)$$

体系的应变能（仅考虑弯曲变形）为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\omega''')^2 dx$$

当  $\omega(x) = \sin(\omega t)$  时，体系的应变能最大，即

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\omega''')^2 dx \quad (7-20)$$

将式 (7-19) 和式 (7-20) 代入式 (7-18)，整理得

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI (\omega''')^2 dx}{\int_0^L m \omega^2 dx} \quad (7-21)$$

如果体系上还有  $n$  个集中质量  $m_i$ ，设以  $\omega_i$  表示  $i$  点的振幅，则式 (7-21) 变为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI (\omega''')^2 dx}{\int_0^L m \omega^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i \omega_i^2} \quad (7-22)$$

由式 (7-22) 计算固有频率，仅涉及到积分或求和，所以比直接求解自由振动微分方程方便得多。

利用能量法（能量法）求固有频率，必须知道振型函数  $\omega(x)$ ，而精确的  $\omega(x)$  事先往往是不知道的，故必须先假定一个  $\omega(x)$  来进行计算，由此所得的计算结果就具有一定的近似性，因此这是一种近似方法。若假定的  $\omega(x)$  是第  $n$  阶振型函数，则由式 (7-22) 或式 (7-21) 求得的固有频率为第  $n$  阶频率  $\omega_n$ 。若假定的振型函数是精确的，则求得的固有频率也是精确的。

一般说来，很难较精确地假设出高阶振型函数，因而利用假设高阶振型按式 (7-22) 求得的高阶频率，往往误差较大，故通常利用式 (7-22) 仅计算基本频率。

如果体系上只有集中质量，而不计分布质量时，式 (7-22) 变成

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI (\omega''')^2 dx}{\sum_{i=1}^n m_i \omega_i^2} \quad (7-23)$$

通常可取结构在某种静荷载（如集中荷载  $P_i$  或均布荷载  $q(x)$ ）作用下的挠曲线（弹性曲线）作为振型曲线。这时，体系的应变能  $U_{\max}$  可以更简单的用相应的外力功  $W_{\max}$  来代替，即

$$U_{\max} = W_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \omega_i$$

式中,  $\int_0^l \dot{w}^2 dx$  和  $\int_0^l w \dot{w} dx$  为引起所设曲线  $w(x)$  的静力荷载。

令上式与  $\int_0^l \dot{w}^2 dx$  相等, 则得确定频率的另一公式为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \dot{w}^2 dx}{\int_0^l w \dot{w} dx} \quad (7.10)$$

算例 7.1 用能量法计算两端固定梁的第一频率。设  $EI$  为常数, 单位长度质量为  $m$ 。

解: 用两种方法求解。

(1) 设振型曲线为:

$$w(x) = \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$$

不难看出, 上式满足几何边界条件, 并可以满足力的边界条件中的弯矩边界条件, 但不满足剪力边界条件。

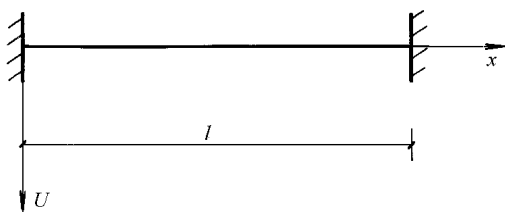


图 7.1 两端固定梁

将上式代入式(7.10)得

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \dot{w}^2 dx}{\int_0^l w \dot{w} dx} = \frac{\int_0^l \left( \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l} \right) dx}{\int_0^l \left( \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \right) \left( \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{2\pi x}{l} \right) dx} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{8}} = 2$$

即

故

精确值为  $\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ , 其误差为 10%。

(2) 改选均布荷载  $P$  作用下的弹性曲线

$$w(x) = \frac{P}{24EI} \left( \frac{l^3}{8} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

作为振型曲线。这时,  $w(x)$  满足全部边界条件。

利用式(7.10), 得

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \dot{w}^2 dx}{\int_0^l w \dot{w} dx} = \frac{\int_0^l \left( \frac{P}{24EI} \left( -\frac{l^2}{2} + l x - x^2 \right) \right)^2 dx}{\int_0^l \left( \frac{P}{24EI} \left( \frac{l^3}{8} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right) \left( \frac{P}{24EI} \left( -\frac{l^2}{2} + l x - x^2 \right) \right) dx} = \frac{\frac{P^2 l^4}{144 E^2 I^2} \int_0^l \left( -\frac{l^2}{2} + l x - x^2 \right)^2 dx}{\frac{P^2 l^4}{144 E^2 I^2} \int_0^l \left( \frac{l^3}{8} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \left( -\frac{l^2}{2} + l x - x^2 \right) dx}$$

即

$$\omega_{\text{圆}} \text{ 越 } \frac{\sqrt{\text{原}}}{\sqrt{\text{皂}}}$$

故

$$\omega_{\text{圆}} \text{ 越 } \frac{\sqrt{\text{原}}}{\sqrt{\text{皂}}}$$

其误差为 垣元原象。

由以上结果可以看出：①所选的两种曲线，大部分或者全部满足边界条件，因此所得结果误差都较小；②所选的第二种振型曲线所得结果误差较小，因为它更接近第一振型；③所得结果与精确值比较都偏大，这是能量法的一个特点。因为假设某一特定的曲线作为振型曲线，即相当于在体系上增加某些约束，从而增大了体系的刚度，因此，所得的频率值将偏大。

## 苑圆 砸赖靠景原圆法

上一节讨论的 砸赖靠景法一般只求第一频率，对于高阶频率，则往往误差较大。本节讨论的方法实质是 砸赖靠景法的演变，它不但可以求得更为精确的第一频率，而且还可以计算高阶频率及相应的振型。

在 砸赖靠景原圆法中，挠度函数不是用上节介绍的简单函数表示，而是用预先选定的一组相互独立函数  $\phi_{\text{蚤}}(\text{曾})$ （称为坐标函数）的线性组合来表示，即

$$\text{故曾越} \sum_{\text{蚤圆}}^{\text{皂}} \text{葬蚤曾} \quad (\text{苑圆})$$

式中，葬为待定常数。 $\phi_{\text{蚤}}(\text{曾})$  的选取原则是使其满足全部或部分边界条件，至少要满足几何边界条件，且接近于第 蚤 振型函数  $\text{哉}_{\text{蚤}}(\text{曾})$ 。

若使求得的  $\omega$  接近于精确值，则应将式 (苑圆) 代入式 (苑圆)，并取得极小值，即有

$$\frac{\partial(\omega_{\text{圆}})}{\partial \text{葬}} \text{ 越 } \frac{\partial}{\partial \text{葬}} \left\{ \frac{\int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{耘圆哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}}}{\int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{皂}(\text{曾}) \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \sum_{\text{蚤圆}}^{\text{灶}} \text{皂蚤} \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾})} \right\} \text{ 越园 } (\text{蚤越员圆}\dots, \text{皂}) \quad (\text{苑圆})$$

展开上式，并令分子等于零，有

$$\left[ \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{皂}(\text{曾}) \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \sum_{\text{蚤圆}}^{\text{灶}} \text{皂蚤} \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \text{葬}} \left\{ \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{耘圆哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \right\} \text{ 原} \\ \left\{ \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{耘圆哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \right\} \cdot \frac{\partial}{\partial \text{葬}} \left[ \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{皂}(\text{曾}) \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \sum_{\text{蚤圆}}^{\text{灶}} \text{皂蚤} \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \right] \text{ 越园} \quad (\text{葬})$$

由式 (苑圆) 得

$$\int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{耘圆哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \text{越} \omega_{\text{圆}}^2 \left[ \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{皂}(\text{曾}) \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \text{曾}^{\text{圆}} \text{曾}^{\text{圆}} \sum_{\text{蚤圆}}^{\text{灶}} \text{皂蚤} \text{哉}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}(\text{曾}) \right] \quad (\text{遭})$$

将式 (20) 代入式 (19), 得

$$\left[ \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) \right\} dt = \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) dt \quad (21)$$

令

$$\pi = \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) dt \quad (22)$$

因此, 由式 (22) 可得

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

由上式可得到一组关于  $\phi_{\alpha}$  的线性齐次方程组, 即

$$\sum_{\alpha=1}^n \left( \phi_{\alpha} \right) \phi_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

式中,  $\phi_{\alpha}$  和  $\phi_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) 为由式 (23) 确定的常数, 即

$$\phi_{\alpha} = \phi_{\alpha} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) dt \quad (25)$$

其中,

$$\phi_{\alpha} = \phi_{\alpha} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} \right) dt \quad (26)$$

由以上两式不难看出,  $\phi_{\alpha}$  和  $\phi_{\alpha}$  分别代表与分布质量和集中质量有关的常数。

令式 (24) 的系数行列式等于零, 即得频率方程为

$$\Delta(\omega) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

求解上式, 一般可求得  $n$  个固有频率的近似值

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \dots \approx \omega_n \quad (28)$$

将  $\omega_{\alpha}$  代入式 (24), 可解出  $n$  个  $\phi_{\alpha}$ , 再代入式 (25) 即得振型函数  $\phi_{\alpha}$ 。

算例 2.1 如图 2.1 所示的悬臂梁, 其梁厚为单位厚度, 梁高按线性变化, 质量和惯性矩为

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left( \frac{y}{h} \right) \\ I &= I_0 \left( \frac{y}{h} \right)^3 \end{aligned} \right. \quad (29)$$

式中,  $\rho$  为质量密度。使用瑞利法求该梁的基频。

解: 梁的边界条件为

当  $x=0$  时,  $y=0, \theta=0$

当  $x=l$  时,  $y=0, \theta=0$

当  $x=l$  时,  $M=0, Q=0$

为

为满足以上边界条件, 可取

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \frac{x}{l} \right)^n \left( \frac{y}{b} \right)^n \quad (7-1)$$

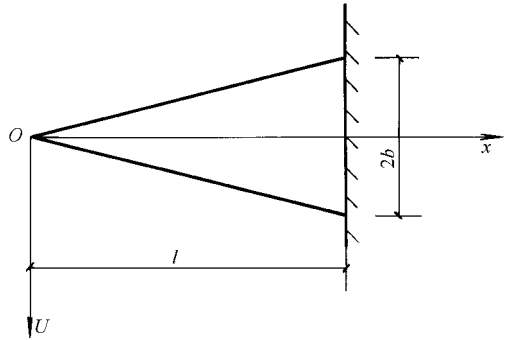


图 7-1 变截面悬臂梁

如只取一项, 即令

$$y = A_1 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2$$

则由能量法, 即由式 (7-1) 可求得

$$\omega^2 = \frac{U}{\rho b^2 l^3}$$

所以

$$\omega = \sqrt{\frac{U}{\rho b^2 l^3}}$$

与精确值  $\omega = \sqrt{\frac{U}{\rho b^2 l^3}}$  相比较, 误差为 10%。

若在式 (7-1) 中取第二项, 即

$$y = A_1 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + A_2 \left( \frac{x}{l} \right)^4 \left( \frac{y}{b} \right)^4 \quad (7-2)$$

则将上式代入式 (7-1), 得

$$\pi \int_0^l \left\{ \left[ \frac{1}{2} \rho b^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \left[ \frac{1}{2} \rho b^2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \right\} dx = \frac{1}{2} \rho b^2 \int_0^l \left[ \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] dx$$

由上式求得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial A_1} &\Rightarrow \left( \frac{1}{2} \rho b^2 \frac{\omega^2}{l^3} \right) A_1 \left( \frac{1}{2} \rho b^2 \frac{\omega^2}{l^3} \right) A_1 \\ \frac{\partial \pi}{\partial A_2} &\Rightarrow \left( \frac{1}{2} \rho b^2 \frac{\omega^2}{l^3} \right) A_2 \left( \frac{1}{2} \rho b^2 \frac{\omega^2}{l^3} \right) A_2 \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

令  $A_1, A_2$  的系数行列式等于零, 即得频率方程式

$$\left(\frac{\gamma_{11} \omega^2}{\rho \gamma_{11} \omega^2 - \gamma_{11}}\right) \left(\frac{\gamma_{12} \omega^2}{\gamma_{12} \omega^2 - \gamma_{12}}\right) \dots \left(\frac{\gamma_{1n} \omega^2}{\gamma_{1n} \omega^2 - \gamma_{1n}}\right) \gamma_{1n} \quad (4)$$

解之，得  $\omega_{11}$ ，与精确值比较起来，误差还不到  $\frac{1}{1000}$ 。可见，采用合适的独立函数，用  $\frac{\gamma_{11} \omega^2}{\rho \gamma_{11} \omega^2 - \gamma_{11}}$  法计算自振频率，其精确度是很高的。

如果要求振型，则可令  $\gamma_{11}$  由式 (3) 之任一式可以求得  $\gamma_{11}$ ，将  $\gamma_{11}$  代入式 (4)，即得

$$\gamma_{11} \omega_{11}^2 \left( \frac{\gamma_{11} \omega_{11}^2}{\gamma_{11} \omega_{11}^2 - \gamma_{11}} \right) \gamma_{11} \omega_{11}^2 \left( \frac{\gamma_{11} \omega_{11}^2}{\gamma_{11} \omega_{11}^2 - \gamma_{11}} \right) \dots \gamma_{11} \omega_{11}^2 \left( \frac{\gamma_{11} \omega_{11}^2}{\gamma_{11} \omega_{11}^2 - \gamma_{11}} \right) \gamma_{11} \omega_{11}^2$$

一般说来，如果要求出前  $n$  个频率及相应的振型，则所取的独立函数的项数必须大于  $n$ ，最好不小于  $2n$ 。显然，取的项数愈多，计算结果也就愈精确，但计算量也就愈大。

矩阵迭代法

本节将介绍一种求多自由度体系频率和振型的逐步逼近方法——矩阵迭代法。该方法既可以求体系的基频和振型，也可以求高阶频率和振型。

用矩阵迭代法求基频和振型

对于任意多自由度体系，其位移方程可以表示为

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc} \gamma_{11} \omega^2 - \gamma_{11} & \gamma_{12} \omega^2 & \dots & \gamma_{1n} \omega^2 \\ \gamma_{21} \omega^2 & \gamma_{22} \omega^2 - \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} \omega^2 & \gamma_{n2} \omega^2 & \dots & \gamma_{nn} \omega^2 - \gamma_{nn} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \gamma_{11} \omega^2 \\ \gamma_{12} \omega^2 \\ \dots \\ \gamma_{1n} \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

上式简写为

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ii} \omega^2 \gamma_{ii} \omega^2 \left( \frac{\gamma_{ii} \omega^2}{\gamma_{ii} \omega^2 - \gamma_{ii}} \right) \gamma_{ii} \omega^2 \quad (6)$$

式中， $\gamma_{ii}$  为第  $i$  个质点的振幅。式 (5) (或式 (6)) 用矩阵的形式表示为

$$\gamma_{ii} \omega^2 \gamma_{ii} \omega^2 \left( \frac{\gamma_{ii} \omega^2}{\gamma_{ii} \omega^2 - \gamma_{ii}} \right) \gamma_{ii} \omega^2 \quad (7)$$

式中

$$\text{刚度矩阵} = \begin{pmatrix} \text{刚度}_{11} & \text{刚度}_{12} & \dots & \text{刚度}_{1n} \\ \text{刚度}_{21} & \text{刚度}_{22} & \dots & \text{刚度}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{刚度}_{n1} & \text{刚度}_{n2} & \dots & \text{刚度}_{nn} \end{pmatrix}$$

称为动力矩阵； $\text{刚度}_{11} \text{刚度}_{12} \dots \text{刚度}_{1n}$ 。

现在用迭代法求第一频率和相应振型。任何一个固有频率  $\omega_{\text{第一}}$  和振型  $\text{振型}_{\text{第一}}$  都满足式 (7-10)，这里， $\omega_{\text{第一}}$  和  $\text{振型}_{\text{第一}}$  都是未知的。现假定一个振型  $\text{振型}_{\text{假定}}$  作为第一振型的第一次近似，代入式 (7-10) 左边，令

$$\text{振型}_{\text{假定}} \text{越} \omega_{\text{假定}}^2 \text{振型}_{\text{假定}}$$

如果  $\text{振型}_{\text{假定}}$  是真正的振型，必满足式 (7-10)，即有

$$\text{振型}_{\text{假定}} \text{越} \frac{1}{\omega_{\text{第一}}^2} \text{振型}_{\text{假定}}$$

上式表明，真实振型的标志是所得振型  $\text{振型}_{\text{第一}}$  与假定振型  $\text{振型}_{\text{假定}}$  成比例。如不成比例，则把  $\text{振型}_{\text{第一}}$  归一化成  $\text{振型}_{\text{第一}}$ ，该值作为假定振型继续迭代，直至成比例为止。这时有

$$\text{振型}_{\text{第一}} \text{越} \frac{1}{\omega_{\text{第一}}^2} \text{振型}_{\text{第一}} \quad (7-11)$$

这样反复迭代，即可逐步逼近第一频率和振型的精确值。

证明：为了清晰起见，下面用展开式来证明。由前述可知，任何一种变形形式都表示为  $n$  个振型的线性组合。因此，可将最初任意假定的变形形式  $\text{振型}_{\text{假定}}$ （ $\text{振型}_{\text{假定}} = \text{振型}_{11} \text{振型}_{12} \dots \text{振型}_{1n}$ ， $\text{振型}_{11}$  为第一振型  $\text{振型}_{11}$  的第一次近似值）表示如下

$$\text{振型}_{\text{假定}} \text{越} \sum_{i=1}^n \eta_{i1} \text{振型}_{i1} \quad (7-12)$$

式中， $\eta_{i1}$  称为振型参与系数。

利用正交条件，由上式可以求出

$$\eta_{i1} \text{越} \frac{\sum_{j=1}^n \text{刚度}_{ij} \text{振型}_{j1}}{\sum_{j=1}^n \text{刚度}_{ij} \text{振型}_{j1}} \quad (7-13)$$

并规定  $\text{振型}_{11} \text{越} 1$ ， $\text{振型}_{12} \text{越} \eta_{21}$ ， $\text{振型}_{13} \text{越} \eta_{31}$ ， $\dots$ ， $\text{振型}_{1n} \text{越} \eta_{n1}$ 。

将式 (7-12) 代入式 (7-10)，得

$$\sum_{i=1}^n \text{刚度}_{ij} \left[ \sum_{k=1}^n \eta_{k1} \text{振型}_{k1} \right] \text{越} \sum_{i=1}^n \eta_{i1} \sum_{j=1}^n \text{刚度}_{ij} \text{振型}_{j1} \text{越} \sum_{i=1}^n \eta_{i1} \frac{1}{\omega_{\text{第一}}^2} \text{振型}_{i1} \quad (7-14)$$

这表示一新的振型，设以  $\text{振型}_{\text{第一}}$ （ $\text{振型}_{\text{第一}} = \text{振型}_{11} \text{振型}_{12} \dots \text{振型}_{1n}$ ）表示，即

$$\text{振型}_{\text{第一}} \text{越} \sum_{i=1}^n \eta_{i1} \frac{1}{\omega_{\text{第一}}^2} \text{振型}_{i1} \quad (7-15)$$

需要指出的是，经过一次迭代后，这一新的振型  $\bar{u}_1^{(2)}$  不满足  $\bar{u}_1^{(1)}$  越的条件。因此，应重新归一化，即把  $\bar{u}_1^{(2)}$  写成如下形式

$$\bar{u}_1^{(2)} = \frac{1}{\omega_1^{(2)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(2)} \bar{u}_j^{(1)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶}) \quad (20)$$

这里用  $\bar{u}_1^{(1)}$  的第二次（归一化）近似值。

将式 (20) 代入式 (19)，得

$$\bar{u}_1^{(2)} = \frac{1}{\omega_1^{(2)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(2)} \bar{u}_j^{(1)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶})$$

再将  $\bar{u}_1^{(2)}$  代入式 (19) 的左边，同上步骤，可得  $\bar{u}_1^{(2)}$  的第三次近似值，即

$$\bar{u}_1^{(3)} = \frac{1}{\omega_1^{(3)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(3)} \bar{u}_j^{(2)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶})$$

重复这样的过程，迭代  $n$  次后，得到  $\bar{u}_1^{(n)}$  的第  $n$  次近似值

$$\bar{u}_1^{(n)} = \frac{1}{\omega_1^{(n)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(n)} \bar{u}_j^{(n-1)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶}) \quad (21)$$

由于

$$\frac{1}{\omega_1^{(n)}} \approx \frac{1}{\omega_1^{(n-1)}} \approx \dots \approx \frac{1}{\omega_1^{(1)}}$$

故经多次迭代后，在式 (21) 的求和符号内，除第一项外，其余各项都可略去不计，即有以下的近似关系式

$$\bar{u}_1^{(n)} \approx \frac{1}{\omega_1^{(n)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(n)} \bar{u}_j^{(n-1)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶}) \quad (22)$$

在式 (22) 中令  $\eta_j^{(n)} = 1$ ，并注意有  $\bar{u}_1^{(n)} \approx \bar{u}_1^{(n-1)}$ ，故

$$\frac{1}{\omega_1^{(n)}} \approx \frac{1}{\omega_1^{(n-1)}} \approx \dots \approx \frac{1}{\omega_1^{(1)}} \quad (23)$$

于是，由式 (22) 可知

$$\bar{u}_1^{(n)} \approx \bar{u}_1^{(1)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶}) \quad (24)$$

从以上推导可以看到，虽然最初假定的变形形式包含所有振型成分，但经过多次迭代以后，含有高振型的项都趋于零，即迭代结果收敛于第一振型。证毕。

为了计算固有频率，对式 (22) 可以再作一次迭代，则得

$$\bar{u}_1^{(n+1)} = \frac{1}{\omega_1^{(n+1)}} \sum_{j=1}^n \eta_j^{(n+1)} \bar{u}_j^{(n)} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \text{灶})$$

在上式中令  $\omega_{\text{越}}^2$ , 并注意到式 (4-10) 以及  $\omega_{\text{越}}^2$  和  $\omega_{\text{越}}^2$ , 可得

$$\omega_{\text{越}}^2 \frac{\mathbf{y}}{\omega_{\text{越}}^2} = \mathbf{y} \quad (4-11)$$

用矩阵迭代法计算基频和振型的步骤: 先假定一归一化振动形式  $\mathbf{y}_0$ , 圆 ... , 灶, 即向量  $\mathbf{y}_0$  作为第一次近似值, 然后代入式 (4-10) 的左侧, 经矩阵运算得一新的向量, 将其归一化, 即为第二次近似值  $\mathbf{y}_1$ ; 再将  $\mathbf{y}_1$  代入式 (4-10) 的左侧, 经同样运算得第三次近似值  $\mathbf{y}_2$ ; 重复此迭代过程, 直到相邻两次的迭代结果相近, 即满足

$$\mathbf{y}_n \approx \mathbf{y}_{n-1}$$

为止, 这样就得到第一阶振型, 即

$$\mathbf{y}_1 \approx \mathbf{y}_0$$

### 4.2.2 用矩阵迭代法求高阶频率和振型

利用矩阵迭代法也可求高阶频率和振型。如拟求二阶频率和振型, 则应使迭代过程收敛于二阶振型。为此, 令式 (4-10) 中的  $\eta_{\text{越}}^2$  亦即使所假定的振动形式不包含一阶振型分量, 这样迭代过程就收敛于二阶振型。由式 (4-10) 可知, 为使  $\eta_{\text{越}}^2$  则  $\mathbf{y}$  应满足下述条件

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{y} = 0 \quad (4-12)$$

亦即必须使假定的  $\mathbf{y}$  与一阶振型  $\mathbf{y}_1$  正交。而由于  $\mathbf{y}_1$  (圆 ... , 灶) 已经求出, 这一正交条件实际上就是关于  $\mathbf{y}$  的一个过程。从式 (4-12) 可以解出  $\mathbf{y}$ , 即

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1} \quad (4-13)$$

因此, 若我们只假定  $\mathbf{y}_0$  (圆 ... , 灶), 而从式 (4-13) 中解出  $\mathbf{y}_1$ , 则迭代的结果即应收敛于二阶振型。但是, 由于对一阶振型所求的只是近似值, 而且数字运算难免产生一定误差 (如截断误差等), 因此, 经过上述处理后, 只能做到  $\eta_{\text{越}}^2 \approx 0$ , 即总会包含一个数值很小的一阶振型分量。这个分量经过多次迭代之后, 将逐渐增大, 最后仍可能收敛于一阶振型。为了避免这种情况, 在每次迭代之前都需要进行上述处理 (消除一阶振型分量), 即通过将式 (4-13) 所示的正交关系直接代入式 (4-10) 来实现。这样, 式 (4-10) 即变为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T \mathbf{y}}{\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1} \quad (4-14)$$

我们即利用上式求二阶振型, 将其写成矩阵形式, 即

(方型図)

式中

为求二阶振型的动力矩阵。

$\eta_{\text{圆}}$  越园, 亦即须使所假定的振型形式分别与一阶振型和二阶振型正交, 即应满足

或

(噪

将两式相减得

(造

代入式 (噪) 中的任一式, 可得

(皂)

将 (造) (皂) 两式代入式 (5) 中, 得

(方型隠)

写成矩阵形式，为

(方聖院)

式中

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \cdots & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \cdots & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \cdots & \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为求三阶振型的动力矩阵。其中

$$\frac{1}{k_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

根据方程 (7-23) 即可计算三阶频率和振型。

算例 7-1 图 7-1 所示为具有三个自由度的剪切型悬臂体系。各质量分别为  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ; 各层的侧移刚度分别为  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ 。求前三阶频率和振型。

解：计算各柔度系数

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{k_1} \\ \delta_{12} &= \frac{1}{k_1} \\ \delta_{13} &= \frac{1}{k_1} \\ \delta_{22} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \\ \delta_{23} &= \frac{1}{k_1} \\ \delta_{33} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \end{aligned}$$

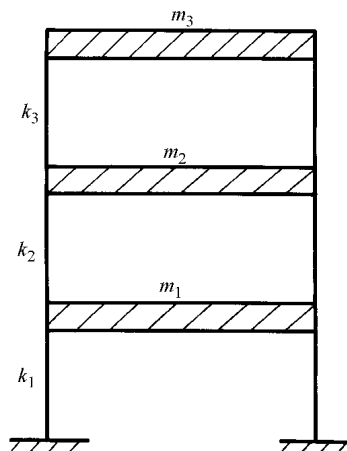


图 7-1 三层刚架

一阶频率和振型  
动力矩阵为

设一阶振型的第一近似值为

则

再进行迭代：

后两次迭代结果已较接近，故可停止运算。

$\omega_{\text{越}} \sqrt{\frac{\text{员}}{\text{勇 园 伊 园 缘 粤 越 园 越 苑 园 越 苑 员 越 园 栽}}}$

### 圆二阶频率和振型

设二阶振型的第一次近似值为

则

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{原} & \text{原} & \text{园} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{原} & \text{原} & \text{园} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \dots \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{原} & \text{原} & \text{园} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \\ \text{原} & \text{原} & \text{原} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

后两次迭代结果已比较接近，即停止运算。由此可得

$$\omega_{\text{园}} = \sqrt{\frac{\text{园}}{\text{园}}}$$

三阶频率和振型

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

可以看出，三阶振型即为

$$\{ \text{园} \text{园} \text{园} \}$$

归一化后，得

$$\left( \begin{array}{ccc} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{array} \right)$$

[illegible]

雅可比迭代法是最常用的方法之一，它是一种旋转变换方法，通过正交相似变换把矩阵化为对角矩阵，从而得到原矩阵的特征值和特征向量。

由矩阵分析理论可知,任何  $n$  阶实对称矩阵  $A$ , 可通过一个  $n$  阶正交矩阵  $Q$ , 经过相似变换  $Q^{-1}AQ$  化为一个对角阵  $\Lambda$ , 即  $Q^{-1}AQ = \Lambda$  (或  $Q^T A Q = \Lambda$ )。其中对角元素  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的特征值,  $Q$  的各列为  $A$  的各特征向量。

若用  $\mathbf{U}^{(0)}$  表示原矩阵, 一系列正交变换矩阵为  $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots$ , 则变换到  $k$  次 ( $k=1, 2, \dots$ ) 时, 可表示为

粵 噪 越 砸 粵 噪 京 員 砸 ( 殭 屍 園 )

如果矩阵  $\mathbf{B}$  的非对角元素中绝对值最大者为  $B_{ij}$ ，则  $\mathbf{B}$  具有如下形式

The diagram illustrates a 2D coordinate system with the following components:

- Vertical Axis (第 责列):** Labeled with '第 责列' at the top. It has tick marks and labels for '第 责行' and '第 择行'.
- Horizontal Axis (第 择列):** Labeled with '第 择列' at the top. It has tick marks and labels for '第 责行' and '第 择行'.
- Origin (员):** The intersection of the axes is labeled '员'.
- Grid Points:** A grid of points is shown, with labels '员', '第 责行', '第 择行', and '员' at various positions.

由  $\mathbf{C}$  的对称性可知, 矩阵  $\mathbf{C}^{\text{噪}}(\text{噪越员, 圆, …})$  全是对称的, 并且  $\mathbf{C}^{\text{噪}}$  与  $\mathbf{C}^{\text{噪原员}}$  的元素仅在第 责行、第 择行、第 责列、第 择列彼此不同, 由式 (苑园) 计算得

[illegible]

若要使 葬<sub>噪</sub>越葬<sub>噪</sub>越园, 由上式即得

一(葬<sup>原</sup>葬<sup>原</sup>)泽园垣葬<sup>原</sup>糟园越园

进而得到确定  $\theta$  的条件为

藤原(源氏)  
藤原(源氏) 藤原(源氏)

(死別)

为避免计算三角函数及反三角函数, 我们考察上式右端, 它可在  $(\text{原肆}, \text{垣肆})$  取值, 因此  $\text{肆圆}$  可在与其周期长度相同的任一区间单值地定义; 现取  $\text{圆} \in \left[ \text{原}\frac{\pi}{\text{圆}}, \frac{\pi}{\text{圆}} \right]$ , 即  $\theta \in \left[ \text{原}\frac{\pi}{\text{源}}, \frac{\pi}{\text{源}} \right]$ , 这时, 如果  $\text{葬}\frac{\text{源原}}{\text{葬}} \rightarrow \text{原葬}\frac{\text{源原}}{\text{葬}}$  越圆, 则当  $\text{葬}\frac{\text{源原}}{\text{葬}}$  跃圆,  $\text{肆圆} \rightarrow \text{原肆}$ ,  $\theta$  越原 $\frac{\pi}{\text{源}}$ ; 当  $\text{葬}\frac{\text{源原}}{\text{葬}}$  约圆,  $\text{肆圆} \rightarrow \text{垣肆}$ ,  $\theta$  越 $\frac{\pi}{\text{源}}$ ; 又当  $\theta \in \left[ \text{原}\frac{\pi}{\text{源}}, \frac{\pi}{\text{源}} \right]$  时,  $\text{精}\frac{\text{源}}{\text{葬}} \in \left[ \frac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{圆}}, \frac{1}{\text{圆}} \right]$  跃圆,  $\text{泽}\frac{\text{源}}{\text{葬}} \in \left[ \text{原}\frac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{圆}}, \frac{\sqrt{\text{圆}}}{\text{圆}} \right]$  是一个单调函数。这样, 若记

$$\left. \begin{array}{l} \nu \text{越葬}_{\text{墓}}^{\text{(原)}} \text{原葬}_{\text{瘞}}^{\text{(原)}} \\ \mu \text{越葬}_{\text{墓}}^{\text{(原)}} \text{原葬}_{\text{瘞}}^{\text{(原)}} \end{array} \right\} (\text{死到源})$$

则

摩圓越轅 (殉殤)

考虑到  $\theta$  的取值范围,  $\frac{1}{\sin \theta} \geq 1$ , 故由

$$\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{员可康}}}\quad \text{越曹固}\quad \text{越曹界}\quad \text{原蚤丑}\quad \text{越固曹界}\quad \text{原员}$$

得

精釋越  $\left( \frac{\sqrt[3]{\text{垣}} \sqrt[3]{\text{圓垣}}}{\text{圓} \sqrt[3]{\text{圓垣}}} \right)^{\text{員圓}}$  (苑圖)

通过三角恒等式

得

设孕越砸砸...砸, 则

粵越平亂 (殲野郎)

若记对  $\theta$  作  $n$  次旋转变换的  $n$  个初等旋转阵的乘积为  $P_n(\theta)$ , 越砸越砸... 砸越砸越砸, 其中  $P_n(\theta)$  的元素  $p_{ij}$  可由  $P_1(\theta)$  的元素  $p_{ij}^{(1)}$  表示为

孕喘越孕<sup>喘京力</sup>糶孕原孕<sup>喘京力</sup>澤孕

孕喘越孕<sup>喘京力</sup>澤孕垣孕<sup>喘京力</sup>糶孕

孕喘越孕<sup>喘京力</sup>(躁責掙)

(殫)同

当  $\lambda = \lambda_i$  时, 已认定  $A$  被对角化, 则  $\lambda_i$  对应的第  $i$  个特征向量, 且已规范化和正规范化。

一般的说, 不能通过有限次旋转把  $\mathbf{B}$  化到真正的对角阵, 但已经证明, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 。所以, 只能在预先指定的精度范围内, 得到近似的对角阵, 求得近似的特征值及对应的特征值向量。实际计算时, 先给定一个正数界限  $\epsilon$ , 然后按顺序  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  逐个地检查  $\mathbf{B}$  的非对角元, 凡绝对值大于  $\epsilon$  的, 都属被消去之列, 绝对值小于  $\epsilon$  者放过。重复上述过程, 直到所有非对角元的绝对值都小于  $\epsilon$ ; 然后选取  $\lambda_i$ , 再重复上述步骤,  $\dots$ , 一直到所有非对角元都小于正数  $\epsilon$  为止, 而  $\lambda_i$  且已小于事先给定的精度指标  $\epsilon$ 。

对于 贼约贼... 约贼约贼 的选取没有特定的方法, 通常由 粤的某一种范数  $\|\cdot\|$  或 粤原范数 (葬) 的范数  $\|\cdot\|$  (如选 粤原范数 (葬) 的  $\|\cdot\|$  范数) 来获得, 即

员(灶)葬(墓)  
 越(灶)葬(墓) }  
 粤原(墓)葬(墓) }  
 云(墓)葬(墓) }  
 ... }  
 越(灶)葬(墓) }  
 粤原(墓)葬(墓) }  
 云(墓)葬(墓) }  
 ... }

综上所述, 矩阵迭代法的计算步骤:

(1) 记  $\mathbf{C}^{(0)}$  为  $\mathbf{C}$ , 给定精度指标  $\varepsilon$ , 由式 (4-10) 得  $\mathbf{C}^{(1)}$

(2) 考察  $\mathbf{C}^{(k)}$  中的非对角元: 若对所有  $i \neq j$  有  $|c_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon$ , 则转入步骤

(3); 若存在  $i \neq j$  使  $|c_{ij}^{(k)}| > \varepsilon$ , 则记下  $i, j$

(3) 根据式 (4-11) 得  $\nu, \mu$ 。

(4) 根据式 (4-12)、式 (4-13) 作  $\mathbf{C}^{(k+1)}$ 。

(5) 根据式 (4-14) 计算  $\mathbf{C}^{(k+1)}$  的各元素。

(6) 根据式 (4-15) 计算  $\mathbf{C}^{(k+1)}$  的各元素, 将  $\mathbf{C}^{(k+1)}$  加上  $\mathbf{I}$ , 返回步骤 (2)。

(7) 若  $\varepsilon \geq \varepsilon$  则  $\mathbf{C}^{(k+1)} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^{(k+1)}$  返回步骤 (2); 若  $\varepsilon < \varepsilon$  则迭代结束。

最后从  $\mathbf{C}^{(k)}$  的对角线位置获得  $\mathbf{C}$  的近似值, 从  $\mathbf{C}^{(k)}$  中获得对应的特征向量。

## 4.2 子空间迭代法

子空间迭代法是反复使用矩阵迭代法和 幂法来求得一批低阶振型和频率的方法。它克服了 幂法的缺陷。它的原理是选择一组  $m$  个  $n$  维向量, 以实行正交规范化。从它形成的  $m$  维子空间出发进行迭代, 每迭代一次可以重新构造出一个新的  $m$  维子空间, 从而得到一个子空间序列。如果某些条件满足, 这一系列子空间可以收敛于  $\mathbf{C}$  的特征子空间。计算步骤为:

(1) 取  $m$  个正交规范化的初始向量, 由它们组成一个  $n \times m$  的矩阵  $\mathbf{U}^{(0)}$

(2) 计算  $\mathbf{C} \mathbf{U}^{(0)}$

(3) 计算  $m$  阶矩阵  $\mathbf{U}^{(0)T} \mathbf{C} \mathbf{U}^{(0)}$  的特征值和特征向量, 并假设特征值的排序是  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  特征向量矩阵  $\mathbf{V}^{(0)}$  可取为一个正交阵。

(4) 计算  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{C} \mathbf{V}^{(0)}$ , 把它的列正交规范化后记为  $\mathbf{U}^{(1)}$ , 即  $\mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{C}$  为上三角阵,  $\mathbf{U}^{(1)} \rightarrow \mathbf{U}^{(0)}$

(5) 检验相邻两次迭代所得到的  $\mu^{(k)}$  和  $\mu^{(k+1)}$  之差, 如果满足精度要求, 则  $\mu^{(k)}$  就是特征值  $\lambda$  的近似值,  $\mathbf{U}^{(k)}$  的第  $i$  列是对应于  $\lambda_i$  的近似特征向量。若不满足要求, 回到步骤 (2) 进行下一次迭代, 直到满足精度要求为止。

以上是子空间迭代法的计算步骤。这里, 主要是如何选择初始矩阵  $\mathbf{U}^{(0)}$ 。显然, 选择的  $\mathbf{U}^{(0)}$  越接近所要求的特征向量, 其收敛得越快。然而, 这种方法的特点是, 即使最初选择的  $\mathbf{U}^{(0)}$  近似程度不太好, 收敛也很快。子空间迭代法要求  $\mathbf{C}$  是实对称矩阵, 而一般工程结构的刚度矩阵和质量矩阵均为对称阵, 故这种方法是计算大型结构前一批低阶自振频率和振型经常使用的方法。

习题

例 题 题图所示为一对称刚架。用能量法求刚架在对称和反对称振动时的最低频率。

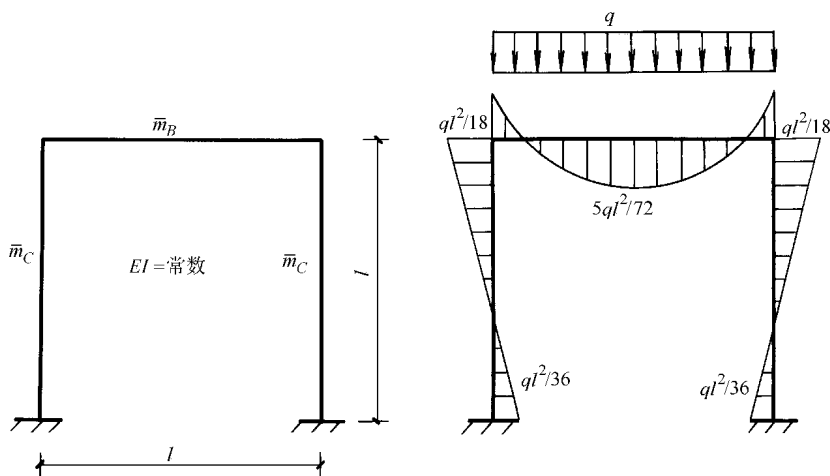


图 刚架计算简图及对称荷载下的弯矩图

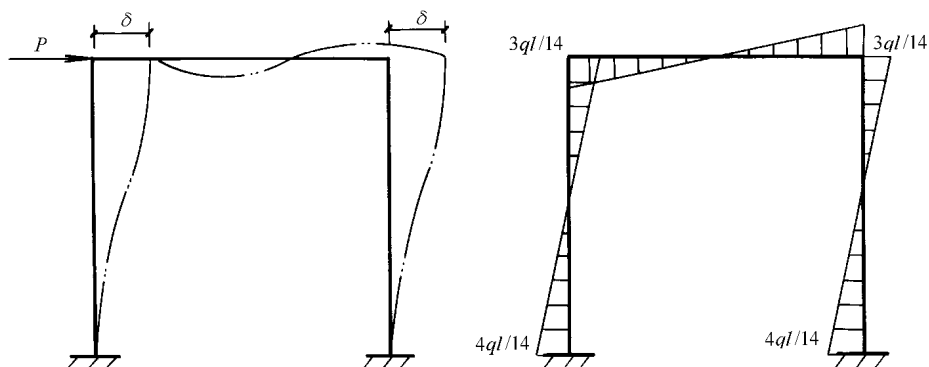
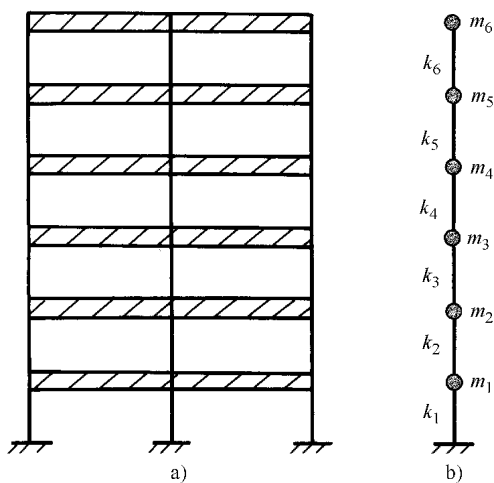


图 刚架反对称变形及弯矩图

题 图

例 题 用能量法计算题图所示六层刚架的第一频率。设各横梁刚度为无穷大。



题 7-1 图 多层刚架计算简图

## 第 8 章 连续体动力模型的离散化

所有实际工程结构都有无限多个自由度，也就是说要完全确定结构在任一瞬时的位置，就必须有无数个坐标。质点、刚体是抽象的力学模型，只有在对实际工程结构进行了一定简化的基础上，才能够获得包含质点、刚体概念的简化力学模型，从而将具有无限多个自由度的实际工程结构简化为有限自由度的离散模型。通常称这一过程为连续体动力模型的离散化。

结构在每一个自振频率下，都有其特定的振动形态（振型）。由于作用荷载的原因，结构的很多自振频率不会被激起，相应的振动形态将不会对结构的反应有所贡献。通常结构的高阶频率是不参与到结构的反应中的，或者说由结构的高阶频率引起的振动形态幅值相对于低频频率引起的振动形态幅值在绝对值意义上是可以忽略的小量，其原因是除了作用荷载的影响外，还有阻尼的影响，而阻尼可以使高频振动分量更快地衰减。由于这些原因，实际工程结构动力分析中并不需要计算结构的所有自振频率和振型。这就是连续体动力模型离散化的基础。

从实际工程出发，人们已提出了连续体动力模型离散化的多种途径，但基本上仍可以归为两类：一类是从模型上对结构进行简化；另一类是从数学处理上对动力学偏微分方程进行简化。其目的都是将无限自由度体系缩减为有限自由度体系，将偏微分方程组的求解化为近似的常微分方程的求解，以最终适应在计算机上进行数值求解。

### 8.1 集中质量法及建筑物的模型化

通过把分布质量向有限点集中的直观手段，将连续体化为多自由度体系的方法称为集中质量法。这是一种物理近似，是一种古典的近似方法。

早期，集中质量法主要应用于那些物理参数分布很不均匀或相对集中的实际工程结构分析中，例如建筑物、构筑物等。这一方法的原则是把这些惯性相对大而弹性极微弱的构件看作是集中质量，而把那些惯性相对小而弹性极为显著的构件看作是无质量的弹簧。后来这种方法也被推广用于均匀连续体结构中，这在后面我们还将详细叙述。

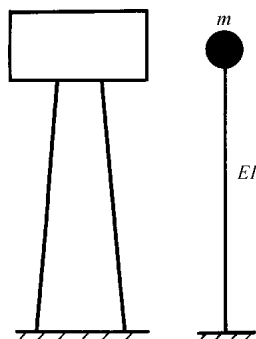


图 8-1 集中质量模型

图 8-2 所示水塔的水平振动，由于顶部水池较重，

在略去次要因素后,就可以简化为图示的直立悬臂梁在顶端支承集中质量的单自由度体系。若要考虑水池的转动惯量效应,则为两自由度的体系。

图 8-10 所示的均布质量的简支梁,用五个离散质点来描述其惯性特征,将两个节点间的质量均匀分布在两个节点上,可得图 8-11 所示的五自由度离散集中质量模型。

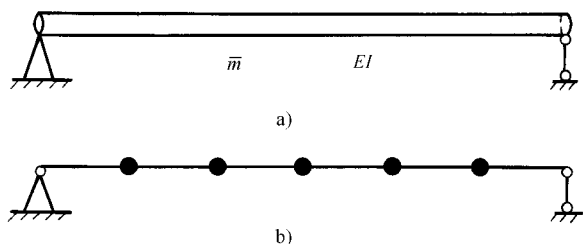


图 8-11 简支梁的集中质量模型

上述两个例子分别对应了物理参数分布不均匀和均匀的情况。下面我们来讨论集中质量法用于建筑物模型化的问题。

### 8.1.1 质量的集中化

建筑结构物的重量是由恒荷载和活荷载组成的。恒荷载指组成建筑物的梁、柱、楼板、墙壁、基础等构件的重量。活荷载是指建筑物内承受的人、家具、设备、器具等的重量。一般而言,不管建筑物的构造形式如何,建筑物的重量明显地集中在各个楼层层上,属于沿竖向重量参数分布明显不均匀的结构。因此,建筑物动力分析中通常把楼层高范围内的全部重量集中到各自相应的楼层层上,这就是所谓的楼层集中质量模型(如图 8-12 所示)。

有时为了更精确地模拟建筑物的动力反应,视建筑物的力学特性和分析目的的不同,也将楼层处的重量进一步在楼层平面内进行分配和集中。一般的处理方法是按平面(楼层)面积平均到柱头部。当然,对于楼层平面内重量分布明显不均匀的情况且要考虑建筑物的竖向振动时,按面积平均到柱头部的处理方式会带来较大的误差。

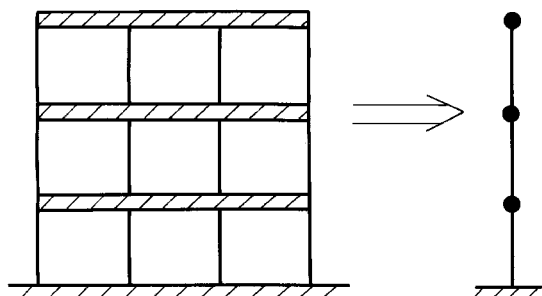


图 8-12 楼层集中质量模型

### 8.1.2 力学分析模型

以图 8-13 一座两跨三楹的三层框架结构为例,讨论其力学分析模型建立。这里假定地面是刚性的,仅有水平的地面运动。这里仅是讨论模型的简化方法,具

体的质量、刚度、阻尼矩阵的计算可参考相应的文献。

首先假定图 8-1 所示的框架结构各层的几何、质量、刚度中心是重合的（沿  $z$  轴），即该框架结构没有扭转运动，对于线弹性反应而言，沿  $x$  轴和  $y$  轴平面的反应是各自独立的。这里仅以  $x$  轴平面为例进行讨论。

8.1.1 平面剪切型模型

由于建筑物的全部质量集中在各楼层平面上，连接楼层体系的柱子就是无质量的，此时若再假定楼层体系和梁是刚性的并忽略柱的轴向变形影响，这就是平面剪切型建筑物的模型。各层只允许有由于柱子侧向柔性引起的沿  $x$  轴方向的位移，其动力自由度化简为三个，力学模型简图如图 8-2 所示。

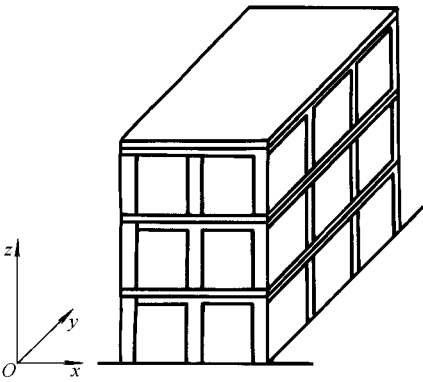


图 8-1 三层框架结构模型

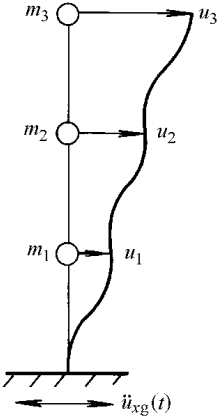


图 8-2 平面剪切型模型

8.1.2 平面弯剪型模型

上述剪切型模型中，若柱的轴向变形不可忽略时，各层的侧向位移就由两个部分组成，一是相应于剪切型模型的柱子侧向柔性引起的侧向位移；二是相应于柱的轴向变形产生的楼层转动（在  $x$  轴平面内）引起的侧向位移。此时，各层的动力自由度数为两个，总的动力自由度数为六个。力学模型简图见图 8-3，其中， $I_{p1}$ 、 $I_{p2}$ 、 $I_{p3}$  是各层楼面的转动惯量， $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  是各楼层的转角。各楼层的剪力也相应的由两部分组成。一是剪切弹簧（柱的侧向柔性）；二是楼层间的相对转动提供的弯曲弹簧。这一力学分析模型就是平面弯剪型模型。

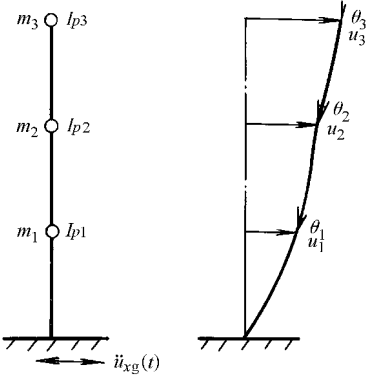


图 8-3 平面弯剪型模型

8.1.3 平面杆系模型

平面剪切型模型和平面弯剪型模型都是

假定了楼层体系和梁是刚性的。如果进一步假定楼板在平面外的柔性相对于梁的柔性是可以忽略的,梁、柱间的节点是刚性的,且容许节点产生转动变位,此时图 8-1 所示的框架结构在  $xOy$  平面的力学模型就是平面杆系模型。

为不失一般性,讨论楼层平面内重量按面积平均到柱头部的质量处理方式时,若假定梁、柱的轴向变形影响是不可忽略的,节点的转动惯量也予以考虑,则每一个节点相应有三个动力自由度(沿  $x$  方向的平动和绕  $z$  轴的转动),图 8-1 所示框架在  $xOy$  平面的运动共有  $3n$  个自由度;若假定梁、柱的轴向变形影响可以忽略,则每一个节点相应有两个动力自由度,一个是绕  $z$  轴的转动,另一个是沿  $x$  方向的变位,但此时同一层楼的节点沿  $x$  方向的变位又是相等的,这样,每一层楼的实际动力自由度就仅是节点数加 1 了,因此,这时的总动力自由度数是  $2n$  个。进一步,再假定不考虑各节点的转动惯性,此时虽然仍是平面杆系模型,但结构的总动力自由度与平面剪切型模型是相同的,为三个沿  $x$  轴的平动自由度。注意到第三种情况,体系的静力自由度数目与动力自由度数目是不相等的,与惯性相关的运动方程仅有三个,少于确定体系变形的静力自由度相应的  $3n$  个平衡方程数。通常,我们在进行动力分析前要将结构模型中的静力自由度约减掉,而只保留动力自由度,从而达到减少计算量的目的,这就是所谓的静力凝聚,具体方法在前面已经介绍。

### 8.1 空间平扭模型

在讨论前面的平面模型时,先假定了框架结构各层的几何、质量、刚度中心是沿  $z$  轴重合的,体系没有扭转运动, $x$  和  $y$  轴的运动也是互相独立的,但有时上述三个中心是不重合的,这时体系将出现平扭耦合的空间运动,问题变得复杂起来。假定楼层体系和梁是刚性的,考虑柱的轴向变形,这时每一楼层将会有六个动力自由度,三个平动,三个转动,体系共有  $6n$  个动力自由度;若不考虑柱的轴向变形,这时每一楼层有三个动力自由度,两个平动(沿  $x$ 、 $y$  方向),一个转动(绕  $z$  轴),体系共有九个动力自由度。

## 8.2 变分直接法

### 8.2.1 基本思想

变分原理提供了一种将真实的运动与同样条件下可能的其他运动区分开来的准则。真实的运动是指在同样的条件下(边界和约束条件)使得泛函取极值的自变函数。从变分原理出发可导出体系的控制微分方程,对连续体,它是一组偏微分方程。变分原理的直接法是一种数学上的离散化处理方法,其途径是在利用变分原理时不将泛函的极值问题转化为求解偏微分方程问题,而是给出所求函数的近似表达式,直接利用泛函极值的必要条件确定近似表达式中的待定参数。因

此，通常称这种方法为“直接法”。

变分原理的一般表达式为

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

式中， $\Pi(\mathbf{u})$  是一泛函，它是依赖于在一定范围内可变的矢量函数  $\mathbf{u}$  的一个标量； $\mathbf{u}$  称为自变函数。

现设  $\mathbf{u}$  可近似地表达为

$$\mathbf{u} \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

式 (1.2) 中， $\phi_i$  为待定参数，具有广义位移的概念； $\mathbf{u}_i$  为坐标函数，或者称为形函数，也称试函数。

在这里，它一般满足位移边界条件（最好能满足所有边界条件），并由完备函数系组成。换言之讲，任一容许函数都可以用这些坐标函数表示，并可以以任一精度逼近。

将式 (1.2) 代入式 (1.1) 中， $\Pi(\mathbf{u})$  将近似地转化为参数  $\phi_i$  的函数，即

$$\Pi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \quad (1.3)$$

这样式 (1.1) 泛函求极值的变分问题就转换为下式的函数极值的微分问题。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

由式 (1.4) 可得到一组方程

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} \right\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

对于一般动力学问题，由式 (1.5) 可导出体系的常微分运动方程组，即

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (1.6)$$

其中  $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$ 、 $[\mathbf{K}]$  分别为广义质量、广义阻尼、广义刚度矩阵； $\mathbf{F}(t)$  为广义外荷载。

如果在泛函  $\Pi$  中  $\mathbf{u}$  和它的导数的最高方次为二次，则称泛函  $\Pi$  为二次泛函。大量的工程和物理问题中的泛函都是二次泛函。对于二次泛函，可以证明由变分直接法获得的  $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$ 、 $[\mathbf{K}]$  为对称矩阵。

泛函的构造一般较为复杂，对于弹性力学问题，简单的方法是应用极小势能

原理或极小余能原理。

极小势能原理表示为

$$\delta(\Pi) = 0$$

(8.1.1)

式(8.1.1)中， $\Pi$ 为体系的内力势能， $\Pi_e$ 为体系的外力势能。

## 8.2 试函数的选择及其分类

从理论上讲，凡是可以以任意精度逼近容许函数的函数系均可以作为试函数。试函数的选择是一个很重要的方面，已有许多文献专门论述，在这里不再详细叙述。归纳起来，作为试函数的一般条件为：①连续性；②无关性；③正交性；④完备性。其中，条件①、②、④保证了解的收敛性，是充分条件；条件③可以简化计算并保证数值解的稳定。

不同的试函数选取对应不同的离散化方法。试函数的构造目前大致有解析函数、分片多项式插值、半解析函数、样条函数等几类，它们分别对应于有限元法、有限元法、半解析法、样条函数法。有限元法和有限元法是最为常用的两种方法。有限元法也称为假设模态法，它的精度取决于假设模态（试函数）的构造形式，对于复杂结构，要构造全域的假设模态是很困难的。对于比较规则的区域，假设模态较易选取，有限元法有它的优势。对于不规则的复杂结构，经常将它分为有限个规则区域的组合，对每一规则区域应用有限元法，然后在边界上施加连续和平衡条件进行综合，这就是通常的动态子结构方法，在后面我们还将进行专题讨论，这里不予详述。有限元法的优点是可以适应任意不规则的复杂结构，它的试函数是由分片多项式插值组成，对同类单元，它的分析是一样的，易于计算机编程。因此，有限元法获得了最深入的研究和广泛的应用。下面我们还将专门讨论有限元法。

## 8.3 加权残值法

这是一种数学上的离散化近似，它直接从偏微分方程出发，导出描述原动力模型的常微分方程组，也即将原来的无限自由度问题缩减为近似的有限自由度问题。与前面介绍的变分法一样，这一方法首先也要假设一个试函数作为偏微分方程的近似解，将其代入原方程后，由于假设的试函数一般不能满足原偏微分方程，因此，便出现了残值，对其在域内和边界上积分，然后组成消除残值的方程组，即按某种平均意义消除残值。通过选择不同的试函数和权函数，由加权残值法可导出有限元，有限差以及各类半解析法来。

下面我们以前述平面波动问题的偏微分方程定解问题为例，来阐述一下这种方法的基本思路。

平面波动问题控制方程为

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}) \quad (1.1.1)$$

相应的边界条件为

$$\bar{u} = \bar{u}_0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{在 } \Gamma_2 \quad (1.1.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (1.1.4)$$

其中,  $c$  为波速;  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  分别为已知边界位移和已知边界力的边界部分,  $\Gamma$  为包围域  $\Omega$  的总边界。

先假定一个近似函数, 作为试函数  $\bar{u}_a$  来代替  $\bar{u}$ , 即

$$\bar{u} \approx \bar{u}_a \quad (1.1.5)$$

$$\bar{u}_a = \sum_{\alpha=1}^N \bar{u}_\alpha \quad (1.1.6)$$

式中,  $\bar{u}_\alpha$  ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) 为广义坐标函数;  $\bar{x}$  ( $\bar{y}$ ) 为广义坐标。

将式 (1.1.6) 代入式 (1.1.1)、式 (1.1.2)、式 (1.1.3), 一般不会满足原方程, 将出现如下残差

$$\epsilon = \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{t}^2} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 域内}) \quad (1.1.7)$$

$$\epsilon = 0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{在 } \Gamma_2 \quad (1.1.9)$$

我们现在的目的是使区域内和边界上的误差尽可能的小, 为达此目的, 可将误差在域内和边界上进行适当的分配, 而实现误差分配的不同途径, 就产生了加权残值法不同类型。

## 1.1.1 第一种形式的加权残值法

选择  $\bar{u}_a$  严格满足  $\epsilon = 0$ ,  $\frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0$ , 设权函数  $\bar{w}$  ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) 可表示为

$$\bar{w} = \sum_{\alpha=1}^N \beta_\alpha \bar{w}_\alpha \quad (1.1.10)$$

其中,  $\bar{w}_\alpha$  ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ) 是一组已知线性无关函数, 而  $\beta_\alpha$  是任意系数。可以证明, 加权残值法收敛到真解还要求权函数是由一组完备系组成。这一点往往被忽略了。

为了使残差  $\epsilon$  在域内按某种意义取最小, 可由  $\bar{w}$  乘  $\epsilon$  并在全域内积分并使积分值等于零

$$\int_{\Omega} \epsilon \bar{w} d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_a}{\partial \bar{t}^2} \right] \bar{w} d\Omega = 0 \quad (1.1.11)$$

由于  $\beta_\alpha$  的任意性, 故有

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{原} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{垣} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] \phi_{\text{圣越员圆}} (\text{圣越员圆} \dots, \xi) \quad (8.1.9)$$

显然, 将式 (8.1.9) 代入式 (8.1.8) 后可导出 灶个以 择 贼 为未知量的常微分方程, 灶为自由度数。

式 (8.1.9) 为标准的加权残值法格式, 通过选择不同的权函数可导出有限差分法、力矩法、配点法、伽辽金法等。特别值得指出的是, 当试函数和权函数选择同样形式时, 由式 (8.1.9) 导出的矩阵具有对称性, 这种特性是十分重要的, 这一方法称为伽辽金法。

### 8.1.2 第二种形式的加权残值法

假设选择的 怎(曾, 赠 满足使  $\varepsilon_{\text{圣越员圆}}$ , 那么 怎仅在  $\Gamma_{\text{圆}}$  和  $\Omega$  上近似满足。 $\varepsilon_{\text{圆}}$  也可像在区域  $\Omega$  中的  $\varepsilon$  一样, 以类似的形式加权, 这就是

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\text{圣越员圆}} \text{曾越原} \int_{\Omega} (\text{孕原孕}_{\text{圆}}) \text{宰曾} \quad (8.1.10)$$

将式 (8.1.10) 代入式 (8.1.8) 并分部积分后有

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{宰垣} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{宰} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \text{垣} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \text{宰} \right) \right] \text{幽} \text{越} \int_{\Gamma_{\text{圆}}} \text{孕宰幽} \quad (8.1.11)$$

形如式 (8.1.11) 的方程通常称为“弱形式”, 这里与式 (8.1.8) 不同的是试函数 怎和权函数要求连续的阶数是相同的。

选择权函数 宰为

$$\text{宰越} \sum_{\text{圣越员圆}}^{\text{灶}} \beta_{\text{圣越员圆}} \text{曾, 赠} \quad (8.1.12)$$

将式 (8.1.12) 代入式 (8.1.11) 后有

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{晕(曾, 赠)垣} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{晕(曾, 赠)垣} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \text{晕(曾, 赠)} \right) \right] \text{幽} \text{越} \int_{\Gamma_{\text{圆}}} \text{孕晕幽} \quad (\text{圣越员圆} \dots, \xi) \quad (8.1.13)$$

再将式 (8.1.13) 代入式 (8.1.8) 有

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{圣越员圆}}^{\text{灶}} \text{皂择(贼垣} \sum_{\text{圣越员圆}}^{\text{灶}} \text{噪择贼越匹} \quad (8.1.14) \\ & \text{皂越} \int_{\Omega} \text{晕(曾, 赠)晕(曾, 赠)幽} \\ & \text{噪越} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \text{晕(曾, 赠)} \partial \text{晕(曾, 赠)}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{晕(曾, 赠)} \partial \text{晕(曾, 赠)}}{\partial \text{赠}} \right) \text{幽} \quad (8.1.15) \\ & \text{匹越} \int_{\Gamma_{\text{圆}}} \text{孕晕幽} \end{aligned}$$

式 (8.1.14) 就是伽辽金法的导出结果, 它是有限元法和半解析法的起点。可

可以看出，伽辽金法形成的系数矩阵是对称的。

加权残值法还有另外一种形式，它是边界元法和配点法的起点，在这里不作介绍。

由式 (1.1.10) 和式 (1.1.11) 最终都可导出如下的结构运动方程，即

$$[M]^* \{\ddot{u}\} + [C]^* \{\dot{u}\} + [K]^* \{u\} = \{F\}^* \quad (1.1.12)$$

其中， $[M]^*$ 、 $[C]^*$ 、 $[K]^*$ 、 $\{F\}^*$  分别为广义质量矩阵、广义阻尼矩阵、广义刚度矩阵，广义力向量。

一般情况，由加权残值法形成的  $[M]^*$ 、 $[C]^*$ 、 $[K]^*$  是不对称的，只有伽辽金法才能形成对称的  $[M]^*$ 、 $[C]^*$ 、 $[K]^*$  矩阵。但是，对于稳定系统， $[M]^*$ 、 $[C]^*$ 、 $[K]^*$  是正定的（这可由运动稳定性理论定理证明）。

## 1.2 动力有限元法

### 1.2.1 有限元离散化

有限元法是目前应用最为广泛的一种离散化数值方法，其基本思想是人为地将连续体结构划分为有限个单元，规定每个单元所共有的一组变形形式，称之为单元位移模式或插值函数。然后，以单元各节点的位移作为描述结构变形的广义坐标。这样，整个连续体结构的位移曲线就可由这些广义坐标和插值函数表示出，再由前面介绍的变分原理直接法或伽辽金法就可以列出以节点位移为广义坐标的离散体结构的有限元运动方程。一旦各节点的位移确定，则可以通过单元位移模式求出单元内部的位移值，进而求得应变和应力。因此，从实质上讲，有限元法是变分直接法或加权残值法中的一种特殊形式。选择这样一种函数的主要优点在于：

(1) 因为同类单元位移模式是相同的，故计算程序十分简单。

(2) 因为每个节点位移仅影响其邻近的单元，所以这个方法所得的方程大部分是非耦合的，因此易于计算机数值求解。

(3) 广义坐标具有明确的物理意义，这是不同于一般广义坐标法的地方，直接给出了节点的位移或力。

(4) 解的精度可以通过在结构离散化时增加有限单元的数目来提高。

(5) 分片多项式插值试函数的收敛性有保证。

上面是完全从数学上阐述了有限元法的实质。但实际上有限元法最初是从物理近似上提出来的。在杆系结构的静力分析中，我们十分自然地把一个杆件看作离散后的一个单元。连续体力学有限元法与杆系结构力学有限元法的解题思想方法是一致的。它们都是将原结构分成有限个单元结构，这些单元的集合就近似代

表原来的结构。如果能合理地求得各单元的物理特性，也就可以近似地求出这个组合结构的物理特性。因此，有限元法的关键是对单元力学特性的分析。一旦单元力学特性确定，则由各单元在节点处的变形连续和受力平衡条件，即可以列出原结构的近似运动方程。利用变分直接法或伽辽金法推导有限元公式仅是一种数学解释。下面我们将以杆系结构为例来具体阐述有限元法。

## 8.1 基本分析过程

对于一个结构，采用有限元法建立体系运动方程的基本步骤可以总结如下：

(1) 采用有限元法将结构离散化，即将结构理想化为有限单元的集合。有限元模型中，不同单元之间的连接点称为有限元的节点，不同单元通过节点相连接。而节点的位移（可以包括转角）定义为体系的自由度。

(2) 对于每个单元，可以建立单元的刚度矩阵  $[k]_e$ ，质量矩阵  $[m]_e$  和单元的外力向量  $\{F\}_e$ （相应于单元自由度的外力向量），其中“原”代表是在单元局部坐标系下的刚度矩阵、质量矩阵和外力向量。

(3) 将局部坐标系中的  $[k]_e$ 、 $[m]_e$  和  $\{F\}_e$  通过单元局部坐标和体系整体坐标之间的坐标转换矩阵  $[T]_e$ ，转换成整体坐标系下的单元刚度矩阵  $[K]_e$ 、质量矩阵  $[M]_e$  和外力向量  $\{F\}_e$

$$\left. \begin{aligned} [k]_e &\rightarrow [T]_e^T [k]_e [T]_e \\ [m]_e &\rightarrow [T]_e^T [m]_e [T]_e \\ \{F\}_e &\rightarrow [T]_e^T \{F\}_e \end{aligned} \right\} \quad (8.1.1)$$

(4) 将总体坐标下的单元刚度矩阵、质量矩阵和外力向量进行总装，集成结构体系的总体刚度矩阵  $[K]$ 、质量矩阵  $[M]$  和外力荷载向量  $\{F\}$ 。

$$\left. \begin{aligned} [K] &\rightarrow \sum_{e=1}^N [T]_e^T [k]_e [T]_e \\ [M] &\rightarrow \sum_{e=1}^N [T]_e^T [m]_e [T]_e \\ \{F\} &\rightarrow \sum_{e=1}^N [T]_e^T \{F\}_e \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2)$$

式中， $N$  为单元总数； $[T]_e$  为单元矩阵向总体矩阵总装的集成关系矩阵。

(5) 形成总体结构有限元模型的运动方程

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (8.1.3)$$

其中  $\{u\}$  为单元节点系位移向量。而阻尼矩阵  $[C]$  可以按瑞利假设形成。

有限元模型的节点系运动方程与前面讲到的框架结构的运动方程在形式上完全相同,两种方法的不同之处仅在于单元刚度矩阵和质量矩阵的形成上。因此前面所介绍的结构动力方程的解法,例如振型叠加法、时域逐步积分法等均可用于有限元模型动力问题分析。

在以下各节中,将以一维梁为例说明采用有限元法分析时的各主要环节,并给出简单的算例,通过算例说明有限元模型用于结构动力反应分析时的精度。

## 有限元法单元位移模式及插值函数的构造

在有限元方法中,单元的位移模式或称位移函数一般采用多项式作为近似函数。理由是多项式运算简便,并且随着项数的增多,可以以任意精度逼近任何一段光滑的函数曲线。当然,多项式的选取应由低次到高阶次。

考虑长为  $L$  截面抗弯刚度为  $EI(x)$ 、抗拉刚度为  $EA(x)$ 、质量线密度为  $m(x)$  的一有限元梁单元,单元的两个节点位于两端,仅考虑平面内变形和忽略轴向变形,则由结构力学知识可知,此单元每一个节点有两个自由度,即横向位移和转角,如图 10-1 所示。如果还要考虑梁的轴向变形,则在单元的两个端点还需各增加一个沿梁轴向位移的自由度。

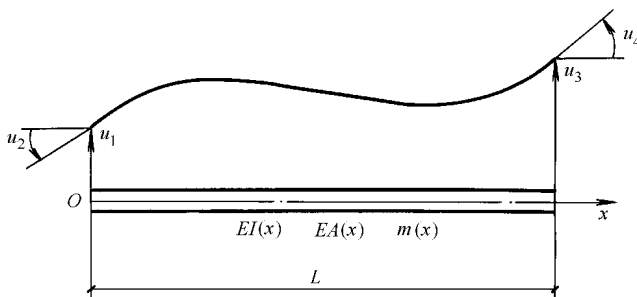


图 10-1 梁单元的节点自由度

梁单元的挠曲线可表示为

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) \{ \psi_1(0) \quad \psi_2(0) \quad \psi_3(L) \quad \psi_4(L) \}^T \{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \}^T \quad (10-1)$$

式中,  $\psi_i(x)$  表示两节点的横向位移和转角,也即广义坐标;  $\psi_i(x)$  为相应于  $\psi_i(x)$  的形函数或称插值函数;  $\{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \}^T$  为形函数矩阵;  $\{ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4 \}^T$  为单元节点位移向量。

所定义的  $\psi_{\text{单元}}$  应满足如下边界条件

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{单元}}(0) &= 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(0) = 0, \quad \psi_{\text{单元}}(L) = 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(L) = 0 \\ \psi_{\text{单元}}(0) &= 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(0) = 0, \quad \psi_{\text{单元}}(L) = 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(L) = 0 \\ \psi_{\text{单元}}(0) &= 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(0) = 0, \quad \psi_{\text{单元}}(L) = 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(L) = 0 \\ \psi_{\text{单元}}(0) &= 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(0) = 0, \quad \psi_{\text{单元}}(L) = 0, \quad \psi'_{\text{单元}}(L) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

插值函数  $\psi_{\text{单元}}(\xi)$  ( $\xi = 0, L, 2L, 3L$ ) 可以是满足式 (8.10) 的任意函数。一种选择是用满足以上边界条件的精确解, 比如对于  $\psi_{\text{单元}}(\xi)$ , 应用给出的相应四个边界条件, 就可以完全确定其 (静力) 解析解。当梁单元的刚度沿梁长变化时, 可导致求解精确解的困难, 但如果梁的刚度 ( $EI$ ) 是均匀的, 则容易求得分别满足不同边界条件的精确解作为插值函数。用精确解作为插值函数, 可使问题的有限元解具有更高的模拟精度, 但有时求这样的精确解本身可能是困难的。下面介绍推导单元插值函数的一般方法。

对于一个插值函数, 有四个边界条件, 可用来确定四个未知系数, 把插值函数设为多项式, 如果选用三次多项式, 则未知系数的个数正好为四个, 因此可以选择

$$\psi_{\text{单元}}(\xi) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \xi^2 + c_4 \xi^3 \quad (8.11)$$

其中,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  分别为待定的未知系数。为方便起见, 以上多项式写成无量纲形式。将式 (8.11) 给出的各插值函数分别代入式 (8.10) 给出的相应边界条件, 可求得各插值函数的待定系数, 最后得到满足式 (8.10) 的插值函数为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{单元}}(\xi) &= \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right)^2 \left( 2 + \frac{\xi}{L} \right) \\ \psi_{\text{单元}}(\xi) &= \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right)^2 \left( 2 - \frac{\xi}{L} \right) \\ \psi_{\text{单元}}(\xi) &= \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{\xi}{L} \right)^2 \left( 2 - \frac{\xi}{L} \right) \\ \psi_{\text{单元}}(\xi) &= \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{\xi}{L} \right)^2 \left( 2 + \frac{\xi}{L} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

式 (8.12) 给出了梁单元的插值函数示于图 8.12

可见在确定以上插值函数时, 采用了一般广义坐标法中选择形函数的条件, 即由式 (8.12) 给出的插值函数仅由边界条件确定, 而与梁的偏微分控制方程, 即与梁的力学性质和梁上的横向荷载无关。因此, 这些插值函数可以用于表示均匀和非均匀梁单元的位移。对于均匀梁单元, 不考虑剪切变形影响时, 以上给出的插值函数是一个精确解, 因为此时梁单元的控制微分方程 (无横向荷载) 为

$$EI \frac{d^4 w}{d\xi^4} = 0$$

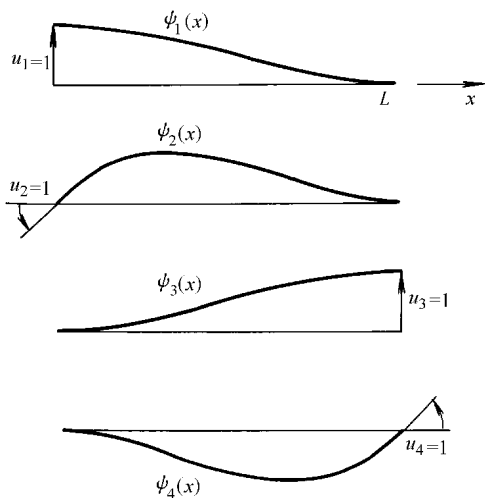


图 梁单元的插值函数

而式( )给出的插值函数为三次多项式，它们满足运动控制方程和给定的边界条件，因此是精确解。精确解的含义是与结构力学中弯曲梁理论解相比较而言的。对于非均匀梁，控制方程为

( )

则三次多项式不一定总能满足控制方程，因此对于非均匀梁，式( )给出的插值函数是近似的。

把以上方法用于二维或三维问题时，即使结构是均匀的，得到的插值函数也可能不是精确解，因为对于二维和三维问题，构造的插值函数一般很难满足单元边界线(二维)或边界面(三维)上的位移和应力边界条件。此时，这种构造插值函数的方法可使问题简化，但结果是近似的。

有限元分析中的基本要素

为进行结构体系的有限元分析，需要建立体系有限元模型的运动方程。这涉及体系的刚度矩阵、质量矩阵和外荷载引起的节点力向量，一旦这些构成运动方程的基本要素确定，则建立了体系的运动方程。下面以梁单元为例，介绍单元的刚度矩阵、质量矩阵和等效外荷载向量的基本概念和计算方法。

单元刚度矩阵

设  $\{ \delta \}$  为梁单元广义坐标  $\{ \delta \}$  对应的节点力向量，则单元刚度矩阵为

$$\begin{Bmatrix} \text{弯矩} \\ \text{剪力} \\ \text{轴力} \\ \text{扭矩} \end{Bmatrix}_{\text{单元}} \begin{Bmatrix} \text{左端} \\ \text{右端} \\ \text{左端} \\ \text{右端} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} \\ \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} \\ \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} \\ \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} & \text{弯矩} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{位移} \\ \text{位移} \\ \text{位移} \\ \text{位移} \end{Bmatrix} \quad (8-10)$$

刚度影响系数  $k_{ij}$  利用虚功原理，便可容易地计算出。

当单元节点产生一虚位移  $\{\delta\}$  时，梁的内力虚功可表示为

$$\delta W_{\text{内}} = \int_0^L \left[ \frac{\partial W_{\text{内}}}{\partial \psi} \right] \delta \psi \, dx \quad (8-11)$$

曲率  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  可表示为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \psi_1 \phi_1 + \psi_2 \phi_2 + \psi_3 \phi_3 + \psi_4 \phi_4 \quad (8-12)$$

式中  $[\phi] = [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4]$

将式 (8-12) 代入式 (8-11) 有

$$\delta W_{\text{内}} = \{\delta\}^T \left( \int_0^L [\phi]^T k [\phi] \, dx \right) \{\psi\} \quad (8-13)$$

梁单元节点的外力虚功可表示为

$$\delta W_{\text{外}} = \{\delta\}^T \{F\} \quad (8-14)$$

由虚功原理可知有

$$F = K \psi \quad (8-15)$$

将式 (8-13) 和式 (8-14) 代入式 (8-15) 可得单元节点力和节点位移的关系式，即

$$\{F\} = \left( \int_0^L [\phi]^T k [\phi] \, dx \right) \{\psi\} \quad (8-16)$$

其中，刚度矩阵  $[k]$  中的元素为

$$k_{ij} = \int_0^L k \phi_i \phi_j \, dx \quad (8-17)$$

当梁是等截面直梁时，由式 (8-17) 可导得弯曲梁单元的刚度矩阵为

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (8-18)$$

以上给出的梁单元刚度矩阵与用初等梁理论给出的解析解是完全相同的。即对于均匀弯曲梁，采用插值函数得到的梁的刚度矩阵是精确的，这也很容易理解，对于均匀梁，前面定义的插值函数是精确的。

式 (9.1.1) 给出的刚度矩阵  $[k]^e$  是在局部坐标下的 单元刚度矩阵, 仅反映了梁单元横向线位移和转角自由度的影响, 没有考虑轴向变形的影响。如果把两个梁端与轴向相应的刚度考虑在内, 则局部坐标系下的单元刚度矩阵成为 扩展的刚度矩阵, 相应于两个端点的轴向位移自由度的刚度为

$$[k]^e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \quad (9.1.2)$$

在得到扩展的局部坐标系下的单元刚度矩阵后, 可以通过坐标转换矩阵  $[T]^e$  将局部坐标系下的单元刚度矩阵转换成整体坐标系下的单元刚度矩阵, 这里的坐标转换矩阵仅与梁单元的方向角  $\theta$  有关 (如图 9.1.1 所示), 即

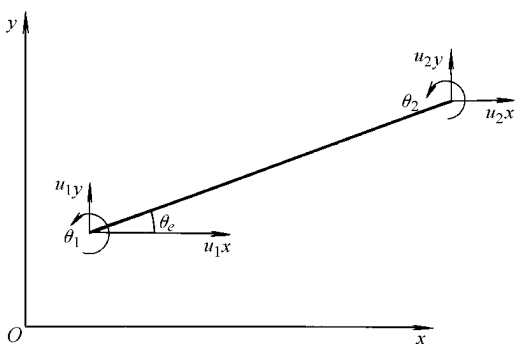


图 9.1.1 梁单元的整体和局部坐标系

$$[T]^e = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \quad (9.1.3)$$

在整体坐标系中, 单元自由度的顺序为  $\{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2\}$ , 下标中 1 和 2 代表梁单元的两个节点。

## 9.1.2 单元质量矩阵

### 一致质量矩阵

质量影响系数  $\alpha$  是在体系处于平衡位置时, 单位加速度  $\ddot{u}$  的惯性力在  $\delta u$  方向上引起的约束反力。我们可以用分析单元刚度矩阵的类似方法来计算质量影响系数  $\alpha$ 。

如图 9.1.2 所示, 单位加速度  $\ddot{u}$  引起的惯性力为

$$F = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.1.4)$$

引入一个竖向虚位移  $\delta u$ , 对应的杆内虚位移和节点约束反力分别为  $\delta u$  和  $\alpha$ 。由于杆处于平衡位置, 同时不考虑自重引起的弹性力, 则

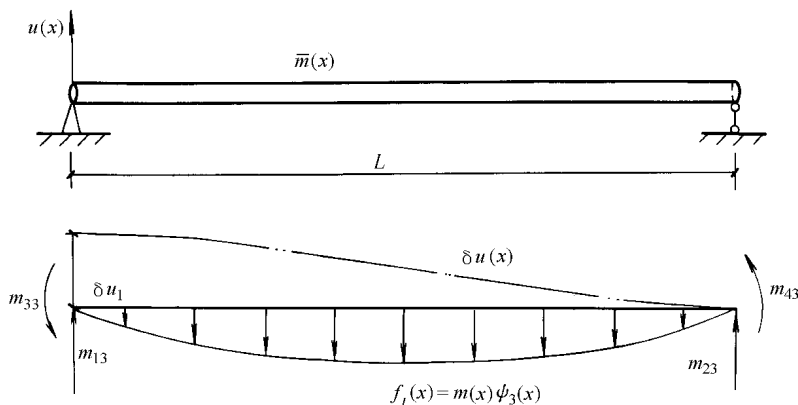


图 8-10 一致质量矩阵求解示意图

杆的弹性内力  $\delta u$  由虚功原理得

$$\delta u = \int_0^L \delta u(x) f_l(x) dx \quad (8-10)$$

于是可导出

$$\delta u = \int_0^L \delta u(x) \psi_3(x) dx \quad (8-11)$$

同理可得一般公式

$$\delta u = \int_0^L \delta u(x) \psi_i(x) dx \quad (8-12)$$

对于均布质量  $m$  时，单元质量矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{mL}{2} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{2} \\ \frac{mL}{6} & \frac{mL}{3} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{6} \\ \frac{mL}{6} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{3} & \frac{mL}{6} \\ \frac{mL}{2} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{6} & \frac{mL}{2} \end{bmatrix} \quad (8-13)$$

当单元质量矩阵按计算单元刚度矩阵的同样插值函数计算时，所得到的质量矩阵称为“一致质量矩阵”，式 (8-13) 中的上标“悦”代表一致质量矩阵。

集中质量矩阵

单元集中质量矩阵是把单元分布的质量集中成质量块放在梁单元的两个端点上。质量块的体积等于零，质量之和等于梁单元的总质量  $m$ ，此时再按质量阵元素  $M_{ij}$  的定义，可得到梁单元的集中质量矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (8-14)$$

式(9.1.1)中上标“ $\cdot$ ”代表集中质量。对于集中质量模型,仅相应于两端点的线位移自由度上有质量(非零值),其他均为零。

集中质量矩阵是对角阵,即矩阵的对角线上有非零值,而非对角线上的值均为零。因为集中质量法是把质量集中到一个点上,而相应于一个质点的平动惯性力就作用在质点本身,而质点的转动惯性力等于零。

一致质量法从数学上讲是严格的,是一种数学方法。集中质量法是一种工程处理方法,可出自于工程师的直观判断。但如果我们在定义计算质量矩阵时所采用的插值函数不同于计算刚度矩阵的插值函数,则同样可以用式(9.1.1)计算出集中质量矩阵。例如定义与线位移自由度相应的  $\psi$  为阶梯函数,而与转角相应的  $\psi$  为零,也可以得到集中质量矩阵式(9.1.1),但此时是非一致的,即计算质量矩阵和计算刚度矩阵时的插值函数不同(不一致)。

结构动力分析和静力分析不同之处是考虑了惯性力,即考虑了质量,因为质量矩阵的形成及性质是动力问题中一个有较大影响的因素,因此下面进一步讨论集中质量和一致质量,比较它们的特点及优缺点。

在结构动力反应分析中,与一致质量法相比,集中质量法的最主要优点是节省计算量和计算时间,原因有两个:

(1) 集中质量矩阵是对角的,而一致质量矩阵是非对角的,因此无论是形成质量矩阵还是求解方程,前者均省时省力。

(2) 集中质量法中与转动自由度相应的转动惯量等于零,因此在动力分析中,转动自由度可以通过前面介绍的静力凝聚法消去,使结构体系的动力自由度降低一半,而一致质量法中所有的转动自由度都属于动力自由度。

一致质量法也有其优点,主要有两点:

(1) 在采用同样的单元数目时,一致质量法比集中质量的计算精度高;当单元数目增加时(即结构被细分时),一致质量法可以更快地收敛于精确解。但在实际问题中,这种改进常常是有限的,因为对于很多的工程结构,节点扭转惯性力的影响一般是不显著的。

(2) 在一致质量法中,势能和动能值的计算采用了一致的方法,这样我们可以知道计算的自振频率与相应的精确自振频率的关系。

由于一致质量法的优点很少能超过为增加一点精度而付出的额外工作量,因此在实际问题中,集中质量法仍得到广泛的应用。

两种方法用于结构模态分析时,集中质量模型的自振频率低于实际结构,而一致质量模型的自振频率高于实际结构,因此也有采用混合质量法的。

### 混合质量矩阵

混合质量有限元模型中质量矩阵为集中质量和一致质量的加权叠加,即

$$[M] = \alpha [M_c] + (1-\alpha) [M_i] \quad (9.1.2)$$

式中  $\beta$  为加权系数, 在  $[0, 1]$  之间取值, 当  $\beta$  越 1 时, 为集中质量; 当  $\beta$  越 0 时, 为一致质量。

从不同的角度出发, 研究  $\beta$  的取值对有限元动力模拟精度的影响, 结果发现, 一般情况下, 取  $\beta$  越 0.5 时, 混合质量模型具有较理想的模拟精度, 因此通常取

$$\beta = 0.5 \quad (8.10)$$

对于质量矩阵也可以像处理刚度矩阵一样, 考虑单元端点两轴向自由度后, 将单元 2 阶质量矩阵扩展成 4 阶质量矩阵, 再通过坐标转换矩阵  $[T]$  把相应于局部坐标系下的单元质量矩阵转换成总体坐标系下的单元质量矩阵  $[M]$ , 即

$$[M] = [T][\bar{M}][T]^T$$

### 8.2.2 等效节点荷载

如果外荷载  $q(x)$  直接施加在单元两个节点的四个自由度之上, 则可以直接写出单元外荷载向量

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (8.11)$$

其中  $F_1$  和  $F_2$  为作用于转动自由度上的弯矩。

如果外荷载是作用于梁中的分布荷载  $q(x)$  和集中荷载  $P(x)$  (作用在节点上), 则由之产生的作用于第  $i$  个自由度的节点荷载为

$$F_i = \int_0^L q(x) \psi_i(x) dx + \sum_{j=1}^n P_j \psi_i(x_j) \quad (8.12)$$

如果上式中插值函数的选取与用于推导刚度矩阵时的插值函数相同, 得到的节点荷载称为一致节点荷载 (力)。也可以采用精度稍低, 但简单的插值函数——线性插值函数, 即

$$\psi_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad \psi_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

用于形成节点荷载, 这样给出的是与梁单元两端节点的线位移自由度相应的节点力, 而节点弯矩等于零。单元的单元节点力向量扩展为 4 阶的节点力向量, 最后通过坐标转换矩阵, 形成整体坐标系下的单元节点力向量。

在完成以上工作后, 通过总装, 可以形成体系的总体刚度矩阵、质量矩阵、外荷载向量, 再采用阻尼理论假设得到体系的总体阻尼矩阵, 最后得到体系的运动方程式。

算例 1 用有限元法计算如图 1 所示均匀悬臂梁的自振频率和振型。悬臂梁采用两个长度相等的梁单元离散，并采用一致质量矩阵。梁截面弯曲刚度为  $EI$ ，质量线密度为  $m$ 。

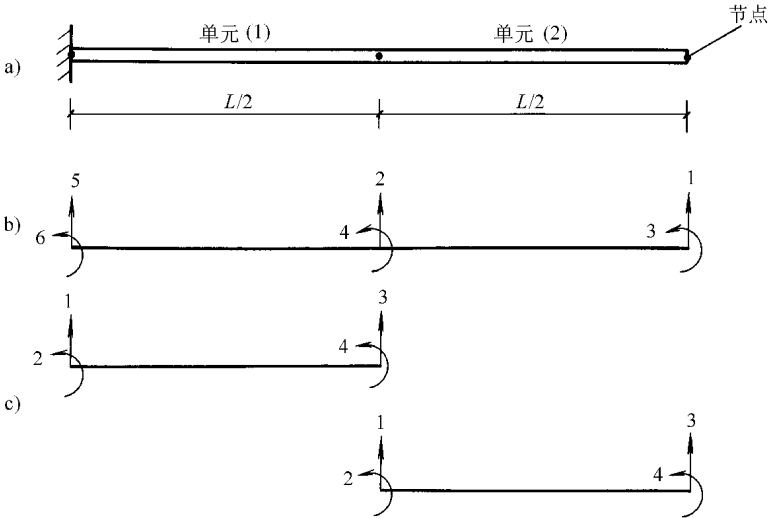


图 1 悬臂梁及其有限元模型

解：(1) 定义有限元模型的自由度  
总体结构体系的六个自由度示于图 2，包括三个线位移和三个角位移。两个单元的局部自由度示于图 3。  
(2) 形成单元刚度矩阵  
单元刚度矩阵表达式在前面已经给出，但注意到这里单元长度为  $L/2$ ，在局部坐标系及自由度定义下的刚度矩阵分别为

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \text{单元 1} \\ \text{单元 2} \end{matrix} \begin{matrix} \text{局部自由度} \\ \text{局部自由度} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{1} & \text{2} \\ \text{2} & \text{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{单元 1} \\ \text{单元 2} \end{matrix} \begin{matrix} \text{局部自由度} \\ \text{局部自由度} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{1} & \text{2} \\ \text{2} & \text{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

式中圆括号中的数字代表对应的结构总体自由度。

上面给出的单元刚度矩阵也是总体坐标系下的单元矩阵, 因为对于本算例, 局部和总体坐标系是一致的, 不需再用坐标转换矩阵处理。

(猿 形成体系总体刚度矩阵

$$[运]_{越} = \begin{pmatrix} (员) & (圆) & (猿) & (源) & (缘) & (远) \\ (员) & (原圆) & (原猿) & (原猿) & 园 & 园 \\ (原猿) & [原圆]垣(猿) & (猿) & [原猿]垣(猿) & [原圆] & [原猿] \\ (原猿) & (猿) & (猿) & (猿) & 园 & 园 \\ (原猿) & [原猿]垣(猿) & (猿) & [猿]垣(猿) & [猿] & [猿] \\ 园 & [原圆] & 园 & [猿] & [圆] & [猿] \\ 园 & [原猿] & 园 & [猿] & [猿] & [猿] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (员) \\ (圆) \\ (猿) \\ (源) \\ (缘) \\ (远) \end{pmatrix}$$

刚度矩阵中带  $[ ]$  的数值为单元 员, 即  $[运]_{员}$  中的元素; 带  $( )$  的为单元 圆, 即  $[运]_{圆}$  中的元素。

(源 形成单元质量矩阵

在前面给出的一致质量矩阵公式中用  $蕴_{圆}$  代  $蕴$ , 由  $[酝]_{员越}$ ,  $[酝]_{员}$ ,  $[酝]_{圆越}$ ,  $[酝]_{圆}$ , 可以得到单元的一致质量矩阵为

$$[酝]_{员越} = \begin{pmatrix} (缘) & (远) & (圆) & (源) \\ 员缘 & 员猿 & 缘源 & 原猿缘 \\ 员猿 & 猿 & 远缘 & 原圆缘 \\ 缘源 & 远缘 & 员缘 & 原猿缘 \\ 原猿缘 & 原圆缘 & 原猿缘 & 猿 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (缘) \\ (远) \\ (圆) \\ (源) \end{pmatrix}$$

$$[酝]_{圆越} = \begin{pmatrix} (圆) & (源) & (员) & (猿) \\ 员圆 & 员源 & 缘源 & 原猿缘 \\ 员源 & 猿 & 远缘 & 原圆缘 \\ 缘源 & 远缘 & 员缘 & 原猿缘 \\ 原猿缘 & 原圆缘 & 原猿缘 & 猿 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (圆) \\ (源) \\ (员) \\ (猿) \end{pmatrix}$$

(缘 形成总体质量矩阵

$$[酝]_{越} = \begin{pmatrix} (员) & (圆) & (猿) & (源) & (缘) & (远) \\ (员) & (缘) & (原猿) & (远缘) & 园 & 园 \\ (缘) & [员圆]垣(缘) & (原猿) & [原猿]垣(远缘) & [缘] & [远缘] \\ (原猿) & (原猿) & (猿) & (原圆缘) & 园 & 园 \\ (原猿) & [原猿]垣(猿) & (原圆缘) & [猿]垣(远缘) & [原猿] & [原圆缘] \\ 园 & [缘] & 园 & [原猿] & [圆] & [猿] \\ 园 & [远缘] & 园 & [原圆缘] & [猿] & [猿] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (员) \\ (圆) \\ (猿) \\ (源) \\ (缘) \\ (远) \end{pmatrix}$$

质量矩阵中带  $[ ]$  的数值为单元 员, 即  $[酝]_{员}$  中的元素; 带  $( )$  的为单元 圆, 即  $[酝]_{圆}$  中的元素。

(远) 形成运动方程

在形成运动方程前，还要先实现约束边界条件。对于本算例的悬臂梁，第五个和第六个自由度被约束，因此  $\{ \delta \} = \{ \delta_1, \delta_2, 0, 0, 0, 0 \}^T$ ，这样我们就要把  $[K]$  的矩阵（刚度和质量）中的第五、六行和第五、六列去掉，然后建立体系的运动方程

$$[K] \{ \delta \} = \{ F \}$$

具体形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(苑) 求解特征值问题

自振频率通过求解特征方程  $|K - \omega^2 M| = 0$  得到

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}$$

而精确解为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}, \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{48EI}{L^3}}$$

算例 愿愿 用集中质量法重新计算以上算例。

解：与算例 愿愿不同之处是质量矩阵不同，采用集中质量法时，结构总体质量矩阵可以很容易确定

$$[M] = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

采用集中质量矩阵时，体系仅有两个动力自由度，进行特征值分析得到的两个自

振频率为

$$\omega_{圆} = \sqrt{\frac{E I}{m L^3}}$$

$$\omega_{圆} = \sqrt{\frac{E I}{m L^3}}$$

$$\omega_{圆} = \sqrt{\frac{E I}{m L^3}}$$

$$\omega_{圆} = \sqrt{\frac{E I}{m L^3}}$$

愿苑 动力有限元法的精度

动力有限元法精度的一个较为全面的对比分析应包括动力时程计算结果的分析，这里仅通过对比有限元模型的自振频率与精确频率来说明有限元法的精度。

采用一致质量和集中质量有限元法分析均匀悬臂梁的自振频率。对于一致质量法，一个节点有两个（动力）自由度，一个竖向位移，一个转角；对于集中质量法，一个节点只有一个动力自由度，相应于竖向位移。将长度为 愿 的悬臂梁（如图 愿源所示）用 愿 个长度相等的单元离散，为分析单元数量的影响，分别取 愿越愿, 愿, 愿, 愿, 愿 算例 愿源和算例 愿源给出了 愿越愿 时的分析过程，对 愿等于其他值时，可采用同样的步骤进行分析。

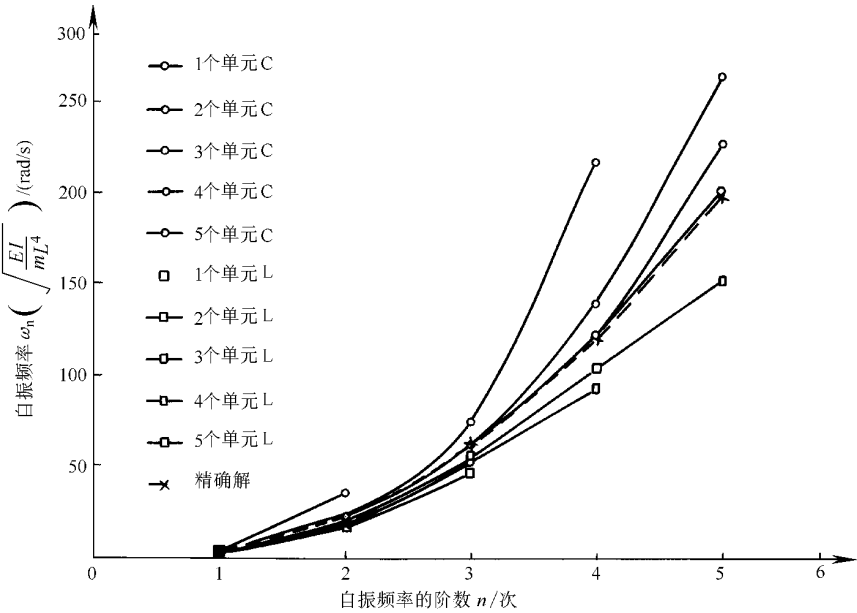


图 愿源 集中质量和一致质量有限元法的精度比较

图 愿源给出分别采用一致质量法和集中质量法时均匀悬臂梁的自振圆频率，横坐标为自振频率的阶数，纵坐标为自振圆频率的值，图中虚线为采用分析方法给出的精确解。

从两种有限元法给出的自振频率和精确频率的对比分析可以发现：

- (员) 有限元法分析低阶自振频率的精度高于高阶频率。
- (圆) 增加有限单元的数量可以很快提高分析的精度。

(獭) 一致质量法给出的自振频率高于实际值，从上限(界)收敛于精确解。  
(源) 集中质量给出的自振频率低于精确解，从下限(界)收敛于精确解。  
(缘) 在采用数目相同的有限单元的情况下，一致质量法的结果优于集中质量法，但一致质量法要花费更多的时间来解决特征值问题，因为单元的数量相同时，一致质量法的动力自由度比集中质量法的多一倍。

对于实际的建筑结构，例如框架结构、剪力墙结构等，由于结构中的很大一部分质量，包括各楼板的质量和置于其上的恒、活荷载导致的等效质量，实际就相当于集中质量，因此，集中质量法仅对结构柱和剪力墙质量的处理是近似的，而对于楼层质量的处理是比较精确的。这样，分析建筑结构时由采用集中质量有限元方法导致的误差要小于分析质量连续分布梁时的误差。

习题

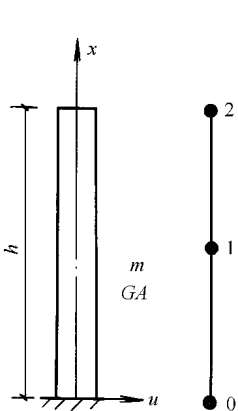
愿愿 将均匀剪切梁用两个有限单元离散(有限元模型的节点编号见图愿愿图)，(员) 采用一致质量模型；(圆) 采用集中质量模型；(獭) 采用混合质量模型( $\beta$  越员圆)，确定梁的自振频率，并与采用精确方法给出的结果比较。插值函数取线性函数

$$\psi_{员}(曾) 越 员原 (曾) 越 曾, \psi_{圆}(曾) 越 曾$$

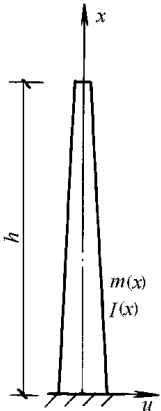
愿愿 题愿愿图为一高为澡的烟囱可以用悬臂梁近似，其质量线密度线性变化，在底端为皂，在顶端为皂圆，而截面弯曲惯性矩则从底端的限线性变化至顶端的限圆，用给定的插值函数估计烟囱横向振动的前两阶自振频率和振型。给定的两插值函数为

$$\psi_{员}(曾) 越 员原 曾, \psi_{圆}(曾) 越 员原 曾$$

其中曾的原点位于烟囱底端。



题愿愿图



题愿愿图

# 第 8 章 结构随机振动

## 8.1 概述

振动是自然界普遍存在的一种现象。车辆行进中的颠簸，地震作用下结构的反应，喷气噪声引起的飞机舱壁的颤动，海浪造成的近海钻井平台的振动等等，都是工程中常遇的振动问题。这些振动将直接影响工程结构的安全性、耐久性和使用性能，在设计阶段必须予以充分考虑，并对其进行有效控制。

对工程振动问题的研究，目前存在两种研究思路，即分为确定性振动和随机振动两类分析方法。确定性振动是指工程的振动过程具有确定的形式和必然的变化规律，可以用时间  $t$  的确定的函数来描述的振动现象。例如，线性单自由度结构体系的无阻尼自由振动问题可以用下面的微分方程描述

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (8-1)$$

式中， $\omega_n$  为体系的固有振动频率。

从方程 (8-1) 中可以解出结构的运动规律为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (8-2)$$

其中  $x_0$  和  $v_0$  分别为体系的初始位移和初始速度。可见，单自由度体系在任意时刻  $t$  的位移  $x(t)$  可以由式 (8-2) 唯一确定，该时刻的速度  $\dot{x}(t)$  和加速度  $\ddot{x}(t)$  也是可以明确地计算出来的。除了上述的结构运动规律具有确定性的数学关系式，可以明确表达外，结构振动其他重要的物理量诸如固有频率、周期、振幅、初相位等，也都是确定性的。确定性振动是传统的振动理论所研究的内容，已有百余年的历史，许多问题已研究得相当系统、深入，研究成果也在实际工程中得到了广泛的应用。

随机振动是从另一个角度看待工程的振动问题的，它认为工程振动过程没有确定的变化形式，也没有必然的变化规律，因而不能用时间  $t$  的确定的函数来加以描述。例如，阵风引起的高层建筑的振动即为随机振动，无法进行预测。如果在高层建筑的某个部位架设仪器，在相同的时间段内重复观测这种风致振动的过程，则会发现，即使观测条件完全相同，观测结果也不会重复。也就是说，每次观测得到的结果可以用一个时间  $t$  的函数来表示，是确定性的，但独立地进行多次观测所得的结果是不相同的。因此，随机振动一般指的不是单个现象，而是大

量现象的集合。这些现象表面上看似乎是杂乱的，但从总体上看具有一定的统计规律性。随机振动虽然不能用确定性函数表达，却能用统计特性来描述。在确定性振动问题中可以研究体系的激励和反应之间的确定关系，而在随机振动问题中就只能研究激励和反应之间的统计特性关系了。

像高层建筑的风致振动那样，在个别观测（试验）中呈现出不确定性，但在大量重复试验中又具有统计规律性的现象，被称之为随机性。随机性是自然界和人为现象所固有的。当随机性的程度较低时，每次试验结果之间的离散度不高，可以以平均试验结果为依据在确定性范畴内处理问题，而忽略平均值附近的变化。从这个意义上讲，确定性振动问题可以被认为是随机振动的一个特例。当随机性程度不是较低，或对体系振动性态的描述要求较高，或体系工作的机理尚不清楚的振动问题，则不宜采用确定性振动理论而必须采用随机振动理论进行分析和处理。

从理论上讲，在激励、体系和反应三者之间已知其中两者，就可以求解出第三者。振动理论所研究的就是在激励和体系特性已知的前提下计算体系反应的方法。如果在激励或者体系中存在随机性，则体系反应必然是随机过程，即体系将作随机振动。根据体系和随机过程的性质，随机振动可以被分为不同类型的问题，如图 2-1 所示。其中线性体系平稳随机振动问题研究得最为成熟，在工程中也应用得最为广泛，是经典理论。本章将主要介绍结构线性平稳随机振动的理论和方法。

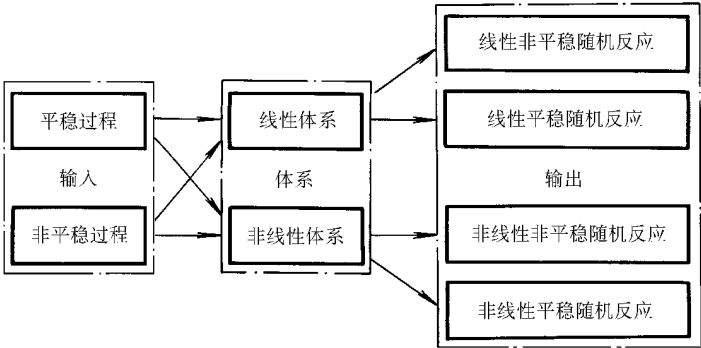


图 2-1 随机振动问题分类

线性体系是客观实际的一种近似模型，很多结构体系都可以被处理成线性体系。但对于某些需要得到更精确定量分析的问题，或者某些本质非线性现象，则不得不用非线性模型来模拟体系的性状。体系的非线性给随机振动分析带来了极大的困难。由于叠加原理不能适用于非线性体系，因而在线性体系分析中许多十

分有效的方法已经不再有效,或者失去了原有的光华。另外,在平稳随机激励下非线性体系的反应一般不再是平稳过程,所以就不能像线性体系那样仅研究反应的二阶矩就能得到反应的全部统计特征,而有必要研究反应的高阶矩,或者直接寻求反应的概率密度函数。从 20 世纪 50 年代初开始,非线性随机振动问题的研究受到重视,迄今已经发展了一些比较有效的分析方法,如云方程法、矩法、随机平均法、统计平均法、摄动法等。对于非线性体系与参激体系来说,惟一可以用来求精确解的方法是配函数扩散过程方法。这种方法直接寻求平稳白噪声激励下的非线性体系的条件概率密度函数,在数学上归结为求解相应的云方程。但它只有对一些特殊的一阶非线性体系才能得到云方程的精确解。即使为了得到稳态概率密度函数的精确解,也必须对体系的本构关系以及激励的特性加上相当苛刻的限制条件。而这些条件往往在实际问题中是难以得到满足的。因此,发展各种适用性更强的近似方法求解非线性随机振动问题,是当前更为现实的途径。

非平稳随机振动问题大致可以分为三类:①时不变体系在突加平稳随机激励下的反应问题;②时不变体系在非平稳随机激励下的反应问题;③时变体系在平稳或非平稳随机激励下的反应问题。求解线性体系非平稳随机反应的方法不外乎时域法和频域法,或者两者的结合。时域法最早由悦等人用来求解第一类问题,实际上它也是求解第二类问题的一个有效方法。频域法又分为两类:双频谱法和演变谱法。双频谱法是早期提出的方法,但求解双频谱需要大量的非平稳过程的原始数据,或不易得到,或消耗巨大。双频谱本身也没有明显的物理意义。这些原因导致双频谱法并未获得实际应用。演变谱法适用于演变随机过程问题,即统计特性受“慢变”的时间与频率函数调制的“平稳过程”问题的求解。这一频域法虽属可行,但与平稳反应的频域解法相比,显然要复杂得多。此外,还提出了一些时域法和频域法相结合的方法,目前尚在研究中。

## 8.1 随机过程及其时域特征

### 8.1.1 随机过程的概念

随机过程是随机变量概念的扩展。在自然界中,随机过程的例子是很多的。如研究飞机在飞行中机翼的振动问题,假设对机翼上的某点进行长时间的观测,并把结果自动记录下来。这时作为一次试验的结果,便得到一个加速度原时间的确定性函数 $\dot{w}(t)$ 。这个加速度原时间函数是不可能预先知道的,只有通过测量才能得到。如果在相同条件下独立地再进行一次测量,则得到的记录 $\dot{w}(t)$ 是不同的。事实上,由于结构振动的随机性,在相同条件下每次测量都将获得不同的

加速度 原时间函数。这些加速度 原时间函数形成了一族函数，如图 2.1 所示。因此，结构振动过程的观测可以被看作是一个随机试验，只是在这里每次试验需在某个时间范围内持续进行，而相应的试验结果则是一个时间 贼的函数。

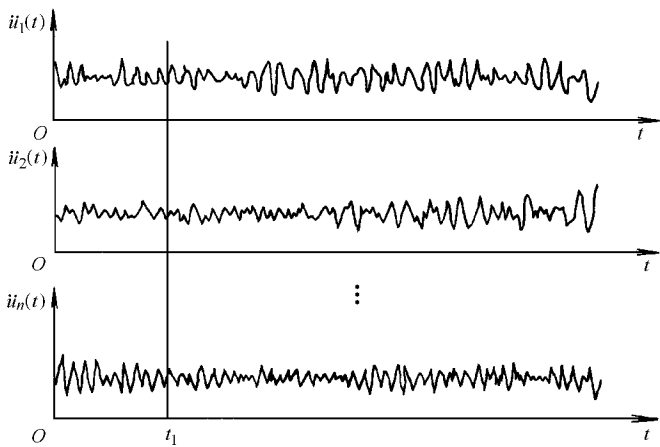


图 2.1 随机过程的样本函数

随机试验可以用其所有可能的试验结果所构成的样本空间来描述。同样，上例中观测得到的一族加速度 原时间函数也可以用来描述飞机机翼的振动过程。现以此例为实际背景，引入随机过程概念。

设 耘是随机试验，杂 越 藻是它的样本空间，如果对于每一个 藻 杂, 总可以依据某种规则确定一时间 贼的函数

栽 藻 贼, 贼 栽 ( 越 藻 与之对应 (栽是时间 贼的变化范围)，于是，对于所有的 藻 杂来说就得到一族时间 贼的函数。此族时间 贼的函数称为随机过程。而族中每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

可见，飞机飞行中的机翼振动过程是一随机过程，一次观测得到的加速度 原时间函数就是这个随机过程的一个样本函数。

随机过程可以用族中的典型样本函数 栽 藻 贼来表征。对于特定的 藻 杂, 亦即对于一个特定的试验结果，栽 藻 贼是一个确定的样本函数，它可以理解为随机过程的一次物理实现。随机过程既然是样本函数的集合，我们也可以从另外一个角度考察它。对于特定的时刻 贼 栽, 栽 藻 贼是一个定义在 杂上的随机变量，参见图 2.1 工程上有时把 栽 藻 贼称作随机过程 栽 藻 贼在 贼 越 贼时的状态。根据这层意义，随机过程也可以用另一形式定义：

如果对于每一个固定的 贼 栽, 栽 藻 贼都是随机变量，那么就称 栽 藻 贼是一随机过程。或者说，随机过程 栽 藻 贼是依赖于时间 贼的一族随机变量。

随机过程的两种定义本质上是一致的,只是描述方式不同而已。在理论分析时往往采用第二种描述方法,在实际测量中往往采用第一种描述方法,因而这两种方法在理论和实际两方面是互为补充的。通常为了简便起见,省去式(9-1)中的  $\omega$  用记号  $X(t)$  表示随机过程,它的样本函数用  $x(t)$  表示之。

## 9.1 随机过程的概率描述

随机过程在任意时刻的状态是随机变量,由此可以利用随机变量的概率描述方法来描述随机过程的统计特征。

设  $X(t)$  是一随机过程,对于每一个固定的  $t$ ,  $X(t)$  是一个随机变量,它的分布函数一般与  $t$  有关,记为

$$F_X(x, t) = P\{X(t) \leq x\}$$

称为随机过程  $X(t)$  的一维分布函数。如果存在二元函数  $f_X(x, t)$ , 使

$$F_X(x, t) = \int_{-\infty}^x f_X(x, t) dx$$

成立,则称  $f_X(x, t)$  为随机过程  $X(t)$  的一维概率密度。

为了描述随机过程  $X(t)$  在任意两个时刻  $t_1$  和  $t_2$  状态之间的联系,可以引入二维随机变量  $(X(t_1), X(t_2))$  的分布函数,它一般依赖于  $t_1$  和  $t_2$ , 记为

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

称为随机过程  $X(t)$  的二维分布函数。如果存在函数  $f_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$ , 使

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

成立,则称  $f_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$  为随机过程  $X(t)$  的二维概率密度。

一般地,当时间  $t$  取任意  $n$  个数值  $t_1, t_2, \dots, t_n$  时,  $n$  维随机变量

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$$

的分布函数记为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

称为随机过程  $X(t)$  的  $n$  维分布函数。如果存在函数  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ , 使

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

成立,则称  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$  为随机过程  $X(t)$  的  $n$  维概率密度。

$n$  维分布函数(或概率密度)能够近似地描述随机过程  $X(t)$  的统计特性。显然,  $n$  取得越大则  $n$  维分布函数描述随机过程的特性也越趋完善。一般地,分布

函数族 $\{ \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta}, \dots \}$ 或概率密度族 $\{ p_{\alpha}, p_{\beta}, \dots \}$ 完全地确定了随机过程的全部统计特性。

在工程振动问题中需要研究的随机过程不止一个, 所以有必要考察两个或两个以上的随机过程的统计信息。

设有两个随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$ ,  $X(t)$  和  $Y(t)$ ,  $\dots$ ,  $X(t)$  和  $Y(t)$ ,  $\dots$ ,  $Y(t)$  是任意两组实数, 则  $X(t)$  和  $Y(t)$  的联合分布函数

$$F_{X,Y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

的分布函数

$$F_{X,Y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

称为随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  的  $n$  维联合分布函数。相应的  $n$  维联合概率密度记为

$$f_{X,Y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

如果对任意整数  $n$  和  $m$  以及数组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  联合分布函数满足关系式

$$F_{X,Y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$F_X(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) F_Y(\tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \dots, \tau_{n+m}; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$$

则称随机过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  是相互独立的。

## 2.2 随机过程的数字特征

在实际应用中, 确定随机过程的分布函数族并加以分析往往比较困难, 甚至是不可能的。因而一般采用数字特征来刻画随机过程的统计特性。这些数字特征既能刻画随机过程的重要特征, 又便于进行运算和实际测量。下面将逐一讨论随机过程的一些基本数字特征。

设  $X(t)$  是一随机过程, 固定  $t$ , 则  $X(t)$  是一个随机变量, 它的均值或数学期望一般与  $t$  有关, 记为

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(t; x) dx \quad (2.2.1)$$

式中,  $p_X(t; x)$  是  $X(t)$  的一维概率密度;  $\mu_X(t)$  称为随机过程  $X(t)$  的均值。

若把随机变量  $X(t)$  的二阶原点矩记作  $\psi_X(t)$ , 即

$$\psi_X(t) = E[X^2(t)] \quad (2.2.2)$$

它称为随机过程  $X(t)$  的均方值。而二阶中心矩记作  $\sigma_X^2(t)$ , 即

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t) - \mu_X(t)^2] \quad (2.2.3)$$

它称为随机过程  $X(t)$  的方差。方差的平方根  $\sigma_X(t)$  称为随机过程  $X(t)$  的均方差。

均值函数  $\mu_x(\tau)$  表示了随机过程  $x(\tau)$  在各个时刻的摆动中心, 而方差(均方差)则描述了随机过程  $x(\tau)$  在时刻  $\tau$  对于均值  $\mu_x(\tau)$  的偏离程度, 如图 9-2 所示。

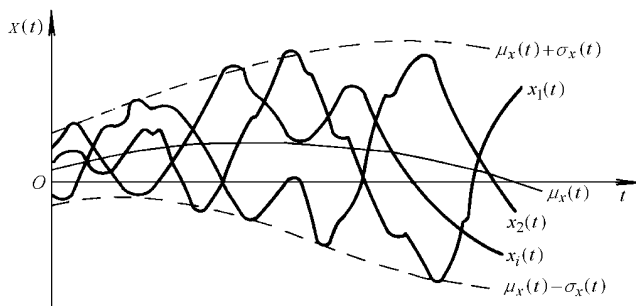


图 9-2 均值和方差的意义

均值和方差是刻画随机过程在各个孤立时刻统计特性的重要数字特征。为了描绘随机过程在两个不同时刻状态之间的联系, 还需要利用二维概率密度引入新的数字特征。

设  $x(\tau_1)$  和  $x(\tau_2)$  是随机过程  $x(\tau)$  在任意两个时刻  $\tau_1$  和  $\tau_2$  时的状态,  $\rho_{xx}(\tau_1, \tau_2)$  是相应的二维概率密度。称二阶原点混合矩

$$\rho_{xx}(\tau_1, \tau_2) = E[x(\tau_1)x(\tau_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_{xx}(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) dx_1 dx_2 \quad (9-2)$$

为随机过程  $x(\tau)$  的自相关函数, 简称相关函数。

类似地, 称二阶中心混合矩

$$\sigma_{xx}(\tau_1, \tau_2) = E[(x(\tau_1) - \mu_x(\tau_1))(x(\tau_2) - \mu_x(\tau_2))] \quad (9-3)$$

为随机过程  $x(\tau)$  的自协方差函数, 简称协方差函数。

随机过程  $x(\tau)$  诸数字特征之间的关系为

$$\rho_{xx}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{xx}(\tau_1, \tau_2) + \mu_x(\tau_1)\mu_x(\tau_2) \quad (9-4)$$

$$\sigma_{xx}(\tau_1, \tau_2) = \rho_{xx}(\tau_1, \tau_2) - \mu_x(\tau_1)\mu_x(\tau_2) \quad (9-5)$$

$$\sigma_{xx}(\tau_1, \tau_1) = \rho_{xx}(\tau_1, \tau_1) - \mu_x^2(\tau_1) \quad (9-6)$$

在诸数字特征中, 最主要的是均值和自相关函数。从理论角度来看, 仅仅研究均值和自相关函数当然是不能代替整个随机过程的研究, 但由于它们确实刻画了随机过程的主要统计特征, 而且远较有穷维分布函数族易于观测和实际计算, 因而对于解决应用问题而言, 它们常常能够起到重要作用。在随机过程理论中以研究均值和相关函数为主要内容的分支称为相关理论。

由  $x(\tau_1)$  和  $x(\tau_2)$  的二维联合概率密度所确定的二阶原点混合矩

$$\rho_{xx}(\tau_1, \tau_2) = E[x(\tau_1)x(\tau_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_{xx}(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) dx_1 dx_2$$

称为随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  的互相关函数。

两个随机过程的互协方差函数定义为

$$C_{xy}(\tau) = E\{[x(t) - \mu_x(t)][y(t+\tau) - \mu_y(t+\tau)]\}$$

如果两个随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  对于任意的  $t$  和  $\tau$  都有

$$C_{xy}(\tau) = 0$$

则称随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  是不相关的。此时

$$C_{xy}(\tau) = C_x(\tau)C_y(\tau)$$

由此可以知道，两个随机过程如果是相互独立的，则它们必然不相关；反之，从不相关一般并不能推断出是相互独立的。

如果某个随机过程是由两个随机过程之和组成，即在  $t$  时刻  $z(t) = x(t) + y(t)$ ，按照上面的定义显然有

$$\mu_z(t) = \mu_x(t) + \mu_y(t)$$

$$C_z(\tau) = C_x(\tau) + C_y(\tau)$$

如果随机过程  $\{x(t)\}$  和  $\{y(t)\}$  不相关，则在  $t$  时刻的自相关函数简单地等于各个过程自相关函数之和，即

$$C_z(\tau) = C_x(\tau) + C_y(\tau)$$

特别地，令  $\tau = 0$  有

$$\sigma_z^2(t) = \sigma_x^2(t) + \sigma_y^2(t)$$

## 2.2 平稳随机过程

平稳随机过程是实际应用中最重要的一类随机过程，它的特点是：过程的统计特性不随时间的平移而变化。平稳过程的  $n$  维分布函数对任意实数  $\epsilon$  满足关系式

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \epsilon, t_2 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon) \quad (2.1)$$

如果概率密度存在，上述平稳条件等价于

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \epsilon, t_2 + \epsilon, \dots, t_n + \epsilon) \quad (2.2)$$

设  $\{x(t)\}$  是一平稳过程，把式(2.2)应用于它的一维概率密度，并令  $\epsilon \rightarrow 0$ ，则有

$$f(x, t) = f(x, t + \epsilon) = f(x)$$

可见，平稳过程的一维概率密度不依赖于时间，把它记为  $f(x)$ 。于是  $\{x(t)\}$  的均值应为常数，记作  $\mu_x$ ，即

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau) \quad (9.5.1)$$

在平稳过程的二维概率密度中,令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 则有

$$p(x_1, x_2, \tau; x_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \rightarrow p(x_1, x_2, \tau) \quad (9.5.2)$$

这说明二维概率密度仅依赖于时间间距  $\tau$ , 而与时间的个别值  $x_1$  和  $x_2$  无关, 记作  $p(x_1, x_2, \tau)$ 。于是  $\dot{x}$  的自相关函数仅是单变量  $\tau$  的函数, 即

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} [R_{xx}(\tau)] = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (9.5.3)$$

协方差函数为

$$C_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} [C_{xx}(\tau)] = \frac{d}{d\tau} C_{xx}(\tau) \quad (9.5.4)$$

特别地, 令  $\tau \rightarrow 0$ , 有

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = C_{\dot{x}\dot{x}}(0) = \frac{d}{d\tau} C_{xx}(\tau) \bigg|_{\tau=0} \quad (9.5.5)$$

可见, 平稳过程的均值为常数, 自相关函数为单变量  $\tau$  的函数。按照式 (9.5.1) 判别是否为平稳过程是十分困难的, 甚至是不可能做到的。所以工程上通常只在相关理论范围内考虑平稳过程。这类平稳过程称为宽平稳过程或广义平稳过程, 它满足条件

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \text{常数}$$

且

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} R_{xx}(\tau) \quad (9.5.6)$$

而按式 (9.5.1) 定义的平稳过程称为严平稳过程或狭义平稳过程。

## 9.6 导数过程的相关函数

工程振动分析中有时需要处理导数问题, 如由位移求解速度, 由速度求解加速度等。在随机振动分析中, 该问题表现为平稳随机过程的导数运算。这部分内容涉及到随机过程的均方微积分方面的知识, 本章不拟做全面介绍, 需要深入了解这方面内容时可参阅随机过程理论方面的有关专著。

设  $\dot{x}$  是一平稳过程,  $\ddot{x}$  为它的导数过程。考虑到平稳过程  $\dot{x}$  的均值为常数, 所以  $\ddot{x}$  的均值为

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \quad (9.6.1)$$

式中的期望运算和微分运算皆为线性算子, 故可以交换运算的次序。

平稳过程  $\dot{x}$  的自相关函数的导数为

$$\frac{d}{d\tau} R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau} R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \quad (9.6.2)$$

交换导数运算与期望运算的次序, 得

$$\frac{d}{d\tau} \dot{r}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left[ \dot{r}(\tau) - \dot{r}(\tau) \right] = \dot{r}(\tau) - \dot{r}(\tau)$$

所以

$$\frac{d}{d\tau} \dot{r}(\tau) = \dot{r}(\tau) \quad (2.10)$$

同理可得

$$\frac{d}{d\tau} \dot{r}(\tau) = \dot{r}(\tau) \quad (2.11)$$

即平稳过程  $\dot{r}(\tau)$  自相关函数的二阶导数等于  $\dot{r}(\tau)$  与  $\dot{r}(\tau)$  的互相关函数。由于

$$\dot{r}(\tau) = \dot{r}(\tau) - \dot{r}(\tau)$$

则

$$\frac{d}{d\tau} \dot{r}(\tau) = \dot{r}(\tau) - \dot{r}(\tau) \quad (2.12)$$

从而得到  $\dot{r}(\tau)$  自相关函数二阶导数的另一种表达式，即它等于负的导数过程  $\dot{r}(\tau)$  的自相关函数。按照相同的推导过程，平稳过程  $\dot{r}(\tau)$  的更高阶导数也容易求得。

注意到  $\dot{r}(\tau)$  是一个偶函数，它关于纵轴对称并在原点处取得最大值，所以  $\dot{r}(\tau)$  在原点处的导数值为零，即

$$\left. \frac{d}{d\tau} \dot{r}(\tau) \right|_{\tau=0} = 0$$

利用式(2.10)，可得

$$\dot{r}(0) = 0 \quad (2.13)$$

这说明，平稳过程  $\dot{r}(\tau)$  与它的导数过程  $\dot{r}(\tau)$  是正交的。

## 2.2 随机过程的频域特征

### 2.2.1 平稳过程的功率谱密度

相关函数描述了随机过程在时域中的特性，但要全面掌握结构振动过程的特征，还需要研究随机过程的频率结构，即研究过程中包含多少种频率成分？每种频率成分的幅值或能量有多大？这个问题的研究是通过 2.2.1 变换这一强有力的数学工具完成的。

构造平稳过程  $\dot{r}(\tau)$  的原函数  $r(\tau)$  的一个截尾函数为

$$\dot{r}(\tau) = \begin{cases} \dot{r}(\tau), & -T \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.14)$$

它的 2.2.1 变换为

$$\dot{r}(\omega) = \int_{-T}^T \dot{r}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.15)$$

利用巴塞伐(Parseval)等式,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) d\omega$$

将上式两边除以  $T$ , 得

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) d\omega \quad (9-10)$$

显然, 式(9-10)和式(9-11)中诸积分都是随机的。把式(9-10)左端的均值的极限

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt \quad (9-12)$$

定义为平稳过程  $\dot{x}(t)$  的平均功率。

交换式(9-12)中积分与均值运算顺序, 于是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) d\omega \quad (9-13)$$

可见平稳过程的平均功率就等于该过程的均方值。

利用式(9-10), 式(9-13)变为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) d\omega \quad (9-14)$$

式(9-14)中的被积式称为平稳过程  $\dot{x}(t)$  的功率谱密度, 记为  $S_{\dot{x}}(\omega)$ , 即

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) \quad (9-15)$$

利用记号  $S_{\dot{x}}(\omega)$ , 式(9-14)可简写为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) \dot{x}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega \quad (9-16)$$

当  $\dot{x}(t)$  为零均值的平稳过程时, 式(9-16)变为

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega \quad (9-17)$$

功率谱密度  $S_{\dot{x}}(\omega)$  通常也简称为自谱密度或谱密度, 它是从频率角度描述  $\dot{x}(t)$  的统计规律的最主要的数字特征, 物理意义表示  $\dot{x}(t)$  的平均功率关于频率的分布。

## 9.2 谱密度的性质

谱密度有如下的重要性质:

(1) 非负性。由式(9-15)可以看出,  $S_{\dot{x}}(\omega)$  是频率  $\omega$  的非负函数。

(2)  $S_{\dot{x}}(\omega)$  是实的偶函数。事实上, 在式(9-15)中, 量

$$\dot{x}(\omega) \dot{x}^*(\omega) = \dot{x}(\omega) \dot{x}(-\omega)$$

是  $\omega$  的实的偶函数, 所以它的均值的极限也必是实的偶函数。

以上定义的谱密度对  $\omega$  的正负值都是有定义的,称为“双边谱密度”。一般地,负频率在物理上不好解释,同时为了便于实际测量,工程上常根据  $\dot{z}(\omega)$  的偶函数性质把负频率范围内的谱密度折算到正频率范围内,从而定义“单边谱密度”为:

$$\dot{z}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{z}(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

显然,单边谱密度和双边谱密度的关系为

$$\dot{z}(\omega) = \begin{cases} \dot{z}(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

( $\dot{z}(\omega)$  和  $\dot{z}(\tau)$ ) 是一傅里叶变换对,即

$$\dot{z}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.11)$$

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.12)$$

它们统称为维纳-辛钦(辛钦-维纳)公式。限于篇幅,这里不对该公式进行推导,推导过程可参见有关文献。

## 2.2 导数过程的谱密度

设  $\dot{z}$  是一均值为零的平稳过程,且它的导数过程  $\ddot{z}$  存在。根据维纳-辛钦公式,有

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.13)$$

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.14)$$

将式(2.13)代入式(2.14),可得

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\tau) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \dot{z}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.15)$$

$$\dot{z}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\tau) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \dot{z}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.16)$$

比较式(2.13)与式(2.15)、式(2.14)与式(2.16)即可得出关系式

$$\dot{z}(\omega) = \omega \dot{z}(\omega) \quad (2.17)$$

$$\dot{z}(\omega) = \omega \dot{z}(\omega) = \omega \dot{z}(\omega) \quad (2.18)$$

同理,类比式(2.17),可得导数过程  $\ddot{z}$  和  $\ddot{z}$  的均方值分别为

$$\sigma_{\ddot{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \dot{z}(\omega) d\omega \quad (2.19)$$

$\sigma_{\dot{y}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_y(\omega) d\omega$  (9.1.1)

9.1.1 窄带与宽带随机过程

一般来说，平稳过程的谱密度是分布在整个频率域（原肆 约 $\omega$  约垣肆）上的。但在工程中，我们更为关心的是实际信号中强度较大的那部分频谱分量主要集中于哪些频率上。信号频谱的主要成分所处的频率范围常用带宽表示，带宽以外的频谱分量的强度较小，实际应用时可以把它忽略不计。这样，根据带宽的“窄”和“宽”，可以把平稳过程划分为窄带平稳过程和宽带平稳过程。窄带过程的功率谱密度具有尖峰特性，并且只有在该尖峰附近的一个狭窄的频带内  $S_y(\omega)$  才取有意义的量级。宽带过程的功率谱密度在相当宽的频带上取有意义的量级。典型窄带过程和宽带过程的谱密度与样本函数分别如图 9.1.1 和图 9.1.2 所示。

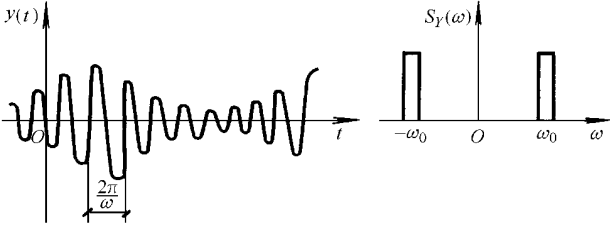


图 9.1.1 窄带过程的谱密度与样本函数

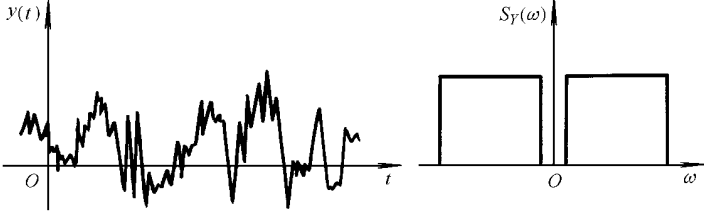


图 9.1.2 宽带过程的谱密度与样本函数

把平稳过程划分为窄带过程和宽带过程在工程上具有重要的实际意义。因为窄带过程的能量主要集中于非常有限的频率范围内，如果引起结构振动的激励源所发出的信号为窄带过程，则在结构设计时使结构的自振频率尽量远离这个频率范围即可能使结构避免产生剧烈的振动反应。而宽带过程的能量分布于较宽的频率范围内，它所影响的结构种类比窄带过程要宽广得多。

9.1.2 互谱密度及其性质

设  $\dot{x}$  和  $\dot{y}$  是两个平稳随机过程，定义

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{u}\dot{u}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.10)$$

为平稳过程  $\dot{u}$  和  $\dot{u}$  的互谱密度。式中  $\dot{u}$  和  $\dot{u}$  依式(2.9)确定。

由式(2.10)可知,互谱密度不再是  $\omega$  的正的、实的偶函数,但它具有以下性质:

(1)  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  和  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$ 。即  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  和  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  互为共轭函数。

(2) 在互相关函数  $R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau)$  绝对可积的条件下

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

(3)  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  和  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  的实部为  $\omega$  的偶函数,虚部为  $\omega$  的奇函数。

(4) 互谱密度与自谱密度之间有不等式

$$|S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)| \leq S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$$

(5) 若随机过程  $\dot{u}$  是平稳过程,则它的自功率谱密度

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) = S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$$

## 2.2 随机地震地面运动模型

在地震中,地震地面运动是引起结构振动的原因。对结构进行随机地震反应分析时需要采用概率方法描述地面运动的过程。本节将介绍结构随机振动分析中经常使用的几个随机地震地面运动模型。

### 2.2.1 理想白噪声模型

理想白噪声模型是最早用来模拟地震地面运动的随机过程模型,由美国学者 H. B. Seed 和 J. C. Frey 首先提出。这一模型假设地震地面加速度  $\ddot{u}$  的功率谱密度函数在  $(\omega_1, \omega_2)$  的频率范围具有常数数值  $S_0$ ,即

$$S_{\ddot{u}\ddot{u}}(\omega) = S_0 \quad (\omega_1 < \omega < \omega_2) \quad (2.11)$$

应用维纳-辛钦公式,  $\ddot{u}$  的自相关函数为

$$R_{\ddot{u}\ddot{u}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau) \quad (2.12)$$

式中  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数。

理想白噪声是宽带过程的极端情况,它平等地包含所有频率的谐波分量。由式(2.12),理想白噪声的均方差为

$$\sigma_{\ddot{u}}^2 = R_{\ddot{u}\ddot{u}}(0) = S_0 \omega_2 - \omega_1$$

可见,在物理上并不存在这种白噪声过程。但是由于白噪声在数学上的简单性,它常被作为一些物理现象的近似或理想化的模型。对于线弹性结构体系,在较高频率的激励信号作用下不会产生大的反应,因此将作用在结构上的宽带随机荷载抽象为白噪声过程不至于产生大的误差,但可使结构随机振动分析大大简化。

### 9.2.1 金井清 (Hayashi) 模型

场地地震动由于受到震源特性、传播路径和场地条件等诸多因素的影响,是极为复杂的。通过对大量实际观测的强地震动数据的分析,发现实际地震动的功率谱密度函数具有明确的峰值,理想白噪声模型不能反映地震动的实际特征。因此,日本学者金井清和田治见宏于 1967 年提出了一种模拟地震地面运动的新的模型。金井清模型假设地面加速度具有如下的形式

$$\dot{u}_g(\omega) = \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \zeta_0^2 \omega^2} \dot{u}_0 \quad (9.2.1)$$

式中,  $\dot{u}_0$  为谱强度;  $\omega_0$  和  $\zeta_0$  分别为场地的特征频率和特征阻尼比。

金井清模型是基于下面的事实提出的,即假设地震引起的基岩的运动过程

为均值为零的理想白噪声,其谱密度为  $\dot{u}_0$ 。基岩运动通过覆盖土层传播到地表,如图 9.2.1 所示。覆盖土层被处理成线性单自由度体系,相当于一个过滤器。这时,覆盖土层的运动方程为

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + ku = m \ddot{u}_g$$

式中  $\ddot{u}_g$  为地面相对于基岩的加速度;  $m$ 、 $c$ 、 $k$  分别为覆盖土层的频率和阻尼比。于是,地表加速度为

$$\ddot{u} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \zeta_0^2 \omega^2} \ddot{u}_g$$

以此求得的地面加速度  $\ddot{u}$  的功率谱密度函数就是式 (9.2.1) 的金井清谱形式。

在金井清模型中,  $\dot{u}_0$  反映了地震动的强弱程度,  $\omega_0$  和  $\zeta_0$  与覆盖土层的特性有关,一般按照土层的软硬程度而取不同的值。

金井清模型也称过滤白噪声模型,考虑了土层对基岩地震动的过滤作用,具有明确的物理意义,频谱特征比较符合实际的场地地震动,因而成为目前使用最为广泛的地震地面运动随机模型之一。但金井清谱存在一个缺点,即它不恰当地

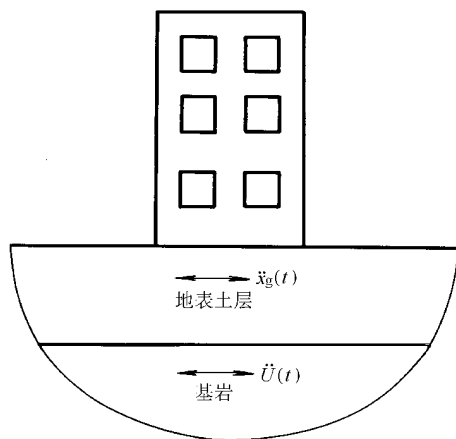


图 9.2.1 金井清模型

夸大了低频地震动的能量，用于某些结构（特别是低频结构）的地震反应分析时可能得到不合理的结果，同时它也不满足地面速度和位移必须有限的条件，也就是说不满足连续两次可积的条件。由金井清谱导出的地面速度功率谱密度函数在零频处出现明显的奇异点，导致地面速度的方差无界。所以，金井清模型更适用于中高频结构随机地震反应的分析。

图 9-2-1 改进的金井清模型

为了改善金井清模型在低频范围内的不合理之处，中国学者胡聿贤等提出了改进方案，修正了金井清模型的缺陷。改进的金井清模型具有下述形式

$$S_{\ddot{u}}(\omega) = \frac{\omega_{\text{远}}^2 \omega_{\text{原}}^2}{(\omega_{\text{远}}^2 + \omega^2)(\omega_{\text{原}}^2 + \omega^2)} \cdot \frac{\omega_{\text{远}}^2}{\omega_{\text{远}}^2 + \omega^2} \quad (9-2-1)$$

式中， $\omega_{\text{远}}$ 为低频截止频率。

金井清谱和改进的金井清谱的比较见图 9-2-2，可以发现改进的金井清模型只修正了金井清模型的低频部分，而基本上不改变金井清模型的中高频部分，利用强震观测资料适当地拟合出来的改进金井清模型更符合地震动的实际情况。

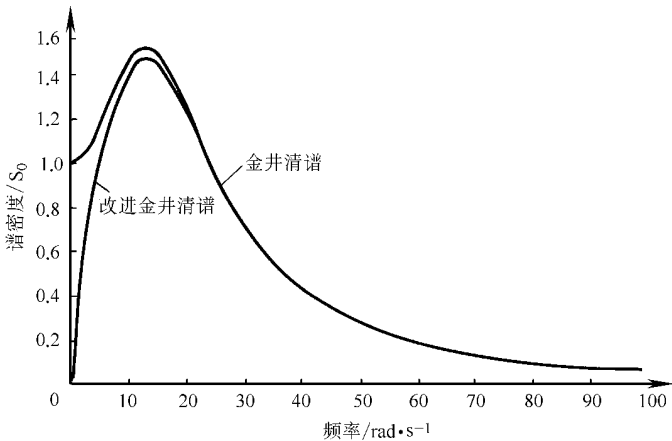


图 9-2-2 金井清谱与改进金井清谱的比较

图 9-2-3 线性单自由度体系随机反应

结构随机振动反应的求解可以在频域中进行，即设法求出结构体系动力反应的功率谱密度，然后通过积分运算计算出体系的均方反应。这种方法称为频域法，是从古典控制理论中移植过来的，在结构随机振动研究的早期占有重要地位。与之对应，结构随机反应的时域分析方法致力于直接求解体系反应相关函数的解析式，从而直接得到体系的均方反应。频域法和时域法各有长处和短处，应视问题的具体情况选择应用。

## 9.1 脉冲反应函数和复频反应函数

线性单自由度结构体系的动态特性可以用脉冲反应函数或复频反应函数表示出来。第三章讨论了线性单自由度结构体系在确定性荷载作用下反应的解法。事实上,作用在结构上的外荷载  $p(t)$  可以看作是一系列脉冲荷载的连续作用。每一个脉冲荷载都将使结构产生一个动力反应的增量,利用叠加原理,把所有的反应增量按时间顺序累加起来就得到了结构体系的动力反应。因此,单自由度体系在单位脉冲荷载作用下的反应,即脉冲反应函数的计算是非常关键的一个步骤。

假设线性单自由度结构体系在时刻  $\tau$  受到单位脉冲荷载  $\delta(t - \tau)$  的作用,则体系的动力反应满足方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = \delta(t - \tau) \quad (9.1.1)$$

式中  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数。方程 (9.1.1) 的解为

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t h(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{m} h(t) \quad (9.1.2)$$

式中,  $\zeta$  为阻尼比;  $\omega_d$  是阻尼结构自振频率,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , 其中  $\omega_n$  为无阻尼结构自振频率。

当  $\tau \rightarrow 0$  时,得到单自由度体系在单位脉冲  $\delta(t)$  作用下的反应,它被定义为单位脉冲反应函数,用  $h(t)$  表示,即

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} \frac{\omega_d}{\omega_n^2} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (9.1.3)$$

显然,时刻  $\tau$  的冲量  $p(\tau) d\tau$  引起的结构动力反应为  $p(\tau) d\tau \cdot h(t - \tau)$ , 外荷载  $p(t)$  在时间  $[0, t]$  内使结构产生的总反应为

$$x(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

此式即杜哈曼 (Duhamel) 积分。上式中,如果将积分下限改为  $-\infty$ , 积分上限改为  $t$ , 并不会改变积分的结果。这是因为当  $\tau < 0$  时,没有荷载作用在结构上,  $p(\tau) = 0$ ; 当  $\tau > t$  时,荷载尚未作用在结构上,  $h(t - \tau) = 0$ 。于是 Duhamel 积分改写为

$$x(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (9.1.4)$$

若做积分变换  $\theta = t - \tau$ , 线性单自由度结构体系的反应还可以写为

$$x(t) = \int_0^t p(t - \theta) h(\theta) d\theta \quad (9.1.5)$$

外荷载  $p(t)$  在时间  $[0, t]$  内的作用,也可以看作是一系列简谐分量的叠加。

只要把各简谐分量引起的结构反应叠加起来,也可以得到结构的实际反应。为此,先来研究线性单自由度结构体系在单位简谐荷载  $\bar{p} \sin \omega t$  作用下的反应。此时结构的振动方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = \bar{p} \sin \omega t \quad (10-10)$$

令其解为  $x = \bar{x} \sin(\omega t - \varphi)$ , 代入上述振动方程,得

$$\bar{x} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\bar{p}}{m} \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega^2} - \frac{c}{\omega} \frac{\cos \omega t}{\omega} + \frac{k}{\omega^2} \sin \omega t \right] \quad (10-11)$$

式中  $\bar{x}$  为复频反应函数,也称为频响函数或传递函数,它是在圆频率为  $\omega$  的简谐外力作用下结构体系的动力反应与作用力  $\bar{p}$  的比值。 $\bar{x}$  一般为复数,也可以写成下面的形式

$$\bar{x} = \beta \frac{\bar{p}}{k} e^{i\varphi} \quad (10-12)$$

式中  $\beta$  为  $\bar{x}$  反映了线性结构体系对外荷载的放大倍数,角度  $\varphi$  表示同频简谐分量的外荷载与结构反应之间的相位差。 $\beta$  和  $\varphi$  不仅取决于结构体系自身的特性,还同扰频  $\omega$  有关,不难推导出

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + [2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}} \quad (10-13)$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right) \quad (10-14)$$

由复频反应函数的定义,容易得到线性体系激励和反应在频域内具有关系

$$\bar{x}(\omega) = \bar{p}(\omega) \bar{x}(\omega) \quad (10-15)$$

式中  $\bar{p}(\omega)$  和  $\bar{x}(\omega)$  分别为体系激励  $\bar{p}$  和反应  $\bar{x}$  的  $\omega$  变换。这里所讲的激励可以是作用在结构体系上的外力,也可以是地面运动;结构反应可以是位移、速度、加速度,也可以是构件内力,如弯矩、剪力等。为了方便起见,下面统一将激励称为输入,用  $\bar{p}$  表示,反应称为输出,用  $\bar{x}$  表示。

脉冲反应函数  $\bar{x}(\theta)$  和复频反应函数  $\bar{x}(\omega)$  分别描述了结构体系在时域和频域内的特性,它们自然应该存在某种联系。事实上, $\bar{x}(\theta)$  和  $\bar{x}(\omega)$  构成  $\omega$  变换对,即

$$\bar{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \quad (10-16)$$

$$\bar{x}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega \quad (10-17)$$

只要令  $\bar{p} = \bar{x}$ , 利用式(10-16),可得到反应为

$$\bar{x}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) \bar{x}(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega$$

由于

$$\bar{x}(\omega) = \bar{x}(\omega)$$

比较以上两个式子就可以得到  $\mu_{\dot{z}}$  和  $\mu_{\ddot{z}}$  的关系, 即式(9-26)和式(9-27)。

### 9.2.2 反应过程的均值

在随机输入量  $\ddot{z}$  的作用下, 线性时不变单自由度结构体系的输出量  $\ddot{z}$  是一个随机过程, 它的均值为

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) \quad (9-28)$$

利用式(9-26), 可得

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(\theta) \mu_{\ddot{z}}(t-\theta) d\theta$$

由于数学期望和积分的计算均为线性算子, 交换它们的运算次序, 上式变为

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(\theta) \mu_{\ddot{z}}(t-\theta) d\theta$$

若  $\ddot{z}$  为平稳随机过程, 则它的均值是一个常数, 即

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \mu_{\ddot{z}}$$

所以

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(\theta) \mu_{\ddot{z}} d\theta \quad (9-29)$$

由式(9-29), 可知

$$\mu_{\ddot{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(\theta) \mu_{\ddot{z}} d\theta \quad (9-30)$$

则式(9-29)又可以写为

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \mu_{\ddot{z}} \quad (9-31)$$

如果激励为零均值的平稳过程,  $\mu_{\ddot{z}} = 0$ , 由式(9-31)可知结构反应过程的均值亦必为零, 即  $\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = 0$ 。对于非零均值的激励, 利用式(9-26), 得  $\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \mu_{\ddot{z}}$  则均值反应按式(9-31)计算, 得

$$\mu_{\ddot{z}}(\ddot{z} \text{ 越 } t \text{ 越 } \ddot{z}) = \mu_{\ddot{z}} \quad (9-32)$$

此式即胡克定律的表达式。由此可见, 非零均值激励下的线性单自由度体系的均值反应相当于按静力方式进行计算, 即将激励过程的均值  $\mu_{\ddot{z}}$  看作静力施加于结构体系上, 其反应即为体系反应过程的均值  $\mu_{\ddot{z}}$ 。

### 9.2.3 反应过程的自相关

平稳反应过程  $\ddot{z}$  的自相关函数为

$$R_{\ddot{z}}(\tau) = \overline{\ddot{z}(t) \ddot{z}(t+\tau)} \quad (9-33)$$

将式(9-26)的结构反应代入式(9-33), 得

$$R(\tau) = E \left\{ \left[ \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau + \tau) d\tau \right] \left[ \int_0^T \dot{u}(\nu) \dot{u}(\nu + \tau) d\nu \right] \right\}$$

交换数学期望和积分运算的次序,得

$$R(\tau) = E \left[ \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau \int_0^T \dot{u}(\nu) d\nu \right] = E \left[ \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau \int_{\tau}^T \dot{u}(\nu) d\nu \right]$$

注意到  $E[\dot{u}(\tau) \dot{u}(\nu)] = R(\tau - \nu)$ , 则反应过程的自相关函数可表示为

$$R(\tau) = E \left[ \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau \int_{\tau}^T \dot{u}(\nu) d\nu \right] = \int_0^T \int_{\tau}^T R(\tau - \nu) d\nu d\tau \quad (2.2.10)$$

采用式(2.2.10)计算结构平稳反应过程的自相关函数时需要进行双重积分的运算,且实际工程随机激励过程的自相关函数  $R(\tau)$  几乎难以获得,所以工程上很少直接利用式(2.2.10)计算结构的随机反应。但是一旦求得结构随机反应过程的自相关函数  $R(\tau)$ , 则计算结构均方反应就非常容易了,只要在式(2.2.10)中令  $\tau \rightarrow 0$  即可得到

$$\sigma_u^2 = R(0) = E \left[ \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau \int_0^T \dot{u}(\tau) d\tau \right] = \int_0^T \int_0^T R(\tau - \nu) d\nu d\tau \quad (2.2.11)$$

## 2.2.2 反应过程的自谱密度

根据维纳-辛钦公式,结构平稳反应过程  $\dot{u}(\tau)$  的自功率谱密度函数为

$$S(\omega) = \int_0^T R(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

利用式(2.2.10),可得

$$S(\omega) = \int_0^T \left[ \int_0^T \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\nu) R(\tau - \nu) d\nu d\tau \right] \cos \omega \tau d\tau$$

交换积分运算的次序,并整理后有

$$S(\omega) = \int_0^T \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\nu) \left[ \int_0^T R(\tau - \nu) \cos \omega \tau d\tau \right] d\nu d\tau$$

由式(2.2.11)和式(2.2.12),得

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (2.2.13)$$

显然

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) d\tau \quad (2.2.14)$$

式中  $\frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) d\tau$  是  $\frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) d\tau$  的共轭函数。将式(2.2.14)代入式(2.2.13),则结构反应的自谱密度函数可表示为

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}(\tau) \dot{u}(\tau) d\tau \quad (2.2.15)$$

由式(2.2.15)可见,反应和激励的自谱密度具有非常简单的关系,计算

渣(蚤)渣比式(怨怨怨)的二重积分运算容易,所以传统上工程分析时通常都是计算反应的自谱密度,如果需要,再通过云(怨怨怨)变换将它转换成自相关函数。但随着计算技术的发展和计算机能力的提高,这种趋势正在发生变化,基于直接求解自相关函数的时域分析方法正在受到更多的重视。

结构均方反应也可以利用自谱密度函数求得,即

$$\sigma_{\text{均方}} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{杂}(\omega) \text{ 凿} \quad (怨怨圆)$$

与式(怨怨圆)相比,需要进行积分运算。可见,反应相关函数的求解比较困难,但通过它计算均方值却很容易;而反应的谱密度函数比较容易求得,但通过它求解均方反应却较麻烦。两种方法各有利弊,应视实际情况选用。

## 怨怨猿 激励和反应的互相关和互谱密度

根据随机过程互相关函数的定义,激励过程和反应过程的互相关函数为

$$\text{砸}_{\text{互}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{曾}(\tau + \theta) \text{曾}(\theta) \text{ 凿}$$

利用式(怨怨圆),得

$$\text{砸}_{\text{互}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \text{曾}(\theta) \text{曾}(\tau + \theta) \text{ 凿} \right]$$

交换期望运算与积分运算的次序,有

$$\text{砸}_{\text{互}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{澡}(\theta) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{曾}(\tau + \theta) \text{曾}(\theta) \text{ 凿}$$

即

$$\text{砸}_{\text{互}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{澡}(\theta) \text{砸}(\tau + \theta) \text{ 凿} \quad (怨怨猿)$$

激励过程和反应过程的互功率谱密度函数为

$$\text{杂}_{\text{互}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{砸}_{\text{互}}(\tau) \text{藻}^{-\text{j}\omega\tau} \text{ 凿}$$

将式(怨怨猿)代入上式,有

$$\text{杂}_{\text{互}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{澡}(\theta) \text{砸}(\tau + \theta) \text{ 凿} \right] \text{藻}^{-\text{j}\omega\tau} \text{ 凿}$$

交换积分运算的次序,得

$$\text{杂}_{\text{互}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{澡}(\theta) \text{藻}^{-\text{j}\omega\theta} \text{ 凿} \int_{-\infty}^{\infty} \text{砸}(\tau + \theta) \text{藻}^{-\text{j}\omega(\tau + \theta)} \text{ 凿}$$

即

$$\text{杂}_{\text{互}}(\omega) = \text{杂}(\omega) \text{ 杂}(\omega) \quad (怨怨源)$$

## 怨怨愿 线性多自由度体系随机反应

单自由度体系的随机振动分析是一个单输入、单输出的问题,对于多自由度

体系,需要分析多个自由度上的反应,而且结构往往不止在一个自由度上受到激励,所以多自由度体系随机反应分析通常是一个多输入、多输出的问题。本节介绍求解线性时不变多自由度结构体系平稳随机反应的两种基本方法,即直接方法和振型叠加方法。直接方法是直接从体系振动方程入手,寻求体系稳态随机反应的方法。它是一种精确方法,但求解问题的规模不能过大,适用于自由度数目较少体系的随机反应分析;振型叠加方法是利用振型的正交特性,通过振型变换手段大幅度缩减分析的自由度数,从而计算体系随机反应的方法。振型叠加方法可以解决较大规模的结构分析问题,但它是一种近似方法,一般要求体系具有经典阻尼。

## 2.1 直接方法

### 2.1.1 多自由度体系的振动反应

假设体系有  $n$  个输入  $\{u_i(t)\}$ ,  $n$  个输出  $\{y_i(t)\}$ , 根据叠加原理,线性体系的每一个输出都可以由各个独立的输入所引起的反应叠加而成。所以,对于每一个输出  $y_i(t)$ , 存在  $n$  个脉冲反应函数,即  $h_{ij}(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  使得

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t h_{ij}(t-\tau) u_j(\tau) d\tau \quad (2.1.1)$$

而对应于全部  $n$  个输出,就存在  $n \times n$  个脉冲反应函数,将它们排列成矩阵形式,有

$$[h_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1n}(t) \\ h_{21}(t) & \ddots & & \dots \\ \dots & & \ddots & \dots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \dots & h_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

称为体系的脉冲反应矩阵。如果体系的  $n$  个输出用向量表示为

$$\{y(t)\} = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T$$

而输入为

$$\{u(t)\} = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}^T$$

则体系反应也可以写成矩阵形式,即

$$\{y(t)\} = \int_0^t [h(t-\tau)] \{u(\tau)\} d\tau \quad (2.1.3)$$

对式(2.1.3)进行 Laplace 变换,得到体系的复频反应矩阵为

$$[\dot{Y}(\omega)] = \begin{pmatrix} \dot{Y}_1(\omega) & \dot{Y}_2(\omega) & \dots & \dot{Y}_n(\omega) \\ \dot{Y}_1(\omega) & \ddots & & \dots \\ \dots & & \ddots & \dots \\ \dot{Y}_n(\omega) & \dot{Y}_n(\omega) & \dots & \dot{Y}_n(\omega) \end{pmatrix} \quad (9.2.10)$$

其中

$$\dot{Y}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}_i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

输出和输入在频域内具有关系

$$\{\dot{Y}(\omega)\} = [Y] \{\dot{X}(\omega)\} \quad (9.2.11)$$

式中,  $\{\dot{Y}(\omega)\}$  和  $\{\dot{X}(\omega)\}$  分别为输出向量  $\{\dot{Y}(\tau)\}$  和输入向量  $\{\dot{X}(\tau)\}$  的傅里叶变换向量。

体系反应的均值向量

体系第  $i$  个平稳反应过程的均值为

$$\{\mu_{\dot{Y}_i}\} = [Y] \{\mu_{\dot{X}_i}\} \quad (9.2.12)$$

将式(9.2.11)代入式(9.2.12), 有

$$\{\mu_{\dot{Y}_i}\} = [Y] \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\theta)] \{\mu_{\dot{X}_i}(\theta)\} d\theta$$

交换期望运算和积分运算的次序, 得

$$\{\mu_{\dot{Y}_i}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\theta)] [Y] \{\mu_{\dot{X}_i}(\theta)\} d\theta$$

由于第  $i$  个输入均为平稳过程, 则

$$\{\mu_{\dot{Y}_i}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\theta)] d\theta \cdot \{\mu_{\dot{X}_i}\} \quad (9.2.13)$$

式中  $\{\mu_{\dot{X}_i}\}$  为体系平稳激励过程的均值向量。

由于  $[Y]$  是  $[Y]$  的傅里叶变换矩阵, 则

$$[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [Y(\theta)] d\theta \quad (9.2.14)$$

所以

$$\{\mu_{\dot{Y}_i}\} = [Y] \{\mu_{\dot{X}_i}\} \quad (9.2.15)$$

显然, 多自由度体系均值反应也可以按照静力的方式计算, 即将第  $i$  个输入过程的均值看作静力施加于体系上, 按照静力方法分别计算出它们在第  $i$  自由度所产生的反应, 然后将这第  $i$  个静力反应值叠加, 得到的结果就是体系第  $i$  自由度平稳反应过程的均值。

体系反应的相关函数矩阵

将第  $i$  个输入过程的自相关函数与互相关函数排列成第  $i$  伊伊阶的矩阵形式, 称为输入相关函数矩阵, 并记为

[砸(ㄗˋ)]越耗{曾贼}{曾贼巨ㄗˋ}裁 (怨男)

同样,由  $n$  个输出过程的自相关函数与互相关函数构成的  $n \times n$  阶矩阵称为输出相关函数矩阵,记为

[砸ㄗㄞˋ(ㄗ)]越耗{贈賊}{贈賊巨ㄗ}裁ㄘㄞˊ] (怨ㄩㄢˋ磨ㄇㄛˊ)

由式(2)可知{赠贼}的转置向量为

{贈賊}裁越 $\begin{cases} 肆 \\ 原肆 \end{cases}$ {曾賊原 $\theta$ )}裁澡 $\theta$ 丁齒 (忽爾原)

將式(22)和式(23)代入式(21),有

[illegible]

交换期望运算和积分运算的次序,得

〔砸<sub>越</sub>( $\tau$ )〕越<sub>同建</sub>〔澡<sub>怎</sub>〕<sub>同建</sub>耗{曾<sub>賊</sub>原<sub>怎</sub>}(曾<sub>賊</sub>恒<sub>τ</sub>原<sub>ν</sub>)<sub>裁</sub>澡<sub>ν</sub>)<sub>裁</sub>凿<sub>怎</sub>

所以体系反应的相关函数矩阵可表示为

〔砸(τ)〕越 $\int_{\text{原律}}$ 〔澡怎〕 $\int_{\text{原律}}$ 〔砸(τ垣怎原ν)Ⅱ澡ν〕 $\int_{\text{原律}}$ 〔凿凿怎〕(忽忽忽)

输出相关函数矩阵  $[R_{ij}(\tau)]$  的主对角线元素描述了体系各平稳反应过程的自相关函数, 其他元素为不同反应过程的互相关函数。如果将  $n$  个主对角元素取出并组成向量, 则形成体系反应自相关函数向量

$$\{\underset{\text{贈}}{\text{砸}}(\tau)\}\text{越}\underset{\text{贈}}{\text{耗}}\{\underset{\text{贈}}{\text{贈}}\underset{\text{賊}}{\text{賊}}\}\otimes\{\underset{\text{贈}}{\text{贈}}\underset{\text{賊}}{\text{賊}}\underset{\text{巨}}{\text{巨}}(\tau)\}]\text{越}\underset{\text{贈}}{\text{砸}}(\tau),\underset{\text{贈}}{\text{砸}}(\tau),\dots,\underset{\text{贈}}{\text{砸}}(\tau)\}\text{裁}(\text{忽隱})$$

式中符号 $\otimes$ 表示两个向量中的对应元素相乘。

在式(28)中,只要令  $\tau$  越大就得到体系各均方反应的值,即

σ<sup>圆</sup>越砸<sup>圆</sup>(园) (噪越员,圆,...,灶)

湍体系反应的谱密度函数矩阵

皂个输入过程的自谱密度函数与互谱密度函数构成皂伊皂阶输入功率谱密度函数矩阵,记为

$$[\text{杂}_{\text{音}}(\omega)] \leq \int_{\text{频率}} [\text{砸}_{\text{音}}(\tau)] \text{ 噪}_{\text{音}} \text{ 啮} \quad (\text{忽}_{\text{音}})$$

而 灶个输出过程的自谱密度函数与互谱密度函数构成的 灶伊灶阶输出功率谱密度函数矩阵,记为

$$[\text{杂}(\omega)] \leq \int_{\text{同律}}^{\text{肆}} [\text{砸}(\tau)] \text{ 乘 } \frac{\text{同律}}{\text{同律}} \quad (\text{忽忽})$$

將式(2)代入式(1)，得

[杂(ω)]越 $\int_{\text{原肆}}^{\text{肆}}$  $\int_{\text{原肆}}^{\text{肆}}$ [澡怎] $\int_{\text{原肆}}^{\text{肆}}$ [砸(τ垣怎原ν)][澡ν)澡—齒齒齒

交换积分运算的次序, 经整理后得

$$[\dot{X}(\omega)] \geq \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\tau) \dot{X}(\tau + \theta)] d\tau \quad [\dot{X}(\tau) \dot{X}(\tau + \theta)] d\tau \quad \dot{X}(\tau) \dot{X}(\tau + \theta) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\tau) \dot{X}(\tau + \theta)] d\tau$$

即

$$[\dot{X}(\omega)] \geq [\dot{X}(\omega)]^* [\dot{X}(\omega)] \quad (9.9.9)$$

式中

$$[\dot{X}(\omega)]^* \geq [\dot{X}(\omega)] \geq \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\tau) \dot{X}(\tau + \theta)] d\tau$$

体系反应的自谱密度函数向量为

$$\{\dot{X}(\omega)\} \geq \int_{-\infty}^{\infty} \{\dot{X}(\tau)\} \dot{X}(\tau + \theta) d\tau \quad (9.9.10)$$

它是由输出谱密度函数矩阵  $[\dot{X}(\omega)]$  的主对角线元素构成的向量。显然,体系第  $i$  个自由度的均方反应为

$$\sigma_{\dot{X}_i}^2 \geq \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_i(\omega) d\omega \quad (\text{噪声圆...})$$

式中,  $\dot{X}_i(\omega)$  为  $\{\dot{X}(\omega)\}$  的第  $i$  个元素。

激励与反应的互相关函数矩阵

$n$  个输入和  $m$  个输出的互相关函数构成的  $m \times n$  阶矩阵,记为

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \{\dot{X}(\tau)\} \dot{X}(\tau + \theta) d\tau \quad (9.9.11)$$

将式(9.9.11)代入式(9.9.10),得

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \{\dot{X}(\tau)\} \int_{-\infty}^{\infty} \{\dot{X}(\tau + \theta)\} \dot{X}(\tau + \theta) d\tau$$

交换期望运算和积分运算的次序,有

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \int_{-\infty}^{\infty} \{\dot{X}(\tau + \theta)\} \dot{X}(\tau + \theta) d\tau$$

则体系激励与反应互相关函数矩阵为

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\tau + \theta)] \dot{X}(\tau + \theta) d\tau \quad (9.9.12)$$

类似地,将  $m$  个输出和  $n$  个输入的互相关函数构成的  $n \times m$  阶矩阵,记为

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \{\dot{X}(\tau)\} \dot{X}(\tau + \theta) d\tau \quad (9.9.13)$$

经过类似的推导,可得反应与激励互相关函数矩阵为

$$[\dot{X}(\tau)] \geq \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{X}(\tau + \theta)] \dot{X}(\tau + \theta) d\tau \quad (9.9.14)$$

注意到  $[\dot{X}(\tau)]$  和  $[\dot{X}(\tau)]$  满足关系

$$[\dot{X}(\tau)] \geq [\dot{X}(\tau)]^*$$

激励与反应的互谱密度函数矩阵

$n$  个输入和  $m$  个输出的互功率谱密度函数构成的  $m \times n$  阶矩阵,记为

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\tau)] \ddot{z}(\tau - \theta) d\tau \quad (9.2.1)$$

将式(9.2.1)代入式(9.2.2),得

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\tau - \theta)] \ddot{z}(\theta) d\tau d\theta$$

交换积分运算的次序,并整理后有

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\tau - \theta)] \ddot{z}(\tau - \theta) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\theta)] \ddot{z}(\theta) d\theta$$

则体系激励与反应互谱密度函数矩阵为

$$[\dot{z}(\omega)] = \dot{z}(\omega) \ddot{z}(\omega) \quad (9.2.3)$$

类似地,灶个输出和皂个输入的互功率谱密度函数构成的灶伊皂阶矩阵,记为

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\tau)] \ddot{z}(\tau - \theta) d\tau \quad (9.2.4)$$

将式(9.2.4)代入式(9.2.5),得

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\theta)] \ddot{z}(\tau - \theta) d\tau d\theta$$

交换积分运算的次序,并整理后有

$$[\dot{z}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\theta)] \ddot{z}(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{z}(\tau - \theta)] \ddot{z}(\tau - \theta) d\tau$$

则体系反应与激励互谱密度函数矩阵为

$$[\dot{z}(\omega)] = \dot{z}(\omega) \ddot{z}(\omega) \quad (9.2.5)$$

注意到 $[\dot{z}(\omega)]$ 和 $[\ddot{z}(\omega)]$ 满足关系

$$[\dot{z}(\omega)] = \ddot{z}(\omega) \ddot{z}(\omega)^*$$

## 9.2.3 振型叠加分析方法

假定线性多自由度体系的自由度数为 晕,在输入向量{曾的激励下体系的振动方程为

$$[M]\ddot{z} + [C]\dot{z} + [K]z = \ddot{z} \quad (9.2.6)$$

式中 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别为体系的质量、阻尼和刚度矩阵,它们都是 晕伊晕的矩阵;{曾为体系的输出向量,维数为 晕

一般情况下,式(9.2.6)中的 晕个方程是耦合的。为了解算上述方程,令

$$\{z\} = [\Phi] \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} \quad (9.2.7)$$

式中 $[\Phi]$ 为振型矩阵,由体系的前 灶阶振型构成,这里取 灶伊晕;{择为广义坐标向量。

将式(9.2.7)代入式(9.2.6)并前乘 $[\Phi]^T$ ,有

[酤]掙垣悦[掙垣运]掙越云

(懲罰)

式中

[酝]越<sub>Φ</sub>𪛗酝[Φ],[悦]越<sub>Φ</sub>𪛗悦[Φ],[运]越<sub>Φ</sub>𪛗运[Φ]  
{云越<sub>Φ</sub>𪛗曾

其中 $[ \delta ]$ 和 $[ \gamma ]$ 为对角矩阵。如果体系具有经典阻尼,则方程(2.15)可解耦,即 $[ \delta ]$ 亦为对角矩阵。

式(2.15)中的  $n$  个方程相互是不耦合的, 每个方程对应着一个振型, 相当于一个单自由度的结构体系。按照前面线性单自由度体系随机反应的分析方法, 可以得到每个振型坐标  $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n$  反应的统计量。最后, 利用式(2.15)的变换关系, 计算结构体系输出量  $\ddot{y}$  的统计特征。

体系第  $i$  个自由度的反应熵的均方值为

○贈賂 越耕 贖 越耕 (  $\sum_{\text{贖}} \phi_{\text{越耕}}$  ) (懲罰)

式中,  $\phi_{\text{type}}$  表示第  $\text{type}$  型的第  $\text{noise}$  个元素。

显然,振型坐标  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  之间存在着某种相关性。一般认为,当体系的固有频率比较接近时,则相应的振型坐标  $\xi_i$  和  $\xi_j$  之间的相关性较大;反之,当体系的两阶固有频率离得较远时,  $\xi_i$  和  $\xi_j$  趋向于相互独立。因此,计算体系均方反应  $\sigma^2$  时需要考虑振型组合问题。目前已经提出了多种振型组合方法,比较常用的方法有:

[illegible]

σ 贈 越  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \phi_{\text{噪}}^2}$  (怨 野 猿)

该方法实质上是认为各阶振型反应之间是相互独立的。

(圆) 粤杂法(粤豐源西云漢果梨)

$$\sigma_{\text{總噪}}^2 = \sum_{\text{噪源}} (\text{噪源噪})^2 \quad (\text{總噪源})$$

该方法假设所有振型反应之间具有相关系数  $\rho$  越员, 原员

(猿 悅 兇 兌 去) (悅 燥 豐 燥 困 家 豐 豐 燥 燥 豐 豐 燥)

$$\sigma_{\text{贈越}} \sqrt{\sum_{\text{贈越}} \sum_{\text{贈越}} \sigma_{\text{贈越}}^2} \quad (\text{贈越})$$

式中

越こ  
の遷うつり遷うつる

願ねが／＼と蚤はみ垣かき則すなはち爾しかるに

ρひびく越こ　(員原)爾しかるに圓垣まるかき土垣どのかき則すなはち員垣わいのかき垣かき源みなもと圓垣まるかきとと爾しかるに

则越 $\frac{\omega}{\omega_{\text{蚤}}}$ 噪跃躁

## 结构随机反应分析的虚拟激励法

通过前节的讨论可知,线性多自由度体系的随机反应一般可以采用直接法进行分析,当体系的自由度数目较大时,可以采用振型叠加方法近似求解。使用振型叠加法时要求体系具有经典阻尼,计算时忽略了不同振型之间的耦合影响。为了克服这些限制,林家浩教授等提出了结构随机反应分析的虚拟激励法,仅利用简谐激励下结构稳态振动方面的知识就可进行较为复杂的结构随机振动分析,不仅较好地解决了模态分析法的不足之处,而且充分利用了现代数字计算机的优势,大大提高了计算效率。

### 单输入情形

假定体系只存在一个简谐随机输入曾越粤 $\omega$ ,它的自功率谱密度函数为 $\text{杂}(\omega)$ 。则体系的任意输出量(如某节点位移、某杆端弯矩等)必为简谐形式,且

$$\text{赠越月藻}(\omega \text{ 越 } \varphi) \quad (\text{忽野远})$$

输入曾和输出赠之间满足关系

$$\text{赠越匀(蚤)曾} \quad (\text{忽野近})$$

它们的功率谱密度函数之间存在关系

$$\text{杂}(\omega) \text{ 越 } \text{渣}(\text{蚤}) \text{ 渣}(\omega) \quad (\text{忽野愿})$$

如果取粤越 $\sqrt{\text{杂}(\omega)}$ ,即曾越 $\sqrt{\text{杂}(\omega)} \cdot \text{藻}$ ,并认为 $\omega$ 为一固定值,则输出赠仍然具有式(忽野远)的简谐形式。此时

$$\text{渣}(\text{蚤}) \text{ 渣} \frac{\text{渣曾查}}{\text{渣查}} \frac{\text{月}}{\sqrt{\text{杂}(\omega)}} \quad (\text{忽野怨})$$

所以

$$\text{杂}(\omega) \text{ 越 } \text{渣}(\text{蚤}) \text{ 渣}(\omega) \text{ 越 } \text{月}^2 \quad (\text{忽野园})$$

由此可见,输出量在 $\omega$ 处的谱密度值就是体系简谐反应幅值的平方,式(忽野园)建立了体系输入和输出的功率谱密度函数之间的换算关系,通过确定性的简谐振动分析即可完成结构体系的随机振动分析。计算过程中不必知道复频反应函数 $\text{匀(蚤)}$ 的显式表达式,也不必考虑输入和输出之间的相位差。显然,对于一系列离散的 $\omega$ 值重复上述的分析过程,即可容易得到离散表达的 $\text{杂}(\omega)$ 曲线。

如果单输入曾贼作用于第躁自由度上,则体系的运动方程为

$$[\text{酝}][\text{赠垣悦}][\text{赠垣运}][\text{赠越砸}]\text{曾} \quad (\text{忽野员})$$

其中向量{砸}中只有第躁个元素为员,其余元素均为园

假定输入 曾贼具有下述虚拟的简谐运动形式

曾賊越/ 雜(ω 嘯)藻<sub>噪</sub> (怨聲盈)

这里  $\omega_{\text{品}}$  为频率  $\omega$  的某一离散值。

将式(2.5.10)代入方程(2.5.9), 则得到简谐振动方程

[ 酤 K 贈 垣 悅 K 贈 垣 運 K 贈 越 礪  $\sqrt{\text{杂}(\omega \text{ 隴})}$  藻 <sub>藻</sub> 賊 ] ( 經 緯 緯 )

该方程的阶数 量一般较高,可采用振型分解法降阶,即首先求解特征方程

[运IΦ]越酏IΦIΩ<sup>圆</sup>]

[Φ 裁 酝 I Φ] 越 陨

从中求出 灶阶特征对(一般 灶约晕), 令

$$\{ \text{贈越のK捨越} \sum_{\substack{\text{灶} \\ \text{財財財}}} \{ \phi \} \text{捨財} \} \quad (\text{忽爾原})$$

将式(2)代入式(1)并前乘 $[\Phi]^T$ , 则方程(1)降阶为

〔酝〕〔掙〕垣〔悦〕〔掙〕垣〔运〕〔掙〕越〔砸〕〔杂〕〔ω〕藻〔藻〕 (經覽參)

其中

[馱]越隕,[運]越 $\Omega$ <sup>圓</sup>,[悅]越 $\Phi$ 莧悅[ $\Phi$ ]{礪越 $\Phi$ 莧礪

如果结构体系具有经典阻尼,且第  $n$  阶振型阻尼比为  $\zeta_n$ ,则

[悦越羣羣圓員員圓圓... 圓燥燥]

(怨怨怨)

此时,式(2)可以分解为  $2n$  个互不耦合的方程,其中第  $n$  个方程为

擗垣<sup>圓</sup>圉<sup>圓</sup>擗垣<sup>圓</sup>越<sup>圓</sup>砸<sup>圓</sup>雜<sup>圓</sup>藻<sup>賊</sup> (怨<sup>圓</sup>最<sup>圓</sup>)

它的解为

择越砸匀√杂(ω)藻(怨)愿

其中

勾越(ω圓原ω圓垣員番ω和區)原員 (怨顯怨)

将式(2)代入式(1),得

{贈越 $\sum_{\text{灶}}\{\phi\}$ 硯鈎 $\sqrt{\text{杂}(\omega\text{噪})}$ 藻賊 (怨野園

由式(25)得输出量的功率谱密度函数为

{杂}越<sup>最</sup>增<sup>最</sup>越赠\*⊗{赠 (怨) (员)

展开后得

$$\{ \text{杂} \}_{\text{端音}} \text{越} \sum_{\text{盘面}}^{\text{灶}} \sum_{\text{碰响}}^{\text{灶}} \text{砸} \text{啲} \text{匀} \phi \text{ } \phi \otimes \{ \phi \} \text{杂} (w \text{ 噪}) \quad (\text{忽} \text{ 调圆})$$

式中符号同上节说明。

结构体系的谱密度函数矩阵可按式求解

$$[\ddot{u}] = \sum_{j=1}^n \ddot{u}_j^* \{ \ddot{u}_j \} \quad (2.10.10)$$

将式(2.10.9)展开后,有

$$[\ddot{u}] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \ddot{u}_j^* \{ \ddot{u}_k \} \phi_k(\omega) \quad (2.10.11)$$

在有意义的频率范围内,对所有的频点 $\omega$ ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ),都按照上述虚拟激励法计算出体系输出向量 $\{ \ddot{u} \}$ 的值,然后利用式(2.10.11)和式(2.10.10)就可以求解出离散表示的 $\{ \ddot{u} \}$ 和 $[\ddot{u}]$ 。如果需要计算单元节点力 $\{ \ddot{F} \}$ 的功率谱密度函数,则应把式(2.10.10)的体系反应 $\{ \ddot{u} \}$ 当作拟静力位移,计算出相应的拟静力 $\{ \ddot{F} \}$ ,从而

$$[\ddot{F}] = \sum_{j=1}^n \ddot{F}_j^* \{ \ddot{F}_j \} \quad (2.10.12)$$

$$[\ddot{F}] = \sum_{j=1}^n \ddot{F}_j^* \{ \ddot{F}_j \}, [\ddot{F}] = \sum_{j=1}^n \ddot{F}_j^* \{ \ddot{F}_j \} \quad (2.10.13)$$

$$\{ \ddot{F} \} = \sum_{j=1}^n \ddot{F}_j^* \otimes \{ \ddot{F}_j \} \quad (2.10.14)$$

进一步,还可以通过节点力向量 $\{ \ddot{F} \}$ 计算出单元内部应力的功率谱密度函数,方法相同,不再赘述。

按照上述的虚拟激励法计算体系随机反应时,结果中实际上已经包含了结构体系各阶振型之间耦合的影响,因而不必再分析各振型之间的组合问题。这是因为虚拟激励法是按照确定性方法计算体系的反应向量,无论振型是否密集,只要参振振型足够多,则按照振型分解法总可以得到相当准确的反应 $\{ \ddot{u} \}$ 。这样, $\{ \ddot{u} \}$ 中已经包含了各阶振型的贡献,将 $\{ \ddot{u} \}$ 自乘后而得到的体系输出功率谱密度函数中自然也就含有各振型的全部耦合项了。另外,虚拟激励法并不要求结构体系一定具有经典阻尼。当体系具有非经典阻尼时,只要采用某种方法能够计算出 $\{ \ddot{u} \}$ ,则上述方法同样适用。

如果体系的输入为地面运动加速度 $\ddot{u}_g$ ,它的功率谱密度函数为 $\ddot{u}_g^2$ ,则按照虚拟激励法计算体系的随机地震反应也很容易。这时只要将地面加速度虚拟为

$$\ddot{u}_g = \sqrt{\ddot{u}_g^2(\omega)} \quad (2.10.15)$$

按照上述步骤仍然很容易求解出体系地震反应的谱密度。

## 2.10.10 多输入情形

上述单输入情形的虚拟激励法可以推广到多输入情形。如果体系上有 $n$ 个输入过程 $\ddot{u}_g^j$ ( $j=1, 2, \dots, n$ ),它们的自谱密度函数和互谱密度函数分别为 $\ddot{u}_g^j(\omega)$ ( $j=1, 2, \dots, n$ )和 $\ddot{u}_g^{jk}(\omega)$ ( $j, k=1, 2, \dots, n$ )。对于每一个离散的频点 $\omega$ ,构造 $n$ 个虚拟的简谐输入

$$\ddot{u}_g^j = \sqrt{\ddot{u}_g^j(\omega)} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.10.16)$$

由每个 $\ddot{u}_g^j$ ,按照确定性的简谐振动分析方法可以算得体系的 $n$ 个反应 $\ddot{u}_j$ 为

$$\dot{z}_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \dot{z}_j(\omega) \quad (9-10)$$

由于

$$\dot{z}_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \dot{z}_j(\omega) \quad (9-11)$$

将式(9-10)和式(9-11)代入式(9-12),有

$$\dot{z}_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \dot{z}_j(\omega) \quad (9-12)$$

由式(9-12)可知,体系输出  $\dot{z}_i(\omega)$  和  $\dot{z}_j(\omega)$  的互谱密度函数为

$$S_{\dot{z}_i \dot{z}_j}(\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} S_{\ddot{z}_k \ddot{z}_l}(\omega) \quad (9-13)$$

将式(9-13)的单位复频反应函数代入式(9-14),得

$$S_{\dot{z}_i \dot{z}_j}(\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} S_{\ddot{z}_k \ddot{z}_l}(\omega) S_{\dot{z}_i \dot{z}_j}(\omega) \quad (9-14)$$

取  $\omega = 0$  则得  $\dot{z}_i(\omega)$  的自谱密度函数,即

$$S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} S_{\ddot{z}_k \ddot{z}_l}(\omega) S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega) \quad (9-15)$$

与单输入情形时的步骤相同,当取一系列离散的频点  $\omega$  时,按照式(9-15)和式(9-16)重复计算,就可以得到离散表示的  $S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}$  和  $S_{\dot{z}_i \dot{z}_j}$ 。

由于  $S_{\dot{z}_i \dot{z}_j}(\omega)$  和  $S_{\dot{z}_j \dot{z}_i}(\omega)$  总是相互共轭的,所以式(9-15)中  $S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega)$  的右端的复数总是成共轭对地出现,其和为一实数,故  $S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega)$  是频率  $\omega$  的实函数。应用虚拟激励法编制计算机程序时,式(9-15)右端的复数虚部可以全部不予计入。特别地,当所有输入量都互不相关时,由式(9-16)立即得到

$$S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{S_{\ddot{z}}(\omega)}} S_{\ddot{z}_i \ddot{z}_i}(\omega) S_{\dot{z}_i \dot{z}_i}(\omega) \quad (9-16)$$

可见,多输入情形下体系的随机振动分析仍然可以仅利用结构简谐振动分析方法完成。

## 9.2 结构随机反应分析的状态空间法

现代控制理论建立了以状态空间方法为基础的分析方法,改变了古典控制理论延续的复频反应函数为基础的分析方法。状态空间方法是一种动态体系分析的方法,它适用性广,可以提供更多的体系内部信息,能够解决很多以前无法解决或者难以解决的问题,而且易于数字计算机进行计算,因而在现代工程控制论中受到重视并得到广泛的应用。线性结构体系是一种常系数的线性力学体系,自然可以利用状态空间法强大的优势进行分析,随机反应统计特性的求解也不例外。

## §1.1 状态空间的基本概念

结构体系的动态特性一般用微分方程描述，它在体系输入和输出之间建立了一座桥梁，这也是我们最为熟悉的描述方法。微分方程并不是描述体系动态特性的惟一方法，事实上体系在任意时刻的状态可以用状态变量进行描述。这里所说的状态是指对体系行为的完整描述，如果结构体系在时刻  $t_0$  的初始条件为  $\{x(t_0)\}$  和  $\dot{x}(t_0)$ ，则体系的输出可以一般性地写为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\{x(t_0)\} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (1.1.1)$$

其中， $\{x(t_0)\}$  称为结构体系在  $t_0$  时刻的状态， $u(t)$  称为体系的输入（或激励）， $x(t)$  称为体系的输出（或反应）。

因此，体系输出不仅同  $t_0$  区间内的输入  $u(t)$  有关，而且与  $t_0$  时刻的初始状态有关。一般地，如果结构体系的初始状态  $\{x(t_0)\}$  以及  $t_0$  时刻以后的输入  $u(t)$  全部已知，则输出  $x(t)$  就可以由式 (1.1.1) 惟一地确定。当  $t=t_0$  时，像这样能够惟一地确定输出  $x(t)$  所必需的最少个数的  $n$  个变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  称为状态变量，它们组成的向量称为状态向量，由状态向量构成的  $n$  维空间叫做状态空间，体系任一时刻的状态都可以用状态空间中的一点表示。状态变量描述了体系在某个时刻的状态。

体系在  $t_0$  时刻的状态包含了体系在该时刻以前的全部历史信息。知道了体系在  $t_0$  时刻的状态，以及  $t_0$  时刻以后的输入，就可以求得体系在任何时刻  $t$  的输出。由于初始状态时刻  $t_0$  的选择是任意的，因此当取  $t_0=t$  时，体系在  $t$  时刻的状态就包含了那个时刻体系的全部信息。从而式 (1.1.1) 可改写为

$$x(t) = \Phi(t, t)\{x(t)\} + \int_t^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (1.1.2)$$

式 (1.1.2) 表明，体系输出  $x(t)$  由  $t$  时刻的状态  $\{x(t)\}$  和输入  $u(t)$  决定。

## §1.2 单自由度体系

线性单自由度体系在激励  $u(t)$  作用下的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (1.2.1)$$

式中  $m$ 、 $c$  和  $k$  分别为体系的质量、阻尼和刚度。

取状态向量

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (1.2.2)$$

则方程 (1.2.1) 可改写为

$$\dot{\{x(t)\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \{x(t)\} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{m} \sin \omega t \end{bmatrix}$$

再补充方程

写成矩阵形式,有

$$[\ddot{u}] + [\gamma] \dot{u} + [\delta] u = \{F(t)\} \quad (2-2-1)$$

其中

$$[\ddot{u}] = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix}, [\gamma] = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \{F(t)\} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}$$

方程(2-2-1)称为状态方程,它不是惟一的。将体系化为式(2-2-2)的形式是为了保持 $[\ddot{u}]$ 和 $[\gamma]$ 的对称性。体系的特征方程为

$$\lambda^2 + [\gamma] \lambda + [\delta] = 0 \quad (2-2-3)$$

展开后有

$$\lambda^2 + \gamma_{11} \lambda + \delta_{11} = 0$$

考虑小阻尼情形,即 $\gamma_{11} \ll \omega_{n1}$ 时,体系特征方程(2-2-3)有一对复特征值

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma_{11}}{2} \pm i \omega_{d1}$$

式中

$$\omega_{d1} = \omega_{n1} \sqrt{1 - \frac{\gamma_{11}^2}{4\omega_{n1}^2}}, \quad \omega_{n1} = \sqrt{\frac{\delta_{11}}{m_1}}$$

体系特征值 $\lambda_{1,2}$ 所对应的特征向量方程为

$$([\delta] - \lambda_{1,2} [\gamma]) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2-2-4)$$

由此求得体系的两个特征向量为

$$\{\phi_1\} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \{\phi_2\} = \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

记

$$[\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2]$$

作复模态变换

$$\{u\} = [\Phi] \{\eta\} = \sum_{j=1}^n \{\phi_j\} \eta_j \quad (2-2-5)$$

将式(2-2-5)代入方程(2-2-1),并前乘 $[\Phi]^{-1}$ ,整理后有

$$\{\ddot{\eta}\} + [\gamma'] \dot{\eta} + [\delta'] \eta = \{\eta(t)\} \quad (2-2-6)$$

其中

$$[\gamma'] = \begin{pmatrix} \gamma'_{11} & \gamma'_{12} \\ \gamma'_{21} & \gamma'_{22} \end{pmatrix}, \{\eta(t)\} = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}$$

注意到方程(2-2-6)已是解耦了的,它的解为

$$\{\eta(t)\} = \int_0^t [\Delta(\theta)] \{\eta(0)\} d\theta \quad (2-2-7)$$

式中 $[\Delta(\theta)]$ 为脉冲反应函数矩阵,它具有下列形式

$$[\dot{\mathbf{z}}] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

按方程(2.1.1)计算复振型反应 $\{\dot{\mathbf{z}}_i\}$ 的相关函数时需要知道广义激励 $\{\dot{\mathbf{z}}_i\}$ 的相关函数矩阵。为此假设线性结构体系的输入 曾 贼为零均值的平稳过程，它的自相关函数为  $\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)$ 。那么体系的广义随机激励 $\{\dot{\mathbf{z}}_i\}$ 也具有零均值，且它的相关函数矩阵为

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

其中

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

所以，体系的复模态反应也是零均值的平稳过程，其相关函数矩阵可以写为

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

将式(2.1.4)代入上式，交换期望与积分运算的次序，有

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

考虑到 $[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)]$ 为对角阵，则 $[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix}$ ，方程(2.1.5)化为

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

将式(2.1.6)代入上式，得

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

利用式(2.1.7)，可得体系状态向量反应的相关函数矩阵为

$$[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

由于平稳过程与它的导数过程正交，所以 $[\dot{\mathbf{z}}_i(\tau)]$ 应为对角矩阵。

## 2.1.2 多自由度体系

考虑 皂个输入所组成的向量

$$\{\dot{\mathbf{z}}_i\} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}_n \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

作用下的线性体系，其振动方程为

$$[\ddot{\mathbf{z}}] + [\dot{\mathbf{z}}] + [\mathbf{z}] = \{\dot{\mathbf{z}}_i\} \quad (2.1.10)$$

式中 $[\ddot{\mathbf{z}}]$ 、 $[\dot{\mathbf{z}}]$ 和 $[\mathbf{z}]$ 分别为体系的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，假定反应向量 $\{\dot{\mathbf{z}}_i\}$ 的阶数为 皂

引入状态向量



## 第 8 章 结构动力学专题

### 8.1 结构地震反应分析中的多点输入问题

传统的结构地震反应分析方法,仅考虑地面运动随时间的变化特性,而未涉及地面运动的空间变化,即假定各支点的地震输入是完全相同的。这对于平面尺寸较小的结构是可以接受的,但是对于平面尺寸较大的结构,如长跨桥梁、管线、核电站、坝体等,由于地面上各点到震源的距离不同,接收到的地震波也必然存在着相位差,而相位差对结构反应将会产生重要影响。在这种情况下,必须考虑各支承点在同一时刻承受不同的地面运动时,由于支承点相对运动所引起的结构内部的拟静力应力,这就是所谓的多点输入问题。

### 8.1.1 动力方程

多点地震输入的多自由度体系的动力反应方程可表示为

$$\begin{pmatrix} [M] & [M_c] \\ [M_c]^T & [M_s] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} [C] & [C_c] \\ [C_c]^T & [C_s] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} [K] & [K_c] \\ [K_c]^T & [K_s] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (8.1.1)$$

式中,  $[M]$ 、 $[C]$  和  $[K]$  为结构的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵;  $[M_c]$ 、 $[C_c]$  和  $[K_c]$  分别表示支承与结构耦联的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $[M_s]$ 、 $[C_s]$  和  $[K_s]$  分别表示支承部分的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\ddot{u}$  和  $\ddot{u}_s$  分别为结构和支座的绝对位移;  $F$  为外荷载向量。由上式的第一个方程可得到

$$[M] \ddot{u} + [C] \dot{u} + [K] u = -[M_c] \ddot{u}_s - [C_c] \dot{u}_s - [K_c] u_s \quad (8.1.2)$$

各节点的位移可分为由于支承运动引起的拟静力位移和动力相对位移两部分构成。支承节点总是随地面一起运动,因而这些节点的动力位移为零,所以有

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_s \end{Bmatrix} \quad (8.1.3)$$

式中,  $\ddot{u}_s$  表示因支承运动  $\ddot{u}_s$  所引起的自由节点处的拟静力位移;  $\ddot{u}_r$  为自由节点相对于地面的动力位移。

由于  $[u]$  表示因支承单位位移在自由节点上产生的力, 而  $[v]$  表示自由节点单位位移所产生的力, 因此  $\{u\}$  和  $\{v\}$  满足条件

$$[u] \{v\} = [v] \{u\} \quad (6-10)$$

由此可得到  $\{u\}$  和  $\{v\}$  的关系为

$$\{u\} = [v]^{-1} [u] \{v\} \quad (6-11)$$

将式 (6-10) 第一个方程代入式 (6-11), 则

$$[u] \{v\} = [v] \{v\} \quad (6-12)$$

其中,  $\{v\}$  表示等效地震作用向量, 它的表达式为

$$\{v\} = [v]^{-1} [u] \{u\} \quad (6-13)$$

式 (6-13) 右端第二项表示结构与支座的阻尼耦联, 由于比较小, 通常可忽略。

同时, 根据式 (6-10) 和式 (6-11), 则式 (6-13) 可简化为

$$\{v\} = [v]^{-1} [u] \{u\} \quad (6-14)$$

对于集中质量体系,  $[v] = 0$  令  $[v] = [v]$  则可得到

$$\{v\} = [v]^{-1} [u] \{u\} \quad (6-15)$$

注意到对于不同的支承点或同一支承点的不同自由度上,  $u$  在同一时刻的值是不同的, 因此等效地震作用向量可表示为

$$\{v\} = [v]^{-1} \sum_{i=1}^{n_d} [u] \{u\}_i \quad (6-16)$$

式中,  $n_d$  为支承点自由度总数。

## 6.2 振型叠加法

利用振型正交条件, 将多点地震动输入下的动力反应方程 (6-16) 解耦后, 可得到

$$[M] \ddot{u} + [C] \dot{u} + [K] u = [M] \ddot{u}_g \quad (6-17)$$

式中,  $u$  为第  $i$  阶振型广义位移;  $\omega_i$  为相应于第  $i$  阶振型的圆频率;  $\zeta_i$  为第  $i$  阶振型的振型阻尼比;  $\gamma_i$  为第  $i$  阶振型的振型参与系数;  $M_i$  为第  $i$  阶振型的广义质量, 且

$$\gamma_i = \frac{\{\phi\}_i^T [u] \{u\}}{M_i} \quad (6-18)$$

在初始值为零的情况下, 利用 Laplace 积分可得到式 (6-17) 的解为

$$\ddot{u}_j(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{\omega_n} \ddot{u}_g(t) \cos(\omega_n t) \quad (10.10)$$

其中,  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$  为第  $n$  阶有阻尼圆频率。通过求解式 (10.10) 得到结构的第  $n$  阶振型位移  $u_j(t)$  后, 结构相对地面的位移反应为

$$u_j(t) = \sum_n \{\phi\}_j \ddot{u}_g(t) \quad (10.11)$$

由式 (10.11) 求得了结构的拟静力位移  $\{u_j\}$ , 由式 (10.10) 求得了结构的动力相对位移  $\{\ddot{u}_j\}$ , 则多点地震动输入下结构总的反应为

$$\{u_j\} = \{u_j\} + \sum_n \{\phi\}_j \ddot{u}_g(t) \quad (10.12)$$
$$\ddot{u}_j(t) = \sum_n [\ddot{u}_g(t)] \{\phi\}_j \ddot{u}_g(t) \quad (10.13)$$

10.2 结构地震反应分析中的多维输入问题

结构在地震作用下, 除了发生平移振动外, 还会发生扭转振动。引起扭转振动的原因, 一是地面运动存在转动分量, 或地震时地面各点的运动存在着相位差; 二是结构本身存在偏心, 即结构的质量中心与刚度中心不相重合。震害表明, 扭转作用会加重结构的破坏, 在某些情况下将成为导致结构破坏的主要因素。如 1976 年唐山地震时, 丰润县化肥库对称的砖烟囱顶部顺时针方向扭转, 唐山压钢厂 1 号砖烟囱顶部扭转; 1989 年海城地震时, 海城农电办公楼砖混结构由于房屋体形不对称增加了扭转的影响; 唐山市合成化学厂硝磺套用工段厂房存在着明显的刚度不对称, 产生了扭转振动的现象。因此, 在进行结构地震分析时仅仅考虑单分量地震动作用是不够的, 还应考虑多分量地震作用对结构的影响。

10.3 非对称结构在多维地震输入时的振型叠加法

计算非对称结构在多维地震动作用下的反应时, 在刚性楼板假定前提下通常每层考虑三个自由度, 即  $x$  方向及扭转方向。在  $x$  方向地震动  $\ddot{u}_x$  和  $y$  方向地震动  $\ddot{u}_y$  作用下, 某层非对称结构的运动方程可表示为

$$[M] \ddot{u} + [C] \dot{u} + [K] u = [F] \ddot{u}_g \quad (10.14)$$

式中  $\{u\} = \{u_x, u_y, u_\theta\}$  为结构在  $x$  方向、 $y$  方向和扭转方向相对于地面的位移反应  $\{u_x\}, \{u_y\}, \{u_\theta\}$ ;  $\ddot{u}_g$  为地面运动加速度向量;  $[M], [C]$  和  $[K]$  为结构的  $n$  维质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

设

图 10.1

$$\{ \ddot{u}_g \} = \sum_{j=1}^n \{ \phi_j \} \ddot{u}_{gj} \quad (10-10)$$

式中  $\{ \ddot{u}_g \}$  为广义坐标向量  $[\ddot{u}_g]$  为  $\{ \phi_j \} \{ \phi_j \}^T \dots \{ \phi_j \} \{ \phi_j \}^T$  为振型矩阵。将式(10-10)代入式(10-9), 可得到

$$[M] \ddot{u} + [C] \dot{u} + [K] u = -[M] \sum_{j=1}^n \{ \phi_j \} \ddot{u}_{gj} \quad (10-11)$$

上式左乘  $\{ \phi_j \}^T$ , 并利用正交条件, 得

$$\ddot{u}_{gj} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{ji} \ddot{u}_{gi}}{\sum_{i=1}^n \phi_{ji}^2} \quad (10-12)$$

上式可简记为

$$\ddot{u}_{gj} = \gamma_{gj} \ddot{u}_{gi} \quad (10-13)$$

式中,

$$\gamma_{gj} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi_{ji} \ddot{u}_{gi}}{\sum_{i=1}^n \phi_{ji}^2} \quad (10-14)$$

型参与系数。

在结构初始位移和初始速度为零的情况下, 应用 Duhamel 积分求解式(10-11)可得到

$$u_j(t) = \frac{\gamma_{gj}}{\omega_j} \int_0^t \ddot{u}_{gi}(\tau) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau \quad (10-15)$$

将上式的结果代入式(10-11), 即可求得结构的反应。

## 10.3 多维地震作用下的反应谱方法

利用振型叠加法可求得结构在地震作用下全时程的动力反应, 但工程中最为关心的是结构最大动力反应, 尤其是地震内力的最大值, 因此, 在实际结构的抗震设计中, 工程师们通常采用反应谱方法。

第  $j$  振型第  $i$  层的水平地震作用, 可按下式确定

$$\left. \begin{aligned} F_{ji} &= \alpha_j \gamma_{ji} F_{gi} \\ F_{ji} &= \alpha_j \gamma_{ji} F_{gi} \\ F_{ji} &= \alpha_j \gamma_{ji} F_{gi} \end{aligned} \right\} \quad (10-16)$$

式中,  $\ddot{y}_i, \ddot{z}_i, \ddot{\theta}_i$  分别为第  $i$  振型  $\alpha$  层的  $y$  曾方向、 $z$  赠方向和扭转方向的地震作用;  
 $\ddot{u}_{xi}, \ddot{u}_{zi}$  分别为第  $i$  振型  $\alpha$  层质心在  $y$  曾赠方向的水平相对位移; $\phi_i$  为第  $i$  振型  $\alpha$  层的  
相对扭转角; $r_i$  为第  $\alpha$  层转动半径,可取  $\alpha$  层绕质心的转动惯量除以该层质量的商  
的正二次方根; $\gamma_i$  为考虑扭转的第  $i$  振型参与系数可按下式计算。

当仅取  $y$  曾方向地震作用时

$$\gamma_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \ddot{u}_{xi} \ddot{u}_{xi}}{\sum_{\alpha=1}^n (\ddot{u}_{xi}^2 + \ddot{u}_{zi}^2 + \phi_i^2 r_i^2)} \quad (式 7.2.10)$$

当仅取  $z$  赠方向地震作用时,

$$\gamma_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \ddot{u}_{zi} \ddot{u}_{zi}}{\sum_{\alpha=1}^n (\ddot{u}_{xi}^2 + \ddot{u}_{zi}^2 + \phi_i^2 r_i^2)} \quad (式 7.2.11)$$

对于扭转耦联振动的多层偏心结构,各振型的频率比较接近。将各振型的地震效应组合成总的地震作用效应时,应考虑相近频率振型之间的相关性。在单向水平地震作用下,我国现行的《建筑抗震设计规范(第 1 章 房屋工程应用)》中采用了完全二次型组合方法(式 7.2.12)求出地震作用效应,即

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{xi} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \ddot{u}_{xi} \ddot{u}_{xj}} \quad (式 7.2.12) \\ \rho_{ij} &= \frac{\ddot{u}_{xi} \ddot{u}_{xj}}{(\ddot{u}_{xi}^2 + \ddot{u}_{zi}^2 + \phi_i^2 r_i^2)(\ddot{u}_{xj}^2 + \ddot{u}_{zj}^2 + \phi_j^2 r_j^2)} \quad (式 7.2.13) \end{aligned}$$

式中, $\ddot{u}_{xi}$  为考虑扭转的地震作用效应; $\ddot{u}_{xi}, \ddot{u}_{xj}$  分别为第  $i$  振型  $\alpha$  层地震作用产生的作用效应; $\rho_{ij}$  为第  $i$  振型与第  $j$  振型的耦联系数; $\lambda_{ij}$  为  $i$  振型与  $j$  振型的自振周期比。

利用式(式 7.2.12)分别对  $y$  曾方向和  $z$  赠方向地震输入求得地震作用效应,记为  $\ddot{u}_{xi}$  和  $\ddot{u}_{zi}$ 。则在双向水平地震动作用下的总的地震作用效应由下面两个公式中的最大值确定,即

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{xi} &= \sqrt{\ddot{u}_{xi}^2 + \ddot{u}_{zi}^2} \quad (式 7.2.14) \\ \ddot{u}_{zi} &= \sqrt{\ddot{u}_{xi}^2 + \ddot{u}_{zi}^2} \quad (式 7.2.15) \end{aligned}$$

7.3 复模态分析方法

在实际工程中,有许多结构体系为非经典阻尼体系,其阻尼不满足正交条件,如土-原结构动力相互作用体系、流体-原结构相互作用体系、由阻尼截然不同的材料组成的结构体系(如钢-原混凝土组合结构)以及设置耗能装置的减振控制体系等。近年来迅速发展起来的复模态分析方法,为解决这类体系中的非经典阻尼解耦问题提供了一条有效途径,从而使得振型叠加法能够继续使用。

7.4 状态变量与状态空间

在描述对象运动的所有变量中,必定可以找到数目最少的一组变量,它们已经

足以描述对象的全部运动,这组变量就称为对象的状态变量。对于一般的线性动力体系,其任一时刻的状态都可以用该时刻的位移和速度来表示,因此位移和速度就够成了该体系的状态变量。状态空间就是以体系的  $n$  个状态变量为轴所组成的  $n$  维空间。体系的任意状态都可以用状态空间中的一点来表示。由线性定常动力体系的微分方程经简单变量代换可得到体系状态方程。一个  $n$  层多自由度结构体系在单向地震动作用下的微分方程可表示为

$$[M] \ddot{u} + [C] \dot{u} + [K] u = -[M] \ddot{u}_g \quad (10-1)$$

式中  $\{u\}$  为  $n$  维单位向量。

设状态变量为  $\{z\}$ , 则  $\{z\}$  补充等式

$$\dot{z} = [A] z + [B] \ddot{u}_g \quad (10-2)$$

则式(10-1)可化为关于状态向量  $\{z\}$  的一阶微分方程

$$[M] \dot{z} + [C] z = [B] \ddot{u}_g \quad (10-3)$$

其中

$$[M] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [I] \\ [0] \end{bmatrix}, \{z\} = \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

## 10.1 复特征值问题

与式(10-3)相对应的复特征值问题为

$$(\lambda [M] - [C]) \{z\} = [B] \ddot{u}_g \quad (10-5)$$

这是一个实系数的  $2n$  阶复特征值问题。由于  $[M]$  是正定矩阵, 实际的结构体系又是小阻尼的, 因此复特征值共轭成对出现(设无重根)。设前  $n$  个复特征值为

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (10-6)$$

其中,  $\lambda_i$  与它们对应的复特征向量为

$$\{z_i\} = \begin{bmatrix} \{u_i\} \\ \{\dot{u}_i\} \end{bmatrix} \quad (10-7)$$

而后  $n$  个复特征值为

$$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n} \quad (10-8)$$

相应的共轭复特征向量为

$$\{z_{n+1}, \dots, z_{2n}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{u}_i\} \\ \{\bar{\dot{u}}_i\} \end{bmatrix} \quad (10-9)$$

记

$$[\Delta]_{\text{越}} = \begin{pmatrix} \lambda_{\text{员}} & & \\ & \lambda_{\text{圆}} & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_{\text{噪}} \end{pmatrix}$$

$$[\bar{\Delta}]_{\text{越}} = \begin{pmatrix} \lambda_{\text{噪}} & & \\ & \lambda_{\text{噪圆}} & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_{\text{圆}} \end{pmatrix} \quad (\text{员圆})$$

为复特征值矩阵,相应的复特征向量值矩阵为

$$[\Phi]_{\text{越}} = \{\Psi_{\text{员}}\} \{\Psi_{\text{圆}}\} \dots \{\Psi_{\text{噪}}\} \{\Psi_{\text{噪圆}}\} \{\Psi_{\text{噪圆圆}}\} \dots \{\Psi_{\text{圆}}\} \quad (\text{员圆})$$

## 复特征值向量的正交性

由于所有的  $\lambda_{\text{躁}}$  和  $\psi_{\text{躁}}$  都满足式(员圆),所以有

$$\begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁噪}}\} \end{pmatrix}^{\text{栽}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{悦} & \text{酝} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{酝} & \text{园} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \lambda_{\text{躁}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{运} & \text{园} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{园} & \text{原酝} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{员圆})$$

$$\begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix}^{\text{栽}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{悦} & \text{酝} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{酝} & \text{园} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \lambda_{\text{噪}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{运} & \text{园} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{园} & \text{原酝} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{噪}}\} \\ \{\psi_{\text{噪躁}}\} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{员圆})$$

式(员圆)转置后减去式(员圆),并利用[酝]和[运]的对称性,可得

$$\begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁噪}}\} \end{pmatrix}^{\text{栽}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{悦} & \text{酝} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{酝} & \text{园} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} (\lambda_{\text{噪}} - \lambda_{\text{躁}}) = 0 \quad (\text{员圆})$$

当  $\lambda_{\text{躁}} \neq \lambda_{\text{噪}}$  时,因  $\lambda_{\text{躁}} \neq \lambda_{\text{噪}}$  故必有

$$\begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁噪}}\} \end{pmatrix}^{\text{栽}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{悦} & \text{酝} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{酝} & \text{园} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{员圆})$$

将式(员圆)代入式(员圆),可得到

$$\begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁噪}}\} \end{pmatrix}^{\text{栽}} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \text{运} & \text{园} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{园} & \text{原酝} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{员圆})$$

将式(员圆)和(员圆)简写为

$$\{\psi_{\text{躁}}\}^{\text{栽}} \begin{bmatrix} \text{酝} & \text{园} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{躁} = \text{员}, \text{圆}, \dots, \text{噪}; \text{躁} = \text{员}, \text{圆}, \dots, \text{噪}) \quad (\text{员圆})$$

$$\{\psi_{\text{躁}}\}^{\text{栽}} \begin{bmatrix} \text{运} & \text{园} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\psi_{\text{躁}}\} \\ \{\psi_{\text{躁躁}}\} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{躁} = \text{员}, \text{圆}, \dots, \text{噪}; \text{躁} = \text{员}, \text{圆}, \dots, \text{噪}) \quad (\text{员圆})$$

式(员圆)和式(员圆)说明,体系复特征向量具有关于矩阵[酝]和[运]的加权正交特性。由于这一特性,体系复特征向量具备了构成复状态空间基底的条件。

## 复模态叠加法

将式(员圆)中复状态变量{增表示为复特征向量的线性组合形式,即

$$\{增\}_{\text{越}} = \Phi_{\text{越}} \{扎\}_{\text{越}} = \sum_{\text{躁}=\text{员}}^{\text{噪}} \{\Psi_{\text{躁}}\} \{扎_{\text{躁}}\} \quad (\text{员圆})$$

式中,  $\{扎_{\text{躁}}\}$  为对应于第躁阶复振型的广义坐标。将上式代入式(员圆),可得

$$[\text{酝}] \Phi_{\text{越}} \{扎_{\text{越}}\} + [\text{运}] \Phi_{\text{越}} \{扎_{\text{越}}\} = \text{原} \text{酝} \text{怎} \quad (\text{员圆})$$

上式各项同乘以  $\{\psi_{\text{躁}}\}^{\text{栽}}$ , 并利用正交关系式(员圆)和式(员圆),则可得到复模态

空间内的运动方程

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-10)$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) \quad (\text{式 } 10-11)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-12)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-13)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-14)$$

式中,  $m$  和  $\eta$  分别称为复振型质量、复振型刚度和复振型参与系数。

求解式(10-15)可得

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-16)$$

式中,  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  为广义坐标的初始条件, 利用广义坐标与初始状态变量间的分解关系可得

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-17)$$

假定结构在地震开始时处于静止状态, 因此  $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0$ 。将式(10-17)代入式(10-16)即可得到结构的地震反应, 则结构的位移反应为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-18)$$

由于真实体系只有实数解, 故取上式中的实部, 同时考虑  $\psi$  与  $\psi^*$  的共轭性, 则有

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{v}_g \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-19)$$

复模态分析方法利用状态空间理论, 将非经典阻尼体系的运动方程转换成状态方程, 从而解决了这类型体系不能解耦的问题。由于在实际工程中存在大量的非经典阻尼体系, 因此以复模态理论为基础的分析方法有着重要的理论意义和工程意义。

## 1.2 动态子结构法

在近代结构分析中,经常要对一些十分复杂的结构进行总体动力分析,如航空航天飞行器、高层建筑、海上采油平台和水坝等,这种结构的有限元模型可能含有数以万计的自由度。如果直接计算,往往为计算机条件所不能允许,这时可以通过划分子结构以实现特征方程的降阶。同时考虑到大型复杂结构的制造或者是施工过程,有的分部件制造,有的分区域施工,然后组成一个大系统。这个过程正符合模态综合法“先修改后复原”的思想,先将结构划分为彼此独立自由度较少的子结构,使其容易分析,然后再将各子结构装配恢复成原先的结构,最终获得总体动力特性参数。

动态子结构法的一个突出特点是子结构的模态特性既可以从计算中得到,也可以通过试验获取,从而灵活地把试验与计算结合起来,也方便了模型验证或模型修正。子结构法的思想是于 20 世纪 50 年代提出的,之后经进一步的改进和发展已经成为大型复杂结构系统的有效计算方法。本节介绍模态综合法和界面位移综合法。

### 1.2.1 模态综合法

模态综合法的全称为动态子结构的模态综合法,又称为子结构法,模态(即振型)也称为振型。其基本思想为通过将结构划分为若干个相对小的子结构(部件),分析子结构的振动特性,仅保留其少数几阶低阶模态,将各子结构的低阶保留模态通过交界面的位移协调条件合成为总体结构的模态,然后再进行分析计算。这样通过对子结构的模态缩减而减少了总体结构模态的自由度。

在计算子结构的固有模态时,可以令交界面完全固定,也可以完全自由,前者称为固定界面法,而后者称为约束界面法。下面介绍固定界面法的基本原理和步骤。

#### 1.2.1.1 子结构的划分

首先将整个结构划分为若干个子结构。每个子结构应该是容易分析的,同时子结构的划分应考虑到制造和装配过程,使各子结构在连接的薄弱处分开。设共分为  $N$  个子结构,其中一个子结构的动力方程为(暂不考虑阻尼)

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

式中,  $\bar{M}$  和  $\bar{K}$  分别为子结构的质量矩阵和刚度矩阵;  $\bar{U}$  和  $\bar{F}$  为物理位移和外力向量。下标 1 和 2 分别表示为与子结构内部自由度和交界面自由度相关的量。

#### 1.2.1.2 子结构的固定界面主模态

固定交界面的自由度,即  $\bar{U}_2 = 0$ ,求子结构的固定界面主模态。结构自由

振动,故其内部自由度不受外力 $\{F\}$ 影响。展开(平衡)式的第一行可以得到

酖裁垣运裁越园 (员型总)

其特征方程为

運の越配のΛ (元型)

式中的模态  $\phi$  已经关于质量归一化了, 而且按照频率由小到大升序排列。根据要求计算精度的不同可以将其分为低阶保留模态和舍弃的高阶模态, 即

$$\Phi \in [\Phi_{\text{iso}}, \Phi_{\text{iso}}] \quad (\text{元型})$$

式中,  $m$  和  $n$  分别为保留的低阶模态数和舍弃的高阶模态数。

## 彙子结构的约束模态

依次给交界面上的自由度以单位位移,同时保持其余自由度固定,按照下式求出子结构静力反应的约束模态,即

(運<sub>運</sub> 運<sub>運</sub>) (ψ<sub>運</sub> 越<sub>韻</sub>) (韻<sub>韻</sub> 孕<sub>韻</sub>) (貢<sub>韻</sub> 貢<sub>韻</sub>)

式中,单位矩阵  $\mathbf{I}$  表示依次给每个交界面自由度以单位位移,同时其余交界面自由度固定; $\psi_{\alpha}$  为相应的子结构内部自由度的静力位移; $\mathbf{P}_{\alpha}$  为交界面自由度上的反力矩阵。故可得子结构的约束模态矩阵

$$\psi \text{ 越 } \begin{pmatrix} \psi_{\text{叠}} \\ \psi_{\text{隔}} \end{pmatrix} \text{ 越 } \begin{pmatrix} \text{原运叠} \\ \text{原运隔} \end{pmatrix} \quad (\text{贡型圆})$$

## 源子结构的模态综合

根据子结构的固定界面模态和约束模态可以形成该子结构缩减后的模态,称为主模态,用  $\phi$  表示。子结构的节点位移为交界面固定时的位移和交界面各自由度分别有单位位移时产生位移的叠加,由主模态表示为

载越 $\begin{pmatrix} \text{载} \\ \text{越} \end{pmatrix}$ 越 $\begin{pmatrix} \Phi \\ \text{园} \end{pmatrix}$ 噪 $\begin{pmatrix} \psi \\ I \end{pmatrix}$ 墨 $\begin{pmatrix} \text{怎} \\ \text{怎} \end{pmatrix}$ 越 $\begin{pmatrix} \text{怎} \\ \text{怎} \end{pmatrix}$  (无理数)

式中,  $\xi_{1s}$  和  $\xi_{2s}$  分别为相应于主模态的模态坐标。由于仅保留了子结构的低阶模态和交界面自由度产生的约束模态, 子结构的自由度得到了缩减。对于每个子结构, 其位移皆可如此形成。

### 第一次坐标变换, 形成非耦合的总体方程

利用子结构的主模态表示出其位移后,需按照子结构间的交界面位移协调条件合成总体结构位移。下面以两个子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 子结构来说明连接过程,首先对子结构动力方程进行降阶并合成非耦合的总体结构方程。子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 的位移分别为

载越<sub>(载越)</sub>越<sub>(越)</sub>( $\Phi_{噪}^a$   $\psi_{噪}^a$ )<sub>(怎)</sub>越<sub>(怎)</sub> $\phi^a$ 怎<sub>(怎)</sub> (贡理源)

和

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi & \psi \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \quad (5.2.25)$$

式中,子结构  $\alpha$  的低阶保留模态数目为  $n_\alpha$ ,子结构  $\beta$  的低阶保留模态数目为  $n_\beta$ 。子结构  $\alpha$  和  $\beta$  采用主模态表示的总体结构动力方程为

$$M_\alpha \ddot{\phi} + M_\beta \ddot{\psi} = F \quad (5.2.26)$$

式中,

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & M_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, M_\beta = \begin{bmatrix} M_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & M_{\beta\beta} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{bmatrix} \quad (5.2.27)$$

$$K_\alpha = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & K_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, K_\beta = \begin{bmatrix} K_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (5.2.28)$$

其中,  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ ,  $K_\alpha$  和  $K_\beta$  分别为子结构  $\alpha$  和  $\beta$  的质量矩阵和刚度矩阵。

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^\alpha \\ \phi^\beta \end{bmatrix} \quad (5.2.29)$$

此时,子结构之间是非耦合。

第二次坐标变换,实现子结构的连接

事实上,两个子结构模态坐标中的各元素并不都互相独立,其交界面处的模态坐标分量是重复的。由于交界面为子结构  $\alpha$  和  $\beta$  共有,交界面处需满足如下的协调条件:

位移协调条件

$$\ddot{\phi} = \ddot{\psi} \quad (5.2.30)$$

力协调条件

$$M_\alpha \ddot{\phi} = M_\beta \ddot{\psi} \quad (5.2.31)$$

将式(5.2.30)和式(5.2.31)第二行展开并代入式(5.2.26),可得

$$\ddot{\phi} = \ddot{\psi} \quad (5.2.32)$$

这样,可以在总体模态坐标合成时消去重复的交界面模态坐标。于是,总体结构的模态坐标可以表示为

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.2.33)$$

式中,  $\gamma$  为第二次坐标转换矩阵

$$\text{杂越} \begin{Bmatrix} \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{陨} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{陨} \\ \text{园} & \text{陨} & \text{园} \end{Bmatrix} \quad (\text{式 } 10-10)$$

择为总体结构的模态坐标向量

$$\text{择越} \begin{Bmatrix} \text{怎} \\ \text{怎} \\ \text{怎} \end{Bmatrix}$$

将式(10-10)代入式(10-9), 可得

$$\text{酝越垣云择越云越栽栽} \quad (\text{式 } 10-11)$$

式中

$$\text{酝越栽栽} \quad \text{栽栽} \quad \text{云越栽栽} \quad \text{栽栽} \quad \text{栽栽} \quad (\text{式 } 10-12)$$

下面分析一下广义力 孕的特点。将式(10-12)和式(10-11)代入后, 可得

$$\text{孕越栽栽} \quad \text{栽栽} \quad \text{栽栽} \quad \begin{Bmatrix} \text{陨} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{陨} & \text{园} & \text{陨} \\ \text{园} & \text{园} & \text{陨} & \text{园} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{\text{噪}}^{\alpha} & \text{园} & \Phi_{\text{造}}^{\beta} & \text{园} \\ \psi_{\text{量}}^{\alpha} & \text{陨} & \psi_{\text{量}}^{\beta} & \text{陨} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{园} \\ \text{孕} \\ \text{园} \\ \text{孕} \end{Bmatrix} \text{越} \begin{Bmatrix} \text{园} \\ \text{孕垣孕} \\ \text{园} \end{Bmatrix} \text{越} \begin{Bmatrix} \text{园} \\ \text{园} \\ \text{园} \end{Bmatrix} \quad (\text{式 } 10-13)$$

式(10-13)变为

$$\text{酝越垣云择越园} \quad (\text{式 } 10-14)$$

上式即为子结构对接后总体结构的动力方程, 模态坐标的自由度数 择比原来的物理坐标数目 晕大为减少, 因此缩减了体系的自由度。

### 10.2 模态综合法中交界面自由度的处理

经过处理后, 虽然各子结构的内部自由度得到了缩减, 但由于将交界面的全部物理坐标直接作为总体结构的广义坐标, 当用于多个子结构组成的复杂结构时, 交界面的坐标数目往往很多。使得式(10-14)求解规模仍然很大, 因此有必要对交界面自由度进行缩减, 以提高计算效率。一种方法为类似于模态缩减法, 通过保留交界面自由度的主要低阶模态, 舍弃其高阶模态, 进行交界面自由度的缩减。另一种方法为 删减法, 将交界面自由度分为主自由度和副自由度, 通过将副自由度凝缩掉而仅保留主自由度达到自由度缩减的目的。

采用模态综合法计算的各低阶特征值与原结构低阶特征值的误差, 跟子结构划分是否得当, 各子结构低阶保留模态是否合理有很大关系。一般地, 这样求出总体结构的主模态中, 前 员栽低阶模态具有可以接受的精度。

## 界面位移综合法

子结构的模态综合法通过子结构模态的截断达到缩减总体结构动力分析自由度的目的。界面位移综合法通过另一种途径,即把子结构的内部自由度直接向其交界面凝聚,从而有效地缩减结构系统动力分析的自由度。由于界面位移综合法不涉及子结构模态坐标的概念,不进行子结构主模态分析,因而原理简明,方法简单。不同的子结构凝聚方法形成不同的界面位移综合法,首先介绍一下对结构的次要自由度(副自由度)进行约化降阶的两种方法。

### 子结构的静力凝聚

静力凝聚方法建立在静力平衡方程的基础上,是早期大型复杂结构缩减动力分析自由度的有效计算方法之一。静力凝聚方法将结构的自由度划分为主自由度和副自由度,忽略副自由度的惯性。由于在求解主位移时忽略了这种惯性效应,而仅考虑了其静力的弹性,静力凝聚方法也称为静力凝聚方法。子结构的动力方程可写成

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_{\text{主}} & \bar{M}_{\text{主副}} \\ \bar{M}_{\text{副主}} & \bar{M}_{\text{副副}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{\text{主}} \\ \ddot{u}_{\text{副}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{K}_{\text{主}} & \bar{K}_{\text{主副}} \\ \bar{K}_{\text{副主}} & \bar{K}_{\text{副副}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\text{主}} \\ u_{\text{副}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{\text{主}} \\ \bar{F}_{\text{副}} \end{pmatrix} \quad (5-2-9)$$

式中, \$\bar{M}\$ 和 \$\bar{K}\$ 分别为子结构的质量矩阵和刚度矩阵,下标 主和 副分别表示子结构的主自由度(主自由度)和副自由度(副自由度)。忽略式(5-2-9)中副自由度的惯性,令其为零,即

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_{\text{主}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{\text{主}} \\ \ddot{u}_{\text{副}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{K}_{\text{主}} & \bar{K}_{\text{主副}} \\ \bar{K}_{\text{副主}} & \bar{K}_{\text{副副}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\text{主}} \\ u_{\text{副}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{\text{主}} \\ \bar{F}_{\text{副}} \end{pmatrix} \quad (5-2-10)$$

展开上式中的第二行,可得

$$\begin{aligned} & \bar{K}_{\text{副主}} u_{\text{主}} + \bar{K}_{\text{副副}} u_{\text{副}} = \bar{F}_{\text{副}} \quad (5-2-11) \\ & \begin{Bmatrix} \bar{K}_{\text{主}} \\ \bar{K}_{\text{副主}} \end{Bmatrix} u_{\text{主}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{K}_{\text{副副}} \end{pmatrix} u_{\text{副}} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{\text{主}} \\ \bar{F}_{\text{副}} \end{Bmatrix} \quad (5-2-12) \end{aligned}$$

于是,式(5-2-9)简化为

$$[\bar{M}_{\text{主}}] \ddot{u}_{\text{主}} + [\bar{K}_{\text{主}}] u_{\text{主}} = \bar{F}_{\text{主}} \quad (5-2-13)$$

式中, \$\bar{M}\_{\text{主}}\$ 和 \$\bar{K}\_{\text{主}}\$ 为静力凝聚质量矩阵和刚度矩阵

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{\text{主}}] &= [\bar{M}_{\text{主}}]_{\text{主}} \\ [\bar{K}_{\text{主}}] &= [\bar{K}_{\text{主}}]_{\text{主}} \end{aligned} \quad (5-2-14)$$

这样就等于将结构的刚度和质量全部凝聚到主自由度上,使总体结构的自由度得到了缩减。得到主自由度的位移后,通过求解式(5-2-12)中的第二行,便可以得到副自由度的位移。

在子结构一级水平上实施 凝聚法, 就形成了最简单的界面位移综合法。

凝聚法用于子结构中, 将子结构的界面自由度作为主自由度, 而将其内部自由度作为副自由度, 下面以两个子结构  $\alpha$  和  $\beta$  的对接说明其过程。

根据式(5-10), 子结构  $\alpha$  的坐标转换矩阵为  $[T_\alpha]$ , 子结构  $\beta$  的坐标转换矩阵为  $[T_\beta]$ 。子结构  $\alpha$  和  $\beta$  的界面位移分别为

$$\{u_\alpha\} = [T_\alpha] \{u_\beta\} \quad (5-11)$$

$$\{u_\beta\} = [T_\beta] \{u_\alpha\} \quad (5-12)$$

式中,  $u_\alpha$  为界面主自由度的物理位移;  $u_\beta$  为界面副自由度的物理位移。子结构  $\alpha$  和  $\beta$  向界面凝聚后的动力方程为

$$[M_\alpha] \ddot{u}_\alpha + [C_\alpha] \dot{u}_\alpha + [K_\alpha] u_\alpha = F_\alpha \quad (5-13)$$

$$[M_\beta] \ddot{u}_\beta + [C_\beta] \dot{u}_\beta + [K_\beta] u_\beta = F_\beta \quad (5-14)$$

界面需满足如下的协调条件:

位移协调条件

$$u_\alpha = u_\beta \quad (5-15)$$

力协调条件

$$F_\alpha = F_\beta \quad (5-16)$$

将式(5-13)并代入式(5-15)和式(5-16)后并相加, 然后将式(5-14)代入可得

$$[M_\alpha] \ddot{u}_\alpha + [C_\alpha] \dot{u}_\alpha + [K_\alpha] u_\alpha = F_\alpha \quad (5-17)$$

上式通过 凝聚法将两个子结构的内部自由度全部凝聚到交界面上, 缩减了体系的自由度, 求解上式即可得到结构的低阶特征对。

结构的 动力凝聚

凝聚法假定静变位模式计算动能, 忽略了惯性效应。而 考虑了这种近似误差, 提出了 动力凝聚法, 也称为动力变换法。下面介绍 方法。

式(5-13)可重写为

$$\begin{pmatrix} [M_\alpha] & [M_\beta] \\ [M_\beta] & [M_\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_\alpha \\ \ddot{u}_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [C_\alpha] & [C_\beta] \\ [C_\beta] & [C_\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_\alpha \\ \dot{u}_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [K_\alpha] & [K_\beta] \\ [K_\beta] & [K_\alpha] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{pmatrix} \quad (5-18)$$

将上式第二行展开得

$$([M_\beta] \ddot{u}_\alpha + [M_\alpha] \ddot{u}_\beta) + ([C_\beta] \dot{u}_\alpha + [C_\alpha] \dot{u}_\beta) + ([K_\beta] u_\alpha + [K_\alpha] u_\beta) = F_\beta \quad (5-19)$$

或

$$[M_\beta] \ddot{u}_\alpha + [M_\alpha] \ddot{u}_\beta + [C_\beta] \dot{u}_\alpha + [C_\alpha] \dot{u}_\beta + [K_\beta] u_\alpha + [K_\alpha] u_\beta = F_\beta \quad (5-20)$$

式中, 副自由度向主自由度映射的矩阵为 $[\eta]$ , 且

$$[\eta] = \begin{pmatrix} \text{运}_{\text{原}} \\ \text{运}_{\text{副}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{运}_{\text{原}} \\ \text{运}_{\text{副}} \end{pmatrix} \quad (\text{式 } 10.1.1)$$

总体坐标变换为

$$\begin{Bmatrix} \text{载}_{\text{主}} \\ \text{载}_{\text{副}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{运}_{\text{主}} \\ \text{运}_{\text{副}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{载}_{\text{主}} \\ \text{载}_{\text{副}} \end{Bmatrix} \quad (\text{式 } 10.1.2)$$

于是, 式(10.1.1)简化为

$$[\text{运}_{\text{主}}] \ddot{\text{载}}_{\text{主}} + [\text{运}_{\text{主}}] \text{载}_{\text{主}} = \text{运}_{\text{主}} \text{载}_{\text{主}} \quad (\text{式 } 10.1.3)$$

式中,  $\text{运}_{\text{主}}$  和  $\text{运}_{\text{主}}$  为凝聚质量矩阵和刚度矩阵, 即

$$\begin{aligned} [\text{运}_{\text{主}}] &= \text{运}_{\text{主}} \text{运}_{\text{主}} \\ [\text{运}_{\text{主}}] &= \text{运}_{\text{主}} \text{运}_{\text{主}} \end{aligned} \quad (\text{式 } 10.1.4)$$

可见, 凝聚静力凝聚是凝聚动力凝聚当  $\omega = 0$  的特殊形式。在计算时先估计一个特征值, 一般采用凝聚计算的特征值作为估计值而迭代计算, 可以证明其结果收敛于系统的真实解。

## 10.2 结构动力分析中的物理非线性问题

结构动力分析中的物理非线性主要是指结构恢复力的非线性问题。恢复力是指结构或构件在外荷载去除后恢复原来形状的能力。恢复力曲线模型一般包括骨架曲线、滞回特性、刚度退化规律三个组成部分。确定恢复力曲线的方法有试验拟合法、系统识别法、理论算法。

已提出的结构非线性恢复力模型大体上可分为曲线型模型和折线型模型。曲线型恢复力模型是由连续曲线构成, 刚度变化连续, 符合工程需要, 但刚度计算复杂。折线型恢复力模型由若干直线段所构成, 刚度变化不连续, 存在拐点或突变点, 但由于刚度计算简单, 因而在工程中得到了广泛应用。常用的恢复力模型有兰伯格-奥斯古德(1863-1943)模型、克拉夫(1913-1990)退化双线性模型、武田(1913-1990)模型等。

### 10.2.1 几个重要的恢复力曲线模型

#### 10.2.1.1 双线性模型

双线性恢复力模型是结构分析中最简单、最基本的恢复力模型。该模型的滞回规律是: 加载时先沿骨架曲线进行, 屈服后的加载刚度为屈服刚度, 无论是否达到屈服, 卸载刚度和初始加载刚度相同。卸载至零载后进行反向加载, 反向加载时的刚度为初始刚度, 达到屈服后变为屈服刚度, 如图 10.2.1 所示。

#### 10.2.1.2 克拉夫(1913-1990)退化双线性模型

克拉夫退化双线性模型(见图 10.2.2)是较早提出的刚度退化模型, 主要是作为

钢筋混凝土结构受弯构件的恢复力特性模型提出来的。该模型刚度退化方程为

$$K = K_0 \left( \frac{u}{u_y} \right)^{-\alpha} \quad (5-2-9)$$

式中,  $u_y$  和  $K_0$  分别为屈服位移和初始刚度;  $u_m$  为最大位移;  $K_r$  为对应于  $u_m$  的退化刚度;  $\alpha$  为刚度退化指数。

克拉夫模型的滞回规律是: 加载时先沿骨架曲线进行, 在进入屈服段以后, 卸载刚度按式(5-2-9)采用。卸载至零载进行反向加载时则指向反向位移的最大点, 如反向未屈服则指向反向屈服点。次滞回规则与主滞回规则相同, 克拉夫模型的骨架曲线可根据实际需要取为平顶或坡顶两种。

克拉夫模型能较好地符合钢筋混凝土构件动力性能的主要特性, 同时, 其滞回规则又比较简单, 因此得到广泛的应用。一般情况下, 对坡顶型骨架曲线, 屈服后的刚度通常取为屈服前刚度的  $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ 。

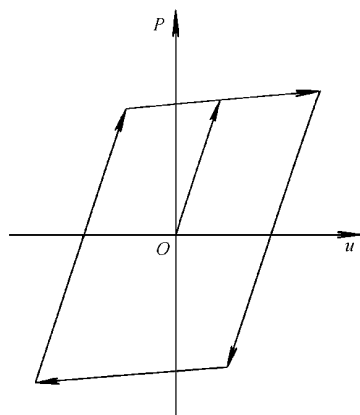


图 5-2-8 双线性模型

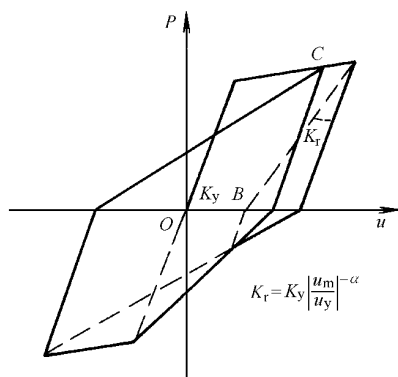


图 5-2-9 克拉夫退化双线性模型

### 3. 武田(栽藤)模型

武田模型是根据较多的钢筋混凝土构件试验所得的恢复力特性抽象出来的, 适用于以弯曲破坏为主的情况。主要特性有:

(1) 考虑开裂所引起的构件刚度降低, 骨架曲线取为三折线: 开裂前直线用于线弹性阶段, 混凝土受拉开裂后用第二段直线, 纵向受拉钢筋屈服后用第三段直线。

(2) 卸载刚度退化规律与克拉夫模型近似, 即卸载刚度随变形增加而降低, 具体形式为

$$K = K_0 \left( \frac{u}{u_y} \right)^{-\alpha} \quad (5-2-10)$$

式中,  $u_c$  为开裂点;  $u_y$  为屈服点。

(獭 采用了较为复杂的主、次滞回规律。其核心可概括为 卸载刚度按式(员圆园)计算,主滞回反向加载按反方向是否开裂、屈服分别考虑,次滞回反向加载指向外侧滞回曲线的峰点,如图 员圆园所示。

源 兰伯格 原奥斯古德(砸老葬葬葬葬葬葬)模型

兰伯格 原奥斯古德模型(见图 员圆员)最初是为表示金属材料的恢复力模型而提出来的,后来广泛用作土体、钢筋材料的非线性恢复力模型。模型骨架曲线用屈服强度  $P_y$ 、屈服位移  $u_y$  和形状指数  $\gamma$  三个基本参数确定,即

$$\frac{P}{P_y} = \left( \frac{u}{u_y} \right)^\gamma \eta$$

(员圆员)

式中,  $\eta$  为常系数,根据材料特性的不同而确立。当  $\gamma$  越员时,为线弹性情况;当  $\gamma \rightarrow \infty$  时,为理想塑性情况。 $\gamma$  值对结构动力反应有重要影响,较大的指数  $\gamma$  对应于较高的滞回耗能和较大的塑性残余变形。

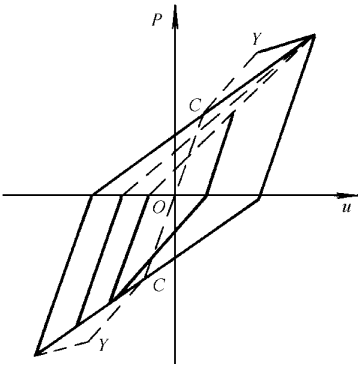


图 员圆零 武田模型

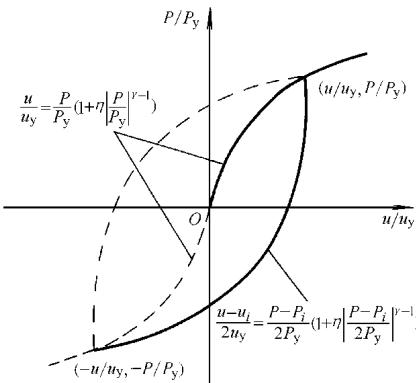


图 员圆一 兰伯格 原奥斯古德模型

滞回曲线的形状定义为

$$\frac{P}{P_y} = \left( \frac{u}{u_y} \right)^\gamma \eta$$

(员圆二)

式中,  $u_r$  和  $P_r$  为卸载时的位移和荷载坐标值。

兰伯格 原奥斯古德(砸老葬葬葬葬葬葬)模型假定主、次滞回曲线都服从式(员圆二)的规律。

员圆二 双向恢复力模型

以上所介绍的三个模型基本上都属于平面力系的恢复力模型,而实际上,结构和结构构件都是处于空间受力状态,因此要进一步考虑多向力作用下的结构性能和相应的恢复力模型。

利用塑性力学模型构造双向恢复力模型,本质上是一种比拟法,即以内力空间来代替应力空间,以截面曲率代替应变。这种比拟法并没有严格的证明,然而它是一种可行的方案,特别是这方面的探索性研究获得了试验结果的初步支持之后,基于这一方法的研究与应用日渐增多。

本节以钢筋混凝土双轴受弯柱为例,介绍利用塑性力学模型构造双向恢复力模型的过程。

### 10.1 基本假定

(1) 截面任一主轴方向的弯矩曲率骨架曲线为三折线,如图 10-1 所示。

(2) 杆件轴力  $N$  为常量。

### 10.2 加载曲面函数

设构件承受双轴弯矩  $M_x$  和  $M_y$  与轴力  $N$  作用。显然,  $M_x$  和  $M_y$  与  $N$  构成内力空间。加载过程中构件截面上的任一内力组合  $(M_x, M_y, N)$  为内力空间加载点,根据第一条假定,加载过程中,构件截面受力状态可分为弹性状态、开裂状态和屈服状态三种。由于假定轴力为常量,因而可用双轴弯矩空间中的开裂曲面和屈服曲面来描述三种受力状态。

考虑到截面屈服属截面破坏阶段,因而屈服曲面可用构件破坏的相关曲线形式来描述。根据试验分析,双轴弯矩作用的钢筋混凝土构件截面破坏相关曲线可表示为

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^{\rho_x} + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^{\rho_y} = 1 \quad (10-1)$$

式中,  $M_{x0}$  和  $M_{y0}$  分别表示单轴加载时  $x$  轴和  $y$  轴的极限弯矩;  $\rho_x$  和  $\rho_y$  为曲面指数。

参照式(10-1),可将构件的开裂加载面  $\lambda_{cr}$  表示为

$$\lambda_{cr} = \left(\frac{|M_{x0}|}{M_{x0}}\right)^{\rho_x} + \left(\frac{|M_{y0}|}{M_{y0}}\right)^{\rho_y} = 1 \quad (10-2)$$

式中,  $M_{x0}$  和  $M_{y0}$  分别表示开裂加载曲面中心坐标;  $M_{x0}$  和  $M_{y0}$  分别表示单轴加载时  $x$  轴和  $y$  轴的开裂弯矩。

同样,屈服加载面  $\lambda_{y}$  可表示为

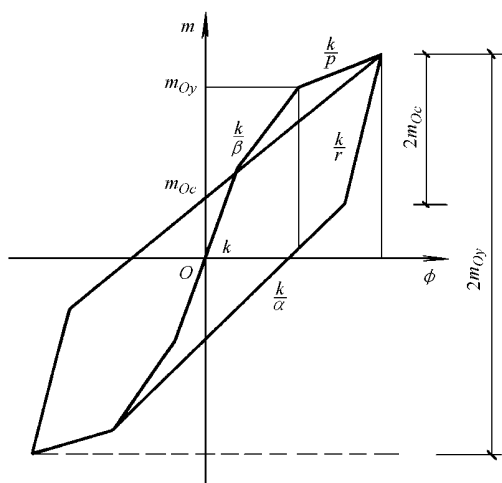


图 10-1 单轴受力三折线恢复力模型

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} = \left( \frac{\left| \begin{matrix} \bar{\epsilon}_x^0 & \bar{\epsilon}_y^0 \end{matrix} \right|}{\bar{\epsilon}_0} \right)^{\rho} \left( \frac{\left| \begin{matrix} \bar{\epsilon}_x^0 & \bar{\epsilon}_y^0 \end{matrix} \right|}{\bar{\epsilon}_0} \right)^{\rho} \left\{ \begin{matrix} \bar{\epsilon}_x^0 \\ \bar{\epsilon}_y^0 \end{matrix} \right\} \quad (5.2.10)$$

式中,  $\bar{\epsilon}_x^0$  和  $\bar{\epsilon}_y^0$  分别表示屈服加载曲面中心坐标;  $\bar{\epsilon}_x^0$  和  $\bar{\epsilon}_y^0$  分别表示单轴加载时  $\bar{\epsilon}_x$  轴和  $\bar{\epsilon}_y$  轴的屈服弯矩。

### 随动强化理论

假设构件在双轴弯矩空间中的开裂与屈服加载曲面的运动规律符合随动强化理论, 加载过程中, 随着塑性应变的增加, 加载曲面仅发生无旋转的刚性位移, 形状和大小不发生改变。显然, 随动强化理论包含了包兴格效应。根据加载曲面运动方式不同, 已提出的随动强化理论可分为三种: 无滑移随动强化理论、在滑移随动强化理论和配筋随动强化理论。

根据配筋随动强化理论, 加载点位于开裂面内时截面处于弹性阶段, 加载面不发生移动; 加载点位于开裂面上时, 截面开裂; 继续加载, 开裂面与加载点一起移动, 加载点达到屈服面时截面屈服。此时, 屈服面与开裂面在加载点相切, 继续加载时, 开裂面和屈服面随加载点一起移动。

根据配筋随动强化理论, 可得加载曲面中心移动增量向量表达式为

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} = \frac{\left[ \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \right] \frac{\partial \bar{\epsilon}_0}{\partial \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right)}}{\left( \frac{\partial \bar{\epsilon}_0}{\partial \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right)} \right)^{\rho} \left[ \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \right]} \left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} \quad (5.2.11)$$

和

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} = \frac{\left( \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}_0}{\partial \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right)} \right)}{\left( \frac{\partial \bar{\epsilon}_0}{\partial \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right)} \right)^{\rho} \left( \left( \left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right] \left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right] \right) \right)} \left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} \quad (5.2.12)$$

式中,  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  为弯矩增量向量;  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  和  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  分别为开裂和屈服加载曲面中心移动

增量向量;  $\left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right]$  为单位矩阵;  $\left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right]$  为对角矩阵;  $\left[ \bar{\epsilon}_x^0 \right]$  和  $\left[ \bar{\epsilon}_y^0 \right]$  分别为

### 截面本构模型

构件截面本构关系是描述截面变形增量  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  与内力增量  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{M}_x \\ \Delta \bar{M}_y \end{matrix} \right\}$  之间的数学表达式。考虑到截面塑性变形增量为加载点所在的各加载曲面塑性变形增量之和, 故截面总变形增量可表示为

$$\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\} \quad (5.2.13)$$

式中,  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  为截面弹性变形增量向量;  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  和  $\left\{ \begin{matrix} \Delta \bar{\epsilon}_x \\ \Delta \bar{\epsilon}_y \end{matrix} \right\}$  分别表示开裂面与屈服面塑性变形增量向量。

利用塑性力学的正交流动法则, 可导出

$$\{\delta\}_{\text{轴}}^{\text{越}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}}{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} [\text{运}_{\text{轴}}] \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}} \{\bar{\varepsilon}\}_{\text{轴}} \quad (\text{式 } 10-29)$$

其中,塑性刚度矩阵可表示为

$$[\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{越}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} & \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} & \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \end{pmatrix} \quad (\text{式 } 10-30)$$

上式 $[\text{运}_{\text{轴}}]$ 中非对角元素不为零,反映了双轴弯矩间存在相互作用和影响。

将式(10-29)代入式(10-28),可得截面本构关系为

弹性阶段

$$\{\delta\}_{\text{轴}}^{\text{越}} [\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{原}}^{\text{原}} \{\bar{\varepsilon}\}_{\text{轴}} \quad (\text{式 } 10-31)$$

开裂阶段

$$\{\delta\}_{\text{轴}}^{\text{越}} \left( [\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{原}}^{\text{原}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}}{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} [\text{运}_{\text{轴}}] \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}} \right) \{\bar{\varepsilon}\}_{\text{轴}} \quad (\text{式 } 10-32)$$

屈服阶段

$$\{\delta\}_{\text{轴}}^{\text{越}} \left( [\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{原}}^{\text{原}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}}{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} [\text{运}_{\text{轴}}] \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}}{\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}} [\text{运}_{\text{轴}}] \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \{\varepsilon\}}\right)^{\text{裁}}} \right) \{\bar{\varepsilon}\}_{\text{轴}} \quad (\text{式 } 10-33)$$

一般来说,确定 $[\text{运}_{\text{轴}}]$ 中非对角元素较为困难,目前实用中通常取非对角元素为零,而对角线元素利用单轴三折线恢复力模型确定。于是,各阶段刚度矩阵可表示为

$$[\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{越}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-34)$$

$$[\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{越}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-35)$$

$$[\text{运}_{\text{轴}}]_{\text{越}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \end{bmatrix} \quad (\text{式 } 10-36)$$

考虑到双轴恢复力特性间存在的相互耦合影响,令

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \quad (\text{式 } 10-37)$$

$$\alpha_{\text{轴}} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \quad (\text{式 } 10-38)$$

$$\alpha_{\text{轴}} = \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{轴}}}{\partial \varepsilon_{\text{轴}}} \quad (\text{式 } 10-39)$$

式中,择为截面的双轴恢复力特性耦合系数。用  $\alpha_{\text{增}}$  和  $\alpha_{\text{减}}$  代替  $\alpha_{\text{增}}$  和  $\alpha_{\text{减}}$ ,则有

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{增}} = \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{减}} \quad (1.1.1) \\ & \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{增}} = \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{减}} \quad (1.1.2) \\ & \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{增}} = \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right]_{\text{减}} \quad (1.1.3) \end{aligned}$$

继续加、卸载判别准则  
加载点沿不同的开裂曲面或屈服曲面继续移动而材料继续产生塑性变形称为加载,加载点沿同一开裂曲面或屈服曲面移动,材料既不产生塑性变形和强化,也不进入弹性区,称为中性变载,加载点由开裂曲面或屈服曲面进入弹性区域称为卸载。

根据塑性理论中的 屈服准则,可导出加、卸载判别准则为

$$\left( \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right)_{\text{增}} \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

## 结构动力分析中的几何非线性问题

结构的几何非线性是我们所遇到的另外一种非线性现象,非线性方程的求解方法已经在 1.1 节中进行了介绍,本节以结构的 几何非线性效应为例,初步介绍结构的几何非线性问题。

### 几何非线性效应

几何非线性效应是指结构在水平侧力作用下,结构发生侧向位移  $\Delta$  时,竖向力 的作用会使结构产生附加弯矩和附加侧移,从而使总弯矩和总侧移增加的现象。

如图 1.1.1 所示的单质点力学体系,其中质点的质量为  $m$ ,考虑它为两个自由度。为方便起见,曾方向的相对位移表示为  $\Delta$ ,增方向的相对位移表示为  $\Delta$ ,水平荷载用  $P_x$  表示,竖向荷载用  $P_y$  表示,模型的水平和竖向刚度分别为  $k_x$  和  $k_y$ ,相应的阻尼为  $c_x$  和  $c_y$ ,杆长为  $l$

由图 1.1.1 可知,当结构发生较大水平位移后,竖向外荷载和竖向惯性力在基底产生的弯矩为

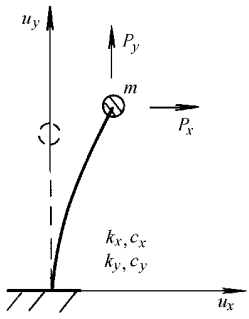


图 1.1.1 单质点体系

$$M_{eq} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{h_j} \quad (10-10)$$

附加弯矩可用质点上一个能产生同样大小弯矩的等效水平力来替代, 等效水平力为

$$F_{eq} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{h_j} \quad (10-11)$$

式中,  $\Delta$  为影响刚度。

这样, 包含  $\Delta$  效应的质点水平运动方程为

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = F_{eq} \quad (10-12)$$

将式(10-11)代入上式, 则有

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{h_j} \quad (10-13)$$

竖向运动方程为

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + k w = 0 \quad (10-14)$$

从以上运动方程可以看出, 竖向运动方程是独立的, 因此可以在给定初始条件下求出  $w$  后, 代入水平运动方程, 联合相应的初始条件, 便可求解水平位移  $u$ 。一般来说, 考虑  $\Delta$  效应等于降低了结构的刚度, 通常情况下这会使结构的反应增大。同时, 我们应该注意到, 由于水平位移虽然随着水平外荷载的增加而增加, 但它们之间并不是正比关系, 因此, 式(10-13)虽然形式上是线性的, 但实质上它是一个非线性方程。

## 10.2 多自由度体系的 $\Delta$ 效应问题

超高层建筑、电视塔及烟囱等一些高耸结构, 由于所承受的风荷载、地震作用等水平荷载较大, 因而会产生较大的水平位移。这种情况下, 结构的  $\Delta$  效应比较明显, 在进行动力分析和抗震设计时都应该考虑到  $\Delta$  效应的影响。

考虑如图 10-2 所示的多自由度体系, 按 10.1 节所述的计算等效侧向力的方法, 可以导出多自由度体系等效侧向力向量为

$$\{F_{eq}\} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{h_j} \{h_j\} \quad (10-15)$$

式中,  $\{u\}$  为体系的侧向位移向量,  $[K]$  为体系的影响刚度矩阵。这样, 多自由度体系的运动方程即可表示为

$$[M] \ddot{\{u\}} + [C] \dot{\{u\}} + [K] \{u\} = \{F_{eq}\} \quad (10-16)$$

按照上节所述求解多自由度体系非线性运动方程的方法, 则可求解该体系的动力反应。

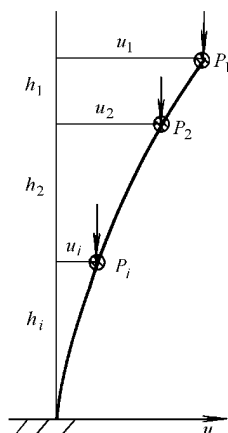


图 10-2 多自由度体系

算例 员源质 电视塔由塔座、塔身、塔楼和塔杆组成 ,结构对称性好 ,总高度为 源缘皂 ,地面输入为 耘蕴悦韵地震波 ,南北向输入 ,最大地震动加速度调整为 员圆皂/泽圆 以此为例 ,说明 孕原Δ 效应对结构动力反应的影响。

解 :将整个塔沿高度分成 圆段 ,形成有 圆个质点的弯曲串联多自由度体系 ,其刚度矩阵由直接刚度法形成 ,阻尼采用瑞雷阻尼 ,阻尼比取为 圆缘,采用体系合适的两阶频率计算阻尼系数。通过计算得到体系的最大位移和最大弯矩如表 员源部 员所示。

表 员源质 电视塔计算结果

| 质<br>点<br>号 | 最大位移 辕        |              |           | 质<br>点<br>号 | 最大弯矩 辕皂       |              |           |
|-------------|---------------|--------------|-----------|-------------|---------------|--------------|-----------|
|             | 不考虑<br>孕原Δ 效应 | 考虑<br>孕原Δ 效应 | 差值<br>(豫) |             | 不考虑<br>孕原Δ 效应 | 考虑<br>孕原Δ 效应 | 差值<br>(豫) |
|             |               |              |           |             |               |              |           |
| 员           | 圆缘缘缘          | 圆缘缘圆         | 员缘缘       | 员源          | 员缘缘圆          | 员缘缘源         | 原缘缘缘      |
| 圆           | 圆缘缘缘          | 圆缘缘圆         | 缘缘缘       | 员缘          | 员缘缘圆          | 员缘缘苑         | 原缘缘缘      |
| 猿           | 圆缘缘远          | 圆缘缘苑         | 缘缘缘       | 员远          | 员缘缘圆          | 员缘缘圆         | 原缘缘缘      |
| 源           | 圆缘缘缘          | 圆缘缘原         | 猿缘缘       | 员苑          | 员缘缘缘          | 员缘缘圆         | 原缘缘愿      |
| 缘           | 圆缘缘原          | 圆缘缘缘         | 员缘缘       | 员愿          | 员缘缘猿          | 员缘缘圆         | 原缘缘圆      |
| 远           | 圆缘缘愿          | 圆缘缘愿         | 原缘缘愿      | 员怨          | 员缘缘源          | 员缘缘缘         | 原缘缘愿      |
| 苑           | 圆缘缘猿          | 圆缘缘猿         | 缘缘缘       | 圆园          | 员缘缘源          | 员缘缘源         | 原缘缘源      |
| 愿           | 圆缘缘苑          | 圆缘缘苑         | 远缘缘       | 圆员          | 员缘缘员          | 员缘缘圆         | 原缘缘猿      |
| 怨           | 圆缘缘源          | 圆缘缘源         | 远缘缘       | 圆圆          | 圆缘缘远          | 圆缘缘苑         | 原缘缘圆      |
| 员园          | 圆缘缘猿          | 圆缘缘圆         | 远缘缘       | 圆猿          | 猿缘缘圆          | 猿缘缘猿         | 原缘缘缘      |
| 员员          | 圆缘缘愿          | 圆缘缘原         | 缘缘缘       | 圆源          | 缘缘缘圆          | 缘缘缘缘         | 远缘缘远      |
| 员圆          | 圆缘缘苑          | 圆缘缘员         | 缘缘缘       | 圆缘          | 远缘缘苑          | 远缘缘猿         | 缘缘缘       |
| 员猿          | 圆缘缘缘          | 圆缘缘缘         | 缘缘缘       | 圆远          | 怨缘缘缘          | 怨缘缘猿         | 猿缘缘       |

由表中数据可以看出 ,考虑 孕原Δ 效应时的反应值不一定在每个自由度上都比不考虑时的大 ;另外 ,考虑与不考虑 孕原Δ 效应时 ,位移的最大差别为 远缘缘左右 ,弯矩的最大差别接近 猿缘 ,它们都没有达到 员缘缘。形成这种情况是因为地震作用下结构的变形过程十分复杂 ,在这一过程中 ,竖向力产生的附加弯矩在结构的某些部位可以和水平地震力产生的弯矩反号 ;再者 ,对超高层结构来说 ,地震反应中的高振型含量丰富 ,那种蛇形变形会使各质点重量对体系下方部位产生的附加弯矩也出现反号现象。上述两者都会减弱 孕原Δ 效应。但是 ,远缘 ~ 猿缘的差别对电视塔这样重要的设施来说 ,是一个不容忽视的问题。

## 10.1 结构动力参数识别和动力检测

随着计算能力和计算方法的发展,结构分析模型的精度越来越高。但是由于认识水平和结构复杂性的限制,理论模型和实际结构之间总是存在一定的差距。其中最主要的是边界条件不完全符合实际,复杂结构中的某些材料特性也随着环境条件而变化,还有设计和施工误差造成理论模型与实际结构不符等。同时,使用期间的疲劳与退化也改变了结构的特性。因此需要对结构进行动力参数识别和检测,以评估其实际的运行状态,并为维护、加固提供可靠的依据。

动力检测是指利用结构的动力响应进行结构性态识别的方法,包括对结构进行激励的方式、响应量(位移、速度和加速度)和测量位置的选择,以及对测量信号的处理方式和结构识别方法。结构的性态在物理空间内通过结构的刚度、质量和阻尼等物理参数,或者在模态空间内通过固有频率、阻尼比和振型等模态参数来描述。结构动力参数识别是指利用通过动力测试得到的结构动力响应来识别结构参数的方法,可分为时域和频域两种方法,本节介绍模态参数频域识别方法的基本概念和原理,以及动力检测基本内容。

### 10.1.1 动力参数频域识别方法

多自由度体系结构的动力方程为

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = F(t) \quad (10-1)$$

式中  $[M]$ 、 $[C]$  和  $[K]$  的意义同前;  $F(t)$  为激振力向量;  $u$ 、 $\dot{u}$  和  $\ddot{u}$  分别为结构的位移、速度和加速度反应向量。对式(10-1)进行拉氏变换(拉氏变换),可得

$$([M]s^2 + [C]s + [K])U(s) = F(s) \quad (10-2)$$

式中  $F(s)$  和  $U(s)$  分别为结构的  $F(t)$  和  $u(t)$  的拉氏变换  $U(s)$  的表达式如下

$$U(s) = [M]^{-1} [K]^{-1} F(s) \quad (10-3)$$

式中  $U(s)$  为结构的位移传递函数,该函数建立了在复数  $s$  域内结构的位移反应和激励之间的映射关系。将式(10-3)两边同乘以振型矩阵  $[\Phi]$ ,则

$$[\Phi]^T U(s) = [\Phi]^T [M]^{-1} [K]^{-1} F(s) \quad (10-4)$$

$$[\Phi]^T U(s) = [\Phi]^T [M]^{-1} [K]^{-1} F(s) \quad (10-5)$$

式中,振型矩阵  $[\Phi]$  由各阶振型向量  $\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n$  组成,即  $[\Phi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \dots, \{\phi\}_n]$ ;  $[M]$ 、 $[C]$  和  $[K]$  分别为结构的第  $n$  阶振型质量、振型阻尼和振型刚度;  $[I]$  表示对角矩阵。

对式(10-5)求逆,并两边分别左乘和右乘  $[\Phi]$  和  $[\Phi]^T$ ,得

$$[\Phi]^T U(s) = [\Phi]^T [M]^{-1} [K]^{-1} F(s) \quad (10-6)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\{\phi\}_{\alpha} \{\phi\}_{\alpha}^T}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2} \quad \sum_{\alpha=1}^n \frac{\{\phi\}_{\alpha} \{\phi\}_{\alpha}^T}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2} \quad (5-10)$$

上式为位移传递函数的表达式。当结构在零初始条件下(速度和加速度均为零时),由拉氏变换的性质可得

$$\dot{U}(\omega) = \frac{1}{i\omega} U(\omega) \quad (5-11)$$

由于傅里叶变换是拉氏变换当  $\omega \rightarrow i\omega$  时的特例,因此由式(5-10)和式(5-11)可得

$$[U(\omega)] = [U(\omega)] \quad \sum_{\alpha=1}^n \frac{\{\phi\}_{\alpha} \{\phi\}_{\alpha}^T}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2} \quad (5-12)$$

式中  $[U(\omega)]$ 、 $[U(\omega)]$  和  $[U(\omega)]$  分别为结构的加速度、速度和位移传递函数,该函数建立了在频域  $\omega$  内结构的反应和激励之间的映射关系。

下面以加速度传递函数为例说明其意义。传递函数的任一元素  $[U(\omega)]$  表示  $n$  点激励、 $m$  点拾振的分量,其表达式为

$$[U(\omega)] = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\{\phi\}_{\alpha} \{\phi\}_{\alpha}^T}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2} \quad (5-13)$$

式中  $\phi_{\alpha}$  和  $\phi_{\alpha}^T$  分别为结构第  $\alpha$  阶振型的  $n$  和  $m$  自由度的分量。传递函数的任一列元素  $[U(\omega)]$  表示各自由度分别激励、 $m$  点拾振的加速度反应;而任一行元素  $[U(\omega)]$  表示在  $n$  点自由度激励、所有自由度同时拾振的加速度反应。由于  $[U(\omega)] = [U(\omega)]^T$ , 即传递函数矩阵为对称阵,所以  $[U(\omega)] = [U(\omega)]^T$ , 即传递函数矩阵中  $n$  点激励、 $m$  点拾振的元素与  $m$  点激励、 $n$  点拾振的元素相等,这就是传递函数的互易性定理,常在试验中据此检查试验设置的好坏和测量数据的质量。

传递函数  $[U(\omega)]$  是频率的函数,为复数,可以通过幅值和相位表示,也可以通过实部和虚部表示,为复平面上的矢量。传递函数反映了结构的特性,通过它可以了解结构的特征。频域识别方法就是通过传递函数对结构参数进行识别。试验时,通过同时测量激励和加速度响应的时程信号,经过放大器和抗混滤波器后进行模数转换和快速傅里叶变换(FFT)变成频域信号,获得传递函数后按照参数辨识方法识别模态参数。

对于多自由度结构体系,在传递函数幅值谱的曲线中会出现多个峰值(峰值数量与结构的自由度数相同),但由式(5-13)可以看出,在某阶固有频率附近,其他模态的贡献可以忽略而按照单自由度体系处理。下面介绍参数识别最基本的幅值法和分量分析法。

## 幅值法

传递函数的幅值与结构的动力放大系数是等价的,可以按照半功率带宽法的

步骤识别结构的固有频率和阻尼比。下面说明振型的识别方法,在 \$n\$ 则自由度激振、所有自由度同时拾振可得到传递函数的一列(或一行)元素 \$[H\_{ij}(\omega)]\$,由式(8-2-1)可知,当频率等于第 \$j\$ 阶固有频率时,传递函数幅值可以近似表示为

$$|H_{ij}(\omega)| \approx |H_{jj}(\omega)| \frac{\phi_{ij}}{\phi_{jj}} \quad (8-2-2)$$

式中,只有 \$\phi\_{jj}\$ 随测点位置不同而变化,其余皆为由激振自由度 \$i\$ 和第 \$j\$ 阶模态所决定的常数,因而传递函数幅值与 \$\phi\_{jj}\$ 成正比,这里 \$\phi\_{jj}\$ 为结构的第 \$j\$ 阶模态。所以各自由度加速度传递函数幅频曲线在某阶模态频率处的峰值之比近似等于该阶模态在各自由度处的分量之比。

### 分量分析法

分量分析法通过将传递函数分解为实部和虚部进行分析来识别模态参数。将式(8-2-1)中的传递函数分解为实部和虚部

$$\begin{aligned} H_{ij}(\omega) &= \sum_{k=1}^n \frac{(\omega_{kj}^2 - \omega^2) \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} \\ &= \frac{(\omega_{kj}^2 - \omega^2) \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} + \sum_{k=1}^n \frac{(\omega_{kj}^2 - \omega^2) \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} \\ &= \frac{(\omega_{kj}^2 - \omega^2) \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} + H_{ij}^* \end{aligned} \quad (8-2-3)$$

和

$$\begin{aligned} H_{ij}(\omega) &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_{kj}^2 \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_{kj}^2 \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} + \sum_{k=1}^n \frac{\omega_{kj}^2 \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\omega_{kj}^2 \phi_{ij} \phi_{kj}^*}{\omega_{kj}^4 + 2\zeta_{kj}\omega_{kj}^2\omega^2 + \omega^4} + H_{ij}^* \end{aligned} \quad (8-2-4)$$

当频率在第 \$j\$ 阶固有频率附近时,该阶模态起主导作用,称为主模态。若各固有频率间隔较大,在主模态附近其余模态的影响较小,可以用常数来表示,即上式中的 \$H\_{ij}^\*\$ 称为剩余模态的实部与虚部。在远离固有频率处,剩余模态曲线比较平坦,几乎不随频率而变化。剩余模态使实频和虚频图相对于坐标轴平移一段距离,称为剩余柔度线。

在固有频率附近,传递函数实部与剩余柔度线的交点为零,而传递函数虚部达到极值,据此可确定固有频率。由于虚频曲线的峰值估计较准且不受剩余柔度的

影响,一般采用虚频曲线峰值确定固有频率。而阻尼比系数可对虚频曲线的峰值采用半功率带宽法进行计算。在主模态处如果不计剩余柔度的影响,传递函数虚频的一系列可表示为

$$H(\omega) = \frac{\phi_1}{\omega - \omega_1 + j\gamma_1} + \frac{\phi_2}{\omega - \omega_2 + j\gamma_2} + \frac{\phi_3}{\omega - \omega_3 + j\gamma_3} + \dots \quad (5.1.10)$$

由于  $\frac{\phi_r}{\omega - \omega_r + j\gamma_r}$  为由激励自由度  $r$  和第  $r$  阶模态决定的常数,这样由式(5.1.10)即可确定结构的第  $r$  阶模态  $\phi_r$ 。因此,各自由度加速度传递函数虚频曲线在某阶模态频率处的峰值之比等于该阶模态振型在各自由度处的坐标之比。虽然式(5.1.9)与式(5.1.10)在表达式形式上相同,但二者有本质的区别。在式(5.1.10)中剩余模态的影响已经去除,因而传递函数虚频曲线所确定的振型是准确的。

在频域中的参数识别方法还有导纳圆法,即将传递函数的实部和虚部分别作为实轴和虚轴而形成一个圆形(也称为导纳圆图),通过圆的特征而识别各参数。其他的频域参数识别方法还有正交多项式拟合法、非线性加权最小二乘法 and 遗传算法等。

## 5.1.2 动力检测的激励和测量方面的考虑

### 5.1.2.1 激励方法

为了测量结构的传递函数,需要对其激励而产生振动,激励方式一般有两种:人工激励和环境激励。人工激励是利用激振器或者其他激振装置对待测结构施加稳定正弦激励的方式。缺点在于普通的激振器能量较小,而土木工程结构一般比较大,难以使结构有效地激振起来,可激发出的模态数量相对较少。而待测结构周围大地环境的微小振动(称为地脉动)、风以及结构的活载荷可引起工程结构的低幅振动,称为环境激励。自然地脉动的位移幅值从千分之几到几微米,频带从 0.1 到 10 Hz,而脉动风能激励起结构的幅值相对较大。采用环境激励时响应的信噪比较低,试验需要时间较长。

### 5.1.2.2 数字信号分析中的迭混与泄漏

在数字信号分析过程中可能出现各种各样的误差,主要有过载、数字变换噪声、量化、动态范围限制等因素引起的误差,但最重要的两类误差是迭混和泄漏。

迭混是在采样过程中将连续信号转变为时间域的离散信号时造成的,采样在数学上相当于用一个单位脉冲序列组成的梳状函数去乘以原始的连续信号。经过采样后,采样信号的频谱包含着原始信号频谱以及附加的无限个经过平移的原始信号频谱(频谱的幅值均乘以常数倍个采样频率),平移量等于采样频率及其各次

倍频。理论分析表明,当连续信号的频谱的最大频率小于采样频率的一半时,经过采样后的信号频谱与原信号频谱完全一致,即信号无失真;但当信号的频谱的最大分析频率大于采样频率的一半时,平移频谱将与原始信号频谱重叠,使采样后的某些频带的幅值与原始信号频谱不同,这种现象称为迭混。频率迭混使采样信号产生失真,造成误差。其物理意义是,采样频率太低,采样点过少,以致采样后的信号不能复员原始信号。这就要求分析信号中的最高频率  $f_m$  满足著名的香农(奈奎斯特)采样定理,即

$$f_s \geq 2f_m \quad (10-1)$$

式中,  $f_s$  为采样频率。滤除所有高于  $f_m$  的频率分量即可避免迭混现象的发生。

泄漏是指在时间信号经过傅里叶变换后,在频域中出现了本不属于原始信号的附加分量,相当于能量“泄漏”到附加的频率分量上去了。泄漏产生的根源在于测量必须在有限的观测时间内进行,相当于人为地将连续的时间信号加了一个矩形窗,破坏了离散傅里叶变换的基本假定:即被观测信号在观测时间内必须是周期的。泄漏可以通过根据信号类型的不同而加不同的窗函数来解决。常用的窗函数有:矩形窗(硬截止)、平顶窗(云梯状)、汉宁窗(平滑过渡)、海明窗(平滑过渡)、高斯窗(钟形)、力窗和指数窗等。加窗实质上是在进行傅里叶变换前将观测时间内非周期的信号乘上一个两端近似为零窗函数,使其满足傅里叶变换的周期性要求。在随机振动分析中,一般采用汉宁窗或者海明窗;锤击试验中,对力信号要加力窗,对响应信号加指数窗。采用非矩形窗函数有一个弊端,它们使信号中的总能量减少,从而降低了频域中的幅值,也相当于增加了结构中的阻尼。

### 环境激励时的参数识别方法

参数识别的基本原理是建立在已知系统的输出和输入来求得频率响应函数(频域)或脉冲响应函数(时域),从而实现对系统参数的识别。对土木工程结构而言,结构的振动响应(输出)由安置在结构各部位的传感器记录得到,然而工作环境下大型复杂实际结构的激励(输入)却不是那么容易可以测到的。虽然有一些专用的激振设备和相应输入/输出测试装置,但现场实验条件、结构的复杂性和实测数据质量等因素往往限制了这类专用激振设备的使用。一些重型的激振装置均很贵,势必增加了系统识别的成本,且用这种方法必然影响结构或线路的正常工作,这对使用繁忙的结构会带来诸多不便。另一方面,像车辆、行人、风及其组合等是作用于结构上的环境或自然激励,用环境激励引起的振动对结构系统进行识别显然具有许多优点:无需贵重的激励设备,不中断结构的正常使用,方便省时,只需测定响应数据。同时直接从结构工作状态的振动响应数据识别模态参数更符合实际情况和边界条件,可以实现对结构的参数识别、在线损伤检测和实时健康监测,因此已成为土木工程结构系统识别十分活跃的课题。由于此时仅仅有环境振动响

应的输出数据,对真正的输入情况是不知道的,因此系统识别过程是只知输出的系统识别。环境振动系统识别对传统系统识别的方法也是一种挑战,需要应用一些特殊的识别技术,因为环境振动响应一般振动幅值很小,随机性很强,噪声影响和数据量大等。

环境激励时地脉动、风以及结构活载荷往往同时作用在结构上,而且分布在结构不同位置,通常很难甚至无法测量其输入信号。此时,只能利用输出信号来识别结构的参数。在频域识别时假定输入为平稳白噪声,其功率谱为一常数,这样结构响应的自功率谱与传递函数的平方成正比(由忽略节随机振动公式可知),通过结构各测点响应的功率谱进行参数识别。响应功率谱的峰值所对应的频率一般是结构的固有频率,但由于噪声和激励并非完全平稳的影响,需要测量多个测点响应的功率谱进行比较才能最终确定结构的各阶固有频率。其判别原则为:①多个测点响应的自功率谱峰值位于同一频率处;②模态频率处各测点间的相干函数较大;③各测点在模态频率附近具有近似同相位或反相位的特点。在阻尼较小和频率间隔较大的情况下,振型可以认为是各测点响应信号的互功率谱与自功率谱的比值。

环境激励时的参数识别方法发展历史不长,其中时域识别方法具有较大的优越性,因为时域法仅采用结构反应的时间历程,无需知道激励即可进行识别。时域识别方法有:基于离散时间数据的~~等~~模型,特征实现算法(~~等~~),自然激励技术(~~等~~),随机子空间法(~~等~~)等。其中随机子空间方法具有较大的优越性,即将结构系统的二阶控制微分方程写成为状态方程形式,构成了一个动力学系统的离散时间状态空间模型,并假定过程噪声和测量噪声为零均值的白噪声。然后采用矩阵的~~等~~分解和奇异值分解(~~等~~)以及最小二乘等来识别系统状态矩阵和观测矩阵,并由它们的特征值分解最终确定结构的模态参数,即自振频率、阻尼比和振型。

# 参考文献

- 员 粤国国保理国阿特毛籍科类机械制例制制章之建造员缘
- 圆 粤国国保理国阿特毛籍科类机械制例制制章之建造员因
- 猿 砸辛圆光景号禁档介昭家社家国阿特毛籍科类机械制例制制章之建造员猿
- 源 砸辛圆光景号禁档介昭家社家国阿特毛籍科类机械制例制制章之建造员缘
- 缘 克拉夫 彭津著 结构动力学 援王光远等译 援北京 科学出版社 员愿
- 远 配利恩号著 结构动力学理论与计算 援李裕澈等译 援北京 地震出版社 员猿
- 苑 唐友刚编著 高等结构动力学 援天津 天津大学出版社 愿
- 愿 龙驭球 包世华 匡文起 袁驷编著 结构力学教程 援北京 高等教育出版社 愿
- 怨 大崎顺彦著 振动理论 援礼立等译 援北京 地震出版社 员圆
- 园 沃伯顿著 结构的动力性态 援金成成 戴宗信译 援北京 地震出版社 员猿
- 员 王勖成 邵敏编著 有限单元法基本原理和数值方法 援北京 清华大学出版社 员猿
- 圆 胡细宝 孙洪祥编著 概率论与随机振动 援北京 北京邮电大学出版社 愿
- 猿 盛聚 谢式千 潘承毅编 概率论与数理统计 援北京 高等教育出版社 愿
- 源 李宏男著 结构多维抗震理论与设计方法 援北京 科学出版社 员愿
- 缘 王光远编著 应用分析动力学 援北京 人民教育出版社 员愿
- 远 李国强 李杰著 工程结构动力检测理论与应用 北京 科学出版社 愿
- 苑 朱镜清著 结构抗震分析原理 援北京 地震出版社 愿
- 愿 林家浩 曲乃泗 孙焕纯编著 计算结构动力学 援北京 高等教育出版社 员愿
- 怨 李桂青著 抗震结构计算理论和方法 援北京 地震出版社 员缘
- 园 楼梦麟编著 结构动力分析的子结构方法 援上海 同济大学出版社 员缘
- 员 王文亮 杜作润编著 结构振动与动态子结构方法 援上海 复旦大学出版社 员缘
- 圆 张新培编著 钢筋混凝土抗震结构非线性分析 援北京 科学出版社 愿
- 猿 阅社社管留刊特告演经早非制例制世另别制章制章制章之建造员缘
- 源 傅志方主编 振动模态分析与参数辨识 援北京 机械工业出版社 员圆
- 缘 李德葆 陆秋海著 试验模态分析及其应用 援北京 科学出版社 愿
- 远 张令弼著 振动测试与动态分析 援北京 航空工业出版社 员圆
- 苑 李方泽 刘猷清 王正编著 工程振动测试与分析 援北京 高等教育出版社 员圆
- 愿 李德葆 陆秋海著 试验模态分析及其应用 援北京 科学出版社 愿
- 怨 沃德·海伦 斯蒂芬·拉门兹 波尔·萨斯著 模态分析理论与试验 援白化同 郭继忠译 援北京：北京理工大学出版社 愿
- 猿 允号禁档介昭家社家国阿特毛籍科类机械制例制制章之建造员缘