

Theory of Elasticity and Plasticity

弹 塑 性 力 学

薛守义 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学 / 薛守义编著. —北京 : 中国建材工业出版社, 2005. 7

ISBN 7-80159-929-2

I. 弹... II. 薛... III. ①弹性力学②弹性力学
IV. 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 055922 号

内 容 提 要

本书系统阐述了弹塑性力学的基本概念、理论和方法。内容包括应力理论、应变理论、本构理论基础、弹性本构理论、平面问题、空间问题、柱体扭转、薄板理论、薄壳理论、弹性力学变分解法、经典屈服理论、经典塑性本构理论、弹塑性分析、塑性极限分析、广义塑性本构理论及大变形理论。

本书可作为结构工程、机械工程、岩土工程、道路与桥梁工程等专业的硕士研究生教材,也可作为科技人员的理论参考书。

弹塑性力学

薛守义 编著

出版发行 : 中国建材工业出版社

地 址 : 北京市西城区车公庄大街 6 号

邮 编 : 100044

经 销 : 全国各地新华书店

印 刷 : 北京鑫正大印刷有限公司

开 本 : 787mm×960mm 1/16

印 张 : 20.25

字 数 : 391 千字

版 次 : 2005 年 6 月第 1 版

印 次 : 2005 年 6 月第 1 次

定 价 : 32.00 元

网上书店 : www.ecool100.com

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话 : (010)88386906

前 言

本书系统地阐述了弹塑性力学的基本概念、理论和方法,充分考虑到结构的严谨性和清晰性,并尽可能反映弹塑性力学的最新进展。在内容编排上,遵循难点分散的原则,每一部分也尽可能由浅入深、循序渐进。此外,特别强调基本理论及其前提假设,并以简明的思路引导读者掌握力学问题的实质,以免迷失在琐碎的计算当中。

弹塑性力学作为许多工科专业硕士研究生的学位课程,既要突出学科的基本内容,保持学位课程的稳定性,使学生掌握完整的学科体系;又应具有足够的深度,使研究生学完课程之后能迅速接近学科前沿。在有限的篇幅内实现上述理想,要求我们叙述精练、内容精选。例如,板壳理论的成果非常丰富,本书只能介绍其中最基本的东西。

在本书中,采用张量分析法标记物理量并讲述一般理论,以使书写简洁、推导清晰、物理意义明确,并提高学生阅读文献的能力。初次接触张量方法的读者开始可能会感到不习惯,然而通常会很快熟悉起来并充分体会到其优越性。为便于读者查阅,本书附录收入了张量分析以及其他必要的数学基础知识。

本书首先是为结构工程、机械工程、岩土工程、道路与桥梁工程等工科专业的硕士研究生提供弹塑性力学教材,其次是为科技人员提供系统的理论参考。作为教材时,为便于教师根据课时多少对内容做出取舍,本书将内容分为基本部分和选学部分。其中基本部分具有基础性和系统性,通常是必修的,选学部分均加注“*”略去它们不会影响教程的系统性。

编写本书参考了大量图书资料,有些引用标明了出处,而在学科的核心内容上力图综合各家表述的长处,不便一一注明,只是在文献目录中列出了一些主要参考资料。笔者在此对所有被引用的作者表示衷心的感谢,并恳请读者提出批评指正。

目 录

第 1 章 弹塑性力学概论.....	(1)
1.1 基本概念	(1)
1.2 基本假定	(3)
1.3 研究方法	(4)
1.4 学科简史	(5)
1.5 内容安排	(7)
习 题.....	(8)
第 2 章 应力理论.....	(9)
2.1 基本概念	(9)
2.2 平衡分析.....	(11)
2.3 应力分析.....	(15)
习 题	(24)
第 3 章 应变理论	(25)
3.1 位移与应变.....	(25)
3.2 应变分析.....	(31)
3.3 应变率概念.....	(34)
习 题	(35)
第 4 章 本构理论概述	(37)
4.1 本构研究思路.....	(37)
4.2 试验资料与简化模型.....	(39)
4.3 弹塑性本构理论.....	(44)
习 题	(46)
第 5 章 弹性本构理论	(47)
5.1 弹性应变能.....	(47)
5.2 各向异性弹性理论.....	(48)
5.3 各向同性弹性理论.....	(50)
习 题	(55)
第 6 章 弹性力学边值问题	(56)
6.1 基本方程.....	(56)

6.2	解题方法.....	(58)
6.3	基本原理.....	(62)
	习 题	(65)
第 7 章	平面问题直角坐标解法	(66)
7.1	基本概念.....	(66)
7.2	基本方程.....	(68)
7.3	应力解法.....	(71)
7.4	典型例解.....	(73)
	习 题	(77)
第 8 章	平面问题极坐标解法	(80)
8.1	基本方程.....	(80)
8.2	轴对称问题.....	(84)
8.3	圆孔应力集中.....	(89)
8.4	楔形体 and 半无限体.....	(92)
	习 题	(95)
第 9 章	平面问题复变函数解法 *	(98)
9.1	平面问题的复格式.....	(98)
9.2	复势的确定性	(105)
9.3	孔洞问题级数解法	(108)
9.4	孔洞问题保角变换解法	(111)
	习 题.....	(120)
第 10 章	空间问题	(121)
10.1	直角坐标方程.....	(121)
10.2	柱坐标方程.....	(124)
10.3	典型例解.....	(128)
	习 题.....	(132)
第 11 章	柱体扭转	(134)
11.1	基本方程.....	(134)
11.2	典型例解.....	(139)
11.3	薄膜比拟.....	(143)
	习 题.....	(145)
第 12 章	薄板理论	(146)
12.1	问题与假设.....	(146)
12.2	直角坐标解答.....	(147)
12.3	极坐标解答.....	(157)

习 题.....	(161)
第 13 章 薄壳理论*	(163)
13.1 曲面理论简介.....	(163)
13.2 一般理论.....	(166)
13.3 无矩理论.....	(170)
13.4 有矩理论.....	(174)
习 题.....	(178)
第 14 章 变分原理与变分法	(179)
14.1 等效积分形式.....	(179)
14.2 势能变分原理.....	(180)
14.3 位移变分法.....	(186)
14.4 余能变分原理.....	(191)
习 题.....	(192)
第 15 章 经典屈服理论	(194)
15.1 屈服条件与屈服面.....	(194)
15.2 常用屈服准则.....	(199)
15.3 硬化规律.....	(205)
习 题.....	(207)
第 16 章 经典塑性本构理论	(208)
16.1 加载准则.....	(208)
16.2 流动法则.....	(210)
16.3 增量理论.....	(210)
16.4 全量理论.....	(214)
16.5 增量理论的普遍形式.....	(218)
习 题.....	(221)
第 17 章 弹塑性分析与简单例解	(222)
17.1 弹塑性力学边值问题.....	(222)
17.2 梁的弹塑性弯曲.....	(225)
17.3 厚壁圆筒承受内压.....	(231)
17.4 柱体弹塑性扭转.....	(233)
习 题.....	(237)
第 18 章 塑性极限分析严密解法	(238)
18.1 基本方程.....	(238)
18.2 滑移线方程.....	(241)
18.3 边界条件和简单滑移线场.....	(248)

18.4	简单问题例解.....	(250)
	习 题.....	(254)
第 19 章	塑性极限分析近似解法	(255)
19.1	基本概念.....	(255)
19.2	虚功率原理.....	(256)
19.3	极限分析定理.....	(259)
19.4	近似解法及例解.....	(260)
	习 题.....	(264)
第 20 章	塑性本构理论进阶 *	(265)
20.1	岩土类材料的变形特性.....	(265)
20.2	应力空间中的塑性理论.....	(268)
20.3	应变空间中的塑性理论.....	(273)
20.4	含有内变量的塑性理论.....	(275)
	习 题.....	(279)
第 21 章	大变形理论 *	(281)
21.1	变形和位移.....	(281)
21.2	应变度量.....	(287)
21.3	应力度量.....	(293)
21.4	本构方程.....	(296)
21.5	平衡方程.....	(299)
21.6	虚功原理.....	(300)
	习 题.....	(302)
附录	数学基础	(303)
A.1	张量基础	(303)
A.2	场论基础	(308)
A.3	变分基础	(309)
	参考文献.....	(312)

第 1 章

弹塑性力学概论

弹塑性力学作为固体力学的一门分支学科已有很长的发展历史,其理论与方法的体系基本完善,并在建筑工程、机械工程、水利工程、航空航天工程等诸多技术领域得到了成功的应用。

为使读者对弹塑性力学的学科性质和基本内容有个概观性的了解,本章将分别介绍下述内容:(1)基本概念;(2)基本假设;(3)研究方法;(4)学科简史;(5)内容安排。

1.1 基本概念

1.1.1 学科定义

在实际工程中,我们总会遇到这样的问题:在特定荷载作用下,某房屋、桥梁、机械或水坝等结构会发生多大的变形?结构内部的应力分布与状态如何?结构有足够的承载能力吗?

弹塑性力学就是求解这类问题的一门学科,它研究物体在荷载(包括外力、温度变化或边界约束变动等)作用下产生的应力、变形及承载能力。我们将表明,上述问题都可归结为一组偏微分方程和边界条件,求解这些方程就可得出定量的解答。

任何物体在荷载作用下都将产生变形。通常随着荷载的增大,材料变形可由弹性阶段过渡到塑性阶段。弹性变形是指卸载后可以恢复或消失的变形,塑性变形是指卸载后不能恢复而残留下来的变形。在传统上,弹性力学研究弹性变形阶段的力学问题,塑性力学研究塑性变形阶段的力学问题。实际上,弹性阶段与塑性阶段是整个变形过程中的两个连续阶段,且结构内部可能同时存在弹性区和塑性区。因此,实际结构的变形分析常需要同时应用弹性力学和塑性力学的知识,将两部分内容有机地结合起来便构成弹塑性力学的内容。

1.1.2 研究对象

我们已经知道,材料力学基本上只研究杆件,结构力学主要是在材料力学的基础上研究杆件系统,而弹塑性力学的研究对象则可以是各种固体,特别是各种结构,包括建筑结构、车身骨架、飞机机身、船舶结构、机械设备、堤坝边坡、建筑地基、洞室围岩,等等。

弹塑性力学也研究梁的弯曲、柱的扭转等问题,然而采用的假设和研究方法与材料力学不尽相同,分析结果也就不同。例如,在材料力学中研究梁的弯曲时采用了平截面假设,得出的解答是近似的;而弹性力学则不必作这种假设,所得结果也比较精确,且可用来校核材料力学的近似解答。此外,弹塑性力学研究的非圆截面柱的扭转、孔洞附近的应力集中等问题,都不是材料力学和结构力学的简单方法所能解决的。

当然,弹塑性理论是针对理想模型建立起来的,例如弹性理论就假定其对象为理想弹性体,弹性体就是实际物体的力学模型。事实上,对于任何复杂事物的分析,其出发点都将是对现实事物进行逼真而又可行的理想化,以建立理想模型。分析的可靠性和实用价值主要取决于在确立模型时对研究对象的认识,以及对客观存在的各种有关控制条件和参数的正确反映程度(文献 43)。

1.1.3 任务和目的

弹塑性力学的基本任务在于,针对实际问题建构力学模型和微分方程并设法求解它们,以获得结构在荷载作用下产生的变形、应力分布及结构强度等。

学科发展到现在,其理论体系基本上已经完善。对于一些较为简单的问题,获得了解析解答。由于计算技术的高度发展,目前即使那些非常复杂的弹塑性力学问题也可以方便地求得数值解了。不过,还有一项实质性的任务有待完善,即发展描述材料变形特性的本构理论,它包括材料的变形机理、本构方程(例如应力与应变之间的关系)及特性参数。本构理论是弹塑性力学分析的物理基础,其重要性显而易见。

采用弹塑性力学进行结构分析,其目的在于为结构设计提供科学依据。在结构设计中,若将结构变形限制在弹性范围以内,则称为弹性设计。这种设计只以弹性力学分析结果为依据。在某些情况下,结构物按弹性设计并采用较大的安全系数以确保安全是必要的。然而,在实际工程中,弹性设计会遇到很多问题。如果规定结构必须在弹性状态下工作,则意味着只要结构中某“危险点”的应力达到弹性极限,结构就“破坏”或“失效”。这种设计在一定程度上将造成浪费。我们知道,结构内部的应力分布通常是很不均匀的,当“危险点”达到弹性极限时,结构的绝大部分却在过分安全的状态下工作,故材料未能充分发挥其潜在

的性能。此外,有些情况下结构内的局部塑性变形是不可避免的,例如存在奇异性应力集中的结构。遇到这些问题,经验丰富的设计师可以对弹性计算结果加以修正,或选取适当的安全系数。但是,这种方法已经超出了弹性分析的范围,不再具有严密的理论根据了(文献 39)。

结构物内局部高应力区进入塑性状态并不可怕。事实上,对于大多数材料而言,超过弹性极限后还能继续承担应力,只是应变要大些且产生部分不可恢复的塑性变形。如果允许出现局部塑性变形,其他材料单元将承受更大的应力,从而提高整个结构的承载能力。实践表明,在保证一定安全度的情况下,进行弹塑性设计或塑性设计(即考虑塑性变形的影响)可带来显著的经济效益。此时,需要研究的问题有:在一定的荷载作用下将产生多大的塑性变形及塑性区?这种塑性变形和塑性区对结构功能的正常发挥具有怎样的影响?解决这些问题需要弹塑性力学方面的知识。

1.2 基本假定

弹塑性力学研究宏观物体的力学行为,故以牛顿(Newton)力学作为理论基础。此外,通常还要引进一些假设以使问题变得可以分析和求解。有些假设是必需的(例如连续性假设),而辅助性假设(例如均匀性假设)则是为简化问题的处理而引入的,它们并不对弹塑性理论的基本架构产生实质性的影响。

需要指出的是,我们必须仔细研究各种假设的物理意义及其对解答的影响,从而明确假设的作用以及基于假设的理论之适用条件。

1.2.1 连续性假设

连续性假设有两层含义:(1)物质点无空隙地分布于物体所占据的整个空间;(2)物体在变形过程中仍保持连续性,不出现开裂或重叠现象。显然,在连续性假定下,表征物体变形和内力的量就可以表示为坐标的连续函数。这样,我们在进行弹塑性力学分析时,就可以应用数学分析这个强有力的工具。

连续性假设显然与介质由不连续的粒子所组成这一事实相矛盾。但是,采用连续性假设不仅是为了避免数学上的困难,更重要的是根据它所做出的力学分析,被广泛的实践证明是正确的。事实上,从统计学的观点来看,只要物体的尺寸足够大,与晶体材料的晶粒或混合材料的颗粒相比数量级悬殊,就可以当作连续介质来处理。

1.2.2 辅助性假设

为了解析求解,通常需要引入辅助性假设。其中均匀性假设认为,物体内各

点处物理力学性质相同,即特性参数不随位置坐标而变化。各向同性假设认为,材料的性质与方向无关,即特性参数不随方向而变化。例如,在做某种金属拉伸试验时,不管试件从铸锭的哪个方向切出,都不影响结果;与拉力垂直的各个方向都有相同收缩。实际上,金属材料由微小晶体组成,晶体本身是各向异性的。但是,由于晶体很微小而排列又不规则,按其材料的平均性质,可以认为金属材料是各向同性的。然而,有些材料则必须考虑各向异性,例如复合材料、木材等。

小变形假设指物体在外力作用下产生的变形与其本身几何尺寸相比很小,可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样,就可以用变形以前的几何尺寸来建立各种方程。此外,应变的二阶微量可以忽略不计,从而使得几何方程线性化。然而,对于大变形问题,必须考虑几何关系中的高阶非线性项,平衡方程也该在变形后的物体上列出。

无初应力假设认为物体在外力作用以前,其内部各点应力均为零。分析计算是从这种状态出发的,求得的应力仅仅是由于荷载变化产生的。若物体中有初应力存在,则弹塑性理论求得的应力加上初应力才是物体中的实际应力。

1.2.3 附加的假设

连续性假设和辅助性假设可称为基本假设,基于基本假设进行的分析通常称为数学弹塑性力学。如果在此基本假设的基础上还引入其他附加假设以进一步简化问题,则属于应用弹塑性力学的范畴。例如,在柱体扭转问题中,引进了附加的变形假设,在板壳力学分析中引入了变形和应力分布方面的假设。

1.3 研究方法

1.3.1 微元分析

在弹塑性力学问题中,为了根据已知量求出未知量,必须建立它们之间的关系,即确立基本方程。在材料力学中,求物体中的内力常采用截面法,即假想将物体剖开,取截面一边的部分物体作为脱离体,利用平衡条件以求得截面上的内力。截面法也是弹塑性力学方法中的一部分,但是更为基本的方法是微元分析法,即假想物体由无数个微分六面体(在内部)和无数个微分四面体(在边界处)所组成,取微元体进行分析以建立基本方程。例如,考虑微元体的平衡,可写出一组平衡微分方程和应力边界条件。

在弹塑性力学中,应力数总是超出平衡方程数,因此问题是超静定的,必须考虑变形条件。一般地说,求解弹塑性力学问题须综合考虑平衡微分方程、几何

方程、本构方程以及边界条件,它们统称为微分方程。这样,微元分析使问题归结为求解微分方程。

1.3.2 求解方法

弹塑性力学微分方程的求解方法可分为解析方法、近似方法和试验方法。解析方法就是直接求解微分方程组的某种综合形式。对于大多数实际问题,由于结构材料的非线性、几何形状不规则、边界条件复杂等原因,要得到解析解通常是困难的,甚至是不可能的。

为了克服解析法的困难,提出了多种近似方法,例如变分法、有限差分法、有限单元法等。它们都属于数值方法,其基本思路是将问题离散化,使无限自由度问题变成有限自由度问题,从而得出近似解答。例如,有限差分法是将微分方程离散为差分方程,得到问题求解的代数方程组;有限单元法则是把结构离散化,最后也归结为求解代数方程组。无论何种离散化方法,都包含着这样一种近似:当离散变量的数目逐渐增加时,离散系统如所期望的那样逼近于真实解。

结构试验(包括结构模型试验和实际结构试验)不同于材料试验,它是直接求解弹塑性力学问题的试验方法。这种试验对于无法求得解析解的复杂结构具有重要意义,而且试验结果还可以作为检验数值结果可靠性的依据。

1.4 学 科 简 史

1.4.1 弹性理论

胡克(R. Hooke, 1635—1703)最先注意到材料的弹性,并于1678年提出变形与外力成正比的著名定律。这是变形研究的开端,而此前人们所关注的是强度与破坏问题,例如伽利略(Galileo)通过实验研究过构件的强度。不过,Hooke定律的原始形式并不是应力和应变之间的关系,那时应力和应变的概念还未提出。1687年牛顿(Newton)《自然哲学的数学原理》的出版标志着经典力学的建立。但是,Newton三定律并不是变形体力学,而且至关重要的应力和应变概念也还没有提出。

弹性力学的早期理论由3个人所架设,即柯西(A. Cauchy, 1789—1857)、纳维(C. L. Navier, 1785—1836)及圣维南(A. J. C. Saint Venant, 1797—1886)。1826年Navier提出假定梁的横截面在弯曲时仍保持为平面。Cauchy于1828年引进了应力和应变的概念,并推导出平衡微分方程和几何方程。因此,人们常常以此为弹性力学的真正开端。St. Venant则提出了求解弹性力学问题的半逆解法,给出了大量经典弹性力学问题的解答,并建立了著名的St. Venant原理。

他首次研究了梁弯曲理论基本假设(平截面假设和横向纤维无挤压假设)的精度问题,指出只有当梁两端承受两个大小相等且方向相反的力偶成为纯弯曲时,基本假设才能严格满足。此外,泊松(S.D.Poisson,1781—1840)在弹性力学中引进了泊松比,并首次得到板的挠曲方程;杨(T.Young,1773—1829)首先给出了应力与应变间的定量关系,引进著名的 Young 氏模量即弹性模量。

1850 年基尔霍夫(G.R.Kirchhoff,1824—1887)给出了薄板边界条件的正确表述。1881 年赫兹(R.Hertz)研究了接触问题,给出了两弹性体局部接触时的应力分布。1898 年柯尔什(G.Kirsch)得出受拉薄板中的小圆孔附近的应力分布,并发现了应力集中现象。到 19 世纪末和 20 世纪初,勒夫(A.E.H.Love,1863—1940)总结了到他那时为止的全部弹性力学成果、奠定了薄壳理论的基础,并系统地将弹性力学应用于地球物理学。穆斯赫利什维利(N.I.Muskhelishvili 或 N.I.Мушхелишвили,1891—1976)终生致力于用复变函数求解弹性力学问题,给出的解答也是弹性理论发展中的经典之作。

精确求解弹性力学微分方程的困难迫使人们发展近似解法。例如,基于变分原理的变分法获得发展,例如著名的李兹(W.Ritz)法和伽辽金(B.G.Galerkin)法。

1.4.2 塑性理论

在塑性力学研究方面,尽管库仑(Coulomb,1736—1806)首先研究了土的屈服并给出了著名的 Coulomb 公式,塑性力学的开端却常被归功于屈雷斯卡(H.Tresca)。这是因为 Tresca 在 1864 年发表了关于金属挤压的试验报告,指出金属材料在最大剪应力达到某一量值时发生塑性流动,这是关于金属材料的第一个屈服准则。此外,鲍辛格(J.Bauschinger,1833—1893)通过试验发现了著名的 Bauschinger 效应。

此后,塑性力学的发展是缓慢的。到了 1913 年,米塞斯(R.VonMises,1883—1953)提出了一个新的屈服准则。几年之后,汉基(H.Hencky)把 Mises 准则解释为畸变能达到某临界值时发生屈服。为了验证屈服理论,学者们针对金属材料进行了大量试验。例如,盖斯特(Guest,1900)进行薄壁管轴向拉伸和内压联合试验,初步证实了 Tresca 条件;罗德(W.Lode,1926)用钢、铜和镍薄壁管进行轴向拉伸和内压联合试验;泰勒等人(G.I.Taylor 和 H.Quinney,1931)用金属薄壁管进行拉伸和扭转联合试验。这些试验验证了 Tresca 条件和 Mises 条件,且发现 Mises 条件与试验结果符合得比较好。

在塑性本构理论方面,1870 年 St.Venant 认识到应力与塑性应变之间没有一一对应关系,因而假设应变增量主轴与应力主轴重合,提出了平面应变条件下理想刚塑性材料的本构方程。列维(M.Lévy,1871)进一步认识到塑性变形过程

中应变增量分量与相应的应力偏量成比例,并提出了空间理想刚塑性本构方程。后来,Mises 还独立地得出了 Lévy 的结果,因而发展成增量理论,即著名的 Lévy-Mises 方程。路埃斯(A.Reuss,1932)认为当变形较小而弹性部分和塑性部分属同一量级时,忽略弹性变形将会带来较大的误差,因此提出了包括弹性应变的弹塑性本构理论,即 Prandtl-Reuss 塑性增量理论。德鲁克(D.C.Drucker,1952)提出了关于材料强化的重要公设,证明了塑性应变率与屈服面的正交性,并提出了相关联的流动法则。Hencky(1924)采用 Mises 屈服条件提出了塑性全量理论,依留申(A.A.Ильшин 或 A.A.Илюшин,1940)发展了这个理论,并提出简单加载定理。

在塑性力学计算领域,早在 19 世纪 70 年代初,St.Venant 就应用 Tresca 屈服准则研究了圆柱体受扭转或弯曲时的弹塑性应力(1870),以及圆筒承受内压作用的弹塑性应力(1872)。值得指出的还有普朗特(L.Prandtl,1921)和 Hencky (1923)对平面塑性力学问题求解方法及滑移线场理论的贡献;那达依(A.Nadai,1923)同时用理论和试验的方法研究了柱的扭转问题。实际上,能够解析求解的塑性力学问题很少,因此数值方法特别是有限单元法成为最强有力的工具。

1.4.3 发展趋势

到目前为止,弹塑性力学的理论框架已臻于完善。然而,由于充分利用材料性能的需要及新型材料的不断出现,自 20 世纪 50 年代以来,塑性力学受到广泛重视。最关键的问题是建立塑性本构关系,具有应变硬化及软化特性的塑性力学问题仍是正在发展中的研究课题,要达到定型阶段还有很长的路要走。

1.5 内容安排

本书分为四部分共 21 章。第一部分为弹塑性力学基础,除本章的绪论外,还包括第 2 章至第 4 章。第 2 章介绍应力状态的概念并推导外力与应力之间的关系,即平衡微分方程和应力边界条件。第 3 章介绍应变状态的概念并推导位移与应变之间的关系,即几何方程。由于应力分析和应变分析只涉及到平衡关系和变形几何关系,而与材料的物理力学性质无关,故这种分析的有关结论对弹性力学分析和塑性力学分析都是适用的。第 4 章讨论基本的材料变形试验成果、变形机理以及本构关系的基本概念。

第二部分包括第 5 章至第 14 章,涉及线性弹性理论。第 5 章介绍弹性本构方程,将其与应力应变理论中得出的平衡微分方程和几何方程联合起来,便构成弹性力学的基本方程。第 6 章给出弹性力学问题的提法及基本求解方法。第 7

章至第 13 章分别讨论各种典型弹性力学问题的求解,包括平面问题、空间问题、柱体扭转问题、平板问题、壳体问题。第 14 章介绍弹性力学变分原理与变分解法。

结构变形进入塑性阶段以后,便成为塑性分析的对象。第三部分的弹塑性理论包括第 15 章至第 20 章。在弹塑性分析中,首先要判断材料是处于弹性阶段还是已进入塑性阶段,这就要求建立屈服准则(第 15 章)。如果材料已进入塑性阶段,则必须建立判断加载还是卸载的准则,即加载准则。如果材料处于塑性阶段的加载状态,应根据材料是理想塑性还是应变强化建立相应的塑性本构方程,这项任务是由塑性本构理论(第 16 章)完成的。第 17 章首先给出弹塑性力学边值问题的提法,然后求解一些简单的弹塑性力学问题,第 18 章和第 19 章分别介绍塑性极限分析的严密方法和近似方法,第 20 章则将塑性本构理论引向深入。

最后,第 21 章构成本书的第四部分,阐述难度较大的大变形理论,包括大变形条件下的变形描述、应变度量、应力度量、本构方程、平衡方程及虚功原理。

习 题

- 1.1 弹塑性力学的基本假设有哪些?各假设的内容和意义是什么?
- 1.2 弹塑性力学最基本的研究方法是什么?为什么说弹塑性力学问题通常是超静定的?解决这类问题需要从哪三个方面来考虑?
- 1.3 何谓弹性设计?弹性设计有哪些不足?为什么要进行弹塑性分析与设计?

第 2 章

应力理论

弹塑性力学的基本任务是求解物体在荷载作用下产生的应力、应变和位移,它们都是定义于连续介质体上的场变量,表示为空间坐标的连续函数。为了求解它们,首先需要从物体中取出微元体进行微元分析,以建立这些场变量必须满足的控制微分方程和边界条件。

本章介绍应力理论,建立应力场变量必须满足的控制方程和边界条件。具体内容包括:(1)荷载、应力状态等基本概念;(2)通过体内微元即微分六面体的平衡分析推导平衡微分方程,通过边界处微元即微分四面体的平衡分析推导应力边界条件;(3)进行应力分析,给出主应力、主方向、应力不变量、等效应力的计算公式。

2.1 基本概念

2.1.1 荷载

引起物体内力和变形的外部因素统称为荷载,包括外力和其他因素。外力分为体力 and 面力;其他因素包括温度变化、中子辐照、边界约束变动等。这里仅简要介绍外力的概念。

(1)体力

体力是指满布地作用在物体内部各质点上的力,例如重力、惯性力等。体力矢量用 f 表示,定义如下

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f_i e_i \quad (2.1)$$

其中 ΔV 为受体力作用的微元体积, ΔF 为 ΔV 上体力的合矢量; $f_i (i=1, 2, 3)$ 是体力矢量 f 沿坐标轴的分量,指向坐标轴正向时为正,反之为负。在直角坐标系中, f_i 通常写为 X, Y, Z ; e_i 是相应坐标轴的单位基矢量。

(2)面力

面力是指作用在物体表面上的力,例如风力、液体压力、固体之间的接触力等。面力矢量用 $\bar{p}$ 表示,定义为

$$\bar{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = \bar{p}_i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

其中 ΔS 为受面力作用的微元面积, $\Delta \mathbf{P}$ 为 ΔS 上面力的合矢量。 $\bar{p}_i (i=1, 2, 3)$ 是面力矢量 $\bar{p}$ 沿坐标轴的分量,指向坐标轴正向时为正,反之为负。在直角坐标系中, $\bar{p}_i$ 通常写为 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 。

2.1.2 应力状态

(1)应力定义

物体在荷载作用下将产生变形,同时在体内产生抵抗变形的内力。简单地说,应力就是荷载引起的物体内部单位面积上的内力。作用在外法线为 $\mathbf{n}$ 的面元上的应力矢量 $\mathbf{t}^{(n)}$ 定义为

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} \quad (2.3)$$

其中 ΔS 为面元的面积, $\Delta \mathbf{F}$ 为外域通过面元 ΔS 对内域的作用力之合力。通常 $\mathbf{t}^{(n)}$ 与 $\mathbf{n}$ 并不重合。

(2)应力状态

如前所述,应力总是与截面相关联。过物体中任一点 P 可以作无数个不同方向的截面,各个截面上的应力通常各不相同。为了研究 P 点的应力状态,可以在该点取平行于坐标面的 3 个互相垂直的微元面。当微元面趋于零时,上面作用的应力就代表 P 点的应力。本章第 3 节将证明,用这 3 个微元面上的应力可表示过 P 点任何截面上的应力。

过 P 点的 3 个微元面的外法线都可以是坐标轴 x_i 的正向,也都可以是坐标轴 x_i 的负向。通常把外法线与坐标轴正向相同的面称为正面,其单位法向矢量为 $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i$; 外法线与坐标轴负向相同的面称为负面,其单位法向矢量为 $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_i$ 。显然,根据作用与反作用定律,正面上的应力与相对应的负面上的应力大小相等,方向相反。这样,可以用一个微小平行六面体(注意:它不同于即将研究平衡问题时的微元体)的 3 个正面表示过 P 点的 3 个正面,3 个负面表示过 P 点的 3 个负面(图 2.1)(文献 3)。

截面上的应力矢量可沿坐标轴分解为一个正应力和两个剪应力。例如,在以 $\mathbf{e}_1$ 为法向的正面上,应力矢量用 $\mathbf{t}^{(1)}$ 表示,沿 x_1, x_2, x_3 轴的分量分别为 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ 。这里每个应力分量用两个字母的下标记,其中第一个字母表示应力

所在面的外法线方向,第二个字母表示应力分量的指向。这样,3个正面上的应力矢量为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{t}^{(1)} &= \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{12}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{13}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{1j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{t}^{(2)} &= \sigma_{21}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{2j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{t}^{(3)} &= \sigma_{31}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{3j}\boldsymbol{e}_j \end{aligned} \right\} \quad (2.4a)$$

或

$$\boldsymbol{t}^{(i)} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4b)$$

其中引入了爱因斯坦求和约定,即如果一个指标重复出现两次,则该指标要取完指标域中所有的值,然后将所得的各项加起来。

对于负面上的应力矢量,显然有

$$\boldsymbol{t}^{(-i)} = -\boldsymbol{t}^{(i)}$$

可见, P 点的应力分量共有 9 个。把这 9 个应力分量按一定规则排列,令其中每一行为过 P 点的一个面上的 3 个应力分量,便构成应力张量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

其中第二种表达方式 为直角坐标系中的应力张量,并注意通常正应力只用一个字母的下标记。

(3) 符号规定

在弹塑性力学中,应力的正负号规定如下:不论是正应力还是剪应力,正面上的应力与坐标轴正向相同时为正,反之为负;负面上的应力与坐标轴负向相同时为正,反之为负。图 2.1 中所示为直角坐标系中的应力分量,均为正。

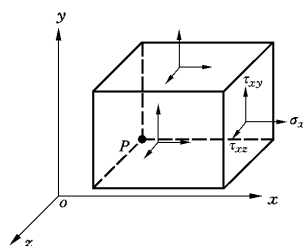


图 2.1 应力状态

2.2 平衡分析

如果物体处于平衡状态,则其每一部分也将是平衡的。换句话说,整个物体平衡的充分必要条件是物体内微元体的平衡。微元体有两种,即六面体和四面体。根据六面体的平衡条件,可以推导出平衡微分方程;根据四面体的平衡条

件,可以得到斜截面应力计算公式和应力边界条件。

2.2.1 平衡微分方程

一般说,域 Ω 内各点的应力是不相同的,表示为 x, y, z 的函数。在点 $P(x, y, z)$ 处取图 2.2 所示的微分六面体,左面上的正应力为 $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$;右面上的正应力为 $\sigma'_x = \sigma_x(x + dx, y, z)$,展开为级数并略去高阶微量得

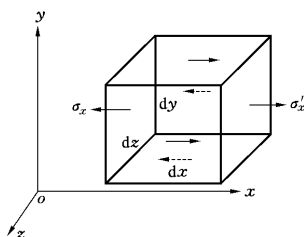


图 2.2 微元平衡

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其他各应力分量均可依此类推。根据 x 方向力的平衡条件,有

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx - \tau_{yx} dz dx \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

同理,列出 y, z 方向力的平衡条件可得另外两个方程,统一表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5a)$$

或

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.5b)$$

式(2.5)称为平衡微分方程,简称平衡方程,它所描述的是内部应力与外部体力之间的关系。

对于动力学问题,若不考虑阻尼效应,则根据 Newton 第二定律,不难推导出动力平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.6a)$$

或

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.6b)$$

其中 $u_i, \ddot{u}_i$ 分别是沿 x_i 轴方向的位移分量、加速度分量; ρ 是质量密度。

2.2.2 剪应力互等定理

现在让我们考虑微元体的力矩平衡。若以过微元体中心 C 且平行于 z 轴的线为取力矩的轴, 则凡作用线通过 C 点或方向与该轴平行的应力分量对该轴的力矩均为零, 于是根据力矩平衡条件可得

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \tau_{xy} \right) \frac{dx}{2} dy dz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy + \tau_{yx} \right) \frac{dy}{2} dx dz = 0$$

令微元体趋于零即得式(2.7)中的第一式。同理, 分别对过微元体中心 C 且平行于 x, y 轴的线列力矩平衡条件, 可得式(2.7)的另两个等式。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.7)$$

这些公式所表明的就是剪应力互等定理。可见, 应力张量是对称张量。这样, 式(2.5b)也可写成

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

在式(2.5)中的 3 个方程中含有 6 个未知应力分量, 未知量的数目超过平衡方程的数目, 因此弹性力学问题属于超静定问题。

2.2.3 斜截面应力公式

从受力物体中的 P 点处取出微分四面体(图 2.3), 其中三个面分别与坐标面重合, 为负面, 而第四个面即为任意斜截面, 其外法线方向的单位矢量 n 为

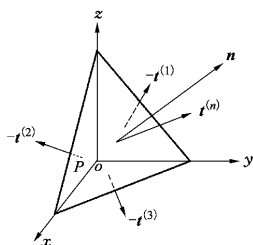


图 2.3 斜截面应力

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i = l \mathbf{e}_1 + m \mathbf{e}_2 + n \mathbf{e}_3$$

其中 $l = n_1, m = n_2, n = n_3$ 为 $\mathbf{n}$ 与坐标轴夹角的余弦,即方向余弦

$$n_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$$

设斜截面的面积为 dS , 则 3 个负面的面积分别为

$$dS_i = n_i dS = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) dS \quad (\text{a})$$

四面体的体积为

$$dV = h dS / 3 \quad (\text{b})$$

其中 h 为顶点 P 到斜面的垂直距离。列出四面体的矢量平衡条件,即

$$-t^{(1)} dS_1 - t^{(2)} dS_2 - t^{(3)} dS_3 + t^{(n)} dS + f dV = 0$$

将式(2.4)式(a)和式(b)代入上式得

$$t^{(n)} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) t^{(i)} - f h / 3 = \mathbf{n} \cdot (\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) - f h / 3$$

当 $h \rightarrow 0$ 时,斜截面与通过 P 点所考察的斜截面相重合,从而得到过 P 点的斜截面上的应力

$$t^{(n)} = \mathbf{n} \cdot (\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \quad (\text{c})$$

引进应力张量的并矢记法

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

式(c)成为

$$t^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.8a)$$

此即斜截面应力公式,也称为 Cauchy 公式。进行点积运算得

$$t^{(n)} = n_i \sigma_{ij} \mathbf{e}_j = t_{nj} \mathbf{e}_j \quad (2.8b)$$

可见, Cauchy 公式的分量表达式为

$$t_{nj} = n_i \sigma_{ij} \quad (2.9a)$$

其展开式为

$$\left. \begin{aligned} t_{nx} &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ t_{ny} &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ t_{nz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (2.9b)$$

其中 t_{nx}, t_{ny}, t_{nz} 分别为斜截面应力矢量沿 x, y, z 方向的投影。

2.2.4 应力边界条件

现考虑应力边界 Γ_σ 上微分四面体的平衡。显然,只要将斜截面当成物体外表面、斜截面上的应力当成面力,则斜截面应力公式(2.9)便成为面力与应力的平衡方程,即应力边界条件。用面力替换式(2.9)中的斜截面应力,得

$$n_j \sigma_{ji} = \bar{p}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.10a)$$

通常写为

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= \bar{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} &= \bar{Y} \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z &= \bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (2.10b)$$

其中 $\bar{p}_1 = \bar{X}$, $\bar{p}_2 = \bar{Y}$, $\bar{p}_3 = \bar{Z}$ 为面力沿 x, y, z 方向的分量。可见,每个应力边界上需给出 3 个边界条件。

2.3 应力分析

2.3.1 正应力和剪应力

将 $t^{(n)}$ 投影到法线 n 上,可得斜截面上的正应力 σ_n

$$\begin{aligned} \sigma_n &= t^{(n)} \cdot n = n \cdot \sigma \cdot n = \sigma_{ij} n_i n_j \\ &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \end{aligned} \quad (2.11)$$

斜截面上的全应力 σ 由下式确定

$$\sigma^2 = t_{nx}^2 + t_{ny}^2 + t_{nz}^2$$

于是,斜截面上的剪应力 τ_n 为

$$\tau_n = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{t_{nx}^2 + t_{ny}^2 + t_{nz}^2 - \sigma_n^2} \quad (2.12)$$

可见,过 P 点任意斜截面上的应力均可由 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ 和 τ_{zx} 唯一地确定,故这 6 个应力分量可完全表示一点的应力状态。

2.3.2 主应力和应力不变量

在物体任一点至少可以找到 3 组互相垂直的平面,在这些平面上剪应力为零,而正应力达到极值。这些面称为主平面,其上的正应力称为主应力,主应

力方向称为主方向或主轴。以 $\mathbf{n}$ 表示主平面的外法线方向单位矢量, σ 表示主应力, 则该面上的应力矢量为 $\mathbf{t}^{(n)} = \sigma \mathbf{n}$ 。此外, 主平面(作为斜截面)上的应力矢量与应力张量之间服从斜截面应力公式(2.8a), 即 $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ 。于是, 有

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{n} \quad \text{或} \quad n_i \sigma_{ij} = \sigma n_j \quad (2.13a)$$

即

$$n_i (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0 \quad (2.13b)$$

其展开式为

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x - \sigma) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma) + n\tau_{zy} &= 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13c)$$

其中 δ_{ij} 为克氏符号(Kronecker delta), 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} 能起换标作用, 即如果 δ_{ij} 的两个指标中有一个和同项中其他因子的指标相重, 则可以把该因子的那个重指标替换成 δ_{ij} 的另一个指标, 而 δ_{ij} 自动消失。

由于

$$n_i n_i = 1 \quad \text{或} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.14)$$

故 l, m, n 不可能同时为零, 于是齐次方程组(2.13c)的系数行列式应为零

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

展开为

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.15)$$

该式称为应力张量的特征方程, 主应力 σ 称为应力张量的特征值, 各系数为

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta \\ I_2 &= -\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= |\sigma_{ij}| = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中 $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 称为体积应力。

方程(2.15)是 σ 的三次方程,其三个根即为三个主应力,其相应的三组方向余弦对应于三组主平面。由于主应力的大小与坐标系选择无关,故 I_1, I_2, I_3 也必与坐标系选择无关,分别称之为第一、第二、第三应力不变量。求解式(2.15)得3个主应力,记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,于是该方程可写成

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

将上式展开并与式(2.15)对照,得以主应力表示的应力不变量

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

2.3.3 主方向的求解

为了求得主方向,例如 σ_1 方向的方向余弦 l_1, m_1, n_1 ,可将 σ_1 代入式(2.13c)的任何两个方程,例如第一、第二式

$$\left. \begin{aligned} l_1(\sigma_x - \sigma_1) + m_1\tau_{yx} + n_1\tau_{zx} &= 0 \\ l_1\tau_{xy} + m_1(\sigma_y - \sigma_1) + n_1\tau_{zy} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

上式各项均除以 l_1 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{l_1}\tau_{yx} + \frac{n_1}{l_1}\tau_{zx} + (\sigma_x - \sigma_1) &= 0 \\ \frac{m_1}{l_1}(\sigma_y - \sigma_1) + \frac{n_1}{l_1}\tau_{zy} + \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

由此可解得 $m_1/l_1, n_1/l_1$ 。于是根据式(2.14)有

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (m_1/l_1)^2 + (n_1/l_1)^2}}$$

同理可求得其他两个应力主轴的方向余弦。

2.3.4 主应力的性质

(1) 主应力的极值性

以主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 轴为坐标轴的几何空间称为主应力空间(图2.4)。在主应力空间,根据式(2.11),斜截面上的正应力用主应力表示为

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (a)$$

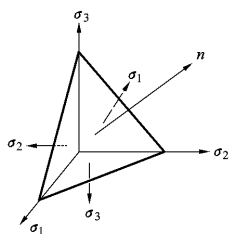


图2.4 主应力空间中的四面体

根据式(2.14), 上式可写成

$$\sigma = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)m^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)n^2 \quad (\text{b})$$

或

$$\sigma = (\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \quad (\text{c})$$

如果 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则从式(b)知 $\sigma \leq \sigma_1$; 从式(c)知 $\sigma \geq \sigma_3$ 。可见, 大小主应力分别为正应力的极大值和极小值。

(2) 主平面的正交性

考虑任意两个不同的主应力 σ_k, σ_l , 相应的主方向分别为 $\mathbf{n}^k, \mathbf{n}^l$, 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}^k \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_k \mathbf{n}^k \\ \mathbf{n}^l \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_l \mathbf{n}^l \end{aligned} \right\} \quad (\text{d})$$

式(d)中的两式分别点乘 $\mathbf{n}^l, \mathbf{n}^k$, 然后相减得

$$\mathbf{n}^k \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^l - \mathbf{n}^l \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^k = (\sigma_k - \sigma_l) \mathbf{n}^k \cdot \mathbf{n}^l$$

注意到应力张量的对称性, 上式左边为零, 从而得到两个主方向正交的条件, 即

$$\mathbf{n}^k \cdot \mathbf{n}^l = 0$$

可见, 若 3 个主应力互不相等, 则 3 个主方向必定相互正交。

若 $\sigma_k = \sigma_l = \sigma$, 则根据式(d), 对于任意常数 a 和 b 有

$$(a\mathbf{n}^k + b\mathbf{n}^l) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma(a\mathbf{n}^k + b\mathbf{n}^l)$$

可见, $\mathbf{n}^k$ 和 $\mathbf{n}^l$ 所在平面内的任何方向都是主方向, 故可在该平面内任选 2 个相互正交的方向作为主方向。不难证明, 若 3 个主应力相等, 则空间任意 3 个相互正交的方向都可作为主方向。

(3) 主应力的实数性

应力张量为实对称张量, 其特征值为实数, 即 3 个主应力都是实数。为证明这一结论, 考虑式(2.13)

$$n_i \sigma_{ij} = \sigma n_j$$

两边乘以 n_j 的共轭复数 $\bar{n}_j$, 得

$$n_i \sigma_{ij} \bar{n}_j = \sigma n_j \bar{n}_j = \sigma |\mathbf{n}|^2 \quad (\text{e})$$

其中, $|\mathbf{n}|$ 为单位矢量的模。上式取共轭, 注意到应力张量的分量为实数, 得

$$\bar{n}_i \sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma} |\mathbf{n}|^2 \quad (\text{f})$$

考虑到应力张量的对称性,有

$$\bar{n}_i \sigma_{ij} n_j = \bar{n}_j \sigma_{ji} n_i = n_i \sigma_{ji} \bar{n}_j = n_i \sigma_{ij} \bar{n}_j$$

代入式(f)并令式(f)与式(e)相减,得

$$(\sigma - \bar{\sigma}) |\mathbf{n}|^2 = 0$$

由于 $|\mathbf{n}| \neq 0$,故上式表明主应力与其共轭相等,即为实数。

2.3.5 主剪应力

在主应力空间中,从 P 点处取微分四面体,其中三个面分别与坐标面即主平面重合,第四个面为任意斜截面,其外法向单位矢量为 $\mathbf{n}$ 。根据式(2.9),斜截面上应力矢量沿坐标轴的分量为

$$t_{n1} = \sigma_1 l, \quad t_{n2} = \sigma_2 m, \quad t_{n3} = \sigma_3 n$$

根据式(2.10)、(2.11)和(2.12),斜截面上的全应力、正应力和剪应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 = \sigma_i^2 n_i^2 \\ \sigma_n &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \sigma_i n_i^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\tau_n^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (2.19)$$

剪应力取极值(非零)的面称为主剪应力面,其上的剪应力称为主剪应力。为求得主剪应力,利用式(2.14)消去式(2.19)中的 n 并令 τ_n^2 对 l 和 m 求偏导得

$$\left. \begin{aligned} l[l^2(\sigma_1 - \sigma_3) + m^2(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)/2] &= 0 \\ m[l^2(\sigma_1 - \sigma_3) + m^2(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_2 - \sigma_3)/2] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

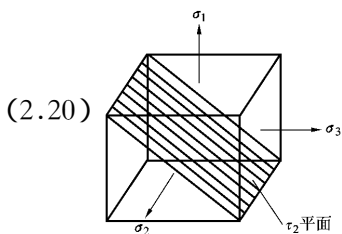
若 $l = m = 0$,则 $n = \pm 1$;若 $l = 0$,则 $m = \pm 1/\sqrt{2}$, $n = \pm 1/\sqrt{2}$;若 $m = 0$,则 $l = \pm 1/\sqrt{2}$, $n = \pm 1/\sqrt{2}$ 。用同样的方法消去 m 和 l ,可得其他方向余弦的解答(如表2.1所示)。

表 2.1 主剪应力面的方向余弦

l	0	0	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$
m	0	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	0	$\pm 1/\sqrt{2}$
n	± 1	0	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0

表2.1中的前三列是主平面,不是我们要找的解答。后三列表示3对主剪应力面,且每个主剪应力面平分两个主平面的夹角(图2.5)。将方向余弦代入式(2.19)可得主剪应力 τ_1, τ_2, τ_3

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_2 &= \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \\ \tau_3 &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$



主剪应力 τ_1, τ_2, τ_3 面上的法向应力分别为

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (2.21)$$

图 2.5 主剪应力面

2.3.6 八面体应力

在主应力空间中,存在这样的平面,即它的外法线与三个坐标轴呈等倾斜。根据式(2.14),等倾面法线的方向余弦为

$$l = m = n = \pm 1/\sqrt{3}$$

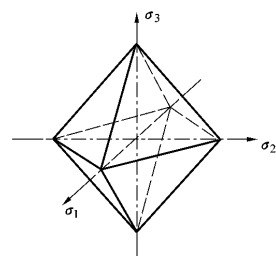


图 2.6 八面体

这种面共有 8 个,它们组成正八面体(图 2.6)。

八面体面上的正应力和剪应力分别称为八面体

正应力 σ_8 和八面体剪应力 τ_8 。将上述方向余弦代入式(2.18)和(2.19)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_8 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_8 &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

可见,八面体正应力为平均应力,即

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

2.3.7 应力张量的分解

外力作用下物体的变形通常可以分为体积改变和形状改变两种成分,并认为体积的改变是由各向相等的应力引起的。因此,通常把应力张量分解为球应力张量和偏应力张量

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$$

或

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \quad (2.23)$$

其中 $\sigma_m \delta_{ij}$ 为球应力张量, 相对应的应力状态通常称为静水应力状态; s_{ij} 为偏应力张量, 简称应力偏量, 表示为

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

s_{ij} 也是一种可能单独存在的应力状态, 故它也有自己的不变量。可以类似应力张量 σ_{ij} 那样求得 s_{ij} 的不变量, 即

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= s_{ii} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\ J_2 &= -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 \\ J_3 &= |s_{ij}| = s_1s_2s_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

很显然, 由于应力偏量 s_{ij} 与应力张量 σ_{ij} 只差一个静水应力状态, 故其主方向与 σ_{ij} 的主方向重合, 且主值为

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_m, \quad s_2 = \sigma_2 - \sigma_m, \quad s_3 = \sigma_3 - \sigma_m \quad (2.26)$$

不难发现 J_1, J_2, J_3 与 I_1, I_2, I_3 是相互确定的, 故 J_1, J_2, J_3 也是一组独立的应力不变量。弹塑性力学中更为关注的正是这一组不变量。 J_1 表示平均应力或静水应力, J_2 反映剪应力的大小, J_3 表示剪应力的方向。其中 J_2 最为常用, 下面是 J_2 的一些不同表达式

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (2.27)$$

德国学者 Lode(1928)引入下述参数

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.28)$$

来反映应力状态的特征, 例如

$$\mu_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{单向压缩} \\ 0 & \text{纯剪} \\ -1 & \text{单向拉伸} \end{cases} \quad (2.29)$$

μ_σ 称为 Lode 参数。不难验证,在原有应力状态上叠加一静水应力 σ_m , μ_σ 不变。可见 μ_σ 是反映应力偏量特征的参数。

2.3.8 等效应力

在塑性理论中将用到等效应力或应力强度 $\bar{\sigma}$ 的概念。 $\bar{\sigma}$ 定义如下

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sqrt{3J_2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_8 = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\end{aligned}\quad (2.30)$$

在单向拉伸条件下 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 代入上式得 $\bar{\sigma} = \sigma$ 。可见,在某种意义上,采用等效应力就将原来的复杂应力状态化为具有相同“效应”的单向拉伸应力状态。不过,等效应力只是为了应用方便而引入的一个量,并不表示作用在某个面上的应力。

等效剪应力或剪应力强度 T 定义如下

$$T = \sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}} \quad (2.31)$$

在纯剪条件下 $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, 于是得 $T = \tau$ 。可见,在某种意义上,采用等效剪应力就将原来的复杂应力状态化为具有相同“效应”的纯剪应力状态。

2.3.9 应力张量的坐标变换

现考虑旧坐标系 $ox_1x_2x_3$ 与新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 下应力分量间的关系。新轴 x'_m 的单位基矢量用 e'_m 来表示,它在旧坐标系中的分解式为

$$e'_m = \beta_{m'i} e_i, \quad \beta_{m'i} = \cos(x'_m, x_i) = e'_m \cdot e_i \quad (2.32)$$

注意到应力张量是不变量,故

$$\sigma'_{mn} e'_m e'_n = \sigma_{ij} e_i e_j$$

上式左边点积 e'_m 、右边点积 e'_n 得

$$\sigma'_{mn} = \sigma_{ij} e'_m \cdot e_i e_j \cdot e'_n$$

将式(2.32)代入上式,可得新坐标系下的应力分量 σ'_{mn}

$$\sigma'_{mn} = \beta_{m'i} \beta_{n'j} \sigma_{ij} \quad (2.33)$$

这就是应力张量的坐标变换公式。若用 l_i, m_i, n_i 表示新坐标轴 x'_i 在旧坐标系

中的方向余弦,并组成方向余弦矩阵

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

则式(2.33)可写成如下矩阵形式

$$\sigma' = \beta \sigma \beta^T \quad (2.35)$$

容易证明方向余弦矩阵与其转置矩阵之积为单位矩阵,即

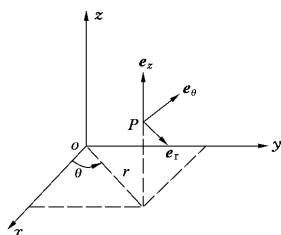
$$\beta \beta^T = I$$

从而

$$\beta^{-1} = \beta^T \quad (2.36)$$

例如,新坐标系为柱坐标系,它是一种常用的曲线坐标系。曲线坐标系与直角坐标系的基本区别在于曲线坐标系中单位基矢量的方向随着考虑的点不同而变化。在柱坐标系中(图2.7)物体任一点 P 的位置用坐标 r, θ, z 来表示,它们与直角坐标的关系为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (2.37)$$



柱坐标系的方向余弦矩阵为

图 2.7 柱坐标系

$$\beta = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

代入式(2.35)经运算得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_z &= \sigma_z \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{yz} \cos \theta - \tau_{zx} \sin \theta \\ \tau_{zr} &= \tau_{zx} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

习 题

- 2.1 何谓体力？何谓面力？它们的正负号是如何规定的？应力正负号是如何规定的？为什么说 σ_{ij} 能代表一点的应力状态？
- 2.2 在本章讨论过程中，哪里用到了小变形假设？
- 2.3 物体中某点处于纯剪应力状态，即 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ， $\tau_{xy} = \tau$ 。试求该点的主应力。

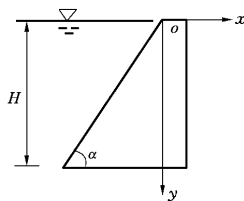
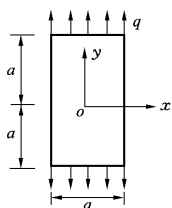
答案： $\sigma_1 = \tau$ ， $\sigma_2 = 0$ ， $\sigma_3 = -\tau$ 。

- 2.4 物体中某点的应力状态如下。试求八面体正应力和剪应力。

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 11 \end{pmatrix} \times 10^5 \text{Pa}$$

答案： $\sigma_8 = 5.333 \times 10^5 \text{Pa}$ ， $\tau_8 = 8.653 \times 10^5 \text{Pa}$ 。

- 2.5 试推导式(2.27)。(提示：用 $\sigma_x - \sigma_m$ ， $\sigma_y - \sigma_m$ ， $\sigma_z - \sigma_m$ 代替式(2.16)中的 σ_x ， σ_y ， σ_z)。
- 2.6 试证明 $\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$ 。
- 2.7 物体中某点柱坐标应力分量为 σ_r ， σ_θ ， σ_z ， $\tau_{r\theta}$ ， $\tau_{\theta z}$ ， τ_{zr} 。试求直角坐标系中的应力分量表达式。
- 2.8 试写出下列情况的边界条件(z 方向取单位厚度)。



题 2.8 图

应变理论

在荷载作用下,物体各点的位置将发生变化即位移。如果位移后各点间相对位置不变,则物体实际上只产生了刚体移动或转动,即刚体位移。如果位移改变了各点间初始状态的相对位置,则物体就同时产生了形状变化即形变。

本章从几何角度分析物体的变形。首先推导几何方程,它所表达的是物体内部应变分量与位移分量之间的关系,然后进行应变分析,推导主应变、八面体剪应变、应变张量和应变偏量不变量的计算公式。

3.1 位移与应变

物体各点的位移矢量 u 可以用其沿 x, y, z 方向的分量 u, v, w 来表示。规定位移分量指向坐标轴正向时为正,反之为负。很显然,只要确定了物体各点的位移即位移场,物体的变形状态也就确定了。首先让我们来推导几何方程。

3.1.1 几何方程

任取一点 $P(x, y, z)$ 及其相邻点 $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ (图 3.1)。如果 P 点的位移分量为 u, v, w , 则点 P' 的位移分量可按 Taylor 展开为

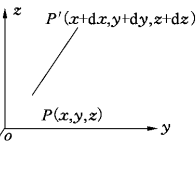


图 3.1 相邻两点

$$\left. \begin{aligned} u(x + dx, y + dy, z + dz) &= u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v(x + dx, y + dy, z + dz) &= v(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w(x + dx, y + dy, z + dz) &= w(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中因假设小变形而略去了高阶微量。由此,两点之间的相对位移为

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

可见, 变形状态由位移的偏导数所决定, 即取决于

$$u_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

在上述表达式中, 下标中的逗号表示求导。 $u_{i,j}$ 称为相对位移张量, 它是一个二阶张量, 一般是非对称的。任何张量都可以唯一地分解成一个对称张量和一个反对称张量之和, 从而 $u_{i,j}$ 可以分解为

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.4)$$

可以证明(见本节刚体位移部分), 上式中的反对称张量 ω_{ij} 表示微元的刚体转动, 称为转动张量, 在小变形情况下的应变分析中可以不考虑。上式中的对称张量 ϵ_{ij} 则为纯变形部分, 称为应变张量, 即

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

此式称为几何方程, 它表明了应变和位移之间的关系, 其展开式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & 2\epsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & 2\epsilon_{yz} &= \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & 2\epsilon_{zx} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

下面的分析将表明, ϵ_x 为 x 轴方向的正应变(图 3.2a); γ_{xy} 为 xy 面内的剪应变(图 3.2b), 其余类推。

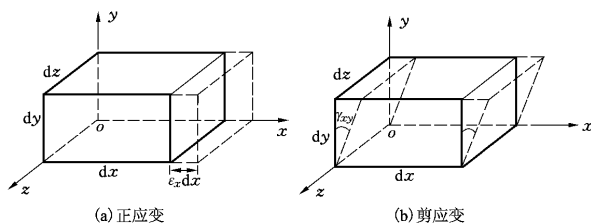


图 3.2 应变图

3.1.2 应变概念

物体的变形场可能很复杂,但是就其中微元体来讲,形状要素就是长度和角度,纯变形无非是长度和角度的改变(图 3.2)。

为了研究微分六面体的变形,最简单的分析方法是将六面体的各面投影到直角坐标系的各个坐标平面上,研究这些平面的投影的变形,并根据这些投影的变形规律来判断整个平行六面体的变形。由于变形很微小,故可以认为两个平行面在坐标面上的投影只相差高阶的微量,因而两个平行面的投影可以合并为一个投影面。

现在我们来考察微元体在 xy 坐标面上的投影面,图 3.3 所示为其两个线元及变形情况。点 $P(x, y)$ 及其附近的两个点 $A(x + dx, y)$ 和 $B(x, y + dy)$ 变形后分别成为点 $\bar{P}$, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$, 其坐标变化如下

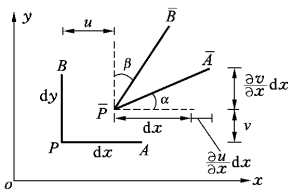


图 3.3 位移图

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &\longrightarrow \bar{P}(x + u, y + v) \\ A(x + dx, y) &\longrightarrow \bar{A}\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \\ B(x, y + dy) &\longrightarrow \bar{B}\left(x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

考虑线元 PA 的相对变化,即

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}\bar{A} - PA}{PA} &= \frac{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} - dx}{dx} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1 \approx \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \end{aligned} \quad (3.8)$$

从式(3.8)可知, ϵ_x 的几何意义为 x 方向上线元的相对伸长,称为 x 方向的正应

变。同理 ϵ_y 和 ϵ_z 分别为 y 方向和 z 方向上线元的相对伸长,即 y 方向和 z 方向的正应变。正应变以伸长时为正,缩短时为负,从而与正应力的正负号规定相适应。

再来考虑 $\angle APB$ 的变化。对于图 3.3 中所示的角 α 和 β ,有

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} \approx \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tan\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9)$$

当变形微小时, α 和 β 也很小,因而有

$$\alpha + \beta \approx \tan\alpha + \tan\beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} \quad (3.10)$$

可见, γ_{xy} 的几何意义是 xy 面内直角的改变,称为剪应变。类似地, γ_{yz} 和 γ_{zx} 分别是 yz 和 zx 面内直角的改变。规定剪应变以直角变小时为正,变大时为负,从而与剪应力的正负号规定相适应。

可以证明,对于物体内部任意一点,如果已知 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 这 6 个应变分量,就可以求得经过该点的任一线段的正应变,也可以求得经过该点的任意两相互垂直线段之间的角度改变。因此,这 6 个应变分量可以完全确定该点的形变状态。

3.1.3 协调方程

根据连续性假设,物体变形后仍保持其连续性。在数学上,要求位移函数是空间坐标的单值连续函数,否则变形后就会出现裂缝或重叠。当对 6 个独立的应变分量任意给定 6 个函数时,就有可能出现这种变形不协调的现象。因此,各应变分量之间必须满足一定的关系。从数学上看,如果给出应变分量求位移,则需积分几何方程。这样的方程有 6 个,但只有 3 个位移分量,如果没有附加条件的話,一般地说是不可积的,即应变不能与一组连续的位移相适应,变形将不协调。

首先研究同一平面内应变分量之间的关系。将几何方程中 ϵ_x 对 y 的二阶导数与 ϵ_y 对 x 的二阶导数相加,可得

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

此式即式(3.11a)中的第一式。类似地,可得出(3.11a)中的其他两式。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.11a)$$

为了弄清不同平面内应变分量之间的关系,对几何方程中的剪应变公式作如下求导运算

$$\frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \gamma_{yz} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (c)$$

为消去 u, v , 做运算(b)+(c)-(a)得

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (d)$$

为消去 w , 式(d)对 z 求导

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$$

此即式(3.11b)的第三式,同理可得其他两式。

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.11b)$$

式(3.11)称为变形协调方程。事实上,这6个协调方程并不独立,它们之间还存在高阶的微分关系,最后独立的方程只有3个。

可以证明,满足协调方程就能保证位移可积,即保证位移分量存在。如果物体是单连体(即在物体所占据的区域中任何闭合曲线都可以借助不断变形而收缩到一点),则满足协调方程还能保证位移单值,而对于多连体(即在物体所占区域中能够找到某个不能够收缩到一点的封闭曲线),要保证变形后的物体仍然连

续,还要求满足位移单值条件(文献 28)。

3.1.4 刚体位移

物体内应变分量均为零时的位移为刚体位移。令全部应变分量等于零,不难推得

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega_y z - \omega_z y + u_0 \\ v &= \omega_z x - \omega_x z + v_0 \\ w &= \omega_x y - \omega_y x + w_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中 $\omega_x, \omega_y, \omega_z, u_0, v_0, w_0$ 为常数。可见,为了完全确定位移场,必须有 6 个适当的约束条件来确定上式中的 6 个待定常数。

当 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 均为零时,各点的位移分量均为 u_0, v_0, w_0 ,故它们表示物体的刚体平移,而 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 表示刚体转角。为说明这一点,可考虑刚体平移以及 ω_x, ω_y 均为零的情况。此时,位移发生在 xy 坐标平面内。根据式(3.12),位移分量为

$$u = -\omega_z y, \quad v = \omega_z x \quad (3.13)$$

该位移之和的大小为

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\omega_z^2(x^2 + y^2)} = \omega_z r \quad (3.14)$$

这显然是物体绕 z 轴逆时针转动形成的,转角为 ω_z (图 3.4)。同理可知, ω_x, ω_y 分别为物体绕 x, y 轴转动的转角。由式(3.4)可知,反对称张量 ω_{ij} 为

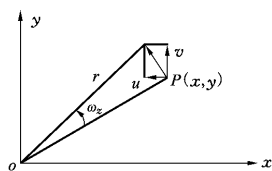


图 3.4 刚体转动

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

将式(3.12)所代表的刚体位移场代入上式,得

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

可见 ω_{ij} 的元素为转角, 故称为转动张量。

3.2 应变分析

3.2.1 主应变和应变不变量

对于任何一点总可以找到三个互相垂直的微分线段, 物体变形后这些线段只有伸缩而相互间的夹角保持直角不变, 即微分线段组成的平面内没有剪应变。与讨论应力状态时相似, 剪应变为零的面称为主平面, 微分线段的相对伸长称为主应变, 其方向即主平面的法线方向称为主应变方向。

设图 3.5 中的平面 ABC 是主平面。过坐标原点作 ABC 的垂线, 交主平面于 D 点, OD 为线元 dr , 它沿 x, y, z 轴的投影分别为 dx, dy, dz 。变形后 D 点相对于原点的位移增量可表示为式 (3.2), 其中的第一式可改写为

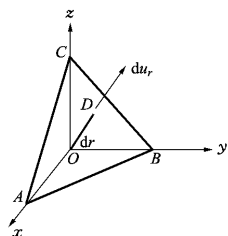


图 3.5 线元

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \end{aligned}$$

上式中后两项与刚体转动有关, 在小变形情况下分析应变时可忽略不计。这样, 上式及在另外两个方向上的位移增量可写为

$$\left. \begin{aligned} du &= \epsilon_x dx + \epsilon_{yx} dy + \epsilon_{zx} dz \\ dv &= \epsilon_{xy} dx + \epsilon_y dy + \epsilon_{zy} dz \\ dw &= \epsilon_{xz} dx + \epsilon_{yz} dy + \epsilon_z dz \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

另一方面, 由于线元 dr 的方向为主方向, 故变形后线元只增加一个长度 du_r 而方向不变, 因此主应变为

$$\epsilon = \frac{du_r}{dr}$$

且 dr 和 du_r 在 x, y, z 轴上的投影成比例, 从而有

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = \epsilon \quad (b)$$

于是

$$du = \epsilon dx, \quad dv = \epsilon dy, \quad dw = \epsilon dz \quad (c)$$

结合式(a)和(c),可得

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_x - \epsilon)dx + \epsilon_{yx}dy + \epsilon_{zx}dz &= 0 \\ \epsilon_{xy}dx + (\epsilon_y - \epsilon)dy + \epsilon_{zy}dz &= 0 \\ \epsilon_{xz}dx + \epsilon_{yz}dy + (\epsilon_z - \epsilon)dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17a)$$

上式中的各项同除以 dr , 注意到主方向的方向余弦为 $l = \frac{dx}{dr}$, $m = \frac{dy}{dr}$ 和 $n = \frac{dz}{dr}$, 则该式变为

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon_x - \epsilon)l + \epsilon_{yx}m + \epsilon_{zx}n &= 0 \\ \epsilon_{xy}l + (\epsilon_y - \epsilon)m + \epsilon_{zy}n &= 0 \\ \epsilon_{xz}l + \epsilon_{yz}m + (\epsilon_z - \epsilon)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17b)$$

为使式(3.17)中的方向余弦有非零解,其系数行列式必须为零,即

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y - \epsilon & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开后,可得

$$\epsilon^3 - I'_1\epsilon^2 - I'_2\epsilon - I'_3 = 0 \quad (3.18)$$

上述各式表明,主应变满足的方程与主应力的相似,其中 I'_1, I'_2, I'_3 分别称为应变第一、第二、第三不变量,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \epsilon_{ii} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ I'_2 &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\epsilon_{ji}) = -\epsilon_x\epsilon_y - \epsilon_y\epsilon_z - \epsilon_z\epsilon_x + \epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2 \\ I'_3 &= |\epsilon_{ij}| = \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z + 2\epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} - \epsilon_x\epsilon_{yz}^2 - \epsilon_y\epsilon_{zx}^2 - \epsilon_z\epsilon_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

求解方程(3.18)得到三个主应变,记为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 。以主应变表示的应变不变量为

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ I'_2 &= -(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1) \\ I'_3 &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

3.2.2 体积应变

现在考察微元体的体积变形,微元体的体积为 $dV = dx dy dz$ 。可以证明,

由剪切变形引起的体积改变是高级微量,可以忽略不计。这样,微元体变形后的体积将是 $dx(1+\epsilon_x) \cdot dy(1+\epsilon_y) \cdot dz(1+\epsilon_z)$, 体积应变即单位体积的改变为

$$\theta = \frac{dx(1+\epsilon_x) \cdot dy(1+\epsilon_y) \cdot dz(1+\epsilon_z) - dxdydz}{dxdydz} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (3.21)$$

其中略去了高级微量 $\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z$, $\epsilon_x\epsilon_y$ 等。

3.2.3 八面体应变

完全类似八面体应力分析,可得八面体剪应变 γ_8 。也可以用 $\epsilon_x, \frac{\gamma_{xy}}{2}$ 等代替八面体剪应力公式中的 σ_x, τ_{xy} 等,得到 γ_8 的计算公式,例如

$$\begin{aligned} \gamma_8 &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2.4 应变张量的分解

与应力张量类似,应变张量也可以分解为球形应变张量 $\epsilon_m \delta_{ij}$ 和应变偏量 e_{ij} 之和,即

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_m & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{pmatrix}$$

或

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_m \delta_{ij} + e_{ij} \quad (3.23)$$

其中 $\epsilon_m = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{\theta}{3}$ 为平均应变,应变偏量 e_{ij} 表示为

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_m & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

应变偏量也是一种可能单独存在的应变状态,故它也有自己的不变量。仿照式(3.19)可得

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= e_{ii} = e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ J'_2 &= \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = -e_1 e_2 - e_2 e_3 - e_3 e_1 \\ J'_3 &= |e_{ij}| = e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \epsilon_1 - \epsilon_m \\ e_2 &= \epsilon_2 - \epsilon_m \\ e_3 &= \epsilon_3 - \epsilon_m \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

下面是 J'_2 的一些不同表达式

$$\begin{aligned} J'_2 &= \frac{1}{6} [(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{6} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.5 等效应变

等效应变或应变强度用 $\bar{\epsilon}$ 表示, 定义如下

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J'_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} \quad (3.28)$$

在单向拉伸情况下, 如果假定材料不可压缩, 则 $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\epsilon}{2}$; 代入上式可得 $\bar{\epsilon} = \epsilon$ 。可见, 在某种意义上, 采用等效应变就将原来的复杂应变状态化为具有相同“效应”的单向拉伸时的应变状态。

3.3 应变率概念

设物体中 P 点处的运动速度在 x, y, z 轴的投影分别为 $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$, 则应变对时间的变化率为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, & 2\dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}, & 2\dot{\epsilon}_{yz} &= \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}, & 2\dot{\epsilon}_{zx} &= \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

其中字母上的圆点“ $\cdot$ ”表示该量关于时间 t 的变化率, 例如对于 $\dot{\epsilon}_x$ 有

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

对于金属等固体材料, 在温度不高和变形缓慢时, 其力学性质实际上与应变率关系不大, 可以忽略时间因素对塑性变形的影响。此时, 人们主要关心的不是

应变率,而是应变增量 $\dot{\epsilon}_{ij}dt$,记作 $d\epsilon_{ij}$ (注意:这里的 $d\epsilon_{ij}$ 不是应变分量的微分,因为其中的 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 是按瞬时位置计算的,而微分则是按初始位置计算的)。在分析塑性变形的过程时,时间度量的绝对值没有影响,可任意取一个单调变化的量作为时间参数,以代表荷载或变形的先后次序。因此,在塑性力学中,应变增量和应变率常混合使用而不加区别。

应变增量张量也可以分解为球张量和偏张量,并可定义等效应变增量 $d\bar{\epsilon}$ (或应变增量强度)如下

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2]} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3.30)$$

习 题

- 3.1 正应变和剪应变是如何定义的?它们的正负号是如何规定的?应变分析与应力分析有哪些异同?
- 3.2 证明对于平面问题(应变与 z 坐标无关),如果选取函数 $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0$ 和 $\gamma_{xy} = Cxy$ (显然它们不能满足协调方程),那么由下述几何方程中的任何两个求出的位移分量,将与第三个几何方程不能协调即出现矛盾

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- 3.3 判断下述命题是否正确,并简短说明理由:

(1)若物体内一点的位移 u, v, w 均为零,则该点必有应变 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$ 。

(2)在 x 为常数的直线上,若 $u = 0$,则沿该线必有 $\epsilon_x = 0$ 。

(3)在 y 为常数的直线上,若 $u = 0$,则沿该线必有 $\epsilon_x = 0$ 。

答案:(1)错,(2)错,(3)对。

- 3.4 已知某物体的位移场为

$$u = (6x^2 + 15) \times 10^{-2}, \quad v = (8yz) \times 10^{-2}, \quad w = (3z^2 - 2xy) \times 10^{-2}$$

试求点 $P(1 \ 3 \ 4)$ 的应变分量。

$$\text{答案: } \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 32 & 11 \\ -3 & 11 & 24 \end{pmatrix} \times 10^{-2}.$$

- 3.5 已知下列应变分量是物体变形时产生的,试求各系数之间应满足的关系。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= A_0 + A_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4 \\ \epsilon_y &= B_0 + B_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4 \\ \gamma_{xy} &= C_0 + C_1xy(x^2 + y^2 + C_2) \\ \epsilon_z &= \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

3.6 试确定下述应变场是否可能

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= axy^2, & \epsilon_y &= ax^2y, & \epsilon_z &= axy \\ \gamma_{xy} &= 0, & \gamma_{yz} &= az^2 + by^2, & \gamma_{zx} &= ax^2 + by^2 \end{aligned} \right\}$$

答案 :不可能存在。

3.7 已知物体中某点的应变状态为

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0.006 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & -0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试求 : (1) 应变不变量 ; (2) 主应变 ; (3) 八面体剪应变。

答案 : (1) $I'_1 = -0.01$, $I'_2 = -20 \times 10^{-5}$, $I'_3 = 0$;

(2) $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = -2.764 \times 10^{-3}$, $\epsilon_3 = -7.236 \times 10^{-3}$;

(3) $\gamma_8 = 2.98 \times 10^{-3}$ 。

3.8 设应变偏量与应力偏量具有如下关系

$$e_{ij} = \psi s_{ij}$$

其中 ψ 为一标量。试证明 e_{ij} 与 s_{ij} 有相同的主方向。

3.9 试用直角坐标系中的应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 表示柱坐标系中的应变分量。3.10 试用柱坐标系中的应变分量 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$ 表示直角坐标系中的应变分量。

3.11 在本章讨论过程中 , 哪里用到了小变形假设 ?

第 4 章

本构理论概述

前两章建立了平衡微分方程(3 个)和几何方程(6 个),共 9 个方程。推导这些基本方程时并没有涉及到材料性质,因此它们对于任何材料都是适用的。不过,只有这些方程还不足以解决变形体的应力和变形问题,因为这 9 个方程中包含有 15 个未知量,即 3 个位移分量、6 个应力分量和 6 个应变分量。为此,还必须研究材料变形特性,建构应力与应变之间的关系即本构关系或本构方程,这项任务是由本构理论来完成的。

近几十年来,计算技术的高度发展使求解复杂力学问题的能力显著提高,建构更加符合实际的力学模型,特别是本构方程成为问题的关键。本章概括地介绍本构理论,内容包括:(1)本构理论研究的基本思路;(2)基本试验资料及简单受力条件下的理想本构模型;(3)弹塑性本构理论简介。具体的本构理论将在第 5 章、第 16 章和第 20 章中详细阐释。

4.1 本构研究思路

4.1.1 本构理论

一般地说,描述结构材料力学性质的数学表达式均称为本构方程,说明材料力学特性的理论称为本构理论,它包括机理的基本假定、本构方程的建立和特性参数规律性的研究。在本书中,本构方程仅指反映材料变形性质的数学关系,特别是应力与应变之间的关系,这也是该术语最通常的用法。

4.1.2 材料单元

本构方程是针对具有代表性的材料单元建立起来的,研究材料的变形特性需要对材料单元进行试验。

何谓材料单元?如何确定材料单元?我们知道,连续介质假设是大多数近代工程力学以及物理学大部的的基础,并能与实际相符。这主要是由于在实际分

析中所采用的材料特性代表了介质单元的某种平均特性,而不是点的特性。实际上,就相当于对介质进行了等效连续处理。为此,我们可以将在物理力学性质方面能代表介质特征的最小单元称为“基本单元”。例如,混凝土的基本单元应包括一定数量的骨料颗粒、胶结物以及孔隙。若缩小单元尺寸,使其仅包括部分颗粒或部分孔隙,则这种单元显然就不是混凝土的基本单元了,因为我们不能将颗粒或孔隙的力学性质视为混凝土的力学性质。如果要研究混凝土的力学反应,用于力学特性研究的试样即材料单元必须大于或等于基本单元,从而试验结果可以代表混凝土的性质,分析结果也是单元体的平均反应,而不是结构中某一点的反应。

可以把材料单元的基本特征概括为“宏观小微观大”。单元包含大量的次级组分,统计平均后能得到稳定的数值,这就是“微观大”的含义;单元的特征尺度与问题的特征尺度相比足够小,因而可以将其近似地看成一个几何点,这就是“宏观小”的含义。可见,材料的本构理论本质上是唯象理论,即描述宏观力学现象的理论。“唯象理论的合理性在于所依据的是宏观实验,而所得结论仍然用于宏观实际;也就是以宏观世界作为出发点,建立宏观理论,反过来又用于宏观世界,并由宏观世界来检验其正确性(文献5)。”

4.1.3 研究方法

本构特性属于材料物理性质的范畴,必须采用试验方法加以研究。材料单元在外力作用下,可观察的物理量(例如应力 σ ,应变 ϵ ,温度 T 等)在同一时刻的值构成材料当时的一个状态,这些物理量称为状态变量。状态变量可以随时间而变,因此材料行为表现为一过程。材料状态变量及时间之间的关系称为状态方程或本构方程。

通常是首先根据宏观试验资料总结出唯象的经验规律,给出数学表达式,并确定相关的参数;然后引入某些理论假设,构造本构方程。对于比较简单的情况,数学公式容易获得;而当情况复杂时,便可能相当困难。实际材料单元往往处于复杂应力状态。由于能施加复杂应力的试验设备的设计、制造和使用都很困难,因此只能通过某些简单的试验,获取材料在比较简单应力状态下的本构方程,然后通过某种理论把这些试验结果推广应用到复杂应力状态上去,求取普遍形式的本构方程。也就是说,根据有限的试验资料,利用某种理论去建立材料的本构方程并确定其中的特性参数(文献10,31,32,44,46)。

弹塑性力学主要研究介质的宏观力学形状,并不专门探讨微观结构。然而,为了建立本构理论,必须弄清材料的变形机理;而要弄清机理,必须进行微观或细观研究。事实上,只有把宏观现象与微观机理结合起来,才能使我们在建构理论时做出符合实际的假定。

4.1.4 问题类型

一般说来,材料的应力应变关系与加载历史、加载方式、温度和时间等多种因素有关,可表示为

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}, t, T, P, \dots) \quad (4.1)$$

其中, t 为时间; T 为温度; P 为应力路径, 等等。

在影响材料变形特性的因素当中, 温度和加载速率(即荷载对时间的变化率)特别重要。当温度超过一定值后, 温度升高将使材料强度降低而塑性变形能力提高, 且表现出蠕变现象(即应力不变而应变随时间不断增长)。当加载速率比通常静力试验时的速率高几个数量级时, 会发现强度提高而塑性变形能力降低。

然而, 在温度不高、时间不长的情况下, 可以忽略蠕变效应; 在加载速率不大的情况下, 可以忽略其对变形的影响。这样的问题就是所谓静力问题, 此时研究材料变形可忽略时间因素的影响, 建立与时间无关的静力本构方程。当材料变形的稳定时间较长时, 需要考虑时间因素。对于这种流变问题, 必须建立材料的流变本构方程。当加载速率较大时, 动力因素对材料变形的影响不可忽略; 在与此相应的实际问题中, 惯性力和阻尼力与弹性恢复力相比不可忽略。这种问题属于动力问题, 需要建构动力本构方程。本书仅限于静力问题。

4.2 试验资料与简化模型

4.2.1 基本资料

在经典弹塑性力学中, 有两个基本试验, 即金属材料的单向拉伸试验和静水压力试验。

(1) 单向拉伸试验

在截面为 A_0 的圆柱形试件上施加轴向拉力 F , 试件将处于单向拉伸应力状态, 其名义应力为

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (4.2)$$

还可以测量在荷载作用下试件变形后的直径或面积, 从而求出真实应力, 即用实际受力面积计算出的应力

$$\sigma_T = \frac{F}{A} \quad (4.3)$$

其中 A 为该瞬时试件的实际截面积。在小变形条件下,真实应力与名义应力相差很小,可以忽略不计。

在加载的同时测量试件的轴向伸长,相对伸长即轴向应变 ϵ 。小变形时,可采用原始尺寸 l_0 定义应变

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4.4a)$$

称为工程应变。大变形时,须采用真实应变,即

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (4.4b)$$

试验时可测量试件的横向收缩,计算横向收缩应变 ϵ' 。试验表明,在线性弹性范围内, ϵ' 与 ϵ 之比是一个常数,即

$$\epsilon' = -\nu\epsilon \quad (4.5)$$

其中, ν 称为泊松比。

对于大多数固体材料,单向拉伸试验曲线具有某些共性。图 4.1a 是低碳钢试件单向拉伸试验的典型曲线,其中 A 点所对应的应力 σ_A 称为比例极限, A 点以下的 OA 段为直线。 AB 段为非线性弹性阶段,其中 B 点所对应的应力标志着弹性变形阶段的终止,故称为弹性极限 σ_e ; B 点所对应的应力同时还标志塑性变形阶段的开始,故亦称为屈服极限或屈服应力 σ_s ; 对应于弹性极限或屈服应力的应变为 ϵ_s 。一般材料的比例极限、弹性极限或屈服极限相差不大,故为简便起见,通常不加区分。有些材料(例如铝合金)没有明显的屈服阶段(图 4.1b)。在工程上往往以残余应变达 0.2% 时作为塑性变形的开始,其相应的应力 $\sigma_{0.2}$ 作为材料的屈服应力。

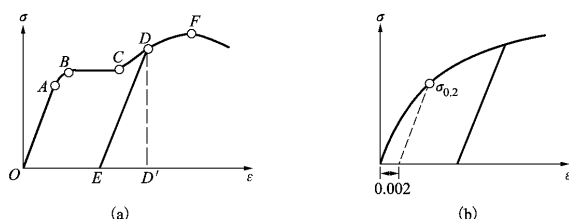


图 4.1 单向拉伸试验

在 BC 段,应力不变而变形能继续发生,这种现象称为塑性流动, BC 段称为塑性平台。对于某些材料,塑性流动阶段的应变可达到 10 至 15 倍的 ϵ_s 。如果应力达到 σ_D 时卸载,则可以认为应力应变关系自 D 点沿 DE 到达 E 点,且 $DE \parallel OA$ 。其中 OE 为塑性应变 ϵ^p , ED' 为弹性应变 ϵ^e ,总应变为

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (4.6)$$

若在 D 点卸载后重新加载,则在 $\sigma < \sigma_D$ 之前,材料仅产生弹性变形;当 $\sigma > \sigma_D$ 以后才重新进入塑性变形阶段。这就相当于提高了屈服应力,这种现象称为应变硬化或强化。材料由初始弹性阶段进入塑性称为初始屈服,而再度屈服则称为后继屈服。 F 点是材料所能承受的最大应力,称为强度极限。

对于一般金属材料,通常可以认为拉伸与压缩时的应力与应变曲线相同,如图 4.2 所示。对于应变硬化材料,若加载至硬化阶段后卸载,卸载至零后再反向加载,则拉伸屈服应力 σ_s^+ 与压缩屈服应力 σ_s^- 之间的关系可分为两种情况(图 4.3): (1)若图中的 B 和 B' 分别为拉伸屈服点和反向压缩屈服点, $\sigma_s^+ = \sigma_s^-$ 且 $\sigma_s^+ + \sigma_s^- > 2\sigma_s$, 则称为等向硬化; (2)若图中的 B 和 B'' 分别为拉伸屈服点和反向压缩屈服点, $\sigma_s^+ > \sigma_s^-$ 且 $\sigma_s^+ + \sigma_s^- = 2\sigma_s$, 则称为随动硬化。对于随动硬化材料,拉伸(或压缩)时的硬化影响到压缩(拉伸)时的弱化,这种现象称为 Bauschinger 效应。

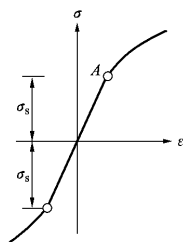


图 4.2 拉伸与压缩

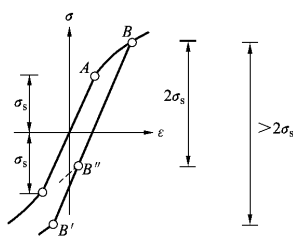


图 4.3 Bauschinger 效应

(2) 静水压力试验

P. W. Bridgman(1945)对金属材料进行了静水压力试验,结果表明,当压力达到 15000 个大气压时,体积应变 θ 与压力 p 之间的关系为

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K} \left[1 - \frac{p}{K_1} \right] \quad (4.7)$$

其中, K 为体积模量, K_1 为派生模量。试验结果表明,对于铁、钢和铝, K_1 分别为 $2.8 \times 10^4 \text{ MPa}$ 、 $2.7 \times 10^4 \text{ MPa}$ 和 $3.8 \times 10^4 \text{ MPa}$ 。可见,当 p 不太大时, $\frac{p}{K_1}$ 远远小于 1,可以认为体积应变 θ 与压力 p 呈线性关系,即

$$\theta = \frac{p}{K} \quad (4.8)$$

而且,静水压力卸除后,体积变形基本上可以完全恢复。因此,可以认为,对于一

般金属材料,体积变形是线性弹性的。

Bridgman 还进行了弹簧钢的静水压力试验。结果,在 10000 个大气压下体积缩小约 2.2%。可见,通常压力作用下,金属材料的体积变形不仅可被视为弹性的,而且这种体积变化很小,很多情况下可以忽略不计。此外,Bridgman 等人的试验结果还表明,对于金属材料来说,静水压力不影响屈服。不过,对于混凝土、岩石和土等岩土类材料,静水压力可以导致屈服,即产生塑性变形,而且体积变形也是不可忽略的。

4.2.2 变形机理

结构材料通常分为晶体材料和非晶体材料两种。晶体材料(例如多数金属)由许多离子、原子或分子按一定规则排列组合而成,具有晶格结构。非晶体材料则不具有晶格结构,例如高分子化合物、混凝土等都属于非晶体。对于各种不同的材料,试验曲线和变形机理可能很不相同。

任何真实固体材料的变形都具有弹性、塑性和黏性成分,而且这几种力学性质之间只存在模糊界限。弹性是指物体在外力作用下产生变形,而撤去外力后立即恢复到它原有的形状和尺寸的性质,弹性变形就是卸荷后可恢复的变形。塑性指应力超过屈服极限时仍能继续变形而不断裂,撤去外力后变形又不能恢复的性质,塑性变形就是卸荷后残留下来的变形。

(1)弹性变形

对于具有晶体结构的金属材料,其弹性常用物质质点间的相互作用力来说明。根据固体物理学,材料之所以能够平衡是因为原子之间存在着相互平衡的力(吸引力和排斥力)。应力作用改变了质点间距,相应产生了变形,同时也建立了新的平衡。一旦荷载消失,质点随即产生位移,返回到原来的平衡位置。

实际上,理想的线弹性材料是不存在的,即使是在完全的晶体中,分子平均位置的接近也不能按照线性规律来进行。对于可逆性也是这样,从热力学观点来看,只有假定应力变化在速度为零的情况下进行,才有可逆性。事实上,速度不可能等于零,分子所获得的一部分动能必然转化为热能耗损,故完全的可逆不会发生。由于理想弹性并不存在,就需要运用实用弹性的定义,它一方面容许对变形的线性弹性规律有一定的偏离,另一方面也容许与可逆性有一定的偏离。

(2)塑性变形

晶体的塑性变形与晶体内部原子层间发生相对滑动或剪切密切相关。试验表明,塑性变形的机理是滑移,即当滑移平面上沿着滑移方向的剪应力达到某临界值时便发生滑移。

完善晶粒能达到 10^{-1} 量级的弹性应变,而试验测得的宏观弹性剪应变变量级不超过 10^{-4} 。人们发现,这是因为材料点阵结构中存在“缺陷”,这种缺陷减弱

了晶粒对滑移的抵抗。因此,通常用位错来解释塑性变形。晶体的空间格子受到剪应力作用以后产生变形,当剪应力超过某一数值后,质点就会产生位置交换,改变了晶体点阵排列的形式,这种现象就称为位错。位错在晶体内运动将引起晶体内原子层沿滑动面滑动,表现为材料的塑性变形。质点经过位错以后,质点之间仍然保持与位置交换以前相同的作用力。这样,晶格组合并未受到多大损害,而塑性变形却能保留下来。

(3)黏性变形

瞬时变形就是在加荷的瞬间完成的变形,包括弹性变形和塑性变形。一般地说,瞬时变形随着应力水平增高而增大。流动变形是随时间而发展的变形,这种性质就是黏性。流动变形通常包括部分弹性变形和部分塑性变形。

此外,塑性流动概念出现在塑性理论中,它表示荷载达到某个极限时(流动极限)塑性变形无限制发展。

4.2.3 简化模型

在试验资料的基础上,忽略某些次要因素,可以得到理想化的简单模型。现给出材料在简单应力状态下的简化模型,它们也就是简单条件下的本构理论。

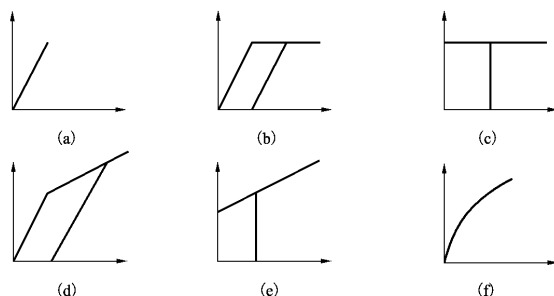


图 4.4 简化模型

(1)理想线性弹性模型

理想线性弹性模型认为,应力与应变之间服从线性弹性关系(图 4.4a)。一般说来,当变形较小时,这一假定是合理的。此时,本构方程为 Hooke 定律,即

$$\sigma = E\epsilon \quad (4.9)$$

(2)理想弹塑性模型

理想弹塑性模型假定材料经过线性弹性阶段后,便进入塑性流动状态,即塑性变形在屈服应力作用下可无限制地发展(图 4.4b),其本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon & |\epsilon| &\leq \epsilon_s \\ \sigma &= \sigma_s \operatorname{sgn} \epsilon & |\epsilon| &> \epsilon_s \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

其中 $\operatorname{sgn} \epsilon$ 为符号函数,即

$$\operatorname{sgn} \epsilon = \begin{cases} 1 & \epsilon > 0 \\ -1 & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

(3) 理想刚塑性模型

在理想弹塑性模型中忽略弹性变形即为理想刚塑性模型。也就是说,材料达到屈服应力时便进入塑性流动状态,而小于屈服应力时不产生变形(图 4.4c),其本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 0 & |\sigma| &< \sigma_s \\ \sigma &= \sigma_s \operatorname{sgn} \epsilon & |\epsilon| &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

(4) 弹性线性硬化模型

弹性线性硬化模型假定材料经过线性弹性阶段后,便进入线性塑性强化阶段(图 4.4d),其本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\epsilon & |\epsilon| &\leq \epsilon_s \\ \sigma &= E_1 \epsilon + (1 - \lambda) \sigma_s \operatorname{sgn} \epsilon & |\epsilon| &> \epsilon_s \end{aligned} \right\} \quad \lambda = \frac{E_1}{E} \quad (4.13)$$

(5) 刚性线性硬化模型

当弹性变形比塑性变形小得多时,可以忽略弹性变形,即认为材料不经过弹性阶段而直接进入线性塑性强化阶段(图 4.4e),其本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 0 & |\sigma| &\leq \sigma_s \\ \sigma &= E_1 \epsilon + \sigma_s \operatorname{sgn} \epsilon & |\epsilon| &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

(6) 幂硬化模型

幂硬化模型假设应力与应变具有幂函数关系(图 4.4f),即

$$\sigma = B |\epsilon|^n \operatorname{sgn} \epsilon \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (4.15)$$

通过调整指数 n 来拟合实际的应力应变曲线。

4.3 弹塑性本构理论

4.3.1 本构理论的类型

由于计算技术的高度发展,建立更加符合实际的本构方程成为制约结构应

力变形分析的瓶颈。这种需要极大地推动了材料本构理论的研究。到目前为止,已经发展了多种试验方法以尽可能准确地描述材料的变形特性,并建立了一百多种本构方程。在小变形情况下,就弹塑性本构理论而言,可分为三种基本类型:弹性本构理论、经典塑性本构理论、广义塑性本构理论。

(1)弹性本构理论

弹性本构理论假定材料是理想弹性的,其基本特征是变形具有可逆性、应力与应变一一对应。弹性本构方程可以是线性的,也可以是非线性的。对于绝大多数结构材料来说,在一定荷载范围内都可以看作是线性弹性的。该理论将在第5章中详细介绍。

(2)经典塑性本构理论

当材料应力超出弹性范围而进入塑性阶段时,必须采用塑性本构方程。根据单向拉伸试验资料可知,塑性阶段的本构特性受应力历史的影响,应力和应变之间不再具有一一对应的关系,而且加载和卸载遵循不同的规律。

经典塑性本构理论主要是针对金属材料发展起来的,该理论假定材料是理想弹塑性的或应变硬化的,静水应力与剪应变、剪应力与体积应变无耦合作用,且体积变形是理想线性弹性的,材料的抗拉屈服极限与抗压屈服极限相同,塑性应变增量方向服从正交流动法则,即塑性应变增量方向沿着屈服面的外法线方向。第15章将介绍经典塑性本构理论中的屈服理论,第16章介绍本构方程。

(3)广义塑性本构理论

广义塑性本构理论主要适用于混凝土、岩石、土等岩土类材料,同时也适用于金属材料。该理论认为材料不仅可以硬化,而且可以软化;屈服、硬化与软化都可以与静水应力相关,抗拉屈服极限与抗压屈服极限可以不同,静水压力与剪应变、剪应力与体积应变可以耦合,等等。广义塑性本构理论主要包括屈服与静水应力有关的塑性本构理论、建立在应变空间中的塑性本构理论以及塑性内时理论,它们将在第20章中加以讨论。

此外,在大变形情况下,应力和应变必须重新度量,它们之间的关系将在第21章中介绍。

4.3.2 本构模型的选择

结构材料种类繁多,性质各异,很难用统一的模型来描述其本构特性。人们已经认识到,试图建立一种反映上述各种变形机理且普遍适用的本构模型是不可能的。在实际分析中选择本构模型主要基于两个原则,即:(1)能较好地反映材料的实际性能;(2)比较简单实用。

例如,脆性材料的塑性变形阶段很不明显,通常是弹性阶段后紧跟着就破坏,因此可采用线性弹性本构方程。对于低碳钢来说,当总应变超过弹性极限应

变 10~20 倍时也不发生硬化,故一般可当作理想弹塑性或理想刚塑性材料处理。具体说,受内压作用的厚壁圆筒,塑性区由内壁开始向外扩展,形成一个内层为塑性区、外层为弹性区的弹塑性体。由于外层弹性区的约束,内层塑性区的变形仍与弹性变形为同一量级,用理想弹塑性模型进行分析即可,如果塑性变形的发展不受约束,像形成塑性铰的梁那样,则弹性变形与塑性变形相比可以忽略不计,此时可采用理想刚塑性模型。

任何理论模型都有它的局限性,重要的是确定各种理论的前提假设及适用范围,而不是因某种理论不适用于某种具体情况就否定它。沈珠江说:“假设是对复杂事物的一种简化,只要能在一定范围内适用,简化假设就会有生命力,土的弹性体假设就是例证。假设越少,考虑的因素越全面的理论,如果使用起来太复杂,就未必优于更简单的理论,有的甚至是画蛇添足,多此一举。该简单的地方简单,该复杂的地方复杂,这恐怕是研究工作的一条重要原则。”(文献 51)

习 题

4.1 试解释下列基本概念:

- | | | | |
|---------|----------|--------------------|---------|
| (1)比例极限 | (2)弹性极限 | (3)屈服极限 | (4)初始屈服 |
| (5)后继屈服 | (6)应变硬化 | (7)本构方程 | (8)本构理论 |
| (9)弹性变形 | (10)塑性变形 | (11)Bauschinger 效应 | |

4.2 根据金属材料的基本试验资料,说明其主要的变形特性。

4.3 本构理论的简化模型主要有哪些?各自的含义是什么?

弹性本构理论

弹性本构理论的基本假设是弹性假设 ,即荷载引起的材料变形是理想弹性的 ,其基本特征是变形的可恢复性 ,从而应力与应变之间存在一一对应关系。对于绝大多数结构材料来说 ,这一假设在一定荷载范围内是成立的。

弹性本构理论包括线性弹性理论和非线性弹性理论。在前者 ,应力与应变之间成比例 ,本构方程就是著名的广义 Hooke 定律 ;在后者 ,本构方程是非线性的 ,但加载和卸载仍然沿着一条曲线。本章仅介绍线性弹性理论 ,首先介绍弹性应变能的概念 ,为讨论广义 Hooke 定律做准备 ;然后给出广义 Hooke 定律的各种表达形式并对弹性常数的基本性质进行讨论。

5.1 弹性应变能

在荷载作用下 ,物体内部将产生应力和应变。将应力在应变上所做的功定义为应变能。现考虑微元体仅有 σ_x 作用时的应变能计算(图 5.1)。显然 ,微元体上合力 $\sigma_x dydz$ 在位移增量 $d\epsilon_x dx$ 上所做的功为 $\sigma_x d\epsilon_x dx dydz$,而在应变 ϵ_x 相应的位移上所做的功为

$$\int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x dx dydz$$

定义单位体积的应变能为应变能密度 W_ϵ ,则有

$$W_\epsilon = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x$$

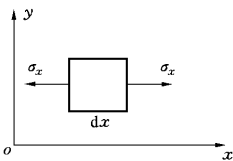


图 5.1 微元体

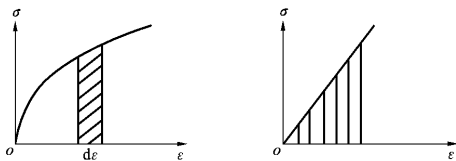


图 5.2 应力应变关系

显然,应变能密度就是应力-应变曲线围成的面积(图 5.2)。一般地,当微元体上作用全部应力分量时,应变能密度为

$$\begin{aligned} W_\epsilon &= \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x + \int_0^{\epsilon_y} \sigma_y d\epsilon_y + \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\epsilon_z + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx} \\ &= \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (5.1)$$

而整个弹性体的应变能 U 为

$$U = \int_{\Omega} W_\epsilon d\Omega \quad (5.2)$$

根据式(5.1),显然下式成立

$$\frac{\partial W_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (5.3)$$

上式表明应力张量是应变能密度 W_ϵ 的梯度,这说明 W_ϵ 为势函数,称为弹性势。

对于线性弹性介质,应变能密度和弹性体的应变能分别为

$$W_\epsilon = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (5.4)$$

$$U = \int_{\Omega} W_\epsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \quad (5.5)$$

5.2 各向异性弹性理论

5.2.1 完全各向异性

对于线性弹性材料,本构方程的一般表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\epsilon_x + c_{12}\epsilon_y + c_{13}\epsilon_z + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= c_{21}\epsilon_x + c_{22}\epsilon_y + c_{23}\epsilon_z + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{zx} \\ \sigma_z &= c_{31}\epsilon_x + c_{32}\epsilon_y + c_{33}\epsilon_z + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= c_{41}\epsilon_x + c_{42}\epsilon_y + c_{43}\epsilon_z + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= c_{51}\epsilon_x + c_{52}\epsilon_y + c_{53}\epsilon_z + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= c_{61}\epsilon_x + c_{62}\epsilon_y + c_{63}\epsilon_z + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (5.6a)$$

此即广义 Hooke 定律,其张量形式通常写成

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (5.6b)$$

其中 D_{ijkl} 称为弹性张量。在式(5.6a)中,弹性常数共有 36 个,但是它们并不都是独立的。下面将证明,对于完全各向异性介质,独立的弹性常数共 21 个,而各向同性介质的独立的弹性常数只有 2 个。

根据式(5.3)和式(5.6),有

$$\frac{\partial W_\epsilon}{\partial \epsilon_y} = \sigma_y = c_{21} \epsilon_x + c_{22} \epsilon_y + c_{23} \epsilon_z + c_{24} \gamma_{xy} + c_{25} \gamma_{yz} + c_{26} \gamma_{zx}$$

上式对 γ_{zx} 求偏导,得

$$\frac{\partial^2 W_\epsilon}{\partial \gamma_{zx} \partial \epsilon_y} = c_{26} \quad (a)$$

若 W_ϵ 先对 γ_{zx} 求偏导得 τ_{zx} ,然后再对 ϵ_y 求偏导,则得

$$\frac{\partial^2 W_\epsilon}{\partial \epsilon_y \partial \gamma_{zx}} = c_{62} \quad (b)$$

注意到导数与求导次序无关,比较式(a)和(b),可知 $c_{26} = c_{62}$ 。同理,可证明

$$c_{mn} = c_{nm} \quad (5.7)$$

故对于完全各向异性介质,独立的弹性常数共 21 个,本构方程可写成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

对 称

5.2.2 正交各向异性

如果介质有三个相互垂直的弹性对称面,则称为正交各向异性介质。从中取出一微元体,其面平行于对称面。那么,沿一个方向拉压时,微元体变形后仍为正六面体,只产生边长的伸长或缩短,面间的夹角保持不变即剪应变为零。如果使坐标轴分别与弹性对称面垂直,则正应力和剪应变之间、正应变和剪应力之间不耦合。式(5.8)可简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

此时独立的弹性常数只剩下 9 个。

5.2.3 横观各向同性

如果介质有一个对称轴,则称为横观各向同性介质。若把对称轴作为 z 轴,则与该轴垂直的 xy 平面内各个方向都将具有相同的弹性常数,故 $c_{11} = c_{22} = a$ 。在与 z 轴的关系方面, x 和 y 可互换,故 $c_{13} = c_{23} = e$, $c_{55} = c_{66} = c$ 。令 $c_{12} = b$, $c_{33} = d$, $c_{44} = f$ 。于是,本构方程可进一步简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e & 0 & 0 & 0 \\ & a & e & 0 & 0 & 0 \\ & & d & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & f & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & c & 0 \\ & & & & & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

可见,还有 6 个弹性常数。可以证明, xy 平面内的 3 个弹性常数 a , b 和 f 之间具有某个确定的关系,故横观各向同性介质的独立弹性常数只有 5 个。

5.3 各向同性弹性理论

5.3.1 本构方程的构造

对于各向同性介质,式(5.10)中的弹性常数将减少到 3 个,即 $d = a$, $e = b$, $f = c$,本构方程简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ & a & b & 0 & 0 & 0 \\ & & a & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & c & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & c & 0 \\ & & & & & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

可以证明,这 3 个弹性常数之间具有某个确定的关系。因此,各向同性介质的独立弹性常数只有 2 个。

事实上,将单向拉伸试验和纯剪试验得出的经验规律加以引申,考虑到线弹性条件下叠加原理成立,可直接得到作为经典弹性理论的广义 Hooke 定律

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (5.12a)$$

或

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.12b)$$

其中, E 为弹性模量或杨氏模量, ν 为泊松比, G 为剪切模量。根据纯剪条件下的能量关系,可以证明 E , ν 和 G 之间具有如下关系

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.13)$$

可见,对于各向同性介质,独立的弹性常数只有 2 个。

从式(5.12)中解出应力分量,可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2G \epsilon_x & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2G \epsilon_y & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2G \epsilon_z & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (5.14a)$$

或

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.14b)$$

上式可以写成矩阵形式

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} \quad (5.14c)$$

对 称

或

$$\sigma = D\varepsilon \quad (5.14d)$$

其中

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.15)$$

比较式(5.11)和(5.14), 可知 $a = \lambda + 2G$, $b = \lambda$, $c = G$ 。

5.3.2 本构方程的推导

现在我们用另一种方式推导广义 Hooke 定律(5.14), 而且不需考虑能量关系就能证明各向同性介质的独立弹性常数只有 2 个。为此, 首先证明各向同性介质的主应力方向与主应变方向相重合。令坐标系 $oxyz$ 的 x, y, z 轴与主应变方向一致, 则剪应变分量 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 等于零, 于是有

$$\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z \quad (a)$$

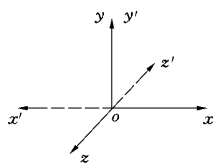


图 5.3 坐标系转动

现引进新坐标系 $ox'y'z'$, 原坐标系 $oxyz$ 绕 y 轴转动 180° 后可与之重合(图 5.3)。显然, 新坐标轴的方向余弦矩阵为

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于各向同性材料, 弹性常数与方向无关, 故对新坐标系有

$$\tau_{x'y'} = c_{41}\varepsilon_{x'} + c_{42}\varepsilon_{y'} + c_{43}\varepsilon_{z'} \quad (b)$$

根据坐标变换公式(2.35), 有

$$\left. \begin{aligned} \tau_{x'y'} &= \beta_{11}\beta_{22}\tau_{xy} = -\tau_{xy} \\ \varepsilon_{x'} &= \beta_{11}^2\varepsilon_x = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{y'} = \beta_{22}^2\varepsilon_y = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{z'} = \beta_{33}^2\varepsilon_z = \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(c)代入式(b)得

$$-\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_x + c_{42}\varepsilon_y + c_{43}\varepsilon_z \quad (d)$$

比较式(a)和(d), 可知 τ_{xy} 必定为零。同理, 可得 τ_{yz} 和 τ_{zx} 也为零。可见, 当剪应变为零时, 相应的剪应力也为零, 这就证明了应力主方向与应变主方向相重合。

现在令 x, y, z 轴与主应力方向一致。考虑到主应力方向与主应变方向重

合,则由式(5.6)可得主应力和主应变之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11}\epsilon_1 + c_{12}\epsilon_2 + c_{13}\epsilon_3 \\ \sigma_2 &= c_{21}\epsilon_1 + c_{22}\epsilon_2 + c_{23}\epsilon_3 \\ \sigma_3 &= c_{31}\epsilon_1 + c_{32}\epsilon_2 + c_{33}\epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

根据前面的分析,有 $c_{11} = c_{22} = c_{33} = a$, $c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = b$ 。代入式(e)并令 $a - b = 2\mu$, $b = \lambda$, 注意到 $\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_1 \\ \sigma_2 &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_2 \\ \sigma_3 &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_3 \end{aligned} \right\}$$

或

$$\sigma_k = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (f)$$

设 n_i^k 为与主应力 σ_k 对应的主方向, 则有

$$n_i^k(\sigma_{ij} - \sigma_k\delta_{ij}) = 0 \quad (g)$$

将式(f)代入式(g), 得

$$n_i^k(\sigma_{ij} - \lambda\theta\delta_{ij} - 2\mu\epsilon_k\delta_{ij}) = 0 \quad (h)$$

由于主应力方向与主应变方向一致, 故

$$n_i^k(\epsilon_{ij} - \epsilon_k\delta_{ij}) = 0$$

即

$$n_i^k\epsilon_k\delta_{ij} = n_i^k\epsilon_{ij} \quad (i)$$

将式(i)代入式(h), 得

$$n_i^k(\sigma_{ij} - \lambda\theta\delta_{ij} - 2\mu\epsilon_{ij}) = 0 \quad (j)$$

上式为线性方程组, 至少有 3 组解 $n_i^k (k = 1, 2, 3)$, 故其系数必为零, 即

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (5.16a)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_x & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_y & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_z & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (5.16b)$$

常数 λ, μ 称为 Lamé 弹性常数。这就证明了各向同性弹性介质的独立弹性常数只有两个。将式(5.16)与(5.14)比较,可知 λ 为式(5.15),而 $\mu = G$ 。

5.3.3 Hooke 定律的 K - G 形式

式(5.14)的三个正应力公式相加,可得下式中的第一式,计算应力偏量可得下式中的第二式

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= 3K\theta \quad \text{或} \quad \sigma_m = 3K\epsilon_m \\ s_{ij} &= 2Ge_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

此即广义 Hooke 定律的 K - G 形式,简称 K - G 模型。其中 K 为体积弹性模量,其表达式为

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.18)$$

式(5.17)中第二式的两边自乘,得

$$s_{ij}s_{ij} = 4G^2 e_{ij}e_{ij}$$

注意到等效应力和等效应变的计算公式,即

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}}, \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}e_{ij}}$$

有

$$2G = \frac{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}}{\sqrt{e_{ij}e_{ij}}} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}}$$

代入式(5.17)得

$$\sigma_m = 3K\epsilon_m, \quad s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} e_{ij} \quad (5.19)$$

此表达方式便于推广到应力应变关系是非线性的情况。

5.3.4 弹性常数

可以通过单向拉伸试验来测定 E 和 ν ,通过薄壁筒扭转试验来测定 G ,通过静水压力试验来测定 K 。试验表明,在这三种加载情况下,物体变形总是和加载方向一致,故

$$E > 0, \quad G > 0, \quad K > 0 \quad (5.20)$$

根据式(5.17)和(5.18),可知 $\nu < \frac{1}{2}$ 。试验表明,到目前为止还没有发现 $\nu < 0$ 的材料,于是

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (5.21)$$

根据式(5.15),可知

$$\lambda > 0 \quad (5.22)$$

将式(5.14)代入(5.4)得

$$W_\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda \theta \delta_{ij} \epsilon_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) = \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij})$$

可见,弹性应变能恒大于零。

习 题

5.1 对于各向同性线弹性介质(以下各题均同),试用能量关系证明弹性模量 E 、剪切模量 G 、泊松比 ν 之间具有如下关系

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

5.2 若主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$,证明 $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ 。

5.3 试推导平均应力与平均应变、应力偏量与应变偏量之间的关系

$$\sigma_m = 3K\epsilon_m, \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

5.4 试推导畸变能密度 W_d (即因形状改变而储存在单位体积内的弹性应变能)与 J_2 的关系式

$$W_d = \frac{1}{2G} J_2$$

5.5 试证明等效应力与等效应变满足下述关系

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon}$$

第 6 章

弹性力学边值问题

如果规定结构中不能出现塑性变形,则只需进行弹性分析便能确定其应力和变形。根据前面各章的分析,弹性力学问题的解在域 Ω 内必须满足平衡微分方程、几何方程和弹性本构方程,它们被称为控制方程或泛定方程;在域 Ω 的边界 Γ 上还必须满足边界条件。这样,弹性力学问题就被归结为微分方程的某种边值问题。

本章首先列出弹性力学问题的全部微分方程,然后说明微分方程的基本解法,最后介绍与弹性力学问题求解相关的基本原理,包括叠加原理、解的唯一性定理、St. Venant 原理等。

6.1 基本方程

6.1.1 平衡方程

平衡微分方程(简称平衡方程)描述物体内部应力与外部体力之间的平衡关系,其表达式为式(2.5),即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1a)$$

或

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.1b)$$

6.1.2 几何方程

几何方程表达应变和位移之间的关系,由式(3.6)给出,即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6.2a)$$

或

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.2b)$$

根据由应变位移关系导出的应变协调方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6.3a)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.3b)$$

6.1.3 本构方程

本构方程描述材料应力与应变之间的关系。对于各向同性线性弹性介质，本构方程即广义 Hooke 定律(5.12)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (6.4a)$$

或

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.4b)$$

如果用应变表示应力,则有式(5.14),即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\epsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\epsilon_y & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\epsilon_z & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (6.5a)$$

或

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.5b)$$

6.1.4 边界条件

边界条件指物体边界上所受到的外加约束或作用。可能有 3 种情况,即,
(1)应力边界条件:在边界上给定面力;(2)位移边界条件:在边界上给定位移;
(3)混合边界条件:在部分边界上给定面力,部分边界上给定位移。有时在同一部分边界上同时给定应力和位移这两种边界条件。上述 3 种情况对应的问题分别称为第一、第二、第三边值问题。

在应力边界 Γ_σ 上,边界条件为式(2.10),它描述面力与应力之间的平衡关系

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= \bar{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} &= \bar{Y} \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z &= \bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (6.6a)$$

或

$$n_j\sigma_{ij} = \bar{p}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.6b)$$

在位移边界 Γ_u 上,若 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ 为已知边界位移分量,边界条件可表示为

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad (6.7a)$$

或

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.7b)$$

例如,若某点 i 被固定,那么该点处的边界条件为 $u_i = 0$, $v_i = 0$, $w_i = 0$ 。

弹性力学问题的控制方程是普遍的,而边界条件则反映问题的个性。也就是说,边界条件不同,问题的解答不同,甚至求解方法也不同。因此,弹性力学问题常被称为边值问题。

6.2 解 题 方 法

弹性力学空间问题有 3 个平衡微分方程、6 个几何方程、6 个本构方程,共

15 个方程。控制方程中包括 3 个位移分量、6 个应力分量、6 个应变分量,共 15 个未知数。可见,当给定边界条件时,问题是可以求解的。

求解弹性力学边值问题时,并不需要同时求出全部 15 个未知量。可先求出其中某些量,然后根据它们再求出其他未知量。那些先行求出的未知量称为基本未知量。可以将控制方程综合简化为以位移为基本未知量的微分方程组,或简化为以应力为基本未知量的微分方程组;前者称为位移法,后者称为应力法。尽管还有以某些位移分量和某些应力分量为基本未知量的混合法,但实际中只在壳体问题上有所应用。

6.2.1 位移法

将几何方程(6.2)代入本构方程(6.5)可得

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.8)$$

将上式代入平衡方程(6.1),并注意到

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_{ii} = u_{i,i} = u_{k,k}$$

并采用 Laplace 算子

$$\nabla^2(\quad) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\quad) = (\quad)_{,ii} = (\quad)_{,kk}$$

可得用位移表示的平衡方程

$$(\lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} + f_i = 0 \quad (6.9a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.9b)$$

上式称为 Lamé-Navier 方程。

如果体力为常数,则式(6.9a)对 x_i 求导可得

$$(\lambda + G)u_{j,jii} + Gu_{i,ijj} = 0$$

注意到哑标可任意更换字母以及 Laplace 算子,上式成为

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (6.10a)$$

即体积应变 θ 为调和函数。对式(6.9a)实施 Laplace 算子运算,有

$$(\lambda + G)u_{j,jikk} + Gu_{i,jjkk} = 0$$

即

$$(\lambda + G)(\nabla^2 \theta)_{,i} + G \nabla^2 \nabla^2 u_i = 0$$

考虑到 $\nabla^2 \theta = 0$, 有

$$\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0 \quad (6.10b)$$

可见,位移分量为双调和函数。

如果已知边界位移,则位移边界条件很容易提出。如果给定边界面力,则需将式(6.8)代入边界条件(6.6),得

$$\left. \begin{aligned} l \left(\lambda \theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \bar{X} \\ l \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + m \left(\lambda \theta + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \bar{Y} \\ l \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + n \left(\lambda \theta + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (6.11a)$$

或

$$n_j [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i})] = \bar{p}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.11b)$$

按位移法求解时,需要满足平衡方程(6.9)、边界条件(6.6)和(6.7)。根据位移解答和几何方程、本构方程求得的应变、应力当然自动满足几何方程和本构方程,因而解答满足所有控制方程和边界条件。

6.2.2 应力法

为了得到应力法的基本方程组,应将变形协调方程改用应力表示。例如,考虑式(6.3a)的第二式

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (a)$$

将广义虎克定律(6.4)代入上式得

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (b)$$

其中, $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 。利用平衡方程(6.1a)的第二、三式,式(b)等号右边可写为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y \right) \quad (c)
 \end{aligned}$$

于是, 式(b)化为

$$(1+\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_y + \sigma_z) - \nu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = -(1+\nu) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

再将平衡方程(6.1)的第一式代入上式得

$$(1+\nu) \left(\nabla^2 \Theta - \nabla^2 \sigma_x - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = (1+\nu) \left[\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \right] \quad (d)$$

对于(6.3)中的第一、三两式, 可得类似于(d)的两个方程, 将此三式相加得

$$\nabla^2 \Theta = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad (e)$$

将(e)代入(d)得

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x}$$

此式即为下述 Beltrami-Michell 方程的第一式, 同理可得该方程的其他各式

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.12a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.12b)$$

或

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} - (f_{i,j} + f_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

(6.12c)

当体力为常数时, Beltrami-Michell 方程(6.12)简化为

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta_{,ij} = 0 \quad (6.13)$$

在上式中令指标 $i = j$, 即表示有关 3 个正应力的公式求和。注意到 $\Theta = \sigma_{ii}$, 有

$$\nabla^2 \Theta = 0 \quad (6.14a)$$

即体积应力 Θ 为调和函数。对式(6.13)实施 Laplace 算子运算, 有

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\nabla^2 \Theta)_{,ij} = 0$$

考虑到 $\nabla^2 \Theta = 0$, 有

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = 0 \quad (6.14b)$$

可见, 应力分量为双调和函数。

按应力法求解弹性力学问题时, 应力分量应该满足平衡微分方程(6.1)和协调条件(6.12), 在边界上满足边界条件(6.6)。求得应力分量后, 根据本构方程可求得应变分量, 再根据几何方程通过积分求得位移分量。

6.2.3 凑合解

无论位移法还是应力法, 都归结为求解偏微分方程组。通常情况下, 这些方程组太复杂, 传统的偏微分方程组解法(分离变量法、本征函数展开法等)无法实施, 因此只得采用凑合法, 包括逆解法和半逆解法。所谓逆解法是先设一解答, 看其所需满足的边界条件, 从而可知该解答能够解决何种问题。半逆解法是先设一部分解答, 另一部分在解题过程中求出, 并使得所有解答满足给定的边界条件。

采用凑合法的根据在于解的唯一性定理(下节将证明此定理): 如果解答能满足所有控制方程, 同时满足边界条件, 则它便是正确的解答, 而且是唯一的解答。

6.3 基本原理

弹性力学问题的提法是: 给定作用在物体全部边界或内部的外界作用(包括温度影响、外力等), 求解物体内部因此产生的应力场和位移场。问题必须适定, 即(1)有解; (2)解是唯一的; (3)解是稳定的, 即边界条件的微小变化只引起解的微小变化。

可以证明弹性力学问题的解是存在的, 而且在小变形条件下, 解是唯一的。换句话说, 如果解能满足所有控制方程, 同时满足边界条件, 则它就是正确的解,

而且是唯一的。关于解的存在性,证明起来比较复杂,我们这里不予讨论。

6.3.1 叠加原理

在线性弹性小变形情况下,平衡方程、几何方程、本构方程和边界条件都具有线性性质,各种荷载的效应可以叠加和分解,即叠加原理成立。设同一物体分别受两组荷载作用。第一组荷载体力为 f'_i 、面力为 $\bar{p}'_i$,引起的应力和位移分别为 σ'_{ij} 和 u'_i ;第二组荷载体力为 f''_i 、面力为 $\bar{p}''_i$,引起的应力和位移分别为 σ''_{ij} 和 u''_i 。叠加原理表明:两组荷载共同作用产生的应力、位移等于它们单独作用产生的应力、位移之和。现证明如下:

根据假设,有

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij,j} + f'_i &= 0 \\ \nabla^2 \sigma'_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta'_{,ij} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f'_{k,k} - (f'_{i,j} + f'_{j,i}) \\ n_j \sigma'_{ij} &= \bar{p}'_i\end{aligned}\quad (6.15)$$

和

$$\begin{aligned}\sigma''_{ij,j} + f''_i &= 0 \\ \nabla^2 \sigma''_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \Theta''_{,ij} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f''_{k,k} - (f''_{i,j} + f''_{j,i}) \\ n_j \sigma''_{ij} &= \bar{p}''_i\end{aligned}\quad (6.16)$$

将式(6.15)和(6.16)中的各式对应相加,并注意到方程是线性的,得

$$\begin{aligned}(\sigma'_{ij} + \sigma''_{ij})_{,j} + (f'_i + f''_i) &= 0 \\ \nabla^2 (\sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}) + \frac{1}{1+\nu} (\Theta' + \Theta'')_{,ij} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} (f'_k + f''_k)_k - [(f'_i + f''_i)_{,j} + (f'_j + f''_j)_{,i}] \\ n_j (\sigma'_{ij} + \sigma''_{ij}) &= \bar{p}'_i + \bar{p}''_i\end{aligned}\quad (6.17)$$

此式即证明了叠加原理。

6.3.2 解的唯一性定理

解的唯一性定理可表述如下:对于线性弹性问题,满足基本方程和边界条件的解是唯一的。实际上,这一定理是逆解法和半逆解法可行的理论基础。为证明这一定理,我们可采用反证法。假设存在两种不同的解 (σ'_{ij}, u'_i) 和 (σ''_{ij}, u''_i) , 即它们都满足控制方程和给定的边界条件

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij,j} + f'_i &= 0, & \sigma''_{ij,j} + f''_i &= 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ n_j \sigma'_{ij} &= \bar{p}'_i, & n_j \sigma''_{ij} &= \bar{p}''_i & \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上}\end{aligned}\quad (6.18)$$

$$u'_i = \bar{u}_i, \quad u''_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上}$$

考虑到两种情况下的体力和面力相同,故根据叠加原理,两解之差 $u_i = u'_i - u''_i$ 和 $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$ 必满足无体力平衡方程和齐次边界条件,即

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ n_j \sigma_{ij} &= 0 & \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \\ u_i &= 0 & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{aligned} \quad (6.19)$$

可见,假设两个解不同将导致无外荷载作用下弹性体内的应力非零。于是非零的内力构成非零的弹性应变能。根据能量守恒原理,外力所做的功等于弹性体内贮存的应变能。由于无外荷载作用,故非零的应变能是不可能的。这就证明两个应力解之差必为零,从而证明了解的唯一性。

6.3.3 St.Venant 原理

当两组静力等效(主矢量相同,对于同一点的主矩也相同)的荷载分别作用于同一物体的同一部位时,由于边界条件不同,两种情况下物体中的应力也就不同。但是,这两种情况下的应力场只在荷载作用部位的附近才有显著的不同,而离开受力点较远地方的应力分布基本相同,影响区的大小大致与外力作用区的大小相当(图 6.1)。这一事实首先被 St.Venant 发现并总结为 St.Venant 原理或局部作用原理,可表述如下:如果作用在弹性体表面某一不大的局部面积上的力系,为作用在同一局部面积上的另一静力等效力系所代替,则荷载的这种重新分布,只在离荷载作用处很近的地方才使应力分布发生显著的变化,在离荷载较远处只有极小的影响。

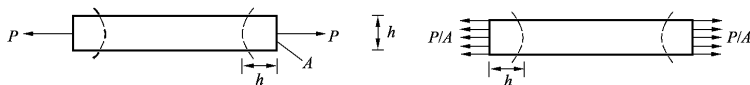


图 6.1 静力等效与局部作用

考虑到零力系与任意平衡力系静力等效且不产生内力,则 St.Venant 原理也可这样陈述:如果物体一小部分边界上作用的面力是平衡力系,那么它就只会使得近处产生显著的应力,而远处的应力可以忽略不计。这可以用钳子夹断金属丝的实例来说明:在施力处附近应力很大,否则金属丝就不会被夹断;而远离施力处的材料单元却不受影响,应力为零。

通常在边界上并不知道荷载的确实分布,而只知道其合力及合力矩。此时,可根据 St.Venant 原理求解问题,实践证明这样得到的解答是符合实际的。

6.3.4 位移单值条件

按应力法求解问题时,对于单连体,只要满足平衡微分方程、协调方程和应力边界条件,应力分量就能完全确定。而对于多连体,满足了上述条件的应力分量表达式中可能还留有待定常数,需要利用位移单值条件(即实际物体中任意一点的位移必定是单值的)加以确定。

位移多值项表示同一点具有不同的位移,这在连续体中是不可能的。因此,位移单值条件要求“位移必须单值”。

习 题

- 6.1 何谓逆解法和半逆解法?采用它们求解弹性力学问题的理论根据是什么?
- 6.2 设有任意形状的物体,在其全部边界(包括孔洞边界)上受有均匀压力 q 。证明在不计体力的情况下, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -q$ 及 $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 是正确的解答。(提示:证明该解答满足平衡方程、协调方程、边界条件、位移单值条件。)

- 6.3 在等截面直杆单向拉伸条件下,材料力学给出的解为

$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

其中 P 为拉力, A 为杆的截面积。试验证该解答满足平衡微分方程、协调方程和边界条件,因而是弹性力学问题的精确解。

- 6.4 在等截面直梁纯弯曲条件下,材料力学给出的解为

$$\sigma_x = -\frac{My}{J}, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

其中 M 为弯矩, J 为截面惯性矩。试验证该解答满足平衡微分方程、协调方程和边界条件,因而是弹性力学问题的精确解。

- 6.5 在应力法中,推导应力满足的协调方程时用到了平衡微分方程。这是否意味着应力只要满足协调方程和边界条件即可?
- 6.6 设无限大平板内有一半径为 a 的小孔,孔边受均布压力 q 作用。试说明远离孔边处的应力分布。

第 7 章

平面问题直角坐标解法

任何结构物都是三维的,荷载和约束条件通常也与三个空间坐标有关。因此,严格说来,弹塑性力学问题都是空间问题。但是,如果结构物具有某种特殊的形状,并且承受某种特殊形式的荷载及约束条件,就可以把空间问题简化为平面问题,从而容易得到解答且能满足精度要求。实际中,很多工程结构都可简化为平面问题,例如水坝、挡土墙、边坡、厚壁圆筒、隧道以及只承受面内荷载的薄板等。

本章首先阐释平面问题的基本概念,然后给出直角坐标系中弹性力学平面问题的基本方程,最后讨论几种典型问题的求解方法。

7.1 基 本 概 念

平面问题是指这样一些问题,结构尺寸及荷载沿某个方向(常取为 z 轴)不变且具有特殊的边界条件,从而结构内部的应力和应变与 z 坐标无关,而只是 x, y 坐标的函数。平面问题分为两种情况,即平面应力问题和平面应变问题。下面首先给出这两种平面问题的严格界定,然后分析各自实现的条件(文献 18)。

7.1.1 平面应力问题

如果在结构内部只存在 xy 平面内的 3 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 而另外 3 个应力分量 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, 则称为平面应力问题。对于各向同性线性弹性介质,根据广义 Hooke 定律,平面应力问题中的 γ_{yz} 和 γ_{zx} 为零,而 ϵ_z 由下式确定

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.1)$$

根据应力、应变与 z 坐标无关的前提条件以及几何方程,不难推知,位移分量 u 和 v 只是 x, y 的函数,而位移分量 w 与 z 线性相关,即

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = f_1(x, y)z + f_2(x, y)$$

此外,在平面应力问题中,变形协调方程变为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7.3)$$

可见,应变分量除满足式(7.2)外,式(7.3)还要求 ϵ_z 为坐标的线性函数,即

$$\epsilon_z = ax + by + c$$

根据上式与式(7.1)可知,要实现平面应力问题,必须满足

$$\sigma_x + \sigma_y = Ax + By + C \quad (7.4)$$

其中 a, b, c 及 A, B, C 均为常数。

通常式(7.4)并不能严格满足,平面应力条件只能近似地实现。最常见的平面应力问题是只承受面内荷载的薄板或梁(图 7.1a):此时平板两面上的 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$,而板很薄,沿厚度方向不可能有很大的应力梯度,即使这些应力分量存在,比起其他应力分量来也很小,故可忽略不计。

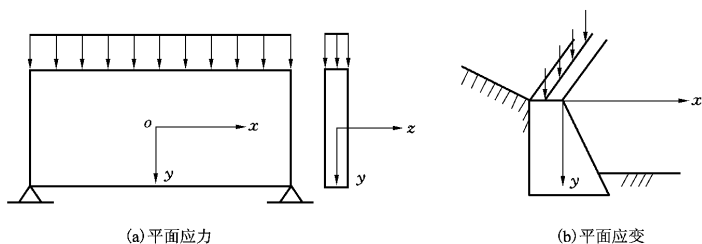


图 7.1 平面问题

7.1.2 平面应变问题

如果在结构内部只存在 xy 平面内的 3 个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$,而另外 3 个应变分量 $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$,则称为平面应变问题。对于各向同性线性弹性介质,根据广义 Hooke 定律,平面应变问题中的 τ_{zx} 和 τ_{zy} 为零,而 σ_z 由下式确定

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.5)$$

根据应力、应变与 z 坐标无关的前提条件以及几何方程,不难推知, u 和 v 只是 x, y 的函数,而 w 为常数。如果刚体位移为零,则有

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0$$

此外,在平面应变问题中,变形协调方程仅剩下式(7.2),因此没有类似平面应力问题中式(7.4)那种限制。显然,只要结构两端固定或施加荷载 $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$,就能保证实现平面应变;如果两端自由,则不能严格实现,除非 $\sigma_x + \sigma_y = 0$ 。但是,当结构物很长时,例如挡土墙(图 7.1b),即使两端自由也可近似地视为平面应变问题。这是由于离开端部较远时,结构物的任一横截面都可以看作对称面,从而有 $w = 0$ 。

以上分析表明,不管是平面应力问题还是平面应变问题,独立的应力分量和应变分量都相同,即 xy 平面内的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$;在求解过程中可以暂时不考虑 ϵ_z 或 σ_z 。

7.2 基本方程

本节给出直角坐标系中弹性力学平面问题的基本方程,它们可以通过对微元体的分析直接建立起来,也可以由空间问题的基本方程简化而得。

7.2.1 平面应力问题

(1) 平衡方程

注意到 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$,空间问题的平衡微分方程(6.1)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

(2) 几何方程

注意到 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ 且不考虑非独立的应变分量 ϵ_z ,空间问题的几何方程(6.2)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

(3) 本构方程

注意到 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$,由广义 Hooke 定律(6.4)可得平面应力条件下的本构方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7.8a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7.8b)$$

(4) 协调方程

在平面应力条件下 ,假设式(7.3)自动满足或近似满足 ,故协调方程只剩下式(7.2) ,即

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7.9)$$

采用应力法求解时 ,需把式(7.9)改用应力分量表示。为此 ,将本构方程(7.8a)代入式(7.9)即可。这样得到的协调方程包含全部 3 个独立的应力分量。为以后求解方便 ,可利用平衡方程将其中的 τ_{xy} 消掉。具体做法是 :将平衡方程的第一式对 x 求导 ,第二式对 y 求导 ,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

将两式相加得

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

将上式代入协调方程 ,化简后得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (7.10)$$

(5) 边界条件

边界条件(6.6)、(6.7)分别简化为

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} &= \bar{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y &= \bar{Y} \end{aligned} \right\} \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (7.11a)$$

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (7.11b)$$

(6) 问题求解

结合 2 个平衡方程(7.6)、1 个协调方程(7.10)以及边界条件(7.11b), 便可求出 3 个应力分量。然后, 可由本构方程求得应变分量, 再由几何方程经积分得到位移分量。

7.2.2 平面应变问题

(1) 本构方程

除本构方程外, 平面应变问题与平面应力问题的其他控制方程均相同。根据广义 Hooke 定律及平面应变问题的上述特点, 不难得到本构方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

容易验证, 只要把平面应力本构方程(7.8)中的 E 换成 $E/(1-\nu^2)$, ν 换成 $\nu/(1-\nu)$ 即可得到平面应变情况下的本构方程(7.12)。

(2) 协调方程

平面应变问题的协调方程可直接从式(7.10)中得出, 即将该式中的 ν 换成 $\nu/(1-\nu)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (7.13)$$

7.2.3 常体力问题

如果体力为常数, 那么两种平面问题的协调方程均简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (7.14a)$$

方程(7.14a)是 Laplace 方程,常写作

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (7.14b)$$

根据以上讨论可知,平衡方程(7.6)和协调方程(7.14)以及边界条件(7.11)中均不含材料常数。这说明两种平面问题的应力分布是相同的,且与材料类型无关。这一结论给模型试验(例如光弹试验等)材料的选择提供了方便,且可用平面应力试验代替平面应变试验。然而,必须指出,应力 σ_x 、应变和位移与材料类型和问题类型有关。

7.3 应力解法

7.3.1 应力函数

(1) 无体力

若无体力作用,平面问题的平衡微分方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

如果假设

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (7.16)$$

则平衡方程(7.15)将自然满足,而协调方程(7.14)成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$$

展开为

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (7.17a)$$

或

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad (7.17b)$$

函数 $\varphi(x, y)$ 称为应力函数,是由 G.B. Airy 于 1862 年引进的,故又称为

Airy 应力函数。由方程(7.17)可知,应力函数为双调和函数。

(2) 常体力

当为常体力时,可以假设

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (7.18)$$

不难验证,上述应力分量满足平衡方程(7.6),而协调方程仍为式(7.17)。

(3) 有势体力

假定体力是有势的,即存在势函数 V ,使得

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (7.19)$$

此时,平衡方程(7.6)可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_x - V)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y - V)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

如果令

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (7.20)$$

则平衡方程可自动满足,将上式代入协调方程(7.10)、(7.13)得

$$\nabla^4 \varphi = -(1-\nu) \nabla^2 V \quad \text{平面应力} \quad (7.21a)$$

$$\nabla^4 \varphi = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 V \quad \text{平面应变} \quad (7.21b)$$

7.3.2 求解方法

在无体力或常体力条件下,求解平面问题归结为寻找应力函数 φ ,使其满足双调和方程(7.17)和给定的应力边界条件(7.11)。具体求解可采用逆解法或半逆解法。

采用逆解法时,先假定满足双调和方程(7.17)的应力函数 φ ;然后利用式(7.18)求出应力分量;再根据应力边界条件来分析所得应力分量对应于什么样的面力;由此判定所选应力函数可以解决什么样的问题。如果采用半逆解法,则针对所求解的问题假定部分或全部应力分量为某种形式的函数,从而导出应力函数,然后使所得应力函数满足协调方程,判定假设的以及由应力函数导出的应力分量是否满足边界条件,如果不满足则重新假定。双调和方程是四阶的,故低

于四次的多项式均为双调和函数。此外,应力分量是二阶的,因此 φ 必须是二次和二次以上,以保证非零应力解。也就是说,在应力函数中增添或除去 x 和 y 的一次式,并不影响应力分量。

如何正确地选择应力函数是本章的难点。初等理论中的一些基本结论会对我们有所帮助。例如,截面正应力主要由弯矩引起,挤压应力主要由挤压荷载引起,剪应力主要由剪力引起。当物体具有无量纲的几何尺寸时(例如楔形体、半无限体),可以采用量纲分析法选择应力函数。

在根据边界条件确定待定常数时,主要边界(占全部边界的绝大部分或影响遍及整个物体)上的边界条件必须精确满足,而当次要边界上的边界条件不能精确满足时,可引用 St. Venant 原理,使其近似满足。

7.4 典型例解

7.4.1 简支梁受均布荷载

设有矩形截面简支梁(图 7.2),梁长 $2l$,深 h ,顶面作用均布荷载 q 。为方便起见,取单位宽度的梁来考虑且不计体力。

(1) 应力函数与应力分量

挤压应力 σ_y 主要由荷载 q 引起,而 q 与 x 无关,故可假设 σ_y 与 x 无关,即

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(y)$$

积分得

$$\varphi = \frac{x^2}{2} f(y) + x f_1(y) + f_2(y) \quad (a)$$

将式(a)代入协调方程,得

$$\frac{x^2}{2} \frac{d^4 f}{dy^4} + x \frac{d^4 f_1}{dy^4} + \frac{d^4 f_2}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

上式对任何 x 值都成立,故 x 的各次幂的系数必须均为零,即

$$\frac{d^4 f}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_1}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$$

求解上述微分方程,得

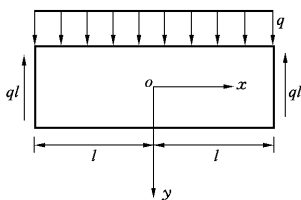


图 7.2 简支梁

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ f_1(y) &= Ey^3 + Fy^2 + Gy + R \\ f_2(y) &= -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2 + Ly + N \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(b)代回式(a),并略去线性项得 φ ,再由式(7.16)计算出应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{x^2}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K \\ \sigma_y &= Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ \tau_{xy} &= -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在根据边界条件确定待定常数以前,先考虑对称性常可使问题得到简化。如果结构和荷载均对称于某坐标轴例如 y 轴,则正应力是坐标 x 的偶函数,而剪应力是 x 的奇函数;如果结构对称而荷载反对称,则正应力是奇函数,剪应力是偶函数。显然,在我们的问题中, σ_x 和 σ_y 应当是 x 的偶函数,而 τ_{xy} 则是 x 的奇函数。于是,有

$$E = F = G = 0 \quad (d)$$

现考虑梁的顶面和底面上的边界条件,即

$$\sigma_y|_{y=h/2} = 0, \quad \sigma_y|_{y=-h/2} = -q, \quad \tau_{xy}|_{y=\pm h/2} = 0 \quad (e)$$

将式(c)代入式(e)得

$$A = -\frac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3q}{2h}, \quad D = -\frac{q}{2}$$

再代回式(c)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K \\ \sigma_y &= -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

再考虑两端的边界条件。由于两端没有水平面力,故 σ_x 不可能得到精确满足,除非 $q=0$ 。这样,我们只能应用 St. Venant 原理,令其合力、合力矩满足要求,即

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy = -ql$$

把式(f)代入,可解得

$$K=0, \quad H=\frac{ql^3}{h^3}-\frac{q}{10h} \quad (g)$$

将式(g)代回式(f),得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y + q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2 \\ \tau_{xy} &= -\frac{6q}{h^3}x \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

注意到

$$\left. \begin{aligned} b &= 1, \quad J = \frac{1 \times h^3}{12}, \quad S = \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \\ Q &= -ql + q(l-x) = -qx \\ M &= ql(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2 = \frac{q}{2}(l^2-x^2) \end{aligned} \right\}$$

式(7.22)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{My}{J} + q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{2y}{h} \right)^2 \\ \tau_{xy} &= \frac{QS}{bJ} \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

在 σ_x 的表达式中,第一项与材料力学的解答相同,第二项则是弹性力学提出的修正项。对于通常的浅梁,修正项很小,可以忽略不计。对于较深的梁,则应考虑修正项。 σ_y 为梁纤维的挤压应力,在材料力学中通常不予考虑。 τ_{xy} 与材料力学解答完全一样。

(2)位移与挠度

将应力分量(7.22)代入本构方程(7.8)得到应变分量,再将应变分量代入几何方程(7.7)得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{2EJ} \left[(l^2-x^2)y + \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{h^2}{10}y \right) + \nu \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2}{4}y + \frac{1}{3}y^3 \right) \right] \quad (a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{q}{2EJ} \left\{ \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2}{4}y + \frac{1}{3}y^3 \right) - \nu \left[(l^2-x^2)y + \left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{h^2}{10}y \right) \right] \right\} \quad (b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{qx}{2GJ} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (c)$$

积分式(a)、(b)得

$$u = \frac{q}{2EJ} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{h^2}{10} y \right) x + \nu \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2}{4} y + \frac{1}{3} y^3 \right) x \right] + f_1(y) \quad (d)$$

$$v = -\frac{q}{2EJ} \left\{ \left(\frac{h^3}{12} y - \frac{h^2}{8} y^2 + \frac{1}{12} y^4 \right) - \nu \left[\left(l^2 - x^2 \right) \frac{1}{2} y^2 + \left(\frac{1}{6} y^4 - \frac{h^2}{20} y^2 \right) \right] \right\} + f_2(x) \quad (e)$$

注意到问题的对称性 跨中截面上的位移 u 必定为零, 即 $u|_{x=0}=0$ 。将式(d)代入可得 $f_1(y)=0$ 。梁轴上各点的竖向位移就是挠度 δ , 即 $v|_{y=0}=f_2(x)=\delta$ 。将式(d)、(e)代入式(c)得

$$\frac{d\delta(x)}{dx} + \frac{q}{2EJ} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + h^2 \left(\frac{2}{5} + \frac{\nu}{4} \right) x \right] = 0$$

积分得

$$\delta(x) = -\frac{q}{2EJ} \left[\left(\frac{l^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{12} \right) + h^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{\nu}{8} \right) x^2 \right] + C \quad (f)$$

其中待定常数 C 显然是跨中挠度, 即最大挠度 $\delta_{\max}$ 。将式(f)代入下列简支梁的边界条件 $\delta|_{x=\pm l}=0$, 可得

$$\delta_{\max} = \frac{5ql^4}{24EJ} + \frac{ql^2 h^2}{2EJ} \left(\frac{1}{5} + \frac{\nu}{8} \right) \quad (7.24)$$

其中第一项与材料力学解答相同, 第二项为弹性力学的修正项。

7.4.2 楔形体受重力和水压力

设有楔形体如图 7.3 所示, 下端无限伸展, 承受重力和水压力。楔形体和水的密度分别为 ρ 和 ρ_w 。楔形体具有无量纲几何尺度 α , 可考虑采用量纲分析法确定应力函数。应力分量由重力和水压力引起, 它们应当与 ρg 和 $\rho_w g y$ 成比例。应力的量纲是 [力] [长度]⁻², 而 ρg 和 $\rho_w g y$ 的量纲分别为 [力] [长度]⁻³ 和 [力] [长度]⁻²。因此, 如果应力分量具有多项式形式的解答, 那么它们的表达式只可能是 $A\rho g x$, $B\rho g y$ 和 $C\rho_w g y$ 的组合。也就是说, 各应力分量只可能是 x 和 y 的纯一次式, 而应力函数应该是 x 和 y 的纯三次式。故假设

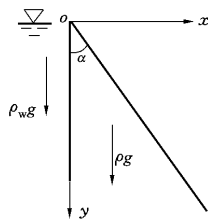


图 7.3 楔形体

$$\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

本题中体力分量为 $X=0, Y=\rho g$ 根据式(7.18)有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx = 2cx + 6dy \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy = 6ax + 2by - \rho gy \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这些应力分量已满足平衡方程和协调方程。现根据边界条件确定其中的待定常数。在 $x=0$ 处, 应力边界条件为

$$\sigma_x|_{x=0} = -\rho_w g y, \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0$$

将式(a)代入, 得 $d = -\rho_w g/6, c=0$, 再将其代入式(a)得

$$\sigma_x = -\rho_w g y, \quad \sigma_y = 6ax + 2by - \rho gy, \quad \tau_{xy} = -2bx \quad (b)$$

在 $x = y \tan \alpha$ 上, $\bar{X} = \bar{Y} = 0, l = \cos \alpha, m = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, 将它们及应力分量(b)代入边界条件(7.11), 得

$$b = \frac{\rho_w g}{2} \cot^2 \alpha, \quad a = \frac{\rho g}{6} \cot \alpha - \frac{\rho_w g}{3} \cot^3 \alpha$$

代入式(b), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_w g y \\ \sigma_y &= (\rho g \cot \alpha - 2\rho_w g \cot^3 \alpha)x + (\rho_w g \cot^2 \alpha - \rho g)y \\ \tau_{xy} &= -\rho_w g x \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

习 题

7.1 试推导平面问题主应力计算公式, 并确定其主方向(设大主应力方向与 x 轴的夹角为 φ)。

答案: $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$

7.2 根据广义 Hooke 定律的一般形式, 推导平面应力问题和平面应变问题的相应表达式。

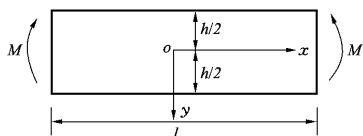
7.3 在不计体力的情况下, 试分析下列应力函数能解决什么问题:

(1) $\varphi = ax^2$ (2) $\varphi = bxy$ (3) $\varphi = cy^2$ (4) $\varphi = dy^3$

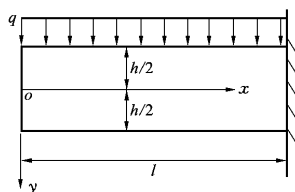
其中 a, b, c, d 是常数。

- 7.4 设矩形截面梁长 l 、深 h ，两端受相反的力偶作用而发生纯弯曲，体力可以不计。为了方便，取单位宽度的梁来考虑， M 为单位宽度上的弯矩，其量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]/[\text{长度}]$ 。试求应力分量（提示：可假设 $\sigma_y = 0$ 或直接根据应力函数 $\varphi = \alpha y^3$ 求解）。

答案： $\sigma_x = \frac{My}{J}$ ， $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ，其中 $J = \frac{1 \times h^3}{12}$ 为截面惯性矩。



题 7.4 图



题 7.5 图

- 7.5 设悬臂梁长 l 、深 h ，顶面作用均布荷载 q 。不计体力，并考虑单位宽度的梁。试求应力分量（提示：可假设 $\sigma_y = f(y)$ ）。

$$\text{答案：}\sigma_x = -\frac{qx^2y}{2J} + \frac{q}{2J}\left(\frac{2y^3}{3} - \frac{h^2y}{10}\right),$$

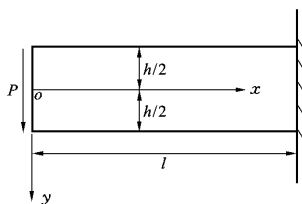
$$\sigma_y = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{3y}{h} + \frac{4y^3}{h^3}\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2J}\left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)x.$$

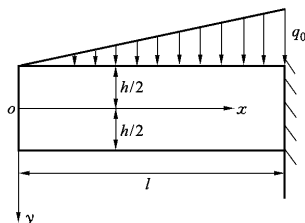
- 7.6 设悬臂梁长 l 、深 h ，左端作用分布荷载，其合力为 P 。不计体力，并考虑单位宽度的梁。试求应力分量和挠度方程。

$$\text{答案：}\sigma_x = -\frac{12P}{h^3}xy = \frac{M}{J}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{2h} + \frac{6P}{h^3}y^2,$$

$$v(x, 0) = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ}.$$



题 7.6 图



题 7.7 图

7.7 设悬臂梁长 l 、深 h ，顶面作用三角形分布荷载，右端最大强度为 q_0 。不计体力，并考虑单位宽度的梁。试求应力分量(提示：可假设 $\sigma_y = xf(y)$)。

7.8 设有矩形截面的竖柱，密度为 ρ ，一侧受均布剪力 q 。试求应力分量(提示：可假设 $\sigma_x = 0$)。

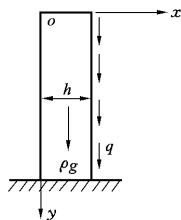
答案： $\sigma_x = 0$ ， $\sigma_y = 2q \frac{y}{h} \left(1 - 3 \frac{x}{h}\right) - \rho g y$ ， $\tau_{xy} = q \frac{x}{h} \left(3 \frac{x}{h} - 2\right)$ 。

7.9 设挡水墙的密度为 ρ ，厚度为 h ，水的密度为 ρ_w 。试求应力分量(提示：可假设 $\sigma_y = xf(y)$)。

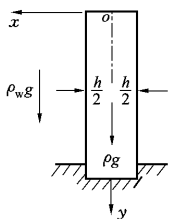
答案： $\sigma_x = \frac{2\rho_w g}{h^3} x^3 y + \frac{3\rho_w g}{5h} xy - \frac{4\rho_w g}{h^3} xy^3 - \rho g x$ 。

7.10 设三角形悬臂梁只受重力作用，梁的密度为 ρ ，试用纯三次式应力函数求解梁的应力分量。

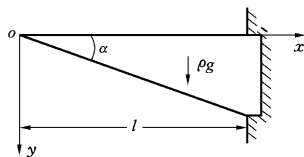
答案： $\sigma_x = \rho g x \cot \alpha - 2\rho g y \cot^2 \alpha$ ， $\sigma_y = -\rho g y$ ， $\tau_{xy} = -\rho g y \cot \alpha$ 。



题 7.8 图



题 7.9 图



题 7.10 图

平面问题极坐标解法

在弹性力学平面问题的求解中 ,对于圆形、环形、楔形、扇形等具有曲线边界的结构 ,例如厚壁圆筒、带圆孔的薄板、楔形体、隧道等 ,用极坐标系比直角坐标系方便得多。

本章首先推导平面问题在极坐标系下的基本方程并将协调方程和应力分量转换为极坐标形式 ,然后讨论轴对称问题的普遍解答 ,最后分析某些典型问题的极坐标解法。

8.1 基本方程

8.1.1 极坐标系

极坐标系由径向坐标轴 r 和环向坐标轴 θ (图 8.1 所示为正向)构成。平面内任一点 P 的位置用 r 坐标和 θ 坐标来表示 ,点 P 的极坐标 (r, θ) 与其直角坐标 (x, y) 间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2, & \theta &= \tan^{-1}(y/x) \end{aligned} \right\}$$

(8.1)

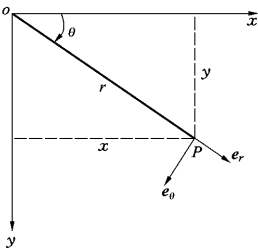


图 8.1 极坐标系

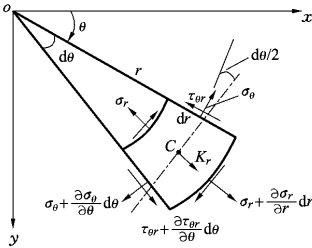


图 8.2 微元体受力分析

8.1.2 平衡方程

径向正应力、环向或切向正应力及剪应力分别用 σ_r 、 σ_θ 、 $\tau_{\theta r}$ 和 $\tau_{r\theta}$ 来表示。从受力物体中取出微元体如图 8.2 所示, 图中所标应力方向均为正向(只写出了与径向平衡有关的应力分量和体力分量)。将微元体上的所有力投影到过微元体形心 C 的径向轴上得

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right)dr \sin \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta\right)dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{\theta r} dr \cos \frac{d\theta}{2} + K_r r d\theta dr = 0$$

由于 $d\theta$ 是微量, 故可取 $\sin(d\theta/2) \approx d\theta/2$, $\cos(d\theta/2) \approx 1$ 。于是, 上式简化为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0 \quad (a)$$

同理, 将微元体上的所有力向过 C 点的环向轴上投影可得环向平衡微分方程, 即

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} + K_\theta = 0 \quad (b)$$

如果列出该微元体的力矩平衡方程, 将得到剪应力互等关系

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} \quad (c)$$

于是, 考虑到式(c), 平衡方程式(a)和(b)可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

其中, K_r 、 K_θ 分别为 r 、 θ 方向的体力分量。

8.1.3 几何方程

极坐标系中的几何方程可以通过微元变形分析直接推导, 也可以采用坐标变换的方法得到。这里仅介绍第二种方法。根据直角坐标与极坐标之间的关系, 有

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

注意到

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$$

可求得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (\text{a})$$

根据张量坐标变换公式,直角坐标系与极坐标系下的应变分量之间具有如下关系

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r & \gamma_{r\theta}/2 \\ \gamma_{r\theta}/2 & \epsilon_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\epsilon_x = \cos^2 \theta \epsilon_r + \sin^2 \theta \epsilon_\theta - \sin \theta \cos \theta \gamma_{r\theta} \quad (\text{b})$$

将式(a)与式(b)对比,可知

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

8.1.4 本构方程

极坐标系和直角坐标系一样,也是正交坐标系,两种情况下的本构方程具有相同的形式。在平面应力情况下,本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.4a)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) \\ \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (8.4b)$$

在平面应变情况下, 只须将上式中的 E 换为 $E/(1-\nu^2)$, ν 换为 $\nu/(1-\nu)$ 即可。

8.1.5 协调方程

应力函数的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\end{aligned}$$

对其再求导可得

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \\ \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (8.5) \\ -\tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ &= \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right)\end{aligned}$$

前两式相加得

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi \quad (8.6)$$

于是, 协调方程具有下列形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (8.7a)$$

或

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \varphi = 0 \quad (8.7b)$$

8.1.6 应力分量

根据应力坐标变换公式,极坐标系与直角坐标系下的应力分量之间具有如下关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

经运算得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

将式(8.5)代入上式,可得极坐标系下应力分量与应力函数之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

此外,注意到方向余弦矩阵的正交性,有

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

从而

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta - 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin\theta \cos\theta + \tau_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

将式(8.5)与式(8.10)对比,同样可得式(8.9)。

8.2 轴对称问题

8.2.1 普遍解答

当物体的几何形状及荷载都与环向坐标 θ 无关时,称为平面轴对称问题。

此时的应力函数与 θ 无关,只是径向坐标 r 的函数,即 $\varphi = \varphi(r)$ 。将其代入应力公式(8.9),得

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (8.11)$$

协调方程(8.7)简化为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (8.12)$$

令

$$\varphi = r^\lambda = e^{\lambda t}$$

代入式(8.12),可得该微分方程的特征方程

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + \lambda = 0$$

其解为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 2$$

故协调方程的通解为

$$\varphi = At + Be^{2t}t + Ce^{2t} + D$$

其中 A, B, C, D 是待定常数。注意到 $t = \ln r, r = e^t$, 上式成为

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \quad (a)$$

将式(a)代入(8.11)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A/r^2 + B(1+2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= -A/r^2 + B(3+2\ln r) + 2C \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

对于平面应力问题,将应力分量(8.13)代入本构方程(8.4)得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \frac{A}{r^2} + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)B \ln r + 2(1-\nu)C \right] \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[-(1+\nu) \frac{A}{r^2} + (3-\nu)B + 2(1-\nu)B \ln r + 2(1-\nu)C \right] \\ \gamma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将上式代入几何方程(8.3)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \frac{A}{r^2} + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)B \ln r + 2(1-\nu)C \right] \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} \left[-(1+\nu) \frac{A}{r^2} + (3-\nu)B + 2(1-\nu)B \ln r + 2(1-\nu)C \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

第一式积分得

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1+\nu) \frac{A}{r} + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Br(\ln r - 1) + 2(1-\nu)Cr \right] + f(\theta) \quad (\text{d})$$

将上式代入(c)中的第二式得

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

积分得

$$u_\theta = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad (\text{e})$$

将式(d)和(e)代入式(c)的第三式,得

$$\frac{1}{r} \frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{df_1(r)}{dr} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{f_1(r)}{r} = 0$$

将上式分离变量改写成

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta = f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr}$$

等式两边分别为 θ, r 的函数,于是有

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta) d\theta = F \quad (\text{f})$$

$$f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr} = F \quad (\text{g})$$

其中 F 为常数。式(g)的解答为

$$f_1(r) = Hr + F \quad (\text{h})$$

式(f)对 θ 求导得

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0$$

其解答为

$$f(\theta) = I \cos \theta + K \sin \theta \quad (\text{i})$$

从而

$$\int f(\theta) d\theta = F - \frac{df(\theta)}{d\theta} = F + I \sin \theta - K \cos \theta \quad (\text{j})$$

将式(h) ,(i) ,(j)代入式(d) ,(e) ,可得位移分量

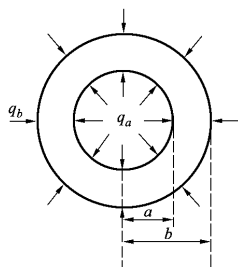
$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E} \left[-(1+\nu) \frac{A}{r} + 2(1-\nu)Br(\ln r - 1) + (1-3\nu)Br + 2(1-\nu)Cr \right] \\ &\quad + I \cos \theta + K \sin \theta \\ u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E} + Hr - I \sin \theta + K \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

其中 A, B, C, H, I, K 是待定常数。不难验证 I, K 分别代表 x, y 方向的刚体平移, H 代表刚体转动。

将式(8.14)中的 E 换成 $E/(1-\nu^2)$, ν 换成 $\nu/(1-\nu)$, 便可得到平面应变情况下的位移分量。

8.2.2 受压圆筒

设厚壁圆筒(圆环问题与此相同)的内半径为 a 外半径为 b , 受均布内压力 q_a 和外压力 q_b (图 8.3)。显然, 应力分布是轴对称的, 故为式(8.13), 其中待定常数由下述边界条件确定



$$\sigma_r|_{r=a} = -q_a, \quad \sigma_r|_{r=b} = -q_b \quad (a)$$

将应力分量代入上式

图 8.3 圆筒或圆环

$$\left. \begin{aligned} A/a^2 + B(1+2\ln a) + 2C &= -q_a \\ A/b^2 + B(1+2\ln b) + 2C &= -q_b \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式(b)仅 2 个方程 3 个未知数, 无法确定待定常数。这是因为圆筒为多连体, 需要借助位移单值条件来确定常数。显然, 式(8.14)中的 $4Br\theta/E$ 是多值项, 例如 (r, θ) 与 $(r, \theta+2\pi)$ 是同一点, 却有不同的环向位移。位移应该是单值的, 故必有 $B=0$ 。于是, 可解得

$$A = \frac{a^2 b^2 (q_b - q_a)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{a^2 q_a - b^2 q_b}{b^2 - a^2}$$

代入式(8.13), 可得 Lamé 公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) q_a - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) q_b \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) q_a - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) q_b \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

如果只有内压 q_a ,且为无限大弹性体即 $b \rightarrow \infty$,则解答(8.15)简化为

$$\sigma_r = -\frac{a^2}{r^2} q_a, \quad \sigma_\theta = \frac{a^2}{r^2} q_a \quad (8.16)$$

可见 ,物体内部应力与 r^2 成反比。当 r 远大于 a 时 ,应力很小乃至可忽略不计。

8.2.3 压力隧洞

如果把压力隧洞或坝内水管视为埋在无限大弹性体中的圆筒 ,则当其承受均布内压 q 且不计体力时 ,问题是轴对称的 (图 8.4)。设圆筒材料和周围介质具有不同的弹性常数 ,则应力表达式分别为

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C \quad \text{圆筒 (a)}$$

$$\sigma'_r = \frac{A'}{r^2} + 2C', \quad \sigma'_\theta = -\frac{A'}{r^2} + 2C' \quad \text{围介 (b)}$$

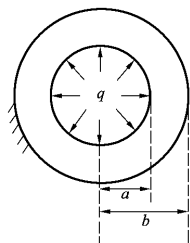


图 8.4 压力隧洞

圆筒内壁边界条件

$$\sigma_r|_{r=a} = -q \quad \text{即} \quad \frac{A}{a^2} + 2C = -q \quad (c)$$

根据 St. Venant 原理 ,距圆筒很远的远场应力应为零 ,即

$$\sigma'_r|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \sigma'_\theta|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{从而} \quad 2C' = 0 \quad (d)$$

在圆筒与周围介质的接触面上 ,应力相等

$$\sigma_r|_{r=b} = \sigma'_r|_{r=b} \quad \text{即} \quad \frac{A}{b^2} + 2C = \frac{A'}{b^2} + 2C' \quad (e)$$

接触面上的位移相等 ,即

$$u_r|_{r=b} = u'_r|_{r=b} \quad (f)$$

注意到平面应变问题且 $B=0$,在式(8.14)的第一式中用 $E/(1-\nu^2)$, $\nu/(1-\nu)$ 分别代替 E , ν ,可得

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left[2(1-2\nu)Cr - \frac{A}{r} \right] + I \cos \theta + K \sin \theta \quad (g)$$

其中 E , ν 为圆筒材料的弹性常数。设 E' , ν' 为周围介质的弹性常数。将式(g)代入(f)得

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E} \left[2(1-2\nu)Cb - \frac{A}{b} \right] + I \cos \theta + K \sin \theta \\ &= \frac{1+\nu'}{E'} \left[2(1-2\nu')C'b - \frac{A'}{b} \right] + I' \cos \theta + K' \sin \theta \end{aligned}$$

由于上式在 θ 取任何值时都应当成立, 故有

$$\frac{1+\nu}{E} \left[2(1-2\nu)Cb - \frac{A}{b} \right] = \frac{1+\nu'}{E'} \left[2(1-2\nu')C'b - \frac{A'}{b} \right] \quad (\text{h})$$

由方程(c) ,(d) ,(e) ,(h)求出待定常数后代入(a) ,(b) ,得到圆筒和周围介质的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q \frac{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{r^2} - (1-n)}{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)} \\ \sigma_\theta &= q \frac{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{r^2} + (1-n)}{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)} \\ \sigma'_r &= -q \frac{2(1-\nu)n \frac{b^2}{r^2}}{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)} \\ \sigma'_\theta &= q \frac{2(1-\nu)n \frac{b^2}{r^2}}{[1 + (1-2\nu)n] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)} \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

其中

$$n = \frac{E'(1+\nu)}{E(1+\nu')} \quad (8.18)$$

8.3 圆孔应力集中

8.3.1 四边均匀受拉

设有带小圆孔的矩形薄板(长柱问题与此相同), 四边受均布拉力 q (图 8.5)。在离开小圆孔很远处切出与其同心的大圆边界, 即大圆半径 $b \gg a$ 。根据 St. Venant 原理, 可以证明大圆周处的应力与无孔时的近似相等, 从而

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{在 } r = b \text{ 处}$$

代入式(8.8),有

$$\sigma_r|_{r=b} = q, \quad \tau_{r\theta}|_{r=b} = 0$$

这样,带小圆孔矩形薄板四边均匀受拉的问题,被转换为内半径为 a 、外半径为 b 的圆环在外边界上受均布拉力的问题。在式(8.15)中,令 $q_a = 0, q_b = -q, a/b = 0$, 得

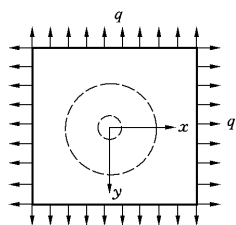


图 8.5 均匀受拉的圆孔板

$$\sigma_r = q \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = q \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (8.19)$$

可见,当 $r = a$ 时, $\sigma_\theta = 2q$, 即孔边应力大于无孔时的应力。这种现象称为孔边应力集中。

8.3.2 两边受拉两边受压

设有带小圆孔的矩形薄板(长柱问题与此相同),左右两边受拉、上下两边受压(图 8.6)。进行与上面相似的处理,问题转变为在大圆($b \gg a$)边界处受下述面力作用的圆环问题

$$\sigma_r|_{r=b} = q \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}|_{r=b} = -q \sin 2\theta \quad (a)$$

考虑到

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

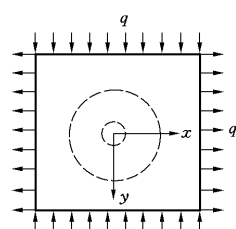


图 8.6 两边受拉两边受压的圆孔板

及边界条件,可设应力函数为

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta \quad (b)$$

这实际上是把应力在边界上的分布规律推广到域内。作这种推广时,边界必须是坐标线,例如此处 $r = \text{常数}$ 。将式(b)代入协调方程(8.7),得

$$\frac{d^4 f(r)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f(r)}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df(r)}{dr} = 0$$

该微分方程的特征方程为

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 9\lambda(\lambda-1) + 9\lambda = 0$$

其解为

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = -2$$

故协调方程的通解为

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2}$$

代入式(b)得

$$\varphi = \cos 2\theta \left(Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2} \right)$$

根据式(8.9),求得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\cos 2\theta \left(2B + \frac{4C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} \right) \\ \sigma_\theta &= \cos 2\theta \left(12Ar^2 + 2B + \frac{6D}{r^4} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \sin 2\theta \left(6Ar^2 + 2B - \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将其代入式(a)及小圆孔处应力为零的边界条件,解出常数并令 $a/b = 0$,得

$$A = 0, \quad B = -\frac{q}{2}, \quad C = qa^2, \quad D = -\frac{qa^4}{2}$$

代入式(c)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q \cos 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= -q \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \\ \tau_{r\theta} &= -q \sin 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

沿 y 轴($\theta = 90^\circ$)最大环向正应力在孔边,即 $r = a$, $\sigma_\theta = 4q$,随着远离孔边应力急剧趋近于 q 。例如,当 $r = 3a$ 时 $\sigma_\theta = 1.04q$ 。

8.3.3 其他受力情况

当带有小圆孔的矩形薄板受到其他形式的荷载作用时,可以利用上述两种解答和叠加原理来求解。例如,双向不等值均匀受拉时(图 8.7),可变换为四边均匀受拉 q' 与两边受拉两边受压 q'' 之和,即

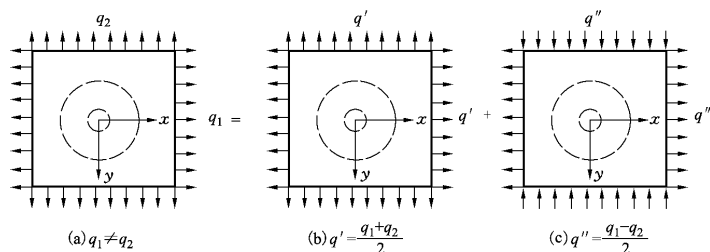


图 8.7 两边不等值均匀受拉的圆孔板

再利用式(8.19) (8.20) ,不难得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{q_1 - q_2}{2} \cos 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{q_1 + q_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{q_1 - q_2}{2} \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{q_1 - q_2}{2} \sin 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

8.4 楔形体和半无限体

8.4.1 楔形体顶端作用线荷载

设有楔形体,边界上受有与边界法线成 β 角的线荷载 P (图 8.8),其量纲为[力][长度] $^{-1}$ 。问题属于平面应变情况,取单位厚度来研究。

楔形体内任一点的应力决定于 $\alpha, \beta, P, r, \theta$, 因而应力分量的表达式中只会包含有这几个量,且只可能取 P/r 的形式。应力函数 φ 中 r 的幂次比应力分量中的高两次,故可设

$$\varphi = r f(\theta)$$

将其代入协调方程(8.7),得

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = 0$$

解该方程,得

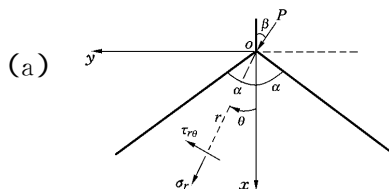


图 8.8 楔形体线荷载

$$f(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \theta (C \cos \theta + D \sin \theta) \quad (b)$$

代入式(a), 并注意到 $A r \cos \theta + B r \sin \theta = A x + B y$ 不影响应力, 故有

$$\varphi = r \theta (C \cos \theta + D \sin \theta)$$

将应力函数代入式(8.9), 得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{2}{r} (D \cos \theta - C \sin \theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

应力边界条件为

$$\sigma_\theta |_{\theta = \pm \alpha, r \neq 0} = 0, \quad \tau_{r\theta} |_{\theta = \pm \alpha, r \neq 0} = 0$$

这些条件自动满足。在集中力作用处, 边界条件转化为平衡条件, 这是一种对应力的放松边界条件。这里, 对以坐标原点为圆心的任何一个半圆形截面来说, 其上的应力应该与荷载 P 相平衡, 即

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r d\theta \cos \theta + P \cos \beta = 0$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r d\theta \sin \theta + P \sin \beta = 0$$

将应力分量代入上式, 积分后得

$$D(2\alpha + \sin 2\alpha) + P \cos \beta = 0, \quad C(-2\alpha + \sin 2\alpha) + P \sin \beta = 0$$

由此得

$$D = -\frac{P \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad C = \frac{P \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

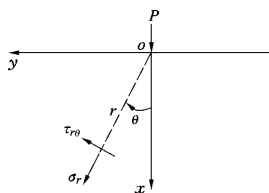
代入式(c), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{r} \left(\frac{\cos \beta \cos \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin \beta \sin \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

8.4.2 半无限体表面作用线荷载

当 $\alpha = \pi/2$ 时 楔形体成为半无限弹性体。根据式(8.22) 其应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi r}(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta) \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



当 $\alpha = \pi/2$ 且荷载 P 垂直表面时 $\beta=0$ (图 8.9) , 应力分量为

图 8.9 半无限体线荷载

$$\sigma_r = -\frac{2P\cos\theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (8.23)$$

将其代入应力坐标变换式(8.10) ,可求得直角坐标系中的应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta = -\frac{2P\cos^3\theta}{\pi r} \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta = -\frac{2P\sin^2\theta\cos\theta}{\pi r} \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin\theta\cos\theta = -\frac{2P\sin\theta\cos^2\theta}{\pi r} \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

若把上式中的坐标换成直角坐标 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

8.4.3 半无限体表面作用分布荷载

当半无限体表面作用条形分布荷载时 , 可采用线荷载公式通过积分求得解答(图 8.10)。在 y 轴上距坐标原点为 ξ 处取微段 $d\xi$,其上作用力 $dP = qd\xi$ 可看作线荷载。根据式(8.25) ,该线荷载在任意点 M 处引起的应力为

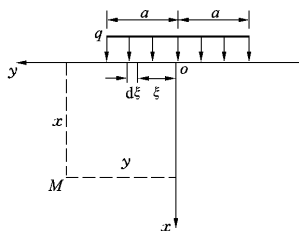


图 8.10

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_x &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^3}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ d\sigma_y &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x(y - \xi)^2}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ d\tau_{xy} &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^2(y - \xi)}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\}$$

整个分布荷载在 M 处引起的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{qx^3 d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{qx(y - \xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{qx^2(y - \xi) d\xi}{[x^2 + (y - \xi)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

若作用均布荷载(图 8.11), 并采用极坐标应力式(8.24)积分, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) + (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)] \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2\pi} [2(\theta_2 - \theta_1) - (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)] \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

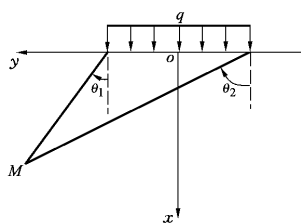


图 8.11 均布荷载

习 题

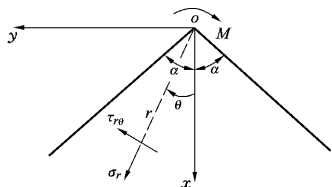
8.1 试证明下式代表刚体位移

$$\left. \begin{aligned} u_r &= I \cos \theta + K \sin \theta \\ u_\theta &= Hr + K \cos \theta - I \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

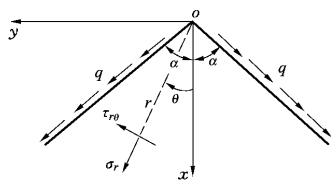
其中 I, K 分别与 x, y 方向的刚体移动有关, 而 H 与绕 z 轴的刚体转动有关。

8.2 设在楔形体顶端作用线力偶, 单位长度上力偶矩为 M 。试求应力分量。

$$\text{答案: } \begin{cases} \sigma_r = \frac{2M \sin 2\theta}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{M(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) r^2} \end{cases}。$$



题 8.2 图



题 8.3 图

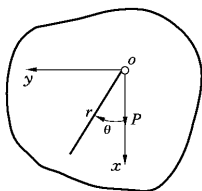
8.3 设在楔形体两侧面上作用均布剪力 q 。试求应力分量。

$$\text{答案: } \begin{cases} \sigma_r = -q \left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\alpha} + \cot 2\alpha \right) \\ \sigma_\theta = q \left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\alpha} - \cot 2\alpha \right) \\ \tau_{r\theta} = q \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha} \end{cases}。$$

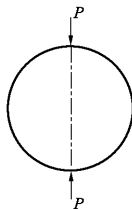
8.4 设无限大薄板, 在板内小孔中作用集中力 P 。试用下述应力函数求解该问题 (提示: 需考虑位移单值条件)。

$$\varphi = A r \ln r \cos \theta + B r \theta \sin \theta$$

$$\text{答案: } \sigma_r = -\frac{(3+\nu)P \cos \theta}{4\pi r}, \quad \sigma_\theta = \frac{(1-\nu)P \cos \theta}{4\pi r}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{(1-\nu)P \sin \theta}{4\pi r}。$$



题 8.4 图



题 8.5 图

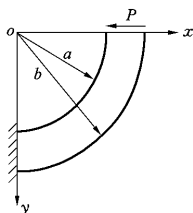
8.5 设圆柱体对心受压, 线荷载为 P 。试求铅直直径截面上的正应力 (提示: 利用式(8.23) 将其中的 r 用圆柱直径 d 表示)。

$$\text{答案: } \sigma = \frac{2P}{\pi d}。$$

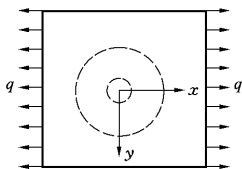
8.6 试推导式(8.27),并求大小主应力及大主应力的方向(提示:在 y 轴上荷载范围内,任一点处取微段 dy ,其上作用的合力可以视为线荷载且有 $pdy = prd\theta / \cos\theta$)。

8.7 设曲梁受集中力 P 作用,试求应力分量(提示:截面正应力主要取决于弯矩,而题中弯矩与 $\sin\theta$ 成正比)。

$$\text{答案: } \begin{cases} \sigma_r = \frac{P}{N} \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin\theta \\ \sigma_\theta = \frac{P}{N} \left(3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \sin\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right) \cos\theta \end{cases} \quad N = (a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}.$$



题 8.7 图



题 8.8 图

8.8 带有小圆孔的大板左右两边均匀受拉。试求应力分量,并讨论孔边应力集中和远场应力。

$$\text{答案: } \begin{cases} \sigma_r = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{q}{2} \cos 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{q}{2} \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \\ \tau_{r\theta} = -\frac{q}{2} \sin 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

沿 y 轴 ($\theta = 90^\circ$) 最大环向正应力在孔边,即 $r = a$ $\sigma_\theta = 3q$ 随着远离孔边应力急剧趋近于 q 。例如,当 $r = 3a$ 时 $\sigma_\theta = 1.07q$ 。

8.9 在带小圆孔的矩形薄板四边受均布拉力 q 作用(图 8.5)的问题中,证明大圆周处的应力与无孔时的近似相等。(提示:先考虑无孔时的薄板应力状态,然后考虑在板内切除半径为 a 的小圆孔、在离开小圆孔很远处切出与其同心的大圆边界时的应力状态,最后在小圆孔处应用 St. Venant 原理)

第 9 章

平面问题复变函数解法 *

弹性力学问题常归结为:在给定边界条件下,寻找调和函数或双调和函数,例如常体力平面问题。复变函数理论正是研究解析函数(其实部和虚部都是调和函数)的数学分支,因此在求解弹性力学问题中得到了应用,特别是在求解复杂孔口或裂纹尖端应力集中等问题上,保角变换解法显示出巨大的优越性。事实上,那些复杂问题如果不用复变函数解法,则根本无法求得其解析解。

本章首先介绍平面问题复变函数解法的基本原理,然后给出一些典型问题的重要解答。

9.1 平面问题的复格式

9.1.1 直角坐标与复变量

为了利用复变函数求解问题,首先需要把平面问题的控制方程、边界条件以及应力和位移等改写成复变函数形式,即转换成复格式。为此,把物体所在的物理平面 xy 看作复平面(图 9.1),引入复自变量

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (9.1)$$

于是,坐标 x 和 y 可以等价地用复变量 z 及其共轭 $\bar{z}$ 来代替。根据式(9.1),有

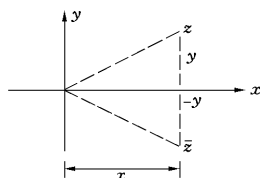


图 9.1 复平面

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

从式(9.2)可推导出

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (9.4)$$

由于 x 和 y 可看作 z 和 $\bar{z}$ 的函数,故应力、位移以及应力函数等也可形式地看作 z 和 $\bar{z}$ 的函数。

9.1.2 应力函数与复势

在不计体力或常体力时,平面问题的应力函数 U (以前用的应力函数 φ 在本章中另有它用)满足双调和方程,即

$$\nabla^4 U = 0 \quad (9.5)$$

根据式(9.4),式(9.5)可写成

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\nabla^2 U) = 0$$

上式积分后得

$$\nabla^2 U = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]$$

其中, $\varphi(z)$ 为解析函数,之所以写成共轭形式是因为 U 是实函数。根据式(9.4),有

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (9.6a)$$

积分之

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}[\varphi'(z)\bar{z} + \overline{\varphi(z)} + \chi'(z)] \quad (9.6b)$$

$$U = \frac{1}{2}[\varphi(z)\bar{z} + \overline{\varphi(z)}z + \chi(z) + \overline{\chi(z)}] \quad (9.6c)$$

再次强调指出,由于 U 为实函数,故积分后的待定函数两两共轭。上式可写成

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (9.7a)$$

若记

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz, \quad \psi(z) = \chi'(z)$$

则式(9.7a)又可写成

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \int \psi(z)] \quad (9.7b)$$

这就是 Airy 应力函数的复格式 称为 Goursat 公式。其中的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是两个解析函数 称为复势或复应力函数。

9.1.3 应力组合与复势

在不考虑体力的情况下,平面问题的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

根据式(9.4),有

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_y + \sigma_x \quad (a)$$

根据式(9.3),有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

故

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} \quad (b)$$

将式(9.6) (9.7)代入式(a)和(b),得到第一、第二应力组合的复势表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}] = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

可见,只要找到复势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$, 就可以根据第二应力组合式的虚部确定剪应力 τ_{xy} , 而该式的实部与第一应力组合式联立可求得正应力 σ_x, σ_y 。

9.1.4 位移组合与复势

对于平面应变问题,本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$

利用式(9.8), 可得第一、第二应变组合的复势表达式

$$\left. \begin{aligned} 2G(\epsilon_x + \epsilon_y) &= (1-2\nu)(\sigma_y + \sigma_x) = 4(1-2\nu) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \\ &= 2(1-2\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4(1-2\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ 2G(\epsilon_y - \epsilon_x + 2i\epsilon_{xy}) &= \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

将几何方程代入上述第二应变组合的左边

$$2G(\epsilon_y - \epsilon_x + 2i\epsilon_{xy}) = 2G \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = -4G \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv)$$

代入第二应变组合得

$$-4G \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv) = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$$

注意到 U 本质上是实函数, 上式取共轭

$$2G \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) = -2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$$

积分得

$$2G(u + iv) = -2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + F(z) \quad (a)$$

将几何方程代入第一应变组合的左边

$$2G(\epsilon_y + \epsilon_x) = 2G \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2G \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv) \right]$$

从而, 第一应变组合成为

$$2G \left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv) \right] = 4(1-2\nu) \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z} \partial z}$$

将式(a)代入上式得

$$4(1-2\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} = -4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} + F'(z) + \overline{F'(z)}$$

注意到第一应变组合,上式成为

$$F'(z) + \overline{F'(z)} = 8(1-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}} = 4(1-\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]$$

可见, $F'(z)$ 与 $4(1-\nu)\varphi'(z)$ 的实部相同,虚部则差一个实常数,即

$$F'(z) = 4(1-\nu)\varphi'(z) + ic$$

积分得

$$F(z) = 4(1-\nu)\varphi(z) +icz + \gamma \quad (b)$$

可以证明,上式后两项代表刚体位移,故可略去不计。式(9.6c)对 $\bar{z}$ 求导得

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \psi(z)] \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入(a)得

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (9.10)$$

其中

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{平面应变} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & \text{平面应力} \end{cases} \quad (9.11)$$

可见,只要找到复势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,代入上式并分离出实部和虚部,就可确定位移分量。

9.1.5 复格式的坐标变换

在平面问题的复变函数解法中,常用到的是直角坐标系与极坐标系。现讨论应力组合及位移组合的极坐标表达式。

复变量与极坐标之间的转换关系为

$$x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$$

即

$$z = re^{i\theta} \quad (9.12)$$

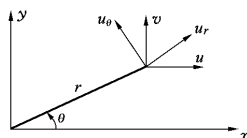


图 9.2 极坐标系

(1)位移组合

不难发现,极坐标系与直角坐标系中的位移分量具有如下关系(图 9.2)

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + v \sin \theta \\ u_\theta &= -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

故位移组合的转换关系为

$$u_r + iu_\theta = e^{-i\theta}(u + iv) \quad (9.13)$$

注意到式(9.10),有

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (9.14)$$

(2)应力组合

极坐标系应力分量与直角坐标系应力分量之间的关系见式(8.8),即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 3\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\}$$

由此可得应力组合的转换关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_r &= \sigma_y + \sigma_x \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= e^{2i\theta}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

注意到式(9.8),有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_r &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

9.1.6 边界条件与复势

(1)位移边界条件

为区分起见,内点和边界点的坐标分别用 z 和 t 来表示。如果在位移边界 Γ_u 上给定位移值 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$,则根据式(9.10)有

$$\kappa\varphi(t) - z\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2G(\bar{u} + i\bar{v}) \quad (9.17)$$

(2)面力边界条件

如果在圆孔边界 Γ_σ 上给定面力 $\bar{\sigma}_r$ 和 $\bar{\tau}_{r\theta}$ (在圆孔边界条件中 $\bar{\sigma}_\theta$ 不会出现),则消去式(9.16)中的 σ_θ 可得

$$\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta} = \varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} - e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(t) + \psi'(t)] \quad (9.18)$$

如果边界条件为直角坐标系下的面力, 则边界条件为

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_y$$

其中(图 9.3)

$$l = \cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad m = \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}$$

注意到

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial y} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \cos\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \sin\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ \bar{Y} &= -\cos\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \sin\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

引进面力组合

$$i(\bar{X} + i\bar{Y}) = i \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

规定边界曲线的走向以使物体位于边界线左侧为正, 即外边界逆时针走向为正, 内边界顺时针走向为正(图 9.3)。任选某边界点 A 为起始参考点, B 为任意边界点, 则有

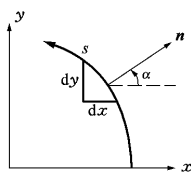


图 9.3 边界条件

$$\begin{aligned} i(R_x + iR_y) &= i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_A^B \end{aligned} \quad (a)$$

根据式(9.3)和(9.6c), 可得

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \quad (b)$$

代入式(a)得

$$[\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]_A^B = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \quad (9.19a)$$

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - k_A = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \quad (9.19b)$$

其中

$$k_A = \varphi(t_A) + t_A \overline{\varphi'(t_A)} + \overline{\psi(t_A)}$$

k_A 是个复常数。下节将指出,复势中含有一个可供任意选择的复常数,若把 k_A 并入这个任意复常数,则对于具有单个闭合面力边界的问题可令 $k_A = 0$ 。但如果问题具有多个闭合边界,则只能在一条闭合边界上(例如外边界上)令 $k_A = 0$ 。最受关注的无限域孔洞问题属于前者,于是

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \quad (9.20)$$

9.2 复势的确定性

根据上述分析,只要找到复势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,就可求得应力和位移。我们已经知道应力函数中的线性函数不影响应力分量。那么,在不影响应力和位移的情况下, $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 中的有什么自由选择的成分呢?

9.2.1 应力与复势的确定性

让我们考察两组表示同一应力状态的复势 $\varphi(z), \psi(z)$ 和 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$, 看它们可以有怎样的差别。将它们同时代入式(9.8)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)] = 4\operatorname{Re}[\varphi'_1(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2[\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)] \end{aligned} \right\} \quad (9.21)$$

上述第一应力组合式表明, $\varphi'(z)$ 和 $\varphi'_1(z)$ 实部相等,而可以差一个虚常数

$$\varphi'_1(z) = \varphi'(z) + ic$$

积分得

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + icz + \gamma \quad (a)$$

其中 c 为任意实常数, $\gamma = \alpha + i\beta$ 为任意复常数。

对式(a)求导两次,得 $\varphi''_1(z) = \varphi''(z)$ 。根据式(9.21),第二应力组合式成立必定要求

$$\psi'_1(z) = \psi'(z)$$

积分得

$$\phi_1(z) = \phi(z) + \gamma^* \quad (\text{b})$$

其中, $\gamma^* = \alpha^* + i\beta^*$ 也是任意复常数。

由式(a),(b)可知,在不影响应力状态的情况下,可以任意选择 c, γ, γ^* 。

9.2.2 位移与复势的确定性

根据式(9.10),由复势 $\varphi(z), \psi(z)$ 计算的位移为

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

由复势 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ 计算的位移为

$$2G(u_1 + iv_1) = 2G(u + iv) + (\kappa + 1)icz + \kappa\gamma - \overline{\gamma^*}$$

显然,上式中 $(\kappa + 1)icz + \kappa\gamma - \overline{\gamma^*}$ 不引起应力,故代表刚体位移。如果给定物体的位移场,则刚体位移被约束,即

$$c = 0, \quad \kappa\gamma - \overline{\gamma^*} = 0 \quad (9.22)$$

可见,给定位移后复势中仍有一个复常数可以任意选择。在求解问题中,可以根据方便的原则来选择这些待定常数且使复势完全确定。

9.2.3 复势的单值化

任何解析函数因而复势在单连域内总是单值的,而在多连域内则可能是多值的。显然,在特定荷载作用下,物体内存存在唯一确定的应力状态。利用此应力单值条件,可判明复势的多值性,然后将多值部分加以分离并确定下来。

第一应力组合,即

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)]$$

左边的应力分量为单值,故右边 $\varphi'(z)$ 的实部必须单值,而虚部不一定为单值。设物体内存有一个孔洞, z_0 为孔洞内的任意点(图9.4)。每当沿包含孔洞的闭合

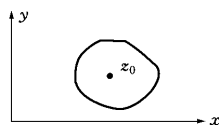


图9.4 带孔洞的物体

曲线绕行一周后, $\varphi'(z)$ 可能有一虚数增量,令该增量为 $2\pi iA$,其中 A 为实数。

上述常虚数多值性正是复对数函数的特点。例如,考虑函数

$$A\ln(z - z_0) = A\ln\left(|z - z_0|e^{i\theta}\right) = A\ln|z - z_0| + Ai\theta \quad (\text{a})$$

当 z 点沿不包含 z_0 点的闭合曲线绕行一周时, θ 起初沿逆时针向变化,后来又沿顺时针向返回原处,最终 $\theta = 0$,因而函数(a)保持单值。但是,当 z 点沿包含

z_0 点的闭合曲线绕行一周时, θ 将增加 2π , 函数(a)具有常虚数 $2\pi iA$ 的多值性。可见, 复势 $\varphi'(z)$ 对孔洞的多值性恰好能用复对数函数(a)来表示。令

$$\varphi'(z) = A \ln(z - z_0) + \varphi^*(z) \quad (9.23)$$

则 $\varphi'(z)$ 中的多值部分被分离出来, 而剩下的 $\varphi^*(z)$ 为单值解析函数。对 z 积分得

$$\varphi(z) = A[(z - z_0) \ln(z - z_0) - (z - z_0)] + \int_{z_1}^z \varphi^*(z) dz + d \quad (b)$$

其中, z_1 为域 Ω 内的任意定点; d 为任意单值复常数。单值解析函数 $\varphi^*(z)$ 在多连域上积分后, 可能为多值函数, 故可表示为

$$\int_{z_1}^z \varphi^*(z) dz = C \ln(z - z_0) + \varphi^{**}(z) \quad (c)$$

其中, C 为复常数; $\varphi^{**}(z)$ 为单值解析函数。将式(c)代入式(b), 并项后得

$$\varphi(z) = Az \ln(z - z_0) + \gamma \ln(z - z_0) + \varphi_*(z) \quad (9.24)$$

其中, γ 为复常数; $\varphi_*(z)$ 为单值解析函数。于是, 复势 $\varphi(z)$ 被分解成单值部分 $\varphi_*(z)$ 、含有待定实常数 A 的多值部分, 以及含有待定复常数 γ 的多值部分。

为分离复势 $\psi(z)$ 的多值部分, 将式(9.24)代入第二应力组合得

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left\{\bar{z}\left[\frac{A}{z - z_0} + \varphi''_*(z)\right] + \psi'(z)\right\} \quad (d)$$

显然, $\bar{z}\left[\frac{A}{z - z_0} + \varphi''_*(z)\right]$ 是单值的, 故 $\psi'(z)$ 必须单值。在多连域上积分后, $\psi(z)$ 具有复常数的多值性, 可表示为

$$\psi(z) = \gamma^* \ln(z - z_0) + \psi_*(z) \quad (9.25)$$

于是, 复势 $\psi(z)$ 也被分解成单值部分 $\psi_*(z)$ 和含有待定复常数 γ^* 的多值部分。

为了确定实常数 A 和复常数 γ, γ^* , 需进一步考虑位移单值条件。将式(9.23)、(9.24)和(9.25)代入下列位移组合

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

当沿孔洞绕行一周时, 函数 $\ln(z - z_0)$ 的增量为 $2\pi i$ 。因此, 右端函数中的多值部分将有增量

$$\kappa(Az2\pi i + \gamma 2\pi i) - z \overline{(A2\pi i)} - \overline{(\gamma^* 2\pi i)} = 2\pi i [(\kappa + 1)Az + \kappa\gamma + \bar{\gamma}^*]$$

根据位移单值条件,该增量应为零,故有

$$A = 0, \quad \kappa\gamma + \bar{\gamma}^* = 0 \quad (9.26)$$

把边界力组合(9.19a)

$$[\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]_A^B = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds$$

应用于整个内边界,即沿孔洞边界正向(顺时针向)绕行一周。显然,右端增量 $i(R_x + iR_y)$ 其中 R_x 和 R_y 是作用在孔边上全部外荷载的主矢量分量;左端增量为 $-2\pi i(\gamma - \bar{\gamma}^*)$ 。于是

$$-2\pi i(\gamma - \bar{\gamma}^*) = i(R_x + iR_y) \quad (9.27)$$

由式(9.26)和(9.27)可确定出全部常数,即

$$A = 0, \quad \gamma = -\frac{R_x + iR_y}{2\pi(\kappa + 1)}, \quad \gamma^* = \frac{\kappa(R_x - iR_y)}{2\pi(\kappa + 1)} \quad (9.28)$$

至此,只需给定孔边外荷载,多值部分就可完全确定。将上式代入式(9.24)和(9.25)得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{R_x + iR_y}{2\pi(\kappa + 1)} \ln(z - z_0) + \varphi_*(z) \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(R_x - iR_y)}{2\pi(\kappa + 1)} \ln(z - z_0) + \psi_*(z) \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

其中 $\varphi_*(z)$ 和 $\psi_*(z)$ 是多连域 Ω 内的单值解析函数。

9.3 孔洞问题级数解法

根据上述分析,平面问题复变函数解法归结为:寻找两个解析函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$,使其满足各边界条件

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (9.30)$$

$$\kappa\varphi(t) - z \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2G(\bar{u} + i\bar{v}) \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (9.31)$$

级数解法的基本思想是:把复势 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 展成幂级数,代入上述边界条件的左端,同时把右端给定的已知函数也展成幂级数。根据两边同幂项系数相等,就可确定各待定系数。

9.3.1 复势的幂级数

(1) 实心域

实心域中的解析函数可以展成只含正幂项的泰勒级数。为此设

$$\varphi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m, \quad \psi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m \quad (a)$$

积分得

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (9.32)$$

(2) 空心域

空心域中的解析函数可以展成含正幂项和负幂项的罗朗级数。为此设

$$\varphi'(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m, \quad \psi'(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m z^m \quad (b)$$

积分得

$$\varphi(z) = A_{-1} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = B_{-1} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \quad (9.33)$$

其中 $A_{-1} \ln z$ 和 $B_{-1} \ln z$ 由式(b)中 $m = -1$ 的项积分而来。

9.3.2 无限域孔洞问题

(1) 复势的基本形式

外边界在无穷远处的孔洞问题属于多连域问题,其复势的基本形式为式(9.33)。显然,当 $z \rightarrow \infty$ 时,应力应为有限值。考虑应力组合式(9.21)并根据无穷远处应力有限的条件,可得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= A_{-1} \ln z + a_1 z + a_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n \\ \psi(z) &= B_{-1} \ln z + b_1 z + b_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n z^n \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

其中 $a_0, b_0, \operatorname{Im} a_1$ 表示刚体位移,令它们等于零不会影响应力状态。变更上式中常数的记法及求和指标,可得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= A_1 \ln z + A_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \\ \psi(z) &= B_1 \ln z + B_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

其中 μA_0 为实常数。

(2) 待定常数的确定

系数 A_1 和 B_1 与多值性有关, 可根据式(9.29)确定。把坐标原点选在孔洞之内, 则该式中的 $z_0=0$, 于是有

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{R_x + iR_y}{2\pi(\kappa + 1)} \ln z + \varphi_*(z) \\ \psi(z) &= \frac{\kappa(R_x - iR_y)}{2\pi(\kappa + 1)} \ln z + \psi_*(z) \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

其中 $\varphi_*(z)$ 和 $\psi_*(z)$ 是单值解析函数。比较式(9.35)和(9.36), 可知

$$A_1 = -\frac{R_x + iR_y}{2\pi(\kappa + 1)}, \quad B_1 = \frac{\kappa(R_x - iR_y)}{2\pi(\kappa + 1)} \quad (9.37)$$

为确定系数 A_0 和 B_0 , 式(9.35)对 z 求导, 有

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(z) &= \frac{A_1}{z} + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-k) a_k z^{-(k+1)} = A_0 + f_1(z) \\ \psi'(z) &= \frac{B_1}{z} + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-k) b_k z^{-(k+1)} = B_0 + f_2(z) \\ \bar{z}\varphi''(z) &= -\bar{z}\frac{A_1}{z^2} + \bar{z}\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)a_k z^{-(k+2)} = f_3(z) \end{aligned} \right\}$$

代入应力组合式(9.8), 注意到 A_0 是实常数, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 4A_0 + 4\operatorname{Re}[f_1(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2B_0 + 2[f_3(z) + f_2(z)] \end{aligned} \right\}$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时, 上式中的函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ 均趋于零, 故 A_0 和 B_0 由远方给定的应力来确定, 即

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4}(\sigma_y^{\infty} + \sigma_x^{\infty}) \\ B_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty} + 2i\tau_{xy}^{\infty}) \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

若给定远方主应力 σ_1 和 σ_2 , 且 σ_1 与 x 轴的夹角为 α , 则根据式(9.15), 有

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4}(\sigma_y^{\infty} + \sigma_x^{\infty}) = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ B_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty} + 2i\tau_{xy}^{\infty}) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)e^{-2ia} \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

系数 a_k 和 b_k 由孔洞边界条件确定。若给定为应力边界条件, 则为式 (9.18)

$$\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta} = \varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} - e^{2i\theta} [\bar{z}\varphi''(t) + \psi'(t)] \quad (a)$$

将左端展成复三角级数

$$\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\theta} \quad (b)$$

其中的系数为

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{\sigma}_r - i\bar{\tau}_{r\theta}) e^{-im\theta} d\theta \quad (c)$$

为确定式(a)右端的形式, 将式(9.35)对 z 求导

$$\varphi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{-m}, \quad \psi'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^{-m} \quad (d)$$

其中, 系数 A_0, B_0, A_1, B_1 的意义与式(9.35)相同, 而当 $m \geq 2$ 时

$$a_k = -A_m/k, \quad b_k = -B_m/k, \quad k = m-1 \quad (9.40)$$

若为圆孔, 则在孔边界上有

$$z = t = \rho e^{i\theta} \quad (9.41)$$

其中, ρ 为圆孔半径。将其代入式(d), 然后再代入式(a), 整理后得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(1+m)A_m - \frac{B_{m+2}}{\rho^2} \right] \frac{1}{\rho^m} e^{-im\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_m}{\rho^m} e^{im\theta} - B_0 e^{2i\theta} - \frac{B_1}{\rho} e^{i\theta} \quad (9.42)$$

令等式两边 $e^{im\theta}$ 的系数相等, 可得各待定系数。事实上, 这一过程即使对于圆孔也是很烦琐的, 因此通常采用保角变换解法。

9.4 孔洞问题保角变换解法

对于几何形状比较复杂的问题, 例如椭圆孔、方孔、裂缝等非圆域问题, 可以用保角变换解法来处理, 其基本思想是: 寻找解析函数 $z = \omega(\zeta)$, 通过保角变换把原物理平面(z 平面)上的复杂几何域映射成像平面(ζ 平面)上的中心单位圆、半无限平面等简单易解的规则域。把物理平面上的基本关系用像平面上的复变量来表示。先在像平面的规则域上找满足这些基本关系的解, 然后把结果返回物理平面就得到实际问题的解。

9.4.1 保角变换

(1) 变换函数

单值解析函数

$$z = \omega(\zeta) \quad (9.43)$$

定义了两个复变量 z 和 ζ 之间的一一对应关系。在变换后, z 平面上的域 Ω 及其边界 Γ 相应于 ζ 平面上的域 Σ 和边界 γ 。可以认为域 Σ 是物理图形 Ω 在 ζ 平面上的像, 故称 z 平面为物理平面, ζ 平面为像平面, 而变换式(9.43)被称为映射。

显然, 由于 $\omega(\zeta)$ 是单值解析函数, 故 z 平面上的相邻点和连续曲线, 映射到 ζ 平面后仍保持相邻性和连续性; z 平面上的内点 z 和边界点 t , 对应于 ζ 平面上的内点 ζ 和边界点 σ ; 对于多连域, 映射后的连通度保持不变。此外, z 平面上通过一点的任意两线元的夹角在 ζ 平面上保持不变。这就是所谓保角性, 由解析函数(9.43)实现的变换称为保角变换。

任何 ζ 平面上的单值解析函数 $\omega(\zeta)$, 只要在域 Σ 内处处 $\omega'(\zeta) \neq 0$, 且在边界 γ 上连续, 则都可以选作保角变换的变换函数。问题是哪个解析函数恰好能把给定的非圆域映射成中心单位圆或其他易解的规则域。

(2) 椭圆孔问题

现在, 让我们考虑变换函数

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad |\zeta| \leq 1 \quad (9.44a)$$

其中, R 和 m 是实数。把 $z = x + iy$ 和 $\zeta = \rho e^{i\theta}$ 代入上式, 并分解成实部和虚部

$$x = R \left(\frac{1}{\rho} + m\rho \right) \cos\theta, \quad y = -R \left(\frac{1}{\rho} - m\rho \right) \sin\theta \quad (9.44b)$$

解出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 代入 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 得

$$\frac{x^2}{R^2 \left(\frac{1}{\rho} + m\rho \right)^2} + \frac{y^2}{R^2 \left(\frac{1}{\rho} - m\rho \right)^2} = 1 \quad (9.45)$$

这是 z 平面上的椭圆方程。与 ζ 平面上单位圆 ($\rho = 1$) 相应的椭圆半轴 a (x 方向)、 b (y 方向) 为

$$a = R(1 + m), \quad b = R(1 - m) \quad (9.46a)$$

或

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} < 1 \quad (9.46b)$$

由式(9.44b)可知,当 $\rho \rightarrow 0$ 时, $x, y \rightarrow \infty$, 即 ζ 平面上的中心单位圆内域对应于 z 平面上的椭圆外域(图 9.5)。

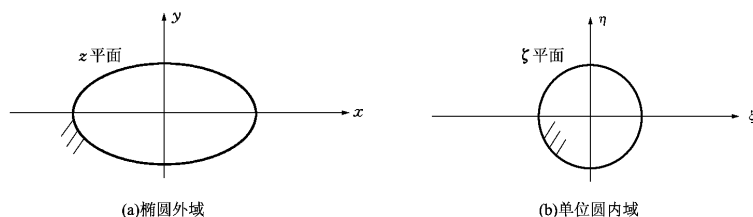


图 9.5 保角变换

可见,变换函数(9.44)可用来解决无限平面中的椭圆孔问题。经过类似的考察,可知下列变换函数

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{m}{\zeta} + \zeta \right) \quad |\zeta| \geq 1 \quad (9.47)$$

把 z 平面上的椭圆外域映射成 ζ 平面上的中心单位圆外域,同样可以用来解决椭圆孔问题。

(3) 复杂孔问题

对于更为复杂的边界形状,一般找不到精确的变换函数。此时,可以把 $\omega(\zeta)$ 展成幂级数,调整其中待定系数来逼近 z 平面上的给定边界形状。如果想把 z 平面上的外域变换为 ζ 平面上的内域,幂级数可选为

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k \right) \quad |\zeta| \leq 1 \quad (9.48)$$

其中, R 为实常数, C_k 一般是复常数且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| \leq 1$ 条件。上述级数把 z 平面上的外域和无穷远点 $z = \infty$ 映射成 ζ 平面上的中心单位圆内域和坐标原点 $\zeta = 0$ 。在大多数情况下,级数中只须取很少几项就足够精确。

如果想把 z 平面上的外域变换为 ζ 平面上的外域,幂级数可选用

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^{-k} \right) \quad |\zeta| \geq 1 \quad (9.49)$$

9.4.2 转入像平面

(1) 像平面内的复势

通过变换式 $z = \omega(\zeta)$ 将物理平面上的复势变换到像平面上。为书写方便,这里将复势 $\varphi(z), \psi(z)$ 记为 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ 。变换后记为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta) \\ \psi_1(z) &= \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

对于无限域孔口问题,复势在 z 平面上的基本形式见式(9.35),此时写成

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= A_1 \ln z + A_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} \\ \psi_1(z) &= B_1 \ln z + B_0 z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

如果将无限外域变换为中心单位圆内域,则变换函数为式(9.48),从而有

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln \left[R \left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k \right) \right] = \ln \left[\frac{R}{\zeta} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^{k+1} \right) \right] \\ &= -\ln \zeta + \ln R + \ln \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^{k+1} \right) \end{aligned}$$

上式可写成

$$\ln z = -\ln \zeta + \zeta \quad \text{单位圆内的单值解析函数}$$

代入式(9.51)得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -A_1 \ln \zeta + A_0 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= -B_1 \ln \zeta + B_0 \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

其中

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^k \quad (9.53)$$

为两个单值解析函数。

如果将无限外域变换为中心单位圆外域,则变换函数为式(9.49),类似地可得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= A_1 \ln \zeta + R A_0 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= B_1 \ln \zeta + R B_0 \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

其中

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k}, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta^{-k} \quad (9.55)$$

(2)像平面内的边界条件

根据式(9.44)和(9.50),有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{d\varphi_1(z)}{dz} = \frac{d\varphi(\zeta)d\zeta}{d\zeta dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ \varphi_1''(z) &= \frac{d\varphi_1'(z)}{dz} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ \psi_1(z) &= \frac{d\psi_1(z)}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

将上式代入边界条件(9.17)和(9.19),并注意到在边界上 $t = \omega(\sigma)$,可得

$$\kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2G[\bar{u}(\sigma) + i\bar{v}(\sigma)] \quad (9.57)$$

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} - k_A = i \int_A^B (\bar{X} + i\bar{Y}) ds \quad (9.58)$$

其中的边界力积分通常可在 z 平面上容易地计算出来,然后令 $t = \omega(\sigma)$ 转到 ζ 平面上。

于是,原来定义在 z 平面上的非圆域问题被转换为 ζ 平面上的圆域问题,即寻找复势 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$,使其满足边界条件(9.57)和(9.58)。显然,可利用级数解法在 ζ 平面上求解问题。但是,利用 Cauchy 积分公式,可更方便地确定复势 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 。

9.4.3 复势的 Cauchy 积分求解

(1) Cauchy 积分公式

设 Γ 是简单光滑的闭曲线, Ω^+ 为 Γ 线的内域(有限部分), Ω^- 为 Γ 线的外域(无限部分)。于是,全平面分为 Ω^+ , Γ 和 Ω^- 三部分。若函数 $f(z)$ 在内域 Ω^+ 上解析,在内域和边界 $\Omega^+ + \Gamma$ 上连续,则 Cauchy 积分公式为

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega^+ \\ 0 & z \in \Omega^- \end{cases} \quad (9.59)$$

若函数 $f(z)$ 在内域 Ω^- 上解析,在外域和边界 $\Omega^- + \Gamma$ 上连续,则 Cauchy 积分公式为

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(\infty) & z \in \Omega^+ \\ -f(z) + f(\infty) & z \in \Omega^- \end{cases} \quad (9.60)$$

(2) 边界积分方程

当我们在 ζ 平面中心单位圆内域上处理无限域孔口问题时,复势公式为

(9.52) 其边界值为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\sigma) &= -A_1 \ln \sigma + A_0 \omega(\sigma) + \varphi_0(\sigma) \\ \psi(\sigma) &= -B_1 \ln \sigma + B_0 \omega(\sigma) + \psi_0(\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

其中 σ 是中心单位圆 γ 上的点 因而有

$$\sigma = e^{i\theta}, \quad \bar{\sigma} = e^{-i\theta} = \frac{1}{\sigma}, \quad \ln \bar{\sigma} = \ln \frac{1}{\sigma} = -\ln \sigma$$

将式(9.61)代入边界条件(9.58)可得

$$\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'_0(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} = f_0 \quad (9.62a)$$

取共轭得

$$\overline{\varphi_0(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi'_0(\sigma) + \psi_0(\sigma) = \bar{f}_0 \quad (9.62b)$$

其中 f_0 是 σ 的已知函数 即

$$f_0 = i \int_{\gamma} (\bar{X} + i\bar{Y}) ds + A_1 \ln \sigma - A_0 \omega(\sigma) - \bar{B}_1 \ln \sigma - \bar{B}_0 \overline{\omega(\sigma)} - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} [-\bar{A}_1 \sigma + \bar{A}_0 \overline{\omega(\sigma)}]$$

式(9.62)的两边都乘以 $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ 并沿中心单位圆作回路积分 可以使公式得到简化。例如 注意到 $\varphi_0(\zeta)$ 是单位圆内域上的解析函数 并在圆内及圆周上连续 ζ 位于单位圆内域 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \varphi_0(\zeta)$$

注意到 $\bar{\sigma} = 1/\sigma$ 则

$$\overline{\psi_0(\sigma)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sigma^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\beta}_k \bar{\sigma}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\beta}_k \sigma^{-k}$$

显然 $\overline{\psi_0(\zeta)}$ 在单位圆外域上解析 并在圆外及圆周上连续 ζ 位于单位圆内域 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \overline{\psi_0(\infty)} = \bar{\beta}_0 = 0$$

其中 令 $\bar{\beta}_0$ 为零并不影响应力。于是 式(9.62a)简化为

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (9.63a)$$

类似地可得

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}_0}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (9.63b)$$

9.4.4 返回物理平面

如果能找到逆变换函数 $\zeta = \mu(z)$ 时, 将其代入求得的 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 就能得到 z 平面上的复势。然后由应力组合公式和位移组合公式求得 z 平面上实际问题的应力和位移。

当函数 $\omega(\zeta)$ 或复势 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 比较复杂时, 可利用式(9.56)将应力组合(9.8)和位移组合(9.10)表示为 ζ 的函数

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 4\operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= \frac{2}{\omega'(\zeta)} \left\{ \overline{\omega(\zeta)} \left[\frac{\varphi''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]' + \psi'(\zeta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \quad (9.65)$$

将 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 代入上式右端, 就可求得 z 平面上直角坐标系中的应力分量和位移分量, 其相应点为 $z = \omega(\zeta)$ 。

9.4.5 椭圆孔口问题

(1) 变换函数和复势

对于无限域椭圆孔口问题, 可把椭圆孔外域映射成单位圆内域, 其变换函数为

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad |\zeta| \leq 1$$

其中

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}$$

利用单位圆边界方程, 式(9.63)可简化为

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (a)$$

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}_0}{\sigma - \zeta} d\sigma - \zeta \frac{\zeta^2 + m}{m\zeta^2 - 1} \varphi'_0(\zeta) \quad (b)$$

考虑椭圆孔受均匀内压 p ,并在远方受均匀拉伸荷载 q (图 9.6)。由于孔内边界上的荷载自相平衡,故由式(9.37)得 $A_1 = B_1 = 0$ 。在远方 $\sigma_1 = q, \sigma_2 = 0$, α ,由式(9.39)得 $A_0 = q/4, B_0 = -qe^{-2i\alpha}/2$ 。计算出 f_0 ,代入式(a)和(b)并积分得 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$,再将它们代入式(9.61)得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{qR}{4} \left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta \right] - pRm\zeta \\ \psi(\zeta) &= -\frac{qR}{2} \left[\frac{1}{\zeta} e^{-2i\alpha} + \frac{(1+m^2)\zeta}{1-m\zeta^2} - \frac{e^{2i\alpha}(m+\zeta^2)\zeta}{1-m\zeta^2} \right] - pR \frac{(1+m^2)\zeta}{1-m\zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.66)$$

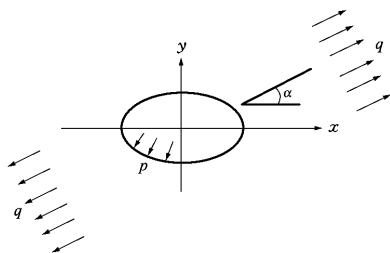


图 9.6 带椭圆孔的板

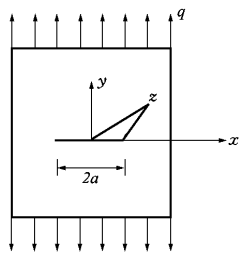


图 9.7 带裂纹的板

(2) 椭圆孔口应力

最大应力是孔边上的 σ_θ ,此处的 $\sigma_r = -p$,故

$$\sigma_\theta = 4\text{Re} \left[\frac{\varphi'_r(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]_{\zeta=\sigma} - \sigma_r = 4\text{Re} \left\{ \frac{(q/4)[-1 + (2e^{2i\alpha} - m)\sigma^2] - pm\sigma^2}{m\sigma^2 - 1} \right\} + p \quad (c)$$

注意到

$$\left. \begin{aligned} e^{2i\alpha} &= \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \\ \sigma^2 &= e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

式(c)经整理后为

$$\sigma_\theta = q \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta + \alpha)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} + p \frac{1 - 3m^2 + 2m \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \quad (9.67)$$

(3) 裂纹尖端应力

令 $b \rightarrow 0$,椭圆退化为沿 x 方向、长为 $2a$ 的裂纹(图 9.7)。此时

$$R = \frac{a}{2}, \quad m = 1, \quad z = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + 1\zeta \right) \quad (d)$$

若裂纹上无荷载, 且 $\alpha = \pi/2$, 则

$$\varphi(\zeta) = \frac{qa}{8} \left(\frac{1}{\zeta} - 3\zeta \right), \quad \psi(\zeta) = \frac{qa}{4} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3 + 3\zeta}{1 - \zeta^2} \right) \quad (e)$$

逆变换函数为

$$\zeta = \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} - 1} \quad (f)$$

代入式(e)得

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi(\zeta) = \frac{q}{4} (2\sqrt{z^2 - a^2} - z) \\ \psi_1(z) &= \psi(\zeta) = \frac{q}{2} \left(z - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) \end{aligned} \right\}$$

再代入应力组合式(9.8)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= q \left[2\operatorname{Re} \frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= q \left[\frac{2ia^2y}{(z^2 - a^2)^{3/2}} + 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

为考虑裂纹尖端附近($r/a \ll 1$)的应力场, 以尖端为原点建立极坐标系, 则

$$z = a + r\cos\theta + i\sin\theta, \quad y = r\sin\theta$$

代入式(g)并将其展成 r/a 的幂级数, 仅保留其中 $r/a \rightarrow 0$ 时不断增加的主项, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= q\sqrt{\frac{2a}{r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= q\sqrt{\frac{2a}{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + i \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\}$$

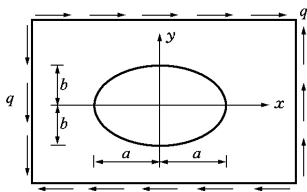
从而求得裂纹尖端应力场的公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= q\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= q\sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9.68)$$

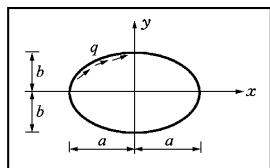
习 题

- 9.1 无限大平板中有一半径为 a 的圆孔,孔内有均布压力 q 作用。设无穷远处的应力为零。试用级数解法求平板的应力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 。
- 9.2 证明: $z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$ ($|\zeta| \geq 1$) 可将带椭圆孔 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的平面映射成单位圆外域,并求参数 R 和 m 。
- 9.3 求函数 $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ 在域 Ω^+ 和 Ω^- Cauchy 积分值 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ 。
- 9.4 设一带椭圆孔口的薄板,在平行于孔轴的方向受均布剪力 q 。试求复势 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$, 以及孔边应力及其极值。

答案: $\varphi(\zeta) = iqR\zeta, \quad \psi(\zeta) = iqR \frac{1 + \zeta^4}{\zeta(1 - m\zeta^2)},$
 $\sigma_\theta = \frac{4q \sin 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}, \quad (\sigma_\theta)_{\max}^{\min} = \pm \frac{4q}{1 - m^2}。$



题 9.4 图



题 9.5 图

- 9.5 设一带椭圆孔口的薄板,在孔边受均布剪力 q 。试求复势 $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$, 以及孔边应力及其极值。

答案: $\varphi(\zeta) = imqR\zeta, \quad \psi(\zeta) = -iqR\zeta \frac{1 - m^2 - 2m\zeta^2}{1 - m\zeta^2},$
 $\sigma_\theta = \frac{4mq \sin 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta}, \quad (\sigma_\theta)_{\max}^{\min} = \pm \frac{4mq}{1 - m^2}。$

第 10 章

空间问题

任何结构物都是三维的,再加上荷载及约束因素,通常难以简化为平面问题,必须按空间问题处理。求解空间问题通常采用位移法。本章首先分别给出直角坐标系和柱坐标系下位移法的基本方程,然后介绍若干典型问题的解答。

10.1 直角坐标方程

10.1.1 方程齐次化

对于空间问题,我们在第 6 章中建立了 Lamé-Navier 方程,其边值问题表述为

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.1a)$$

或

$$(\lambda + G) u_{j \ j i} + G u_{i \ j j} + f_i = 0 \quad (10.1b)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (10.2)$$

由于上述微分方程和边界条件都是线性的,故其解总可以表达为非齐次方程 (10.1) 的特解 u'_i 和相应齐次方程

$$(\lambda + G) u_{j \ j i} + G u_{i \ j j} = 0 \quad (10.3)$$

的通解 u''_i 之和,即

$$u_i = u'_i + u''_i \quad (10.4)$$

其中,特解 u'_i 并不要求满足边界条件,因此寻找起来不十分困难。边界条件由通解和特解之和来满足。若 u'_i 在边界上取值 $\bar{u}'_i$, 则 u''_i 必须满足

$$(\lambda + G)u''_{jji} + Gu''_{iij} = 0 \quad (10.5a)$$

$$\bar{u}''_i = \bar{u}_i - \bar{u}'_i \quad (10.5b)$$

可见,边值问题归结为求解齐次方程。以下只讨论齐次方程(10.3)的解法。

10.1.2 位移场函数

位移法首先要求正确选择位移函数的形式。根据第 6 章的分析,我们知道常体力或无体力条件下的位移函数是双调和函数,因此 Lamé-Navier 方程的一般解可以用调和函数(必定是双调和函数)或双调和函数的线性组合来表示。下面介绍三种常用的位移函数,即 Lamé 位移函数、Galerkin 位移函数和 Love 位移函数。

(1) Lamé 位移函数

假设位移是有势的,即位移沿某一方向的分量与位移势函数 ϕ 在该方向的导数成正比

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (10.6a)$$

或

$$u_i = \phi_{,i} \quad \text{或} \quad \mathbf{u} = \nabla \phi \quad (10.6b)$$

则齐次方程(10.3)成为

$$\phi_{,ijj} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \nabla^2 \phi = 0 \quad (10.7)$$

其中,函数 ϕ 称为 Lamé 位移函数或 Lamé 应变势。为方便,式(10.6a)常写成

$$u = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (10.8)$$

显然,如果 ϕ 满足 Laplace 方程(即为调和函数),则由 Lamé 位移函数确定的位移分量总能满足齐次方程(10.3)。此时,有

$$\theta = u_{i,i} = \frac{1}{2G} \phi_{,ii} = 0 \quad (10.9)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2G} \phi_{,ij}$$

代入本构方程

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (10.10)$$

得到

$$\sigma_{ij} = \phi_{,ij} \quad (10.11a)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, & \sigma_z &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, & \tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, & \tau_{zx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10.11b)$$

由式(10.9)可知,如果位移势函数存在,则体积应变为常数;当位移势函数取调和函数时,体积应变为零。这种情况当然是很特殊的,因而位移势函数所能解决的问题很少。但是,有时取调和函数作为位移势函数,再利用其他位移函数和叠加原理求解复杂问题比较方便。

(2) Galerkin 位移函数

Galerkin 将位移场表示成如下形式

$$u_i = 2(1 - \nu) V_{i,jj} - V_{j,ji} \quad (10.12a)$$

其直角坐标展开式为

$$\left. \begin{aligned} u &= 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z \partial x} \right) \\ v &= 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z \partial y} \right) \\ w &= 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.12b)$$

其中, V 称为 Galerkin 位移函数或 Galerkin 矢量,即

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3 = V_i \mathbf{e}_i \quad (10.13)$$

将式(10.12)代入齐次方程(10.3),得

$$V_{i,jjkk} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (10.14)$$

即

$$\nabla^2 \nabla^2 V_i = 0 \quad \text{或} \quad \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{V} = 0 \quad (10.15)$$

可见,满足齐次方程(10.3)的 Galerkin 矢量必须是双调和函数。

(3) Love 位移函数

如果令 $V_1 = V_2 = 0, V_3 = L$ 则 Galerkin 矢量成为

$$u = -\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}, \quad v = -\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}, \quad w = 2(1-\nu)\nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \quad (10.16)$$

此时 L 称为 Love 位移函数或 Love 应变函数。

应该指出,历史上是 Love 为解决轴对称问题先引进 Love 位移函数,而 Galerkin 为解决一般空间问题将 Love 位移函数推广得到 Galerkin 位移函数。

10.2 柱坐标方程

在柱坐标系中,结构中任意一点的位置是用坐标 r, θ, z 表示的。如果结构的几何形状、约束条件及荷载分布都对称于某轴(例如 z 轴),则其应变、应力等也对称于此轴而与环向坐标无关,这就是轴对称问题。

10.2.1 平衡方程

(1) 一般问题

在物体任一点 $P(r, \theta, z)$ 用相距为 dr 的两个圆柱面,互成 $d\theta$ 角的两个铅直面以及相距为 dz 的两个水平面,从物体中取微元体。根据平衡原理,不难推得剪应力互等关系式

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}, \quad \tau_{zr} = \tau_{rz}$$

以及柱坐标平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + K_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

(2) 轴对称问题

对于轴对称问题,应力分量与坐标 θ 无关,且剪应力 $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ 。在无体力的情况下,式(10.17)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

10.2.2 几何方程

(1) 一般问题

柱坐标系下的几何方程可以采用应变坐标变换的方法建立起来。注意到

$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta$, $v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta$, $w = w$, 可得

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos^2 \theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \sin \theta \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

根据应变张量坐标变换公式可得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \cos^2 \theta \epsilon_r + \sin^2 \theta \epsilon_\theta - \sin \theta \cos \theta \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{yz} &= \sin \theta \gamma_{zr} + \cos \theta \gamma_{\theta z} \end{aligned} \right\}$$

将上述公式加以对比, 可得柱坐标几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

(2) 轴对称问题

轴对称问题中位移分量与坐标 θ 无关, 且 $\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$ 及环向位移 $u_\theta = 0$ 。

此时, 式(10.19)简化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

10.2.3 本构方程

(1) 一般问题

柱坐标系也是正交坐标系, 故本构方程的形式与直角坐标系下的形式相同,

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2G\epsilon_r & \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2G\epsilon_\theta & \tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z} \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\epsilon_z & \tau_{zr} &= G\gamma_{zr} \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

其中, 体积应变(此处用 e 代替体积应变 θ , 以免同环向坐标相混淆)为

$$e = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.22)$$

(2) 轴对称问题

对于轴对称问题, 式(10.21)和(10.22)分别简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2G\epsilon_r = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \epsilon_r \right) \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2G\epsilon_\theta = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \epsilon_\theta \right) \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\epsilon_z = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \epsilon_z \right) \\ \tau_{zr} &= G\gamma_{zr} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zr} \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

$$e = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.24)$$

10.2.4 位移法方程

这里只讨论轴对称问题。将几何方程(10.20)代入本构方程(10.23), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{zr} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

再将式(10.25)代入平衡方程(10.18), 得轴对称问题位移法的基本方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (10.27)$$

10.2.5 位移函数

(1) Lamé 位移函数

在轴对称问题中, ϕ 只是坐标 r 和 z 的函数, 且 $u_\theta = 0$ 。注意到

$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad w = w \quad (10.28)$$

并将式(10.8)代入上式得

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (10.29)$$

若取 ϕ 为调和函数, 则体积应变为零。将式(10.29)代入式(10.25)可得应力分量

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad \tau_{zr} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \quad (10.30)$$

(2) Love 位移函数

Love 位移函数 L 常用来求解空间轴对称问题。 L 与坐标 θ 无关, $u_\theta = 0$ 。将式(10.16)代入式(10.28)得

$$u_r = -\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z}, \quad w = 2(1 - \nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \quad (10.31)$$

再代入式(10.24), 得以 Love 位移函数表示的体积应变

$$e = (1 - 2\nu) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 L) \quad (10.32)$$

将式(10.31)和(10.32)代入式(10.25)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 L - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial r} \right) \\ \sigma_z &= 2G \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{zr} &= 2G \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

10.3 典型例解

10.3.1 位移函数选取

(1) 调和函数的性质

- 调和函数的各阶导数均为调和函数, 调和函数必定是双调和函数。
- 调和函数的线性组合为调和函数, 双调和函数的线性组合为双调和函数。
- 若 ϕ 为调和函数, 则 $\psi = x_i \phi_{,i}$ 亦为调和函数。

为证明上述结论, 可直接对函数 ψ 实行 Laplace 算子运算。根据复合函数求导规则, 并注意 $x_{i,j} = \delta_{ij}$, 有

$$\psi_{,j} = x_{i,j} \phi_{,i} + x_i \phi_{,ij} = \delta_{ij} \phi_{,i} + x_i \phi_{,ij} = \phi_{,j} + x_i \phi_{,ij}$$

及

$$\psi_{,jj} = \phi_{,jj} + \delta_{ij} \phi_{,ij} + x_i \phi_{,ijj} = 2\phi_{,jj} + x_i \phi_{,ijj}$$

显然, 若 ϕ 为调和函数, 即 $\phi_{,jj} = 0$, 则 $\psi_{,jj} = 0$ 。

- 若 ϕ 为调和函数, 则 $\psi = x_i \phi_{,i}$ 为双调和函数。
- 若 ϕ 为调和函数, 则 $\psi = R^2 \phi$ 为双调和函数。

其中, $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$ 。

(2) 常用函数举例

不难验证, 下列函数为调和函数

$$1/R \quad (10.34)$$

$$\ln(R+z) \quad (10.35)$$

根据前述性质, 下列函数为双调和函数:

$$R \quad (10.36)$$

$$x \ln(R+z) \quad (10.37)$$

10.3.2 Kelvin 问题

在无限弹性体内一点受集中力 P 作用的问题称为 Kelvin 问题。取力的作用点为坐标原点, z 轴沿力 P 的作用方向(图 10.1)。问题的边界条件为: (1) 全部应力分量在无穷远处均趋于零; (2) 作用点处奇异应力的合力与

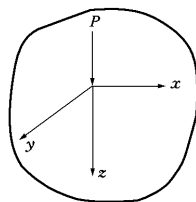


图 10.1 Kelvin 问题

P 相等。Love 位移函数可选

$$L = AR$$

其中 A 为待定参数, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ 。将上式代入式(10.31)、(10.33)得

$$u_r = A \frac{rz}{R^3}, \quad w = A \frac{1}{R} \left[(3 - 4\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \quad (10.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2GA \left[\frac{(1 - 2\nu)z}{R^3} - \frac{3zr^2}{R^5} \right] \\ \sigma_\theta &= 2GA \frac{(1 - 2\nu)z}{R^3} \\ \sigma_z &= -2GA \left[\frac{(1 - 2\nu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5} \right] \\ \tau_{zr} &= -2GA \left[\frac{(1 - 2\nu)r}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

以 $z = \pm a$ 的两个平面在此无限体内截出厚度为 $2a$ 、半径为 r 的圆盘。当 r 趋于无穷时,有平衡条件

$$P = \int_0^\infty 2\pi r dr (\sigma_z)_{z=-a} - \int_0^\infty 2\pi r dr (\sigma_z)_{z=a}$$

将式(10.39)中的 σ_z 代入,并注意到当 z 等于常数时 $r dr = R dR$,可得

$$A = \frac{P}{16\pi G(1 - \nu)}$$

将其代入式(10.38)和(10.39),即得 Kelvin 问题的解答。

10.3.3 Boussinesq 问题

J. V. Boussinesq (1885) 首先提出并解决了如下问题: 在半无限弹性体边界平面上受法向集中力作用(图 10.2), 不计体力, 求弹性体内的应力和位移。取力 P 的作用点为坐标原点, z 轴沿力的作用方向并指向半无限弹性体内部。边界条件为

$$\sigma_z|_{z=0, r \neq 0} = 0, \quad \tau_{zr}|_{z=0, r \neq 0} = 0 \quad (a)$$

本问题具有轴对称性, 并且在力的作用点处位移和应力具有奇异性。Kelvin 解答(10.38)和(10.39)能够反映轴对称性和奇异性, 但不能满足这里的边界条件, 因为在 $z=0$ 处式(10.39)变为

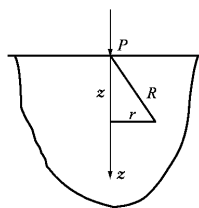


图 10.2 Boussinesq 问题

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zr} = -2GA \frac{1-2\nu}{r^2} \quad (b)$$

为满足边界条件(a), 还需寻求另一轴对称特解。为此, 可取下列调和函数

$$\phi = B \ln(R+z)$$

作为 Lamé 位移函数, 其对应的位移分量和应力分量为

$$u_r = \frac{B}{2G} \frac{r}{(R+z)R}, \quad w = \frac{B}{2GR} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= B \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right] \\ \sigma_\theta &= B \frac{1}{R(R+z)} \\ \sigma_z &= -\frac{Bz}{R^3} \\ \tau_{zr} &= -\frac{Br}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在 $z=0$ 处, 根据式(d)得到边界条件

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zr} = -\frac{B}{r^2} \quad (e)$$

将式(b)和(e)叠加, 并令其满足边界条件(a)得

$$2(1-2\nu)GA + B = 0 \quad (f)$$

另外, 在平行于边界平面的任何水平面上, 必定有平衡条件

$$\int_0^\infty 2\pi r dr \cdot \sigma_z + P = 0$$

将式(10.39)和(d)相加, 代入上式得

$$8(1-\nu)\pi GA + 2\pi B = P \quad (g)$$

联立式(f)和(g), 可解得

$$A = \frac{P}{4\pi G}, \quad B = \frac{1-2\nu}{2\pi} P \quad (h)$$

将两组位移函数对应的位移和应力分别叠加, 将式(h)代入, 并注意到

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

最后得到 Boussinesq 问题的解答

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\nu)r}{R+z} \right] \\ w &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\nu)R}{R+z} - \frac{3zr^2}{R^3} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \\ \tau_{zr} &= -\frac{3Pz^2r}{2\pi R^5} \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

10.3.4 Cerruti 问题

设半无限弹性体水平边界上受切向集中力 P 作用(图 10.3)。不计体力,求解弹性体内的位移和应力,这就是 Cerruti 问题。取力 P 的作用点为坐标原点, z 轴指向半无限体的内部。面力边界条件为

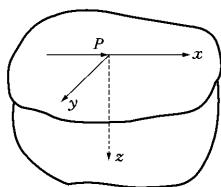


图 10.3 Cerruti 问题

$$\sigma_z|_{z=0, r \neq 0} = 0, \quad \tau_{zx}|_{z=0, r \neq 0} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=0, r \neq 0} = 0 \quad (a)$$

应力分量还应满足下列平衡条件

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{zx} dx dy + P &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma_z - z\tau_{zy}) dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{zy} dx dy &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x\sigma_z - z\tau_{zx}) dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z dx dy &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\tau_{zx} - x\tau_{zy}) dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

取 Galerkin 位移函数

$$V_1 = AR, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = Bx \ln(R+z) \quad (c)$$

再取如下调和函数作为 Lamé 位移函数

$$\phi = \frac{Cx}{R+z} \quad (d)$$

首先将式(c)代入式(10.12b)和(10.10), 将式(d)代入式(10.8)和(10.11b)

得到两组函数对应的应力分量,然后将应力分量进行叠加,代入边界条件(a)和平衡条件(b),求得待定常数

$$A = \frac{P}{4\pi(1-\nu)}, \quad B = \frac{(1-2\nu)P}{4\pi(1-\nu)}, \quad C = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi} \quad (e)$$

最后可得解答

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left\{ 1 + \frac{x^2}{R^2} + (1-2\nu) \left[\frac{R}{R+z} - \frac{x^2}{(R+z)^2} \right] \right\} \\ v &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[\frac{xy}{R^2} - (1-2\nu) \frac{xy}{(R+z)^2} \right] \\ w &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi ER} \left[\frac{xz}{R^2} + (1-2\nu) \frac{x}{R+z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

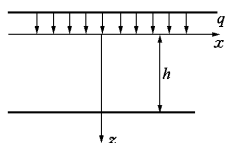
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Px}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(R^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{Px}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(3R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3y^2}{R^2} \right] \\ \sigma_z &= -\frac{3Pxz^2}{2\pi R^5}, \quad \tau_{yz} = -\frac{3Pxyx}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zx} = -\frac{3Px^2z}{2\pi R^5} \\ \tau_{xy} &= \frac{Py}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \left(-R^2 + x^2 + \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.43)$$

习 题

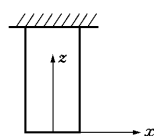
10.1 设半无限弹性体的质量密度为 ρ , 其水平边界上作用均布压力 q , 在 $z=h$ 处 $w=0$ 。试用位移法求解其位移分量和应力分量。

答案: $u=v=0$, $w = \frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)} [\rho g(h^2 - z^2) + 2q(h-z)]$;

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\nu}{1-\nu}(q + \rho g z), \quad \sigma_z = -(q + \rho g z), \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$



题 10.1 图



题 10.2 图

- 10.2 设有任意形状的等截面柱,密度为 ρ ,上端悬挂,下端自由。试考察应力分量 $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $\sigma_z = \rho g z$ 是否能满足所有条件。
- 10.3 试验证 $1/R$ 和 $\ln(R+z)$ 为调和函数(其中 $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$)。
- 10.4 试证明若 ϕ 为调和函数,则 $\phi = x_i \phi$ 和 $\phi = R^2 \phi$ 为双调和函数。

第 11 章

柱体扭转

前面各章介绍了弹性力学平面问题和空间问题,其解析解法仅基于基本假设,通常称为数学弹性力学。对于某些特殊结构或构件,这样解析求解将遇到巨大困难,不得不发展近似的应用理论。本章及后两章将要讨论的柱体、薄板和薄壳就属于这种问题,其中在基本假设的基础上还引入了附加假设,因而被视为应用弹性力学的内容。

柱体扭转问题是指柱体只在端部受到扭矩的作用,且扭矩矢量与柱体的轴线方向重合。它是一种特殊的空间问题,根据其基本特征和试验结果,可以做出一些合理的简化假设。本章首先阐述这些假设,并由空间问题的微分方程推导出扭转问题的基本求解方程,然后给出若干典型问题的解答,最后简要介绍扭转问题的薄膜比拟。

11.1 基本方程

11.1.1 简化假设

(1) 圆形截面柱体

在材料力学中研究过圆形截面柱体的扭转(图 11.1),此时截面将保持为平面,半径恒保持为直线。也就是说,在扭转过程中,截面如同刚性片那样绕柱体中心轴线发生相对转动即刚性转动假设,而且截面的轴向位移为零即无翘曲假设。设扭矩 M 指向截面外法线方向时为正。在截面刚性转动和无翘曲假设下, $P(x, y, z)$ 或 (r, θ, z) 点的位移分量为

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \alpha z r, \quad w = 0 \quad (11.1a)$$

或

$$u = -\alpha z y, \quad v = \alpha z x, \quad w = 0 \quad (11.1b)$$

其中, α 是间距为单位杆长的两截面的相对转角, 称为扭角, 当正面(外法线与 z 轴正向相同的截面)由 x 轴逆时针转向 y 轴时为正。 αz 是距原点为 z 处的截面(简称 z 截面)相对于 $z=0$ 截面的转角。

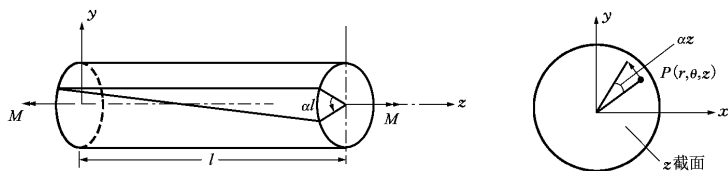


图 11.1 圆形截面柱体的扭转

(2)任意截面柱体

Cauchy 首先指出矩形截面柱的扭转与圆形截面柱的扭转有重大区别。试验表明, 由于截面的非对称性, 在扭转过程中截面不再保持为平面, 而是发生垂直于截面的翘曲变形。St. Venant 假定截面的翘曲变形与 z 无关, 即各截面的翘曲都一样, 翘曲函数仅为 x, y 的函数, 此即等翘曲假设。此外, 试验表明刚性转动假设依然成立, 故可设

$$u = -\alpha z y, \quad v = \alpha z x, \quad w = \alpha \psi(x, y) \quad (11.2)$$

如果柱体端面的约束限制截面翘曲, 或者相邻截面翘曲不一致引起对翘曲的约束, 那么就会产生轴向应力。不过, 在多数情况下, 这种约束效应不大, 为使问题简化, 通常将其忽略不计。截面可以自由翘曲的扭转问题称为自由扭转, 本章只讨论自由扭转问题。

11.1.2 位移法方程

(1)应变分量

将式(11.2)代入空间问题的几何方程得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{zy} &= \alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

(2)应力分量

将式(11.3)代入空间问题的广义 Hooke 定律, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{zx} &= G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{zy} &= G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

(3) 平衡方程

在不计体力的情况下, 空间问题的平衡方程仅剩下

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (11.5)$$

将式(11.4)代入上式得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{或} \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (11.6)$$

可见 翘曲函数 ψ 是调和函数。

(4) 边界条件

对于扭转问题, 柱体的侧面为自由表面。注

意到 $n = \cos(n, z) = 0$, 则应力边界条件(6.6)

仅剩下

$$l\tau_{zx} + m\tau_{zy} = 0 \quad (11.7)$$

其中 $l = \cos(n, x)$, $m = \cos(n, y)$, n 为侧面外法线单位矢量(图 11.2)。将式(11.4)代入上式得

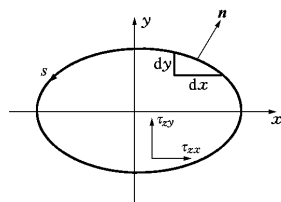


图 11.2 柱的边界

$$l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) + m \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = 0 \quad (11.8)$$

端部边界条件

$$\left. \begin{aligned} \iint_A \tau_{zx} dA &= 0, & \iint_A \tau_{zy} dA &= 0, & \iint_A \sigma_z dA &= 0, & \iint_A \sigma_{zx} dA &= 0 \\ \iint_A \sigma_{zy} dA &= 0, & \iint_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA &= M \end{aligned} \right\}$$

仅剩下

$$\iint_A \tau_{zx} dA = 0, \quad \iint_A \tau_{zy} dA = 0, \quad \iint_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = M \quad (11.9)$$

其中 A 为柱体截面。可以证明,只要满足侧面条件(11.8),式(11.9)的前两式自然满足(证明见后面)。将式(11.4)代入式(11.9)的第三式,得

$$\alpha G \iint_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy = M \quad (11.10a)$$

或

$$M = \alpha D_t \quad (11.10b)$$

其中 D_t 称为扭转刚度,其表达式为

$$D_t = G \iint_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy \quad (11.11)$$

可见,扭转问题的位移解法归结为根据调和方程(11.6)和边界条件(11.8)、(11.10)求翘曲函数 ψ 。分析表明,翘曲函数虽然满足简单的 Laplace 方程,但因边界条件较为复杂而应用起来不方便,通常采用应力函数求解问题。

11.1.3 应力法方程

(1)平衡方程与应力函数

根据前面的分析,扭转问题仅有两个非零应力分量 τ_{zx} 和 τ_{zy} ,它们应满足平衡方程(11.5)。显然,若引入应力函数 φ ,使得

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (11.12)$$

则平衡方程将自动满足。这里的函数 φ 称为 **Prandtl 应力函数**。

(2)协调方程与泊松方程

对于扭转问题,应力满足的协调方程简化为

$$\nabla^2 \tau_{zx} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{zy} = 0 \quad (11.13)$$

将式(11.12)代入上式得

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \varphi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \varphi) = 0$$

可见 $\nabla^2 \varphi$ 与 x 和 y 无关,故必为常数。因此应力函数满足 **Poisson 方程**,即

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C \quad (11.14a)$$

对比式(11.4)和(11.12),可得应力函数与翘曲函数之间的关系为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -G\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

以上两式分别对 y 和 x 求偏导, 然后相加得

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\alpha \quad (11.14b)$$

可见, 式(11.14a)中的常数为

$$C = -2G\alpha \quad (11.15)$$

(3) 边界条件与扭矩公式

根据式(11.7)和(11.12), 应力边界条件成为

$$l \frac{\partial \varphi}{\partial y} - m \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

由于在边界上(图 11.2)

$$l = \frac{dy}{ds}, \quad m = -\frac{dx}{ds}$$

故式(a)成为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (b)$$

这说明在杆的侧面上, 应力函数值应当是常数, 即

$$\varphi|_s = C_1$$

由式(11.12)可知, 应力函数可以任意增减一个常数, 故为简便可取

$$\varphi|_s = 0 \quad (11.16)$$

应当指出, 在多连通域(空心柱)问题中, 虽然应力函数在每一条边界上都是常数, 但各个常数一般并不相同, 因此只能把其中一个边界上的应力函数取为零, 而其他边界上则为待定常数。

现考虑端部边界条件, 例如

$$\iint_A \tau_{zx} dA = \iint_A \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi \Big|_{y_1}^{y_2} dx \quad (c)$$

其中 x_1, x_2, y_1, y_2 均为截面边界上点的坐标。注意到式(11.16), 边界条件(11.9)中的第一式自然满足。同理可知, 第二式也自然满足, 而第三式则变为

$$\iint_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = - \iint_A \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy = M$$

对上式进行分部积分,注意到 x_1, x_2, y_1, y_2 均为边界上点的坐标及式(11.16),有

$$\iint_A x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(x\varphi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \varphi dx \right) dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \varphi dx dy = - \iint_A \varphi dx dy$$

从而

$$2 \iint_A \varphi dx dy = M \quad (11.17)$$

综上所述,应力解法归结为求解应力函数 φ ,使其满足泊松方程(11.14)和边界条件(11.16)、(11.17)。虽然应力解法中的 Poisson 方程比 Laplace 方程复杂,但边界条件特别简单,可方便地求解一些较简单的问题。例如,由于应力函数在边界上为零,故有些情况下可根据边界线方程构造应力函数。

11.2 典型例解

11.2.1 椭圆截面柱

(1)应力函数

设等截面柱的截面为椭圆,其半轴为 a 和 b 。应力函数 φ 在横截面的边界上应当等于零,故考虑到椭圆边界方程可设

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (a)$$

其中 m 为待定常数。将上式代入泊松方程(11.14)得

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = C$$

解出 m 后代入式(a)得

$$\varphi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (b)$$

将式(b)代入式(11.17)得

$$C = - \frac{2(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3} \quad (c)$$

再将式(c)代回式(b)得

$$\varphi = -\frac{M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (d)$$

(2) 应力和位移

上述应力函数满足了所有方程, 可根据式(11.12)求得应力分量

$$\tau_{zx} = -\frac{2M}{\pi ab^3}y, \quad \tau_{zy} = \frac{2M}{\pi a^3b}x \quad (11.18)$$

可见, 最大剪应力发生在截面周边上。

根据式(11.15), 有

$$\alpha = -\frac{C}{2G} = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3b^3G} \quad (11.19)$$

代入式(11.2)得

$$u = -\frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3b^3G}yz, \quad v = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3b^3G}xz \quad (11.20)$$

注意到几何方程和本构方程, 有

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (e)$$

将式(d)和(11.20)代入式(e)得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3b^3G}y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3b^3G}x$$

积分上式, 分别得

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3b^3G}xy + f_1(y)$$

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3b^3G}xy + f_2(x)$$

显然, $f_1(y)$ 和 $f_2(x)$ 应等于同一常数 w_0 , 即刚体平移。若不考虑刚体平移, 则

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3b^3G}xy \quad (11.21)$$

该公式表明, 柱体的横截面将翘成曲面; 当 $a = b$ 即为圆柱时, 有 $w = 0$, 这说明材料力学中圆柱扭转问题中无翘曲假设是合理的。

11.2.2 矩形截面柱

(1) 问题与简化

设柱为矩形截面(图 11.3), 长为 $2a$, 宽为 $2b$ 。问题的解可假定为如下形式

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$$

其中 φ_0 为 Poisson 方程的特解, φ_1 是相应齐次方程的解, 即

$$\nabla^2 \varphi_0 = -2G\alpha, \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

特解 φ_0 无需满足边界条件, 通常容易求得。对于矩形截面, 可取为

$$\varphi_0 = -G\alpha(y^2 - b^2)$$

此后的问题成为

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad (11.22)$$

$$\varphi_1 = -\varphi_0 = \begin{cases} 0 & y = \pm b \\ G\alpha(y^2 - b^2) & x = \pm a \end{cases} \quad (11.23)$$

(2) 应力函数

现采用分离变量法求解上述方程。令

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (11.24)$$

代入式(11.22)得

$$\nabla^2 \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (X_n'' Y_n + Y_n'' X_n) = 0$$

从而

$$X_n''/X_n = -Y_n''/Y_n$$

上式等号左面仅为 x 的函数, 右面仅为 y 的函数, 故只能等于常数。令该常数为 k_n^2 , 于是有

$$X_n'' = k_n^2 X_n, \quad Y_n'' = -k_n^2 Y_n \quad (11.25)$$

它们的解为

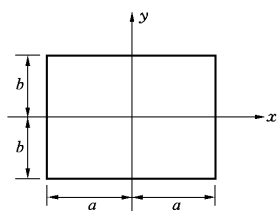


图 11.3 矩形截面

$$\left. \begin{aligned} X_n &= C_{1n} \operatorname{sh} k_n x + C_{2n} \operatorname{ch} k_n x \\ Y_n &= C_{3n} \sin k_n y + C_{4n} \cos k_n y \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

其中的待定常数 $C_{in} (i=1, 2, 3, 4)$ 由边界条件确定。根据式(11.23)的第二式, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\pm a) Y_n(y) = G\alpha(y^2 - b^2), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\pm a) Y'_n(y) = 2G\alpha y$$

由此可知, $X_n(x)$ 是 x 的偶函数, 故 $C_{1n}=0$; $Y'_n(y)$ 是 y 的奇函数, 故 $C_{3n}=0$ 。于是

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \operatorname{ch} k_n x \cdot C_{4n} \cos k_n y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{ch} k_n x \cdot \cos k_n y \quad (11.27)$$

根据式(11.27)和(11.23)的第一式, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos k_n b \cdot \operatorname{ch} k_n x = 0$$

从而

$$\cos k_n b = 0, \quad k_n = \frac{n\pi}{2b}$$

其中, n 为奇数。于是

$$\varphi = -G\alpha(y^2 - b^2) + \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cdot \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (11.28)$$

上式中的第一项展成级数, 经整理得

$$\varphi = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left(G\alpha \frac{32b^2}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi}{2} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \right) \cos \frac{n\pi y}{2b}$$

注意到 $x = \pm a$ 时, $\varphi = 0$, 可得

$$A_n = -G\alpha \frac{32b^2}{\pi^3} B_n, \quad B_n = \sin \frac{n\pi}{2} \left(n^3 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} \right) \quad (11.29)$$

代入式(11.28)得

$$\varphi = -G\alpha \left(y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} \cdot \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \quad (11.30)$$

根据式(11.17)

$$M = 2 \iint_A \varphi dx dy = 16 G a b^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{64b}{a \pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n \pi a}{2b} \right)$$

可得

$$\alpha = \frac{M}{16 G a b^3 \beta} \quad (11.31)$$

其中

$$\beta = \frac{1}{3} - \frac{64b}{a \pi^5} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n \pi a}{2b} = f_1 \left(\frac{a}{b} \right) \quad (11.32)$$

代入式(11.30)得

$$\varphi = - \frac{M}{16 a b^3 \beta} \left(y^2 - b^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{n \pi x}{2b} \cdot \cos \frac{n \pi y}{2b} \right) \quad (11.33)$$

(3)剪应力

将式(11.33)代入式(11.12)得

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{M}{16 a b^3 \beta} \left(2y - \frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n B_n \operatorname{ch} \frac{n \pi x}{2b} \cdot \sin \frac{n \pi y}{2b} \right) \quad (11.34)$$

$$\tau_{zy} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M}{16 a b^3 \beta} \left(\frac{16b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n B_n \operatorname{sh} \frac{n \pi x}{2b} \cdot \cos \frac{n \pi y}{2b} \right) \quad (11.35)$$

在 $x=0, y=\pm b$ 处剪应力取得最大值

$$|\tau_{\max}| = \frac{M}{8 a b^2 \gamma} = \frac{M}{(2a)(2b)^2 \gamma} \quad (11.36)$$

其中

$$\gamma = \frac{\beta}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(n^2 \operatorname{ch} \frac{n \pi a}{2b} \right)^{-1}} = f_2 \left(\frac{a}{b} \right) \quad (11.37)$$

计算表明,当 a/b 很大时, β, γ 均接近于 1/3。此时,式(11.31)和式(11.36)简化为

$$\alpha = \frac{3M}{G(2a)(2b)^3}, \quad \tau_{\max} = \frac{3M}{(2a)(2b)^2} \quad (11.38)$$

11.3 薄膜比拟

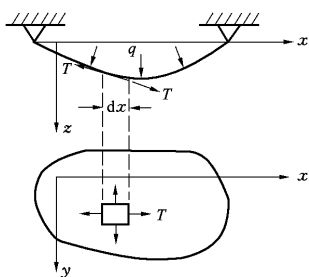
设有一块均匀薄膜,张在一个水平边界上,该边界与柱体横截面的边界相同

(图 11.4)。当薄膜承受很小的气体压力 q 时,其上各点将发生微小的垂度。以边界所在的平面为 xy 面,垂度为 w 。考虑到薄膜的柔性,可假定其不承受弯矩、扭矩、剪力,而只承受均匀拉力 T (单位宽度上的拉力)。

从薄膜中取微元,在小挠度情况下,微元左边 T 的斜率 $\beta \approx \partial w / \partial x$,微元右边 T 的斜率为

$$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

图 11.4 薄膜受压



同理可得微元上下两边 T 的斜率。不计薄膜重量,考虑 z 方向的平衡

$$-T dy \frac{\partial w}{\partial x} + T dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - T dx \frac{\partial w}{\partial y} + T dx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) + q dx dy = 0$$

即

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = 0 \quad (11.39)$$

或

$$\nabla^2 w = -\frac{q}{T} \quad (11.40)$$

此外,在边界上薄膜的垂度显然等于零,即

$$w|_s = 0 \quad (11.41)$$

薄膜与边界平面之间的体积的两倍为

$$2V = 2 \iint_A w dx dy \quad (11.42)$$

薄膜沿 y 方向的斜率为

$$i_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (11.43)$$

可以将柱的扭转问题与上述薄膜在均匀压力作用下的变形问题加以比拟。将式(11.40)、(11.41)、(11.42)、(11.43)分别与式(11.14)、(11.16)、(11.17)、(11.12)对比,可知:如果使薄膜的 q/T 相当于扭柱的 $2G\alpha$,或者使薄膜与边界

平面之间的体积的两倍相当于扭矩,则薄膜的垂度 w 就相当于扭柱的应力函数 φ ;薄膜沿 y 方向的斜率相当于扭柱横截面上沿 x 方向的剪应力 τ_{zx} 。为了确定扭柱横截面上的最大剪应力,只需求出对应薄膜的最大斜率即可,故可通过实验方法求解扭转问题。

根据类比,沿 x, y 方向的剪应力值分别等于薄膜沿 y, x 方向的斜率。注意到 x, y 轴可以取为任意两个相互垂直的方向,故各点的剪应力均与其斜率对应。最大剪应力点对应最大斜率点,但最大剪应力方向与最大斜率方向垂直。

习 题

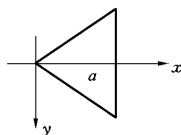
11.1 在非圆形截面柱的扭转问题中,引入了哪些简化假设?与圆形截面柱的假设有何异同?

11.2 设柱体的横截面为等边三角形,三角形的高为 a 。试验证应力函数

$$\varphi = m(x-a)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

能满足一切条件,并求出最大剪应力及扭角。

答案: $|\tau_{\max}| = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^3}$, $\alpha = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}$ 。



11.3 试简述采用薄膜比拟求解柱体扭转问题的基本思想。

题 11.2 图

第 12 章

薄板理论

在弹性力学中,将两个平行面和垂直于该平行面的柱面所围成的物体称为平板,简称板,两个平行的表面间垂直距离 h 称为板的厚度。通常人们把平板分为薄板和中厚板。定量地说,当厚度 h 与最小长度或宽度 $l_{\min}$ 之比 $h/l_{\min} < 1/15$ 时,可认为是薄板,否则就属于中厚板。

本章仅研究薄板,且限于小挠度问题。首先定义问题并引入附加假设,然后分别介绍直角坐标系和极坐标系中薄板弯曲问题的基本方程与求解方法。

12.1 问题与假设

12.1.1 问题定义

板内厚度中点构成的平面称为中面。薄板可能承受平行于板面的纵向荷载和垂直于中面的横向荷载。纵向荷载作用时属于平面应力问题,此时板的内力(单位宽度上应力沿板厚度的合力)为面内拉力(或压力)及面内剪力,它们统称为薄膜力。在横向荷载作用下,板将发生弯曲,中面由平面变为挠曲面。采用右手坐标系 $oxyz$,以未变形的中面为 xy 坐标面(图 12.1),中面各点沿 z 轴的横向位移 w 即挠度。

一般情况下,横向荷载作用下板的内力既有弯曲力又有薄膜力。当最大挠度 $w_{\max}$ 远远小于厚度 h 时,内力以弯曲力为主,薄膜力可以忽略不计。此时认为板仅有弯曲变形而无中面的面内变形。这类板称为刚性板,其计算理论称为小挠度弯曲理论。如果 $w_{\max}$ 与 h 为同量级或更大时,板的弯曲力和薄膜力将具有同量级,必须同时考虑弯曲变形和中面的面内变形。这类板称为柔性板,相应的计算理论称为大挠度弯曲理论。当 $w_{\max}$ 远大于 h 时,弯曲力将远小于薄膜力,计算时可忽略不计。这类板称为绝对柔性板,其计算理论称为薄膜理论。通常认为,当 $w_{\max}/h \leq 1/15$ 时按刚性板计算;当 $1/15 < w_{\max}/h < 5$ 时按柔性板计算;而当 $w_{\max}/h \geq 5$ 时按绝对柔性板计算。

本章只讨论薄板小挠度弯曲理论。由于挠度很小,可以认为纵向荷载产生的薄膜应力和横向荷载产生的弯曲应力互不影响,因此可应用叠加原理计算总的薄板内力。

12.1.2 附加假设

弹性薄板小挠度弯曲理论基于如下假设(其核心是 Kirchhoff 提出的直法线假设):

(1)在板弯曲变形中,中面法线保持为直线且仍为弹性曲面(挠度曲面)的法线。这就是直法线假设,它类似于梁弯曲理论中的平截面假设。

(2)板的厚度方向的挤压变形可忽略不计,即 $\varepsilon_z = 0$ 。这项假定类似于梁纤维间无挤压假定。

(3)板的中面只发生弯曲变形,没有面内伸缩。

(4)在本构方程中不考虑次要应力 σ_z , τ_{zx} 和 τ_{zy} 对变形的影响。

薄板直法线假设意味着忽略剪应变 γ_{zx} 和 γ_{zy} ,其根据是横向剪切变形对挠度的影响很小。根据广义 Hooke 定律,横向剪应力 τ_{zx} 和 τ_{zy} 为零。但是,它们连同 σ_z 在平衡中仍起作用,且由平衡方程求出。换句话说, σ_z , τ_{zx} 和 τ_{zy} 与其他应力分量相比是次要应力,在本构方程中可以不考虑它们对变形的影响,但它们却是维持薄板平衡所必需的。实践表明,这种在次要应力和应变方面引起的矛盾是允许的。

12.1.3 解题思路

薄板弯曲问题采用位移法求解,基本思路是确定位移函数的形式,使其满足位移表示的平衡微分方程,然后再满足边界条件即得问题解答。基于前述简化假设,可由空间问题的微分方程推导出薄板弯曲问题的基本方程。结果是,薄板位移和内力均可用薄板挠度表示,问题归结为求解挠度。

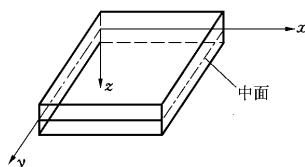
12.2 直角坐标解答

12.2.1 基本方程

(1)附加假设与位移函数

首先,根据假设(2)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



可知

图 12.1 薄板弯曲

$$w = w(x, y)$$

根据假设(1) 薄板弯曲后,板的法线与弹性曲面在 x 方向和 y 方向的切线都保持互相垂直,没有剪应变,即

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

由上式可知

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

上式对 z 积分,注意到 w 与 z 无关,得

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_1(x, y), \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x, y)$$

其中 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 是任意函数。根据假设(3),即

$$u|_{z=0} = v|_{z=0} = 0$$

有 $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$, 从而

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (12.1)$$

可见,薄板小挠度弯曲被简化为中面的弯曲问题。只要中面挠度 w 确定,任何点的位移都可确定。

(2) 几何方程与应变分量

根据上述分析,薄板内不等于零的应变分量有如下三个

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

在小变形情况下, $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 和 $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 分别代表薄板弹性曲面在 x 方向和 y 方向的曲率,而 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 代表在 x 方向和 y 方向的扭曲率。

(3) 本构方程与主要应力

根据假设(4),即在本构方程中不考虑次要应力 σ_z , τ_{zx} 和 τ_{zy} ,薄板弯曲问题的本构方程与平面应力问题的完全相同

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

(4) 平衡方程与次要应力

次要应力即 τ_{xz} , τ_{yz} 和 σ_z 是平衡所必需的, 且可根据平衡条件来确定。注意到没有 x, y 方向的体力, 这两个方向的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

将式(12.3)代入上式得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\}$$

上式对 z 进行积分, 注意到如下边界条件

$$\tau_{xz} \big|_{z=\pm h/2} = 0, \quad \tau_{yz} \big|_{z=\pm h/2} = 0$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{6D}{h^3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \\ \tau_{yz} &= -\frac{6D}{h^3} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

其中 D 称为板的抗弯刚度, 其表达式为

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12.6)$$

次要应力分量 σ_z 可根据 z 方向的平衡方程求得。在不计体力的情况下, 该方程变为

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

将式(12.5)代入上式得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{6D}{h^3} \nabla^4 w \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

积分上式得

$$\sigma_z = \frac{6D}{h^3} \nabla^4 w \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) + f_3(x, y) \quad (a)$$

在薄板的下面,有边界条件

$$\sigma_z|_{z=h/2} = 0 \quad (b)$$

将式(a)代入式(b), 求出 $f_3(x, y)$ 后再代入式(a)得

$$\sigma_z = \frac{6D}{h^3} \nabla^4 w \left[\frac{h^2}{4} \left(z - \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{h^3}{8} \right) \right] \quad (12.7)$$

(5) 平衡方程与挠曲方程

根据平衡微分方程, 已经用挠度 w 表示了 σ_z 。 σ_z 在薄板的上面需满足下述边界条件

$$\sigma_z|_{z=-h/2} = -q \quad (c)$$

将式(12.7)代入式(c)得

$$D \nabla^4 w = q \quad (12.8a)$$

即

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (12.8b)$$

式(12.8)称为薄板的弹性曲面微分方程或挠曲微分方程。从薄板中取出微元体进行平衡分析, 同样可推导出该方程式。

根据上述分析, 挠度 w 可以作为基本未知量, 且薄板弯曲问题归结为: 在给定薄板边缘的边界条件下求解挠曲微分方程。如果求得挠度, 则板中位移、应力等均可按照前述公式计算。通常情况下需要求出薄板的内力, 下面推导内力与挠度之间的关系。

(6) 薄板内力

在 x 为常数的横截面上, 单位宽度板上正应力 σ_x 合成的弯矩 M_x 、剪应力 τ_{xy} 合成的扭矩 M_{xy} 、剪应力 τ_{xz} 合成的横向剪力 Q_x 分别为

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (12.9)$$

在 y 为常数的横截面上,单位宽度板上正应力 σ_y 合成的弯矩 M_y 、剪应力 τ_{yx} 合成的扭矩 M_{yx} 、剪应力 τ_{yz} 合成的横向剪力 Q_y 分别为

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (12.10)$$

根据剪应力互等定理,有 $M_{xy} = M_{yx}$ 。将式(12.3),(12.5)代入式(12.9),(12.10)得

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

将式(12.3)和(12.5)与(12.11)进行比较,可以得到用内力矩表示的薄板应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x z}{J}, & \sigma_y &= \frac{M_y z}{J}, & \tau_{xy} &= \frac{M_{xy} z}{J} \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), & \tau_{yz} &= \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

其中 $J = h^3/12$ 即单位中面长度的截面对中面轴线的惯性矩。

12.2.2 边界条件

现以图 12.2 所示的矩形薄板为例,说明各种边界的边界条件。假定该板的 OA 边固定, OC 边简支, AB 边和 BC 边自由。

(1) 固定边(几何边界条件)

沿着固定边 OA ,薄板的挠度等于零,弹性曲面的斜率也等于零,即

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12.13)$$

(2) 简支边(混合边界条件)

沿着简支边 OC ,薄板的挠度等于零。如果有外加弯矩 $\overline{M}_y$ 作用,则

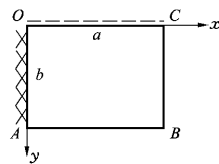


图 12.2 矩形薄板

$$w|_{y=0}=0, \quad M_y|_{y=0}=\overline{M}_y$$

注意到式(12.11), 有

$$w|_{y=0}=0, \quad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{y=0}=\overline{M}_y$$

挠度在整个边界上都等于零, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 也在整个边界上等于零, 故上式成为

$$w|_{y=0}=0, \quad -D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0}=\overline{M}_y \quad (12.14a)$$

如果外加弯矩 $\overline{M}_y=0$ 则

$$w|_{y=0}=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0}=0 \quad (12.14b)$$

(3) 自由边(静力边界条件)

沿着自由边, 例如 AB 边($y=b$), 薄板的弯矩 M_y 、扭矩 M_{yx} 、横向剪力 Q_y 均应等于零, 即

$$M_y|_{y=b}=0, \quad M_{yx}|_{y=b}=0, \quad Q_y|_{y=b}=0$$

然而, 根据微分方程理论, 挠曲微分方程(12.8)为四阶椭圆型偏微分方程, 在每个边界上只需要提供两个边界条件。早在 1850 年 Kirchhoff 建立前述薄板弯曲的近似理论时, 就通过变分法证明了每边两个边界条件足以决定方程(12.8)的解, 而扭矩和横向剪力须合为一个边界条件。学者们后来的研究表明, 边界上的扭矩都可以变换为等效的横向剪力 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ (图 12.3) 与原来的横向剪力归并为一个条件, 即

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

这样, 自由边的边界条件为

$$M_y|_{y=b}=0, \quad V_y|_{y=b}=\left(Q_y+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}\right)\Big|_{y=b}=0$$

注意到式(12.11), 上式成为

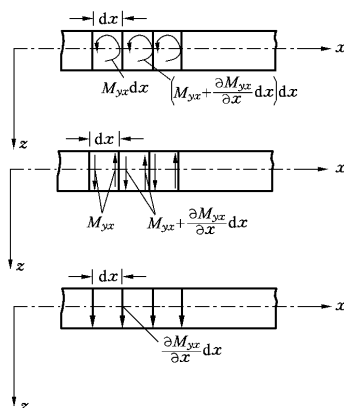


图 12.3 等效横向剪力

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \Big|_{y=b} = 0 \quad (12.15)$$

必须指出,不能精确满足每边应有的三个边界条件是薄板弯曲理论的不足之处,它与导出基本方程时引入的直线假设有关。此外,用等效剪力代替扭矩后,在两个自由边的交点 B 处将出现未低效的集中剪力

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B$$

通过式(12.11), B 点的角点条件 $R_B = 0$ 为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = 0 \quad (12.16)$$

当自由边与简支边或固定边相邻时,集中力将被反力所吸收,不需要列条件。此外,如果在 B 点有支柱阻止挠度发生,则上述条件应改为

$$w \Big|_{x=a, y=b} = 0 \quad (12.17)$$

板大多支承在梁上并与梁相连,此时该如何确定边界条件?基本原则是:如果梁的抗弯刚度和抗扭刚度都很大,可视为固支边;如果两者都很小,可当作自由边;如果抗弯刚度很大而抗扭刚度很小,则视为简支边。非上述情况下,支承构件的弹性必须加以考虑。

12.2.3 周边固支的椭圆板

设周边固定的椭圆板(图 12.4)受均布荷载 q 作用。其边界方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

试取挠度为

$$w = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (a)$$

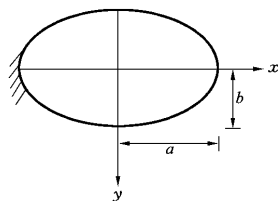


图 12.4 椭圆板

显然,上式满足挠度为零的边界条件。此外,在边界上,挠度的法向导数也应为零。不难看出,在边界上有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{4mx}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{4my}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

再注意到

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n}$$

可见, 挠度也满足在边界上 $\partial w / \partial n = 0$ 的条件。将式(a)代入式(12.8)得

$$D \left(\frac{24m}{a^4} + \frac{16m}{a^2 b^2} + \frac{24m}{b^4} \right) = q$$

解得 m 并代入式(a)得

$$w = \frac{q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2}{8D \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)}$$

12.2.4 矩形薄板的重三角级数解

(1) 简支薄板受分布荷载

设四边简支矩形薄板(图 12.5)受横向压力 q , 薄板的边界条件为

$$\begin{aligned} w|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0; & w|_{x=a}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} &= 0 \\ w|_{y=0}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0; & w|_{y=b}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} &= 0 \end{aligned}$$

Navier 取挠度表达式为重三角级数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{a})$$

不难看出, 该挠度表达式满足全部边界条件, 因此问题归结为确定其中的系数 A_{mn} 。为此, 将式(a)代入挠曲微分方程(12.8)得

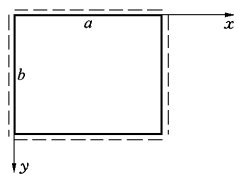


图 12.5 简支板

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q \quad (\text{b})$$

将横向荷载展为重三角级数

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{c})$$

为了求得 C_{mn} , 将式(c)的两边都乘以 $\sin \frac{i\pi x}{a}$, 其中 i 为任意正整数; 然后对 x 从 0 到 a 积分, 并注意到

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ a/2, & i = m \end{cases}$$

有

$$\int_0^a q \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (d)$$

再将式(d)的两边都乘以 $\sin \frac{j\pi y}{b}$, 其中 j 为任意正整数, 然后对 y 从 0 到 b 积分, 并注意到

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & j \neq n \\ b/2, & j = n \end{cases}$$

得

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} C_{ij} \quad (e)$$

将上式中的任意正整数 i, j 换成任意正整数 m, n , 并从中解出 C_{mn} 代回式(c)得

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

代回式(b), 比较系数得

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

(2) 简支薄板受集中荷载

四边简支的矩形薄板受集中力 P 作用。假设集中力均匀分布在 $2\epsilon \times 2\epsilon$ 微小面积上, 荷载强度 $q = P/(4\epsilon^2)$, 则荷载展开的傅立叶系数为

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{P}{ab\epsilon^2} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \int_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4P}{mn\pi^2\epsilon^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi\epsilon}{a} \sin \frac{n\pi\epsilon}{b} \end{aligned}$$

由于 ϵ 为任意小量, 可取

$$\sin \frac{m\pi\epsilon}{a} \approx \frac{m\pi\epsilon}{a}, \quad \sin \frac{n\pi\epsilon}{b} \approx \frac{n\pi\epsilon}{b}$$

故

$$C_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

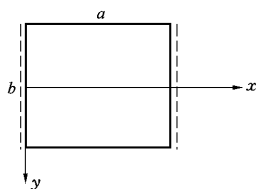
从而得集中力作用下的四边简支矩形薄板挠度方程

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

12.2.5 矩形薄板的单三角级数解

设矩形薄板的两个对边简支,另两边任意(图 12.6),板的顶面受横向压力 q ,薄板简支边的边界条件为

$$\begin{aligned} w|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0 \\ w|_{x=a}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} &= 0 \end{aligned}$$



M. Levy 将挠度取为如下三角级数

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (a)$$

图 12.6 矩形薄板

其中, Y_m 为 y 的任意函数。不难看出,该挠度表达式满足简支边界条件,因此问题归结为选择函数 Y_m ,使挠度满足挠曲微分方程(12.8)并且满足另两边的边界条件。将式(a)代入式(12.8)得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D} \quad (b)$$

将 q/D 展为三角级数

$$\frac{q}{D} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{q}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

对比式(b)与式(c)得

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = \frac{2}{aD} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (d)$$

该方程的解答为

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \quad (e)$$

其中 $f_m(y)$ 为方程(d)的一个特解。

12.3 极坐标解答

12.3.1 基本方程

求解圆形薄板弯曲问题时,采用极坐标系比较方便。极坐标系中薄板的基本方程可以根据直角坐标系中的基本方程通过坐标变换而得到。根据第 7 章推导的极坐标系中的 Laplace 算子,有

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

挠曲微分方程(12.8)成为

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q \quad (12.18)$$

从薄板内取出微元体,在 r 为常数的横截面上,应力分量 σ_r , $\tau_{r\theta}$ 和 τ_{rz} 分别合成为弯矩 M_r , 扭矩 $M_{r\theta}$ 和横向剪力 Q_r , 在 θ 为常数的横截面上,应力分量 σ_θ , $\tau_{\theta r}$ 和 $\tau_{\theta z}$ 分别合成为弯矩 M_θ , 扭矩 $M_{\theta r}$ 和横向剪力 Q_θ 。可利用应力坐标变换公式求出上述应力分量,然后积分求它们的合力或合力矩。也可采用下述较为简单的方法求得内力。先求出

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)$$

并将其代入式(12.11),得到极坐标表示的 M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y 。然后把 x 轴和 y 轴分别转到微元体的 r 方向和 θ 方向,使该微元体的 θ 坐标为零,则该微元体的 M_r , M_θ , $M_{r\theta}$, Q_r , Q_θ 分别成为 M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , 从而

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\theta=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{\theta=0} = -D \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \Big|_{\theta=0} = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\theta=0} = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \\ Q_\theta &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\theta=0} = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

12.3.2 边界条件

通过类似矩形薄板的讨论,可知圆形薄板的圆柱面和径向面上,总的横向剪力分别为

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}, \quad V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}$$

固定边界

$$w|_{r=a}, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (12.20)$$

简支边界

$$w|_{r=a}, \quad M_r|_{r=a} = \bar{M}_r \quad (12.21)$$

自由边界

$$M_r|_{r=a}, \quad V_r|_{r=a} = \left(Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=a} = 0 \quad (12.22)$$

由于圆板边界是光滑连续的闭曲线,故在将分布扭矩 $M_{r\theta}$ 转换为等效横向剪力后,不存在集中力。

12.3.3 轴对称问题

(1) 方程的解

如果圆形薄板所受横向荷载对称于 z 轴,那么挠度也将对称于 z 轴,即 w 只是 r 的函数,与 θ 无关。此时,挠曲微分方程简化为

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q \quad (12.23a)$$

或

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (12.23b)$$

其解为

$$\omega = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \omega_p$$

其中 ω_p 是任意一个特解, 可以根据荷载 q 来选择, 例如可从方程(12.23)积分得到

$$\omega_p = \frac{1}{D} \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int r q dr$$

(2) 内力计算

内力计算公式简化为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \nu \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right) \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ M_{r\theta} &= Q_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

(3) 均布荷载

对于受均布荷载 q_0 作用、周边固定的薄板(图 12.7), 式(12.23)的特解可以积分得到

$$\omega_p = \frac{q_0 r^4}{64D}$$

如果在薄板中心没有孔, 那么常数 C_1, C_2 均为零, 否则在薄板中心处挠度或内力将无穷大, 于是有

$$\omega = C_3 r^2 + C_4 + \frac{q_0 r^4}{64D}$$

边界条件为

$$\omega|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r=a} = 0$$

由此得

$$C_3 = -\frac{q_0 a^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{q_0 a^4}{64D}$$

从而得到圆形薄板挠度方程

$$w = \frac{q_0}{64D}(a^2 - r^2)^2$$

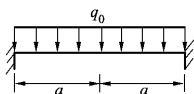


图 12.7 均布压力

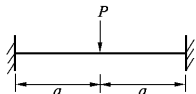


图 12.8 集中荷载

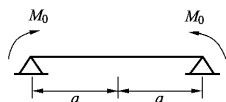


图 12.9 均布弯矩

(4)集中荷载

周边固定的圆形薄板,在中心作用集中力 P (图 12.8)。由于横向荷载 $q=0$,故特解 $w_p=0$,问题的解为

$$w = C'_1 \ln r + C'_2 r^2 \ln r + C'_3 r^2 + C'_4$$

或写成

$$w = C_1 \ln \frac{r}{a} + C_2 r^2 \ln \frac{r}{a} + C_3 r^2 + C_4$$

在板中心处,挠度应为有限值,故 $C_1 = 0$ 。根据固定边界条件 $w|_{r=a} = 0$ 和 $d w / d r|_{r=a} = 0$,可得

$$C_3 a^2 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$C_2 + 2C_3 = 0 \quad (b)$$

假想在圆板中央截取一半径为 ϵ 的小圆板,根据平衡条件有

$$\int_0^{2\pi} Q_r r d\theta + P = 0$$

即

$$Q_r 2\pi r + P = 0 \quad (c)$$

根据式(12.24),有

$$Q_r = -\frac{4DC_2}{r}$$

代入式(c)得 C_2 ,再代入式(a)和(b)得

$$C_2 = \frac{P}{8\pi D}, \quad C_3 = -\frac{P}{16\pi D}, \quad C_4 = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

最后得到挠度方程

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[(a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]$$

最大挠度发生在板中心处

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

弯矩为

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \\ M_\theta &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right] \end{aligned} \right\}$$

(5) 均布弯矩

简支圆形薄板的周边作用均布弯矩 M_0 (图 12.9)。考虑到 $q = 0$ 及薄板中心处挠度和内力有限, 可知

$$w = C_3 r^2 + C_4 \quad (a)$$

代入边界条件

$$w|_{r=a} = 0, \quad M_r|_{r=a} = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r=a} = M_0$$

可得

$$C_3 = -\frac{M_0}{2D(1+\nu)}, \quad C_4 = \frac{M_0 a^2}{2D(1+\nu)} \quad (b)$$

代入式(a)得

$$w = \frac{M_0}{2D(1+\nu)} (a^2 - r^2)$$

习 题

12.1 试进行薄板微元受力分析(以中面代表板, 将截面应力合成为中面内力), 推导薄板挠曲微分方程

$$D \nabla^4 w = q$$

- 12.2 若长条板($b \gg a$)承受的横向荷载仅沿 x 方向变化即 $q = q(x)$,则板弯成柱形曲面 $w(x)$ 。试写出其挠曲微分方程。
- 12.3 若受横向荷载 q 作用的矩形薄板平置在 Winkler 弹性地基上 ,地基反力为 $p = k\tau w$,其中 k 为地基的基床系数。试写出薄板挠曲微分方程 ,并用下述挠度函数求解周边简支时的解答

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

答案: $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{k w}{D} = \frac{q}{D}$;

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \alpha x \sin \beta y dx dy}{ab [D(\alpha^2 + \beta^2)^2 + k]} \quad \text{其中 } \alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}。$$

- 12.4 设矩形板 $a \times b$ 的挠曲面方程具有如下形式 :

$$(1) w = C \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{b} \right) ;$$

$$(2) w = Cxy(x-a)(x-b) ;$$

$$(3) w = C \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}。$$

其中 C 为待定常数。试分别求其对应的边界条件及荷载形式。

第 13 章

薄壳理论*

壳体主要是被两个曲面所限的物体,两曲面之间的距离 h 称为壳体厚度,平分壳体厚度的曲面称为中曲面或中面。当壳体厚度比最小曲率半径 $r_{\min}$ 等其他尺寸小得多,例如 $h/r_{\min} \leq 1/20$ 时,称为薄壳,否则称为厚壳。实际壳体的 $h/r_{\min}$ 多在 $1/1000$ 和 $1/50$ 之间,故大都可以按薄壳理论进行计算,本章仅讨论薄壳。

壳体的几何形状和变形现象都很复杂,是具有薄膜和弯曲两重受力特征的三维特殊结构。为了简化分析,学者们在弹性力学基本假设的基础上引入各种不同的假设来发展壳体理论,得到了多种控制方程。本章不加推导地给出壳体理论的一般方程,并针对若干特殊问题做出简化并给出解答。此外,壳体分析用到复杂的曲面理论,因此本章首先简要介绍曲面理论的几个基本概念。

13.1 曲面理论简介

13.1.1 第一二次齐式

曲面 S 上任意点 P (图 13.1a) 的坐标 x, y, z 可以用曲线坐标 α_1, α_2 表示如下

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2), \quad y = y(\alpha_1, \alpha_2), \quad z = z(\alpha_1, \alpha_2)$$

此式称为曲面参数方程。 P 点的矢径为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = x(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{i} + y(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{j} + z(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{k}$$

而

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2$$

显然, 矢量 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}$ 分别指向 α_1 线和 α_2 线的正方向, 并与曲线坐标线相切。微分弧段长的平方为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E d\alpha_1^2 + 2F d\alpha_1 d\alpha_2 + G d\alpha_2^2 \quad (13.1)$$

其中

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \quad (13.2)$$

式(13.1)称为曲面的第一二次齐式, E, F, G 称为第一类基本量。第一二次齐式表示的是无限邻近的两点间距离。

在曲面上取一组流动的坐标系, 其单位基矢量 e_1 和 e_2 分别指向 α_1 线和 α_2 线的正方向, 并与之相切, 而 e_3 为曲面的法线方向的单位矢量, 并记为 $e_3 = e_n$ 。显然有

$$e_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \right|, \quad e_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} \right|, \quad e_n = e_1 \times e_2 \quad (13.3)$$

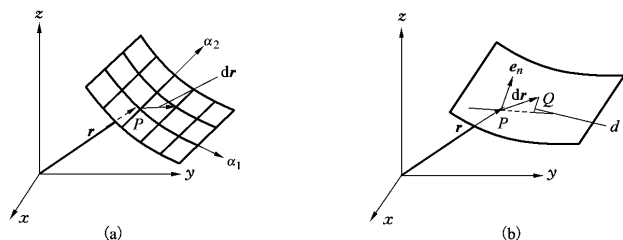


图 13.1 曲面与曲线坐标

13.1.2 第二二次齐式

过曲面 S 上的任一点 $P(\alpha_1, \alpha_2)$ 作切平面 T , 通过该点并垂直于 T 平面作法线矢量 e_n 。在曲面上任取一无限邻近点 $Q(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2)$, 图 13.1b 中的虚线为 $d\mathbf{r}$ 在 T 平面上的投影线。 Q 点到 T 平面的距离为

$$d = e_n \cdot d\mathbf{r} \\ = e_n \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) + \frac{1}{2}! \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1^2} d\alpha_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_2^2} d\alpha_2^2 \right) \right]$$

式中略去了二次以上的高阶微量。注意到 $\mathbf{e}_n$ 与 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2}$ 正交,有

$$2d = L d\alpha_1^2 + 2M d\alpha_1 d\alpha_2 + N d\alpha_2^2 \quad (13.4)$$

其中

$$L = \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1^2}, \quad N = \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_2^2}, \quad M = \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad (13.5)$$

式(13.4)称为曲面的第二二次齐式, L, M, N 称为第二类基本量。第二二次齐式与曲面上的曲率有密切关系。

13.1.3 主曲率与主曲率线

过壳体中面 S 上的任一点 P 作垂直于切平面 T 的法线 n , 通过法线 n 可以作无数个法截面 Π , 它们与曲面 S 相交可得无数条法截线。这些法截线在 P 点处的曲率称为法曲率。在 P 点的所有法曲率中, 取极值的曲率称为 P 点的主曲率, 对应于主曲率的方向称为 P 点的主方向。若曲面上一条曲线在每一点的主曲率都等于该曲面在该点的主曲率, 那么这条曲线称为主曲率线。可以证明, 任何壳体的中面都具有两个正交方向的主曲率线, 通常以 α, β 表示; 它们的曲率分别为 k_1, k_2 , 曲率半径分别为 r_1, r_2 。为了使壳体计算简化, 通常把壳体变形前中面的两个主曲率线方向和中面的法线方向作为壳体的曲线坐标轴, 形成主曲率坐标系 $\alpha\beta z$ 。令

$$A = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right| = \sqrt{E}, \quad B = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| = \sqrt{G}$$

则

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$$

显然, 在正交坐标系中有

$$F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = AB \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad M = \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

式(13.2)和(13.4)分别变为

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \quad (13.6)$$

$$2d = L d\alpha^2 + N d\beta^2 \quad (13.7)$$

其中 A, B 称为拉梅系数, 一般情况下是 α, β 的函数。 A 的几何意义是当 α 坐标改变时, α 线的弧长增量与 α 坐标增量之比; B 的几何意义是当 β 坐标改变

时, β 线的弧长增量与 β 坐标增量之比。给定曲面以后, A, B 可直接求出, 其公式为

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2}, \quad B = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2} \quad (13.8)$$

此外, 还可求得 α 线和 β 线的主曲率、曲率半径, 它们分别为

$$k_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{L}{A^2}, \quad k_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{N}{B^2} \quad (13.9)$$

例如, 对于半径为 a 的圆柱面, 柱坐标系下的参数方程为

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = z$$

故

$$\mathbf{r} = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为 x, y, z 轴的单位基矢量。这里, $\alpha = z, \beta = \theta$, 不难计算出

$$\begin{aligned} A &= 1, \quad B = a \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \\ L &= \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial z^2} = 0, \quad N = \mathbf{e}_n \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = a \\ k_1 &= \frac{1}{r_1} = \frac{L}{A^2} = 0, \quad k_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{N}{B^2} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

13.2 一般理论

13.2.1 附加假设

Love(1898)将 Kirchhoff 提出的薄板假设推广应用到壳体, 建立了薄壳理论。与薄板弯曲相似, 薄壳发生微小变形时, 也可忽略沿壳体厚度方向的挤压变形, 且认为直法线假设成立, 即在变形过程中, 中面法线保持为直线并垂直于变形后的中面。但是, 中面不但发生了弯曲, 而且也发生了面内的伸缩变形, 这一点与薄板不同。

薄壳中面发生曲率改变时, 对应产生横截面(通过法线的截面)上的正应力和平行于中面的剪应力, 这些应力在截面内合成为弯曲力。中面发生面内伸缩

变形时, 对应中面内的正应力和剪应力, 并合成薄膜力。薄壳的弯曲力和薄膜力是相互影响的, 它们共同承担着壳体上的外荷载。

在直法线假设下, 只需分析壳体中面的位移即可。常采用正交曲线坐标系作为局部坐标系, 把中面上点的位移分为沿中面切线方向的位移以及垂直于中面的法向位移。显然, 位移只是中面内两个坐标的函数, 因此薄壳问题是一种二维问题。

13.2.2 平衡方程

(1) 内力和应力

在壳体中面上任一点 o , 沿两个主曲率方向取微小单元体(图 13.2)。注意到壳体厚度方向无挤压应力, 单元体上的应力为 σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\alpha}$ 和 $\tau_{\alpha z}$, 它们合成单位中面长度截面上的内力, 包括法向力、剪力、横向剪力、弯矩和扭矩。

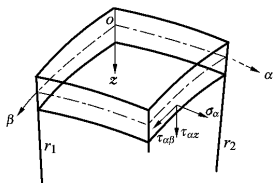


图 13.2 壳微元体

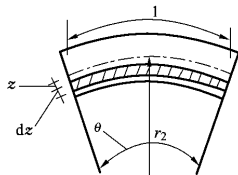


图 13.3 单位长度截面

在 α 为常数的截面上, 沿 β 线方向取单位长度(图 13.3), 其对应的角度为 $\theta = 1/r_2$, 而 z 坐标处的长度为 $(r_2 - z)\theta = 1 - z/r_2$ 。这样, 截面上 z 坐标处阴影窄条面积为 $dA = (1 - z/r_2)dz$ 。于是, 各内力为

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz, & N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z} \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha z \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz, & M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} z \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

同理, 在 β 为常数的截面上, 有

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz, & N_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz \\ Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta z} \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta z \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz, & M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} z \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

根据式(13.10)和(13.11)可知, 尽管剪应力互等(即 $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$), 但由于曲率半径一般不等(即 $r_1 \neq r_2$), 故 $N_{12} \neq N_{21}$, $M_{12} \neq M_{21}$ 。然而, 在进一步的讨论中将略去小量 z/r_1 和 z/r_2 的影响, 此时有 $N_{12} = N_{21}$, $M_{12} = M_{21}$ 。

求得内力分量后, 即可按下式计算薄壳中的主要应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &\cong \frac{N_1}{h} + \frac{M_1 z}{h^3/12}, & \sigma_\beta &\cong \frac{N_2}{h} + \frac{M_2 z}{h^3/12} \\ \tau_{\alpha\beta} &\cong \frac{N_{12}}{h} + \frac{M_{12} z}{h^3/12}, & \tau_{\beta\alpha} &\cong \frac{N_{21}}{h} + \frac{M_{21} z}{h^3/12} \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

根据假定, $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta z}$ 对变形的影响可以忽略不计, 但研究平衡时必须考虑它们或由它们合成的内力 Q_1 , Q_2 。与薄板类似, Q_1 , Q_2 通过平衡方程求得, 而不是像其他内力分量那样, 在求得应变之后由本构方程来计算。在壳体分析中, 通常套用薄板弯曲中的相应公式来计算 $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta z}$, 即

$$\tau_{\alpha z} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_1, \quad \tau_{\beta z} = \frac{3(h^2 - 4z^2)}{2h^3} Q_2 \quad (13.13)$$

(2) 平衡方程

在壳体平衡分析中, 用作用于中面的壳体内力代替截面上的应力, 故平衡分析可以在中面上进行。根据壳体的静力平衡, 可以导出壳体在正交曲线坐标系 $\alpha\beta z$ 下的平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} - N_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_{21})}{\partial\beta} + N_{12} \frac{\partial A}{\partial\beta} - AB \frac{Q_1}{r_1} + ABp_1 &= 0 \\ \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} - N_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial(BN_{12})}{\partial\alpha} + N_{21} \frac{\partial B}{\partial\alpha} - AB \frac{Q_2}{r_2} + ABp_2 &= 0 \\ AB \left(\frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} \right) + \frac{\partial(BQ_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial\beta} + ABp_3 &= 0 \\ M_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha} - M_{21} \frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABQ_2 &= 0 \\ M_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(AM_{21})}{\partial\beta} - M_{12} \frac{\partial A}{\partial\beta} + ABQ_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

13.2.3 几何方程

壳体中面位移与中面应变之间的关系即为壳体中面几何方程。中面位移分量有面内 α , β 方向的位移 u , v 和法向 z 方向的位移 w , 中面应变分量为: α , β 方向的正应变 ϵ_1 , ϵ_2 和剪应变 γ_{12} ; α , β 方向的曲率改变 χ_1 , χ_2 和扭率改变 χ_{12} 。现给出几何方程如下

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{r_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13.15a)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{v}{r_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{r_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{Br_2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{Ar_1} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13.15b)$$

与薄板类似,把与中面等距离的曲面称为 z 曲面。 z 曲面上 α, β 方向的应变 $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$ 和 $\tilde{\gamma}_{12}$ 与中面应变的关系为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1 &= \epsilon_1 - z\chi_1 \\ \tilde{\epsilon}_2 &= \epsilon_2 - z\chi_2 \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} - 2z\chi_{12} \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

可见,壳体内任一点的应变状态可以用中面的 6 个应变分量完全确定。

13.2.4 本构方程

在壳体分析中,采用的坐标系为正交曲线坐标系,故本构方程仍具有广义 Hooke 定律的形式。根据假定,挤压应变 $\epsilon_z = 0$,注意到式(13.16),有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\chi_1 + \nu\chi_2)] \\ \sigma_\beta &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\chi_2 + \nu\chi_1)] \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{12} - 2z\chi_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

将式(13.17)代入式(13.10)和(13.11),并忽略 z/r_1 和 z/r_2 等小量的影响得

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), & N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1) \\
 N_{12} &= N_{21} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}(1-\nu)\gamma_{12} \\
 M_1 &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_2), & M_2 &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_2 + \nu\chi_1) \\
 M_{12} &= M_{21} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\chi_{12}
 \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

上面给出了薄壳问题的3组基本方程即式(13.14)、(13.15)、(13.18),共17个。未知量为 $N_1, N_2, N_{12}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, \epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}, u, v, w$,共17个。未知量数目与方程个数相同,因而问题是可解的。

13.3 无矩理论

在没有弯矩的状态下工作的壳体称为无矩薄壳,相应的分析理论成为无矩理论。当满足下述条件时,可以采用无矩理论:(1)壳体中面曲率连续变化;(2)壳体厚度连续变化;(3)荷载分布连续变化;(4)壳体支撑处只在中面切线方向产生反力。严格地实现壳体的无矩状态是很不容易做到的,但是具有优越承载特性的无矩壳体却是设计所追求的。

在壳体理论中,无矩理论形成最早,发展已经很完善。无矩壳体的基本方程可由壳体理论的一般方程简化得到。

13.3.1 基本方程

当壳体无矩时, $M_1 = M_2 = M_{12} = M_{21} = 0$ 。根据式(13.14)中的力矩平衡方程,有 $Q_1 = Q_2 = 0$ 。在忽略小量的情况下, $N_{12} = N_{21} = S$,因此式(13.14)成为

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} - N_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AS)}{\partial\beta} + S \frac{\partial A}{\partial\beta} + ABp_1 &= 0 \\
 \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} - N_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial(BS)}{\partial\alpha} + S \frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABp_2 &= 0 \\
 \left(\frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} \right) + p_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

可见,无矩壳体的平衡方程有3个,未知数也是3个。如果给定足够的内力边界条件,则无矩壳体问题属于静定问题,内力可直接由式(13.19)求解。求得内力后,壳体位移可利用几何方程和本构方程求得,即通过下式积分求得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{r_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1) \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} S \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

如果边界条件以位移的形式给出,则壳体内力必须通过几何方程与平衡方程耦合求解,因此属于无矩理论中的超静定问题。

13.3.2 圆柱壳

如果空间动直线 L (母线) 沿着一条给定的曲线 (准线) 平行移动, 则形成柱形曲面, 以柱形面为中面的壳体称为柱壳。对于半径为 a 的圆柱壳, 以母线为 x 轴, 且令 $\alpha = x$, $\beta = \varphi$, 则拉梅系数和曲率半径为

$$A = 1, \quad B = a, \quad r_1 = \infty, \quad r_2 = a$$

于是, 平衡方程成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + p_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + p_2 &= 0 \\ \frac{1}{a} N_\varphi + p_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

由式(13.21)中的第三式立即得出 N_φ 之后, 代入第二式积分得 $N_{x\varphi}$, 然后由第一式积分得 N_x 。积分中出现的任意函数由边界条件确定。

【例题 13.1】 圆柱壳体屋盖受自重作用, 简支于两端横隔上。试计算其内力 (图 13.4)。

解 设单位面积上的壳自重为 p (N/m^2), 其分力为 $p_1 = 0$, $p_2 = p \sin \varphi$, $p_3 = p \cos \varphi$ 。

由式(13.21)中的第三式得

$$N_\varphi = -pa \cos \varphi$$

代入式(13.21)中的第二式

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = -2p \sin \varphi$$

积分得

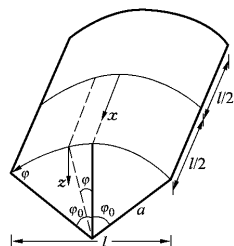


图 13.4 圆柱壳

$$N_{x\varphi} = -2px \sin \varphi + C_1(\varphi)$$

将坐标原点取在跨中。由于对称性 $x=0$ 时 $N_{x\varphi}=0$ 。于是 $C_1=0$ 而

$$N_{x\varphi} = -2px \sin \varphi$$

代入式(13.21)中的第一式可得

$$N_x = \frac{px^2}{a} \cos \varphi + C_2(\varphi)$$

为确定 C_2 , 考虑 $x = \pm \frac{l}{2}$ 处的边界条件。在 $x = \pm \frac{l}{2}$ 处的屋盖之横隔只能承受在其平面内的力, 故有当 $x = \frac{l}{2}$ 时 $N_x = 0$ 。由此得

$$C_2(\varphi) = -\frac{pl^2}{4a} \cos \varphi$$

于是

$$N_x = -\frac{p \cos \varphi}{4a} (l^2 - 4x^2)$$

13.3.3 旋转壳

以平面曲线 c 为母线, 绕平面内直线 L 旋转所形成的曲面称为旋转面, 以旋转面为中面的壳体称为旋转壳(图 13.5)。通过旋转轴的平面称为子午面, 它与中面的交线称为经线。垂直旋转轴的平面与中面的交线称为纬线或平行圆。根据曲面理论, 经线和纬线就是旋转壳中面的主曲率线。现取经线为 α 线, 纬线为 β 线, 相应的曲率半径分别为 r_1 和 r_2 。取中面法线与旋转轴的夹角 φ 为 α 线的坐标(图 13.6), 通过该点的子午面与某一基准子午面的夹角 θ 作为 β 线的坐标(图 13.5)。

如图 13.6 所示, 中面上任一点 $a(\varphi, \theta)$ 的法线被其相邻点 $b(\varphi + d\varphi, \theta)$ 处的法线所截之线段为 $r_1 = ac$, 点 $a(\varphi, \theta)$ 的法线被旋转轴所截之线段为 $r_2 = ad$ 。由于 $ds_1 = A d\alpha = r_1 d\varphi$, $ds_2 = B d\beta = r d\theta = r_2 \sin \varphi d\theta$, 故中面的 Lamé 系数为 $A = r_1$, $B = r = r_2 \sin \varphi$ 。

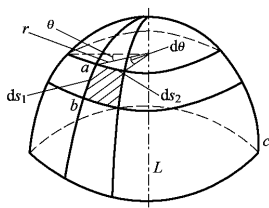


图 13.5 旋转壳

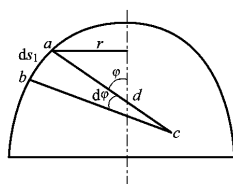


图 13.6 子午面

注意到 $dr = r_1 d\varphi \cdot \cos\varphi$, 平衡方程(13.19)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \alpha} + \frac{\cot\varphi}{r_2} (N_\varphi - N_\theta) + \frac{1}{r_2 \sin\varphi} \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + p_1 &= 0 \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cot\varphi}{r_2} N_{\varphi\theta} + \frac{1}{r_2 \sin\varphi} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + p_2 &= 0 \\ \left(\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} \right) + p_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

位移与内力的关系(13.20)简化为

$$\left. \begin{aligned} r_1 \epsilon_\varphi &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w = \frac{r_1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta) \\ r_2 \epsilon_\theta &= \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cot\varphi - w = \frac{r_2}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) \\ r_2 \gamma_{12} &= \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \cot\varphi + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{2(1+\nu)r_2}{Eh} S \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

如果荷载轴对称, 即 $p_2 = 0$, p_1 和 p_3 与 θ 无关, 则 $N_{\varphi\theta} = 0$, 而 N_φ 和 N_θ 与 θ 无关, 式(13.22)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r_2} (N_\varphi - N_\theta) + p_1 &= 0 \\ \left(\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} \right) + p_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

式(13.24)即为旋转壳无矩理论的基本方程。为求解上述方程, 可先消去 N_θ , 然后积分求得 N_φ 。实际上, N_φ 的求解可采用以下较简便的方案, 即先将壳体沿某一平行圆截开(图 13.7), 再将微元段 $r d\theta$ 上 N_φ 的竖向分量 $N_\varphi r d\theta \sin\varphi$ 求和

$$\int_0^{2\pi} N_\varphi r \sin\varphi d\theta = 2\pi N_\varphi r \sin\varphi$$

令它与截出壳体上的外力垂直分量 R 之和为零, 可得

$$2\pi N_\varphi r \sin\varphi + R = 0$$

即

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r \sin\varphi} \quad (13.25)$$

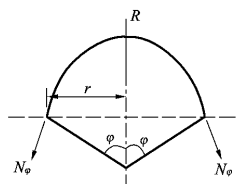
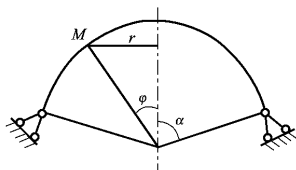
图 13.7 N_φ 的求解

图 13.8 球顶壳

【例题 13.2】设有半径为 a 的球顶壳,单位球面上的自重为 $q(\text{N/m}^2)$,周边为铰支承(图 13.8)。试求壳体内力。

解 已知 $r_1 = r_2 = a$, $r = a \sin \varphi$ 。M 点以上部分的荷载之合力为

$$R = 2\pi \int_0^\varphi a^2 q \sin \beta d\beta = 2\pi a^2 (1 - \cos \varphi) q$$

由式(13.25)得

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi a \sin^2 \varphi} = -\frac{aq(1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = -\frac{aq}{1 + \cos \varphi}$$

注意到 $p_3 = q \cos \varphi$, 由式(13.24)得

$$N_\theta = aq \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right)$$

13.4 有矩理论

13.4.1 一般柱壳方程

在壳体中完全实现无矩的薄膜应力状态很困难,因此有矩理论是必要的。本节只介绍柱壳。

现考察任意形状的柱壳,图 13.9 所示为中面的一部分,其中 BC 为母线方向, DE 为准线方向,它们是中面上的一组曲率族线。取母线为 x 线,为准线为 φ 线,以任一组曲率线作为参考轴。于是,中面上任一点的位置可用 (x, φ) 来确定。对于一般柱壳 $R = R(\varphi)$ 。两个主曲率半径为

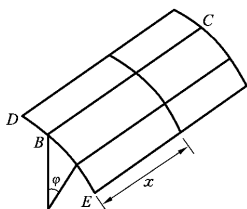


图 13.9 柱壳

$$r_1 = \infty, \quad r_2 = R(\varphi)$$

而 Lamé 系数为 $A=1, B=R(\varphi)$ 。内力和应变下标 1, 2 分别用 x, φ 代替。不难得到各种方程。例如, 平衡方程(13.14)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + p_1 &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{Q_\varphi}{R} + p_2 &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{N_\varphi}{R} + p_3 &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.26)$$

先由上式的后两式解出 Q_x, Q_φ 然后代入上式的前三式得

$$\left. \begin{aligned} R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + R p_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + R p_2 &= 0 \\ R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} \right) + N_\varphi + R p_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

几何方程(13.15)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R}, \quad \gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ \chi_{x\varphi} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

13.4.2 轴对称问题

对于半径为 a 的圆柱壳, 若荷载与 φ 无关, 即

$$p_1 = p_1(x), \quad p_2 = 0, \quad p_3 = p_3(x)$$

则为轴对称问题。此时, $v=0$ 且 u 和 w 只是 x 的函数而与 φ 无关。几何方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx}, & \epsilon_\varphi &= -\frac{w}{a} \\ \chi_x &= \frac{d^2 w}{dx^2}, & \gamma_{x\varphi} &= \chi_\varphi = \chi_{x\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.29)$$

代入式(13.18), 可知反对称性质的内力 $N_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$ 其他内力为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right), & N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right) \\ M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2}, & M_\varphi &= -\nu D \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.30)$$

平衡方程(13.27)简化为

$$\frac{dN_x}{dx} + p_1 = 0 \quad (13.31)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{a} + p_3 = 0 \quad (13.32)$$

据式(13.31), N_x 可由 p_1 独立确定, 相当于沿柱壳轴线的轴向拉伸。由式(13.30)的前两式, 可得

$$N_\varphi = -\frac{Eh}{a} w + \nu N_x \quad (a)$$

由式(13.26)和(13.30)可知

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 M_x}{dx^3} \quad (b)$$

将式(a)、(b)代入式(13.32)得

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = p_3 + \frac{\nu N_x}{a}$$

令 $4\beta^4 = \frac{Eh}{a^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}$, 有

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_3}{D} + \frac{\nu N_x}{aD} \quad (13.33)$$

这就是圆柱壳轴对称问题的基本方程。该方程的齐次式为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0$$

设解为 $w = e^{\lambda x}$, 代入上式得特征方程

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0$$

其根为

$$\lambda = \pm(1 \pm i)\beta$$

若方程的特解为 $w_p(x)$, 则其通解为

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + w_p \quad (13.34)$$

【例题 13.3】 设有很长的圆柱壳 , 在其中部受环向压力 P (单位长度上的荷载 , 即线荷载) 作用 (图 13.10)。试求其位移和内力。

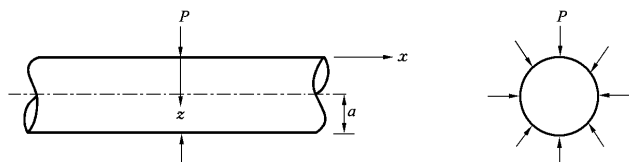


图 13.10 长圆柱壳

解 由于 $q=0$, 故特解 $w_p=0$ 。当 x 取很大值时 , $e^{\beta x}$ 的值也很大 , 而此时径向变形应当很小 , 故有 $C_1=C_2=0$ 。于是 , 式(13.34)成为

$$w = e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

考虑到对称性 , 有

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad Q_x|_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

由上式中的第一式可得 $C_3=C_4=C$, 从而

$$w = Ce^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x)$$

考虑到式(b) , 由第二式

$$Q_x|_{x=0} = -D \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

可得 $C = \frac{P}{8\beta^3 D}$, 于是有

$$w = \frac{P}{8\beta^3 D} \phi_1(\beta x)$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \phi_2(\beta x)$$

$$Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{P}{2} \psi_3(\beta x)$$

其中

$$\psi_1(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

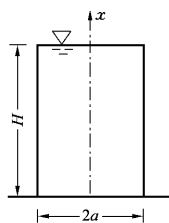
$$\psi_2(\beta x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$\psi_3(\beta x) = e^{-\beta x} \cos \beta x$$

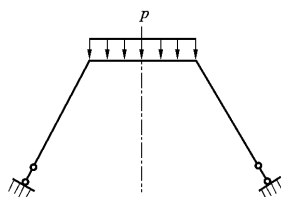
不难得出: 当 $x=0$ 时, w 最大, 即 $w_{\max} = P/(8\beta^3 D)$, 且随 x 增大而迅速地衰减。

习 题

- 13.1 除了基本假设外, 壳体理论还基于哪些附加假设? 它们与薄板假设有何异同?
- 13.2 设圆柱壳贮液筒下端固定在底板上, 上端开口, 满装重度为 γ 的液体。柱壳半径为 a , 高为 H 。试采用无矩理论求筒壁的内力。
- 答案: $N_x = 0$, $N_\varphi = a(H-x)\gamma$, $N_{x\varphi} = 0$ 。
- 13.3 底部简支的锥形截顶壳, 顶周边受垂直荷载 p 作用。试计算其内力。



题 13.2 图



题 13.3 图

第 14 章

变分原理与变分法

弹性力学问题在数学上遇到很多困难,对于那些不能直接从微分方程组获得解析解答的问题,只能采用近似方法。到目前为止,所发展的近似方法主要有变分法、有限差分法、有限单元法等。其中,变分法基于变分原理,该原理将以微分方程形式给出的边值问题归结为泛函极值问题,而有限单元法作为目前应用最广泛的数值方法,其理论基础也是变分原理。

本章首先给出微分方程的等效积分形式,并在此基础上推导势能变分原理;然后介绍基于势能变分原理的位移变分法,最后推导余能变分原理。

14.1 等效积分形式

14.1.1 微分方程形式

弹性力学问题被归结为微分方程的某种边值问题,其控制方程和边界条件可一般地表示为

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (14.1)$$

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \quad (14.2)$$

其中,待求解的未知函数 u 是位移或应力等; A 和 B 为对于独立变量(例如空间坐标)的微分算子。例如,平衡微分方程(2.5b)和应力边界条件(2.10a)可写为

$$A_i = \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$B_i = n_j \sigma_{ij} - \bar{p}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

14.1.2 等效积分形式

现在来研究微分方程的等效积分形式。由于控制方程在域内每一点都必须为零,因此有

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} v_i A_i(\mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad (\text{a})$$

其中, $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots]^T$ 是函数向量,它是一组同微分方程个数相等的任意可积(在 Ω 内)函数。

不难证明,式(a)是与微分方程组(14.1)完全等效的积分形式,即式(a)成立,则式(14.1)成立。假设 $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 在 Ω 内不处处为零,则由于 $\mathbf{v}$ 可以任意选择,我们选 $\mathbf{v}$ 为处处与 $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ 同号的函数,于是 $\mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u})$ 在域内恒正。可见,要满足式(a),必须 $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0$ 。

同理,假如边界条件(14.2)在边界上每点都得到满足,对于一组任意可积(在 Γ 上)函数 $\bar{\mathbf{v}}$ 应当成立

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}(\mathbf{u}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{v}_i B_i(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (\text{b})$$

这样,就可得到与控制方程(14.1)和边界条件(14.2)等效的积分形式

$$\int_{\Omega} v_i A_i(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}_i B_i(\mathbf{u}) d\Gamma = 0 \quad (14.3)$$

此即微分方程的等效积分形式。例如,前述平衡微分方程和应力边界条件的等效积分形式为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) v_i d\Omega + \int_{\Gamma_o} (n_j \sigma_{ij} - \bar{p}_i) \bar{v}_i d\Gamma = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

14.2 势能变分原理

14.2.1 虚位移原理

在弹性力学问题中,微分方程包括 3 组控制方程和 2 组边界条件。如果假设位移函数事先已经满足位移边界条件,且应变根据几何方程由位移确定,应力根据本构方程由应变确定,则此位移仍需满足的条件只剩下平衡微分方程和应力边界条件。下面将它们写成等效积分形式,并通过分部积分推导虚位移原理。

注意到虚位移(虚位移应理解为真实位移的变分)的任意性,可不失一般性

地以虚位移 δu_i 为任意函数 $\bar{v}_i$, 而 $v_i = -\bar{v}_i$ 。这样, 平衡微分方程和应力边界条件的等效积分形式成为

$$-\int_{\Omega}(\sigma_{ij,j} + f_i)\delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}}(n_j\sigma_{ij} - \bar{p}_i)\delta u_i d\Gamma = 0 \quad (a)$$

对上式中左边第一项进行分部积分

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij,j}\delta u_i d\Omega = \int_{\Omega}(\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}d\Omega - \int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega \quad (b)$$

根据 Gauss 散度定理

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right)d\Omega = \int_{\Gamma}(U_x l + U_y m + U_z n)d\Gamma$$

即

$$\int_{\Omega}U_{i,i}d\Omega = \int_{\Gamma}U_i n_i d\Gamma$$

有

$$\int_{\Omega}(\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}d\Omega = \int_{\Gamma}n_j\sigma_{ij}\delta u_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{\sigma}}n_j\sigma_{ij}\delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u}n_j\sigma_{ij}\delta u_i d\Gamma \quad (c)$$

虚位移是可能位移, 故在满足给定位移的位移边界 Γ_u 上, 虚位移为零, 因为它不再有任何变化的可能。这样, 上式中的最后一项为零。由于应变与位移满足几何方程, 故有

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

考虑到应力张量的对称性, 式(b)中最后一项为

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega = \int_{\Omega}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + \sigma_{ji}\delta u_{j,i})d\Omega = \int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega \quad (d)$$

将式(c) (d)代入式(b)得

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij,j}\delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}}n_j\sigma_{ij}\delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega \quad (e)$$

再代入式(a)得

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega - \int_{\Omega}f_i\delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}}\bar{p}_i\delta u_i d\Gamma = 0 \quad (14.4a)$$

或

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma \quad (14.4b)$$

显然,上式的右边是外力在虚位移上所做的虚功 δW ,而左边则是物体内部应力在虚应变上的虚应变能 δU 。可见,式(14.4)即虚功方程,与其相对应的虚位移原理可表述如下:如果物体在外力作用下处于平衡状态,那么在虚位移发生时,物体的虚应变能等于外力所做虚功,即

$$\delta U = \delta W \quad (14.5)$$

根据前面的分析,在事先或自动满足几何方程、位移边界条件和本构方程这 3 个附加条件的前提下,虚功方程将与弹性力学全部微分方程等价。其中的本构方程是否为线性,在推导过程中并没有提出任何要求。因此不论材料是线性的还是非线性的,虚位移原理都成立。此外,要求事先满足的位移边界条件称为强制边界条件。

14.2.2 势能变分原理

(1) 一般形式

变分原理涉及到泛函驻值问题。简单地说,若把自变量(例如位置坐标)的函数称为自变函数,则泛函就是自变函数的函数。例如,应力和应变就是自变函数,它们是坐标的函数;应变能就是泛函,它是应变的函数。

采用变分原理求解连续介质问题,首先需要建立一个标量泛函 Π ,它是未知场函数 u (例如位移场、应力场、温度场、水头场等)及其导数的函数,可一般地写成

$$\Pi = \int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Gamma$$

问题的真实解 u 使泛函 Π 对于自变函数的微小变化 δu 取驻值,即泛函的变分等于零

$$\delta \Pi = 0 \quad (14.6)$$

这就是变分原理。下面介绍弹性力学中的势能变分原理,并在虚位移原理的基础上加以证明。

(2) 势能泛函

在外力作用下,弹性体内部将产生应力和应变,外力所做的功以弹性应变能的形式储存起来。根据第 5 章,应变能密度 W_{ϵ} 及整个物体的应变能 U 分别为

$$W_\epsilon = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (14.7a)$$

$$U = \int_{\Omega} W_\epsilon d\Omega \quad (14.7b)$$

对于线性弹性介质 $\sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl}$,从而

$$W_\epsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} D_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} \quad (14.8a)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} d\Omega \quad (14.8b)$$

通常以物体无变形状态作为计算外力势能的零点。外力场通过做功释放一部分势能,故外力做功将使其势能降低,因此外力势能就是外力功的负值。功是力与力的作用点在力作用方向上的位移之积,即力矢量与相应位移矢量的标量积。于是,外力势能由下式计算

$$V = - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i d\Gamma \quad (14.9)$$

物体的总势能 Π_p 定义为物体的应变能 U 与外力势能 V 之和

$$\Pi_p = U + V \quad (14.10)$$

即

$$\Pi_p = \int_{\Omega} W_\epsilon d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i d\Gamma \quad (14.11)$$

对于线性弹性体,有

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i u_i d\Gamma \quad (14.12)$$

(3)变分原理

总势能 Π_p 是一种泛函。势能变分原理可叙述如下:在所有满足边界条件的协调位移中,那些满足静力平衡条件的位移使物体势能泛函取驻值,即势能的变分为零

$$\delta \Pi_p = \delta U + \delta V = 0 \quad (14.13)$$

此式就是变分方程。对于线性弹性介质,势能取最小值,即

$$\delta^2 \Pi_p = \delta^2 U + \delta^2 V \geq 0 \quad (14.14)$$

此时的势能变分原理就是著名的最小势能原理。对这一原理可作如下通俗的理解:在自然状态下,水总是从高处向低处流,边坡总是有向下滑动的趋势。这类现象揭示出一种普遍的自然规律,即势能总有最小化的趋向。

首先,在虚位移原理的基础上证明势能泛函的变分为零,即泛函驻值条件(14.13)。为此,对式(14.11)求变分

$$\begin{aligned}\delta\Pi_p &= \int_{\Omega} \delta W_{\epsilon} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial W_{\epsilon}}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma\end{aligned}\quad (a)$$

根据式(14.7),有 $\frac{\partial W_{\epsilon}}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$ 。将其代入式(a)得

$$\delta\Pi_p = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \delta u_i d\Gamma$$

将上式与虚功方程(14.4)比较,可证式(14.13)。

现证明线性弹性条件下势能取最小值。以 u_i 表示真实位移, u_i^* 表示可能位移并令

$$u_i^* = u_i + \delta u_i \quad (b)$$

代入几何方程,有

$$\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij} \quad (c)$$

将式(b)、(c)代入式(14.12),可得

$$\begin{aligned}\Pi_p^* &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \epsilon_{ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i u_i^* d\Gamma \\ &= \Pi_p + \delta\Pi_p + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \delta \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} d\Omega\end{aligned}\quad (d)$$

根据泛函驻值条件,一阶变分 $\delta\Pi_p = 0$ 。考虑到应变能的非负性,由式(d)知

$$\Pi_p^* - \Pi_p \geq 0$$

即可能位移对应的势能总是不小于真实位移对应的势能,从而最小势能原理得证。

【例题 14.1】 试通过最小势能原理给出薄板弯曲问题的控制方程和力的边界条件。

解 薄板的势能为

$$\Pi_p = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left[\epsilon_x^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] d\Omega - \int_A q w dA$$

其中 μA 薄板中面面积。将应变挠度关系代入上式,并对 z 进行积分得

$$\Pi_p = \frac{D}{2} \int_A \left\{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right\} dA - \int_A q w dA$$

现对势能取变分,例如第一项的变分

$$\begin{aligned} \delta \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA &= 2 \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dA = 2 \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] dA \\ &= 2 \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right] dA \end{aligned}$$

注意到 $\int_A \frac{\partial F}{\partial x} dA = \int_s F \cos \alpha ds$ 及 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial s} \sin \alpha$, 有

$$\begin{aligned} \delta \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA &= 2 \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dA - 2 \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \cos \alpha ds \\ &\quad + 2 \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \right) \cos \alpha ds \end{aligned}$$

对上式的最后一项进行分部积分,注意到沿板的整个边界上非积分项为零,有

$$\begin{aligned} \delta \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dA &= 2 \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dA + 2 \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos^2 \alpha ds \\ &\quad + 2 \int_s \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \alpha \right] \delta w ds \end{aligned}$$

同理可得其他项的积分,从而

$$\begin{aligned} \delta \Pi_p &= D \int_A (\nabla^4 w - q) \delta w dA + D \int_s \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \nabla^2 w \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds \\ &\quad + D \int_s \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha \right\} \delta w ds = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

在板面积域内,变分 δw 是任意的,从而

$$D \nabla^4 w - q = 0 \quad (b)$$

此即薄板挠曲微分方程。在固支边界上, 因 $\delta w = 0$, $\frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0$, 故没有力的边界条件。在简支边界上 $\delta w = 0$ 而 $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ 是任意的, 故有

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \nabla^2 w = 0$$

对平行于 y 轴的边界, $\alpha = 0$, 上式成为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \text{即 } M_x = 0 \quad (c)$$

在自由边界上 δw 和 $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ 都是任意的。因此, 式(a)中 δw 和 $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ 的系数均应为零。当边界平行于 y 轴时, 由 $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ 的任意性可得式(c); 由 δw 的任意性可得

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

此即

$$Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (d)$$

14.3 位移变分法

最小势能原理的变分方程与平衡微分方程和应力边界条件等价。因此, 在应用该原理求解问题时, 只要能找到所有满足位移边界条件的位移, 那么其中使总势能取最小值的位移就是真实位移。通常我们只能找到某些满足位移边界条件的位移, 而不能找出全部。因此, 利用变分法求解得到的是近似解。

14.3.1 Ritz 法

选取位移函数使其满足位移边界条件, 利用最小势能原理求解问题, 这种方法称为 Ritz 法。

(1) 空间问题

设定的位移表达式中包含待定常数, 例如

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \sum_m A_m u_m \\ v &= v_0 + \sum_m B_m v_m \\ w &= w_0 + \sum_m C_m w_m \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.15)$$

其中 u_0, v_0, w_0 为设定的函数, 它们的边界值等于边界上已知的位移; u_m, v_m, w_m 为在边界上等于零的设定函数; 待定常数 A_m, B_m, C_m 用位移变分方程确定。

位移的变分是由 A_m, B_m, C_m 的变分来实现的, 故

$$\delta u = \sum_m u_m \delta A_m, \quad \delta v = \sum_m v_m \delta B_m, \quad \delta w = \sum_m w_m \delta C_m \quad (14.16)$$

$$\delta U = \sum_m \left(\frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m + \frac{\partial U}{\partial C_m} \delta C_m \right)$$

代入位移变分方程

$$\begin{aligned} \sum_m \left(\frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m + \frac{\partial U}{\partial C_m} \delta C_m \right) &= \sum_m \int_{\Omega} (X u_m \delta A_m + Y v_m \delta B_m + Z w_m \delta C_m) d\Omega \\ &\quad + \sum_m \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{X} u_m \delta A_m + \bar{Y} v_m \delta B_m + \bar{Z} w_m \delta C_m) d\Gamma \end{aligned}$$

注意到变分 $\delta A_m, \delta B_m, \delta C_m$ 的任意性, 故有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} &= \int_{\Omega} X u_m d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{X} u_m d\Gamma \\ \frac{\partial U}{\partial B_m} &= \int_{\Omega} Y v_m d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{Y} v_m d\Gamma \\ \frac{\partial U}{\partial C_m} &= \int_{\Omega} Z w_m d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{Z} w_m d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.17)$$

(2) 平面问题

对于平面应力问题(设 $t=1$), 变分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} &= \iint_A X u_m dx dy + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{X} u_m d\Gamma \\ \frac{\partial U}{\partial B_m} &= \iint_A Y v_m dx dy + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{Y} v_m d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.18)$$

应变能计算式为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (14.19)$$

(3) 薄板弯曲

在薄板弯曲问题中 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, 因此板的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \iint_A D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (14.20)$$

将挠度 w 表示为

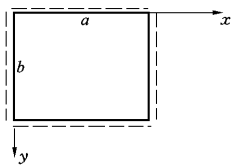
$$w = w_0 + \sum_m C_m w_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.21)$$

若板上只作用横向分布荷载 q , 则变分方程成为

$$\frac{\partial U}{\partial C_m} = \iint_A q w_m dx dy \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (14.22)$$

【例题 14.2】 设长为 a 、宽为 b 的四边简支矩形薄板(图 14.1)受均布横向荷载 q_0 作用。试用 Ritz 法求薄板挠度。

解 取挠度为重三角级数



$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} w_{mn}$$

图 14.1 简支薄板

显然, 上述挠度函数满足位移边界条件。将其代入式(14.20)得

$$U = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

代入式(14.22)

$$\frac{\partial U}{\partial C_{mn}} = \int_0^a dx \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

即

$$\frac{\pi^4 Dab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{4q_0 ab}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}$$

从而

$$C_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 D mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots)$$

14.3.2 Galerkin 法

如果选取位移函数,使位移边界条件和应力边界条件均得到满足,则导致 Galerkin 法。此时,位移仍需满足的条件只剩下平衡微分方程。

(1) 空间问题

平衡微分方程的等效积分形式为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i d\Omega = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w d\Omega &= 0 \end{aligned} \right\}$$

将位移表示的平衡微分方程(6.9b)及位移变分(14.16)代入上式,可得

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + X \right] u_m d\Omega \\ \int_{\Omega} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + Y \right] v_m d\Omega \\ \int_{\Omega} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + Z \right] w_m d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

(14.23)

此即空间问题的 Galerkin 法求解公式。

(2) 平面问题

对于平面应力问题(设厚度 $t=1$) Galerkin 公式为

$$\left. \begin{aligned} & \iint_A \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X \right] u_m dx dy \\ & \iint_A \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y \right] v_m dx dy \end{aligned} \right\} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (14.24)$$

(3) 薄板弯曲

薄板弯曲问题的平衡方程为 $D(\nabla^4 w) = q$, 其等效积分形式为

$$\iint_A [D(\nabla^4 w) - q] w dx dy = 0$$

将满足位移边界条件和力的边界条件的挠度 w 表达式(14.21)代入上式, 注意到 δC_m 的任意性, 可得薄板弯曲问题的 Galerkin 公式

$$\iint_A [D(\nabla^4 w) - q] w_m dx dy = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (14.25)$$

【例题 14.3】 设长为 $2a$ 、宽为 $2b$ 的矩形薄板(图 14.2)受均布荷载 q_0 作用。试用 Galerkin 法求薄板挠度。

解 将坐标原点取在板的中心。取挠度为

$$w = C_1 w_1 = C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

不难发现, 上式满足位移边界条件(该问题没有力的边界条件), 代入 Galerkin 公式(14.25)

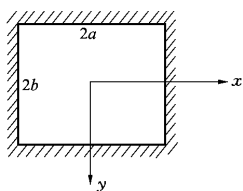


图 14.2 固支薄板

$$\iint_A (D \nabla^4 w - q_0) w_1 dx dy = 0$$

可解得

$$C_1 = \frac{7q_0}{128(a^4 + b^4 + 4a^2b^2)D}$$

$$w = \frac{7q_0}{128(a^4 + b^4 + 4a^2b^2)D} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

当 $a = b$ 时, 有

$$w = \frac{49q_0}{2304Da^4} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$

最大挠度为

$$\tau_{\max} = \frac{49q_0a^4}{2304D} = 0.0213 \frac{q_0a^4}{D}$$

与精确解($0.0203 \frac{q_0a^4}{D}$)相比大了 5%。

14.4 余能变分原理

14.4.1 虚应力原理

假设应力事先已满足平衡微分方程和应力边界条件,且应变根据本构方程由应力确定,则此应力仍需满足的条件只剩下几何方程和位移边界条件。以应力变分 $\delta\sigma_{ij}$ 和面力变分 δp_i (其中 $p_i \equiv \sigma_{ij}n_j$) 为任意函数,几何方程和位移边界条件的等效积分形式为

$$\int_{\Omega} \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \delta\sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta p_i d\Gamma = 0 \quad (14.26)$$

对上式进行分部积分可得

$$\int_{\Omega} (\epsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} + u_i \delta\sigma_{ij,j}) d\Omega - \int_{\Gamma} u_i \delta\sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta p_i d\Gamma = 0$$

根据前提条件,平衡微分方程和应力边界条件已得到满足。对其变分,可知在 Ω 内 $\delta\sigma_{ij,j} = 0$, 在 Γ_{σ} 上 $\delta p_i = 0$ 。于是,上式可简化为

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \delta p_i d\Gamma = 0 \quad (14.27)$$

这就是虚应力原理的虚功方程。该原理可叙述如下:虚应力在位移边界处给定位移上所做的余虚功等于应变在虚应力上所做的余虚功。

可见,虚功方程(14.27)连同附加条件(平衡微分方程、应力边界条件和本构方程)等价于弹性力学全部方程。

14.4.2 余能变分原理

物体的余能 Π_c 定义为物体的应变余能 U_{σ} 与给定位移边界 Γ_u 上的边界反力(包括支座反力)的余势 V_c 之和

$$\Pi_c = U_{\sigma} + V_c \quad (14.28)$$

现给出 U_{σ} 和 V_c 的定义和计算方法。应变余能密度 W_{σ} 定义为

$$W_{\sigma} = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (14.29)$$

整个物体的应变余能为

$$U_{\sigma} = \int_{\Omega} W_{\sigma} d\Omega \quad (14.30)$$

对于线性弹性介质, $\epsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$, 从而

$$W_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} \quad (14.31)$$

$$U_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} d\Omega \quad (14.32)$$

在边界 Γ_u 上给定了位移 $\bar{u}$, 作用在 Γ_u 上的边界反力为 p , 则边界反力的势由下式计算

$$V_c = - \int_{\Gamma_u} p_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (14.33)$$

物体总余能为

$$\Pi_c = \int_{\Omega} W_{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} p_i \bar{u}_i d\Gamma \quad (14.34)$$

余能变分原理可叙述如下: 在一切静力可能应力状态中, 真实状态使物体的余能取驻值, 即

$$\delta \Pi_c = \delta U_{\sigma} + \delta V_c = 0 \quad (14.35)$$

对于线性弹性介质, 余能取最小值, 即

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U_{\sigma} + \delta^2 V_c \geq 0 \quad (14.36)$$

此时的余能变分原理称为最小余能原理。采用证明最小势能原理的方法, 容易证明最小余能原理。

事实上, 将本构方程 $\epsilon_{ij} = \frac{\partial W_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}$ 代入虚功方程(14.27), 便立即得到余能变分方程。利用最小余能原理求解时, 选取的应力场需满足平衡微分方程和应力边界条件。通常情况下并不容易做到, 因而这一原理的应用受到了一定的限制, 本章对此也不准备加以讨论。

习 题

14.1 应变能与应变余能有何关系? 试在虚应力原理的基础上证明余能变分原理。

14.2 取下式为挠度函数, 采用 Galerkin 法求解例题 14.3。

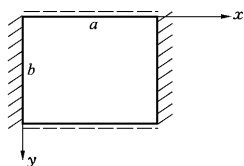
$$w = C_1 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

答案: $w = \frac{4q_0 a^4}{(3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4)\pi^4 D} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$

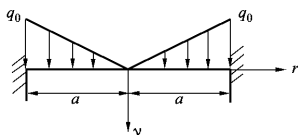
14.3 设长为 a 、宽为 b 的矩形薄板两对边简支、两对边固支, 受均布横向荷载 q_0 作用。取挠度函数如下, 并用 Ritz 法求解。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

答案: $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$



题 14.3 图



题 14.4 图

14.4 设半径为 a 圆形薄板边界固支, 受横向荷载 $q = q_0 \frac{r}{a}$ 作用。取挠度函数

$$w = C_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2, \text{ 试用 Galerkin 法求薄板挠度。}$$

第 15 章

经典屈服理论

结构产生塑性变形时,进入塑性阶段的材料将服从塑性本构方程。显然,在结构弹塑性分析中,须首先判断材料变形是处于弹性阶段还是塑性阶段,然后才能对处于不同变形阶段的材料分别采用不同的本构方程。材料发生塑性变形即称为屈服,屈服时应力满足的条件称为屈服条件,建立屈服条件的任务是由屈服准则或屈服理论完成的。

本章介绍针对金属材料发展起来的经典屈服理论,该理论假定材料是理想弹塑性的或应变硬化的,静水应力只产生弹性的体积变形且不影响材料的屈服极限;材料的抗拉屈服极限与抗压屈服极限相同,塑性应变增量方向服从正交流动法则。

本章内容包括:(1)屈服条件和屈服面的基本概念;(2)几个常用的屈服准则;(3)应变硬化及后继屈服问题。

15.1 屈服条件与屈服面

问题是材料承受多大的应力才开始产生塑性变形即屈服。在单向拉伸时,答案是明显的:当应力等于屈服应力 σ_s 时开始产生塑性变形,而 σ_s 值是在拉伸试验应力应变曲线上找到的。当材料处于复杂应力状态时,一点的应力状态由 6 个独立分量确定,显然不能选取某个分量作为屈服判断的根据。例如,用最大主应力达到极限值作为屈服判断标准已为试验所否定,因为金属材料各向等压时,压应力可远远超过 σ_s 而并未进入塑性状态。本节只定性地说明复杂应力状态下屈服的基本概念,随后将介绍屈服准则。

15.1.1 应力空间与应力路径

以应力分量作为坐标轴,可形成应力空间。物体中任一点的应力状态可用应力空间中的一点来表示,称为应力点。一点应力状态的变化可用应力点在应力空间的运动轨迹来描述,应力点的运动轨迹称为应力路径。一点的应力状态由 6 个独立应力分量决定,故一般的应力空间是六维的。但是当材料为各向同性

时,方向问题并不重要。这样,我们就可以用三个主应力为坐标轴形成主应力空间(图 15.1),并在主应力空间中研究一点的应力状态以及屈服问题。

必须指出,应力空间既非几何空间又非物理空间,它只是为了描述物体中一点的应力状态而引用的一个多维空间。

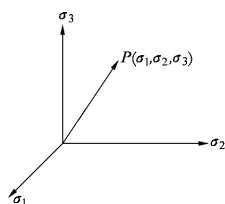


图 15.1 主应力空间

15.1.2 屈服条件的一般形式

根据不同的应力路径所进行的试验,可以定出从弹性阶段进入塑性阶段的界限。在应力空间中,将这些屈服应力点连接起来,就形成一个区分弹性和塑性的分界面,即所谓的屈服面。描述这个屈服面的数学表达式称为屈服条件,连同建立屈服条件时做出的基本假定称为屈服准则或屈服理论。

材料屈服与否取决于其所受的应力状态和材料特性参数,故屈服条件的一般形式可写为

$$f(\sigma_{ij})=0 \quad (15.1)$$

其中的函数 $f(\sigma_{ij})$ 称为屈服函数。

式(15.1)表示的是一个六维应力空间中的超曲面,该曲面上的任一点都表示一个屈服应力状态,故又称为屈服面。对于应变硬化材料,初次进入屈服时称为初始屈服,相应的屈服面称为初始屈服面;进入硬化阶段后,卸载再加载时屈服极限将提高,此时进入屈服称为后继屈服,相应的屈服面称为后继屈服面。进入塑性阶段后,卸载并不产生塑性变形,只有加载才会出现后继屈服问题,故后继屈服面也称为加载面。下面的讨论针对初始屈服,硬化与后继屈服问题将在本章的第三节加以讨论。

当材料为各向同性时,屈服条件与坐标轴的选择无关。取 3 个主应力轴为坐标轴,式(15.1)可写成

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0 \quad (15.2)$$

考虑到 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, (I_1, I_2, I_3) 和 (I_1, J_2, J_3) 之间是相互确定的,故有

$$f(I_1, I_2, I_3)=0 \quad \text{或} \quad f(I_1, J_2, J_3)=0 \quad (15.3)$$

根据试验资料,金属材料即使在很高的静水压力作用下,体积变形很小而且是弹性的,静水压力对材料屈服的影响可以忽略不计。因此,假定屈服函数中不包含有静水应力,用偏量应力表示为

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0 \quad \text{或} \quad f(J_1, J_2, J_3) = 0 \quad (15.4)$$

注意到 $J_1 = 0$,有

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (15.5)$$

15.1.3 屈服面与屈服曲线

(1) 屈服面的形状

如果任何应力路径都可引起材料屈服,则屈服面必定是封闭的。若沿某些应力路径加载材料不可能屈服,则屈服面不封闭。例如,经典塑性理论中假定金属材料在静水应力下只产生弹性的体积应变,因此其屈服面就不是封闭的。

现在考察屈服面在主应力空间中的特征。在主应力空间中,等倾线或空间对角线 L 与 3 个坐标轴等倾,即 3 个方向余弦均为 $1/\sqrt{3}$ 。空间对角线上的 3 个主应力都相等,故又称为等压线。与等压线相正交的平面称为偏平面,其方程为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}r \quad (15.6)$$

其中, r 为偏平面到坐标原点的距离。通过坐标原点的偏平面称为 π 平面,其方程显然为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (15.7)$$

设主应力空间三个坐标轴的单位基矢量分别为 e_1, e_2, e_3 , 则任意一点 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 的应力矢量 OP 为

$$OP = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3$$

等倾线的单位矢量为

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} e_3$$

OP 在等倾线上的分量为 OQ , 其大小为

$$|OQ| = OP \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

称为静水应力分量。 OP 在 π 平面上的分量 OS 称为应力偏量分量,其大小为

$$|OS| = \sqrt{|OP|^2 - |OQ|^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \sqrt{2} \sqrt{J_2} \quad (15.8)$$

在过 P 点与等倾线平行的线上,任意点的应力偏量分量相同,而静水应力

分量不同。在经典塑性理论中,认为屈服只取决于应力偏量,而与静水应力无关。因此,如果 P 点在屈服面上,那么 PS 线上所有点都在屈服面上(图 15.2)。将屈服面与 π 平面的交线称为屈服曲线。于是,在主应力空间中,屈服面是以等倾线为轴线,以 π 平面上的屈服曲线为截面形状的柱面(图 15.3)。

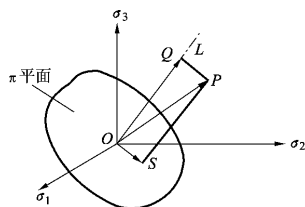


图 15.2 应力矢量

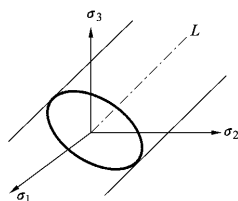


图 15.3 屈服面形状

(2)屈服曲线的性质

屈服曲线具有下列重要性质:

①屈服曲线是一条封闭曲线,而且坐标原点被包围在内。坐标原点是一个无应力状态,材料不可能在不受力的情况下屈服,故屈服曲面从而屈服曲线必定不过坐标原点。如果屈服曲线不封闭,则意味着某种情况下无论偏应力多大材料都不屈服,而这是不可能的,故屈服曲线必定是封闭的。

②屈服曲线与任一从坐标原点出发的径向线必相交一次,且仅有一次。前一点很容易从屈服曲线封闭的性质推得。至于后一点,因为只考虑初始屈服,而初始屈服只可能有一次。

③屈服曲线对三个坐标轴的正负方向均为对称。决定材料屈服的应力偏量对 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 具有对称性。此外,在只考虑初始屈服时,材料拉或压屈服值相同。也就是说,如果应力状态 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 在屈服曲线上,则 $(-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$ 也一定在屈服曲线上。

④对于稳定材料,屈服曲线是外凸曲线。这是根据下述 Drucker 公设推出的结论。

15.1.4 Drucker 公设

D. Drucker (1952) 提出如下公设:在整个加载及卸载循环过程中,附加应力做功非负。

Drucker 公设适用于稳定材料。稳定材料的定义可表述如下:给定应力增量 $\Delta\sigma$, 将产生相应的应变增量 $\Delta\epsilon$ 。如果应力增量 $\Delta\sigma$ 在应变增量 $\Delta\epsilon$ 上做功 $\Delta W = \Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon \geq 0$, 那么这类材料就称为稳定材料。以单向拉伸为例,在加载过

程中,图 15.4a 所示的材料满足 $\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon \geq 0$,故为稳定材料,图 15.4b 所示的材料不满足 $\Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon \geq 0$,故为非稳定材料。

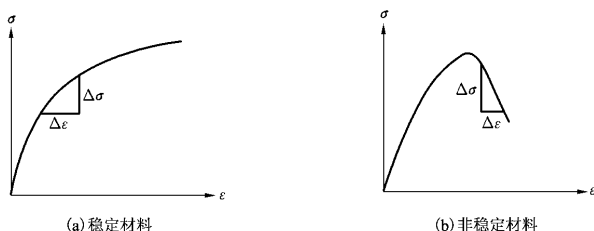


图 15.4

由 Drucker 公设可以推出几个非常重要的结论。为此,考虑一个加载和卸载循环。图 15.5 中的 A 点是屈服面内的一点即施加荷载的起点,对应的应力状态为 σ_{ij}^0 ; B 点是屈服面上的一点,对应的应力状态为 σ_{ij}^* 。从 B 点施加应力增量 $d\sigma_{ij}$ 至 C 点, C 点对应的应力状态为 $\sigma_{ij}^* + d\sigma_{ij}$ 。在加载卸载循环过程中,任意点的应力用 σ_{ij} 表示,则附加应力为 $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ 。根据 Drucker 公设,有

$$\oint_{ABCA} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij} \geq 0 \quad (a)$$

在应力循环过程中,应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 分为弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 和塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (b)$$

对于整个循环,附加应力在弹性变形上做的功应为零。于是,式(a)成为

$$\oint_{ABCA} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (c)$$

显然,上式可写成

$$\int_{AB} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p + \int_{BC} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p + \int_{CA} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (d)$$

从 A 到 B 为弹性加载过程、从 C 到 A 为卸载过程。在这两个过程中均没有新的塑性应变产生,即 $d\epsilon_{ij}^p = 0$,故式(d)成为

$$\int_{BC} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (e)$$

BC 可以是任意微段,当 BC 很微小时,式(e)可近似地写为

$$(\sigma_{ij}^* + d\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p = (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (f)$$

其中略去了高阶小量 $d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}$ 。如果将塑性应变空间和应力空间重合起来,则上式为矢量 $\mathbf{AB} = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0$ 与矢量 $d\epsilon^p = d\epsilon_{ij}^p$ 的点积。若两个矢量之间的夹角为 α , 则

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0)d\epsilon_{ij}^p = |\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0| |d\epsilon_{ij}^p| \cos\alpha$$

由式(f)可知

$$\cos\alpha \geq 0 \quad (15.9)$$

可见,屈服面内任意一点 $A(\sigma_{ij}^0)$ 到屈服面上任意一点 $B(\sigma_{ij}^*)$ 形成的矢量 $\mathbf{AB}$ 与塑性应变增量矢量 $d\epsilon^p$ 的夹角 $\alpha \leq \pi/2$ 。从此出发可以得出两个重要结论:

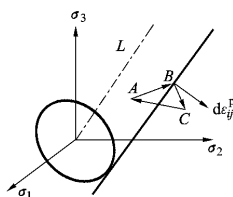


图 15.5 加载循环

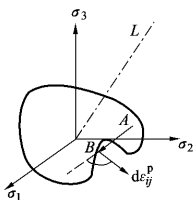


图 15.6 屈服曲线外凸

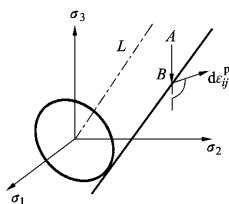


图 15.7 塑性应变增量

①屈服面和屈服曲线一定是凸的:假如屈服曲线不是凸的(图 15.6),在凹处取一点 $B(\sigma_{ij}^*)$,则无论 $d\epsilon^p$ 指向何方,都可以在屈服面内找到一点 $A(\sigma_{ij}^0)$,使得矢量 $\mathbf{AB}$ 与 $d\epsilon^p$ 的夹角 $\alpha > \pi/2$ 。这与 Drucker 公设的结论相矛盾,从而证明屈服曲线一定是凸的。

② $d\epsilon^p$ 的方向一定指向屈服面的外法向:如果 $d\epsilon^p$ 的方向不是屈服面的外法向(图 15.7),则在屈服面内总能找到一点 $A(\sigma_{ij}^0)$,使得矢量 $\mathbf{AB}$ 与 $d\epsilon^p$ 的夹角 $\alpha > \pi/2$ 。这与 Drucker 公设的结论相矛盾,故 $d\epsilon^p$ 的方向一定指向屈服面的外法向。

15.2 常用屈服准则

15.2.1 Tresca 准则

1864 年 H. Tresca 提出假设:材料屈服取决于最大剪应力,即当最大剪应力达到一定值时,材料开始屈服。这就是 Tresca 准则。Ludwik 于 1909 年观察到金属材料塑性变形的滑移线,即在单向拉伸试验中,当材料发生塑性屈服时,试件表面出现了与试样轴大约成 45° 角的斜线。由于最大剪应力面就是与试样轴

成 45° 角的斜面, 故这些条纹是材料内部晶格间的相对剪切滑移的结果。

(1) 屈服条件

根据上述假设, 屈服条件可写为

$$\tau_{\max} = C \quad (a)$$

在复杂应力状态下, $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, 于是式(a)成为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C \quad (b)$$

为确定常数 C , 可考虑单向拉伸屈服状态。此时 $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 代入上式得 $2C = \sigma_s$ 。于是式(b)成为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad (15.10)$$

也可根据纯剪屈服状态来确定常数 C 。此时 $\sigma_1 = \tau_s$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_s$ 。代入式(b)得 $2C = 2\tau_s$ 。于是式(b)成为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s \quad (15.11)$$

可见, 在 Tresca 屈服准则中, $\sigma_s = 2\tau_s$ 。

当不知道主应力大小次序时, 式(15.10)可写成如下形式

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s \quad (15.12a)$$

或

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_s \quad (15.12b)$$

或

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_s \quad (15.12c)$$

或写成

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_s^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_s^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_s^2] = 0 \quad (15.13)$$

(2) 屈服曲线

式(15.12a)表明它和平均应力 σ_m 及 σ_3 无关, 故在应力空间中, 它表示 2 个平行于 σ_3 轴和 L 直线的平面。同理, 式(15.12b)表示 2 个平行于 σ_1 轴和 L 直线的平面, 式(15.12c)表示 2 个平行于 σ_2 轴和 L 直线的平面。由这 6 个平面组成的屈服面是一个以 L 为轴线的正六棱柱面, 其在 π 平面上的投影即屈服曲线为一个正六边形, 称为 Tresca 六边形(图 15.8)。

将轴 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 向 π 平面上投影, 所得为三根夹角互成 120° 的轴, 分别用 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 表示。显然, 它们和相应的原坐标轴的夹角余弦为 $\sqrt{2/3}$, 应力状态矢

量在 π 平面上的投影沿 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 轴的分量为 $\sigma_1 \sqrt{2/3}, \sigma_2 \sqrt{2/3}, \sigma_3 \sqrt{2/3}$ 。由于 $(\sigma_s, 0, 0)$ 是屈服面上的一点, 其在 π 平面上的投影点为 A (图 15.8), 故原点到六角形顶点的距离为 $\sigma_s \sqrt{2/3}$ 。

在平面应力状态下, 一个主应力为零。若令 $\sigma_3 = 0$, 则屈服条件变为

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s \quad \text{或} \quad |\sigma_2| = \sigma_s \quad \text{或} \quad |\sigma_1| = \sigma_s \quad (15.14)$$

以 σ_1, σ_2 为坐标轴建立直角坐标系, 则在此坐标系中 Tresca 屈服条件对应于斜六角形 (图 15.9)。

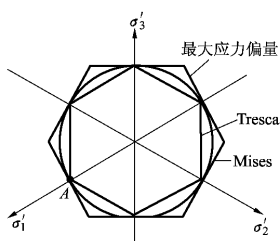


图 15.8 屈服曲线

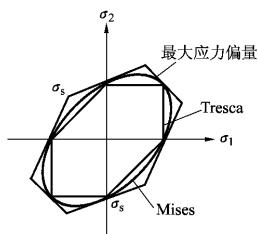


图 15.9 平面问题

Tresca 准则的优点在于: 当主应力大小顺序已知时, 表达式简单, 使用起来非常方便。但是, 当不知道主应力大小顺序时, 表达式过于复杂, 六角柱面具有 6 个棱, 屈服函数的导数不连续, 故在数学上遇到困难; 没有考虑中间主应力 σ_2 对屈服的影响。

15.2.2 Mises 准则

(1) 屈服条件

如前所述, 在不知道主应力大小次序的情况下, 应用 Tresca 准则会引起数学上的不便, 而且该准则没有考虑 σ_2 的影响。于是, Von Mises (1913) 提出了以外接圆柱面代替六棱柱面的想法。由于圆的半径为 $\sigma_s \sqrt{2/3}$, 故圆的方程为

$$R^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2$$

其中 R 为应力偏量的大小。根据式 (15.8), $R^2 = 2J_2$, 于是得到 Mises 屈服条件

$$J_2 = \frac{\sigma_s^2}{3}$$

注意到式 (2.27), 即

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

有

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (15.15)$$

为给上述条件做出解释, Mises 屈服准则可表述如下: 当应力偏量第二不变量 J_2 达到一定值时, 材料开始屈服, 即

$$J_2 = C \quad (a)$$

即

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6C \quad (b)$$

为确定常数 C , 可考虑单向拉伸屈服状态, 此时 $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 代入上式得 $6C = 2\sigma_s^2$ 。于是, 式(b)成为式(15.15)。也可根据纯剪屈服状态来确定常数 C 。此时 $\sigma_1 = \tau_s, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_s$ 。代入式(b)得 $6C = 6\tau_s^2$ 。于是式(b)成为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_s^2 \quad (15.16)$$

可见, 在 Mises 屈服准则中 $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ 。

圆柱面在 π 平面上的投影即屈服曲线是半径为 $\sigma_s/\sqrt{3}$ 的圆(图 15.8), 称为 Mises 圆。在平面应力状态下, 令 $\sigma_3 = 0$, 则 Mises 屈服条件变为

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \quad (15.17)$$

在以 σ_1, σ_2 为坐标轴的直角坐标系中, 上式代表一斜椭圆(图 15.9)。

(2) 其他解释

Mises 认为 Tresca 准则是准确的, 他的准则是近似的。然而, 后来的试验证明 Mises 准则更接近于试验结果。以后, 学者们对 Mises 准则给出了各种物理上的解释。例如考虑到式(2.30), 式(15.15)变为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s \quad (15.18)$$

于是, Mises 准则可叙述如下: 当等效应力达到一定数值时, 材料开始屈服。

再考虑形状改变比能(即弹性畸变能密度) W_d 。在第 5 章的习题中已经推导出

$$W_d = \frac{1}{2G} J_2 \quad (15.19)$$

可见, W_d 与 $\bar{\sigma}$ 或 J_2 只差一个常数倍数, 八面体剪应力 τ_8 亦是如此。于是, 又可

做出相应于 W_d 和 τ_8 的解释。

Mises 准则考虑了中间主应力的影响,圆柱面为光滑的曲面,因此在数学上应用起来很方便。但是,该准则也没有考虑静水应力的影响。

15.2.3 最大应力偏量准则

1940 年 Ишлинский 提出最大应力偏量准则,认为最大应力偏量达到一定值时,材料发生屈服,即

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_m = C$$

或

$$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 3C$$

其中的待定常数可由单向拉伸实验结果确定 $3C = 2\sigma_s$,于是有

$$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 2\sigma_s \quad (15.20)$$

当最大应力偏量的次序不知道时,上式可写成

$$|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3| = 2\sigma_s \quad (15.21a)$$

或

$$|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1| = 2\sigma_s \quad (15.21b)$$

或

$$|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2| = 2\sigma_s \quad (15.21c)$$

分析表明,最大应力偏量准则的屈服曲线为与 Mises 圆相切的外切六边形,该六边形通过 Tresca 六边形的 6 个顶点(图 15.8)。

在平面应力状态下,令 $\sigma_3 = 0$,则最大应力偏量屈服条件变为

$$|2\sigma_1 - \sigma_2| = 2\sigma_s \quad (15.22a)$$

或

$$|2\sigma_2 - \sigma_1| = 2\sigma_s \quad (15.22b)$$

或

$$|\sigma_1 + \sigma_2| = 2\sigma_s \quad (15.22c)$$

其图形为通过 Tresca 六边形的 6 个顶点与 Mises 圆相切的外切六边形(图 15.9)。

15.2.4 屈服准则的验证

材料的屈服准则是否符合实际必须经过试验和实践的检验。在经典屈服准则的验证试验中,所用材料通常为软钢、铝及铝合金等,试件为薄壁圆筒,荷载为轴向拉伸、内压及扭转的不同组合。取 x 轴与筒轴平行, y 轴沿筒的环向方向。设圆筒的平均半径和厚度分别为 r 和 h ,圆筒承受的轴向拉力、内压和扭矩分别为 P , p 和 M 。在前述每种荷载作用下,试件内各点均处于二向应力状态,它们分别为



图 15.10 拉扭试验

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi rh}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{轴向拉伸} \quad (a)$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{2h}, \quad \sigma_y = \frac{pr}{h}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{承受内压} \quad (b)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{M}{2\pi r^2 h} \quad \text{承受扭矩} \quad (c)$$

荷载组合不同,将得到不同的应力状态。例如,将式(a)和(c)组合,得到拉扭产生的平面应力状态(图 15.10)

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi rh}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{M}{2\pi r^2 h}$$

其主应力为

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

分别代入 Tresca 屈服条件(15.11)和 Mises 屈服条件(15.15)得

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_s}\right)^2 = 1 \quad \text{Tresca 条件} \quad (15.23)$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_s}\right)^2 = 1 \quad \text{Mises 条件} \quad (15.24)$$

若以 σ_x/σ_s 为横轴, τ_{xy}/σ_s 为纵轴,则上述两式均表示椭圆(图 15.11)。

关于屈服准则,学者们做了大量试验验证工作。这里仅介绍 G.L. Talor 和 H. Quinney(1931)进行的圆筒轴向拉伸和扭转的联合试验。试验点散布在 Mises 准则和

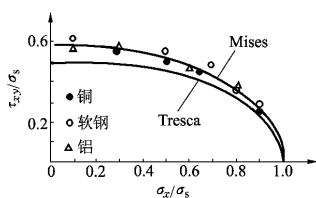


图 15.11 拉扭试验结果

Tresca 准则的理论曲线附近(图 15.11)。可见,两个准则均与试验结果基本符合,且 Mises 准则比 Tresca 准则更接近实际。

15.3 硬化规律

硬化规律规定材料进入塑性变形阶段后的后继屈服条件或加载条件。理想塑性材料不存在硬化问题,故其屈服面的大小、形状和位置均保持不变。换句话说,后继屈服面与初始屈服面重合。而对于应变硬化材料,随着塑性变形的发展,加载面不断变化。因此,需要建立硬化规律,以说明屈服面以何种方式发生变化。

后继屈服条件不仅与应力状态 σ_{ij} 有关,而且还取决于塑性应变及其历史,其一般形式为

$$f(\sigma_{ij}, H_\alpha) = 0 \quad (15.25)$$

其中 $f(\sigma_{ij}, H_\alpha)$ 称为后继屈服函数或加载函数; $H_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$ 是与塑性变形及其历史有关的参数,可以是塑性应变矢量、塑性功或等效塑性应变的函数。

硬化问题比较复杂,为确定后继屈服面,学者们提出了多种模型。其中最常用的是等向硬化模型和随动硬化模型,而试验数据则分散在这两种模型之间。

15.3.1 等向硬化模型

等向硬化模型假设拉伸时的硬化屈服极限和压缩时的硬化屈服极限相等。这样,在塑性变形过程中,后继屈服面均匀扩大。从数学上看,后继屈服函数只与应力 σ_{ij} 及标量硬化参数有关,后继屈服条件可表示为

$$f(\sigma_{ij}, H) = 0 \quad (15.26)$$

其中 H 称为硬化参数,通常取为塑性功

$$H = W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (15.27a)$$

或等效塑性应变的函数

$$H = H(\bar{\epsilon}^p), \quad \bar{\epsilon}^p = \int d\bar{\epsilon}^p \quad (15.27b)$$

当塑性应变为零时,硬化还未发生,故 $H=0$, 式(15.26)退化为初始屈服条件。

在单向拉伸或压缩条件下,式(15.26)可写成

$$f(\sigma, H) = |\sigma| - \sigma_s - H = 0 \quad (15.28)$$

在复杂应力状态下,若初始屈服条件为 $f_*(\sigma_{ij})=0$, 则式(15.26)可写成

$$f(\sigma_{ij}, H) = f_*(\sigma_{ij}) - H = 0 \quad (15.29)$$

如果初始屈服条件采用 Mises 条件, 则有

$$\bar{\sigma} - \sigma_s - H = 0 \quad (15.30)$$

在 π 平面上, Mises 初始屈服曲线是半径为 $\sqrt{2/3}\sigma_s$ 的圆, 如图 15.12 所示。若应力点移到 A 点, 则等向硬化后继屈服曲线将是半径为 OA 的圆。可见, 后继屈服曲线是一系列同心圆, 半径由 H 决定。若采用 Tresca 条件, 后继屈服曲线就是一系列同心正六边形。

在单向拉伸条件下, $\bar{\sigma} = \sigma$, $d\bar{\epsilon}^p = d\epsilon^p$, 则 $\int d\bar{\epsilon}^p = \int d\epsilon^p = \epsilon^p$ 。于是 $H = H(\epsilon^p)$ 。

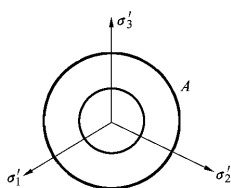


图 15.12 等向硬化模型

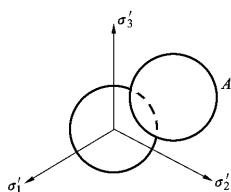


图 15.13 随动硬化模型

15.3.2 随动硬化模型

1955 年 Prager 提出了随动硬化模型, 该模型假设: 在塑性变形过程中, 后继屈服面只在空间作平动, 而不改变其大小和形状(图 15.13)。从数学上看, 后继屈服函数 f 只与应力 σ_{ij} 和决定平动量大小的塑性应变矢量 ϵ_{ij}^p 有关, 即

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (15.31)$$

在单向拉伸或压缩条件下, 且为线性硬化, 则上式可写成

$$|\sigma - c\epsilon^p| = \sigma_s \quad (15.32)$$

该式与初始屈服条件的区别就是用 $\sigma - c\epsilon^p$ 代替 σ 。若初始屈服条件写成 $f_*(\sigma_{ij}) = 0$, 则推广到复杂应力状态

$$f_*(\sigma_{ij} - c\epsilon_{ij}^p) = 0 \quad (15.33)$$

如果采用 Mises 屈服条件, 则线性随动硬化的后继屈服条件为

$$\bar{\sigma}(\sigma_{ij} - c\epsilon_{ij}^p) - \sigma_s = 0 \quad (15.34)$$

其中的常数 c 可根据单向拉伸试验确定。此时 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\epsilon_1^p = \epsilon^p$, $\epsilon_2^p =$

$\epsilon_s^p = -\epsilon^p/2$ 代入上式得

$$\sigma = \sigma_s + \frac{3c}{2}\epsilon^p \quad (a)$$

线性硬化材料单向拉伸时的曲线为

$$\sigma = \sigma_s + \frac{E_1}{1-\lambda}\epsilon^p \quad (b)$$

其中 $\lambda = E_1/E$ 。式(a)与式(b)比较,可得

$$c = \frac{2E_1}{3(1-\lambda)} \quad (15.35)$$

在 π 平面上 Mises 初始屈服曲线是半径为 $\sqrt{2/3}\sigma_s$ 的圆(图 15.13)。若应力点发生移动,则随动硬化加载面仍是半径为 $\sqrt{2/3}\sigma_s$ 的圆,只是其圆心坐标变为 $c\epsilon_{ij}^p$ 。

等向硬化模型在数学计算上比较简便,其明显缺点是没有考虑 Bauschiger 效应。如果实际中加载路径没有明显的反复(例如单调加载),可以采用这种模型。随动硬化模型的优点是能较好地反映 Bauschiger 效应,在承受反复荷载时比较符合实际。但是,加载曲面的形状、大小均未改变,也与试验结果不符。只有在加载路径与原来硬化方向比较接近的情况下,才较为符合试验结果。

习 题

- 15.1 试比较 Tresca 屈服条件和 Mises 屈服条件在(1)单向拉伸;(2)纯剪情况下的异同。

答案:(1)单向拉伸时两个屈服条件的结果相同;(2)在纯剪情况下,对于 Tresca 屈服条件,当 $\tau = \sigma_s/2$ 时屈服;对于 Mises 屈服条件,当 $\tau = \sigma_s/\sqrt{3}$ 时屈服。

- 15.2 试写出平面应变(且 $\nu = 1/2$)情况下的 Tresca 屈服条件和 Mises 屈服条件。

答案:(1)Tresca 条件: $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2$;

(2)Mises 条件: $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\sigma_s^2/3$ 。

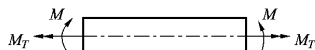
- 15.3 试写出平面应力情况下的 Mises 屈服条件。

答案: $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2$ 。

- 15.4 设圆形截面直杆受弯扭作用,弯矩 $M = 10\text{kN}\cdot\text{m}$,扭矩 $M_T = 30\text{kN}\cdot\text{m}$ 。简单拉伸时的屈服应力 $\sigma_s = 300\text{MPa}$,要求安全系数为 1.2。问直径 d 为多少才不致屈服?

答案:(1)Tresca 条件: $d = 0.109\text{m}$;

(2)Mises 条件: $d = 0.104\text{m}$ 。



题 15.4 图

第 16 章

经典塑性本构理论

当材料进入塑性变形阶段时,继续加载将产生新的塑性变形,而卸载则使弹性变形得到恢复,塑性变形保持不变。可见,在塑性阶段,加载和卸载条件下应力应变关系服从不同的规律,这就需要建立判断是加载还是卸载的条件,即加载准则。

如果材料加载,则将应力增量产生的应变增量分为弹性应变增量和塑性应变增量两部分,其中的弹性应变增量用广义 Hooke 定律计算,塑性应变增量则根据流动法则和硬化规律计算。

本章首先介绍加载准则和流动法则,连同经典屈服理论和硬化规律(第 15 章)作为建立塑性本构方程的准备,然后介绍适用于金属材料的经典塑性本构理论。

16.1 加载准则

16.1.1 硬化塑性材料

所谓加载是指塑性变形继续发展,加载准则就是判断加载还是卸载的条件。在简单应力状态下,加载准则容易建立。例如,设单向拉伸或压缩的当前应力为 σ ,应力增量为 $d\sigma$,则对于应变硬化材料有

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma d\sigma > 0 & \text{加载} \\ \sigma d\sigma < 0 & \text{卸载} \end{array} \right\} \quad (16.1)$$

在复杂应力状态下,情况就比较复杂,讨论如下:

设某点处的当前应力状态为 σ_{ij} ,它满足屈服条件 $f(\sigma_{ij}, H_a) = 0$ ($H_a = 0$ 时为初始屈服条件,否则为后继屈服条件),应力增量为 $d\sigma_{ij}$ 。 $d\sigma_{ij}$ 指向屈服面内表示该点处于卸载状态, $d\sigma_{ij}$ 指向屈服面外表示处于加载状态,而 $d\sigma_{ij}$ 与屈服面相切,则说明变化后的应力点仍然保持在屈服面上,试验证明此过程不产生新的塑

性变形,称为中性变载(图 16.1)。考虑到屈服函数的梯度矢量 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ 与屈服面垂直,则根据梯度矢量与应力增量矢量之间的夹角关系,有

$$\text{当 } f=0, \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases} \begin{cases} \text{加载} \\ \text{中性变载} \\ \text{卸载} \end{cases} \quad (16.2)$$

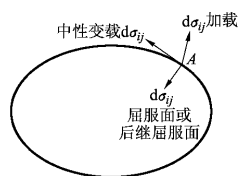


图 16.1 硬化材料

这就是加载准则。

16.1.2 理想塑性材料

对于理想塑性材料,因为不存在初始屈服面外的点,故应力增量不可能指向屈服面外。当 $f(\sigma_{ij})=0$ 时,荷载变化可以引起两种结果(图 16.2)。如果应力点保持在屈服面上,即 $d\sigma_{ij}$ 与屈服面相切,则塑性变形可以任意增长,故为加载;当应力点向屈服面内移动即 $d\sigma_{ij}$ 指向屈服面内时,则为卸载。于是,加载准则为

$$\text{当 } f=0, \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \begin{cases} =0 \\ <0 \end{cases} \begin{cases} \text{加载} \\ \text{卸载} \end{cases} \quad (16.3)$$

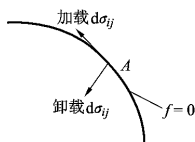


图 16.2 理想塑性材料

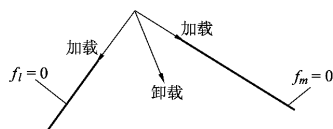


图 16.3 非正则屈服面

上述讨论是针对正则屈服面的,即屈服面为一光滑曲面。当屈服面由几个光滑曲面构成时,称为非正则屈服面(图 16.3)。此时,光滑屈服面处的加载准则仍分别为式(16.2)和(16.3),而当应力点处在两个光滑面 $f_l=0$ 和 $f_m=0$ 的交点上时,则加载准则有所不同。例如,对于理想塑性材料,有

$$\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{加载} \quad (16.4)$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{卸载} \quad (16.5)$$

16.2 流 动 法 则

流动法则是确定塑性应变增量方向的理论。Melan(1938)首先提出塑性势概念,认为在塑性变形场内存在塑性势,塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 与塑性势函数 g 具有如下关系

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16.6)$$

其中 $d\lambda$ 为非负的比例系数。这就是塑性位势理论。上式表明,一点的塑性应变增量与通过该点的塑性等势面存在正交关系。由于在流体力学中流体的流动速度方向总是沿速度等势面的梯度方向,因此类比于正交流体流动,塑性位势理论又称为塑性流动规律或正交流动法则。

对于稳定材料,前面已经根据 Drucker 公设推得 $d\epsilon_{ij}^p$ 的方向一定指向屈服面的外法向。因此,可用屈服函数作为塑性势函数,即令 $g = f$,这时的流动法则称为相关联的流动法则,即

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16.7)$$

16.3 增 量 理 论

16.3.1 增量本构方程

(1) 方程推导

根据简单拉伸试验资料,塑性本构关系受应力历史的影响,应力和应变之间不再具有一一对应关系,而且加载和卸载遵循不同的规律。因此,塑性本构关系从本质上说是增量型的,即应力增量与应变增量之间的关系。

在塑性变形阶段的加载过程中,有

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_m \delta_{ij} + de_{ij} \quad (16.8)$$

其中

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p \quad (16.9)$$

将广义 Hooke 定律(5.17)写成增量形式,即

$$d\sigma_m = 3K d\epsilon_m, \quad ds_{ij} = 2G de_{ij}^e \quad (16.10)$$

从而

$$de_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2G} \quad (a)$$

由于体积应变是弹性的,故有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_m^p \delta_{ij} + de_{ij}^p = de_{ij}^p \quad (b)$$

采用 Mises 后继屈服条件及相关联的流动法则

$$g = f = J_2 - \sigma_s^2/3 - H_\alpha \quad (c)$$

注意到 H_α 与 σ_{ij} 并无直接关系,于是根据流动法则有

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda s_{ij} \quad (d)$$

此式表明塑性应变增量与应力偏量的主方向重合。考虑到式(b),有

$$de_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad (e)$$

将式(a) (e)代入式(16.9)并连同式(16.10)的第一式,有

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

此式称为 **Prandtl-Reuss 方程**。如果忽略弹性应变,则 $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_m \delta_{ij} + de_{ij}^e + de_{ij}^p = de_{ij}^p$,上式简化成 **Lévy-Mises 方程**

$$de_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad \text{或} \quad d\epsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} \quad (16.12)$$

(2)历史解说

应当指出,在历史上先有 Lévy-Mises 方程,而 Prandtl-Reuss 方程是在此基础上提出来的。此外,获得增量本构方程的方式也与上述有别。为弄清理论发展的历史脉络,现简要介绍如下。

1871 年 Lévy 提出在塑性变形过程中应变偏量增量 de_{ij} 与应力偏量 s_{ij} 成比例。1913 年 Mises 独立地提出了同样的假设,并考虑到材料进入塑性阶段后塑性变形较大,因此建议忽略弹性变形,假定塑性应变偏量增量 de_{ij}^p 与 s_{ij} 成比例,即

$$de_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$$

此即 Lévy-Mises 方程(16.12)。

Prandtl-Reuss 理论认为当变形较小(例如弹性应变与塑性应变同量级)时,忽略弹性变形将带来较大误差,故设应变偏量增量为

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p$$

注意到式(a)和上述 Lévy - Mises 方程,便可得到 Prandtl - Reuss 方程 (16.11)。

(3) $d\lambda$ 的确定

为求式(16.11)中的 $d\lambda$,可将式(e)两边自乘

$$de_{ij}^p de_{ij}^p = d\lambda^2 s_{ij} s_{ij} \quad (16.13)$$

注意到等效应力和等效应变增量的表达式

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} de_{ij}^p de_{ij}^p} \quad (16.14)$$

可得

$$d\lambda = \frac{3d\bar{\epsilon}^p}{2\bar{\sigma}} \quad (16.15)$$

代入式(16.11)得

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3d\bar{\epsilon}^p}{2\bar{\sigma}} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

也可将式(e)两边乘以 s_{ij}

$$dW_p = s_{ij} de_{ij}^p = d\lambda s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} d\lambda \bar{\sigma}^2 \quad (16.17)$$

即

$$d\lambda = \frac{3dW_p}{2\bar{\sigma}^2} \quad (16.18)$$

其中 dW_p 为塑性功增量。将上式代入式(16.11)得

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3dW_p}{2\bar{\sigma}^2} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.19)$$

16.3.2 理想塑性材料

对于理想塑性材料,进入塑性阶段后, Mises 屈服条件恒为 $\bar{\sigma} = \sigma_s$,且可以证明

塑性功增量等于形状改变功增量, 即 $dW_p = dW_d$ 。代入式(16.16)和(16.19)得

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3d\bar{\epsilon}^p}{2\sigma_s} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3dW_d}{2\sigma_s^2} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

现在证明 $dW_p = dW_d$ 。对于理想弹塑性材料, Mises 屈服条件可写成

$$s_{ij}s_{ij} = \text{const.}$$

对上式作微分运算

$$d(s_{ij}s_{ij}) = 2s_{ij}ds_{ij} = 0 \quad (a)$$

式(16.11)的两边乘以 s_{ij}

$$s_{ij}de_{ij} = \frac{1}{2G}s_{ij}ds_{ij} + d\lambda s_{ij}s_{ij} \quad (b)$$

注意到式(16.17)和式(a), 式(b)成为

$$dW_d = s_{ij}de_{ij} = d\lambda s_{ij}s_{ij} = dW_p$$

对于理想刚塑性材料, 有

$$d\epsilon_m = 0, \quad de_{ij} = d\epsilon_{ij}, \quad d\bar{\epsilon}^p = d\bar{\epsilon}$$

于是, 式(16.20)成为

$$d\epsilon_{ij} = \frac{3d\bar{\epsilon}}{2\sigma_s} s_{ij} \quad (16.22)$$

16.3.3 硬化塑性材料

这里只讨论等向硬化材料的本构方程。如果选取塑性功为硬化参数, 则 Mises 后继屈服条件可写成

$$\bar{\sigma} - \sigma_s - W_p = 0 \quad \text{或} \quad W_p = \phi(\bar{\sigma})$$

于是

$$dW_p = \phi'(\bar{\sigma})d\bar{\sigma}$$

代入式(16.19)得

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3\phi'(\bar{\sigma})}{2\bar{\sigma}^2} d\bar{\sigma} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

若以等效塑性应变作为硬化参数, 则 Mises 后继屈服条件可写成

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_s - H \left(\int d\bar{\epsilon}^p \right) = 0 \quad \text{或} \quad \int d\bar{\epsilon}^p = \psi(\bar{\sigma})$$

于是

$$d\bar{\epsilon}^p = \psi'(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$$

代入式(16.16)得

$$\left. \begin{aligned} de_{ij} &= \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3\psi'(\bar{\sigma})}{2\bar{\sigma}} d\bar{\sigma} s_{ij} \\ d\epsilon_m &= \frac{1}{3K} d\sigma_m \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

16.3.4 本构方程的率形式

在上述增量理论的本构方程中, 应变增量均可除以 dt 而成为应变率, t 可以是时间或其他单调增加的参数。这样, 本构方程的增量形式都可以写成率的形式, 例如式(16.22)可写成

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}}{2\sigma_s} s_{ij} \quad (16.25)$$

式(16.24)可写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{3\psi'(\bar{\sigma})}{2\bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} s_{ij} \\ \dot{\epsilon}_m &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_m \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

16.4 全量理论

16.4.1 全量本构方程

塑性全量理论也称为塑性形变理论, 它试图直接建立全量形式的、与加载路

径无关的本构关系。这只有在简单加载条件下才有可能。以下先推导全量本构方程,然后简要介绍单一曲线假设和简单加载定理。

如果加载形式为简单加载,即在加载过程中任一点的各应力分量都按比例单调增长,那么增量本构方程便可简化为全量本构方程。实际上,若 σ_{ij}^0 为 t_0 时刻的任一非零的参考应力状态, $k(t)$ 为单调增加的参数,则任意时刻 t 的应力状态 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = k\sigma_{ij}^0 \quad (16.27a)$$

且有

$$s_{ij} = ks_{ij}^0, \quad \bar{\sigma} = k\bar{\sigma}^0 \quad (16.27b)$$

于是式(16.11)化为

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + k d\lambda s_{ij}^0, \quad d\epsilon_m = \frac{1}{3K} d\sigma_m,$$

积分上式并令

$$\Phi = \frac{1}{k} \int k d\lambda$$

得

$$e_{ij} = \left(\frac{1}{2G} + \Phi \right) s_{ij}, \quad \epsilon_m = \frac{1}{3K} \sigma_m \quad (16.28)$$

再令

$$H = \frac{1}{2G} + \Phi$$

则式(16.28)的第一式可写成

$$e_{ij} = H s_{ij} \quad (16.29)$$

由此得

$$e_{ij}e_{ij} = H^2 s_{ij}s_{ij}$$

注意到下列公式

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}s_{ij}}, \quad \bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}e_{ij}}$$

有

$$H = \frac{\sqrt{e_{ij}e_{ij}}}{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}} = \frac{3\bar{\epsilon}}{2\bar{\sigma}}$$

将上式代回式(16.28)得

$$e_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} s_{ij}, \quad \epsilon_m = \frac{1}{3K} \sigma_m \quad (16.30a)$$

或

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} e_{ij}, \quad \sigma_m = 3K\epsilon_m \quad (16.30b)$$

16.4.2 单一曲线假设

单一曲线假设认为,在简单加载条件下,材料的硬化特性可以用 $\bar{\sigma}$ 与 $\bar{\epsilon}$ 的函数关系来表示,即

$$\bar{\sigma} = \phi(\bar{\epsilon}) = 3G\epsilon[1 - \omega(\bar{\epsilon})] \quad (16.31)$$

且这个函数形式与应力状态无关,而只与材料特性有关。这样, $\phi(\bar{\epsilon})$ 就可根据单向拉伸试验曲线来确定。在单向拉伸条件下,有 $\bar{\sigma} = \sigma$ 及 $\bar{\epsilon} = \epsilon$, 故 $\sigma - \epsilon$ 曲线就是 $\bar{\sigma} = \phi(\bar{\epsilon})$ 。

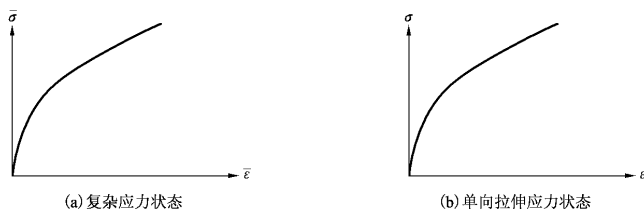


图 16.4 单一曲线假设

试验表明,在简单加载或偏离简单加载不大的情况下,单一曲线假定是相当符合实际的,即图 16.4a 所示曲线与图 16.4b 所示曲线基本重合(文献 47)。

将式(16.31)代入式(16.30)得

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= \frac{2}{3} \frac{\phi(\bar{\epsilon})}{\bar{\epsilon}} e_{ij} = 2G[1 - \omega(\bar{\epsilon})] e_{ij} \\ \sigma_m &= \frac{E}{1 - 2\nu} \epsilon_m \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

当 $\omega(\bar{\epsilon}) = 0$ 时,上式就变成广义 Hooke 定律。

16.4.3 简单加载定理

前面已经说明,在简单加载条件下可采用全量本构方程。通常我们只知道外部荷载的变化情况,而物体内的应力是不能事先确定的。因此,问题是物体在什么条件下,其内部各点均处于简单加载? A. A. Il'yushin(1948)提出的简单加载定理给出了小变形情况下实现简单加载的充分条件:

- (1)荷载按比例单调增长;
- (2)材料不可压缩,即 $\nu = 1/2$;
- (3)若有位移边界条件,只能是零位移;
- (4)材料的 $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ 曲线具有幂函数形式,即 $\bar{\sigma} = A\bar{\epsilon}^n$ 。

现对此加以证明。

设某一初始时刻,物体内的应力为 σ_{ij}^0 ,应变为 ϵ_{ij}^0 ,位移为 u_i^0 ,它们满足下列小变形时的方程:

$$\text{平衡方程} \quad \sigma_{ij,j} + f_i^0 = 0$$

$$\text{几何方程} \quad \epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0)$$

$$\text{本构方程} \quad s_{ij}^0 = \frac{2\bar{\sigma}^0}{3\bar{\epsilon}^0} e_{ij}^0 = \frac{2}{3} A (\bar{\epsilon}^0)^{n-1} e_{ij}^0$$

$$\begin{aligned} \text{边界条件} \quad n_j \sigma_{ij}^0 &= \bar{p}_i^0 && \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \\ u_i^0 &= 0 && \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{aligned}$$

如果外荷载按比例增加即 t 时刻的 $f_i = k f_i^0$, $\bar{p}_i = k \bar{p}_i^0$,只要能够证明 $\sigma_{ij} = k \sigma_{ij}^0$, $\epsilon_{ij} = \sqrt[n]{k} \epsilon_{ij}^0$, $u_i = \sqrt[n]{k} u_i^0$ 满足 t 时刻的全部方程和边界条件,就意味着简单加载。现证明如下:

$$\text{平衡方程} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = k \sigma_{ij,j}^0 + k f_i^0 = k (\sigma_{ij,j}^0 + f_i^0) = 0$$

$$\text{几何方程} \quad \epsilon_{ij} = \sqrt[n]{k} \epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} \sqrt[n]{k} (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\text{本构方程} \quad s_{ij} = k s_{ij}^0 = k \frac{2}{3} A (\bar{\epsilon}^0)^{n-1} e_{ij}^0 = \frac{2}{3} A (\bar{\epsilon})^{n-1} e_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} e_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{边界条件} \quad n_j \sigma_{ij} &= k n_j \sigma_{ij}^0 = k \bar{p}_i^0 = \bar{p}_i && \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \\ u_i &= \sqrt[n]{k} u_i^0 && \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{aligned}$$

实践表明,实现简单加载的最基本条件为荷载按比例单调增长。当其他条件近似满足时,采用全量理论仅产生不大的偏差。不过,到目前为止全量理论的适用范围仍不明确。

16.5 增量理论的普遍形式

16.5.1 本构方程

当材料变形进入塑性阶段且为加载状态时,应力增量产生的应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 分为弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 和塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 两部分

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (16.33)$$

弹性应变增量与应力增量之间服从广义 Hooke 定律

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\epsilon_{kl}^e \quad (16.34)$$

其中, D_{ijkl} 为弹性张量, E 和 ν 应该采用卸荷与重新加荷应力应变曲线部分的 E 和 ν 值。式(16.33)两边乘以 D_{ijkl}

$$D_{ijkl} d\epsilon_{kl} = D_{ijkl} d\epsilon_{kl}^e + D_{ijkl} d\epsilon_{kl}^p$$

将式(16.6)和(16.34)代入上式得

$$D_{ijkl} d\epsilon_{kl} = d\sigma_{ij} + d\lambda D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (16.35)$$

卸载和中性变载时 $d\lambda = 0$, 上式退化为增量形式的广义 Hooke 定律。加载时, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

时, 有 $d\lambda > 0$ 。因此很自然, $d\lambda$ 可以假定为

$$d\lambda = \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (16.36a)$$

其中, A 称为硬化函数。上式可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - A d\lambda = 0 \quad (16.36b)$$

联立式(16.35), (16.36b), 消去 $d\lambda$ 可解得

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} d\epsilon_{kl} \quad (16.37)$$

其中, D_{ijkl}^{ep} 为弹塑性张量, 其表达式为

$$D_{ijkl}^e = D_{ijkl} - \frac{D_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{qr}} D_{qrkl}}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (16.38)$$

16.5.2 硬化函数

现在研究硬化函数 A 的确定方法。注意到加载面

$$f(\sigma_{ij}, H) = 0$$

有

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial H} dH = 0$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = - \frac{\partial f}{\partial H} dH$$

注意到式(16.36)和上式,可知

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial H} dH \quad (16.39)$$

(1) 塑性功假定

假定 H 为塑性功,即

$$H = W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$$

则

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial W_p}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

代入式(16.39)得

$$A = - \frac{\partial f}{\partial W_p} \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16.40)$$

(2) 塑性应变假定

假定 H 是塑性应变的函数,即

$$H = H(\epsilon_{ij}^p)$$

则

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

代入式(16.39)得

$$A = -\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16.41)$$

16.5.3 矩阵形式

(1) 弹塑性矩阵

为便于在有限单元法中的应用,上述各式常写成矩阵形式。加载曲面、塑性势面及硬化参数分别为

$$f(\boldsymbol{\sigma}, H) = 0, \quad g(\boldsymbol{\sigma}, H) = 0$$

$$H = W_p = \int \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\epsilon}^p, \quad H = H(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$$

而式(16.33)为

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^e + d\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (a)$$

弹性应变增量为

$$d\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} \quad (b)$$

其中, $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵; $d\boldsymbol{\epsilon}$ 、 $d\boldsymbol{\sigma}$ 分别为应变增量和应力增量列阵, 即

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\epsilon} &= [d\epsilon_x \quad d\epsilon_y \quad d\epsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{zx}]^T \\ d\boldsymbol{\sigma} &= [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{zx}]^T \end{aligned}$$

根据式(16.6), 塑性应变增量可写为

$$d\boldsymbol{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (c)$$

将式(b)和(c)代入式(a)得

$$d\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{D}^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

即

$$\boldsymbol{D} d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \boldsymbol{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (d)$$

式(16.36b)可写为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} - A d\lambda = 0 \quad (\text{e})$$

联立式(d)和(e),可得

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{\text{ep}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (16.42)$$

其中, $\mathbf{D}_{\text{ep}}$ 为弹塑性矩阵,其计算公式为

$$\mathbf{D}_{\text{ep}} = \mathbf{D} - \mathbf{D}_{\text{p}} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{D}}{A + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (16.43)$$

(2) 硬化函数

显然,硬化函数式(16.40) (16.41)的矩阵形式分别为

$$A = -\frac{\partial f}{\partial W_{\text{p}}} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (16.44)$$

$$A = -\frac{\partial f}{\partial H} \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (16.45)$$

习 题

- 16.1 试简述硬化规律、加载准则和流动法则,并分别说明它们在塑性增量理论中所起的作用。
- 16.2 何谓正则屈服面和非正则屈服面?试写出非正则屈服面时硬化塑性材料的加载准则。
- 16.3 设物体中某点处于塑性状态的加载过程中,其三个主应力分别为 $\sigma_1 = 3a$ $\sigma_2 = a$ $\sigma_3 = 2a$ 。求此时塑性应变增量的比值 $d\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{p}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\text{p}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\text{p}}$ (提示:考虑与 Mises 条件相关联的流动法则)。

第 17 章

弹塑性分析与简单例解

当荷载达到一定值时,结构中的“危险点”将进入塑性变形阶段,此种状态称为结构的弹性极限状态,相应的荷载称为弹性极限荷载。随着荷载的逐渐增大,结构中进入塑性状态的材料越来越多,即塑性区域不断扩大。如果材料是理想塑性的(理想刚塑性的或理想弹塑性的),则结构可能发生这样的变形,即当荷载增加到某一数值时,变形将无限制地发展而荷载却不能继续增加。此时,我们称结构达到了塑性极限状态(简称极限状态),相应的荷载称为塑性极限荷载(简称极限荷载)。

一般情况下,弹塑性问题因涉及到复杂的非线性本构方程而难以得到解析解答。不过,在某些问题中,材料处于比较简单的应力状态且其主应力大小次序明确,如果再假定材料是理想弹塑性的或线性硬化的,则它们就成为可简单求解的问题,例如梁的横向弯曲、厚壁圆筒承受压力、柱体扭转等问题。在这类问题的求解中,首先从弹性分析开始,求得结构变形及弹性极限荷载,然后进入弹塑性分析,确定弹性区与塑性区的分界,最后研究结构全断面进入塑性的极限状态,从而得出塑性极限荷载。

本章首先列出弹塑性力学边值问题的微分方程,然后介绍若干简单弹塑性问题的解法。

17.1 弹塑性力学边值问题

在小变形假设下,第 2 章和第 3 章推导的平衡微分方程、几何方程和边界条件仍适用于塑性变形阶段。弹塑性问题与弹性问题的根本区别在于本构方程的不同。塑性阶段的本构方程有增量和全量两种形式,相应地,弹塑性力学边值问题的提法也有两种不同的形式。

17.1.1 全量分析

考虑下述问题:在物体 Ω 内给定体力 f_i , 边界 Γ_σ 上给定面力 $\bar{p}_i$, 边界 Γ_u 上

给定位移 $\bar{u}_i$ 。在适宜采用全量本构方程的情况下,要求确定物体各点的应力 σ_{ij} 、应变 ϵ_{ij} 和位移 u_i ,使其满足下列控制方程和边界条件。

(1)平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (17.1)$$

(2)几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (17.2)$$

(3)本构方程

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} e_{ij}, \quad \sigma_m = 3K\epsilon_m \quad (17.3)$$

(4)边界条件

$$n_j \sigma_{ij} = p_i \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (17.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (17.5)$$

在形式上,弹塑性问题全量分析与线弹性分析完全一样,只是本构方程不同。其中控制方程 15 个,未知量也是 15 个,故在给定边界条件下可以求解。

17.1.2 增量分析

当物体进入塑性阶段且加载条件复杂时,如果只在边界上给定荷载和位移的最后数值,不能确定物体内的应力场和位移场。只有在给定从自然状态开始的全部边界条件变化过程的情况下,才可能跟踪给定的加载历史,确定物体内部应力和位移的变化过程。此时,弹塑性力学问题应该按增量或速率的形式提出。

设加载阶段某时刻物体的应力 σ_{ij} 、应变 ϵ_{ij} 、位移 u_i 已经求出。在此基础上,在 Ω 内施加体力增量 df_i ,在 Γ_σ 上施加面力增量 $d\bar{p}_i$,在 Γ_u 上给定位移增量 $d\bar{u}_i$,要求确定相应的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 、应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 、位移增量 du_i ,使其满足下列控制方程和边界条件。

(1)平衡方程

$$d\sigma_{ij,j} + df_i = 0 \quad (17.6)$$

(2)几何方程

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (17.7)$$

(3) 本构方程

在弹性区或塑性区卸载时, 本构方程采用增量形式的广义 Hooke 定律, 即

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G}, \quad d\epsilon_m = \frac{1}{3K}d\sigma_m \quad (17.8)$$

或

$$d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{1}{3K}d\sigma_m\delta_{ij} \quad (17.9)$$

当材料已进入塑性变形阶段且新的荷载增量为加载时, 采用塑性本构方程。

例如 Prandtl-Reuss 方程

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda s_{ij}, \quad d\epsilon_m = \frac{1}{3K}d\sigma_m \quad (17.10)$$

或

$$d\epsilon_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda s_{ij} + \frac{1}{3K}d\sigma_m\delta_{ij} \quad (17.11)$$

(4) 边界条件

$$n_j d\sigma_{ij} = d\bar{p}_i \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (17.12)$$

$$du_i = d\bar{u}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (17.13)$$

(5) 连续条件

结构在弹塑性状态下, 可分为弹性区和塑性区。在弹性区和塑性区的分界处, 应力和应变应当满足一定的连续性条件(有时还有间断性条件)。设弹性区与塑性区的交界面为 Γ_C , 其法线方向为 $\mathbf{n}$, 则位移连续条件和应力连续条件分别为

$$du_i^{(1)} n_i = du_i^{(2)} n_i \quad \text{在 } \Gamma_C \text{ 上} \quad (17.14)$$

$$n_j d\sigma_{ij}^{(1)} = n_j d\sigma_{ij}^{(2)} \quad \text{在 } \Gamma_C \text{ 上} \quad (17.15)$$

其中, 上标(1)、(2)分别表示弹性区和塑性区。

上述控制方程有 15 个, 未知量也是 15 个, 在给定边界条件下可以求解, 其中确定弹性区与塑性区交界需考虑连续条件。求出 $d\sigma_{ij}$, $d\epsilon_{ij}$, du_i 后叠加到原来的 σ_{ij} , ϵ_{ij} , u_i 上, 再进行下一荷载增量步的计算, 直到

$$\sum_{k=1}^n df_{ik} = f_i, \quad \sum_{k=1}^n d\bar{p}_{ik} = \bar{p}_i, \quad \sum_{k=1}^n d\bar{u}_{ik} = \bar{u}_i$$

为止。其中 f_i , $\bar{p}_i$, $\bar{u}_i$ 分别为给定的最终体力、面力、边界位移。

17.1.3 方程求解

(1) 解的唯一性

在线性弹性力学问题中,解的唯一性定理是成立的。而在弹塑性力学问题中,本构方程为非线性,且应力与应变不存在单值对应关系,因而问题就比较复杂。如果结构是简单加载并全量理论求解,则解是唯一的。在必须采用增量理论求解的问题中,对于硬化材料,当 $d\sigma_{ij}$ 确定时,对应的 $d\varepsilon_{ij}$ 也是唯一确定的;对于理想塑性材料,就给定的 $d\sigma_{ij}$ 值,不能唯一地确定 $d\varepsilon_{ij}$,即 $d\varepsilon_{ij}$ 的解可以不唯一。

(2) 求解的方法

弹塑性力学问题的基本求解方法仍然是位移法和应力法。由于涉及到复杂的非线性本构方程,通常情况下解析解是无法得到的,只能采用数值方法求近似解。如果材料是理想弹塑性的或线性硬化弹塑性的,则对于某些简单弹塑性问题,可以得到解析解。以下各节仅讨论这类问题,其中均假设材料具有理想弹塑性。

17.2 梁的弹塑性弯曲

17.2.1 基本方程

本节采用材料力学中的简化假定,讨论梁在弯矩和横向荷载作用下的弹塑性弯曲问题,且仅限于矩形截面梁(其他截面梁的分析是相似的)。

(1) 基本假设

梁的横向弯曲(图 17.1)属于平面应力问题, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 。通常认为,在弹塑性阶段,材料力学中的基本假设仍然成立:平截面假设,即弯曲过程中梁的截面仍保持为平面且与变形后的梁轴垂直。于是,有横向剪应变 $\gamma_{xy} = 0$;横向纤维无挤压,即 $\varepsilon_y = 0$;梁轴水平方向无伸缩,即 $u|_{y=0} = 0$ 。这样,非零应变分量仅有轴向应变 ε_x 。

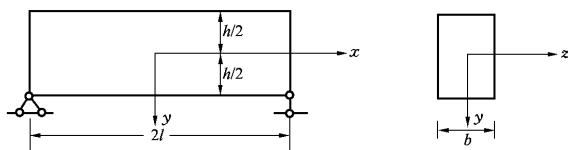


图 17.1 梁的横向弯曲

(2) 几何方程

根据上述假设, 不难推导出梁的位移函数如下

$$u = -y \frac{dv}{dx}, \quad v = v(x) \quad (17.16)$$

其中, u, v 分别为梁的水平位移和竖向位移。于是有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = \kappa y \quad (17.17)$$

其中, κ 为曲率。

(3) 本构方程

在本构方程中忽略次要应力(即挤压应力 σ_y 和横向剪应力 τ_{xy})的影响, 材料处于轴向应力的单向拉压状态。对于理想弹塑性材料, 应力-应变关系为

$$\sigma_x = \begin{cases} E\epsilon_x & |\epsilon_x| \leq \epsilon_s \\ \sigma_s \operatorname{sgn} \epsilon_x & |\epsilon_x| > \epsilon_s \end{cases} \quad (17.18)$$

其中, ϵ_s 为屈服应变, 即应力刚达到屈服应力 σ_s 时的应变。

(4) 平衡方程

在不计体力的情况下, 平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

轴向应力 σ_x 求出后, 挤压应力 σ_y 和横向剪应力 τ_{xy} 可以根据上述平衡微分方程求出。于是, 任一截面上的弯矩 M 和剪力 Q 为

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x b y dy = 2 \int_0^{h/2} \sigma_x b y dy \quad (17.20)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} b dy = 2 \int_0^{h/2} \tau_{xy} b dy \quad (17.21)$$

(5) 屈服条件

通常略去次要应力 σ_y 和 τ_{xy} 对材料屈服的影响, 此时屈服条件为

$$\sigma_x = \pm \sigma_s \quad (17.22)$$

17.2.2 梁的纯弯曲

如果只在梁的两端作用一对力偶 M 且力偶作用在梁的对称面内(图

17.2) ,则每个截面上只有弯矩而没有剪力 ,且每个截面上的弯矩均相同。

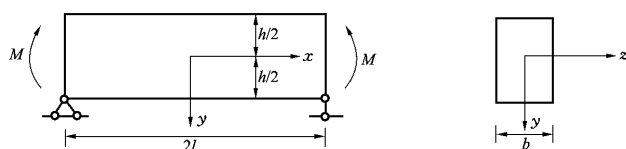


图 17.2 梁的纯弯曲

(1)弹性阶段

在弹性阶段(图 17.3a) 轴向应力为

$$\sigma_x = E\epsilon_x = E\kappa y$$

将其代入式(17.20)得

$$\sigma_x = \frac{M y}{J} \quad (17.23)$$

其中 ,截面惯性矩 $J = bh^3/12$ 。

横截面上 σ_x 的分布如图 17.3a 所示。可见 ,最大正应力出现在梁的上下边缘。随着弯矩的增加 ,边缘处首先进入塑性变形状态(图 17.3b)。此时梁处于弹性极限状态 ,弹性极限弯矩为

$$M_e = \frac{2J\sigma_s}{h} \quad (17.24)$$

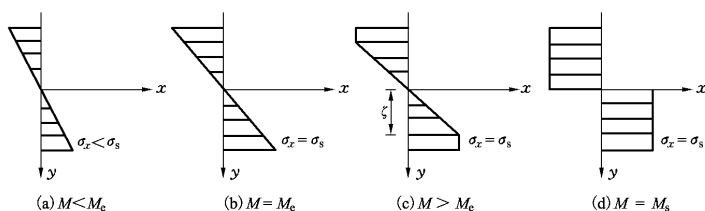


图 17.3 梁截面应力

(2)弹塑性阶段

当 $M > M_e$ 时 ,横截面上开始出现弹塑性分区(图 17.3c) ,即截面的中间部分为弹性区 ,上下两部分为塑性区。弹性区与塑性区的分界在 $y = \pm \zeta$ 处 ,轴向应力的分布为

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_s y / \zeta & |y| \leq \zeta \\ \pm \sigma_s & |y| > \zeta \end{cases} \quad (a)$$

将其代入式(17.20)得

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^{h/2} \sigma_s b y dy = 2 \int_0^{\zeta} \sigma_s b y^2 / \zeta dy + 2 \int_{\zeta}^{h/2} \sigma_s b y dy \\ &= \sigma_s b h^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (b)$$

当 $\zeta=0$ 时,整个截面进入塑性状态(图 17.3d),此时的弯矩为塑性极限弯矩 M_s

$$M_s = \frac{1}{4} \sigma_s b h^2 \quad (17.25)$$

整理式(b)得

$$\zeta = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_s} \right)} \quad (17.26)$$

(3) 卸载

如果加载到塑性阶段后卸载,只是弹性变形得到恢复,而塑性变形残留下来。应力改变量与应变改变量之间服从广义 Hooke 定律。用外荷载的改变量作为假想荷载作用到物体上,按线弹性理论求出应力和应变,再从卸载前的相应应力和应变中将其扣除,则得卸载后的应力和应变。外荷载全部卸去后,所得应力和应变即为残余应力和应变。

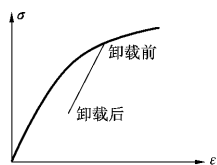


图 17.4 残余应力和应变

显然,外荷载全部卸去后,在物体内不仅会留下残余变形,而且还会有残余应力(图 17.4)。因为应力的改变量是按弹性计算得到的,而卸载前的应力是按塑性计算的,它们不会完全相等。

17.2.3 梁受横向荷载

当梁承受横向荷载作用时,将产生次要应力 σ_y 和 τ_{xy} 。如果忽略其影响,则此时的分析与梁的纯弯曲问题相似,只是各个横截面上的弯矩 $M = M(x)$ 不同而已,而截面的弹性极限弯矩和塑性极限弯矩算式仍然为(17.24)和(17.25)。

(1) 集中荷载

设简支梁的跨中受集中荷载 P 作用(图 17.5),其弯矩方程为

$$M = \frac{P}{2}(l - x) \quad (a)$$

显然,跨中弯矩最大,即 $M(0) = M_{\max} = Pl/2$ 。若 $M(0) < M_e$,则整个梁将处于弹性状态,而当 $M(0) = M_e$ 时,梁处于弹性极限状态,弹性极限荷载为

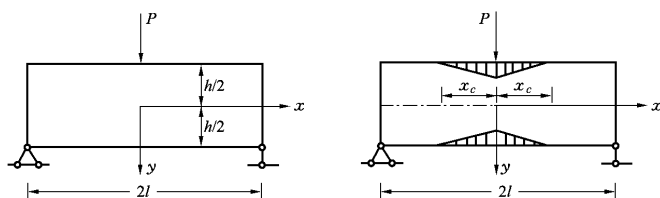


图 17.5 梁受集中荷载

$$P_e = \frac{2M_e}{l} \quad (17.27)$$

当 $P > P_e$ 时,弯矩从梁中点到端点是递减的。因此,总存在截面 $x = x_c$ 此处有 $M(x_c) = M_e$ 。这样,整个梁被分成弹性段和弹塑性段。根据弯矩方程

$$M_e = \frac{P}{2}(l - x_c) \quad (b)$$

可得

$$x_c = l - 2M_e/P \quad (17.28)$$

弹塑性段内每个截面上弹塑性区分界点的位置由式(17.26)确定。注意到式(a)得

$$\zeta = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_s}\right)} = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{P(l-x)}{2M_s}\right)} \quad (17.29)$$

随着荷载的逐渐增加,截面塑性区的范围越来越大。当荷载增加到某值时,梁中点的弯矩 $M(0) = M_s$ 。此时,在跨中形成了塑性铰,相应的荷载称为塑性极限荷载 P_s ,即

$$P_s = \frac{2M_s}{l} \quad (17.30)$$

(2) 均布荷载

设简支梁受均布荷载 q 作用(图 17.6),其弯矩方程为

$$M = \frac{q}{2}(l^2 - x^2) \quad (c)$$

梁中弯矩最大, $M(0) = M_{\max} = ql^2/2$ 。若 $M(0) < M_e$ 则整个梁处于弹性状态;而当 $M(0) = M_e$ 时,梁处于弹性极限状态,弹性极限荷载为

$$q_e = \frac{2M_e}{l^2} \quad (17.31)$$

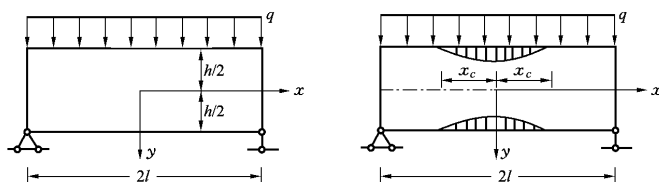


图 17.6 梁受均布荷载

当 $q > q_e$ 时, 整个梁被分成弹性段和弹塑性段。若当 $x = x_c$ 时 $M = M_e$, 即

$$M_e = \frac{q}{2}(l^2 - x_c^2) \quad (d)$$

由此得

$$x_c = \sqrt{l^2 - 2M_e/lq} \quad (17.32)$$

弹塑性段内每个截面上弹塑性区分界点的位置由式(17.26)确定。注意到式(c)得

$$\zeta = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_s}\right)} = \frac{h}{2} \sqrt{3 \left(1 - \frac{q(l^2 - x^2)}{2M_s}\right)} \quad (17.33)$$

当荷载增加到某值时, 梁中点的弯矩 $M(0) = M_s$, 此时的荷载为塑性极限荷载 q_s , 即

$$q_s = \frac{2M_s}{l^2} \quad (17.34)$$

17.2.4 超静定梁

根据前面静定梁的弹塑性分析可知, 当梁内最大弯矩等于 M_s 时, 梁内就会出现一个塑性铰, 静定梁成为一种塑性机构, 即达到塑性极限状态。对于超静定梁, 梁内每出现一个塑性铰, 超静定次数就会降低一次, 直到成为机构而达到塑性极限状态。现就图 17.7 所示的一次超静定梁进行分析。

由材料力学知, 超静定梁的弯矩为

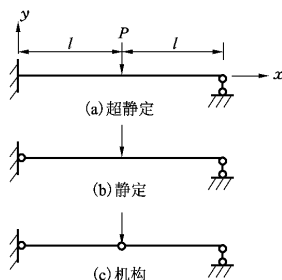


图 17.7 超静定梁

$$M(x) = \frac{5P}{16}(2l - x) - P(l - x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$M(x) = \frac{5P}{16}(2l - x) \quad l \leq x \leq 2l$$

最大弯矩在固定端截面处,即

$$M_{\max} = M(0) = -\frac{3}{8}Pl$$

当 $M(0) = -M_s$ 时,对应的荷载为 $P_e = \frac{8M_s}{3l}$ 。当 $P > P_e$ 时,固定端成为塑性铰,弯矩将保持不变,且梁成为静定梁。不难求出此时的梁内弯矩

$$M(x) = \left(\frac{P}{2} - \frac{M_s}{2l}\right)(2l - x) - P(l - x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$M(x) = \left(\frac{P}{2} - \frac{M_s}{2l}\right)(2l - x) \quad l \leq x \leq 2l$$

此时集中力作用点处弯矩最大,其值为

$$M(l) = \frac{1}{2}(Pl - M_s)$$

当 $M(l) = M_s$ 时,梁成为机构,相应的塑性极限荷载为

$$P_s = \frac{3M_s}{l} \quad (17.35)$$

17.3 厚壁圆筒承受内压

设内半径为 a 、外半径为 b 的厚壁圆筒受内压 q (图 17.8a)。当 q 逐渐增加时,圆筒的应力状态将由弹性状态逐渐过渡到弹塑性状态,直到塑性极限状态。

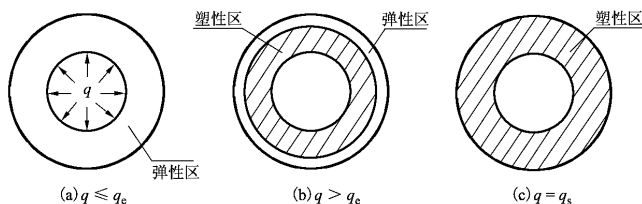


图 17.8 厚壁圆筒承受内压

17.3.1 弹性阶段

根据式(8.15), 厚壁圆筒受内压 q 作用时, 弹性阶段的应力分量为

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) q, \quad \sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) q, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (17.36)$$

该问题属于平面应变问题, σ_z 为

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{qa^2}{b^2 - a^2}$$

显然 3 个主应力的大小排序为

$$\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$$

且有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2qa^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2}$$

随着荷载的增大, 圆筒在内壁处首先屈服。根据 Tresca 屈服条件, 当内壁处的 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$ 时材料开始屈服, 对应的弹性极限荷载为

$$q_e = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (17.37)$$

17.3.2 弹塑性阶段

当内压 q 超过 q_e 时, 圆筒进入弹塑性阶段, 分为弹性区和塑性区, 其分界线为 $r = c$ (图 17.8b)。

(1) 塑性区 $a \leq r \leq c$

塑性区内的每一点均满足 Tresca 屈服条件, 即

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s \quad (a)$$

同时满足轴对称平衡微分方程, 即

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} = 0 \quad (b)$$

将式(a)代入式(b), 积分得塑性区的径向应力

$$\sigma_r = \sigma_s \ln r + C \quad (c)$$

将边界条件 $\sigma_r|_{r=a} = -q$ 代入上式得出常数 C , 再带回上式得

$$\sigma_r = \sigma_s \ln \frac{r}{a} - q \quad (d)$$

将其代入式(a),得到塑性区内的环向应力

$$\sigma_\theta = \sigma_s \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) - q \quad (17.38)$$

(2)弹性区 $c < r \leq b$

如果取圆筒弹性区为研究对象,则弹性区与塑性区分界线处的 σ_r 与弹性区内压 q_c 数值上相等。由于该处位于塑性区的边界上,故根据式(d)

$$q_c = -\sigma_r|_{r=c} = -\left(\sigma_s \ln \frac{c}{a} - q\right) \quad (17.39)$$

将 $q = q_c$, $a = c$ 代入式(17.36),可得弹性区内的应力分布

$$\sigma_r = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) q_c, \quad \sigma_\theta = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) q_c, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (17.40)$$

考虑到 q_c 为弹性极限荷载,根据式(17.37)有

$$q_c = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \quad (17.41)$$

根据式(17.39)和(17.41),有(应力连续条件)

$$-\left(\sigma_s \ln \frac{c}{a} - q\right) = \frac{\sigma_s}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \quad (17.42)$$

可求得 c 。

(3)塑性极限荷载

当 $c = b$ 时,厚壁圆筒全部进入塑性极限状态(图 17.8c),此时的内压 q 为塑性极限荷载 q_s 。由式(17.42),可得

$$q_s = \sigma_s \ln \frac{b}{a} \quad (17.43)$$

17.4 柱体弹塑性扭转

17.4.1 圆柱弹塑性扭转

当扭矩在弹性极限扭矩和塑性极限扭矩之间时,截面只有一部分屈服,此即弹塑性扭转问题。除圆形截面柱外,一般截面柱的弹塑性扭转问题尚未得到精

确解。困难在于弹、塑性区分界线的位置和形状都是未知的。这里仅介绍圆柱扭转的弹塑性分析。

(1) 弹性阶段

根据式(11.18), 半径为 a 的圆形截面柱弹性扭转剪应力为

$$\tau_{zx} = -\frac{2M}{\pi a^4}y, \quad \tau_{zy} = \frac{2M}{\pi a^4}x$$

合剪应力为

$$\tau_r = \frac{2M}{\pi a^4}r$$

显然, 最大剪应力发生在截面周边上, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^3}$$

当 $\tau_{\max} = \tau_s$ 时, 柱体处于弹性极限状态(图 17.9a) 相应的弹性极限扭矩为

$$M_e = \frac{1}{2}\pi a^3 \tau_s \quad (17.44)$$

M_e 也可根据平衡条件直接求得, 即

$$M_e = \int_A r \tau_r dA = 2\pi \int_0^a \tau_r r^2 dr = \frac{1}{2}\pi a^3 \tau_s$$

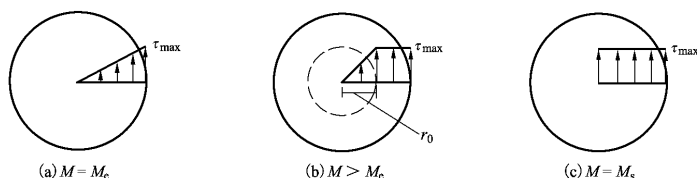


图 17.9 圆柱弹塑性扭转

(2) 弹塑性阶段

当 $M > M_e$ 时, 截面的外层部分进入塑性状态, 而中间部分仍处于弹性状态(图 17.9b)。显然, 弹性区将约束外层塑性区的塑性变形, 使其不发生无限制的塑性流动。根据平衡条件, 弹塑性阶段的扭矩与弹性内核 r_0 之间的关系为

$$\begin{aligned} M &= \int_A r \tau_r dA = 2\pi \int_0^a \tau_r r^2 dr = 2\pi \int_0^{r_0} (\tau_s r / r_0) r^2 dr + 2\pi \int_{r_0}^a \tau_s r^2 dr \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \tau_s - \frac{1}{6}\pi r_0^3 \tau_s \end{aligned}$$

(3) 塑性极限荷载

当 $r_0 = 0$ 时, 全截面进入塑性状态(图 17.9c), 此时的塑性极限扭矩为

$$M_s = \frac{2}{3} \pi a^3 \tau_s \quad (17.45)$$

塑性极限扭矩与弹性极限扭矩之比为

$$\frac{M_s}{M_e} = \frac{4}{3}$$

17.4.2 塑性扭转——沙堆比拟

(1) 塑性应力曲面

对于任意截面柱的全塑性扭转(即全截面进入塑性状态), 与弹性扭转分析类似, 设塑性扭转应力函数为 φ^p , 应力分量表示为

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi^p}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi^p}{\partial x} \quad (17.46)$$

则扭转问题的平衡微分方程恒能满足。根据静力平衡条件, 截面的塑性极限扭矩 M_s 为

$$M_s = 2 \iint_A \varphi^p dx dy \quad (17.47)$$

其中, A 为柱的横截面。

截面上任一点均满足下列屈服条件

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_s^2$$

将式(17.46)代入得

$$\left(\frac{\partial \varphi^p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^p}{\partial y} \right)^2 = \tau_s^2$$

即

$$\left| \text{grad} \varphi^p \right| = \tau_s \quad (17.48)$$

塑性应力函数所代表的曲面 $z = \varphi^p(x, y)$ 称为塑性应力曲面。上式的几何意义是曲面上任一点的坡度为常数 τ_s 。也就是说, 塑性应力曲面是等倾斜面。将干沙堆在一个与柱截面相同的水平板上, 就能形成这种等倾斜表面, 只不过沙堆的坡度为 $\tan \varphi$ (φ 是沙土的内摩擦角)。通过这种类比求解塑性扭转问题的方法就是沙堆比拟法。

由式(17.48)可知,塑性区剪应力矢量的大小为一常数,而其方向则垂直于区域周界的法线,即剪应力线平行于区域的周界。沙堆的“脊”是剪应力的间断线(例如图 17.10 中的 AB 线), τ_{zx} 和 τ_{zy} 过这种线时不连续,即剪应力 $\tau = \tau_s$ 的方向发生跳跃式的变化。

(2) 塑性极限扭矩

由式(17.47)可知,塑性极限扭矩 M_s 等于塑性应力曲面所围体积的 2 倍。根据沙堆比拟, M_s 即沙堆(其坡度为 τ_s)体积 V 的 2 倍。例如,对于半径为 a 的圆形截面柱(图 17.11), 坡度 $h/a = \tau_s$, 体积 $V = \pi a^2 h/3$, 于是塑性极限扭矩为

$$M_s = \frac{2}{3} \tau_s \pi a^3 \quad (17.49)$$

对于矩形截面 $a \times b$ 的柱(图 17.12), 坡度 $\frac{h}{b/2} = \tau_s$, 塑性极限扭矩为

$$M_s = 2 \cdot \frac{(a-b)bh}{2} + 2 \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b^2 h \right) = \frac{1}{2} \tau_s a b^2 - \frac{1}{6} \tau_s b^3 \quad (17.50)$$

当截面为正方形时,有

$$M_s = \frac{1}{3} \tau_s b^3 \quad (17.51)$$

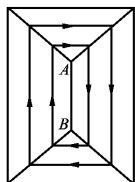


图 17.10 间断线

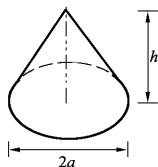


图 17.11 圆形截面

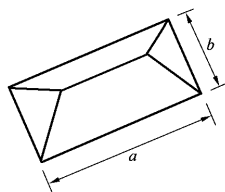


图 17.12 矩形截面

沙堆比拟法可用于近似地计算狭长截面柱体的极限扭矩(图 17.13)。此时忽略两端的坡度,沙堆的长度等于截面长度 l ,沙堆底面宽度为截面宽度 δ ,沙堆高度为 $\tau_s \delta/2$ 。这样,沙堆的近似扭矩为

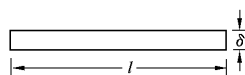


图 17.13 狭长截面

$$M_s = \frac{1}{2} \tau_s \delta^2 l \quad (17.52)$$

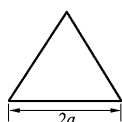
习 题

17.1 求厚壁圆筒进入塑性极限状态时的应力分布。

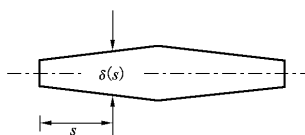
答案： $\sigma_r = \sigma_s \ln \frac{r}{b}$ $\sigma_\theta = \sigma_s \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right)$ 。

17.2 试用沙堆比拟法计算等边三角形截面柱的塑性极限扭矩。

答案： $M_s = \frac{2}{3} \tau_s a^3$ 。



题 17.2 图



题 17.3 图

17.3 试用沙堆比拟法计算变宽度(δ)狭长(l)截面柱的塑性极限扭矩。

答案： $M_s = \frac{1}{2} \tau_s \int_0^l \delta^2(s) ds$ 。

第 18 章

塑性极限分析严密解法

在前一章求解弹塑性力学问题时,首先从弹性分析开始并求得弹性极限荷载,然后进入塑性阶段的分析,得出弹性区与塑性区的分界,最后求得结构进入塑性极限状态时的塑性极限荷载。通常情况下这种严密的弹塑性分析是不可能的,而且若采用塑性极限设计方法,也只需计算结构的塑性极限荷载。因此,没有必要从弹性状态开始求解,而直接进行塑性极限分析即可。可以证明,对于由理想塑性材料构成的结构,极限状态及极限荷载与加载历史无关。也就是说,加载方式确定以后,极限状态和极限荷载都是唯一的,而且与材料是理想刚塑性还是理想弹塑性无关。

塑性极限荷载的求解方法可分为两种,即严密解法和近似解法。本章介绍作为严密解法的滑移线场理论。简单地说,滑移线就是剪切滑动面的迹线,滑移线场理论就是关于滑移线性质的理论。该理论是 Kötter 于 1903 年提出的,其后经 Sokolovskii 发展并用于求解各种土力学稳定问题。至于极限荷载的近似解法,将在第 19 章中加以讨论。

18.1 基本方程

极限荷载应满足下述条件:(1)平衡微分方程和应力边界条件;(2)几何方程及位移或速度边界条件;(3)本构方程,即在弹性区域内满足弹性本构方程,在塑性区域内满足塑性本构方程以及屈服条件。

18.1.1 平衡方程

对于平面应变问题,在不计体力的情况下,平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

此外, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, 而 σ_z 根据本构方程确定。

18.1.2 本构方程

由于极限荷载与材料是理想刚塑性还是理想弹塑性无关, 故通常采用理想刚塑性本构方程, 例如增量理论中的 Lévy-Mises 方程

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} = \frac{3d\bar{\epsilon}}{2\sigma} s_{ij} \quad (a)$$

或

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} s_{ij} = \frac{3\dot{\bar{\epsilon}}}{2\sigma} s_{ij} \quad (b)$$

其展开式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{2}{3}\dot{\lambda} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] & \dot{\gamma}_{xy} &= 2\dot{\lambda}\tau_{xy} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{2}{3}\dot{\lambda} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right] & \dot{\gamma}_{yz} &= 2\dot{\lambda}\tau_{yz} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{2}{3}\dot{\lambda} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] & \dot{\gamma}_{zx} &= 2\dot{\lambda}\tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在平面应变条件下 $\dot{\epsilon}_z = 0$, $\dot{\gamma}_{yz} = 0$, $\dot{\gamma}_{zx} = 0$, 故有

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma_m \quad (d)$$

$$\dot{\epsilon}_x = \dot{\lambda}(\sigma_x - \sigma_m), \quad \dot{\epsilon}_y = \dot{\lambda}(\sigma_y - \sigma_m), \quad \dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\lambda}\tau_{xy} \quad (e)$$

从上式中消去 $\dot{\lambda}$, 可得

$$\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (18.2)$$

此外, 由式(d)及式(e), 可知

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = \dot{\lambda}(\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_m) = 0 \quad (18.3)$$

考虑到 $\dot{\epsilon}_z = 0$, 上式即为材料不可压缩条件。

18.1.3 几何方程

将平面问题的几何方程对 t 求导, 且速度表示为

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$$

则

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

于是, 式(18.2), (18.3)可分别写成

$$\frac{\partial \dot{u} / \partial x - \partial \dot{v} / \partial y}{\partial \dot{u} / \partial y + \partial \dot{v} / \partial x} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \text{或} \quad \frac{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y}{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (18.4)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (18.5)$$

以上两式为速度与应力之间的关系。塑性区内各点的速度构成速度场, 对于理想刚塑性材料, 开始变形的瞬时, 有流动趋势, 速度场表示塑性区内各点的流动趋势。

18.1.4 屈服条件

在塑性区内, 应力满足屈服条件。采用 Mises 屈服条件(15.16), 并用 k 表示剪切屈服极限 τ_s , 有

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (a)$$

下面考虑塑性区内主应力的计算。注意到 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, 显然 σ_z 为一主应力, 其他两个主应力由下式确定

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (b)$$

于是, 塑性区内的主应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

最大剪应力及作用于最大剪应力面上的正应力分别为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (18.7a)$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_m \quad (18.7b)$$

将式(18.6)代入式(a)得

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (18.8)$$

于是,主应力可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_m + k \\ \sigma_2 &= \sigma_m \\ \sigma_3 &= \sigma_m - k \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

这说明在塑性区内,任一点的应力状态可用静水压力 σ_m 与纯剪应力 $\tau = k$ 两个分量来表示。

综上所述,对于塑性平面应变问题,有 5 个控制方程即(18.1)、(18.4)、(18.5)和(18.8),含有 5 个未知数 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 v_x 和 v_y ,故给定边界条件后便是可解的。注意到平衡方程(18.1)和屈服条件(18.8)中不含速度,因此若只有应力边界条件,则可从其中求解 3 个应力分量。这类不需要本构方程和几何方程就可以求出应力分布的问题称为“静定”问题。得到应力分量以后,不难由式(18.4)、(18.5)计算速度。当部分边界上给定位移或速度条件时,塑性平面应变问题便成为“超静定”的了。

18.2 滑移线方程

18.2.1 滑移线

根据上述讨论,塑性区内任意一点 P 在 xy 平面内的应力状态如图 18.1a 所示。在 z 方向作用有 $\sigma_z = \sigma_m = \sigma_2$,另两个主应力 σ_1 、 σ_3 如图 18.1b 所示。最大剪应力面与主应力方向呈 $\pm 45^\circ$ 。当 P 点的位置连续变化时,则与 P 点最大剪应力面的法线相切的线元连成相互正交的两条曲线,分别称为第一、第二最大剪应力线。其中第一最大剪应力线与 x 轴夹角用 θ 表示,并以由 x 轴逆时针旋转为正(图 18.1b)。

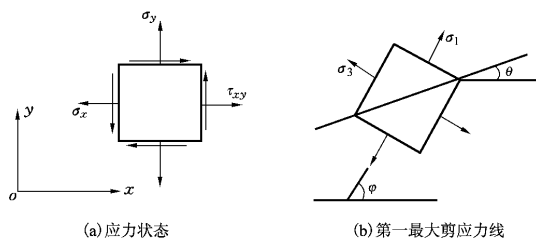


图 18.1

当最大剪应力达到屈服极限 k 时,材料进入塑性流动状态。此时,第一和第二最大剪应力线分别称为 α 线和 β 线(图 18.2a)。规定 α 线和 β 线的正方向成右手坐标系,并使剪应力 τ 在该坐标系内成正方向。于是,塑性区内各点的 α 线、 β 线构成正交曲线坐标系。

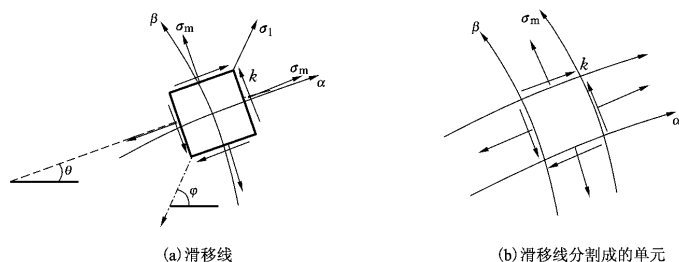


图 18.2

设在塑性区内任一点处,取 α, β 为局部坐标,则在

$$\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{\dot{\gamma}_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0$$

中,可将脚标 x, y 分别用 α, β 代换,而且 $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_m, \tau_{\alpha\beta} = k$ 。于是,有

$$\dot{\epsilon}_\alpha + \dot{\epsilon}_\beta = 0$$

$$\dot{\epsilon}_\alpha - \dot{\epsilon}_\beta = 0$$

由此可知, α, β 方向的线应变率恒等于零,材料只沿主剪切面滑移。因此,也称 α 线和 β 线为滑移线。滑移线以正交网络布满塑性区,形成滑移线场。由滑移线分割成的单元体受力情况如图 18.2b 所示。

塑性区内各点的滑移线构成正交曲线坐标系, σ_1 的方向必在 $\alpha\beta$ 坐标系的第一及第三象限。故由 σ_1 方向顺时针旋转 45° 就是 α 方向,逆时针旋转 45° 就是 β 方向。这种关系很容易使得我们通过最大主应力方向确定滑移线场方向。注意到导数的几何意义以及 α 线和 β 线正交,滑移线的微分方程为(图 18.3)

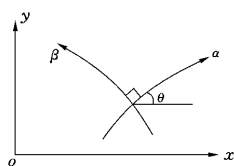


图 18.3 滑移线正交

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad \alpha \text{ 线} \quad (18.10a)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta \quad \beta \text{ 线} \quad (18.10b)$$

18.2.2 Hencky 方程

(1)未知量变换

令最大主应力方向与 x 轴成 φ 角(图 18.1) 则根据应力分析(习题 7.1) 有

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (18.11)$$

由于第一最大剪应力线与最大主应力的夹角为 45° 故有

$$\varphi = \theta + 45^\circ$$

于是

$$\tan 2\varphi = -\frac{1}{\tan 2\theta} \quad (18.12)$$

注意到式(18.11)和(18.12) 有

$$\sigma_y - \sigma_x = 2\tau_{xy}\tan 2\theta \quad (a)$$

将其代入屈服条件(18.8) 得

$$\tau_{xy} = k \cos 2\theta \quad (b)$$

注意到

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (c)$$

根据式(a) (b) (c) 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_m - k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_m + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

可见 通过引入屈服条件 我们已将未知量 σ_x σ_y τ_{xy} 转换为 σ_m θ 。

(2)特征线方程

式(18.13)中的 σ_x σ_y τ_{xy} 已经满足屈服条件 还需满足平衡微分方程。将其代入式(18.1)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - 2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} - 2k \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

此外 σ_m 和 θ 的微分为

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m &= \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} dy \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

可以把式(18.14)和(18.15)看作是以 $\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ 为未知量的线性方程组, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2k \cos 2\theta & -2k \sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k \sin 2\theta & 2k \cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \sigma_m / \partial x \\ \partial \sigma_m / \partial y \\ \partial \theta / \partial x \\ \partial \theta / \partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\sigma_m \\ d\theta \end{Bmatrix} = 0$$

其解为

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} = \frac{D_2}{D}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{D_3}{D}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{D_4}{D} \quad (18.16)$$

其中 D 为系数行列式, D_1, D_2, D_3, D_4 分别为将 D 中的第一、二、三、四列各元素代之以自由项列。

当系数行列式 D 等于零时, 前述方程组的解不确定, 即 $\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ 不能唯一确定, 此时

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2k \cos 2\theta & -2k \sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k \sin 2\theta & 2k \cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (18.17a)$$

展开得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\cot 2\theta \left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0 \quad (18.17b)$$

其两个根为

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\cot \theta \quad (18.18)$$

此式为 xy 坐标面内两族正交曲线。上述结果表明, 存在两族正交曲线 L^+ 和 L^- , 沿这种曲线 σ_m 和 θ 的导数不确定, 即穿过曲线时导数不连续。根据微分

方程理论,式(18.14)称为双曲线方程,式(18.17)称为其特征方程,曲线 L^+ 和 L^- 称为特征线,而式(18.18)即特征线的微分方程式。显然,特征线与滑移线的微分方程(18.10)相同,这表明特征线与滑移线重合。

(3) Hencky 方程

如上所述,沿着特征线或滑移线, $\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_m}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ 不能惟一确定,但必为有限值。因此,考虑到 $D=0$,行列式 D_1, D_2, D_3, D_4 的值也必等于零。例如

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2k \cos 2\theta & -2k \sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k \sin 2\theta & 2k \cos 2\theta \\ d\sigma_m & dy & 0 & 0 \\ d\theta & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

将其展开可得

$$(\cos 2\theta dy - \sin 2\theta dx) d\sigma_m + 2k dy d\theta = 0 \quad (18.19)$$

以 α 滑移线、 β 滑移线的方程分别代入上式得

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m - 2k d\theta &= d(\sigma_m - 2k\theta) = 0 \\ d\sigma_m + 2k d\theta &= d(\sigma_m + 2k\theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

可见,沿滑移线 α, β 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m - 2k\theta &= \xi && \text{沿 } \alpha \text{ 线} \\ \sigma_m + 2k\theta &= \eta && \text{沿 } \beta \text{ 线} \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

此即 Hencky 方程。其中 ξ, η 均为常数。对于同一条 α 线上的不同点来说, ξ 保持不变(β 线也同此)。但是,对不同 α 线上的点, ξ 可以有不同的值(β 线也同此)。Hencky 方程是滑移线场问题求解的重要基础。

18.2.3 滑移线场的性质

(1) 沿线性质

沿同一条滑移线移动时, σ_m 和 θ 的变化成比例。这一性质很容易从式(18.21)中看出来,因为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_m &= 2k \Delta \theta && \text{沿 } \alpha \text{ 线} \\ \Delta \sigma_m &= -2k \Delta \theta && \text{沿 } \beta \text{ 线} \end{aligned} \right\} \quad (18.22)$$

如果滑移线为直线段,则其上的 $\Delta \theta = 0$,因而 $\Delta \sigma_m = 0$,即直线滑移线上的平均应力为常数。根据式(18.13),直线滑移线上的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 也为常数。进而可知,如

果某区域内两族滑移线都是直线,则该区域内的应力为均匀分布。

如果已知滑移线网(即已知滑移线网各节点的位置和角度 θ)及任一点处的 σ_m ,则可以求得全场各处的 σ_m (图 18.4)。设 a 点的 σ_{ma} 已知,则由它和 θ_a 可算出过 a 点的滑移线 β_1 的参数 η_1 ,然后求出

$$\sigma_{mb} = \eta_1 - 2k\theta_b, \quad \xi_1 = \sigma_{mb} - 2k\theta_b$$

从而可得

$$\sigma_{mc} = \xi_1 + 2k\theta_c$$

如此等等。

(2)跨线性质

如果沿 α 族滑移线中的任一条移动,从滑移线 β_1 转到 β_2 ,则所转过的角度和压力 σ_m 的变化保持常数(图 18.5)。显然,若 α_1 线沿任意 β 线转到 α_2 线,则将得出同样的结果。于是,有 Hencky 第一定理,在任何两根同族滑移线间, θ 和 σ_m 沿另一族滑移线的变化都是常数。现证明如下。

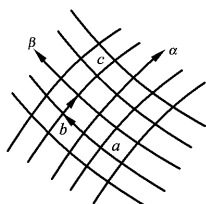


图 18.4 沿线性质

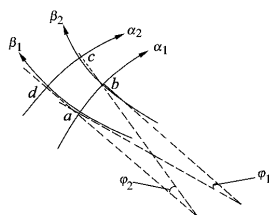


图 18.5 跨线性质

由式(18.21)可得

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \theta = \frac{1}{2k}(\eta - \xi)$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 代入上式,不难求得

$$\varphi_1 = \theta_b - \theta_a = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \xi_1) - \frac{1}{2k}(\eta_1 - \xi_1) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \eta_1)$$

$$\varphi_2 = \theta_c - \theta_d = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \xi_2) - \frac{1}{2k}(\eta_1 - \xi_2) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \eta_1)$$

即

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

(18.23)

类似地可得

$$\sigma_{mb} - \sigma_{ma} = \sigma_{mc} - \sigma_{md} \quad (18.24)$$

根据 Hencky 第一定理不难做出如下推论:如果一族滑移线中有一根是直线,则同族的其他滑移线均为直线。

(3) 纯几何性质

α 线和 β 线的曲率半径 R_α 和 R_β 可由下式确定

(图 18.6)

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta}$$

如果曲率中心处于 s_β (或 s_α) 增加的方向,则曲率半径 R_α (或 R_β) 为正。考察由无限接近的 α, β 族线所围成的滑移线线素 Δs_α 和 Δs_β , 可知

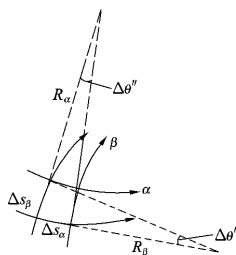


图 18.6 几何性质

$$R_\alpha \Delta \theta'' = \Delta s_\alpha, \quad -R_\beta \Delta \theta' = \Delta s_\beta$$

沿 β 线计算 Δs_α 的导数,有

$$\frac{\partial(\Delta s_\alpha)}{\partial s_\beta} = \frac{\partial(R_\alpha \Delta \theta'')}{\partial s_\beta} \approx \frac{(R_\alpha - \Delta s_\beta) \Delta \theta'' - R_\alpha \Delta \theta''}{\Delta s_\beta} = -\Delta \theta''$$

根据跨线性质,任意两根相邻 β 线之间的角 $\Delta \theta''$ 为常数,也即 $\Delta \theta''$ 沿 β 线不变。从而

$$\frac{\partial(R_\alpha \Delta \theta'')}{\partial s_\beta} = \frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} \Delta \theta'' = -\Delta \theta''$$

即

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = -1 \quad (18.25a)$$

同理

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = -1 \quad (18.25b)$$

上式表明:当沿某滑移线移动时,动点处另一族滑移线曲率半径的变化,在数值上等于沿滑移线所移动的距离,而且其数值是沿曲率中心方向递减。这就是 Hencky 第二定理。

18.3 边界条件和简单滑移线场

18.3.1 边界条件

在滑移线场理论中,基本方程以 σ_m, θ 为未知量,故应力边界条件也应以 σ_m, θ 表示。在 Γ_σ 上 P 点处取微元体,其外法线方向 n 与 x 轴成 ψ 角(图 18.7)。如果已知 P 处的正应力 σ_n 、剪应力 τ_n ,则边界条件为

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + \tau_{xy} \sin 2\psi \quad (a)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi \quad (b)$$

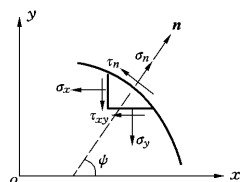


图 18.7 面力边界

考虑到介质处于塑性状态,将式(18.13)代入上式得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_m - k \sin 2(\theta - \psi) \\ \tau_n &= k \cos 2(\theta - \psi) \end{aligned} \right\} \quad (18.26)$$

此即塑性区的边界条件。给定边界后, ψ 便确定了。如果已知 σ_n, τ_n , 则可求得

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \psi \pm \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\tau_n}{k} + m\pi \\ \sigma_m &= \sigma_n + k \sin 2(\theta - \psi) \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

其中 $\cos^{-1}(\tau_n/k)$ 取主值; m 取 1 或 0。不难发现, m 的取值并不影响滑移线场网络的确定性, 只是改变 α 线和 β 线的方向, 而这种方向的改变不会影响结果。

式(18.27)说明, 对应于给定的 σ_n, τ_n , 可有两对 σ_m, θ 存在, 它们都满足屈服条件和边界条件。这种情况是因屈服条件为二次方程所致。根据具体问题的特定边界条件, 可以选取正确的值。当边界上没有剪应力即 $\tau_n = 0$ 时, 式(18.27)变成

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \psi \pm \pi/4 \\ \sigma_m &= \sigma_n \pm k \end{aligned} \right\} \quad (18.28)$$

上式表明, 滑移线与边界线成 45° 角, 而且当 σ_n 为大主应力即 $\sigma_n > \sigma_t$ (边界方向的正应力)时, 上式中必取负号, 即 $\sigma_m = \sigma_n - k$ 及 $\theta - \psi = -45^\circ$ 。由于

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t)$$

再考虑到式(18.28),可得到 σ_t 的计算式

$$\sigma_t = \sigma_n \pm 2k \quad (18.29)$$

事实上,通常可根据 σ_t 的正负号来确定上述各式中的符号,而 σ_t 的正负号则不难由受力情况加以判断。

18.3.2 直线滑移线场

如果在直线边界段(例如图 18.8 中的 OA 和 AD)上 $\sigma_n = \text{常数}$, $\tau_n = 0$,则由该边界出发的滑移线场是两族与边界成 45° 角的直滑移线,滑移线区域(称为影响区)是一等边三角形。

现以 OA 边为例加以说明。由式(18.28)和 $\sigma_n = \text{常数}$ 、 $\tau_n = 0$ 可知,边界上的 σ_m 和 θ 为常数。根据 Hencky 方程(18.21),边界上的 ξ 和 η 也为常数,即 $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ 。对于区域 AOB 中的任一点 P ,有一条 α 线和一条 β 线分别与 OA 边相交于 E 点和 F 点。对于 E, F 两点,显然有

$$\sigma_{mE} = \sigma_{mF} = \sigma_0, \quad \theta_E = \theta_F = \theta_0, \quad \xi_E = \xi_F = \xi_0, \quad \eta_E = \eta_F = \eta_0$$

根据 Hencky 方程,对于任意点 P 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{mP} - 2k\theta_P &= \sigma_0 - 2k\theta_0 && \text{沿 } \alpha \text{ 线} \\ \sigma_{mP} + 2k\theta_P &= \sigma_0 + 2k\theta_0 && \text{沿 } \beta \text{ 线} \end{aligned} \right\}$$

由此不难得到 $\sigma_{mP} = \sigma_0$, $\theta_P = \theta_0$,从而可知滑移线场是两族与边界成 45° 角的直滑移线,且区域 AOB 内的应力为均匀分布。同理,区域 ACD 也为均匀应力区。

18.3.3 扇形滑移线场

在与均匀应力区相邻的塑性区中,必有一族滑移线为直线。根据 Hencky 第一定理的推论,同族的其他滑移线也都是直线。可见,在区域 ABC (图 18.8)中,一族滑移线为径向线,另一族滑移线为同心圆弧,这种滑移线场称为中心扇形滑移线场。

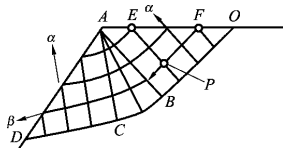


图 18.8 简单滑移线场

18.4 简单问题例解

18.4.1 平顶楔体

图 18.9 所示为一顶部被削平的对称楔体,承受均布压力 q ,楔顶角为 2δ 。现在来求极限荷载。考虑到问题的对称性,只研究楔体的一半即可。

(1)OA 边界

在 OA 边界上, $\sigma_n = -q$, $\tau_n = 0$, 边界法线与 x 轴夹角 $\psi = \pi/2$ 。由式 (18.28) 和 (18.29) 可得

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_m = -q \pm k, \quad \sigma_t = -q \pm 2k$$

显然,在本例中 OA 边界上的 σ_t 为拉应力,故以上公式中均取正号。于是

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_m = -q + k, \quad \sigma_t = -q + 2k \quad (a)$$

由于 $\sigma_n = \text{常数}$, $\tau_n = 0$, 故区域 OAB 为均匀应力区。 α 和 β 的指向如图 18.9 所示。

(2)AD 边界

AD 为自由边界, $\sigma_n = 0$, $\tau_n = 0$, $\psi = \pi - \delta$ 。由式 (18.28) 和 (18.29) 可求得

$$\theta = \pi - \delta \pm \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_m = \pm k, \quad \sigma_t = \pm 2k$$

AD 边界上的 σ_t 为压应力,故以上公式中均取负号,于是

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \delta, \quad \sigma_m = -k, \quad \sigma_t = -2k \quad (b)$$

显然,区域 ACD 也是均匀应力区。

(3)极限荷载

区域 ABC 为中心扇形区, α 线为向 A 点的径向线, β 线为圆弧。由于 OBCD 为同一根 β 线,故根据 β 线方程 (18.21), 在 D 点和 O 点有

$$\sigma_{mD} + 2k\theta_D = \sigma_{mO} + 2k\theta_O$$

将式 (a)、(b) 代入上式得

$$-k + 2k\left(\frac{3\pi}{4} - \delta\right) = -q + k + 2k\frac{3\pi}{4}$$

其中的 q 必为极限荷载, 从而

$$q_s = 2k(1 + \delta) \quad (18.30)$$

当 $\delta = \pi/2$ 时, 可视为均布荷载作用下的条形地基(图 18.10)。根据上式, 此时的极限荷载为

$$q_s = k(2 + \pi) \quad (18.31)$$

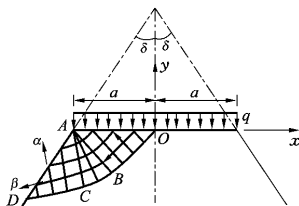


图 18.9 平顶楔体

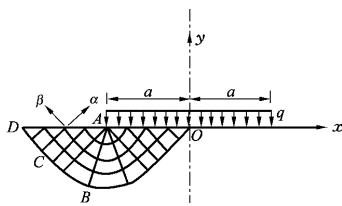


图 18.10 条形地基

18.4.2 圆孔应力集中

(1) 滑移线场

设有厚壁圆筒, 内壁受均匀压力 p , 外壁不受荷载作用。由于轴对称, 环向剪应力等于零, 孔边附近的微元主应力方向分别为过该点的径向和同心圆方向。根据前一章的分析, 当 p 达到一定值时, 内壁首先出现塑性变形。滑移线场为与径向相交成 $\pm 45^\circ$ 角的两族曲线。用极坐标 r 和 φ 作为滑移线坐标(图 18.11), 则

$$\frac{dr}{r d\varphi} = \pm 45^\circ = \pm 1$$

即

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{r}$$

积分得

$$\varphi = \pm \ln \frac{r}{c} \quad \text{或} \quad r = ce^{\pm \varphi} \quad (a)$$

上式表示两族正交曲线, 为对数螺线方程。

当 $r = a$ 时, $\varphi = 0$, 故 $c = a$ 。从图 18.11 中可知

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4} \quad (\text{b})$$

于是, 式(a)成为

$$r = a e^{\pm(\theta - \pi/4)} \quad (18.32)$$

或

$$\theta - \ln \frac{r}{a} = \xi, \quad \theta + \ln \frac{r}{a} = \eta \quad (18.33)$$

其中 a 为内孔半径; ξ, η 表示两族螺线参数。

(2) 塑性应力

沿 α 线有

$$\sigma_m - 2k\theta = \xi, \quad \theta = \ln \frac{r}{a} + \frac{\pi}{4}$$

其中 $\sigma_m = (\sigma_\theta + \sigma_r)/2$ 。屈服条件为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k = \sigma_s \quad (18.34)$$

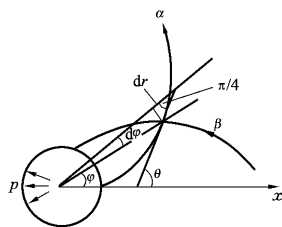


图 18.11 厚壁圆筒

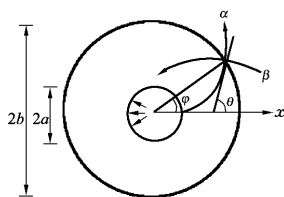


图 18.12 圆筒全塑性

当圆筒达到全塑性状态(图 18.12)时, 则在外壁 $r = b$ 处, 有

$$\theta = \ln \frac{b}{a} + \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 2k$$

沿 α 线

$$\xi_r = \left[\frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) - 2k\theta \right] \Big|_{r=r} = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) - 2k \left(\ln \frac{r}{a} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\xi_b = \left[\frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) - 2k\theta \right] \Big|_{r=b} = k - 2k \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{\pi}{4} \right)$$

显然, $\xi_r = \xi_b$, 从而有

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 2k + 4k \ln \frac{r}{b} \quad (18.35)$$

式(18.34) 及(18.35)联立, 可得圆筒的塑性应力分布

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{b}{r}, \quad \sigma_\theta = 2k \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right) \quad (18.36)$$

极限压力为

$$p_s = -\sigma_r|_{r=a} = 2k \ln \frac{b}{a} \quad (18.37)$$

可见 极限分析结果与厚壁圆筒弹塑性分析结果相同。

18.4.3 数值解答

滑移线场理论也可用于数值求解, 这里仅以第一类边值问题为例加以说明。第一类边值问题也称为初值问题或 Cauchy 问题, 其特点是在 xy 平面内的一条光滑线段 AB 上给定 σ_m, θ , 该线段处处不与滑移线相切, 且与每条滑移线只一次相交(图 18.13)。对于这种问题, 在线段 AB 的一侧可建立曲线三角形 ABC 范围内的惟一滑移线场。

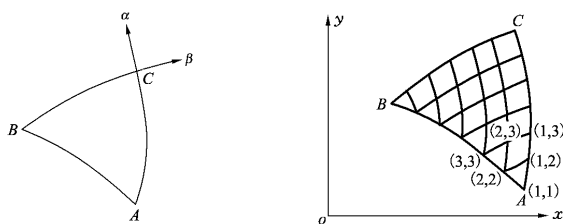


图 18.13 Cauchy 问题

将 AB 分成有限个微小线段, 并由各分点绘出两条特征线。于是, ABC 区被分成许多网格, 网格的交点分别记作 $(1, 1), (2, 2), \dots, (1, 2), (1, 3), \dots$ 。根据 Hencky 方程, 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m(1, 1) - 2k\theta(1, 1) &= \sigma_m(1, 2) - 2k\theta(1, 2) \\ \sigma_m(2, 2) + 2k\theta(2, 2) &= \sigma_m(1, 2) - 2k\theta(1, 2) \end{aligned} \right\}$$

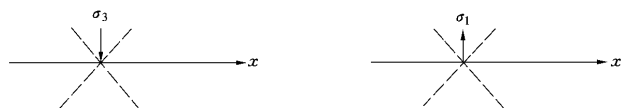
由此得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{m(1\ 2)} &= \frac{1}{2} [\sigma_{m(2\ 2)} + \sigma_{m(1\ 1)} + 2k(\theta_{(2\ 2)} - \theta_{(1\ 1)})] \\ \theta_{(1\ 2)} &= \frac{1}{2} [\sigma_{m(2\ 2)} - \sigma_{m(1\ 1)} + 2k(\theta_{(2\ 2)} + \theta_{(1\ 1)})] \end{aligned} \right\}$$

类此可求出 $\sigma_{m(2\ 3)}$, $\theta_{(2\ 3)}$ 等。

习 题

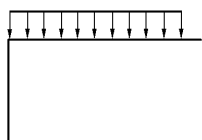
- 18.1 何谓滑移线？何谓特征线？滑移线场有哪些性质？试证明 Hencky 第一定理的推论：如果一族滑移线中有一根是直线，则同族的其他滑移线均为直线。
- 18.2 试确定光滑边界处滑移线 α , β 线的方向。



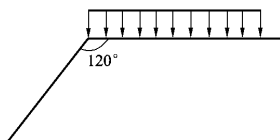
题 18.2 图

- 18.3 试求直角边坡的极限荷载。

答案： $q_s = 2k$ 。



题 18.3 图



题 18.4 图

- 18.4 试求斜坡的极限荷载。

答案： $q_s = \frac{k}{3}(6 + \pi)$ 。

第 19 章

塑性极限分析近似解法

通常情况下,像第 18 章那样精确求解塑性极限荷载是行不通的。为此,需要发展近似解法,Drucker 和 Prager 于 1952~1955 年间提出的极限分析就是这样一种求解方法。该法基于上、下限定理,采取放松极限荷载的某些约束条件,寻求极限荷载的上限值或下限值。这种方法的缺点是无法估计其解答与真实极限荷载的误差,也无法像严密分析法那样获得塑性区的应力分布和速度场。

本章内容包括:(1)静力许可应力场和运动许可速度场的基本概念;(2)虚功率原理;(3)极限分析定理;(4)近似解法及例解。

19.1 基本概念

19.1.1 静力许可应力场

在域 Ω 上设定一组应力场 σ_{ij}^* ,如果它

(1)满足平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j}^* + f_i = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (19.1)$$

(2)边界面力与其对应,即

$$p_i^* = n_j \sigma_{ij}^* \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (19.2)$$

且

$$p_i^* = \bar{p}_i \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (19.3)$$

(3)不违背屈服条件

$$f(\sigma_{ij}^*) \leq 0 \quad (19.4)$$

则 σ_{ij}^* 称为静力许可应力场。

显然,真实应力场必定是静力许可应力场。但由于上述条件没有对变形协调加以限制,因此静力许可应力场不一定是真实的应力场,由其按本构方程确定的应变率场不一定是协调的。

19.1.2 运动许可速度场

在域 Ω 上设定一组速度场 $v_i^* = \dot{u}_i^*$, 如果它满足

(1) 几何方程

$$\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (19.5)$$

即应变率场可由速度场导出。

(2) 速度边界条件

$$\dot{u}_i^* = \bar{\dot{u}}_i \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (19.6)$$

(3) 外力功率为正

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma > 0 \quad (19.7)$$

则 $v_i^* (\dot{u}_i^*)$ 称为运动许可速度场。

显然,真实速度场一定是运动许可速度场,而运动许可速度场不一定是真实的速度场,因为它仅从速度边界条件和几何方程考虑,没有对平衡条件加以限制。

19.2 虚功率原理

19.2.1 连续场的虚功率原理

与虚位移原理相似,可以写出虚功率原理:对于任一组静力许可应力场 σ_{ij}^* 和任一组运动许可速度场 $\dot{u}_i^*$, 外虚功率等于内虚功率,即

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (19.8)$$

证明如下:考虑到式(19.1),上式左边的第一项成为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{u}_{i,j}^* d\Omega = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_j d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{u}_{i,j}^* d\Omega \quad (a)$$

根据散度定理并注意到式(19.2),有

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} n_j \sigma_{ij}^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma \quad (b)$$

考虑到应力张量的对称性并注意到式(19.5),有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*_{,j} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*_{,j} + \sigma_{ji}^* \dot{u}_j^*_{,i}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \frac{1}{2} (\dot{u}_i^*_{,j} + \dot{u}_j^*_{,i}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \end{aligned} \quad (c)$$

将式(b) (c)代入式(a),再代入式(19.8)的左边,可证明式(19.8)成立。

在极限分析中,通常不计体力,故式(19.8)成为

$$\int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (19.9)$$

其中, $\Gamma = \Gamma_{\sigma} + \Gamma_u$ 。一般只考虑边界 Γ_u 上速度为零的情况,给定位移与时间无关时便属于此类问题。此外,在极限分析中, Γ_{σ} 上的荷载是待求的未知量。于是,式(19.9)可写成

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (19.10)$$

19.2.2 间断场的虚功率原理

在前面推导虚功率原理时,假定应力场和速度场都是连续的。但是,在极限分析中常会出现应力间断或速度间断的情况。例如,在梁的塑性铰处,截面上的正应力在中性轴处有间断;在柱体扭转问题中,截面屈服时剪应力有间断;地基或边坡达到塑性极限状态时,在土体中将出现速度间断面。

在连续介质中,间断面实际上是一个薄层区域,在此区域中物理变化过程(即物理量的变化)要比薄层之外的变化剧烈复杂得多。但鉴于该区域很窄,作宏观处理时不考虑薄层内部的情况,只考虑穿过薄层后物理量总的变化多少,而把这个薄层视为物理量发生间断的一个曲面。

在应力间断面的两侧总是作用大小相等、方向相反的力,而两侧的速度相等,故内功率总是相抵消。这表明应力间断对虚功率原理的基本等式没有影响。然而,速度间断时则沿间断面有附加的内功率,故须在虚功率方程的内功率一侧列入附加项,例如式(19.8)成为

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.11)$$

其中 Γ_D 为速度间断面 $[\dot{u}^*]$ 为速度在 Γ_D 上的切向间断值。若不计体力,且在边界 Γ_u 上速度为零,则上式成为

$$\int_{\Gamma_\sigma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.12)$$

在平面应变问题中,速度只能在 xy 坐标面内发生。此时,沿 z 方向取单位厚度来考虑,速度间断面便可看作间断线。此外,估算极限荷载的上限时,常用速度间断线将物体划分为若干个刚性块。此时,内功率便只有间断线的贡献,式(19.12)成为

$$\int_{\Gamma_\sigma} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma = \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.13)$$

现对虚功率方程(19.11)加以证明。速度间断面 Γ_D 的存在将域 Ω 分为 Ω_1 和 Ω_2 (图 19.1),从而

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ \Gamma' &= \Gamma + \Gamma_D^1 + \Gamma_D^2 \end{aligned}$$

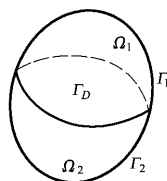


图 19.1 速度间断面

类似前面的推导,有

$$\int_{\Omega} f_i \dot{u}_i^* d\Omega = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{u}_{i,j}^* d\Omega \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} n_j \sigma_{ij}^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_D^1} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_D^2} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (b)$$

将间断面的力与速度向切向和法向投影,并注意到

$$p_i^{*2} = -p_i^{*1}, \quad \dot{u}_n^{*1} = \dot{u}_n^{*2}$$

式(b)成为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_D} p_t^{*1} (\dot{u}_t^{*1} - \dot{u}_t^{*2}) d\Gamma$$

考虑到间断面上的切向力 $|p_t^*| = \tau_s$,且其方向总是与速度间断值 $[\dot{u}^*] = |\dot{u}_t^{*1} - \dot{u}_t^{*2}|$ 的方向一致,故上式成为

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (c)$$

再注意到

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{u}_i^* \dot{u}_j^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (d)$$

将式(c)、(d)代入式(a),再代入式(19.11)的左边,可证明式(19.11)成立。

19.3 极限分析定理

19.3.1 基本等式

为了根据虚功率方程(19.12),即

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.14)$$

证明极限分析的上、下限定理,让我们考虑几个等式。由于真实应力场 σ_{ij} 必定是静力许可应力场,真实速度场 $\dot{u}_i$ 一定是运动许可速度场,故有

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.15)$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} p_i^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}] d\Gamma \quad (19.16)$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}_i \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}] d\Gamma \quad (19.17)$$

19.3.2 上限定理

上限定理可表述如下:运动许可速度场对应的荷载是极限荷载的上限 p_+ 。

证明:式(19.14)减去式(19.15)得

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} (p_i^* - \bar{p}_i) \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (a)$$

根据 Drucker 公设,有

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \geq 0$$

于是,式(a)成为

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} (p_i^* - \bar{p}_i) \dot{u}_i^* d\Gamma \geq 0 \quad (b)$$

根据式(19.7),有

$$p_+ = p_i^* \geq \bar{p}_i = p_s \quad (19.18)$$

其中 p_s 为真实极限荷载。

19.3.3 下限定理

下限定理可表述如下:静力许可应力场对应的荷载是极限荷载的下限 p_- 。

证明:式(19.17)减去式(19.16)得

$$\int_{\Gamma_\sigma} (\bar{p}_i - p_i^*) \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (a)$$

根据 Drucker 公设,有

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \geq 0$$

于是,式(a)成为

$$\int_{\Gamma_\sigma} (\bar{p}_i - p_i^*) \dot{u}_i d\Gamma \geq 0 \quad (b)$$

由于真实速度场 $\dot{u}_i$ 必定是运动许可的,故根据式(19.7)有

$$p_s = \bar{p}_i \geq p_i^* = p_- \quad (19.19)$$

19.4 近似解法及例解

19.4.1 静力法和机动法

利用下限定理计算极限荷载(下限) p_- 的方法称为静力法。此时需设定一个静力许可应力场,确定其对应的应力边界值,此即极限荷载的近似值。根据下限定理,真实极限荷载不小于该近似值。

利用上限定理计算极限荷载(上限) p_+ 的方法称为机动法。此时需设定一个运动许可速度场,与其对应的极限荷载近似值满足虚功率方程(19.14),即

$$\int_{\Gamma_\sigma} p_i^* \dot{u}_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega + \sum \int_{\Gamma_D} \tau_s [\dot{u}^*] d\Gamma \quad (19.20)$$

由此可计算极限荷载的上限 $p_+ = p^*$ 。

采用静力法时,由于事先不知道真实的内力场,故需选取一系列可能的内力

场进行计算,以最大荷载为近似解。同样地,采用机动法时,由于事先不知道真实的速度场或塑性机构,因而需选取一系列可能的速度场进行计算,以最小荷载为近似解。如果下限解等于上限解 $p_- = p_+$, 则所得近似解称为完全解。

19.4.2 冲模极限分析

在刚性平底冲模或条形地基问题中,作用有均布条形荷载 p (图 19.2)。现用上下限定理求极限荷载。

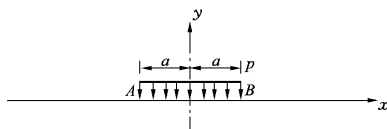


图 19.2 均布条形荷载

下限解 根据滑移线场理论,静力可能应力场在 AB 边界上为

$$\sigma_3 = -\tau_s(2 + \pi), \quad \tau = 0$$

根据下限定理,静力可能应力场对应的边界面力是 p_- 。于是,真实的极限荷载 p_s 满足

$$p_s \geq p_- = -\sigma_3 = \tau_s(\pi + 2)$$

上限解 选取机动场如图 19.3 所示,滑动面为 $ACED$ 或 $BCFG$, 其上的切向应力为 τ_s 。图中的虚线 BC 和 BE 为应力间断线。设 AB 边界以匀速 v 垂直向下运动,则滑动边界上的切向速度间断值为 $\sqrt{2}v$ 。于是,外功率为 $2ap_+v$, 滑动面 $ACED$ 上的内功率为

$$\left(\tau_s \sqrt{2}a \cdot \frac{\pi}{2} + 2\tau_s \sqrt{2}a \right) \sqrt{2}v = \tau_s va(\pi + 4)$$

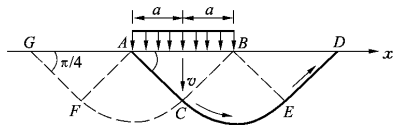


图 19.3 机动场

现在来求滑动区内部的内功率。由于 ABC 区和 BED 区匀速平动,故 $\dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$, 从而内功率也为零。扇形区 BCE 匀速转动,极坐标系下的速度为

$$\dot{u}_r^* = 0, \quad \dot{u}_\theta^* = \sqrt{2}v$$

根据几何方程(8.3),可求得应变率如下

$$\dot{\epsilon}_r^* = \frac{\partial \dot{u}_r^*}{\partial r} = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r^*}{r} = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\theta}^* = \frac{\partial \dot{u}_\theta^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_r^*}{\partial \theta} - \frac{\dot{u}_\theta^*}{r} = -\frac{\sqrt{2}v}{r}$$

于是,扇形区的内功率为

$$\int_{BCE} \tau_s |\dot{\gamma}_{r\theta}^*| dS = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} \tau_s |\dot{\gamma}_{r\theta}^*| r dr = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{2}a} \tau_s \sqrt{2}v dr = \tau_s v a \pi$$

根据外功率等于内功率的原理,有

$$2ap_+ v = \tau_s v a (\pi + 4) + \tau_s v a \pi$$

从而

$$p_s \leq p_+ = \tau_s (\pi + 2)$$

可见,上限解等于下限解,故所得结果为完全解。

19.4.3 边坡极限分析

利用上下限方法估计图 19.4 所示边坡的极限荷载。

(1) 下限解

将边坡分成两个区域,中间由一应力间断线 AC 隔开。区域 I 受压,一个主应

力为零 $\sigma'_1 = 0$ 。根据屈服条件,另一个主应力为 $\sigma'_3 = -\sigma_s$ 。根据斜截面应力计算公式,AC 面上的应力为

$$\sigma_n = -\frac{\sigma_s}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \tau_{nt} = -\frac{\sigma_s}{2} \sin 2\alpha$$

跨过 AC 时,要求 σ_n, τ_{nt} 连续(允许 σ_t 间断)。在区域 II 中, p 是小主应力。设区域 II 中的大主应力为 σ''_1 , 则 AC 上的应力和 p 应满足

$$\sigma_n = -\frac{\sigma_s}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{\sigma''_1 - p_-}{2} - \frac{\sigma''_1 + p_-}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_s}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sigma''_1 + p_-}{2} \sin 2\alpha$$

由此两式解得

$$p_- = \sigma_s(1 - \cos 2\alpha)$$

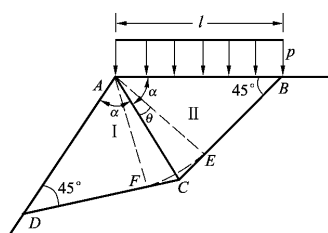


图 19.4 边坡机动场

设 $\alpha = 45^\circ + \theta$,则上式成为

$$p_- = \sigma_s(1 + \sin 2\theta)$$

(2) 上限解

设 AB 边以匀速 v 垂直向下运动,滑动区分为两个匀速平动区 ABE 、 ADF 和一个扇形区 AEF 。显然,外功率为 p_+lv 。滑动面 $BEFD$ 上的切向速度间断值为 $\sqrt{2}v$,间断线长度为 $\sqrt{2}l(1+\theta)$ 。于是,滑动面 $BEFD$ 上的内功率为

$$\tau_s \sqrt{2}l(1+\theta)\sqrt{2}v = 2\tau_sl(1+\theta)v$$

类似前面的分析,滑动区内部的内功率即扇形区 AEF 的内功率,其值为 $2\tau_sl\theta v$ 。于是有

$$p_+lv = 2\tau_sl(1+\theta)v + 2\tau_sl\theta v$$

根据 Tresca 屈服条件 $\sigma_s = 2\tau_s$ 。于是,上式成为

$$p_+ = \sigma_s(1+2\theta)$$

19.4.4 梁的极限分析

我们知道,虚功率原理所表达的是外功率等于内功率。在梁板极限分析中,外功率和内功率按共轭的广义力和广义速度计算更为方便。所谓共轭即指广义力与广义速度之积为功率。

这里仅以一次超静定梁(图 19.5a)为例,说明极限分析方法,其基本思想适用于更复杂的连续梁、刚架和板。

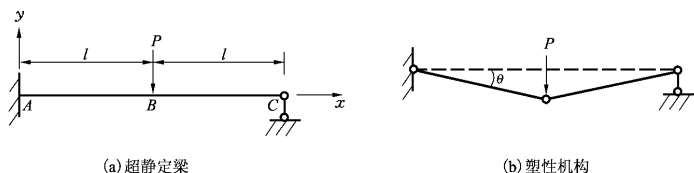


图 19.5 超静定梁

(1) 上限解

图 19.5b 所示为梁的机构, A 点和 B 点出现塑性铰,其弯矩为梁截面的塑性极限弯矩 M_s 。令跨中 B 点向下移动 δ ,则 A 点相应地转动 $\theta = \delta/l$, B 点转动 $2\theta = 2\delta/l$ 。显然,集中力 P 做的外功为 $P\delta$,塑性铰处内力 M_s 做的内功为 $3M_s\theta = 3M_s\delta/l$ 。根据外功与内功相等,有

$$P_+ \delta = 3M_s \delta / l$$

即

$$P_+ = 3M_s / l$$

(2) 下限解

首先在可能出现最大弯矩的截面处,令弯矩满足屈服条件 $|M| = M_s$,从而使结构成为机构,然后利用平衡方程求得整个结构的弯矩分布。如果各截面弯矩均不违背屈服条件,则所设定的内力分布是静力许可的,其对应的荷载就是极限荷载的下限。在本例题中,设 $M_A = -M_s$, $M_B = M_s$ 。由于弯矩在 AB , BC 之间线性变化,故梁内弯矩不可能违背屈服条件。设 C 点反力为 R_C ,则对 A 点的力矩平衡条件为

$$-M_s + P \cdot l - 2lR_C = 0 \quad (a)$$

考虑 BC 段对 B 点的力矩平衡,有

$$M_s - lR_C = 0 \quad (b)$$

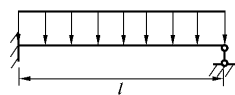
联立式(a), (b), 解得

$$P_- = 3M_s / l$$

可见,梁的极限荷载为 $P_s = P_+ = P_- = 3M_s / l$ 。

习 题

- 19.1 试证明虚功率原理。
- 19.2 试利用上、下限定理求解超静定梁在均布荷载作用下的极限荷载 q_s 。
- 19.3 对于 n 次超静定梁,梁内出现多少个塑性铰时,将成为机构而达到极限状态?



题 19.2 图

塑性本构理论进阶*

经典塑性理论主要是针对金属材料建立起来的,其基本假设与岩土类材料(包括混凝土、岩石、土等)的特性出入较大,因此通常不适用于这类材料。

本章首先介绍岩土类材料的变形特性,然后阐述几种能够反映其主要特点的塑性本构理论。鉴于这些理论也适用于金属材料,故称为广义塑性理论。

20.1 岩土类材料的变形特性

20.1.1 基本试验资料

(1)单轴压缩试验

对于岩石或混凝土试块,单轴压缩试验的典型全应力-应变曲线如图 20.1 所示。其中 OA 段为曲线,反映试件内裂缝逐渐被压密,体积缩小; AB 段接近直线,可视为弹性阶段。 B 点的应力称为屈服应力,进入 BC 段开始产生塑性变形,呈非线性关系,伴随试件内微裂隙的发生与发展、颗粒界面的滑移。 CD 段曲线下降,体积应变不断增加。进入塑性变形阶段后,卸载弹性模量不等于初始弹性模量,这就是弹塑性耦合现象。

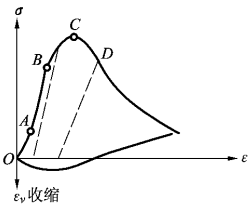


图 20.1 岩石单轴压缩试验

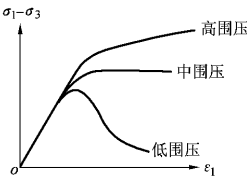


图 20.2 岩石常规三轴试验

(2)常规三轴试验

围压对应力应变曲线有明显影响。图 20.2 所示为岩石常规三轴试验曲线。

可见,随着围压的增大,屈服应力和峰值强度都增高,塑性性质明显增加。

正常固结黏土、松砂及中密砂具有应变硬化特性,加载条件下的应力-应变曲线为双曲线(图 20.3),可表示为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (20.1)$$

其中 a, b 为试验常数。试验表明,应变从开始起即可分为弹性和塑性两部分;加载时体积发生收缩。

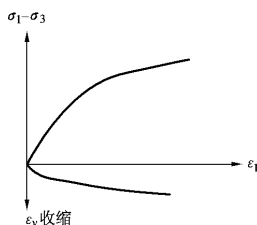


图 20.3 正常固结黏土或松砂

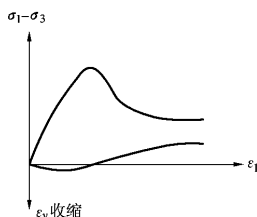


图 20.4 超固结黏土或密砂

超固结黏土或密砂的常规三轴试验曲线为驼峰形,即存在软化现象(图 20.4),可用下式表示

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1(a + c\varepsilon_1)}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (20.2)$$

其中 a, b, c 为试验常数。加载时体积稍有收缩以后便膨胀;应力差超过峰值后急剧下降,直至一极限值,即土的残余强度。

(3) 土样固结试验

各向等压固结试验即 $p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 的排水压缩试验,通过这种试验可得到体积应变 ε_v 与静水压力 p 之间的关系。单向固结试验是土样在完全侧限条件下的单向压缩试验,试验求得的应力-应变曲线为孔隙比 e 与竖向压力 p 之间的关系曲线(图 20.5)。

$$e = e_0 - \lambda \ln p \quad (20.3)$$

卸载再加载曲线为

$$e = e_k - k \ln p \quad (20.4)$$

其中 λ 为加载曲线(半对数)的斜率, k 为卸载再加载曲线(半对数)的斜率。两者的差别反映出塑性体积变形。

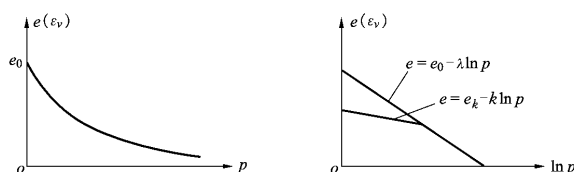


图 20.5 固结试验

(4)真三轴试验

常规三轴试验并不能充分反映土的应力应变特性,因为这种试验没有考虑中间主应力对本构关系的影响。为此, A.W. Bishop (1966) 采用 b 值来反映中间主应力的影响,其定义为

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (20.5)$$

真三轴试验表明,随着 b 的增大,应力-应变曲线变陡, $\sigma_1 - \sigma_3$ 的峰值点提前,材料的破坏更接近于脆性破坏(图 20.6)。

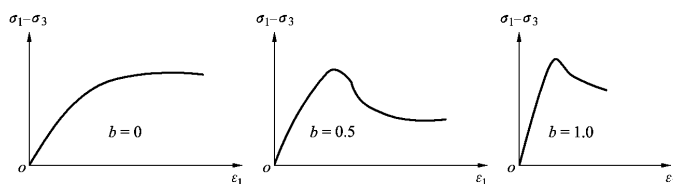


图 20.6 真三轴试验

20.1.2 主要变形特征

(1)变形机理

岩土材料是多相介质,孔隙压力对其力学特性有显著的影响,而金属材料则属于单相介质,岩土材料属于摩擦材料,而金属材料只有剪切强度,内摩擦角可视为零。岩土材料与金属材料的变形机制也不相同,要比金属材料复杂得多。例如,荷载作用下,土颗粒可以滑动、转动、滚动、挠曲、压碎等。岩石通常是晶体集合体,晶体间往往存在微裂纹。原有裂纹的扩展、新裂纹的产生导致了岩石累积性变形和破坏的观点,这已为采用电子显微镜对岩石变形过程的扫描所证实。在静水压力作用下,岩土类材料往往产生不可忽略的塑性体积变形。

(2)静压屈服

金属材料的体积变形是弹性的,而岩土类材料常包括塑性体积变形。也就

是说,静水压力不仅产生弹性体积变形,而且还可以引起塑性体积变形。材料在静水压力作用下屈服时,该屈服面一定与空间对角线相交,这就导致了帽子屈服准则的出现。

(3)非正交性

金属材料塑性应变增量方向总是垂直于屈服面,即服从相关联的流动法则;而岩土类材料的塑性应变增量方向通常与屈服面并不正交,因此在建立本构方程时宜采用非关联的流动法则。

(4)压硬和剪胀

压硬性即屈服极限随压力的增大而增大的性质,剪胀性是指材料在剪切时产生体积膨胀或收缩的特性。一般认为,体积变形系平均应力或静水压力作用的结果,形状变形则是由偏应力引起的。这种断言对金属材料是适当的,而对岩土类材料来说,静水压力与剪切性能之间、剪应力与体积应变之间存在着耦合现象。

(5)硬化和软化

岩土类材料的非线性一般非常明显,几乎从加载开始就表现为非线性,且无明显的初始屈服点。材料不仅可表现出硬化特征(松砂、正常固结黏土及高围压下的岩石),而且也可具有软化特征(密砂、超固结黏土及低围压下的岩石)。

(6)弹塑性耦合

岩土类材料具有弹塑性耦合特性,即如果对材料进行周期性的荷载试验,可发现当进入塑性阶段后,塑性变形的增加引起弹性质质的变化(即弹性模量下降),这种变化在变形的非稳定阶段更为明显。

(7)SD 效应

岩土类材料的拉伸屈服极限明显小于压缩屈服极限,此即 SD 效应(strength different effect)。

要想在一种本构理论中如实地反映上述全部特征,那将是非常困难的,也许是不可能的。目前已发展了很多种本构理论,大多针对其中的一两种特性。以下各节简要介绍几种典型的本构理论。

20.2 应力空间中的塑性理论

20.2.1 Mohr-Coulomb 准则

(1)屈服条件

Mohr-Coulomb 准则比较适用于岩土类材料,因而在岩土力学中得到广泛应用。Mohr(1900)认为:“到极限状态时,滑动平面上的剪应力达到一个取决于正应力与材料性质的最大值”,即

$$\tau = f(\sigma) \quad (20.6)$$

Mohr 强度包线通常是一条曲线,可用三轴试验的方法求得。如果 Mohr 包线是直线,则 Mohr 准则便与 Coulomb 准则等价,尽管提出这两个准则的物理背景不同,此时称为 Mohr-Coulomb 准则。该准则实质上是剪切屈服理论,即只要过一点的某个面上的剪应力 τ 达到该面(其法向应力为 σ)的抗剪强度,该点就屈服,即

$$\tau = c - \sigma \tan \varphi \quad (20.7)$$

其中 c 为黏聚力; φ 为内摩擦角。剪破面与 σ_1 作用面成 $45^\circ + \varphi/2$,该面上的应力为

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \varphi$$

代入式(20.7)得

$$f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (20.8)$$

上式也可写成

$$f = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi - \left(\cos \theta_\sigma + \frac{\sin \theta_\sigma \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{J_2} + c \cos \varphi = 0 \quad (20.9)$$

其中

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right] \quad (20.10)$$

(2)屈服曲线

为研究 Mohr-Coulomb 屈服曲线的形状,在 π 平面上取坐标系 oxy ,其 y 轴与 σ'_2 轴重合(图 20.7)。点 $(\sigma_1, 0, 0)$ 向 π 平面上投影落在 σ'_1 轴上,其长度为 $\sigma_1 \sqrt{2/3}$,投影点的 x, y 坐标为 $(\sigma_1 \sqrt{2/2}, -\sigma_1 \sqrt{6})$ 。同理,点 $(0, \sigma_2, 0)$ 和 $(0, 0, \sigma_3)$ 对应的坐标分别为 $(0, \sigma_2 \sqrt{2/2})$ 和 $(-\sigma_3 \sqrt{2/2}, -\sigma_3 \sqrt{6})$ 。于是, $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 点在 π 平面上的投影点坐标为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad y = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}} \quad (20.11)$$

注意到 $\sigma_i = s_i + \sigma_m$, $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, 上式成为

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(s_1 - s_3), \quad y = \frac{2s_2 - s_1 - s_3}{\sqrt{6}} = \frac{-3(s_1 + s_3)}{\sqrt{6}} \quad (20.12)$$

上式是普遍的,对于 $\sigma_m = 0$ 的应力点(即 π 平面上的点)当然仍成立。

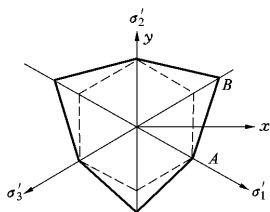


图 20.7 屈服曲线

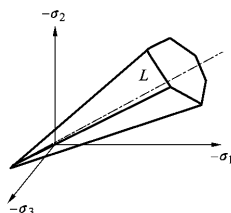


图 20.8 屈服面

在 π 平面上, $\sigma_m = 0$, 屈服条件(20.8)表示屈服曲线, 且成为

$$\frac{s_1 - s_3}{2} + \frac{s_1 + s_3}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi = 0 \quad (20.13)$$

如果点 (x, y) 在屈服曲线上, 则必满足式(20.13)。将式(20.12)代入上式得

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = c \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{6}} y \quad (20.14)$$

若 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则上述方程表示图 20.7 中的线段 AB。其他情况下可得该图中的其他线段。可见, Mohr-Coulomb 准则的屈服曲线为不等角六边形。由于屈服极限随静水应力(压力)的增大而提高, 故 Mohr-Coulomb 准则的屈服面为一不等角的六棱锥面, 其中心线与等倾线 L 重合(图 20.8)。

Mohr-Coulomb 准则的最大缺陷是没有考虑中间主应力的影响。很多研究表明, 对岩土材料屈服起主要作用的是大主应力和小主应力; 中间主应力起次要作用, 但有些情况下是不可忽略的因素。此外, 屈服函数的导数在锥顶和棱线上具有奇异性, 因此式(20.9)不便使用。

20.2.2 Drucker-Prager 准则

为了克服 Mohr-Coulomb 准则应用方面的不便, D.C. Drucker 和 W. Prager (1952) 建议采用 Mohr-Coulomb 六边形锥体的内切圆锥, 显然它是 Mohr-Coulomb 屈服条件的下限。将式(20.9)对 θ_σ 求导并使之等于零, 得到 θ_σ 后再代入式(20.9), 可得运用较为方便的公式

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (20.15)$$

其中

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\sin\varphi}{3\sqrt{3+\sin^2\varphi}}, \quad k = \frac{\sqrt{3}c\cos\varphi}{3\sqrt{3+\sin^2\varphi}} \quad (20.16)$$

如果用外切于 Mohr-Coulomb 六边形锥体的圆锥表面作为屈服面,则上述参数为

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin^2\varphi)}, \quad k = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin^2\varphi)} \quad (20.17)$$

20.2.3 统一屈服理论

经过 30 多年的理论研究,俞茂宏于 1991 年提出了能够十分灵活地适用于各种材料的统一屈服理论,而现有的其他各种屈服理论均为该理论的特例(文献 48)。统一屈服理论的核心是双剪概念和模型。该理论认为,当两个较大的主剪应力及其面上的正应力影响函数达到一定值时,材料开始屈服。统一屈服理论可考虑中间主应力和静水应力的影响,适用于拉压性能不同的材料,并考虑材料单元上所有应力分量对材料屈服的影响,其一般形式为

$$F = \tau_{13} + b\tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{12}) = C \quad \text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23} \quad (20.18a)$$

$$F' = \tau_{13} + b\tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{23}) = C \quad \text{当 } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \leq \tau_{23} + \beta\sigma_{23} \quad (20.18b)$$

其主应力表达式为

$$F = \sigma_1 - \frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t, \quad \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (20.19a)$$

$$F' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t \quad \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (20.19b)$$

其中, $\alpha = \sigma_t / \sigma_c$ 为材料的拉压强度比; b 为反映中间主应力以及相应面上的正应力对材料破坏影响的系数。

在岩土力学中,一般采用抗压强度参数。因此,上式可写成

$$F = \frac{1}{\alpha}\sigma_1 - \frac{1}{1+b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \quad \text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (20.20a)$$

$$F' = \frac{1}{\alpha(1+b)}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_c \quad \text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \quad (20.20b)$$

若采用抗剪强度参数 c 和 φ ,则有

$$\alpha = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}, \quad \sigma_t = \frac{2c \cos\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (20.21)$$

对于拉压强度相同的材料($\sigma_t = \sigma_c$),只需用一个强度参数就可以进行复杂应力状态下的强度计算。统一理论以 b 为参数,取不同的值得到不同的理论。例如,当 $b=0$ 时,退化成 Mohr-Coulomb 理论。

20.2.4 Drucker-Prager 模型

选定屈服条件后,容易根据增量理论的一般形式(16.43)推导出弹塑性矩阵。这里仅简单介绍与 Drucker-Prager 屈服条件相应的本构模型,并采用相关的流动法则。这种模型考虑了静水应力对屈服极限的影响。

根据 Drucker-Prager 屈服条件(20.15),不难求得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \alpha \boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \alpha \boldsymbol{\delta} - \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [s_x \quad s_y \quad s_z \quad 2s_{xy} \quad 2s_{yz} \quad 2s_{zx}]^T \quad (a)$$

其中

$$\boldsymbol{\delta} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (20.22)$$

根据式(5.14),并注意到体积模量公式

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (20.23)$$

可得

$$\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3K\alpha \boldsymbol{\delta} + \frac{G}{\sqrt{J_2}} \mathbf{S} \quad (b)$$

其中

$$\mathbf{S} = [s_x \quad s_y \quad s_z \quad s_{xy} \quad s_{yz} \quad s_{zx}]^T$$

对于理想塑性材料,式(16.43)中的 $A=0$,于是

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} / \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (20.24)$$

将式(a),(b)代入上式得

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{9K\alpha^2 + G} \left[9K^2\alpha^2 \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}^T + \frac{3K\alpha G}{\sqrt{J_2}} (\boldsymbol{\delta} \mathbf{S}^T + \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}^T) + \frac{G^2}{J_2} \mathbf{S} \mathbf{S}^T \right] \quad (20.25)$$

20.3 应变空间中的塑性理论

20.3.1 预备理论与假设

岩土类材料的软化现象十分重要,在本构理论中应当反映这一特性。显然,在应力空间中针对稳定材料提出的 Drucker 公设不再成立。为此,可考虑 A.A. Il'yushin(1961)在应变空间中提出的公设。

(1)应变屈服面

在应变空间中,一个应变状态对应于空间中的一点,即应变点。将材料屈服时的应变点连成曲面就得到应变屈服面。应变屈服面以内的点对应于弹性状态,而屈服面上的点对应于塑性状态。屈服面的数学表达式可写成

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, H) = 0 \quad (20.26)$$

其中, F 为应变屈服函数; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变矢量; $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 为塑性应变矢量; H 为标量参数,可取为塑性功或等效塑性应变的函数

$$H = W_p = \int \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \text{或} \quad H = H(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

在特殊情况下,屈服条件还可简化。例如,等向硬化或软化时, F 只与应变矢量和 H 有关,式(20.26)成为

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, H) = 0 \quad (20.27)$$

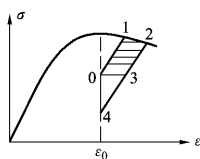
(2) Il'yushin 公设

Il'yushin 公设可表述为:弹塑性材料在应变空间中的任一应变循环中所完成的功非负。

Drucker 公设只适用于稳定材料(硬化或理想塑性),而 Il'yushin 公设既适用于硬化材料,也适用于软化材料。根据该公设,可推导出两个基本不等式

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^0)^T d\boldsymbol{\sigma}^p \geq 0 \quad (20.28)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^T d\boldsymbol{\sigma}^p \geq 0 \quad (20.29) \quad \text{图 20.9 应变循环}$$



其中, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ 是循环开始时的应变,它是位于屈服面内侧的点; $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 是塑性状态的应变,位于屈服面上; $d\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $d\boldsymbol{\sigma}^p$ 分别代表加载期间的应变增量和塑性应力增量。图 20.9 表明应力循环所完成的功(面积 0123)总是小于应变循环所完成的功(面积 01234)。

根据 Il'yushin 公设,可以证明应变屈服面是外凸的,且 $d\sigma^p$ 关于 $F=0$ 具有正交性,即

$$d\sigma^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (20.30)$$

其中 $d\lambda$ 是非负的塑性因子。

(3) 加载准则

在应变空间中,加载准则为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right)^T d\epsilon \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ > 0 & \text{加载} \end{cases} \quad (20.31)$$

其几何意义是:加载、卸载和中性变载分别对应于应变增量指向应变屈服面的外侧、内侧和与屈服面相切。

20.3.2 弹塑性矩阵

将应变增量表示为

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (a)$$

弹性应变增量为

$$d\epsilon^e = D^{-1} d\sigma \quad (b)$$

其中 D 为弹性矩阵; $d\epsilon$ 、 $d\sigma$ 分别为应变增量和应力增量矢量。将式(b)代入式(a)并注意到式(20.30),有

$$d\sigma = D d\epsilon - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (c)$$

在卸载和中性变载时 $d\lambda = 0$,上式即为增量形式的广义 Hooke 定律。只有当加载,即

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right)^T d\epsilon > 0$$

时,有 $d\lambda > 0$ 。因此 $d\lambda$ 可以假定为

$$d\lambda = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right)^T d\epsilon \quad (d)$$

其中 A 称为硬化函数。上式可写成

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon} - A d\lambda = 0 \quad (\text{e})$$

联立式(c) ,(e) ,消去 $d\lambda$ 得

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{\text{ep}} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (20.32)$$

其中 $\mathbf{D}_{\text{ep}}$ 为弹塑性矩阵 ,其计算公式为

$$\mathbf{D}_{\text{ep}} = \mathbf{D} - \frac{1}{A} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (20.33)$$

为确定硬化函数 A ,将式(d)写成

$$A = \frac{1}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{f})$$

如果加载条件为 $F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$ 则

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$$

从而

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

注意到式(f)和上式 ,可知

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T d\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{g})$$

由于

$$\mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\boldsymbol{\sigma}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

式(g)成为

$$A = - \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}\right)^T \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20.34)$$

应该指出 ,上述本构方程对硬化、理想塑性和软化普遍适用。

20.4 含有内变量的塑性理论

20.4.1 若干基本概念

经受塑性变形或微细裂纹扩展的物体应当被视为不可逆热力学系统。在本

构理论问题中,材料单元或试件就是一个热力学系统。在研究材料的变形特性时,需要测定试件上的应力、应变、温度等基本物理量随时间的变化。在同一时刻,上述物理量的数值形成一个数组,表征系统的一个状态,故这些物理量称为系统的状态变量,它们之间的函数关系称为状态方程即本构方程。

对于弹性材料,上述可测量状态变量之间存在着单调函数关系,状态方程仅由这些变量构成。而对于耗散材料,这些基本状态变量间的单调函数关系并不存在。人们早就认识到内部结构变化对材料性质的影响,要想确定状态方程,必须补充反映材料变形过程中内部结构变化的内部状态变量即内变量。内变量是无法测量或不能直接测量的,但它们是独立的。在经典塑性理论中,已经遇到过内变量,例如塑性功、塑性应变等。此外,描述材料损伤程度的损伤变量也属于内变量。相对而言,可直接测量的基本状态变量称为外变量。

20.4.2 塑性内时理论

塑性内时理论是近 30 多年来发展起来的一种新型塑性本构理论,其特点是引入反映材料内部结构变化历史的内变量(文献 27)。该理论假定状态函数对自变量历史的依赖关系只表现在对某些内变量的即时值的依赖关系上。于是,内变量也就构成状态变量的一部分,而且有如下公理:一个外变量和内变量的完整集合总是存在的,该集合的现时值将唯一地决定系统的当前热力学状态。

在塑性内时理论中,内变量刻划塑性变形后内部不可逆的状态变化。问题是:如何用尽可能少的内变量去表征材料内部不可逆的变化对应力应变关系的影响,并根据试验结果去确定由此而引入的待定参数。

(1) 状态方程

为简单起见,我们只研究无黏性塑性材料的小变形问题。塑性内时理论以不可逆热力学为基础。对于经受不可逆过程的材料单元,存在着一个被称为 Helmholtz 自由能的状态函数 ψ (即自由能密度),它以应变 ϵ_{ij} 、温度 θ 及其梯度 $g_i = \theta_{,i}$ 为外变量,以塑形应变矢量 ϵ_{ij}^p 、标量硬化参数 H 为内变量。于是, ψ 可表示为

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}, \theta, g_i, \epsilon_{ij}^p, H) \quad (20.35)$$

如果任意选择变量 $\epsilon_{ij}, \theta, g_i$, 则可以从内变量演化方程确定内变量 ϵ_{ij}^p, H , 从而可确定状态函数 ψ 。此外,这种人为规定的热力学过程还必须满足熵不等式,即

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\psi} - s \dot{\theta} - \frac{1}{\rho \theta} h_i g_i \geq 0 \quad (20.36)$$

其中 s 为熵, h_i 为热流矢量, ρ 为质量密度。

式(20.35)对时间求导得

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial g_i} \dot{g}_i + \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \psi}{\partial H} \dot{H} = 0$$

代入熵不等式(20.36)得

$$\frac{1}{\rho} \left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \psi}{\partial g_i} \dot{g}_i - \frac{1}{\rho \theta} h_i g_i - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \psi}{\partial H} \dot{H} \geq 0$$

由于 $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$, $\dot{g}_i$ 可以任意选择, 故为使上式成立, 必须取 $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$, $\dot{g}_i$ 的系数为零

$$\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} = 0, \quad s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial g_i} = 0$$

可见, 自由能与温度梯度无关, 于是有

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}, \theta, \epsilon_{ij}^p, H) \quad (20.37)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (20.38)$$

因此, 可以把自由能看成是一个势, 而应力和熵可从这个势导出。

注意到热流矢量总是与温度梯度方向相反, 故必有

$$\frac{1}{\rho \theta} h_i g_i \leq 0$$

于是, 熵不等式成为

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \psi}{\partial H} \dot{H} \leq 0 \quad (20.39)$$

(2) 演化方程

建构内时本构方程, 必须知道内变量是怎样演化的。内变量演化方程的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= f(\epsilon_{ij}, \theta, \epsilon_{ij}^p, H) \\ H &= \phi(\epsilon_{ij}, \theta, \epsilon_{ij}^p, H) \end{aligned} \right\} \quad (20.40)$$

从本质上讲, 弹塑性材料的本构方程与时间无关, 因此演化方程中必须没有时间变量通过积分进入, 于是可假设

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} M_{ij}(\epsilon_{ij}, \theta, \epsilon_{ij}^p, H) \\ \dot{H} &= N_{ij}(\epsilon_{ij}, \theta, \epsilon_{ij}^p, H) \dot{\epsilon}_{ij}^p \end{aligned} \right\} \quad (20.41)$$

其中 M_{ij}, N_{ij} 是两个张量函数 λ 是非负待定系数。

塑性内时理论并不以屈服面概念为基础,然而当假定屈服及硬化规律时却可以作为该理论的特殊情形。在经典弹塑性理论中,需要确定屈服极限并建立屈服条件。然而,对于岩土类材料来说,屈服极限很不明显,通常不得不人为地加以规定。此外,建立屈服条件也遇到很多困难。塑性内时理论可以避免屈服面,因而具有一定的吸引力。

20.4.3 损伤本构理论

岩土类材料内部的损伤表现为细观结构的缺陷,损伤的发展必然造成材料模量或刚度的降低。例如,混凝土构件受到一定外力作用后,其内部往往在骨料界面附近产生许多微裂纹(损伤场),裂纹主要沿骨料界面发展,使混凝土的应力应变曲线出现“应变软化”效应。描述岩土类材料应变软化现象的本构理论是有待探索的重要课题。目前的显著趋势是将岩土类材料单元视为损伤单元,通过引入损伤变量,建立损伤演化方程,并将其结合到本构方程中去。损伤的发展反映着不可逆变形过程,损伤变量正是内变量。可见,损伤本构理论是在考虑内变量的塑性内时理论框架内建立起来的。这里仅以简单例子说明损伤理论的基本概念。

(1) 损伤变量

连续介质损伤力学是在连续介质力学框架内发展起来的,其方法基本上是宏观的唯象方法。将材料中存在的微裂纹理解为连续的变量场即损伤场,并用损伤变量描述材料的损伤状态。从热力学观点看,损伤变量是一种内部状态变量,它的演化反映材料结构的不可逆变化过程,也可以说是因不断产生新内裂面所构成一种能量释放过程。可见,宏观损伤力学用不可逆热力学内变量来描述这种材料内结构的变化,而不去更细致地考察其变化的机制。

损伤变量的定义有多种形式。例如,若 A 为材料单元的受力面积, A_e 为有效承载面积,则损伤变量 D 可定义为

$$D = \frac{A - A_e}{A} \quad (20.42)$$

如果损伤与方向无关,则称为各向同性损伤。这时,标量 D 就能表征材料的损伤。实际材料中的微缺陷往往是各向异性的。特别是受力后,微缺陷的取向、分布及演化与受力方向密切相关,因此材料损伤实质上是各向异性的。为了描述损伤的各向异性,通常采用 2 阶或 4 阶张量 D 来定义损伤。

此外, Lemaitre 用单向拉伸试验的卸载模量 $\hat{E}$ 来定义损伤变量,即

$$D = 1 - \frac{\hat{E}}{E} \quad (20.43)$$

损伤表现在材料的卸载模量 $\hat{E}$ 低于杨氏模量 E 。在 Rousselier 的损伤理论中, 损伤则表现在材料的质量密度 ρ 低于原始值 ρ_0 。

(2) 本构方程

设材料损伤表现在承受力的有效面积 A_e 比原面积 A 减小, 即

$$A_e = A(1 - D) \quad (20.44)$$

有效应力 σ_e 定义为

$$\sigma_e = \frac{\sigma A}{A_e} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (20.45)$$

其中 σ 为表观应力。

假定损伤对变形的影响只通过有效应力来体现, 也就是说, 损伤材料的本构方程只需要把原始(无损伤)材料的本构方程中的应力改为有效应力即可。例如, 对于一维线弹性情形, 有

$$\epsilon = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{\sigma}{E(1 - D)} \quad (20.46)$$

可见, 如果表观地看问题, 则可以认为损伤体现在弹性模量的降低上。实际上, 上述假设就是等效应变假设, 即表观应力 σ 作用在损伤材料上引起的应变与有效应力 σ_e 作用在无损伤材料上引起的应变相等。

考虑到变形达到一定程度损伤才开始, Mazars(1982)针对混凝土材料提出如下本构模型(文献 20)

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \epsilon \leq \epsilon^0 \\ E\epsilon(1 - D) & \epsilon > \epsilon^0 \end{cases} \quad (20.47)$$

其中 ϵ^0 为混凝土的应变阈值。

(3) 演化方程

在单向拉伸情况下, Mazars 将损伤演化方程表示为

$$D = 1 - \frac{\epsilon_t^0(1 - A_t)}{\epsilon} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\epsilon - \epsilon_t^0)]} \quad (20.48)$$

其中 A_t, B_t, ϵ_t^0 为材料常数, 由试验确定。

习 题

20.1 试简述岩土类材料与金属材料相比在变形性质方面的特殊性。

20.2 设应变空间中的加载条件为 $F(\boldsymbol{\epsilon}, H) = 0$, 其中 $H = W_p = \int \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\epsilon}^p$ 。试

推导硬化函数 A 的计算公式。

答案 : $A = -\frac{\partial F}{\partial H} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ 。

20.3 试解释下列概念：

- | | | | |
|----------|----------|---------|---------|
| (1)弹塑性耦合 | (2)剪胀和剪缩 | (3)状态变量 | (4)内变量 |
| (5)损伤变量 | (6)状态方程 | (7)演化方程 | (8)应变空间 |

第 21 章

大变形理论 *

前面各章讨论的均为小变形问题,其中应变与位移之间的关系式即几何方程是线性的,列平衡方程时也无需考虑物体位置和形状(简称构形)的变化。这种小变形分析在很多情况下能够满足精度要求。然而,对于大变形问题,要想较为精确地确定位移与应力,就必须考虑变形对平衡的影响,同时几何方程也应包括位移的二次项(故大变形问题也称为几何非线性问题)(文献 15,16)。

在实际工程中,可能会遇到两类几何非线性问题。一种是尽管应变很小甚至未超过弹性极限而位移却较大,例如在平板大挠度问题中,应变很小时材料线元素可有较大的转动。这就是所谓大位移小应变问题,此时材料的本构方程可以是线性弹性的或非线性的。另一种是大应变问题,即大应变引起大变形,属于几何和材料双重非线性问题。

本章阐述大变形理论,内容包括:(1)变形和位移;(2)应变度量;(3)应力度量;(4)本构方程;(5)平衡方程;(6)虚功(率)原理。

21.1 变形和位移

21.1.1 物体状态描述

(1)物质坐标与空间坐标

物体占有的区域称为该物体的构形。物体在 $t = 0$ 时刻占有的区域 Ω_0 称为初始构形,在当前研究的时刻占有的区域 ω 称为现时构形。为了描述物体的运动或变形,需要选择某特定时刻的构形 Ω 作为参考构形,以确定每时刻每个物质点的位置,据此来判断流动构形的变形程度。参考构形的意义在于运动或变形是参考这个构形而定义的。

如何标记物质点 X ? 简单的办法是用物质点 X 在参考构形中的位置 $\mathbf{x}$ 来命名它。为此,需要建立一个物质坐标系 $X_1 X_2 X_3$ 。也就是说,每个物质点 X 都有其参考构形中的位置 $\mathbf{x}(X_1, X_2, X_3)$,或说 $\mathbf{x}(X_1, X_2, X_3)$ 标记了物质点

X 。为了描述物质点的运动,需要建立一个空间坐标系 x_1, x_2, x_3 , 物质点 X 在任一时刻 t 的空间位置由 $x(x_1, x_2, x_3)$ 确定。可见,物质坐标系用于参考构形,空间坐标系用于现时构形。为简单起见,通常是选择两个完全重合的直角坐标系(图 21.1)。于是,物质点的运动轨迹可用下列方程来描述

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{或} \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (i=1, 2, 3)$$

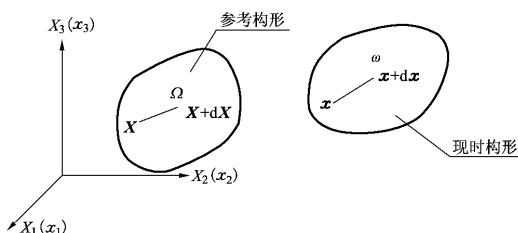


图 21.1 参考构形与现时构形

就特定的物质点 X 而言,上式表示该物质点的运动轨迹;而当时间 t 固定时,上式表示 t 时刻物体的构形。在连续性假设下,函数 $x_i(X_1, X_2, X_3, t)$ 是单值、连续的,且 Jacobi 行列式不等于零,即

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (21.1)$$

坐标 $X_i (i=1, 2, 3)$ 是识别物质点的标志,某一特定物质点在运动中保持同样的 X_i 值,故 X_i 称为物质坐标,也称为 Lagrange 坐标;坐标 $x_i (i=1, 2, 3)$ 是识别空间点的标志,同一物质点在不同时刻可以占据不同的空间点,同一空间点在不同时刻可以由不同的物质点所占据,故 x_i 称为空间坐标,也称为 Euler 坐标。若以空间坐标表示物质坐标,则有

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{或} \quad X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i=1, 2, 3)$$

对于特定的空间点 x ,上式表示 t 时刻占据该空间位置的是物质点 X 。显然,在连续性假设下,函数 $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 也是单值、连续的,且 Jacobi 行列式不等于零,即

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (21.2)$$

(2)两种描述方式

在连续介质力学中,把以物质坐标 X_i 和时间 t 作为独立自变量的描述方法称为 **Lagrange 描述**,把以空间坐标 x_i 和时间 t 作为独立自变量的描述方法称为 **Euler 描述**。Lagrange 描述以物质点作为观察对象,Euler 描述则是在介质所占据的固定的空间点上来研究问题。

在固体力学中,Lagrange 描述应用最为普遍,因为它能够很容易地处理复杂的边界条件。在物体变形过程中,只要参考构形是已知的,就可以按 Lagrange 描述并在现时构形上建立基本方程。

21.1.2 变形梯度张量

(1)线元的变换

参考构形 Ω 中两个相邻物质点 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$,它们之间的距离为 $d\mathbf{X}$ 。到了 t 时刻,这两个物质点在现时构形 ω 中的距离是 $d\mathbf{x}$ (图 21.1)。现在,让我们研究参考构形中微小线元 $d\mathbf{X}$ 与现时构形中相应线元 $d\mathbf{x}$ 之间的变换。显然

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (21.3a)$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (21.3b)$$

其中

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (21.4)$$

可见, $\mathbf{F}$ 反映了微小线元的变形和运动情况,故把它称为变形梯度张量,一般是非对称的。 $\mathbf{F}$ 是一个线性变换,它把初始微元 $d\mathbf{X}$ 变换成现时微元 $d\mathbf{x}$;一方面使 $d\mathbf{X}$ 伸长,另一方面又使它旋转一个角度。

仿照前面的分析,有

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (21.5)$$

(2) 体元的变换

在参考构形 Ω 中取微小长方体元,其边长分别为 dX_1, dX_2, dX_3 , 微元体积为

$$d\Omega = dX_1 dX_2 dX_3$$

在现时构形 ω 中,该微元体变为由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个有向线元组成的微小平行六面体元 $d\omega$ (图 21.2)

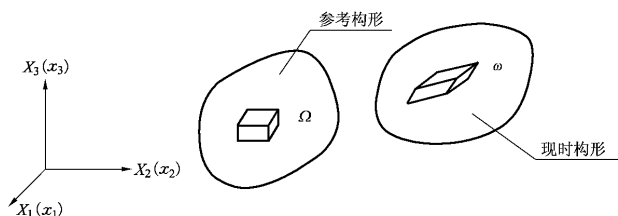


图 21.2 体元变换

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} &= \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\}$$

于是

$$d\omega = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \end{vmatrix} = J dX_1 dX_2 dX_3$$

即

$$d\omega = J d\Omega \quad (21.6)$$

可见 J 是微元体变形前后的体积之比。根据质量守恒原理 $J > 0$, 这表明变形梯度矩阵 F 是可逆的。

(3) 面元的变换

现时构形 ω 中的微小面元用 da 表示, 其法线方向余弦为 n_i ; 在参考构形 Ω 中与 $n_i da$ 相应的有向面元用 $N_i dA$ 表示, N_i 为面元的法线方向余弦。这里不加证明地给出

$$n_i da = J N_i F_{li}^{-1} dA \quad \text{或} \quad n da = J F^{-T} N dA \quad (21.7)$$

21.1.3 位移梯度张量

(1) Lagrange 描述

若一物质点在参考构形 Ω 中的位置为 X , 在现时构形 ω 中的位置为 x , 则物质点 X 的位移为(图 21.3)

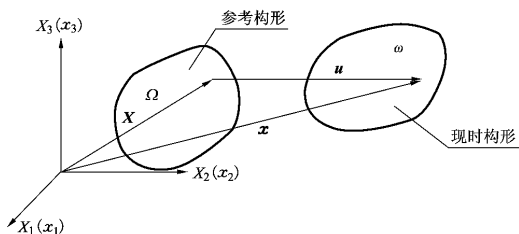


图 21.3 物质点的位移

$$u = x - X, \quad x = X + u \quad (21.8)$$

代入式(21.3)得

$$dx = (I + H) \cdot dX \quad \text{或} \quad dx_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j \quad (21.9)$$

其中

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (21.10)$$

H 称为位移梯度张量。比较式(21.3)与式(21.9), 可知

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (21.11)$$

(2) Euler 描述

式(21.8)可写成

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$$

代入式(21.5)得

$$d\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{x}, \quad dX_i = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (21.12)$$

其中

$$h_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (21.13)$$

$\mathbf{h}$ 也称为位移梯度张量。比较式(21.5)与式(21.12),可知

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{h} \quad (21.14)$$

21.1.4 刚体运动描述

任何刚体运动都可以表示为平动 $\mathbf{x}_T(t)$ 和绕原点的转动,即

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_T(t) \quad (21.15)$$

其中 $\mathbf{R}(t)$ 是转动张量或转动矩阵,它是一个正交矩阵,即它的转置矩阵等于其逆矩阵。现证明如下。

对式(21.15)求微分,注意到平动的微分为零,有

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{a})$$

因而

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{b})$$

由于刚体转动不改变长度,故对于任意 $d\mathbf{X}$,应有

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$$

故由式(b)可知

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (21.16)$$

可见,转动矩阵 $\mathbf{R}(t)$ 是正交矩阵。

21.1.5 物理量的导数

当物质坐标固定时,对时间的导数称为物质时间导数,简称物质导数。按定义,物理量 G 的物质导数为

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} + v_i \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

(1) 速度

速度 $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ 是物质点 $\mathbf{X}$ 的位置矢量的变化率,即当 $\mathbf{X}$ 保持不变时,位置矢量 $\mathbf{x}$ 对时间的导数

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{u}} \quad (21.17)$$

(2) 加速度

物质点的加速度即速度的物质导数,其表达式为

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\mathbf{u}} \quad (21.18)$$

21.2 应变度量

21.2.1 Green 应变

(1) 定义

考察在参考构形 Ω 和现时构形 ω 中任意微元线元 $d\mathbf{S}$ 和 $d\mathbf{s}$, 有

$$(d\mathbf{S})^2 = (dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{a})$$

$$(d\mathbf{s})^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{b})$$

注意到式(21.3), 有

$$(d\mathbf{s})^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}$$

其中

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (21.19)$$

线元长度平方的改变量为

$$(ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X}$$

Green 应变张量定义为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (21.20)$$

称为右 Cauchy-Green 变形张量。将式(21.11)代入式(21.20)得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) \quad (21.21a)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(H_{ij} + H_{ji} + H_{ki}H_{kj}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \quad (21.21b)$$

(2)意义

考虑应变分量 E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} 与相对伸长(即无限小正应变)的关系。若参考构形中微小线元 $d\mathbf{X}$ 的分量为

$$dX_1 = dS, \quad dX_2 = dX_3 = 0$$

其相对伸长 E_1 为

$$E_1 = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds - dX_1}{dX_1}$$

则

$$ds = (1 + E_1)dX_1 \quad (a)$$

按照 Green 应变张量的定义,此时有

$$(ds)^2 - (dS)^2 = (ds)^2 - (dX_1)^2 = 2E_{11}(dX_1)^2$$

由此得

$$ds = \sqrt{1 + 2E_{11}}dX_1 \quad (b)$$

比较式(a)和(b),得式(c)中的第 1 式,同理得另外两个关系式

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2E_{22}} - 1 \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2E_{33}} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

在小变形情况下, E_{11} 是小量, E_{11}^2 是高阶小量,故

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{11} + E_{11}^2} - 1 = E_{11}$$

同理

$$E_2 = E_{22}, \quad E_3 = E_{33}$$

考虑应变分量 E_{12}, E_{23}, E_{31} 与直角变小(即无限小剪应变)的关系。若参考构形中两个正交微小线元 $d\mathbf{X}$ 和 $\delta\mathbf{X}$ (图 21.4)的分量为

$$d\mathbf{X}: \quad dX_1 = dS, \quad dX_2 = dX_3 = 0$$

$$\delta\mathbf{X}: \quad \delta X_1 = 0, \quad \delta X_2 = \delta S, \quad \delta X_3 = 0$$

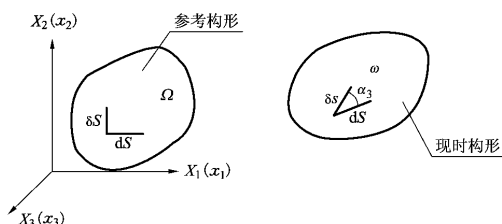


图 21.4 正交线元的角变形

并设它们在现时构形中的相应线元分别为 ds 和 δs , 其夹角为 α_3 (图 21.4), 则由矢量点积可得

$$ds\delta s \cos\alpha_3 = dx_k \delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} dS \delta S \quad (d)$$

根据式(21.20), 有

$$E_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial x_k}{\partial X_2}$$

于是, 式(d)变为

$$ds\delta s \cos\alpha_3 = 2E_{12} dS \delta S \quad (e)$$

仿照前面的分析, 有

$$\left. \begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + 2E_{11}} dS \\ \delta s &= \sqrt{1 + 2E_{22}} \delta S \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

代入式(e)得

$$\cos\alpha_3 = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}}$$

定义剪应变 Γ_{12}

$$\Gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha_3 \quad (\text{g})$$

则得式(h)中的第 1 式,同理可得另外两个关系式

$$\left. \begin{aligned} \sin \Gamma_{12} &= \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}} \\ \sin \Gamma_{23} &= \frac{2E_{23}}{\sqrt{1+2E_{22}}\sqrt{1+2E_{33}}} \\ \sin \Gamma_{31} &= \frac{2E_{31}}{\sqrt{1+2E_{33}}\sqrt{1+2E_{11}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{h})$$

在小变形情况下, E_{ij} 和 Γ_{ij} 都是小量,故

$$\Gamma_{12} = 2E_{12}, \quad \Gamma_{23} = 2E_{23}, \quad \Gamma_{31} = 2E_{31}$$

可见, Green 应变分量虽然没有明显的几何意义,但把它们应用于小变形情况时,与无限小应变分量的几何意义完全一样。

(3) 客观性

对应于任何刚体运动,与形变有关的物理量(例如应变、应力等)的度量必须为零,这就是所谓客观性要求。小变形问题中采用的无限小应变不能消除刚体运动的影响,因而无法度量大变动物体的变形状态(例题 21.2);而 Green 应变张量是客观张量,适用于描述大变动物体(例题 21.1)。

【例题 21.1】 试证明 Green 应变张量是客观张量。

设物体发生刚体运动,即

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_T(t)$$

则

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} - \mathbf{I}) = 0$$

可见,刚体运动情况下的 Green 应变为零,因此可用来度量转动时物体的变形状态。

【例题 21.2】 设一平面单元绕原点发生刚体转动,转角为 θ (图 21.5)。试计算小变形条件下定义的工程应变。

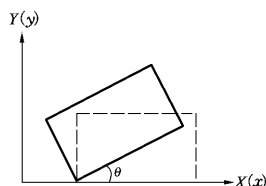


图 21.5 单元转动

解 这里发生的纯转动可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}$$

或

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

位移为

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

代入线性几何方程得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial X} = \cos\theta - 1 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial Y} = \cos\theta - 1 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} = 0 \end{aligned} \right\}$$

根据上式,如果 θ 较大,刚体转动时的正应变不能视为零。可见,此时线性几何方程不能采用,需要按几何非线性考虑。显然,上式暗示了转动多大才需按几何非线性问题对待,因为它表达了存在转动时按小变形分析带来的误差。将 $\cos\theta$ 展开成 Taylor 级数,代入应变算式

$$\epsilon_x = \cos\theta - 1 = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) - 1 \approx -\frac{\theta^2}{2}$$

可见,按小变形计算时,应变误差是二阶的。若转动量级为 10^{-2} 弧度,则应变误差量级为 10^{-4} 。若感兴趣的应变量级是 10^{-2} ,能够接受的误差为 1%,则转动量级不超过 10^{-2} 弧度时可按小变形分析。若感兴趣的应变量级是 10^{-4} ,那么为满足 1% 的误差,转动量级不超过 10^{-3} 弧度时才可按小变形分析。

21.2.2 Almansi 应变张量

根据式(21.5),有

$$(\mathrm{d}S)^2 = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

于是 线元长度平方的 改变量为

$$(\mathrm{d}s)^2 - (\mathrm{d}S)^2 = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{c}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Almansi 应变张量定义为

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}) \quad (21.22)$$

将式(21.14)代入上式得

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^{\mathrm{T}} + \mathbf{h}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{h}) \quad (21.23a)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji} + h_{ki}h_{kj}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \quad (21.23b)$$

容易证明 Almansi 应变张量也是客观张量。此外 ,Green 应变张量和 Almansi 应变张量之间存在如下关系 :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{F}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1} \quad (21.24)$$

如果位移分量 u_i 及其一阶偏导数是小量 ,则一阶偏导数的乘积可忽略 ,变形前后坐标的差别也不需考虑。此时 ,Green 应变式(21.21)和 Almansi 应变式(21.23)均退化成小变形情况下的无限小应变 ,即

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

21.2.3 变形率与应变率

(1)变形率 d

定义速度梯度张量 l

$$l = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (21.25)$$

l 可以分解为对称部分和反对称部分

$$l = \frac{1}{2}(l^{\mathrm{T}} + l) - \frac{1}{2}(l^{\mathrm{T}} - l) = d - \omega \quad (21.26)$$

其中的对称部分定义为变形率张量 d ,反对称部分定义为旋转率张量 ω ,即

$$d = \frac{1}{2}(l^{\mathrm{T}} + l) \quad \text{或} \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (21.27)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^T - \boldsymbol{l}) \quad \text{或} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (21.28)$$

$\boldsymbol{d}$ 可写成

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (21.29)$$

在物理上,它所代表的是真应变的瞬时变化率。

(2) 应变率 $\dot{\boldsymbol{E}}$

根据式(21.20) Green 应变率张量为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \cdot \dot{\boldsymbol{F}} - \dot{\boldsymbol{F}}^T \cdot \boldsymbol{F}) \quad (21.30)$$

为推导变形率 $\boldsymbol{d}$ 与 Green 应变率 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 之间的关系,对式(21.25)作如下变化:

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad (21.31)$$

故

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{l}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^T + \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \quad (21.32)$$

根据式(21.30)和(21.32),不难推导如下关系式:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{F} \quad \text{或} \quad \dot{E}_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} d_{kl} \quad (21.33)$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad \text{或} \quad d_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \dot{E}_{kl} \quad (21.34)$$

21.3 应力度量

21.3.1 Cauchy 应力

外力是在变形后的物体上与其引起的内力达到平衡的。因此,应该以变形后物体内的面元定义应力,并从变形后物体内部取微元体来建立平衡微分方程和应力边界条件。在小变形条件下,物体变形前后的构形没有明显的差别,因此无论是应力的定义还是平衡方程的建立,均不考虑物体变形的影响。然而,在大变形问题中就不能再忽略变形的影响了。

设物体的现时构形中有一微小面元向量 $\boldsymbol{n} da$, 面元上作用着面力 $\boldsymbol{d} \boldsymbol{t}$, 其分

量为 dt_i 。Cauchy 应力定义为

$$t_i^{(n)} = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{dt_i}{da} \quad (21.35)$$

若该面元与 3 个平行于坐标面的微小面元 $n_j da$ 构成一微小四面体,则由该四面体的平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} dt_i &= \sigma_{ji} n_j da, & dt &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} da \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji}, & \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \end{aligned} \right\} \quad (21.36)$$

故面元 $n da$ 上的应力为

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j, \quad \mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (21.37)$$

其中

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (21.38)$$

这就是 **Cauchy 应力张量**。Cauchy 应力是一种基于现时构形中变形后单位面积的应力,因此称为真应力。

21.3.2 PK1 应力

尽管 Cauchy 应力是真应力,但应用起来比较困难,因为求解问题需要给出边界条件,而现时构形的边界事先并不知道。实际中,采用 Lagrange 描述的工程应力比较方便。为此,用 $d\mathbf{T} = d\mathbf{t}$ 和 $N da$ 定义新的应力,即仍用现时构形中面元 $n da$ 上的作用力,而 $N da$ 则是参考构形中与 $n da$ 相应的面元(图 21.6)。

仿照 Cauchy 应力,可得

$$dT_i = dt_i = P_{ji} N_j dA, \quad d\mathbf{T} = d\mathbf{t} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} dA \quad (21.39)$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \quad (21.40)$$

$\mathbf{P}$ 称为第一 Piola-Kirchhoff 应力张量,简称 PK1 应力张量。

根据式(21.7)即 $n da = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dA$,有

$$d\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot n da = J \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dA \quad (21.41)$$

比较式(21.39)和(21.41),并注意到 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性,有

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, P_{ij} = JF_{ik}^{-1}\sigma_{kj} \quad (21.42)$$

注意到 $\boldsymbol{\sigma}$ 是对称张量, $\mathbf{F}^{-1}$ 是非对称张量, 故 PK1 应力张量 $\mathbf{P}$ 是非对称的。这种应力张量不适用于描述本构方程, 因为应变张量总是对称的。此外, 当物体发生刚体转动时, dt_i 将发生变化而 dA, N_j 不变, 故根据式(21.39), $\mathbf{P}$ 将随刚体转动而发生变化, 这表明 $\mathbf{P}$ 不是客观张量。

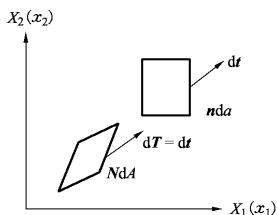


图 21.6 PK1 应力的定义

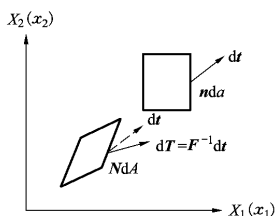


图 21.7 PK2 应力的定义

21.3.3 PK2 应力

$\mathbf{P}$ 是非对称、非客观张量, 不能用于本构方程。为此, 可用参考构形中的面元 NdA 和作用力 $d\mathbf{T}$ 来定义应力张量, 而 $d\mathbf{T}$ 就是像微小线元那样“伸长和旋转”了的 dt (图 21.7), 即

$$dT_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dt_j, \quad d\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{t} \quad (21.43)$$

于是, 仿照 Cauchy 应力, 可得

$$dT_i = S_{ji} N_j dA, \quad d\mathbf{T} = \mathbf{S}^T \cdot N d\mathbf{A} \quad (21.44)$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (21.45)$$

$\mathbf{S}$ 称为第二 Piola-Kirchhoff 应力张量, 简称 PK2 应力张量。

根据上述定义, 不难推导出 $\mathbf{S}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{P}$ 之间的下述关系式

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad S_{ij} = J \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} \quad (21.46)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{F}^{-T}, \quad S_{ij} = P_{ik} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \quad (21.47)$$

在 PK2 应力的定义中,联系变形前后面元 dA 和 da 上作用力 dT_i 和 dt_i 的关系式,与联系变形前后线段微元 dX_i 和 dx_i 的关系是相同的。这样,当物体发生刚体位移时, dt_i 将发生变化而 dT_i 总是不变。因参考构形中的 dA , N_j 不变,故根据式(21.44), S_{ij} 也不随刚体位移而变,即为客观张量。

21.3.4 应力速率张量

为了建立率形式的本构方程,在连续介质力学中,定义了多种不随刚体转动而改变的速率型对称应力张量,例如 Jaumann 率、Truesdell 率和 Green-Naghdi 率。这里仅给出 Jaumann 应力速率张量的定义式

$$\dot{\sigma}^J_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}\omega_{kj} - \sigma_{kj}\omega_{ki} \quad (21.48a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\sigma} \quad (21.48b)$$

其中 ω_{ij} 是转动张量。

可以证明 Jaumann 应力速率张量是客观的对称张量,在物理上所代表的是真应力的瞬时变化率。

21.4 本构方程

21.4.1 客观性原理

当物体发生大变形时,用于度量小变形情况的应力和应变不再适合于描述本构关系,须基于前面定义的应力和应变建立大变形本构方程。在现代连续介质力学中,特别重视建立本构方程所应遵循的客观性原理。该原理也称为标架无关性原理,是指本构方程与参考标架的任意变动无关,或者说与持有不同时钟和进行不同运动的观察者无关。

关于张量的客观性,有两种不同的观点。设对物体施加刚性转动,转动张量为 $\mathbf{R}$ 。如果转动前后的张量 $\mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{T}}$ 具有如下关系

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{R}^T$$

则 Truesdell 学派称 $\mathbf{T}$ 是客观的。

然而, Hill 认为在刚性转动后形式不变的物理量才是客观的。Green 应变张量 $\mathbf{E}$ 、PK2 应力张量 $\mathbf{S}$ 就是在这种意义上具有客观性。例如,施加刚性转动 $\mathbf{R}$ 后, $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\mathbf{F}$, 于是有

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}^T\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}$$

不过,这两种观点应用到本构方程客观性问题上,结论是一致的。

此外,由于固体材料的应力应变关系取决于变形历史,故本构方程通常以物质坐标表示,以便能够追踪物质点的运动和材料单元的变形历史。

21.4.2 大位移小应变

S 与 E 都是客观的对称张量,而且在小应变情况下,它们在数值上就等于工程应力和工程应变。这样,大转动小应变时的本构方程与小变形情况下的本构方程具有相同的形式和材料常数,只是要用 S 和 E 代替小变形时的应力和应变即可。

(1) 线性弹性

在大转动小应变条件下表现为线性弹性的材料称为 Kirchhoff 材料,其本构方程为

$$S_{ij} = D_{ijkl} E_{kl} \quad (21.49)$$

其中 D_{ijkl} 为弹性本构张量。对于各向同性材料,有

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2G E_{ij} \quad (21.50)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

弹性常数 E 、 G 、 ν 由通常小变形条件下的材料试验确定。式(21.50)可写成矩阵形式

$$S = DE \quad (21.51)$$

其中 D 为弹性矩阵,见第5章式(5.14); S 、 E 分别为 PK2 应力向量和 Green 应变向量(符号与相应的张量相同,但具体场合下不难区分张量与向量)

$$S = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{23} \quad S_{31}]^T$$

$$E = [E_{11} \quad E_{22} \quad E_{33} \quad 2E_{12} \quad 2E_{23} \quad 2E_{31}]^T$$

由于几何非线性分析采用增量形式,故本构方程也写成增量形式,即

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl}^r \Delta E_{kl} \quad \text{或} \quad \Delta S = D^r \Delta E \quad (21.52)$$

显然,线性弹性情况下的切线本构张量 D_{ijkl}^r 恒等于 D_{ijkl} 。

(2) 非线性弹性

对于非线性弹性材料,应力 S_{ij} 与应变能密度函数 $W_E(E_{ij})$ (其函数形式与小变形情况下的完全相同)之间存在下述关系:

$$S_{ij} = \frac{\partial W_E}{\partial E_{ij}} \quad (21.53)$$

切线本构张量为

$$D_{ijkl}^{\varepsilon} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W_E}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (21.54)$$

(3) 弹塑性

对于弹塑性材料,本构方程以增量形式给出

$$\Delta S_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} \Delta E_{ij} \quad \text{或} \quad \Delta \mathbf{S} = \mathbf{D}_{\text{ep}} \Delta \mathbf{E} \quad (21.55)$$

其中 D_{ijkl}^{ep} 是弹塑性本构张量, $\mathbf{D}_{\text{ep}}$ 是弹塑性本构矩阵(见第 16 章)。需要注意的是,本构矩阵与应力向量有关,其中须用 $\mathbf{S}$ 代替小应变情况下的工程应力向量。

21.4.3 大位移大应变

(1) 非线性弹性

对于大应变下的非线性弹性材料,假定存在应变能密度函数 ω (是 E_{ij} 的解析函数),且 PK2 应力 $\mathbf{S}$ 与 Green 应变 $\mathbf{E}$ 具有如下关系:

$$S_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial C_{ij}} \quad (21.56)$$

切线本构张量为

$$D_{ijkl}^{\varepsilon} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (21.57)$$

通常称具有上述性质的材料为超弹性材料。其中的 ω 可用右 Cauchy-Green 变形张量 $\mathbf{C}$ 的不变量 I_1, I_2, I_3 表示。例如,适用于橡胶材料的 Mooney-Rivlin 模型表示为

$$\omega = A(I_1 - 3) + B(I_2 - 3) + C(1/I_3^2 - 1) + D(I_3 - 1) \quad (21.58)$$

其中

$$C = \frac{1}{2}A + B, \quad D = \frac{A(5\nu - 2) + B(11\nu - 5)}{2(1 - 2\nu)}$$

超弹性材料(例如橡胶类材料)大多是几乎不可压缩材料,其泊松比 ν 一般在 $0.48 - 0.5$ 之间(不包含 0.5)。

(2) 弹塑性

在大应变情况下,为了反映与加载历史的相关性,通常采用速率型弹塑性本

构方程。我们知道, Cauchy 应力的 Jaumann 导数 $\dot{\sigma}_{ij}^J$ 和变形率 d_{ij} 分别代表真实应力和真实应变的瞬时速率, 因此弹塑性本构方程可表示为

$$\dot{\sigma}_{ij}^J = D_{ijkl}^{\text{ep}} d_{kl} \quad (21.59)$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{D}_{\text{ep}} \mathbf{d} \quad (21.60)$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^J &= [\dot{\sigma}_{11}^J \quad \dot{\sigma}_{22}^J \quad \dot{\sigma}_{33}^J \quad \dot{\sigma}_{12}^J \quad \dot{\sigma}_{23}^J \quad \dot{\sigma}_{31}^J]^T \\ \mathbf{d} &= [d_{11} \quad d_{22} \quad d_{33} \quad 2d_{12} \quad 2d_{23} \quad 2d_{31}]^T \end{aligned}$$

其中弹塑性本构矩阵在形式上与小应变的完全相同(见第 16 章), 只要把其中的应力偏量和等效应力分别改用 Cauchy 应力偏量和等效的 Cauchy 应力即可。此外, 为确定本构矩阵中的硬化函数 A 须进行大应变单向拉伸试验, 用真实应力和真实应变(对数应变)描述材料行为。

必须指出, 不能用 Cauchy 应力的物质导数 $\dot{\sigma}_{ij}$ 和变形率 d_{ij} 来建立率形式的本构方程, 因为 d_{ij} 是客观张量而 $\dot{\sigma}_{ij}$ 不是客观率。例如, 受初应力 σ_{ij}^0 作用的物体发生转动时, 变形率 d_{ij} 为零, 而应力分量在转动中将发生变化, 即应力的物质导数 $\dot{\sigma}_{ij}$ 非零, 故 $\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} d_{kl}$ 无效。

21.5 平衡方程

荷载作用下的物体是在变形后的现时构形 ω 上达到平衡的。因此, 平衡方程(包括平衡微分方程和应力边界条件)应该在现时构形中列出。在小变形情况下之所以在初始构形上给出平衡方程, 是因为此时可忽略初始构形和现时构形的差别; 而在大变形情况下, 忽略这种差别是不允许的。

如果在现时构形中任取一微小六面体单元, 其面与坐标面平行, 那么与小变形问题类似, 有限变形问题的平衡微分方程表示 Cauchy 应力分量与体力分量之间的关系。在边界处取微小四面体, 则应力边界条件表示 Cauchy 应力分量与面力分量之间的关系。在现时构形中, 物体的全部边界、面力边界和位移边界分别为 a 、 a_σ 和 a_u 。根据平衡原理可得

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \dot{v}_i \quad \text{在 } \omega \text{ 内} \quad (21.61)$$

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{p}_i \quad \text{在 } a_\sigma \text{ 上} \quad (21.62)$$

其中 f_i 、 $\bar{p}_i$ 分别为现时构形中的体力分量、面力分量; ρ 是现时构形的质量密度; $\dot{v}_i$ 是加速度分量。

21.6 虚功原理

在几何非线性问题的近似解法中,也需要从平衡微分方程和应力边界条件的等效积分形式出发,通过分部积分建立弱形式即虚功原理或虚功率原理。

21.6.1 虚功率原理

设几何方程、位移边界条件和本构方程事先得到满足,现研究定解问题的弱形式。取虚速度即速度的变分 δv_i 为任意函数,则式(21.61)、(21.62)的等效积分形式为

$$-\int_{\omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i - \rho \dot{v}_i \right) \delta v_i d\omega + \int_{a_{\sigma}} (n_j \sigma_{ji} - \bar{p}_i) \delta v_i da = 0 \quad (a)$$

对上式中的第一项进行分部积分

$$\int_{\omega} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta v_i d\omega = \int_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta v_i) - \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \right] d\omega \quad (b)$$

根据散度定理,有

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta v_i) d\omega = \int_{a_{\sigma}} n_j \sigma_{ji} \delta v_i da \quad (c)$$

由于 δv_i 在速度或位移边界上为零,因此上式可写成

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta v_i) d\omega = \int_{a_{\sigma}} n_j \sigma_{ji} \delta v_i da \quad (d)$$

将上式代入式(b),再代入式(a)得

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} d\omega + \int_{\omega} \rho \dot{v}_i \delta v_i d\omega - \int_{\omega} f_i \delta v_i d\omega - \int_{a_{\sigma}} \bar{p}_i \delta v_i da = 0 \quad (e)$$

注意到 σ_{ij} 的对称性以及变形率 $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, 不难推得上式第一项为

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} d\omega = \int_{\omega} \sigma_{ij} \delta d_{ij} d\omega$$

于是,式(e)成为用 Cauchy 应力和变形率表示的虚功率方程

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} \delta d_{ij} d\omega + \int_{\omega} \rho \dot{v}_i \delta v_i d\omega - \int_{\omega} f_i \delta v_i d\omega - \int_{a_{\sigma}} \bar{p}_i \delta v_i da = 0 \quad (21.63a)$$

对于静力学问题有

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} \delta d_{ij} d\omega - \int_{\omega} f_i \delta v_i d\omega - \int_{a_{\sigma}} \bar{p}_i \delta v_i da = 0 \quad (21.63b)$$

以下为公式简洁起见,只考虑静力问题(增加惯性项不会引起任何困难)。

该虚功率方程要求在现时构形 ω 上积分,而现时构形是未知的且随变形而不断变化,现时构形中的体力分量 f_i 和面力分量 $\bar{p}_i$ 也是未知的。因此,在固体力学中,上述方程很少应用。由于在已知的参考构形上易于描述边界条件,故可考虑将式(21.63)转换为参考构形上的积分公式。为此,将式(21.34)、(21.46)分别写为

$$d_{ij} = F_{ik}^{-T} \dot{E}_{kl} F_{lj}^{-1}, S_{ij} = J F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{lj}^{-T}$$

从而有

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} d_{ij} d\omega = \int_{\Omega} J F_{lj}^{-1} \sigma_{ji} F_{ik}^{-T} \dot{E}_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} S_{lk} \dot{E}_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} S_{ji} \dot{E}_{ij} d\Omega$$

用许可的变形率 δd_{ij} 及相应的应变率 $\delta \dot{E}_{ij}$ 分别代替上式中的 d_{ij} 和 $\dot{E}_{ij}$, 上式自然也是成立的,从而有

$$\int_{\omega} \sigma_{ji} \delta d_{ij} d\omega = \int_{\Omega} S_{lk} \delta \dot{E}_{kl} d\Omega \quad (a)$$

假定荷载是保守的,即在物体运动过程中荷载的大小和方向都不变。若在参考构形 Ω 中,全部边界、面力边界和位移边界分别用 A 、 A_{σ} 和 A_u 表示;体力分量、面力分量分别用 F_i 、 $\bar{P}_i$ 表示,则有

$$F_i d\Omega = f_i d\omega, \quad \bar{P}_i dA = \bar{p}_i da$$

从而

$$\int_{\omega} f_i \delta v_i d\omega = \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega, \quad \int_{a_{\sigma}} \bar{p}_i \delta v_i da = \int_{A_{\sigma}} \bar{P}_i \delta v_i dA \quad (b)$$

将式(a)、(b)代入式(21.63),便得到用 PK2 应力 S 和 Green 应变率 $\dot{E}$ 表示的虚功率方程

$$\int_{\Omega} S_{ji} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega - \int_{A_{\sigma}} \bar{P}_i \delta v_i dA = 0 \quad (21.64)$$

21.6.2 虚位移原理

式(21.64)乘以时间微元 dt , 可得用 PK2 应力 S 和 Green 应变 E 表示的虚功方程

$$\int_{\Omega} S_{ji} \delta \Delta E_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_i \delta \Delta u_i d\Omega - \int_{A_\sigma} \bar{P}_i \delta \Delta u_i dA = 0 \quad (21.65a)$$

或
$$\int_{\Omega} S_{ji} \delta \Delta E_{ij} d\Omega = \delta \Delta W \quad (21.65b)$$

其中 $\delta \Delta W$ 为外力虚功增量, 即

$$\delta \Delta W = \int_{\Omega} F_i \delta \Delta u_i d\Omega + \int_{A_\sigma} \bar{P}_i \delta \Delta u_i dA$$

可见, Cauchy 应力 σ 与变形率 d 、PK2 应力 S 与 Green 应变率 $\dot{E}$ 在功率上都是共轭变量; S 与 E 在功上是共轭变量。事实上, 能量的度量必定与参考框架无关, 即它是客观的。在实际问题分析中, 为保证应变能密度的客观性, 应力和应变必须共轭, 即无论应力和应变采取什么样的度量形式, 它们必须使应变能保持客观性, 即两者之积给出功或功率(在功率上共轭的变量也可以说在功或能量上是共轭的)的真实描述。

习 题

- 21.1 何谓参考构形? 为什么要用参考构形? 在几何非线性分析中常用的参考构形有哪几种?
- 21.2 证明 Green 应变张量和 Almansi 应变张量为客观张量, 即证明当发生刚体转动 $x = RX$ (R 为转动矩阵) 时, Green 和 Almansi 应变张量为零, 从而可以度量大变动物体的变形状态; 而按小变形条件下的线性应变公式计算的应变分量并不等于零。
- 21.3 试证明 Green 应变张量 E 与 Almansi 应变张量 e 之间满足关系式:

$$E = F^T e F, \quad e = F^{-T} E F^{-1}$$

- 21.4 为什么要将在现时构形中建立的弱形式即虚功率原理转换到参考构形上?

附录：

数学基础

在近代力学和数学刚刚获得发展的文艺复兴时期，达·芬奇就曾写道：“力学是数学的乐园，因为我们在这里获得了数学的果实。”现在重温这句话，更感亲切而真实。

弹塑性力学属于连续介质力学，极为广泛地应用到各种各样的数学知识，特别是微积分。本书根据内容特点，特别注意到充分且灵活地运用数学工具。例如，用张量分析讲述一般理论具有书写简洁、推导清晰、物理意义明确的特点；用常规符号处理弹塑性力学具体问题则更为直观方便。

本书涉及到的大部分数学知识在大学本科阶段曾经学习过，而另一些知识则在此基础上也不难掌握，例如张量分析、场论基础、变分概念等。为了使不熟悉这些数学分支的读者不必去读专门的书籍，本附录遵循够用为限的原则对它们进行了简要介绍。

A.1 张量基础

A.1.1 张量的定义

张量被用来描述客观存在的物理量。在数学上，张量是不依赖于任何特定坐标系而存在的量。诸如温度、位移和应力等物理量都是客观存在的，不依赖于坐标系而变化，因而它们都是张量。但是，在研究这些物理量空间分布或变化规律时，又得在一定的参考坐标系中进行，而在不同坐标系中通常具有不同的分量。这样，张量在不同坐标系中的不同分量之间必定具有某种确定的变换规律。因此，张量也可定义如下：分量满足一定的坐标变换规律的量就是张量。

在3维空间坐标系中，如果一个张量的分量个数为 3^N ，则该张量就称为 N 阶张量，例如标量、矢量和应力张量分别为零阶、一阶和二阶张量。

A.1.2 张量表示法

(1) 标量

标量是只有大小没有方向的物理量,通常用斜体字母表示,例如温度 T 、密度 ρ 、时间 t 、体积 V 等。标量没有方向,分量个数为 1,因此为零阶张量。

(2) 矢量

矢量是既有大小又有方向的物理量,常用小写黑体字母(或字母上加箭头)来表示,例如位移 u (或 $\vec{u}$)、体力 f (或 $\vec{f}$)、压力 p (或 $\vec{p}$)等。这种表示方法称为实体记法。

在参考坐标系中,其他矢量均可用 e_i 的线性组合来表示,例如三维空间矢量 a 可表示为

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 a_i e_i \quad (\text{A.1})$$

其中 a_i 为矢量 a 在 e_i 轴的投影或分量,下标 i 称为指标。这种同时写出分量和相应的基矢量的表示方法称为分解式记法。显然,我们也可以用全分量的集合来表示矢量,省略相应的基矢量,例如用

$$u_i (i=1, 2, 3) \quad (\text{A.2})$$

表示位移矢量。这种字母加指标的表示方法称为指标或分量记法。矢量在笛卡尔坐标系中有 3 个分量,故为一阶张量。

当指标不重复出现时,该字母要在 $1, 2, \dots, N$ 的范围内取值,其中 N 为规定指标域的确定整数。在指标写法中,不重复出现的指标称为自由指标。如果一个指标重复出现两次,则该指标要取完指标域中所有的值,然后将各项加起来。这就是爱因斯坦求和约定,重复出现的指标称为哑标。按此约定,式(A.1)可写为

$$a = a_i e_i \quad (\text{A.3})$$

哑标仅表示要遍历求和,因此可用除该项中自由指标以外的任何字母代替而不改变该项的意义。例如

$$a = a_i e_i = a_j e_j = a_k e_k \quad (\text{A.4})$$

哑标只能成对地出现。若要对同项内出现两次以上的指标进行遍历求和,必须加求和号,例如

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i c_i \quad (\text{A.5})$$

具有多重方向性的物理量称为狭义的张量。这种高阶张量的实体记法通常用大写字母 A, σ 等表示。对于具有 9 个分量的二阶张量 A 其分解式记法为

其中 $e_i e_j$ 称为并矢基, 共有 9 个。张量也可用指标记法

A 的转置记为 A^T , 即

如果 A 的分量满足

即与其转置张量相等, 则 A 称为对称张量。如果 A 的分量满足

则 A 称为反对称张量。

根据求和约定和指标记法,代数方程组

[illegible]

可写为

$$a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (\text{A.11b})$$

自由指标表示,若轮流取该指标范围内的任何值,关系式均成立。可见,通过哑标可把许多项缩写成一项,再通过自由指标又把许多方程缩写成一个方程。

(1) 矢量与矢量

向量与向量的点积定义为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \quad (\text{A.12})$$

其中 α 为两矢量之间的夹角,点积的结果为一个标量,故也称为标量积。

矢量与矢量的叉积定义为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.13})$$

矢量间叉积的几何意义是面元矢量,其大小等于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 构成的平行四边形面积,即 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$,方向为该面元的法线方向,且遵守右手法则。

三个矢量的混合积定义为

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.14})$$

当 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 构成右手系时,混合积表示这 3 个矢量所构成的平行六面体的体积;若构成左手系,则为体积的负值。

(2) 矢量与张量

矢量 $\mathbf{v}$ 与张量 $\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 的点积为一矢量,即

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = (v_i\mathbf{e}_i) \cdot (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = v_i A_{ij}\mathbf{e}_j \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot (v_j\mathbf{e}_j) = v_j A_{ij}\mathbf{e}_i \quad (\text{A.16})$$

(3) 张量与张量

张量 $\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 与张量 $\mathbf{B} = B_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$ 的点积为一张量,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = A_{ij}B_{kl}\delta_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = A_{ik}\mathbf{B}_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l \quad (\text{A.17})$$

同阶的笛卡尔张量相加减,和差张量的分量等于各张量的分量之和差,例如二阶张量之和差

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (\text{A.18})$$

为

$$A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij} \quad (\text{A.19})$$

(4) 张量的主值

假设 $\mathbf{T}$ 是二阶张量,如果有一个方向 $\mathbf{n}$,使得下式

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \lambda \mathbf{n} \quad \text{或} \quad n_i T_{ij} = \lambda n_j \quad (\text{A.20})$$

成立,则 $\mathbf{n}$ 称作 $\mathbf{T}$ 的主方向或主轴,而标量 λ 称为 $\mathbf{T}$ 的主值。

(5) 矢量的微积分

设有标量函数

$$\Phi = \int_0^{x_1} P_1 dx_1 + \int_0^{x_2} P_2 dx_2 + \dots + \int_0^{x_n} P_n dx_n = \int_0^x \mathbf{P}^T d\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 。显然有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P}$$

它表示一个标量对矢量的偏导数,得到的是一个矢量。

设有向量函数 $\Phi = [\Phi_1(\mathbf{x}) \ \Phi_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \Phi_m(\mathbf{x})]^T$, 则它对向量 $\mathbf{x}$ 的导数表示为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

可见,向量对向量求导数,得到的是一个二阶张量或矩阵。

(6) 矢量的坐标变换

现研究矢量 $\mathbf{a}$ 从原坐标系 $\alpha x_1 x_2 x_3$ 变换到新坐标系 $\alpha' x'_1 x'_2 x'_3$ 时各分量间的关系。新坐标轴 x'_m 的单位矢量为 $\mathbf{e}'_m$, 原坐标轴 x_i 的单位矢量 $\mathbf{e}_i$ 。显然有

$$\mathbf{a} = a'_m \mathbf{e}'_m = a_i \mathbf{e}_i$$

两边点乘 $\mathbf{e}'_m$ 得

$$a'_m = \mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_i a_i = \beta_{m'i} a_i \quad (\text{A.22})$$

其中

$$\beta_{m'i} = \mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_i = \cos(\angle x'_m, x_i) \quad (\text{A.23})$$

(7) 张量的坐标变换

设 $\mathbf{T}$ 是二阶张量,则有

$$T_{m'n} \mathbf{e}'_m \mathbf{e}'_n = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

两边左点乘 $\mathbf{e}'_m$ 、右点乘 $\mathbf{e}'_n$ 得

$$T_{m'n'} = \beta_{m'i} \beta_{n'j} T_{ij} \quad (\text{A.24})$$

若用 l_i, m_i, n_i 表示新坐标轴 x'_i 在原坐标系中的方向余弦, 并组成方向余弦矩阵

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

则式(A.24)可写成如下矩阵形式:

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{T} \boldsymbol{\beta}^T \quad (\text{A.26})$$

A.2 场 论 基 础

在连续介质力学领域, 可能会遇到各种各样的场, 例如应力场、应变场、位移场、温度场、渗流场等。场是指定义在空间某个区域内的函数。如果所定义的场函数为标量(如温度)、矢量(如位移)或张量(如应力), 则相应地称为标量场、矢量场或张量场。场论就是关于场的性质与规律的理论。

A.2.1 基本概念

(1) 矢量算子

正交坐标系中的矢量算子 ∇ 定义为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{A.27})$$

(2) 标量场梯度

设 φ 为标量场函数, 标量场中任一点 P 的梯度定义为

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad (\text{A.28})$$

梯度是一个矢量, 其方向正交于该点所在的等位面 $\varphi = \text{常数}$ 。现证明如下:

等位面上的一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 可用矢量 $\boldsymbol{S}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{S} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3 = x_i \boldsymbol{e}_i$$

曲面在该点的切线方向为

$$d\boldsymbol{S} = dx_1 \boldsymbol{e}_1 + dx_2 \boldsymbol{e}_2 + dx_3 \boldsymbol{e}_3$$

于是

$$\nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3 = d\varphi = 0$$

从而证明了梯度方向与等位面的正交性。梯度是标量场不均匀性的量度,可写成 $\mathbf{v} = \text{grad} \varphi$ 的矢量场称为位势场,而 φ 称为位势函数。

(3)散度和旋度

矢量 $\mathbf{a}$ 的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = a_{i,i} \quad (\text{A.29})$$

矢量 $\mathbf{a}$ 的旋度定义为

$$\nabla \times \mathbf{a} = \text{curl} \mathbf{a} \quad (\text{A.30})$$

容易证明

$$\left. \begin{aligned} \text{curl grad} \varphi &= \nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \\ \text{div curl} \mathbf{a} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.31})$$

(4)Laplace 算子

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A.2.2 散度定理

设 Ω 为物体的体积域, Γ 为其边界, $\mathbf{n}$ 为边界外法向单位矢量。关于矢量场 $\mathbf{U}$ 的散度定理(也称为高斯定理)为

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{U} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \int_{\Omega} U_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} U_i n_i d\Gamma \quad (\text{A.33})$$

推而广之,在张量场 $\mathbf{T}$ 中也可以得到相应上式的积分表达式

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.34})$$

A.3 变分基础

A.3.1 泛函与变分

(1)泛函

简单地讲,泛函就是函数的函数。在某域内可变化的函数称为自变函数,例

如物体中的位移、应变和应力等都是位置坐标的函数。依赖于自变函数而变的量称为自变函数的泛函,例如物体的应变能是应力和应变的泛函。

泛函一般表示为在所依赖函数定义域上的积分,被积函数为自变量、函数及其导数的某个复合函数。

(2)变分

现以单变量问题为例,来研究自变函数和泛函的变分。如果自变函数 $y(x)$ 的增量微小,就称之为变分,用 δy 表示。 δy 是指 $y(x)$ 与同其相近的 $y_1(x)$ 之差,即

$$\delta y = y(x) - y_1(x) \quad (\text{A.35})$$

δy 也是 x 的函数,只是在指定的 x 域中都是微量,即它是任意小的自变函数。这里,我们要注意微分 dy 与变分 δy 的区别:对于给定函数 $y(x)$,在一点 x_0 处对应于 dx 的增量 dy 是完全确定的,而 δy 则是 $y(x)$ 的容许函数邻域内任意函数与 $y(x)$ 之差。

如果变分是任意微小的位移,且满足位移边界条件,即在 S_u 上有

$$\delta u = 0, \delta v = 0, \delta w = 0 \quad (\text{A.36})$$

则变分就是虚位移。

曲线 $y = y(x)$ 和 $y = y_1(x)$ 怎样才算很接近?如果在整个域 x 内, $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 的差的模都很小,那么这两条曲线就有“零阶接近度”。如果 $y(x) - y_1(x)$ 和 $y'(x) - y'_1(x)$ 的值到处都很小,则两条曲线具有“一阶接近度”。一般地说,如果 $\delta y = y(x) - y_1(x)$, $\delta y' = y'(x) - y'_1(x)$,..., $\delta y^{(k)} = y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$ 都很小,则称这两条曲线有 k 阶接近度。

变分 δy 引起泛函 Π 的增量为

$$\Delta \Pi = \Pi(y + \delta y) - \Pi(y) = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \quad (\text{A.37})$$

增量 $\Delta \Pi$ 的线性主部称为泛函的一阶变分 $\delta \Pi$ 。

(3)驻值

与函数求极值类似,变分法的目标是确定这样的自变函数,它们使其相应的泛函取得极值。如果泛函 $\Pi(y)$ 在任何一条与 $y = y_0(x)$ 接近的曲线上的值不大于(或小于) $\Pi(y_0)$,也即

$$\Delta \Pi = \Pi(y) - \Pi(y_0) \leq 0 \quad (\text{或} \geq 0)$$

则称泛函在曲线 $y = y_0(x)$ 上达到极大(或极小)值,而且在 $y = y_0(x)$ 上有驻值条件

$$\delta \Pi(y) = 0 \quad (\text{A.38})$$

驻值条件(A.48)是泛函取极值的必要条件。若要取极值,还得满足下述条件:

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 \Pi > 0 & \quad \text{极小值} \\ \delta^2 \Pi < 0 & \quad \text{极大值} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.39})$$

注意:函数的极值是在自变量的一个邻域内进行比较,而泛函的极值则要在容许函数空间中函数的一个邻域内进行比较。

A.3.2 运算规则

变分运算与微分运算的规则完全相同,而且微分或积分与变分的次序可以交换。下面给出若干常用算式。

$$\left. \begin{aligned} \delta(y') &= (\delta y)' \\ \delta \int_a^b F dx &= \int_a^b \delta F dx \\ \delta(F_1 + F_2) &= \delta F_1 + \delta F_2 \\ \delta(F_1 \cdot F_2) &= F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1 \\ \delta(F_1 / F_2) &= (F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2) / F_2^2 \\ \delta F^n &= n F^{n-1} \delta F \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.40})$$

A.3.3 预备定理

设 $\Phi(x)$ 是区间 $a \leq x \leq b$ 上的连续函数, δy 是该区间上自变函数 $y(x)$ 的变分。如果 δy 在满足约束条件的前提下任意变化时,下式始终成立

$$\int_a^b \Phi(x) \delta y dx = 0 \quad (\text{A.41})$$

则被积函数 $\Phi(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上必处处为零,即

$$\Phi(x) \equiv 0 \quad (\text{A.42})$$

这就是变分法的基本预备定理。现用反证法证明如下:设 $\Phi(x)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 不处处为零。由于 δy 可以任意选择,我们选 δy 为处处与 $\Phi(x)$ 同号的函数。于是 $\Phi(x) \delta y$ 在域内恒正,要满足式(A.41),必须 $\Phi(x) \equiv 0$ 。

参考文献

- 1 Bridgman, P. W. , Effects of High Hydrostatic Pressure on the Plastic Properties of Metals. Revs. Modern Phys. Vol. 17 , 1945
- 2 Drucker D C. , A more fundamental approach to plastic stress strain relations. Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. , 1952
- 3 杜庆华,余寿文,姚振汉.弹性理论[M].北京:科学出版社,1986
- 4 冯元桢.连续介质力学导论[M].北京:科学出版社,1984
- 5 郭仲衡.非线性弹性理论[M].北京:科学出版社,1980
- 6 韩强,黄小清,宁建国.高等板壳理论[M].北京:科学出版社,2002
- 7 黄克智等.板壳理论[M].北京:清华大学出版社,1987
- 8 黄克智,薛明德,陆明万.张量分析(第二版)[M].北京:清华大学出版社,2003
- 9 黄文彬,曾国平.弹塑性力学难题分析[M].北京:高等教育出版社,1992
- 10 黄文熙.土的工程性质[M].北京:水利水电出版社,1983
- 11 黄炎.工程弹性力学[M].北京:清华大学出版社,1982
- 12 胡海昌.弹性力学的变分原理及其应用[M].北京:科学出版社,1981
- 13 贾乃文.粘塑性力学及工程应用[M].北京:地震出版社,2000
- 14 蒋彭年.土的本构关系[M].北京:科学出版社,1982
- 15 蒋友谅.非线性有限元法[M].北京:北京工业学院出版社,1988
- 16 匡震邦.非线性连续介质力学基础[M].西安:西安交通大学出版社,1989
- 17 路见可.平面弹性复变方法[M].武汉:武汉大学出版社,2002
- 18 陆明万,罗学富.弹性理论基础[M].北京:清华大学出版社,1990
- 19 吕洪生,曾新吾.连续介质力学(上册)连续介质力学基础[M].长沙:国防科技大学出版社,1999
- 20 Mazars J. , Mechanical Damage and Fracture of Concrete Structures , Advances in Fracture Research(Fracture 8) , Pergamon , Press , Oxford. 1982 , V.4 , 1499 - 1506
- 21 穆斯赫利什维利著,赵惠元译.数学弹性力学的几个基本问题[M].北京:科学出版社,1958
- 22 钱伟长,叶开源.弹性力学[M].科学出版社,1956
- 23 曲庆璋,章权,季求和等.弹性板理论[M].北京:人民交通出版社,2000
- 24 屈智炯.土的塑性力学[M].成都:成都科技大学出版社,1987
- 25 孙炳楠,洪滔,杨骊先.工程弹塑性力学[M].杭州:浙江大学出版社,1998
- 26 铁摩辛柯,古地尔著,徐芝纶译.弹性理论[M].北京:高等教育出版社,1990
- 27 Valanis K. C. , A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface. Arch , Mech. , 23 , 1971 :517 - 551
- 28 王龙甫.弹性理论[M].北京:科学出版社,1978
- 29 王敏中,王炜,武际可.弹性力学教程[M].北京:北京大学出版社,2002

- 30 王仁,黄克智,朱兆祥.塑性力学进展[M].北京:中国铁道出版社,1988
- 31 王仁,黄文彬.塑性力学引论[M].北京:北京大学出版社,1982
- 32 王仁,熊祝华,黄文彬.塑性力学基础[M].北京:科学出版社,1982
- 33 吴家龙.弹性力学[M].上海:同济大学出版社,1993
- 34 吴连元.板壳理论[M].上海:上海交通大学出版社,1989
- 35 吴毓熙.应用弹性力学[M].上海:同济大学出版社,1989
- 36 希尔著,王仁等译.塑性数学理论[M].北京:科学出版社,1966
- 37 夏志皋.塑性力学[M].上海:同济大学出版社,1991
- 38 徐秉业.塑性力学[M].北京:高等教育出版社,1989
- 39 徐秉业,刘信声.结构塑性极限分析[M].北京:中国建筑工业出版社,1985
- 40 徐秉业,刘信声.应用弹塑性力学[M].北京:清华大学出版社,1995
- 41 徐芝纶.弹性力学(第二版)(上册)[M].北京:人民教育出版社,1982
- 42 徐芝纶.弹性力学(第二版)(下册)[M].北京:人民教育出版社,1982
- 43 薛守义,刘汉东.岩体工程学科性质透视[M].郑州:黄河水利出版社,2002
- 44 严宗达.塑性力学[M].天津:天津大学出版社,1988
- 45 杨桂通.弹塑性力学[M].北京:人民教育出版社,1980
- 46 杨桂通,树学锋.塑性力学[M].北京:中国建材工业出版社,2000
- 47 杨桂通.弹塑性力学引论[M].北京:清华大学出版社,2004
- 48 俞茂宏.双剪理论及其应用[M].北京:科学出版社,1998
- 49 余同希.塑性力学[M].北京:高等教育出版社,1989
- 50 郑颖人,龚晓南.岩土塑性力学基础[M].北京:中国建筑工业出版社,1989
- 51 沈珠江.理论土力学[M].北京:中国水利水电出版社,2000

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
 \end{aligned} \tag{A.32}$$