



国防科工委“十五”规划教材·力学

# 粘性流体力学

阎超 钱翼稷 连祺祥 编著

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社 西北工业大学出版社  
哈尔滨工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

## 内容简介

全书共分8章,主要论述粘性流体力学的基本概念、理论、方法和现象,讲述粘性流体力学理论的实际应用,介绍现代粘性流体力学的新成就以及存在的困难。本书力图使读者在全面学习粘性流体力学基本理论的基础上,掌握粘性流体力学的分析方法和研究思路,学会实际工程中粘性流体力学的分析和计算方法,了解粘性流体力学的当前进展、成就和存在的困难,以激发读者研究粘性流体力学的兴趣和独立探索思考的能力。

本书是针对航空航天院校流体力学、空气动力学及飞行器设计专业“粘性流体力学”课程要求所编写的教材。主要适用于高年级本科生和研究生,同时也可供高等院校、科研院所及研制设计部门有关专业人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

粘性流体力学/阎超等编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2005.8

ISBN 7-81077-640-1

I. 粘… II. 阎… III. 粘性流体—流体力学  
IV. 0357

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 055245 号

## 粘性流体力学

阎超 钱翼稷 连祺祥 编著

责任编辑 宋淑娟

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083)

发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn>

E-mail: bhpess@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

开本:787×960 1/16

印张:12.25 字数:274千字

2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷

印数:2500册

ISBN 7-81077-640-1 定价:17.00元

# 国防科工委“十五”规划教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主任：张华祝

副主任：王泽山 陈懋章 屠森林

编委：王 祁 王文生 王泽山 田 蔚 史仪凯

乔少杰 仲顺安 张华祝 张近乐 张耀春

杨志宏 肖锦清 苏秀华 辛玖林 陈光祜

陈国平 陈懋章 庞思勤 武博祎 金鸿章

贺安之 夏人伟 徐德民 聂 宏 贾宝山

郭黎利 屠森林 崔锐捷 黄文良 葛小春



# 总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就;研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济做出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,



积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家、学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著,覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与技术、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入 21 世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,提升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业



走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



# 前 言

粘性流体力学是流体力学的重要分支,已经有一百多年的发展历史。粘性流体力学广泛应用于航空、航天、海洋、船舶、大气、机械、水利、化工、环境保护和动力等各领域。

粘性流体力学同其他学科一样,伴随着现代科学技术的进步而不断发展。近半个世纪以来,粘性流体力学在湍流拟序结构和计算流体动力学等方面取得了很大的进展。本书力图反映这些方面的新成果,尤其是其在航空航天方面的新应用。其实不难发现粘性流体力学在人们身边的影子,如:

① 2004年3月29日,美国在人类航空航天史上,首次试飞成功了超燃冲压推进高超声速飞行器 X-43,美国科学家称 X-43 将成为“莱特兄弟首次飞行以来航空技术的最重大突破”。在 X-43 飞行器研制的关键技术中,涉及很多粘性流体力学问题,包括湍流、转捩、激波/边界层干扰、边界层分离及其控制、靠近物面的薄激波层和熵层、由于激波压缩和粘性阻滞产生的气动加热、超燃的混合及燃烧等。

② 近 20 多年来,由于计算机技术的快速发展、计算技术的不断提高,计算流体动力学——CFD(Computational Fluid Dynamics)取得了很大的进步,逐渐成为粘性流体力学研究的主要手段之一。CFD 无论在粘性流体力学的基础理论研究还是在其工程应用中,都发挥着越来越大的作用,其特有的优点使其在湍流的直接数值模拟、转捩过程仿真、复杂流动数值模拟、分离及其控制、粘性减阻计算、非定常流动研究等方面都取得了很大的成就。

③ 近十几年来,仿生飞行、微型飞行器、游泳机器人、鲨鱼皮泳衣等受到了人们越来越多的关注。这些都是典型的粘性流体力学问题。

当然,粘性流体力学还有很多问题没有解决,如经典的湍流和转捩等基础问题。这些问题经过科学家们一百多年的努力,虽然取得了不少进展,但至今仍然还没有解决。



本书主要论述粘性流体力学的基本概念、理论、方法和现象,讲述粘性流体力学理论的实际应用,介绍现代粘性流体力学的成就和遇到的困难。其目的是:使读者在全面学习粘性流体力学基本理论的基础上,掌握粘性流体力学的分析方法和研究思路,学会实际工程中粘性流体力学的分析和计算方法,了解粘性流体力学的现代成就和存在的困难,激发读者研究粘性流体力学的兴趣和独立探索思考的能力。

作为一本面向高年级本科生和研究生的教科书,本书强调基础知识、掌握实际应用、引发思考探索、诱导读者兴趣、了解学科前沿;但不可能把粘性流体力学的前沿问题都涉及到。对粘性流体力学有兴趣的读者可以阅读书中所引用的参考文献。

本书共分8章。第1章介绍粘性流体运动所特有的物理现象:存在内摩擦,存在层流和湍流两种流态,实际物体绕流和管内流动中存在的分离现象。第2章介绍描写粘性流体运动的基本方程——Navier - Stokes方程,以及在一个特殊条件下的精确解,并导出了相似原理。第3章着重介绍边界层概念及其对流体力学的发展所起的里程碑作用,建立了边界层微分方程,求出了平板层流边界层的解析解。第4章介绍求解边界层流动的动量积分法。第5章介绍流动稳定性理论,试图从稳定性观点来解释转捩现象,详细讨论了流动稳定性及转捩的新方法和新成果。第6章介绍湍流的基本理论、雷诺应力张量、雷诺方程以及湍流模型,突出反映了湍流理论的新发展和新动态。第7章介绍将边界层理论应用于解决高速飞行器当前遇到的一些新问题。第8章介绍粘性流体力学的新手段——计算流体动力学(CFD)理论和技术的发展,讲述用数值模拟求解粘性流动问题的方法,并给出一些实例。在教学中,这些内容可视学时的多少而有所选择。

本书是针对航空航天院校流体力学、空气动力学及飞行器设计专业“粘性流体力学”课程要求所编写的教材。主要适用于高年级本科生和研究生,同时也可供高等院校、科研院所及研制设计部门有关专业人员参考。

由于作者水平所限,书中一定存在一些缺点和不足之处,恳请指正!

编者  
2005年3月

# 第 1 章 粘性流体运动概述

## 1.1 流体的粘性

如图 1.1 所示,有流体在两块无限长的平行平板之间流动。此二平板距离为  $h$ ,下板不动,上板以速度  $V$  沿图示之方向运动;二板之间的压强为恒值。实验表明,流体是“粘附”在两个壁面上的。因此,紧贴下板的那一层流体速度为 0,紧贴上板的那一层流体速度为  $V$ 。实验还表明,保持上板以恒速  $V$  运动所需要的力,是与  $\frac{V}{h}$  成正比的。这就是摩擦力或剪切力。单位面积平板所受的剪切力(即剪应力)以  $\tau$  表示,则  $\tau$  与  $\frac{V}{h}$  成正比。实验又表明,两板之间的速度分布规律是直线,即

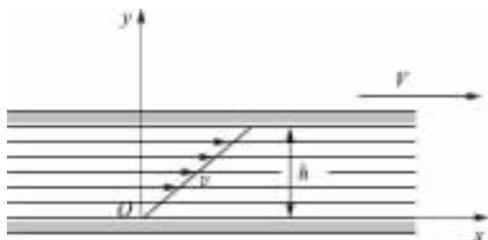


图 1.1 粘性流体在平板之间的速度分布

$$v(y) = \frac{y}{h}V \quad (1.1)$$

因此,  $\tau$  与  $\frac{V}{h}$  成正比,也就是  $\tau$  与  $\frac{dv}{dy}$  成正比。若以  $\mu$  表示这个比例系数,则流体所受的摩擦应力或剪应力  $\tau$  可以写为

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.2)$$

这个比例系数  $\mu$  称为粘性系数,其大小与流体性质有关,还与温度有关。水和酒精这类流体的  $\mu$  值较小,而滑油或甘油这类粘稠流体的  $\mu$  值则较大。

式(1.2)称为“牛顿摩擦定律”,也可看做是粘性的定义。粘性系数  $\mu$  的单位为

$$[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \quad (1.3)$$

粘性系数  $\mu$  与密度  $\rho$  的比,称为运动粘性系数,记为  $\nu$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.4)$$

式中,  $\nu$  的单位为  $\text{m}^2/\text{s}$ ,与力及质量无关,是运动学中的量。

水和空气的  $\mu$  与  $\nu$  的数值参见表 1.1。



表 1.1 水和空气的粘性系数及运动粘性系数

$t/^\circ\text{C}$	水			空气(0.099 MPa)		
	$\rho$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\mu \times 10^{-6}$ /( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	$\nu \times 10^{-6}$ /( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	$\rho$ /( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\mu \times 10^{-6}$ /( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	$\nu \times 10^{-6}$ /( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
-20	—	—	—	1.395	16.1	11.5
-10	—	—	—	1.344	16.6	12.4
0	999.8	1 781	1.785	1.293	17.1	13.2
10	999.7	1 307	1.306	1.248	17.6	14.1
20	998.2	1 002	1.003	1.205	18.1	15.0
40	992.2	653	0.658	1.128	19.0	16.8
60	983.2	466	0.474	1.060	20.0	18.7
80	971.8	354	0.364	1.000	20.9	20.9
100	958.4	282	0.294	0.946	21.8	23.1

气体的  $\mu$  随温度的变化也可以用解析公式来近似表达。空气的  $\mu$  与  $T$  的关系式常用萨瑟兰(Sutherland)公式表示为

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad (1.5)$$

式中,  $\mu_0$  是  $T = T_0 = 288.15 \text{ K}$  时的  $\mu$  值;  $C$  是一个常数, 取  $110.4 \text{ K}$ 。此式在应用时有时不方便, 代之以一个指数关系近似表达为

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n \quad (1.6)$$

式中的指数  $n$  在不同的温度范围内应取不同的值。在  $90 \text{ K} < T < 300 \text{ K}$  范围内,  $n$  取  $\frac{8}{9} = 0.8889$ ; 若  $400 \text{ K} < T < 500 \text{ K}$ , 则取  $n \approx 0.75$ 。

由表 1.1 可以看出, 空气的粘性(或粘性系数)是很小的。所以在处理空气的许多流动问题时, 第一步可以不计其粘性作用。这种不考虑其粘性的流体, 称为理想流体。

## 1.2 雷诺实验及相似原理

1.1 节介绍了流体的粘性以及计算粘性应力的牛顿摩擦应力公式(1.2), 此公式是否适用于粘性流体在任何情况下的流动呢? 不适用, 该式只适用于层流, 不适用于湍流。那么, 层流和湍流又是怎么回事?

英国人雷诺(Osborne Reynolds)在 1883 年用图 1.2 所示设备对粘性流体(即实际流体)的流态进行观察, 使水由水箱进入供观察流态用的试验管(圆玻璃管)内。为了清楚地看到流



体在管内的运动情况,他将颜色水通过一根细针管引入主流中。打开节门后,即可观察水在管内的运动情况。

多次实验表明,在一定的条件下,管内的染色液体并不与主流相掺混,而是像图 1.3 那样,染色液体伸展为一根细线,看起来好像一根拉紧了弦一样。如果用两三根针管将染色液引入主流,则可看到主流中有两三条染色线。显然,这只有当管内一切流体微团皆以互相平行(与管轴也平行)的方向运动时才会这样。正因为如此,流体微团之间才互不掺混,并以层状的方式运动。这种流态,称为层流。

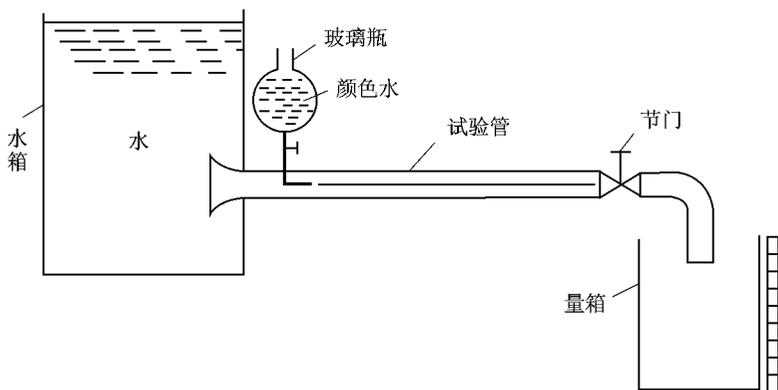


图 1.2 雷诺实验

在图 1.2 所示实验设备中,层流流态发生在节门开度较小的情况之下,也就是管内流速较低的情况。当节门开度加大到一定程度之后(流速增大了),层流流态开始发生变化。管内的染色流迹起初略起微波,继而产生个别漩涡,接着染色流迹被冲毁并与主流掺混起来,如图 1.4 所示。这种物理图画表明,在导管中,流体微团必有不规则的运动或所谓脉动运动(包括横向与纵向脉动)存在,否则不会出现这么紊乱的流动现象。这种具有不规则运动的流态,称为湍流(或紊流)。从层流到湍流的变化,称为转捩。

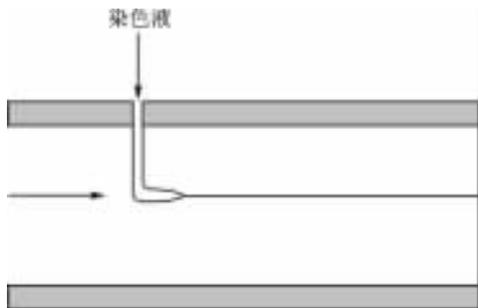


图 1.3 层流流谱

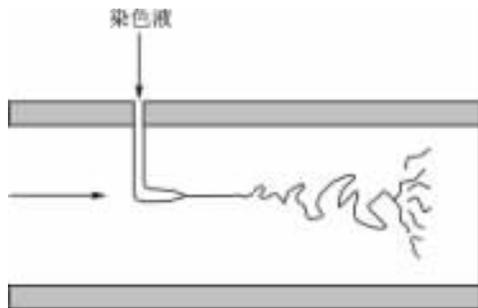


图 1.4 湍流流谱



多次实验发现,管中湍流的出现不是单纯地取决于平均流速  $V$  或管直径  $D$ ,而是取决于所谓雷诺数这样一个组合数,符号是  $Re$ ,定义为

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} \quad (1.7)$$

或

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

这是一个量纲一的数。在管子直接与水箱连接、入口处不用圆角的条件下,实验发现,当

$$Re \geq 2300 \quad (1.8)$$

时,就会出现湍流。这个数值称为临界雷诺数,或转捩雷诺数,以  $Re^*$  表示。当  $Re \geq Re^*$  时,就会出现湍流。这个规律是有普遍意义的,即不论管内介质是水还是空气或是其他流体,只要  $Re \geq Re^*$ ,其流态一定是湍流。

实验还表明,湍流的出现与进入管子的流体原先是否安静也有很大关系。如果人为地给以扰动,则可能提前出现湍流。如果进口处有很好的圆角,且水箱中的流体几乎又是完全静止,则  $Re^*$  甚至可以高达  $10^5$ 。因此,有时把 2300 称为下临界雷诺数。

实验还表明,从层流到湍流的过渡并不是一瞬间在全管之间同时出现的。当流动接近于临界状态时,层流是先在一小段上受到破坏,随着  $Re$  继续加大,才完全变成湍流。

总之,从雷诺实验可知,粘性流体的运动可以分成两种截然不同的流态:一种是层流,另一种是湍流。

至于说为什么当  $Re \geq Re^*$  时就出现湍流,到目前为止,学术界尚未完全弄清楚。有一种理论是从运动稳定性来解释的。说的是,当  $Re$  达到一定的数值以后,若有任何偶然的外界因素对层流运动施以极微弱的扰动,那么,随着时间的进展,扰动强度将会迅速增大,从而使层流运动失去稳定性;而在  $Re$  值较小时( $Re < Re^*$ ),层流运动则是稳定的。不过,本课程不拟对此做深入的讨论。下面,举例说明怎样判断流态。

**例 1.1** 某种冷却剂在环形圆管内流动(图 1.5),管的内径  $D=155$  mm,冷却套缝隙  $\delta=2$  mm,冷却剂的质量流量  $\dot{m}=1.02$  kg/s,密度  $\rho=154.08$  kg/m<sup>3</sup>,运动粘性系数  $\nu=0.25 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,试判断冷却套中的流态。

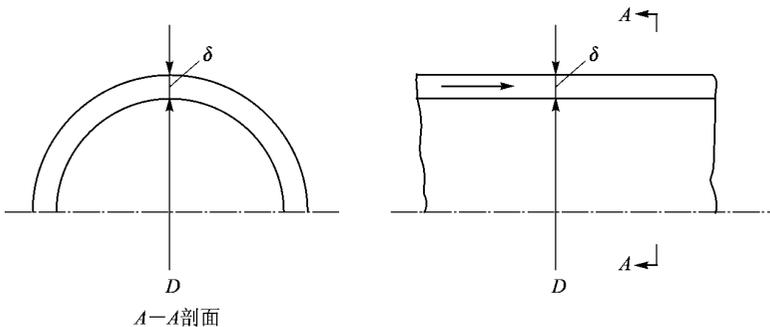


图 1.5 环形管内的流动



解：对于这种环形截面管，不能用内径  $D$  代到雷诺数中去计算，而要用“水力直径” $d_h$  代入  $Re$  的表达式。水力直径  $d_h$  是通道的截面积被湿周周长除的 4 倍，即

$$d_h = 4 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}[(D + 2\delta)^2 - D^2]}{\pi(D + 2\delta) + \pi D} = 2\delta = 4 \text{ mm}$$

因此

$$Re = \frac{V \cdot d_h}{\nu} = \frac{\frac{\dot{m}}{\rho \cdot \pi D \delta} \cdot d_h}{\nu} = 108\,758 > 2\,300$$

可见  $Re > Re^*$ ，由此判断，流态为湍流。

粘性流体的运动有截然不同的两种流态，但 1.1 节所介绍的牛顿摩擦定律式(1.2)只适用于层流。下面针对圆管内的层流流动，应用式(1.2)求出其速度分布及沿程损失。

### 1.3 圆管层流流动——Hagen - Poiseuille 流动

现在求圆管层流的速度分布。参看图 1.6，有粘性流体在半径为  $R$  的圆管内流动。任意取一块半径为  $r$ 、长为  $L$  的柱形流体作为研究对象。假设流动是定常流，这时，作用在所研究

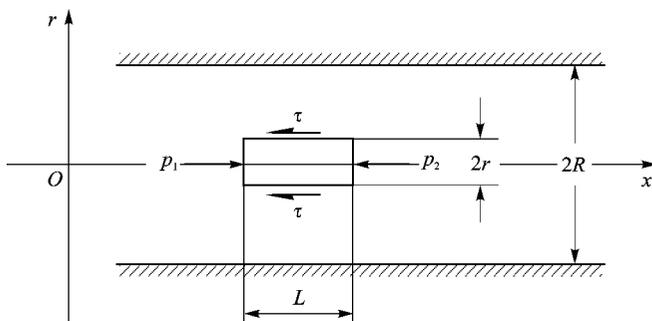


图 1.6 圆管层流流动分析

流体上的力应处于平衡状态。这块流体受的力有两个：一是压力，二是粘性力。由于只考虑柱形流体沿轴线  $Ox$  方向的平衡，所以重力就不予考虑了。这时，压力是

$$(p_1 - p_2)\pi r^2$$

粘性力是

$$\tau \cdot 2\pi rL = -\mu 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr}$$

此处用负号是因为  $v$  随  $r$  的增大而减小，因而  $\frac{dv}{dr}$  是负值的缘故。处于平衡状态时，此二力的代



数和应为零,于是下式

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - \tau \cdot 2\pi rL = 0$$

成立,由此得

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + \mu \cdot 2\pi rL \cdot \frac{dv}{dr} = 0$$

或

$$-dv = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L} \cdot r \cdot dr$$

积分得

$$-v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2 + C$$

因  $r=R$  时,  $v=0$ , 得积分常数为

$$C = -\frac{p_1 - p_2}{4\mu L} R^2$$

代入前式,即得圆管层流的速度分布规律为

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (1.9)$$

当  $r=0$  时,  $v=v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} R^2$ 。所以,式(1.9)又可写为

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1.10)$$

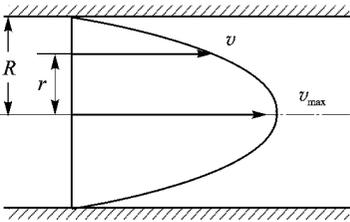


图 1.7 圆管层流速度分布

式中,  $v_{\max}$  是流体在管轴处的速度,它在一个管截面上是最大值。此式表明,在粘性不可压定常层流中,沿圆管任何一个截面上的速度是按抛物线规律分布的。图 1.7 示出此分布情况。

有了速度分布规律,可以求流动损失,即摩擦损失;它与一些局部现象(如管截面突然放大、突然收缩、拐弯等)没有关系,称为沿程损失。下面,具体推导摩擦系数(或称沿程损失系数)的表达式。

流过任一截面的体积流量  $q_V$  是

$$q_V = \int_0^R v \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi}{2\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r \cdot dr = \frac{p_1 - p_2}{L} \cdot \frac{\pi}{8\mu} \cdot R^4 \quad (1.11)$$

体积流量与平均速度  $V$  的关系是

$$q_V = \pi R^2 \cdot V$$

令此二式相等,得



$$\pi R^2 V = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

若以  $\Delta p$  表示  $(p_1 - p_2)$ , 即得

$$\Delta p = \frac{8L \cdot \mu V}{R^2} = \frac{64\mu}{\rho V D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (1.12)$$

这个  $\Delta p$  与摩擦系数有什么关系呢? 从压力与粘性力平衡的关系可得

$$\Delta p = \tau \cdot \frac{2L}{R} = 4\tau \cdot \frac{L}{D}$$

如将  $\tau$  表示为

$$\tau = f \frac{\rho V^2}{2}$$

式中,  $f$  是摩擦系数, 即可得到

$$\Delta p = 4f \cdot \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} \quad (1.13)$$

对比式(1.12)与式(1.13)得

$$4f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re} \quad (1.14)$$

此处,  $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ 。由式(1.14)可见, 摩擦系数  $f$  并不是常数, 它是雷诺数  $Re$  的函数, 在定常不可压圆管层流问题中,  $f$  是与管流的雷诺数成反比的。这里的记号  $4f$ , 在其他书上称为“损失系数”, 记为  $\lambda$ 。

以上所述的圆管层流流动, 称为哈根-泊肃叶 (Hagen - Poiseuille) 流动, 式(1.14)称为 Hagen - Poiseuille 公式。下面举例说明层流沿程损失的计算方法。

**例 1.2** 参看图 1.8, 这是一个飞机润滑系统的部分示意图。已知, 飞机在 16 km 高度作水平飞行, 从油箱到泵进口这一段管长  $l = 2$  m, 管直径  $d = 18$  mm, 油箱液面与泵中心线的距离为  $z = 0.7$  m, 油箱液面上方为当地大气压强。为了保证在发动机处于最大工作状态下的散热, 要求滑油的流量为  $q_v = 16$  L/min。滑油为 MK-8, 其运动粘性系数  $\nu = 0.11 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s, 密度  $\rho = 900$  kg/m<sup>3</sup>, 重度为  $\gamma$ 。不计局部损失, 试求油泵进口截面 1-1 处压强是多大?

**解:** 滑油在管内的平均流速为

$$V = \frac{4q_v}{\pi d^2} = \frac{4 \times 16 \times 10^{-3}}{\pi \times 1.8^2 \times 10^{-4} \times 60} \text{ m/s} = 1.048 \text{ m/s}$$

雷诺数为

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.048 \times 0.018}{0.11 \times 10^{-4}} = 1715$$

由此得知, 管内流态是层流, 计算损失时需用层流公式。

摩擦损失(即沿程损失)为

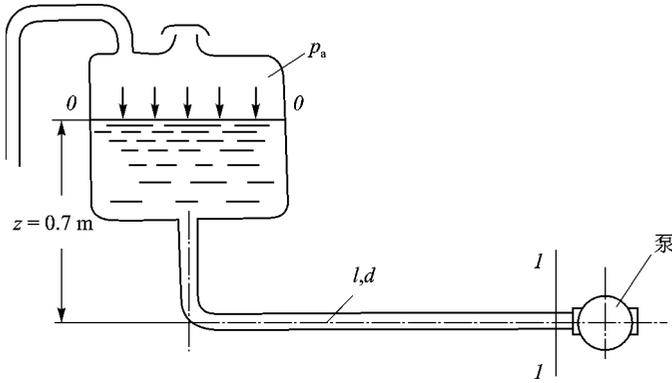


图 1.8 计算沿程损失

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = 4f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} = \left( \frac{64}{1715} \times \frac{2.0}{0.018} \times \frac{1.048^2}{2 \times 9.8} \right) \text{ m} = 0.232 \text{ m}$$

泵进口处的压强用  $0-0$  及  $1-1$  截面之间的伯努利方程计算得

$$z + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \beta_2 \frac{V^2}{2g} + \frac{\Delta p}{\gamma}$$

式中,  $\beta_2$  是考虑速度分布不均匀性的一个系数, 层流时, 数值为 2。由此得

$$\frac{p_1}{\gamma} = z + \frac{p_a}{\gamma} - \beta_2 \frac{V^2}{2g} - \frac{\Delta p}{\gamma}$$

此处,  $\frac{p_a}{\gamma}$  中的  $p_a$  是大气压强, 在海平面处是  $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ; 在 16 km 高空处应是  $0.1035 \times 10^5 \text{ Pa}$  (相当于 0.07764 m 水银柱高度)。所以, 折合成滑油柱高度,  $p_1/\gamma$  应是

$$\frac{p_1}{\gamma} = \left( 0.70 + 0.07764 \times \frac{13.6}{0.9} - \frac{2 \times 1.048^2}{2 \times 9.81} - 0.232 \right) \text{ m} = 1.5294 \text{ m (滑油柱高度)}$$

因此, 泵的进口压强为

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma \cdot \frac{p_1}{\gamma} \\ &= 900 \times 9.8 \times 1.5294 \text{ Pa} \\ &= 13489.3 \text{ Pa} \approx 0.1349 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

由 Hagen - Poiseuille 流动的算例来看, 层流问题不难处理。但是, 湍流现象比较复杂, 理论上不太好处理, 像研究损失系数这样的问题, 往往需要做实验。但是, 实验应怎样安排? 要测哪些量? 怎样整理实验结果? 研究表明, 要想把个别条件下的实验结果加以推广, 只有对那些所谓相似的物理现象才能做到。

什么是相似的物理现象? 首先定义几何相似。参看图 1.9, 那些对应边成同一比例且对应角度相等的几何图形, 叫相似形。图 1.9 中所示两个三角形的边长和角度具有下述关系。

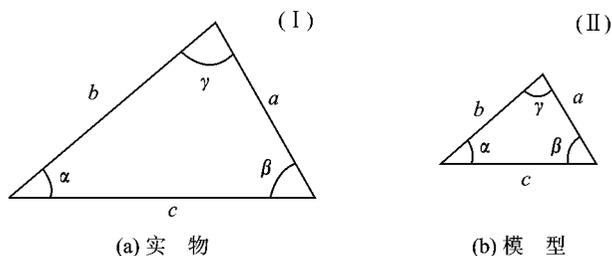


图 1.9 几何相似

$$\frac{a_{\text{I}}}{a_{\text{II}}} = \frac{b_{\text{I}}}{b_{\text{II}}} = \frac{c_{\text{I}}}{c_{\text{II}}}$$

$$\alpha_{\text{I}} = \alpha_{\text{II}}, \quad \beta_{\text{I}} = \beta_{\text{II}}, \quad \gamma_{\text{I}} = \gamma_{\text{II}}$$

这两个三角形就是相似形。也就是说,若将图 1.9(b)的各边放大 $\left(\frac{a_{\text{I}}}{a_{\text{II}}}\right)$ 倍,就与图 1.9(a)相重合。

流体力学上的几何相似是指约束流体运动的物体表面的几何形状相似。这个物体,可以是管道,也可以是机身或机翼。但不管是什么东西,其对应尺寸必须成同一比例。例如,若图 1.10中两个管道几何相似,就必须具有下述关系,即

$$\frac{l_{\text{I}}}{l_{\text{II}}} = \frac{d_{1\text{I}}}{d_{1\text{II}}} = \frac{d_{2\text{I}}}{d_{2\text{II}}} \quad (1.15)$$

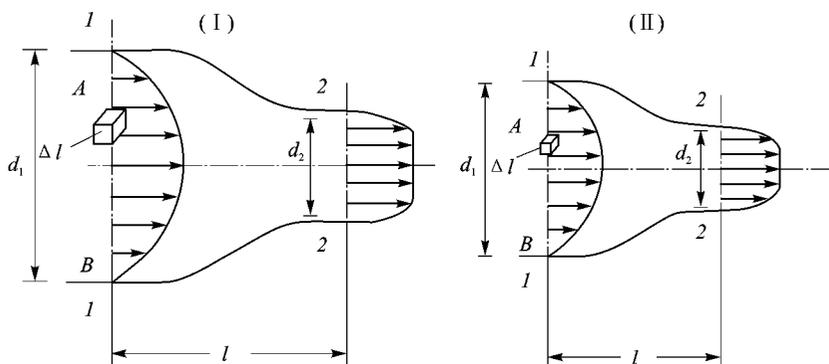


图 1.10 几何相似的管道及运动相似的流场

在约束着流体运动的物体几何相似的前提下,如果流场上对应点处的速度成同一比例,则称为运动相似。例如图 1.10 中,下述关系成立

$$\frac{v_{A\text{I}}}{v_{A\text{II}}} = \frac{v_{B\text{I}}}{v_{B\text{II}}} \quad (1.16)$$

在其他对应点,速度(或各分速)的比值也符合上述关系,则这两个流场就是运动相似的流场。



也可以说,两个运动相似流场上对应的流线形状是几何相似的。

若作用在运动相似流场中对应流体微团上的力成同一比例,而且力的作用方向相同,则称为动力相似。例如图 1.10 中,微团 A 受有惯性力  $F$ ,粘性力  $T$ ,重力  $G$  及压力  $P$  的作用,对于动力相似的 I 及 II 流场而言,有关系

$$\frac{F_{A\text{I}}}{F_{A\text{II}}} = \frac{T_{A\text{I}}}{T_{A\text{II}}} = \frac{G_{A\text{I}}}{G_{A\text{II}}} = \frac{P_{A\text{I}}}{P_{A\text{II}}} \quad (1.17)$$

或

$$\left(\frac{P}{F}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{P}{F}\right)_{\text{II}}, \quad \left(\frac{T}{F}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{T}{F}\right)_{\text{II}}, \quad \left(\frac{G}{F}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{G}{F}\right)_{\text{II}} \quad (1.18)$$

这就是说,作用在对应微团上的力多边形是相似的。

如果所考察的所有力都成同一比例,这样的流场称为完全相似流场。例如,满足式(1.17)或式(1.18)的流场,就是完全相似流场;而只有一部分起主要作用的力彼此成比例,但别的力不成同一比例的流场,称为部分相似流场或非完全相似流场。例如

$$\left(\frac{P}{F}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{P}{F}\right)_{\text{II}}, \quad \left(\frac{T}{F}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{T}{F}\right)_{\text{II}}; \quad \text{但} \quad \left(\frac{G}{F}\right)_{\text{I}} \neq \left(\frac{G}{F}\right)_{\text{II}}$$

就是部分相似流场。

将由式(1.17)或式(1.18)所表示的动力相似条件具体化,就可以得到流场动力相似的具体条件或所谓相似准则。取边长为  $\Delta l$  的立方体流体微团,它所受的惯性力为

$$\begin{aligned} \Delta F &= K \cdot \rho(\Delta l)^3 \cdot \frac{dv}{dt} = K\rho(\Delta l)^3 \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \\ &K\rho \cdot (\Delta l)^3 v \cdot \frac{dv}{ds} \end{aligned}$$

此处  $K$  是与微团几何形状有关的量纲一的比例系数,  $ds$  是微团的位移。

将上式同时乘以和除以  $l^2$  及  $V^2$ , 得

$$\Delta F = K \cdot \frac{\Delta l}{ds} \cdot \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 \cdot \frac{v}{V} d\left(\frac{v}{V}\right) \cdot V^2 l^2$$

式中,  $l$  是管长,  $V$  是某截面处的平均流速。此式等号右边前 5 项对于几何相似及运动相似的流场而言,在对应微团上的数值是一样的。因此,可以将上式写成

$$\Delta F \sim \rho V^2 l^2 \quad (\text{本书用符号“}\sim\text{”表示数量级,例如, } x \sim \delta \text{ 表示“}x\text{ 的数量级是 } \delta\text{”})$$

但

$$l^2 \sim A$$

这里  $A$  是管截面积, 故得

$$\Delta F \sim \rho V^2 A$$

既然每一个流体微团所受的惯性力与  $\rho V^2 A$  成正比, 则整个流束所受的惯性力  $F$  亦必与  $\rho V^2 A$  成正比, 即



$$F \sim \rho V^2 A \quad (1.19)$$

同理,微团  $A$  所受的压力为

$$\Delta P = p \cdot l^2 \sim pA$$

因而整个流束所受的压力亦与  $pA$  成正比,即

$$P \sim pA \quad (1.20)$$

由式(1.18)的第1个式子有

$$\left(\frac{P}{F}\right)_I = \left(\frac{P}{F}\right)_{II}$$

将式(1.19)及式(1.20)代入此式,得

$$\left(\frac{pA}{\rho V^2 A}\right)_I = \left(\frac{pA}{\rho V^2 A}\right)_{II} \quad (1.21)$$

消掉  $A$ ,并假设流场 I 及流场 II 上是同一种介质,其  $\gamma$  值相同,则得

$$\left(\frac{\gamma p}{\rho V^2}\right)_I = \left(\frac{\gamma p}{\rho V^2}\right)_{II}$$

由此得

$$Ma_I = Ma_{II} \quad (1.22)$$

由此可见,相似流场上的马赫数必相等。这是流场相似的一个条件,也是一个相似准则。这也是人们只强调速度和声速的比值,而不强调速度的绝对值的原因。

如果用管长  $l$  上的压强降落  $\Delta p$  代替式(1.21)中的  $p$ ,则得

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_I = \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)_{II} \quad (1.23)$$

即

$$\zeta_I = \zeta_{II} \quad (1.24)$$

式中,  $\zeta$  为局部损失系数。式(1.24)直接表明局部损失系数相等。沿程损失也是一样的,因式(1.23)相当于

$$\left(4f \cdot \frac{l}{d}\right)_I = \left(4f \cdot \frac{l}{d}\right)_{II}$$

式中  $d$  为管直径。对于几何相似的流场而言

$$\left(\frac{l}{d}\right)_I = \left(\frac{l}{d}\right)_{II}$$

由此得

$$(4f)_I = (4f)_{II} \quad (1.25)$$

或

$$(\lambda)_I = (\lambda)_{II}$$

即沿程损失系数值也应该相等。总而言之,相似流场的损失系数值相等。所以,管流损失的实



验数据都应当整理成损失系数,这样就可以把由模型实验测量得到的  $\zeta, \lambda$  或  $4f$  值直接用到实物流场上去。

又考虑到对应流体微团所受的粘性力与惯性力之比相等,则可得

$$\left( \frac{\rho V^2 A}{\mu V A} \right)_I = \left( \frac{\rho V^2 A}{\mu V A} \right)_{II}$$

消掉  $V \cdot A$  以后,得

$$\left( \frac{\rho V d}{\mu} \right)_I = \left( \frac{\rho V d}{\mu} \right)_{II}$$

即

$$Re_I = Re_{II} \quad (1.26)$$

可见,考虑惯性力及粘性力时,相似流场的雷诺数必须相等。这是流场相似的另一个条件。这样就可以理解,为什么要把管流损失的模型实验数据整理成雷诺数  $Re$  的函数了。因  $4f$  是  $Re$  的函数,只有对  $Re$  相同的流场,才能直接转用  $4f$  值。所以,必须保证模型流场与实物流场的雷诺数  $Re$  相同。

雷诺数  $Re$ , 马赫数  $Ma$ , 损失系数  $4f, \lambda$  或  $\zeta$ , 在相似流场中的数值是一样的。或再概括而言:相似现象中的同名相似准则必相等,这就是相似第一定理的内容。

从式(1.26)的来源看出,雷诺数的物理意义是它代表了流场上惯性力与粘性力的比。 $Re$  大,表示惯性力比粘性力大得多,比如说  $Re=10^6$ ,这时,在理论上处理问题时就可以把粘性力略去不计;而  $Re$  小,就表示惯性力与粘性力的数量级比较接近了,比如说,  $Re=1$ ,说明惯性力与粘性力是同一数量级,二者都很重要,必须同时考虑;如果  $Re \ll 1$ ,粘性力比惯性力大得多,在理论上处理问题时就可以把惯性力略去不计。

从上面提到的几个准则可以看出,准则是具有不同性质的,像  $Re$  及  $Ma$  中所包含的量,是给定的或已知的,这是属于已定准则。像  $\zeta$  及  $4f$  中所包含的量,如  $\Delta p$ ,是待测的,是未知量,这种准则属于待定准则。因为相似现象的物理本质是一样的,差别仅仅是现象中出现的同名物理量数值大小不同,但都按一定的比例放大或缩小,因此,描写相似现象的微分方程式是一样的。根据这一点,如果把实验结果按准则方程式的形式来整理,就反映了现象的相似。所谓准则方程式,就是待定准则与已定准则的函数关系式。

相似第二定理的内容是,相似现象具有相同的准则方程式。把层流的粘性损失规律整理成

$$4f = \frac{64}{Re} \quad (1.27)$$

就是一个最简单的准则方程式, $4f$  是待定准则, $Re$  是已定准则。湍流时,沿程损失规律整理成

$$4f = f\left(Re, \frac{\Delta}{d/2}\right) \quad (1.28)$$



用图线表达则如图 1.11 所示,式(1.28)也是一种准则方程式。这里的  $\frac{\Delta}{d/2}$  是相对粗糙度( $d$  是管直径)。由此看出,凡是准则方程式中所涉及的物理量,都是需要测量的,应保证用实验设备及仪器获得这些量。做完实验后,按准则方程式整理实验结果,就可以把在个别情况下做的实验结果推广到所有相似的现象上去。

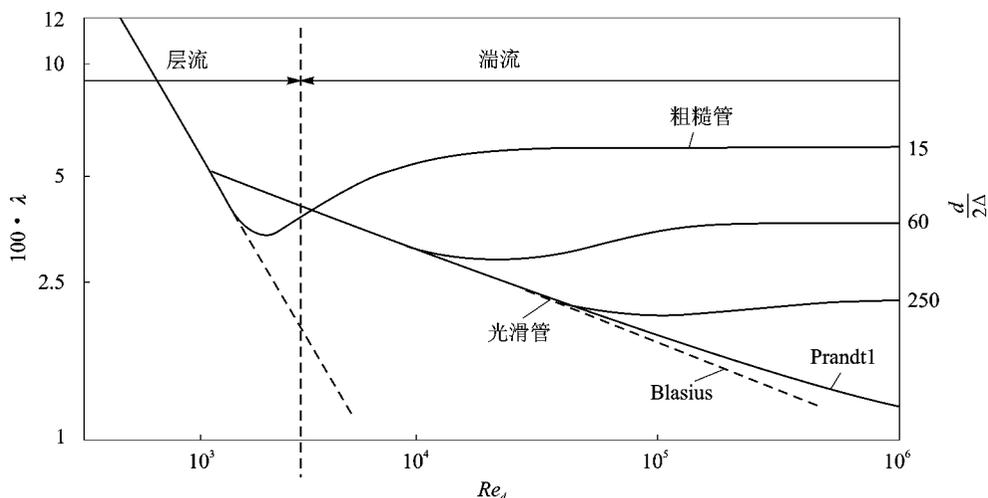


图 1.11 尼古拉茨曲线

但是,对于完全相似的流场而言,要满足的准则是比较多的。是不是在任何情况下都必须满足所有的准则呢?不一定,例如,粘性不可压流体流动时,压缩性影响就可以完全不考虑,因而,马赫准则就不必考虑,只要考虑雷诺准则就行了。对于可压的理想流场而言,粘性力不存在,雷诺准则不必考虑,只要考虑马赫准则。因此,对具体问题而言,只要抓住主要因素研究部分相似就行了。

究竟要满足什么条件,物理现象才一定相似?相似第三定理说,已定准则相等的现象必是相似现象。这是相似第一定理的逆定理。具体到不可压流在圆管中的损失问题而言,只要  $Re$  及  $\frac{\Delta}{d/2}$  相等,就可以保证模型流场与实物流场一定是相似流场。

如果不做上述相似性分析,而仅仅做量纲分析,也可以得到雷诺准则。此方法是说,任何一个物理关系式,与所采用的单位系统(单位制)是无关的。物理关系式的这一性质,称为完整性。保证完整性的充分必要条件是量纲齐次,即量纲一化。在管道流动问题中,决定着流动的物理量有管直径(特征尺寸) $d$ ,流速  $V$ ,流体密度  $\rho$  和流体的粘性系数  $\mu$ 。现在提出问题:是否存在如下形式的一个量纲一的组合量

$$V^a d^b \rho^c \mu^d \quad (1.29)$$



如果存在,此组合量可以写成

$$V^{\alpha} d^{\beta} \rho^{\gamma} \mu^{\delta} = F^0 L^0 T^0 \quad (1.30)$$

式中,  $F, L, T$  是 3 个基本量, 分别代表力、长度和时间。不失一般性, 假设  $\alpha=1$ , 上式可写为

$$V^{\alpha} d^{\beta} \rho^{\gamma} \mu^{\delta} = \frac{L}{T} L^{\beta} \left( \frac{FT^2}{L^4} \right)^{\gamma} \left( \frac{FT}{L^2} \right)^{\delta} = F^0 L^0 T^0$$

因  $F, L, T$  是互相独立的, 所以可由上式得出以下 3 个关系式, 即

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= 0 \\ 1 + \beta - 4\gamma - 2\delta &= 0 \\ -1 + 2\gamma + \delta &= 0 \end{aligned}$$

由此解得

$$\begin{aligned} \beta &= 1 \\ \gamma &= 1 \\ \delta &= -1 \end{aligned}$$

意即

$$V^{\alpha} d^{\beta} \rho^{\gamma} \mu^{\delta} = \frac{VD\rho}{\mu} \quad (1.31)$$

这就证明了上述 4 个量  $V, d, \rho, \mu$  的量纲一组合是存在的, 它恰好是雷诺数

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad \text{或} \quad \left( Re = \frac{V d}{\nu} \right) \quad (1.32)$$

在实验工作中, 要确定圆管流动由层流转捩为湍流的条件, 只需要做一次实验测出某一个圆管出现转捩时的  $\rho, V, d, \mu$  以确定临界雷诺数, 就可以作为任何圆管流动出现转捩的判别准则。

## 1.4 位流理论与实验结果比较

理想流体绕流一个圆柱体时, 其流线谱是位流流谱, 如图 1.12 所示, 既上下对称, 又左右对称。图中的点  $A$  和  $C$  分别为前、后驻点, 流速为零; 点  $B$  为最低压强点, 流速最大, 该点附近的流线最密。绕此圆柱体的压强分布如图 1.13 所示, 压强系数  $C_p$  为

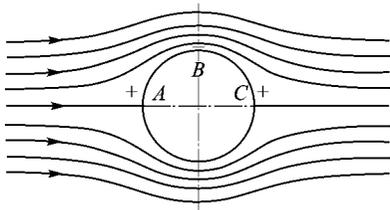


图 1.12 绕圆柱体的位流流谱

$$C_p = 1 - 4\sin^2 \theta$$

图中的实线是在  $\theta=180^\circ$  处对称的两条正弦平方曲线。由此对称的压强分布曲线可以看出, 这个圆柱体既不受到升力作用, 也不受到阻力作用, 于是出现了达朗伯 (d'Alembert) 疑题, 即从实践中明明知道物体在流体中运动



时一定受到阻力,但理论上却算不出阻力,这是很矛盾的。其根本原因在于位流理论没有计及流体的粘性。

计及粘性时,图 1.12 中的流谱上下还是对称的,但前后不对称了,后面出现了分离区(图 1.14)。相应的  $C_p$  分布曲线(图 1.13 中标有  $Re$  值的 3 条虚线)也不对称了,而与雷诺数  $Re$  有关了。

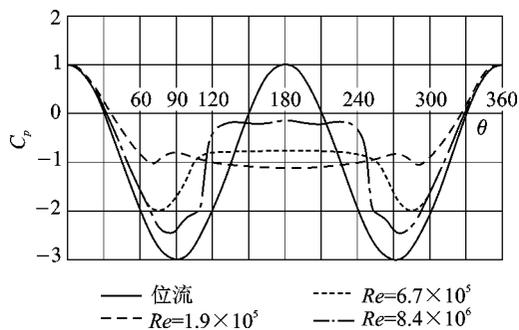


图 1.13 绕圆柱体的压强分布

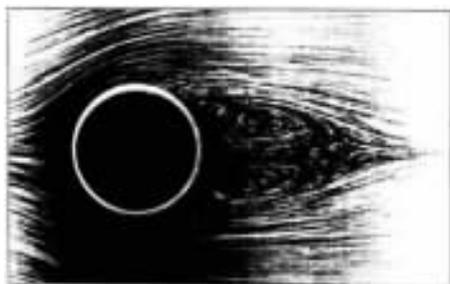


图 1.14 绕圆柱体的粘流分离流谱( $Re=26$ )

如果物体的外形不是圆柱体,而是一个流线体,情况会好得多。如图 1.15 所示,其  $C_p$  分布的位流值与实验值的差别是很小的,只是后缘附近差别较大,因为此处毕竟有一个小的分离区。

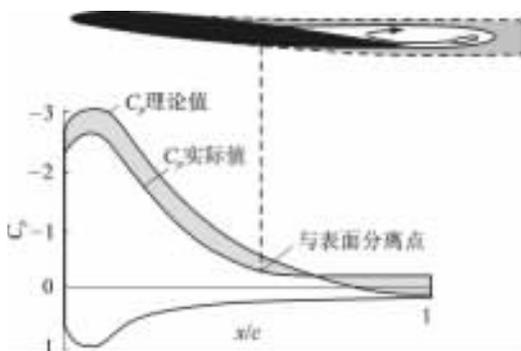


图 1.15 绕流线体的压强分布

## 习 题

1.1 直径为 1.4 cm 的圆球置于速度为 18 m/s 的自由流 ( $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 101 kPa) 中。如果这种流



体是(a)空气,(b)水,(c)氢,试求此圆球的雷诺数(以直径为基准)是多大?

- 1.2 旋风可以用一种“两部分旋转流动”在圆柱坐标系中表达,其  $v_r = v_z = 0$ , 但  

$$v_\theta = \omega \cdot r \quad (\text{当 } r \leq R \text{ 时}), \quad v_\theta = \omega \cdot R^2 / r \quad (\text{当 } r \geq R \text{ 时})$$
 试求每一部分流动的涡量及应变率。

- 1.3 一种二维非定常流的速度分量为

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{y}{1+2t}$$

试求  $t=0$  时通过点  $(x_0, y_0)$  的流线方程。

- 1.4 一种混合气在  $20^\circ\text{C}$  及  $101\text{ kPa}$  之下,由  $23\%$   $\text{CO}_2$ ,  $14\%$   $\text{O}_2$ ,  $63\%$   $\text{N}_2$  组成,各成分的属性如下:

组成气体	摩尔分数	$\mu/(\text{Pa} \cdot \text{s})$	$\gamma/(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
$\text{CO}_2$	0.23	$1.37\text{E}-5$	0.014 6
$\text{O}_2$	0.14	$1.92\text{E}-5$	0.024 4
$\text{N}_2$	0.63	$1.66\text{E}-5$	0.024 2

表中  $\gamma$  是比热比。试求此混合气的粘性系数及导热系数。

- 1.5 两块水平放置的无限长平板,相距  $h$ ,两板之间是粘性空气。如下板不动,上板以恒速  $V$  沿板面运动。假设沿流动方向没有  $\partial p / \partial x$ 。(a) 求此二板间速度变化的表达式;(b) 若  $T=320\text{ K}$ ,  $v=30\text{ m/s}$ ,  $h=0.01\text{ m}$ ,试求上板及下板所受的剪应力。
- 1.6 如果习题 1.5 中的两块平板都不动,但沿  $x$  方向有压强梯度,  $dp/dx = \text{常数}$ 。(a) 求此二板间速度变化的表达式;(b) 求以  $dp/dx$  为参变量的剪应力表达式。
- 1.7 某飞机液压系统管路中的流体是 AMΓ-10,其运动粘性系数  $\nu = 0.42\text{ cm}^2/\text{s}$ ,管直径  $d=12\text{ mm}$ ,体积流量  $q_V = 0.25\text{ L/s}$ 。(a) 求管内流态;(b) 当运动粘性系数  $\nu$  达何值时,流态会发生改变。

# 第 2 章 粘性流体力学基础

## 2.1 应力及其符号规定 应力张量

### 2.1.1 应力和应力张量

当流体流动时,若在流体中任取一表面为  $S$ 、体积为  $V$  的流体,如图 2.1 所示,则由于周围流体的作用,沿  $V$  的表面  $S$  上,每一点都将受有表面力。在  $S$  上任一点  $A$  处取微元面积  $\Delta S$ ,设此  $\Delta S$  所受的表面力为  $\Delta P$ 。如果流体是理想流体,则  $\Delta P$  的方向是沿此表面的法线方向;而在粘性流体中, $\Delta P$  的方向和大小均取决于流体的运动情况。仿照理想流体中压强的定义,点  $A$  的应力定义为

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

显然,应力  $p$  是一向量,其方向与  $\Delta P$  相同,是待定的。将  $p$  分别在过点  $A$  的法线方向和切线平面内分解,可得  $p_n$  和  $p_t$ ,其大小分别为  $p_n$  和  $p_t$ 。过同一点  $A$ ,如  $\Delta S$  取得不同,应力  $p_n$  和  $p_t$  也是不同的。

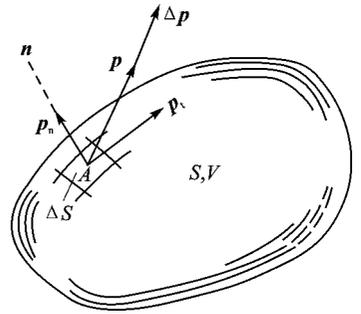


图 2.1 一点处的表面力

### 2.1.2 微元矩形六面体表面上的应力及符号规则

如图 2.2 所示,取一个微元矩形六面体  $dx dy dz$ ,其各个表面分别平行于坐标平面。现做如下规定。

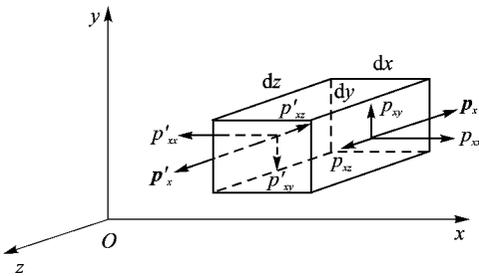


图 2.2 流体微团表面上的应力

正表面——外法线方向与坐标轴正向相同的表面,例如图 2.2 中由实线围成的 3 个表面。

负表面——外法线方向与坐标轴负向相同的表面,图 2.2 中的其他 3 个表面即为此种表面。

再规定, $x$  正表面上的应力  $p_x$  的 3 个分量为法向应力  $p_{xx}$  及剪切应力  $p_{xy}$  和  $p_{xz}$ 。下标中的第 1 个字母表示表面的法线方向(平行于  $x$  轴),第 2 个字母表示应力的方向。在正表面中,所有



沿坐标轴之正向的应力为正。参看图 2.2, 在  $x$  正表面中所画的各个应力均为正, 反之为负。对于其他两个正表面, 其应力分别为  $p_y(p_{yx}, p_{yy}, p_{yz})$  和  $p_z(p_{zx}, p_{zy}, p_{zz})$ , 其正、负的规定按  $x$  的正负表面类推。

对于 3 个负表面, 则规定沿坐标轴负向的应力为正, 例如图 2.2 中的  $p'_x(p'_{xx}, p'_{xy}, p'_{xz})$  的各分量均为正。

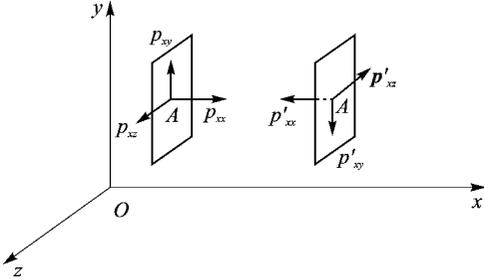


图 2.3 正表面与负表面

为什么要这样来定义? 因为仅仅说求某表面(例如图 2.2 中的  $x$  面)上、某点(例如点  $A$ )处的应力是不够的, 还要说明此表面是属于哪一边流体的。以图 2.3 为例, 过点  $A$  所作的  $x$  面, 既可以是左边流体的表面(正  $x$  面), 也可以是右边流体的表面(负  $x$  面)。但按牛顿第三定律, 此两面中过同一个点  $A$  的应力, 其大小应该相等, 但方向应该相反。用了上述符号规则以后, 就能满足牛顿第三定律而不必补充说明是属于哪一边

流体的表面了。例如, 如果说“过点  $A$  的法向应力  $p_{xx}$  为正值, 其大小为每平方厘米多少牛顿”, 无论从哪一侧看, 其大小和方向都很明确, 没有含糊不清之处。同样, 剪切应力也是如此。

### 2.1.3 过一固定点处任一截面上的应力

参看图 2.4。在理想流体中的任一点  $M(x, y, z)$  处, 在任一瞬间  $t$  的应力只有法向应力  $p$ (压强), 其大小与所取截面的方位无关, 即  $p$  的大小是一个代数点函数  $p(x, y, z, t)$ 。求出此函数后, 流体中各点的应力状况就完全确定了。但是, 在粘性流体中, 过某一点的、任一截面上的应力状况比较复杂, 不是一个代数点函数所能确定的。下面就求这些函数。

仍然参看图 2.4。在瞬时  $t$ , 过点  $M(x, y, z)$  作 3 个分别与坐标面平行的平面, 再作一个平面  $ABC$ , 其外法线的单位向量  $n$  为

$$n = i \cos(n, x) + j \cos(n, y) + k \cos(n, z) \quad (2.1)$$

这 4 个平面构成一个微元四面体。先求微元面积  $ABC$  上的应力  $p_n$  的表达式。令  $p_n$  在 3 个坐标面上的分量分别为  $p_{nx}$ ,  $p_{ny}$  和  $p_{nz}$ , 并以  $\Delta S$  表示  $\triangle ABC$  的面积, 则

$$\Delta S_x = \triangle MAB \text{ 的面积} = \Delta S \cos(n, x)$$

$$\Delta S_y = \triangle MAC \text{ 的面积} = \Delta S \cos(n, y)$$

$$\Delta S_z = \triangle MBC \text{ 的面积} = \Delta S \cos(n, z)$$

再以  $\Delta V$  表示此微元四面体的体积, 其大小应为

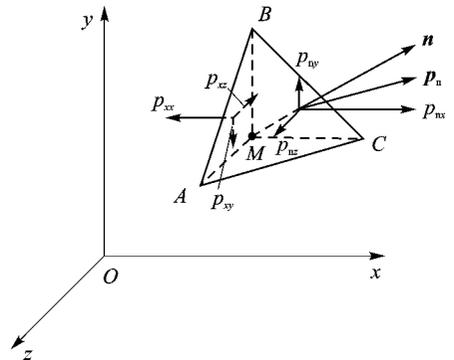


图 2.4 一点处的应力



$(h/3) \cdot \Delta S$ 。  $h$  是此四面体以  $M$  为顶点的高度。将此四面体视为一个流体微团,对其应用牛顿第二定律,得

$$\left. \begin{aligned} X\rho\Delta V + (p_n\Delta S)_x - p_{xx}\Delta S_x - p_{yx}\Delta S_y - p_{zx}\Delta S_z &= \rho\Delta Va'_x \\ Y\rho\Delta V + (p_n\Delta S)_y - p_{xy}\Delta S_x - p_{yy}\Delta S_y - p_{zy}\Delta S_z &= \rho\Delta Va'_y \\ Z\rho\Delta V + (p_n\Delta S)_z - p_{xz}\Delta S_x - p_{yz}\Delta S_y - p_{zz}\Delta S_z &= \rho\Delta Va'_z \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中,  $X, Y, Z$  和  $a'_x, a'_y, a'_z$  分别为单位质量流体微团所受的彻体力和微团加速度在 3 个坐标轴上的分量。此外,以下关系式成立。

$$\left. \begin{aligned} (p_n\Delta S)_x &= (p_n\Delta S)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = p_{nx}\Delta S \\ (p_n\Delta S)_y &= (p_n\Delta S)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) = p_{ny}\Delta S \\ (p_n\Delta S)_z &= (p_n\Delta S)\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) = p_{nz}\Delta S \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

所以,式(2.2)中的第 1 式化为

$$X\rho\left(\frac{1}{3}h\right) + p_{nx} - p_{xx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - p_{yx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) - p_{zx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) = \rho\left(\frac{1}{3}h\right)a'_x$$

当  $\Delta V$  或  $h$  趋于零时,由此式得到

$$p_{nx} = p_{xx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + p_{yx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + p_{zx}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \quad (2.4a)$$

同理可得

$$p_{ny} = p_{xy}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + p_{yy}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + p_{zy}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \quad (2.4b)$$

$$p_{nz} = p_{xz}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + p_{yz}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + p_{zz}\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) \quad (2.4c)$$

式(2.4a~c)完全决定了图 2.4 中过点  $M(x, y, z)$ 、任一截面  $ABC$ (其外法线的单位向量  $\mathbf{n}$  是给定的)上的应力  $\mathbf{p}_n(p_{nx}, p_{ny}, p_{nz})$ 。也就是说,  $\mathbf{p}_n$  取决于 9 个应力值或 9 个代数点函数  $p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$  和  $p_{zz}$  的值。因为  $p_{xx}, p_{yy}$  和  $p_{zz}$  为通过点  $M$  的、平行于坐标面的 3 个法向力,而其余 6 个量则分别为这 3 个平面上的剪切应力,习惯上用下列符号表示为

$$\begin{aligned} p_{xx} &\equiv \sigma_x, & p_{yy} &\equiv \sigma_y, & p_{zz} &\equiv \sigma_z \\ p_{xy} &\equiv \tau_{xy}, & p_{yx} &\equiv \tau_{yx}, & p_{xz} &\equiv \tau_{xz} \\ p_{xz} &\equiv \tau_{xz}, & p_{yz} &\equiv \tau_{yz}, & p_{zy} &\equiv \tau_{zy} \end{aligned}$$

如以张量符号表示,则流场中任一点的应力状况取决于以下的应力张量:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

### 2.1.4 剪应力互等定理

此定理说的是,粘性流体运动时,式(2.5)中的 6 个剪应力存在下列关系:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.6)$$

现在就来证明这一点。设在任一瞬间  $t$ ,在流场中取任一点  $M(x, y, z)$ ,并以点  $M$  为几何中心



取一矩形六面体的流体微团,如图 2.5 所示,其边长分别为  $dx, dy, dz$ 。并假设在此瞬间,点  $M$  处的应力为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

则此微团 6 个表面上的应力(以各表面几何中心处的应力作为各表面应力的平均值)如图 2.5 所示(未完全画出)。此微团所受的彻体力为

$$\rho X dx dy dz, \quad \rho Y dx dy dz, \quad \rho Z dx dy dz$$

此微团之加速度为  $a_x, a_y, a_z$ 。应用达朗伯原理,将惯性力

$$(-\rho a_x dx dy dz), \quad (-\rho a_y dx dy dz), \quad (-\rho a_z dx dy dz)$$

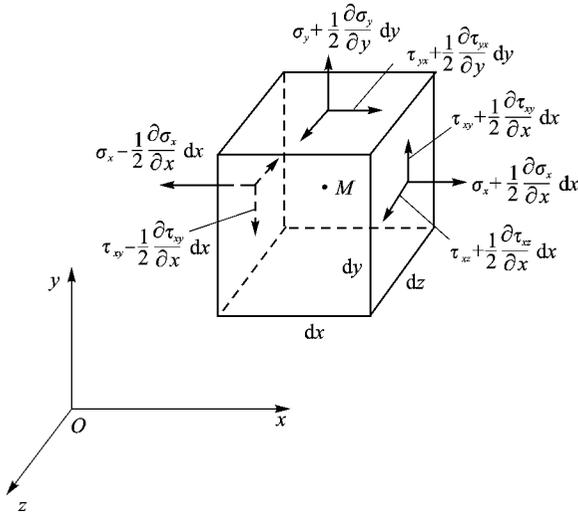


图 2.5 剪应力互等示意图

加于此微团上,则表面力、彻体力和惯性力就可视为一个平衡力系。对通过点  $M$ 、且平行于  $Oz$  的轴取矩,彻体力和惯性力都不产生力矩(可视为通过点  $M$ ),可得

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \left( \frac{dx}{2} \right) + \left( \tau_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \left( \frac{dx}{2} \right) - \\ & \left( \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \left( \frac{dy}{2} \right) - \left( \tau_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \left( \frac{dy}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

或

$$\tau_{xy} dx dy dz - \tau_{yx} dx dy dz = 0$$

所以

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



同样,对通过点  $M$ 、平行于坐标轴的其他两个轴取矩,得

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

这就是剪应力互等定理。由此可知,在流体中决定任一点处应力状况的应力张量是一个对称张量。因此,只要知道 6 个点函数  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  就可以决定通过任一点的任一截面上的应力了。

## 2.2 应力的坐标转换方程式

### 2.2.1 空间应力的坐标转换方程式

前已证明,在任一瞬间  $t$ , 决定流场中任一点  $M(x, y, z)$  处的应力由一个对称应力张量式(2.7)来决定。该式中的诸张量元为过点  $M$ 、平行于坐标面的平面上的应力。坐标轴是人为选定的。如果选另一直角坐标系  $Ox'y'z'$  如图 2.6 所示, 则同一点  $M(x', y', z')$  处的应力状况将取决于以下的对称张量:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

式中, 诸张量元为过点  $M$ 、且平行于  $Ox'y'z'$  坐标系中的 3 个坐标面的表面应力。当然, 式(2.8)中的诸张量元与式(2.7)中的对应量是不相等的, 但它们都是在同一瞬间描写同一点  $M$  处的应力状况, 只是坐标轴的方向取得不同而已。所以, 它们之间应该有一定的关系, 此关系称为转换方程式。

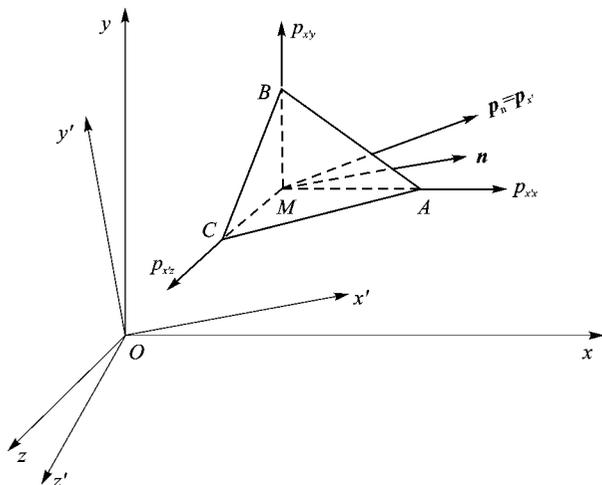


图 2.6 应力的坐标转换示意图



设新坐标系  $Ox'$  在  $Oxyz$  坐标系中的方向余弦为  $(l_1, m_1, n_1)$ ,  $Oy'$  的为  $(l_2, m_2, n_2)$ ,  $Oz'$  的为  $(l_3, m_3, n_3)$ 。过点  $M$  作一平面  $ABC$ , 使其外法线沿  $Ox'$  轴的正向, 即  $\mathbf{n}$  平行于  $Ox'$ , 并规定  $\mathbf{p}_n$  (或  $\mathbf{p}_{x'}$ ) 表示此面上的应力。根据式(2.4), 此应力的 3 个分量分别为

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} = p_{x'x} &= p_{xx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + p_{yx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + p_{zx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) = \\ &\sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 \\ p_{ny} = p_{x'y} &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1 \\ p_{nz} = p_{x'z} &= \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

再看  $\mathbf{p}_{x'}$  在  $Ox'$  轴上的分量。

$$\begin{aligned} p_{x'x'} = \mathbf{p}_{x'} \text{ 在 } Ox' \text{ 轴上的分量} &= \\ p_{x'x}, p_{x'y}, p_{x'z} \text{ 在 } Ox' \text{ 轴上的分量之和} &= \\ p_{x'x} l_1 + p_{x'y} m_1 + p_{x'z} n_1 &= \\ (\sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1) l_1 + (\tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1) m_1 + \\ (\tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1) n_1 & \end{aligned}$$

故得

$$\sigma_{x'} = p_{x'x'} = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{xz} l_1 n_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 \quad (2.10)$$

同样

$$\begin{aligned} p_{x'y'} = \tau_{x'y'} = \mathbf{p}_{x'} \text{ 在 } Oy' \text{ 轴上的分量} &= \\ p_{x'x}, p_{x'y}, p_{x'z} \text{ 在 } Oy' \text{ 轴上的分量之和} &= \\ p_{x'x} l_2 + p_{x'y} m_2 + p_{x'z} n_2 & \end{aligned}$$

将式(2.9)代入后得

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + n_1 n_2 \sigma_z + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} + \\ &(l_1 n_2 + l_2 n_1) \tau_{xz} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \tau_{yz} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} p_{x'z'} = \tau_{x'z'} = \mathbf{p}_{x'} \text{ 在 } Oz' \text{ 轴上的分量} &= \\ l_1 l_3 \sigma_x + m_1 m_3 \sigma_y + n_1 n_3 \sigma_z + (l_1 m_3 + l_3 m_1) \tau_{xy} + \\ (l_1 n_3 + l_3 n_1) \tau_{xz} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \tau_{yz} & \end{aligned} \quad (2.12)$$

如过点  $M$  所作的平面  $ABC$  的外法线是沿  $Oy'$  的方向, 则  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{y'}$ , 且有

$$\begin{aligned} p_{y'x} &= \sigma_x l_2 + \tau_{yx} m_2 + \tau_{zx} n_2 \\ p_{y'y} &= \tau_{xy} l_2 + \sigma_y m_2 + \tau_{zy} n_2 \\ p_{y'z} &= \tau_{xz} l_2 + \tau_{yz} m_2 + \sigma_z n_2 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \sigma_{y'} = p_{y'y'} = \mathbf{p}_{y'} \text{ 在 } Oy' \text{ 轴上的分量} &= \\ p_{y'x} l_2 + p_{y'y} m_2 + p_{y'z} n_2 &= \\ \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{xz} l_2 n_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 & \end{aligned} \quad (2.13)$$



$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= p_{y'} \text{ 在 } Oz' \text{ 轴上的分量} = \\ & p_{y'x}l_3 + p_{y'y}m_3 + p_{y'z}n_3 = \\ & \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + (l_2 m_3 + l_3 m_2)\tau_{xy} + \\ & (l_2 n_3 + l_3 n_2)\tau_{xz} + (m_2 n_3 + m_3 n_2)\tau_{yz} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\tau_{z'y'} = \tau_{y'z'}$$

如过点  $M$  所作之平面  $ABC$  的外法线方向是沿  $Oz'$  的方向, 则得

$$\sigma_{z'} = p_{z'z'} = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2l_3 m_3 \tau_{xy} + 2l_3 n_3 \tau_{xz} + 2m_3 n_3 \tau_{yz} \quad (2.15)$$

以及

$$\tau_{z'x'} = \tau_{x'z'}, \quad \tau_{z'y'} = \tau_{y'z'}$$

于是在新坐标系中的 9 个张量元, 都可以用旧坐标系中的张量元按式 (2.10) ~ 式 (2.15) 表示出来了。这 6 个式子称为应力的转换方程式。实际上, 这就证明了应力张量是服从张量转换法则的。

## 2.2.2 平面应力的坐标转换方程式

对于平面应力而言, 在任一瞬间  $t$ , 任一点  $M(x, y)$  处的应力状况取决于以下 4 个应力:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{yx}$$

现在的问题是求新坐标系  $Ox'y'$  (图 2.7) 中的应力  $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}, \tau_{y'x'}$  与旧坐标系中的应力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$  的关系。这种关系用不着另外求了, 只须在空间应力转换方程中将与  $z$  有关的项去掉即可, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 \\ \tau_{x'y'} &= l_1 l_2 \sigma_x + m_1 m_2 \sigma_y + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

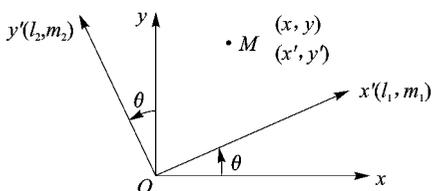


图 2.7 新旧坐标系的关系示意图

如以  $\theta$  表示  $Ox'$  与  $Ox$  之间的夹角, 也就是新坐标系对旧坐标系转动的角度, 则

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \theta, & m_1 &= \sin \theta \\ l_2 &= -\sin \theta, & m_2 &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

将式 (2.17) 代入式 (2.16), 即可得到人们所熟悉的平面应力转换方程式



$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta = \\
 &\sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta = \\
 &\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

## 2.3 应变率张量

### 2.3.1 流体微团运动的分解

参看图 2.8。在任一瞬间  $t$ ，任取一流体微团  $\Delta V$ 。在此微团上任取一个点  $M(x, y, z)$ ，并以  $M$  为原点作一运动坐标系  $M(x_1, y_1, z_1)$ ，此动坐标系随着点  $M$  运动，方向则保持与  $Oxyz$  坐标系平行。如果这个微团是刚体，则其上任一点  $M_1(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$  在此瞬间的速度为

$$v_{M_1} = v_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1$$

或

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= u + \omega_y z_1 - \omega_z y_1 \\
 v_1 &= v + \omega_z x_1 - \omega_x z_1 \\
 w_1 &= w + \omega_x y_1 - \omega_y x_1
 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

式中， $v_M(u, v, w)$  为点  $M$  与点  $M_1$  在同一瞬间的速度， $\boldsymbol{r}_1(x_1, y_1, z_1)$  为点  $M_1$  对点  $M$  的向径， $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  为

微团的角速度； $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1$  为点  $M_1$  绕点  $M$  转动的速度。

对于流体微团而言，因为在运动中还有变形，点  $M_1$  的速度应当比式(2.19)多一项因变形而引起的速度，即

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= u + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + (\epsilon_x x_1 + \gamma_{xy} y_1 + \gamma_{xz} z_1) \\
 v_1 &= v + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + (\gamma_{yx} x_1 + \epsilon_y y_1 + \gamma_{yz} z_1) \\
 w_1 &= w + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + (\gamma_{zx} x_1 + \gamma_{zy} y_1 + \epsilon_z z_1)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

式中



$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

式(2.20)右端的第3项就是因变形而引起的速度。关于微团的角速度表达式(2.21)将于后面证明。现在,先来说明决定变形速度的9个物理量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ 和 $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ 的物理意义(9个量中,只有6个量是独立的)。

### 2.3.2 直线应变率与剪切应变率

参看图2.9。设在某一瞬间 $t$ ,在流场中任一点 $M(x, y, z)$ 处,以 $M$ 为顶点,取一矩形六面体微元,其边长分别为无限小量 $x_1, y_1$ 和 $z_1$ 。现在来讨论此矩形六面体微元的变形速度。先看平面 $MBDC$ (图2.10)上的变形速度。设此时点 $M$ 的速度分量为 $u, v, w$ ,则点 $C$ 的速度应为

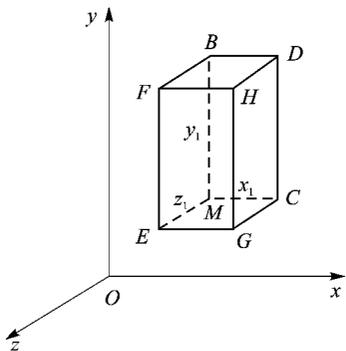


图 2.9 考虑流体微团的应变率示意图

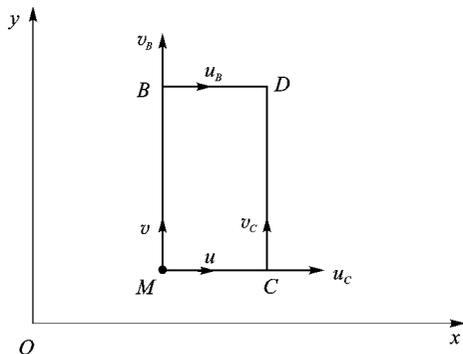


图 2.10 (图 2.9)中的一个面



$$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial x}x_1$$

$$v_C = v + \frac{\partial v}{\partial x}x_1$$

故点  $C$  的水平速度改变量为

$$u_C - u = \frac{\partial u}{\partial x}x_1$$

其作用是使  $MC$  边拉长。点  $C$  的铅垂速度改变量为

$$v_C - v = \frac{\partial v}{\partial x}x_1$$

其作用是使  $MC$  边转动,其转动角速度为

$$\frac{v_C - v}{x_1} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

转动方向是逆时针的。

点  $B$  的速度为

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial y}y_1$$

$$v_B = v + \frac{\partial v}{\partial y}y_1$$

故点  $B$  的铅垂速度改变量为

$$v_B - v = \frac{\partial v}{\partial y}y_1$$

其作用是使  $MB$  边拉长。点  $B$  的水平速度改变量为

$$u_B - u = \frac{\partial u}{\partial y}y_1$$

其作用是使  $MB$  边转动,其转动角速度为

$$\frac{u_B - u}{y_1} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

转动方向是顺时针的。

因此,矩形  $MBDC$  在此瞬间的  $x$  方向的直线变形速度为  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}x_1\right)$ ,  $y$  方向的直线变形速度为  $\left(\frac{\partial v}{\partial y}y_1\right)$ 。直角  $\angle BMC$  将以角速度  $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  来减小。同样,  $z$  方向的直线变形速度为  $\frac{\partial w}{\partial z}z_1$ 。直角  $\angle BME$  将以角速度  $\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$  来减小,直角  $\angle CME$  将以角速度  $\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$  来减小。令  $MC, MB, ME$  之长度分别为  $x_1, y_1, z_1$ , 并定义直线应变率为每单位长度的直线变形速度, 则得点  $M$  的 3 个直线应变率为



$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_C - u}{x_1} \quad (x \text{ 方向的直线应变率})$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_B - v}{y_1} \quad (y \text{ 方向的直线应变率})$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w_E - w}{z_1} \quad (z \text{ 方向的直线应变率})$$

再定义剪切应变率为直角减小的速度,则得点  $M$  的 3 个(或 6 个)剪切应变率为

$$2\gamma_{xy} = 2\gamma_{yx} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$2\gamma_{xz} = 2\gamma_{zx} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$2\gamma_{yz} = 2\gamma_{zy} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

现在,就知道这 6 个(或 9 个)量的物理意义了,其中 3 个表示点  $M$  的直线应变率,另外 3 个(或 6 个)表示剪切应变率的一半。

### 2.3.3 转动角速度

矩形  $MBDC$  对点  $M$  的相对运动可视为如刚体一样绕点  $M$  的转动与变形之和。现在单独考察  $\angle BMC$  角度的变化情况。设在瞬间  $t$  的矩形  $MBDC$  经过  $dt$  时间后,其两边  $MC$  和  $MB$  分别转动到了  $MC''$  和  $MB''$  的位置,如图 2.11 所示。设在  $dt$  时间内,由于微团有旋转运动,整个矩形绕点  $M$  转了一个角度  $d\alpha$ (即  $MC$  边和  $MB$  边转到了  $MC'$  和  $MB'$  的位置);但因同时有剪切变形, $MB'$  和  $MC'$  边又各转了一个角度  $d\beta$  才到达最后位置  $MB''$  和  $MC''$ 。现在来求这两个角度  $d\alpha$  和  $d\beta$ 。

前已说明, $MC$  边的旋转角速度为  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,旋转方向是逆时针,故

$$d\alpha + d\beta = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$MB$  边的旋转角速度为  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,旋转方向是顺时针,故

$$d\beta - d\alpha = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

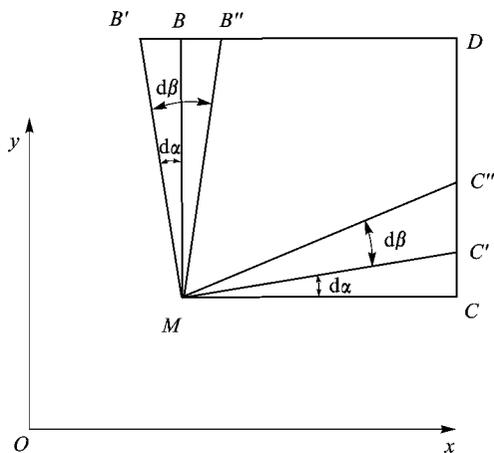


图 2.11 流体微团的转动示意图



所以

$$d\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt$$

矩形  $MBDC$  在瞬间  $t$  的角速度  $\omega_z$  (绕通过点  $M$ 、平行于  $z$  轴的转动角速度) 为

$$\omega_z = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

直角  $\angle BMC$  的剪切应变率为

$$2 \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\gamma_{xy} = 2\gamma_{yx}$$

这正是前面已得到的结果。

同样,将上述方法应用于矩形  $MBFE$  和矩形  $MEGC$ ,得

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2\gamma_{yz} = 2\gamma_{zy}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\gamma_{xz} = 2\gamma_{zx}$$

从式(2.20)知道,在求得点  $M(x, y, z)$  的 9 个应变率  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$  和  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$  后,其邻点  $M_1(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$  因变形而引起的速度就可以立即求得了。如以张量符号表示,流场中任一点的应变率情况取决于以下的应变率张量。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

正如同知道了某点的应力张量就可以立即求出在该点任一方向的应力一样,在知道了某点的应变率张量以后,即可由式(2.20)求出该点附近任一点的变形率。

与应力张量一样,应变率张量也是一个对称张量,因而  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ 。下面来证明应变率张量服从张量的坐标转换法则。

## 2.4 应变率的坐标转换方程式

为了简单起见,先研究平面应变率的坐标转换方程。



### 2.4.1 平面应变率的坐标转换方程式

参看图 2.12, 取两个坐标系  $Oxy$  和  $Ox'y'$ , 其间的夹角  $\theta$  为一规定的常数。在任一瞬间  $t$ , 流场中任一点  $M$  的坐标在两个坐标系间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

或

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

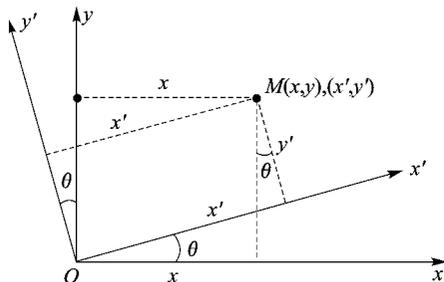


图 2.12 坐标转换关系示意图

点  $M$  的速度分量在两个坐标系间的关系为

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt} \sin \theta = u \cos \theta + v \sin \theta \\ v' &= \frac{dy'}{dt} = -\frac{dx}{dt} \sin \theta + \frac{dy}{dt} \cos \theta = -u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

这正是理论力学中人们已熟知的关于速度的转换公式。

关于点  $M$  的应变率, 在  $Oxy$  坐标系中为

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.27)$$

同一个点  $M$  在  $Ox'y'$  坐标系中的应变率为

$$\epsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \epsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \gamma_{x'y'} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \quad (2.28)$$

求应变率转换方程式的意思是指在某一瞬间  $t$ , 当某点(例如点  $M$ )的应变率式(2.27)已知后, 如何求此同一点(例如, 仍是点  $M$ )在同一瞬间  $t$  的应变率在另一坐标系中的表达式, 即求式(2.28)的具体表达式, 求解过程如下。

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \sin \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta \right) \sin \theta = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \epsilon_x + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \epsilon_y + \gamma_{xy} \sin 2\theta = \\ &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \gamma_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.29a)$$

同样



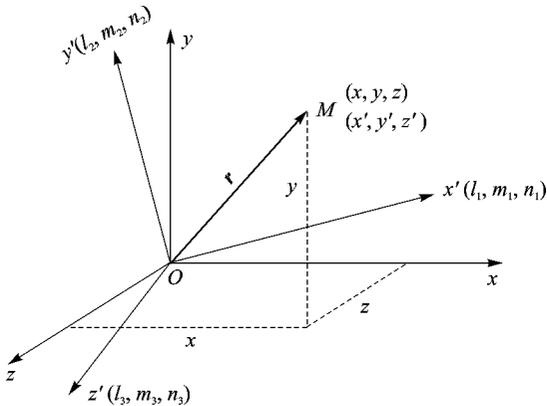
$$\begin{aligned}
\epsilon_{y'y'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = \\
&\left(-\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta\right)(-\sin \theta) + \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta\right) \cos \theta = \\
&\sin^2 \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2 \theta \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \sin \theta \cos \theta = \\
&\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \epsilon_x + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \epsilon_y - \gamma_{xy} \sin 2\theta = \\
&\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \gamma_{xy} \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{2.29b}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{x'y'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = \\
&\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} \right) + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) \right] = \\
&-\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{2.29c}$$

这就是平面应变率的坐标转换方程式。将式(2.29a~c)与式(2.18)比较后看出,应变率的转换方程及应力的转换方程都是服从张量的坐标转换法则的。

#### 2.4.2 空间应变率的坐标转换方程式

参看图 2.13, 设  $Ox'y'z'$  直角坐标系的 3 个坐标轴及其方向余弦在  $Oxyz$  坐标系中分别为



$Ox'(l_1, m_1, n_1)$ ,  $Oy'(l_2, m_2, n_2)$  和  $Oz'(l_3, m_3, n_3)$ 。设在任一瞬间  $t$ , 流场中任一点  $M$  的向径为  $r$ , 则此点在两个坐标系中坐标之间的关系为

$$\begin{aligned}
x' &= r \text{ 在 } Ox' \text{ 轴上的分量} \\
&= x, y, z \text{ 在 } Ox' \text{ 轴上的分量之和} \\
&= l_1 x + m_1 y + n_1 z
\end{aligned} \tag{2.30}$$

同理

$$\begin{aligned}
y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \\
z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z
\end{aligned}$$

或

$$\left. \begin{aligned}
x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' \\
y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\
z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'
\end{aligned} \right\} \tag{2.31}$$

图 2.13 不同坐标系之间的关系



故

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{dx'}{dt} = l_1 \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dy}{dt} + n_1 \frac{dz}{dt} = l_1 u + m_1 v + n_1 w \\ v' &= l_2 u + m_2 v + n_2 w \\ w' &= l_3 u + m_3 v + n_3 w \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

这就是在理论力学中所熟知的、不同坐标系下的速度转换关系式。在任一指定瞬间  $t$ , 任一点  $M$  的应变率在  $Oxyz$  坐标系中的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

同一点  $M$ , 在同一瞬间  $t$ , 其应变率在  $Ox'y'z'$  坐标系中的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \epsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \epsilon_{z'} = \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \\ \gamma_{y'z'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

求应变率的转换方程就是在式(2.33)已知后, 求表达式(2.34)。具体做法如下。

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} = \\ & \quad \left( l_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1 \frac{\partial v}{\partial x} + n_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) l_1 + \\ & \quad \left( l_1 \frac{\partial u}{\partial y} + m_1 \frac{\partial v}{\partial y} + n_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) m_1 + \\ & \quad \left( l_1 \frac{\partial u}{\partial z} + m_1 \frac{\partial v}{\partial z} + n_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_1 = \\ & \quad l_1^2 \epsilon_x + m_1^2 \epsilon_y + n_1^2 \epsilon_z + 2l_1 m_1 \gamma_{xy} + 2l_1 n_1 \gamma_{xz} + 2m_1 n_1 \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.35a)$$

同理

$$\epsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'} = l_2^2 \epsilon_x + m_2^2 \epsilon_y + n_2^2 \epsilon_z + 2l_2 m_2 \gamma_{xy} + 2l_2 n_2 \gamma_{xz} + 2m_2 n_2 \gamma_{yz} \quad (2.35b)$$



$$\epsilon_{z'} = \frac{\partial w'}{\partial z'} = l_3^2 \epsilon_x + m_3^2 \epsilon_y + n_3^2 \epsilon_z + 2l_3 m_3 \gamma_{xy} + 2l_3 n_3 \gamma_{xz} + 2m_3 n_3 \gamma_{yz} \quad (2.35c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) = \\ & l_1 l_2 \epsilon_x + m_1 m_2 \epsilon_y + n_1 n_2 \epsilon_z + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \gamma_{xy} + \\ & (l_1 n_2 + l_2 n_1) \gamma_{xz} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.35d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x'z'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) = \\ & l_1 l_3 \epsilon_x + m_1 m_3 \epsilon_y + n_1 n_3 \epsilon_z + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \gamma_{xy} + \\ & (l_1 n_3 + l_3 n_1) \gamma_{xz} + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.35e)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{y'z'} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) = \\ & l_2 l_3 \epsilon_x + m_2 m_3 \epsilon_y + n_2 n_3 \epsilon_z + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \gamma_{xy} + \\ & (l_2 n_3 + l_3 n_2) \gamma_{xz} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.35f)$$

这就是空间应变率的转换方程。将式(2.35a~f)与式(2.10)~式(2.15)对比,可以看出,应变率的转换方程同应力的转换方程一样,都是服从张量的坐标转换法则的。

由此可得结论,在粘性流场中,在任一瞬间,任一点的应力和应变率都可以用对称张量来表示。但是,此二者之间有没有关系呢?在固体中,如果在弹性限度以内,应力与应变是成正比的,或者说可以用胡克定律将二者联系起来;而在粘性流体中,有没有与胡克定律相类似的定律?答案是肯定的。

## 2.5 应力与应变率之间的关系

将固体中的应变与应力联系起来的胡克定律是一个由实验得出的定律;但在流体中,应变率与应力很难直接测量,因此,直接从实验来确立应力与应变率之间的关系就困难了。但是可以根据已有的实践经验,引用一些合理的假设,运用逻辑推理和数学演绎来推导它们之间应当存在的关系;然后,将此关系应用于具体问题,并将得到的结果与实验结果进行比较,反过来验证这些假设的正确性。

### 2.5.1 三个假设(斯托克斯假设)

这三个假设的内容如下。

① 应力只与应变率有关,而且是线性关系。

假设

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) = \\ & A\epsilon_x + B\epsilon_y + C\epsilon_z + D\gamma_{xy} + E\gamma_{xz} + F\gamma_{yz} + G \end{aligned} \quad (2.36)$$



式中,  $A, B, C, D, E, F, G$  都是待定的与应变率无关的系数。对于其他 5 个应力  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  也有类似的方程式。这是仿照固体力学中的胡克定律直接写出的。

② 应力与应变率之间的关系不因坐标系的转换而改变(各向同性假设)。

假设在  $Ox'y'z'$  坐标系中也存在形式如下的 6 个关系式

$$\sigma_{x'} = A\epsilon_{x'} + B\epsilon_{y'} + C\epsilon_{z'} + D\gamma_{x'y'} + E\gamma_{x'z'} + F\gamma_{y'z'} + G \quad (2.37)$$

而且式(2.37)中的诸系数  $A, B, C, D, E, F, G$  与式(2.36)中的相应系数完全一样。这就是假设流体的物理性质不因坐标轴方向的改变而改变。这种性质,称为各向同性。

③ 当所有的应变率均等于零时,应力应当等于静压强。

当  $\epsilon_x = 0, \epsilon_y = 0, \epsilon_z = 0, \gamma_{xy} = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$  的时候,下式成立

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \\ \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

这个假设是必须的。因为所得的应力与应变率之间的关系,在流体静止(应变率等于零)时也应当成立。

以上所做的三个假设,现在只能说似乎是合理的。究竟客观规律是否如此,只有先从这些假设出发,推得应力与应变率之间的关系,然后用实验事实来进行验证。

### 2.5.2 平面应力与应变率之间的关系

为了简单起见,可以根据以上三个假设来推导平面应力与平面应变率之间的关系。根据假设①,可将流场中任一点的应力与应变率之间的关系写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A_1\epsilon_x + B_1\epsilon_y + C_1\gamma_{xy} + D_1 \\ \sigma_y &= A_2\epsilon_x + B_2\epsilon_y + C_2\gamma_{xy} + D_2 \\ \tau_{xy} &= A_3\epsilon_x + B_3\epsilon_y + C_3\gamma_{xy} + D_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

式中,  $A_1, B_1, \dots, D_3$  是待定的、与应变率无关的 12 个系数。现在来求这 12 个系数。

先进行坐标转换

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -x \\ y'' &= y \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

即任一点  $M$  在原坐标系中的坐标  $(x, y)$  与其在新坐标系中的坐标  $(x'', y'')$  以式(2.40)相联系。

根据假设②,点  $M$  的应力与应变率间的关系应是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x''} &= A_1\epsilon_{x''} + B_1\epsilon_{y''} + C_1\gamma_{x''y''} + D_1 \\ \sigma_{y''} &= A_2\epsilon_{x''} + B_2\epsilon_{y''} + C_2\gamma_{x''y''} + D_2 \\ \tau_{x''y''} &= A_3\epsilon_{x''} + B_3\epsilon_{y''} + C_3\gamma_{x''y''} + D_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

对式(2.40)微分,得点  $M$  的速度在两坐标系间的关系为



$$\left. \begin{aligned} u'' &= \frac{dx''}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -u \\ v'' &= \frac{dy''}{dt} = \frac{dy}{dt} = v \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

式(2.42)为同一个点  $M$  的速度、但用图 2.14 所示的两个不同坐标系描写时应有的关系。现在来看同一个点  $M$  的应变率用图 2.14 所示的两个不同坐标系描写时的关系如何。

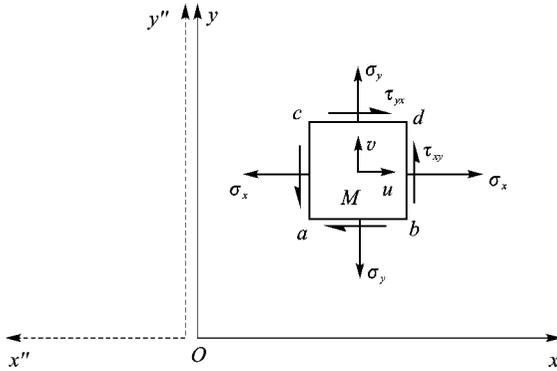


图 2.14 不同坐标系中的应变与应变率

$$\begin{aligned} \epsilon_{x''} &= \frac{\partial u''}{\partial x''} = \frac{\partial u''}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x''} + \frac{\partial u''}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x''} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(-u)(-1) + \frac{\partial}{\partial y}(-u)(0) = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{y''} &= \frac{\partial v''}{\partial y''} = \frac{\partial v''}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y''} + \frac{\partial v''}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y''} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(v)(0) + \frac{\partial}{\partial y}(v)(1) = \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \end{aligned} \quad (2.43b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x''y''} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u''}{\partial y''} + \frac{\partial v''}{\partial x''} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u''}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y''} + \frac{\partial u''}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y''} \right) + \left( \frac{\partial v''}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x''} + \frac{\partial v''}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x''} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y}(-u) + \frac{\partial}{\partial x}(v)(-1) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.43c)$$

再看同一个点  $M$  的应力用图 2.14 所示的两坐标系描写时的关系如何。过点  $M$  作一个很小的矩形  $abcd$ ，并设此矩形表面的应力为  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} (= \tau_{yx})$ ，如图 2.14 所示。用  $Oxy$  坐标系来描写  $bd$  面上的应力时，因  $bd$  面为正  $x$  面，故  $\sigma_x$  为正应力， $\tau_{xy}$  为正剪应力。但用  $Ox''y''$  坐标系



来描写同一  $bd$  面上的应力时,因  $bd$  面为负  $x''$  面,所以  $\sigma_{x''}$  为正应力,  $\tau_{x''y''}$  为负剪切应力。同理,有

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{x''} \\ \tau_{xy} &= -\tau_{x''y''}\end{aligned}\quad (2.44)$$

以及

$$\sigma_y = \sigma_{y''}$$

将式(2.43a~c)代入式(2.41),得

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{x''} &= A_1 \epsilon_x + B_1 \epsilon_y + C_1 (-\gamma_{xy}) + D_1 \\ \sigma_{y''} &= A_2 \epsilon_x + B_2 \epsilon_y + C_2 (-\gamma_{xy}) + D_2 \\ \tau_{x''y''} &= A_3 \epsilon_x + B_3 \epsilon_y + C_3 (-\gamma_{xy}) + D_3\end{aligned}\right\} \quad (2.45)$$

将式(2.44)代入式(2.39),得

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{x''} &= A_1 \epsilon_x + B_1 \epsilon_y + C_1 \gamma_{xy} + D_1 \\ \sigma_{y''} &= A_2 \epsilon_x + B_2 \epsilon_y + C_2 \gamma_{xy} + D_2 \\ \tau_{x''y''} &= -A_3 \epsilon_x - B_3 \epsilon_y - C_3 \gamma_{xy} - D_3\end{aligned}\right\} \quad (2.46)$$

由式(2.46)中的第1、第2和第3式分别减去式(2.45)中的第1、第2和第3式得

$$\left. \begin{aligned}2C_1 \gamma_{xy} &= 0 \\ 2C_2 \gamma_{xy} &= 0 \\ 2A_3 \epsilon_x + 2B_3 \epsilon_y + 2D_3 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (2.47)$$

因为点  $M$  是任意选的,其应变率  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  均不为零,所以

$$C_1 = C_2 = A_3 = B_3 = D_3 = 0 \quad (2.48)$$

这样,12个未知数中就只有7个是未知的了,而式(2.39)就变为

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= A_1 \epsilon_x + B_1 \epsilon_y + D_1 \\ \sigma_y &= A_2 \epsilon_x + B_2 \epsilon_y + D_2 \\ \tau_{xy} &= C_3 \gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \quad (2.49)$$

再进行一次坐标轴转换(图2.15)。设  $Ox'y'$  坐标系与  $Oxy$  坐标系间的夹角为  $\theta$ ,则根据假设②,应有下列关系式存在,即

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{x'} &= A_1 \epsilon_{x'} + B_1 \epsilon_{y'} + D_1 \\ \sigma_{y'} &= A_2 \epsilon_{x'} + B_2 \epsilon_{y'} + D_2 \\ \tau_{x'y'} &= C_3 \gamma_{x'y'}\end{aligned}\right\} \quad (2.50)$$

将式(2.49)代入应力转换方程式(2.18),得

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta =$$

$$\frac{\epsilon_x}{2} (A_1 + A_2) + \frac{\epsilon_y}{2} (B_1 + B_2) + \frac{D_1 + D_2}{2} + C_3 \gamma_{xy} \sin 2\theta +$$

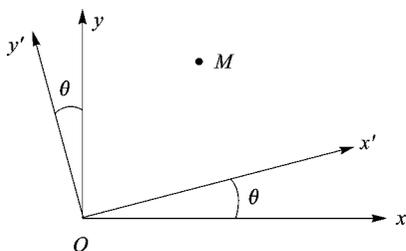


图 2.15 不同的坐标系



$$\left[ \frac{\epsilon_x}{2}(A_1 - A_2) + \frac{\epsilon_y}{2}(B_1 - B_2) + \frac{D_1 - D_2}{2} \right] \cos 2\theta \quad (2.51)$$

此外,将应变率转换方程式(2.29a~c)代入式(2.50),得

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= A_1 \epsilon_{x'} + B_1 \epsilon_{y'} + D_1 = \\ & A_1 \left( \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \gamma_{xy} \sin 2\theta \right) + \\ & B_1 \left( \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \gamma_{xy} \sin 2\theta \right) + D_1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

因  $\theta$  为任何值时,式(2.51)和式(2.52)均成立,故  $\sin 2\theta$  和  $\cos 2\theta$  以及没有  $\theta$  的项在以上 3 式中必须相等。由此得到

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy}(A_1 - B_1) &= C_3 \gamma_{xy} \\ \frac{\epsilon_x}{2}(A_1 - A_2) + \frac{\epsilon_y}{2}(B_1 - B_2) + \frac{D_1 - D_2}{2} &= \\ \frac{A_1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) + \frac{B_1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) &= \\ \frac{\epsilon_x}{2}(A_1 - B_1) + \frac{\epsilon_y}{2}(B_1 - A_1) & \\ \frac{\epsilon_x}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\epsilon_y}{2}(B_1 + B_2) + \frac{D_1 + D_2}{2} &= \\ \frac{A_1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{B_1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + D_1 &= \\ \frac{\epsilon_x}{2}(A_1 + B_1) + \frac{\epsilon_y}{2}(A_1 + B_1) + D_1 & \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

$\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  为任何值时,式(2.53)均必须满足,故式(2.53)左右两边的  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$  的系数必须分别相等,即

$$\frac{D_1 - D_2}{2} = 0$$

$$A_1 - A_2 = A_1 - B_1$$

$$B_1 - B_2 = B_1 - A_1$$

$$A_1 - B_1 = C_3$$

由此得

$$D_1 = D_2, \quad A_2 = B_1, \quad A_1 = B_2 \quad (2.54)$$

将式(2.54)代入式(2.49),该式化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A_1 \epsilon_x + B_1 \epsilon_y + D_1 = (A_1 - B_1) \epsilon_x + B_1 (\epsilon_x + \epsilon_y) + D_1 \\ \sigma_y &= A_2 \epsilon_x + B_2 \epsilon_y + D_2 = B_1 \epsilon_x + A_1 \epsilon_y + D_1 = \\ & (A_1 - B_1) \epsilon_y + B_1 (\epsilon_x + \epsilon_y) + D_1 \\ \tau_{xy} &= C_3 \gamma_{xy} - (A_1 - B_1) \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$



现在只有 3 个系数  $A_1, B_1$  和  $D_1$  待定了。

再引用假设③, 当所有的应变率  $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$  时, 下列关系式应成立, 即

$$\sigma_x = \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0$$

代入式(2.55), 得

$$D_1 = -p \quad (2.56)$$

因此, 原来的 12 个待定系数, 现在只剩下两个系数  $A_1$  和  $B_1$  待定了。这是在上述三个假设的情况下, 简化得到的数量最少的系数, 不可能再减少了。

为了与一般的粘性系数的定义符合, 采用两个系数  $\mu$  和  $\mu'$  来代替  $A_1$  和  $B_1$ , 即定义

$$A_1 - B_1 = 2\mu$$

$$B_1 = -\frac{2}{3}(\mu - \mu')$$

则式(2.55)最后化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\epsilon_x - \frac{2}{3}(\mu - \mu')(\epsilon_x + \epsilon_y) - p = \\ &2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu - \mu') \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\mu - \mu') \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - p \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

这就是所求得的平面应力与平面应变率间的关系式。如何决定这两个待定系数  $\mu$  和  $\mu'$  ( $\mu$  称为粘性系数,  $\mu'$  则称为第二粘性系数) 以及怎样解释其物理意义, 就是下面要做的事。值得注意的是, 在不可压流体中, 因连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

式(2.57)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

因此, 在不可压流情况下, 只剩下一个待定系数  $\mu$  了。这个待定系数, 下面会看到, 就是粘性系数。

### 2.5.3 空间应力与应变率之间的关系

完全仿照上面的做法, 只是代数过程麻烦一点, 不难得到空间应力和应变率之间的关系为



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu - \mu') \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\mu - \mu') \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}(\mu - \mu') \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

在不可压流体中,因连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

故应力与应变率之间的关系简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

与平面流动情况一样,此处也只剩下一个待定系数,即粘性系数  $\mu$  了。

由式(2.59)看出,当流体静止时,其所有的应变率均等于零,从而剪应力均等于零。这时,3个正应力都等于  $(-p)$ ,这正是静力学所要求的。

## 2.6 应力与应变率间关系的验证

参看图 2.16,两个无限长平板间充满粘性流体,下板静止不动,上板以等速  $V$  沿其平面移动。这时,流体将一层一层地流动;但各层的速度不同,紧贴下板的流体速度为零,而紧贴上板的流体速度则为  $V$ ,沿  $Oy$  线上的速度分布如图 2.16 所示。在第 1 章有关剪应力的定义中,任

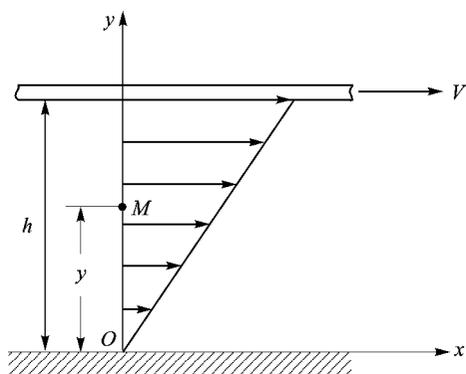


图 2.16 粘性应力实例

一点  $M$  处的剪应力可表示为

剪应力 = 粘性系数  $\times$  速度梯度

即

$$\tau = \text{粘性系数} \times \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.61)$$

现在,将 2.5 节得出的剪应力公式

$$\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

应用于此情况,因

$$v \equiv 0$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

由此得

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.62)$$

将式(2.62)和式(2.61)比较可知,待定系数  $\mu$  就是牛顿定律中的粘性系数。 $\mu$  的单位是

$$[\mu] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

根据实验测量结果,压强对空气的粘性系数  $\mu$  影响不大,一般都可以忽略;而温度的影响则可用下式表示为

$$\mu(t) = 1.745 \times 10^{-6} + 5.03 \times 10^{-9} \times t \text{ } ^\circ\text{C} \left( \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right) \quad (2.63)$$

由式(2.63)也可以看出,当温度变化不大时, $\mu$  可视为常数。在  $t = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$  时,空气的  $\mu$  为

$$\mu = 1.82 \times 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \quad (2.64)$$

但当温度变化甚大,例如高速飞行,飞行器表面因摩擦而导致温度升高很多时,温度对  $\mu$  的影响就不能忽略,而要用式(2.63)来计算  $\mu$  值了。只有在低速飞行时, $\mu$  方可视为常数。

关于第二粘性系数  $\mu'$ ,现在还无法用实验直接测出。但根据分子运动理论,如将流体视为完全气体(即这种气体可视为一群单个的、完全弹性的小球互相杂乱无章地碰撞所组成的气体)时,可得到结果为

$$\mu = \frac{1}{3} \rho c l, \quad \mu' = 0 \quad (2.65)$$

式中, $l$  为分子运动的平均自由程; $c$  是分子运动的速度; $\rho$  是气体的密度。在一般情况下,空气可以近似地视为完全气体,所以  $\mu'$  可以近似地视为零。今后就假设  $\mu' = 0$ 。



## 2.7 纳维-斯托克斯运动微分方程

### 2.7.1 一般情况下的纳维-斯托克斯方程

现在,在最一般情况下来推导粘性流体运动时所服从的动力学规律。假设流体不但有粘性而且可压缩。参看图 2.17,在任一瞬间  $t$ ,在流场中任一点  $M(x, y, z)$ ,以  $M$  为几何中心,作一矩形六面体流体微团,边长分别为  $dx, dy, dz$ 。设在点  $M$  处流体微团的速度与密度分别为  $u, v, w$  和  $\rho$ ,单位质量流体所受的彻体力为  $X, Y, Z$ ,应力为  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,则此流体微团的示力图如图 2.17 所示(力未画全)。此流体微团之质量为

$$\rho dx dy dz$$

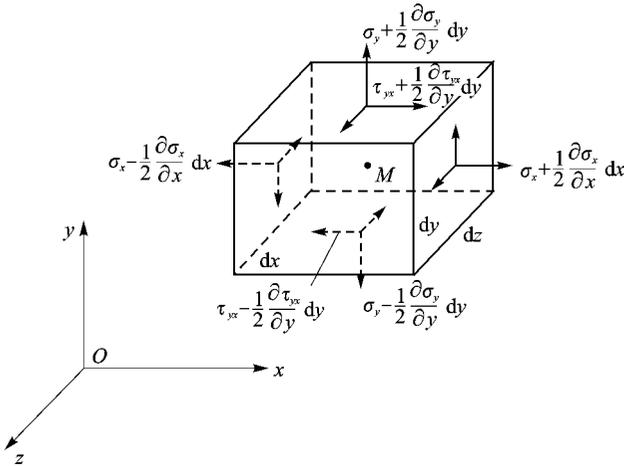


图 2.17 流体微团所受的粘性力

将牛顿第二定律应用于此微团,得  $x$  方向的运动方程为

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \sigma_x + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) - \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \right] dy dz + \\ & \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \left( \tau_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \\ & \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \left( \tau_{zx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \right] dx dy + \\ & \rho X dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

整理后得



$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.66a)$$

同理,在  $y$  方向和  $z$  方向可得

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho Y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.66b)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho Z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (2.66c)$$

在应力与应变率间的关系式(2.59)中,令  $\mu' = 0$  以及  $\mu = \text{常数}$ ,并代入式(2.66a),得

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - p \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \\ &\quad \rho X + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &\quad \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &\quad \rho X + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

或

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.67a)$$

同理,得

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.67b)$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.67c)$$

这就是粘性、可压缩流体所服从的动力学规律,也就是所谓的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程(亦称 N-S 方程),它与理想流体的欧拉方程比较,多了右边因粘性而引起的两项。如  $\mu = 0$  ( $\nu$  也等于 0),则式(2.67a~c)就化成欧拉方程了。

## 2.7.2 不可压流的纳维-斯托克斯方程

不可压流的运动学规律是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.68)$$

代式(2.68)入式(2.67a~c),即得不可压粘流所服从的动力学规律为



$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

### 2.7.3 不可压粘流问题的边界条件

当流体的压缩性可忽略以及  $\rho$  可视为常数时,问题化为在给定的边界条件下求 4 个未知函数  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$  和  $p(x, y, z, t)$ 。这里正好有 4 个方程式(2.68)和式(2.69),所以,问题是可解的。解此诸方程的物面边界条件为:物面上任一点的速度等于与其接触的流体微团的速度。如物体是静止的,则与物体表面接触的流体微团的速度等于零,即不但有

$$v_n = \text{沿物体表面的法线分速} = 0 \quad (2.70)$$

且有

$$v_t = \text{沿物体表面的切向分速} = 0 \quad (2.71)$$

这比理想流体的物面边界条件多了一个,即式(2.71)。这是必须的,因式(2.69)比欧拉方程提高了一阶,边界条件就应该多一个。

### 2.7.4 可压缩粘性流动问题

可压缩粘性流动所服从的动力学规律是式(2.67a~c),运动学规律是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.72)$$

此时,未知函数是  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$ ,  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $\mu(T)$  和温度  $T(x, y, z, t)$ , 即 7 个未知数。现在,运动方程只有式(2.67a~c)和式(2.72)这 4 个方程,故尚需另找 3 个补充方程,其中之一为表示流体粘性性质的方程,如式(2.63)

$$\mu = \mu(T) \quad (2.73)$$

其二为流体的状态方程,如为完全气体(有时亦称为理想气体,但因为已定义  $\mu=0$  的流体为理想流体,故此处用完全气体这一名词,以示  $\mu \neq 0$ ), 则其状态方程为

$$p = \rho RT \quad (2.74)$$

其三就是热力学中的能量方程。

## 2.8 粘性不可压流的相似律

第 1 章已介绍了流场相似的概念。了解到,在完全相似的流场中,任何一对对应点上的任



何一种物理量(如密度、压强和粘性系数等)都是成比例的,即

$$\frac{\rho'}{\rho} = \text{常数} = k_\rho$$

$$\frac{p'}{p} = \text{常数} = k_p$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \text{常数} = k_\mu$$

...

同时也了解到雷诺数  $Re$  是流场相似的一个条件或准则。在此基础上,应该讨论下列两个问题:① 在什么条件下,两个流场会达到完全相似?② 在相似的条件,模型实验的流场和实际物流场之间有什么关系?如何把模型实验的结果转用到实际情况中去?现在,有了 N-S 方程,就可以由此方程出发,全面分析一下流场相似的必要与充分条件。

### 2.8.1 两个粘性不可压流场完全相似的必要与充分条件

在不可压粘性流动中,流体运动所服从的规律是连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

和纳维-斯托克斯方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

式中,  $\rho$  和  $\mu$  均为常数。

现在,把式(2.75)中的诸物理量化为量纲一的形式,即假设

$$\left. \begin{aligned} u &= u'V_\infty, & v &= v'V_\infty, & w &= w'V_\infty \\ p &= p'p_\infty, & \rho &= \rho'\rho_\infty, & \mu &= \mu'\mu_\infty \\ X &= X'g, & Y &= Y'g, & Z &= Z'g \\ x &= x'L, & y &= y'L, & z &= z'L, & t &= t'T \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

在不可压流中,  $\rho = \rho_\infty, \mu = \mu_\infty$ 。由此得,  $\rho' = 1, \mu' = 1$ 。式中带“'”者均是量纲一的量,有下标“ $\infty$ ”者为远前方(或原始流动)的物理量,  $L$  和  $T$  是这个流动中有代表性的长度和时间,  $g$  为重力加速度。将式(2.76)代入式(2.75),经过下列推导可得量纲一形式的方程组(2.77a~c):

$$\frac{V_\infty}{L} \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = 0$$



或

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{V_\infty}{L} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V_\infty^2}{L} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) =$$

$$gX' - \frac{p_\infty}{\rho_\infty L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty V_\infty}{\rho_\infty L^2} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right)$$

用  $\frac{V_\infty^2}{L}$  除上式各项, 得

$$\frac{L}{V_\infty T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) =$$

$$\frac{gL}{V_\infty^2} X' - \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (2.77a)$$

同理, 得其余二式为

$$\frac{L}{V_\infty T} \frac{\partial v'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) =$$

$$\frac{gL}{V_\infty^2} Y' - \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \quad (2.77b)$$

$$\frac{L}{V_\infty T} \frac{\partial w'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) =$$

$$\frac{gL}{V_\infty^2} Z' - \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty L} \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \quad (2.77c)$$

绕实物或绕模型的流场都是服从纳维-斯托克斯方程的, 所以, 如果假设式(2.75)是对实物流场写下的, 则同样可写下模型流场的运动方程为

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial w'_1}{\partial z'_1} = 0$$

$$\frac{L_1}{V_{1\infty} T_1} \frac{\partial u'_1}{\partial t'_1} + \left( u'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + v'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial y'_1} + w'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial z'_1} \right) =$$

$$\frac{gL_1}{V_{1\infty}^2} X'_1 - \frac{p_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty}^2} \frac{\partial p'_1}{\partial x'_1} + \frac{\mu_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty} L_1} \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y_1'^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial z_1'^2} \right) \quad (2.78a)$$

$$\frac{L_1}{V_{1\infty} T_1} \frac{\partial v'_1}{\partial t'_1} + \left( u'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial y'_1} + w'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial z'_1} \right) =$$

$$\frac{gL_1}{V_{1\infty}^2} Y'_1 - \frac{p_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty}^2} \frac{\partial p'_1}{\partial y'_1} + \frac{\mu_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty} L_1} \left( \frac{\partial^2 v'_1}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial y_1'^2} + \frac{\partial^2 v'_1}{\partial z_1'^2} \right) \quad (2.78b)$$

$$\frac{L_1}{V_{1\infty} T_1} \frac{\partial w'_1}{\partial t'_1} + \left( u'_1 \frac{\partial w'_1}{\partial x'_1} + v'_1 \frac{\partial w'_1}{\partial y'_1} + w'_1 \frac{\partial w'_1}{\partial z'_1} \right) =$$

$$\frac{gL_1}{V_{1\infty}^2} Z'_1 - \frac{p_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty}^2} \frac{\partial p'_1}{\partial z'_1} + \frac{\mu_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty} L_1} \left( \frac{\partial^2 w'_1}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 w'_1}{\partial y_1'^2} + \frac{\partial^2 w'_1}{\partial z_1'^2} \right) \quad (2.78c)$$



比较方程组(2.77)和方程组(2.78)可以看出,只要这两组方程中的彻体力相等和由波浪线所标示的复合参数(由流场中具有代表性的物理量所组成,对一定的流场而言,是等于常数的)分别相等,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{V_{\infty} T} &= \frac{L_1}{V_{1\infty} T_1}, & \frac{gL}{V^2} &= \frac{gL_1}{V_{1\infty}^2} \\ \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} &= \frac{p_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty}^2}, & \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty} L} &= \frac{\mu_{1\infty}}{\rho_{1\infty} V_{1\infty} L_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

则这两组方程就完全相同。如果边界条件相同(包括模型和实物几何相似)和初始条件相同,这两组方程的解也一定完全相同,亦即在两流场中任一对应点 $(x'_1, y'_1, z'_1)$ 和任一对应时间 $t'$ ,将有

$$\left. \begin{aligned} u' &= u'_1, & v' &= v'_1, & w' &= w'_1 \\ p' &= p'_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

根据量纲一的定义式(2.76)和式(2.80),得

$$\frac{u}{V_{\infty}} = \frac{u_1}{V_{1\infty}}$$

或

$$\frac{u_1}{u} = \frac{V_{1\infty}}{V_{\infty}} = \text{常数} = k_v$$

同样

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1}{v} &= \frac{v_{1\infty}}{V_{\infty}} = k_v \\ \frac{w_1}{w} &= \frac{v_{1\infty}}{V_{\infty}} = k_v \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

$$\frac{p_1}{p} = \frac{p_{1\infty}}{p_{\infty}} = \text{常数} = k_p$$

亦即,在任何一对对应点上,在任何对应瞬间,两流场中所对应的物理量都保持一定的常数比,这就符合了先前所下的两个流场完全相似的定义。

## 2.8.2 相似准则

式(2.79)中的复合参数都是量纲一的,在流体力学中,分别有一定的名称和惯用的符号,现分述如下。

(1) 斯特劳哈尔数  $Sr$

$$Sr = \frac{L}{V_{\infty} T} \quad (2.82)$$

(2) 弗劳德数  $Fr$

$$Fr = \frac{V_{\infty}}{\sqrt{gL}} \quad (2.83)$$



(3) 欧拉数  $Eu$

$$Eu = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \quad (2.84)$$

(4) 雷诺数  $Re$

$$Re = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} L}{\mu_{\infty}} \quad (2.85)$$

根据上面所述,任何两个粘性不可压流动,只要初始条件和边界条件相同,再加上  $Sr, Fr, Eu$  和  $Re$  诸数相等,则这两种流动就完全相似。通常又称  $Sr, Fr, Eu$  和  $Re$  为不可压粘性流动的四个相似准则。

这样,就回答了本节开始时所提出的第①个问题,即在什么条件下,两个流动达到完全相似的问题。下面来讨论第②个问题,即:在相似的情况下,模型实验结果和实际流场有什么关系?如何把模型实验结果转用到实际流场中去?

## 2.9 两组相似流场间空气动力特性间的关系

假设模型与实物是几何相似的,流过两物体的流场也完全相似,如图 2.18 所示。在任一对应瞬间  $t$  和  $t_1$ ,在流场中任一一对应点  $A$  和  $A_1$  处取两个体积为  $\Delta V$  和  $\Delta V_1$  的相似流体微团,其质量分别为  $\Delta m$  和  $\Delta m_1$ 。令  $\Delta l$  和  $\Delta l_1$  分别表示其长度尺寸,则

$$\begin{aligned} \Delta m &= \rho \Delta V = K\rho(\Delta l)^3 \\ \Delta m_1 &= \rho_1 \Delta V_1 = K\rho_1(\Delta l_1)^3 \end{aligned}$$

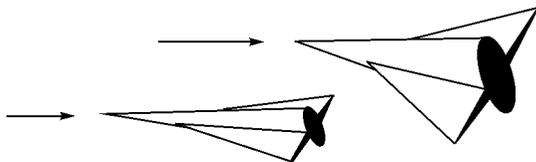


图 2.18 流场相似示意图

式中,  $K$  是一个常数,取决于所取流体微团的几何形状(如为立方体,则  $K=1$ )。设此二微团的加速度分别为  $a$  和  $a_1$ ,所受的微合力分别为  $\Delta F$  和  $\Delta F_1$ 。因为流动完全相似,此二微合力的方向当然相同,它们的绝对值之比可写为

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F} = \frac{\Delta m_1 a_1}{\Delta m a} = \frac{K\rho_1 a_1 (\Delta l_1)^3}{K\rho a (\Delta l)^3} = \frac{\rho_1 a_1 (\Delta l_1)^3}{\rho a (\Delta l)^3} = k_{\rho} k_a (k_l)^3 \quad (2.86)$$

或

$$\frac{dF_1}{dF} = k_{\rho} \left(\frac{k_l}{k_t^2}\right) (k_l)^3 = k_{\rho} \left(\frac{k_l}{k_t}\right)^2 k_l^2 = k_{\rho} k_v^2 k_l^2 \quad (2.87)$$

因为  $\Delta F$  和  $\Delta F_1$  的方向相同,所以它们的 3 个分量之间的关系也可以写成



$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta X_1}{\Delta X} &= k_\rho k_v^2 k_l^2 \\ \frac{\Delta Y_1}{\Delta Y} &= k_\rho k_v^2 k_l^2 \\ \frac{\Delta Z_1}{\Delta Z} &= k_\rho k_v^2 k_l^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

如将流体分成许多小微团,则整个流体所受的力为这许多小微团受力之和,即

$$\left. \begin{aligned} X &= \Sigma \Delta X, & Y &= \Sigma \Delta Y, & Z &= \Sigma \Delta Z \\ X_1 &= \Sigma \Delta X_1, & Y_1 &= \Sigma \Delta Y_1, & Z_1 &= \Sigma \Delta Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

将式(2.88)代入式(2.89),得

$$\frac{X_1}{X} = k_\rho k_v^2 k_l^2, \quad \frac{Y_1}{Y} = k_\rho k_v^2 k_l^2, \quad \frac{Z_1}{Z} = k_\rho k_v^2 k_l^2 \quad (2.90)$$

按反作用定律,流体对物体的作用力与流体所受到的反作用力大小相等,方向相反。所以,如将  $X, Y, Z$  和  $X_1, Y_1, Z_1$  分别看做物体与模型所受的气动力,则式(2.90)仍然成立。

以直匀流流过如图 2.19 所示等速平飞的飞机为例,这时迎角为零。此飞行器受到一个阻力  $D$ ,其方向为  $Ox$  轴的正方向;还受到一个升力  $L$ ,其方向为  $Oz$  轴的正方向。并定义下列气动力系数

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \text{阻力系数} \quad (2.91a)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \text{升力系数} \quad (2.91b)$$

式中,  $S$  为机翼的投影面积,或简称机翼面积(矩形机翼的  $S = \text{翼弦} \times \text{翼展}$ )。将式(2.91a)代入式(2.90),得其第 1 式为

$$\frac{C_{D1} \frac{1}{2} \rho_1 V_{1\infty}^2 S_1}{C_D \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = k_\rho k_v^2 k_l^2 = \frac{\rho_1 V_{1\infty}^2 l_1^2}{\rho V_\infty^2 l^2} \quad (2.92)$$

式中,  $l$  和  $l_1$  为机翼和模型的一个代表性尺寸(例如翼弦长度)。因为模型与机翼几何相似,显然有

$$\frac{S_1}{S} = k_l^2 = \frac{l_1^2}{l^2}$$

因此,式(2.92)成为

$$C_D = C_{D1} \quad (2.93a)$$

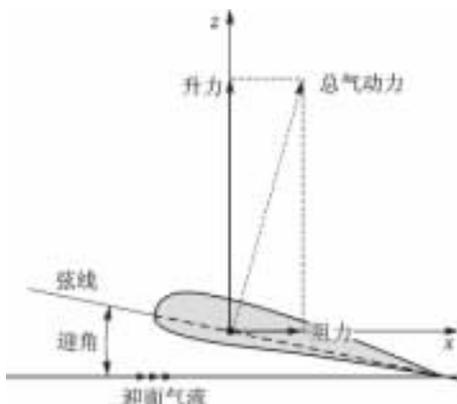


图 2.19 空气动力



同样,对于升力系数而言,下式成立

$$C_L = C_{L1} \quad (2.93b)$$

因此,得到下列重要结论:在流动完全相似的情况下,模型与实物的气动力系数相等。因此,如果将在模型上所测得的  $X_1, Y_1, Z_1$  换算成其相应的气动力系数,然后代入式(2.90),就可以求出实际物体所受的力  $X, Y, Z$  了。可以证明,在完全相似的流场中,模型与实物的这些气动力系数皆分别相等。

这样,在 2.8 节开始处所提出的两个问题,就全部解决了。下面再进一步说明一些相似准则的物理意义。

## 2.10 一些相似准则的物理意义

一般说来,作用在流体微团上的力有下列数种(图 2.20):粘性力  $F_f$ 、压力  $F_p$  和重力  $F_G$  (彻体力),再加以惯性力  $F_I$ ,可以组成一个封闭的力多边形。在完全相似两种流动中,对应点上(在对应的瞬间)的力多边形是相似的,据此可以看出一些相似准则的物理意义。

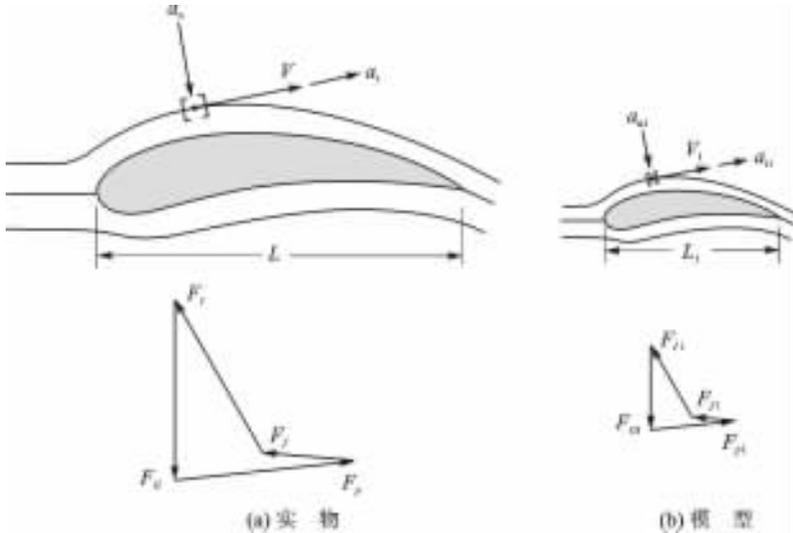


图 2.20 动力相似流场

### 2.10.1 计及粘性力的相似准则——雷诺数 $Re$

假设在流动中彻体力可以忽略不计,流体的密度也可以视为不变,而且流动是定常的(空气的低速定常流动就属于此种情况)。此时,相似条件就由主要作用力(粘性力和惯性力)的关系来确定。



参看图 2.20, 惯性力的大小等于流体微团的质量  $\Delta m$  乘以加速度  $a$ 。如令  $\Delta F_I$  表示惯性力, 则

$$\Delta F_I = \text{惯性力} = \Delta m \times a = K\rho_1(\Delta l)^3 a_1$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_{f1}}{\Delta F_I} &= \frac{K\rho_1(\Delta l_1)^3 a_1}{K\rho(\Delta l)^3 a} = k_\rho k_l^3 k_a = k_\rho k_v^2 k_l^2 \\ \frac{K\rho_1 v_1^2 l_1^2}{K\rho v^2 l^2} &= \frac{\rho_1 v_1^2 l_1^2}{\rho v^2 l^2} \end{aligned} \quad (2.94)$$

粘性力  $\Delta F_f$  等于剪应力乘以作用面积  $\Delta S$ 。根据牛顿粘性定律, 剪应力  $\tau$  与法向速度梯度成正比, 且比例常数就是粘性系数  $\mu$ , 故

$$\Delta F_f = \tau \Delta S = \mu \frac{\partial v}{\partial n} \Delta S$$

模型流场上的微元粘性力是

$$\Delta F_{f1} = \tau_1 \Delta S_1 = \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} \Delta S_1$$

所以

$$\frac{\Delta F_{f1}}{\Delta F_f} = \frac{\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} \Delta S_1}{\mu \frac{\partial v}{\partial n} \Delta S} = k_\mu k_v k_l \quad (2.95)$$

当力多边形相似时, 各对应边应成比例, 故

$$\frac{\Delta F_{f1}}{\Delta F_f} = \frac{\Delta F_{f1}}{\Delta F_I} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta F_{f1}}{\Delta F_{f1}} = \frac{\Delta F_I}{\Delta F_f} \quad (2.96)$$

因此得到

$$\frac{K\rho_1(\Delta l_1)^3 a_1}{\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} \Delta S_1} = \frac{K\rho(\Delta l)^3 a}{\mu \frac{\partial v}{\partial n} \Delta S}$$

将上式两边同除右边的式子, 得

$$\frac{k_\rho k_l^3 k_a}{k_\mu k_v k_l} = 1$$

或

$$\frac{k_\rho k_v k_l}{k_\mu} = 1$$

最后得到

$$Re_1 = \frac{\rho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho v l}{\mu} = Re \quad (2.97)$$

这就是说, 当两个流场的惯性力与粘性力成同一比例时, 其雷诺数必须相等。这是在相似流动



中早已知道了的。但是,这里告诉我们,雷诺数的物理意义是流体微团所受的惯性力与粘性力之比[见式(2.96)]。雷诺数愈大,相对于惯性力而言,粘性力就愈小。

在模型实验中,如果两种流体的运动粘性系数相等,即

$$\nu_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1} = \frac{\mu}{\rho} = \nu$$

则在计及粘性相似时,式(2.97)化为

$$v_1 l_1 = vl \quad (2.98)$$

可见,如果模型比实物小,则流速必须成比例地放大才能保持  $Re$  数相等。

### 2.10.2 计及重力时的相似准则——弗劳德数 $Fr$

作用在流体微团上的重力  $\Delta F_G$ ,其大小为

$$\Delta F_G = \Delta m \cdot g = K_\rho (\Delta l)^3 g$$

$$\Delta F_{G_1} = \Delta m_1 \cdot g = K_{\rho_1} (\Delta l_1)^3 g$$

如流场相似,则力多边形的对应边成比例。将重力与惯性力分别比较,应有

$$\frac{\Delta F_{G_1}}{\Delta F_G} = \frac{\Delta F_{I_1}}{\Delta F_I}$$

或

$$\frac{\Delta F_{G_1}}{\Delta F_{I_1}} = \frac{\Delta F_G}{\Delta F_I}$$

将重力和惯性力的表达式(2.96)分别代入上式,得

$$\frac{K_{\rho_1} (\Delta l_1)^3 g}{K_{\rho_1} (\Delta l_1)^2 v_1^2} = \frac{K_\rho (\Delta l)^3 g}{K_\rho (\Delta l)^2 v^2}$$

由此得

$$\frac{\Delta l_1 g}{v_1^2} = \frac{\Delta l g}{v^2}$$

将  $\Delta l_1$  和  $\Delta l$  分别以其特征长度  $l_1$  和  $l$  代替,得

$$Fr_1 = \frac{l_1 g}{v_1^2} = \frac{lg}{v^2} = Fr \quad (2.99)$$

这就是说,当重力与惯性力成比例时,  $Fr$  数必须相等。从这里还可以知道  $Fr$  数的物理意义是流体微团的重量与其惯性力之比。

做模型实验时,如都在重力场中做实验,由式(2.99)知,当  $Fr$  数相等时,有

$$\frac{l_1}{v_1^2} = \frac{l}{v^2} \quad (2.100)$$

所以,如果模型比实物小,速度也应按下列比例缩小,即

$$v_1 = v \sqrt{\frac{l_1}{l}} \quad (2.101)$$



如不计及彻体力时,此准则自然不存在了。在空气动力学中,彻体力通常是忽略不计的,但在处理水流问题,例如船在水中航行时,重力是不能忽略的,因而模型实验的  $F_{r_1}$  应保证与实际流场的  $Fr$  相等。

### 2.10.3 压力相似时的相似准则——欧拉数 $Eu$

流体微团所受压力的合力  $\Delta F_p$  等于其压强  $p$  乘以表面积  $\Delta S$ ,所以

$$\Delta F_p = p\Delta S$$

$$\Delta F_{p_1} = p_1\Delta S_1$$

将压力与惯性力比较,如果力多边形相似,则

$$\frac{\Delta F_{p_1}}{\Delta F_p} = \frac{\Delta F_{I_1}}{\Delta F_I}$$

或

$$\frac{\Delta F_{p_1}}{\Delta F_{I_1}} = \frac{p_1\Delta S_1}{K\rho_1(\Delta l_1)^2 v_1^2} = \frac{\Delta F_p}{\Delta F_I} = \frac{p\Delta S}{K\rho(\Delta l)^2 v^2}$$

由此得

$$Eu_1 = \frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{p}{\rho v^2} = Eu \quad (2.102)$$

这就是说,当压力与惯性力成比例时,两个流场的欧拉数  $Eu$  必须相等。从这里也可知道,欧拉数  $Eu$  的物理意义是压力与惯性力之比。

### 2.10.4 非定常流动的相似准则——斯特劳哈尔数 $Sr$

以上讨论的三种相似准则都与时间无关,而  $Sr$  数则是非定常运动的相似准则。假设两个流场不但几何相似,而且对应点处的速度在对应瞬间成比例,则

$$v_1 = \frac{dl_1}{dt_1}$$

$$v = \frac{dl}{dt}$$

式中,  $l_1$  和  $l$  分别为对应流线上的弧长(流体微团的对应路径)。因此

$$k_v = \frac{v_1}{v} = \frac{dl_1/dt_1}{dl/dt} = k_l/k_t \quad (2.103)$$

如以  $T_1, l_1$  和  $T, l$  分别表示二流场的特征时间和特征长度,则式(2.103)可写为

$$\frac{v_1}{v} = \frac{l_1/T_1}{l/T}$$

或

$$Sr_1 = \frac{v_1 T_1}{L_1} = \frac{v T}{L} = Sr$$



这就是说,在非定常流中,如果运动相似,则斯特劳哈尔数  $Sr$  必须相等。

## 2.11 粘性不可压层流问题解法概述

粘性不可压流体流动所服从的动力学规律是下述纳维-斯托克斯方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

以及连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

式中,  $X, Y, Z$  是单位质量流体所受彻体力的分量。这些方程中的未知函数共有 4 个:  $u, v, w$  和  $p$ , 现在正好有 4 个方程式, 所以问题是可以解决的。在具体求解式(2.104)时, 待求的 4 个未知函数尚需满足初始条件(例如  $t=0$  时)

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, 0) \\ v &= f_2(x, y, z, 0) \\ w &= f_3(x, y, z, 0) \\ p &= f_4(x, y, z, 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

和边界条件(例如物体静止不动时)

$$\left. \begin{aligned} \text{在物体表面上} & \quad (v_n)_{\text{表面}} = 0 \\ \text{在无限远处} & \quad v = V_{\infty} \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

与欧拉方程比较, 式(2.104)多了右边最后一项。该项是二阶导数, 其余诸项均为一阶导数, 故式(2.104)是比欧拉方程高了一阶的偏微分方程, 因此确定其解所需的边界条件就应比欧拉方程多一个。实验证明, 沿静止物体表面不但法向速度  $v_n$  等于零, 而且切向速度  $v_t$  也等于零, 即式(2.106)。故问题是有确定解的。在定常情况下, 式(2.104)左边第 1 项就没有了, 初始条件式(2.105)也没有了。



这种方程式非常难解,只有极少的几种特殊情况下,可以求得其精确解,后面将讲一个具有实际应用价值的例子。这里顺便指出难解的原因,主要是方程的非线性性质,即方程的左边含有非线性项如  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  等。这样,基本解的叠加法就不能用了,因而要求其精确解并满足物体表面边界条件就非常困难了。但是,如果具体问题中的  $Re$  很小,也就是说,流体微团所受的惯性力远比粘性力小时(如雾滴的降落,泥沙的沉淀等等),则作为近似方程,式(2.104)左边的表示惯性力的非线性项可以忽略不计,这时式(2.104)及连续方程就成为如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

也就是变成了线性偏微分方程,问题就比较容易解决了。航空上遇到的问题多半都是雷诺数  $Re$  很大的情况,在大雷诺数下如何简化式(2.104),将在边界层理论中讨论。

## 2.12 直圆管中的定常、不可压层流问题

设有一半径为  $R$  的、水平放置的无限长圆管,管内有密度为  $\rho$ 、粘性系数为  $\mu$  的不可压流体流过,每单位时间内通过此圆管的体积流量  $q_V$  为已知,或者说平均速度  $u_{\text{平均}}$  为已知,即

$$u_{\text{平均}} = \frac{q_V}{\pi R^2} = \text{已知} \quad (2.108)$$

假定重力可以忽略不计,雷诺数小于临界雷诺数,流动为定常层流,流动情况应大致如图 2.21 所示。因导管为无限长,且流动是定常的,则沿管长任一截面的速度分布情况,应当与其他截面的速度分布一样。如取管轴为  $x$  轴,则管内任一点  $P(x, y, z)$  处的速度应为

$$u = u(y, z), \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (2.109)$$

如用圆柱坐标系表示  $P$  点的速度,则应是

$$\left. \begin{aligned} u &= u(r) \\ v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

此处要求解以下 3 个问题:

① 任一截面处的速度分布,即求  $u = u(r)$ ; ② 每单位管长的压强降落; ③ 管壁所受的剪应力  $\tau_w$  和长为  $l$  的管段所受的摩擦阻力。

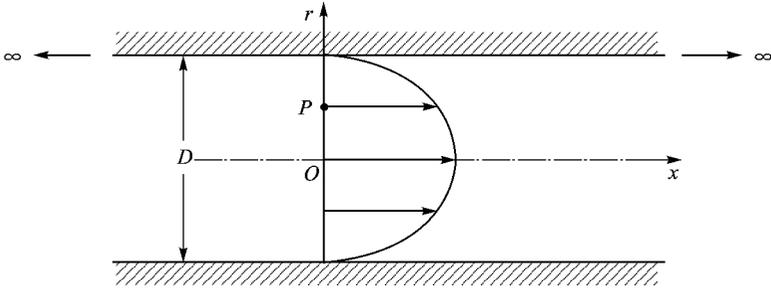


图 2.21 圆管不可压层流

解决此问题的方法如下。将式(2.109)代入基本方程式(2.104),并引用定常假设,得

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

边界条件是

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = R \text{ 处} \quad u = 0 \quad (2.112)$$

所以,问题化为在满足式(2.112)的条件下,求  $u$  和  $p$ 。由式(2.111)中的第 2、第 3 和第 4 个方程得

$$p = p(x) \quad \text{以及} \quad u = u(y, z) \quad (2.113)$$

将式(2.113)代入式(2.111)中的第 1 式,得

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.114)$$

此式左边仅为  $x$  的函数,右边仅为  $y$  和  $z$  的函数,故二者必须都等于同一常数,令此常数为  $K$ ,则

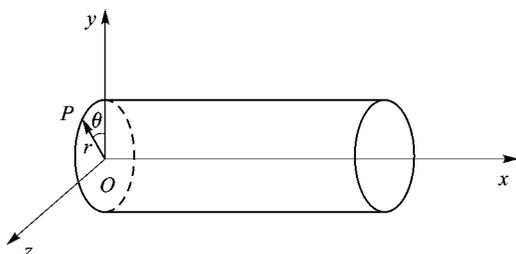
$$\frac{dp}{dx} = K = \text{待定常数} = \text{每单位长度的压强降落} \quad (2.115)$$

式(2.114)成为

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = K \quad (2.116)$$

因为已知  $u$  只是  $r$  的函数,在圆柱坐标系下积分式(2.116)较为方便(图 2.22),因此得

$$x = x, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

图 2.22 直角坐标系  $(x, y, z)$  与圆柱坐标系  $(x, r, \theta)$ 

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{du}{dr} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{y^2 + z^2}) + (O) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ &= \frac{du}{dr} \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{du}{dr} \frac{r \cos \theta}{r} = \frac{du}{dr} \cos \theta\end{aligned}$$

[式中  $(O) \frac{\partial \theta}{\partial y}$  表示该项的数量级是  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ ]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{du}{dr} \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \cos^2 \theta + \left( -\frac{du}{dr} \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctan \frac{z}{y} \right) = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \cos^2 \theta - \frac{du}{dr} \sin \theta \frac{1}{1 + (z/y)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{y} \right) = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \cos^2 \theta - \frac{du}{dr} \sin \theta \frac{y^2}{y^2 + z^2} \left( -\frac{z}{y^2} \right) = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \sin^2 \theta\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{du}{dr} \sin \theta \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{du}{dr} \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \cos^2 \theta\end{aligned}$$



故式(2.116)化为下列常微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{K}{\mu} = \text{常数} \quad (2.117)$$

这样,求解就很容易了,即

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} &= \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{K}{\mu} r \\ r \frac{du}{dr} &= \frac{1}{2} \frac{K}{\mu} r^2 + A \\ du &= \frac{1}{2} \frac{K}{\mu} r dr + A \frac{dr}{r} \end{aligned} \right\}$$

所以

$$u = \frac{1}{4} \frac{K}{\mu} r^2 + A \cdot \ln r + B$$

式中,  $A$  和  $B$  表示积分常数。当  $r=0$  时,即在管中心线上时,  $u$  应为有限值(不能为无限大)。要满足此条件,积分常数  $A$  必须为零,即

$$A \equiv 0$$

再引用  $r=R$  时,  $u=0$  的边界条件,得

$$0 = \frac{K}{4\mu} R^2 + B$$

所以

$$B = -\frac{K}{4\mu} R^2$$

最后得

$$u = \frac{K}{4\mu} (r^2 - R^2) \quad (2.118)$$

现在来求  $K$  值。在任一截面上,在半径为  $r$  处,取一环状截面如图 2.23 所示,则每单位时间内,流过此环状截面的流体体积为

$$dq_v = u 2\pi r dr$$

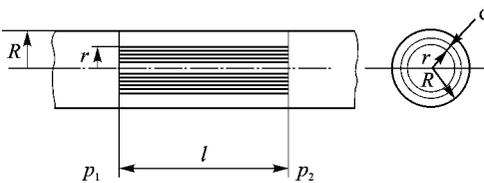


图 2.23 圆管截面示意图

流过整个截面的体积流量为

$$\begin{aligned} q_v &= 2\pi \int_0^R u r dr = 2\pi \frac{K}{4\mu} \int_0^R (r^2 - R^2) \frac{dr^2}{2} = \\ &= \frac{K\pi}{4\mu} \left( \frac{r^4}{2} - R^2 r^2 \right) \Big|_0^R = \frac{K\pi}{4\mu} \left( \frac{R^4}{2} - R^4 \right) = -\frac{K\pi R^4}{8\mu} \\ K &= -\frac{8\mu q_v}{\pi R^4} = -\frac{8\mu}{R^2} u_{\text{平均}} \end{aligned} \quad (2.119)$$

将式(2.119)代入式(2.118),就回答了第①个问题,即求得了任一截面处的速度分布为



$$u = 2u_{\text{平均}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

当  $r=0$  时,即在中心线上,  $u$  达到最大值

$$u_{\text{max}} = 2u_{\text{平均}} = \frac{2q_V}{\pi R^2} \quad (2.120)$$

由此得

$$u = u_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (2.121)$$

可见速度分布是一根抛物线,见图 2.21。

关于第②个问题,每单位管长的压强降落  $\frac{dp}{dx}$  可由下式求得

$$\frac{dp}{dx} = K = -\frac{8\mu}{R^2} u_{\text{平均}} = -\frac{8\mu q_V}{\pi R^4} = \text{常数} \quad (2.122)$$

式中,负号表示  $x$  增大时  $p$  减小。

现在来回答第③个问题,即求管壁所受的剪应力  $\tau_w$  以及长度为  $l$  的管段所受的摩擦阻力。根据牛顿粘性定律,流体所受的剪应力为

$$\begin{aligned} \tau_w = (\tau)_{r=R} &= \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} = \mu \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=R} = \left(\mu \frac{K}{2\mu} r\right)_{r=R} = \\ &= \frac{\mu KR}{2\mu} = -\frac{8\mu^2 q_V R}{2\mu \pi R^4} = -\frac{4\mu q_V}{\pi R^3} = -\frac{4\mu u_{\text{平均}}}{R} \end{aligned} \quad (2.123)$$

根据反作用定律,管壁所受剪应力应是

$$-\tau_w = \frac{4\mu u_{\text{平均}}}{R} = \text{常数}$$

长度为  $l$  的管段所受的摩擦阻力为剪切应力乘以表面面积,即

$$\frac{4\mu u_{\text{平均}}}{R} \cdot 2\pi R \cdot l = 8\pi \mu l u_{\text{平均}} \quad (2.124)$$

至此,3个问题已全部解决了。现在把这个结果化成水力学上常用的形式。定义损失系数  $\lambda$ ,即

$$\lambda = \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho u_{\text{平均}}^2} \frac{D}{l} \quad (2.125)$$

用  $\lambda$  来表示压强降落情况,式中,  $D$  为管直径,  $l$  为所取管长,  $p_1 - p_2$  为管段两端的压强差。显然

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \text{每单位管长的压强降落} = \frac{8\mu}{R^2} u_{\text{平均}} \quad (\text{等于 } K \text{ 的绝对值})$$

由此得

$$\lambda = \frac{8\mu}{R^2} u_{\text{平均}} \cdot D \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\rho u_{\text{平均}}^2} = \frac{64\mu}{\rho u_{\text{平均}} D}$$



即

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.126)$$

式中,  $Re$  为管流的雷诺数  $Re = (\rho u_{\text{平均}} D / \mu)$ , 而  $\lambda$  就是第 1 章式(1.27)中的(4f)。此式与式(1.27)完全一致, 但这里不是用工程分析方法, 而是严格地在给定边界条件下求解 N-S 方程所得的结果。这表明, 对于比较简单的问题, N-S 方程是可以求得精确解的。不过在一般情况下, 要求得精确解是不可能的, 需要用数值解。式(2.126)说明, 损失系数  $\lambda$  与管流的雷诺数  $Re$  是成反比的。在小雷诺数下, 此式已为实验所证实。

实际工程中所遇到的管流问题(如自来水管流动, 或油管流动)可分为两类, 一类是要在一定的流量  $q_V$  (或  $u_{\text{平均}}$ ) 之下, 计算应有的压强差; 第二类是已知压强差, 要求计算管中流量。第一类问题解法是: 根据式(2.127)算出  $Re$ , 然后按照式(2.126)算出  $\lambda$ , 最后代入式(2.125)计算出所需的压强差

$$p_1 - p_2 = \lambda \left( \frac{1}{2} \rho u_{\text{平均}}^2 \right) \frac{l}{D} \quad (2.127)$$

关于第二类问题, 已知的是  $p_1 - p_2$ , 而  $\lambda$  和  $q_V$  (或  $u_{\text{平均}}$ ) 均不知道, 这样就不便于直接算出  $q_V$  来。要先估计一个平均速度  $u_{1\text{平均}}$  的值, 代入式(2.125), 算出  $\lambda_1$ ; 然后将所得到的  $\lambda_1$  的值代入式(2.126), 计算出  $u_{2\text{平均}}$  来, 此  $u_{2\text{平均}}$  当然不会正好等于  $u_{1\text{平均}}$ ; 然后再以  $u_{2\text{平均}}$  代入式(2.125), 计算出  $\lambda_2$ ; 将  $\lambda_2$  代入式(2.126), 计算出  $u_3$  来; ……如此下去, 直至最后一次的  $u_{\text{平均}}$  与前一次的  $u_{\text{平均}}$  值之差与所要求的精确度符合为止。这样, 最后一次的  $u$  就是问题的解。

需强调一下, 以上求得损失系数  $\lambda$  的公式(2.126)只适用于层流。如果是湍流, 公式是不同的。

## 习 题

2.1 试证明  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  是一个二阶张量, 以及  $e_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  是一个对称的二阶张量。

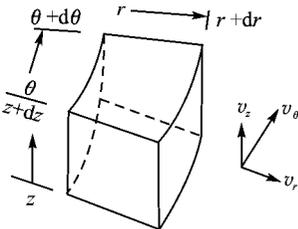


图 2.24 习题 2.2 附图

2.2 参看图 2.24, 用图示之圆柱坐标系中的微元控制体, 应用质量守恒定律, 推导圆柱坐标系中的连续方程。

2.3 将圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$  中的连续方程简化为平面极坐标系中定常可压流的连续方程, 并导出相应的流函数与速度的关系式。

2.4 假设某平面不可压等温流的流函数表达式为

$$\psi = C(x^2 y - y^3 / 3)$$

式中,  $C$  是一个常数。试问此流函数所代表的流动是否是



在  $\mu$  为常值下的一个精确解? 如果是, 试求压强分布  $p(x, y)$ , 并绘制几条有代表性的流线。

2.5 一种二维不可压非定常流的速度分布为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{C}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4t\nu}\right) \right]$$

式中,  $C$  和  $\nu$  都是常数, 重力忽略不计。试问此流动是不是连续方程和 N-S 方程的一个精确解? 如果是, 请在几个有代表性的时间之下画出速度型。

2.6 平面无旋可压流的微分方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(u^2 + v^2) + (u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (v^2 - a^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

式中,  $\phi$  是速度位势,  $a$  是声速。试将此式化为量纲一, 并定义一些组合参数。

2.7 在中等雷诺数及大雷诺数下, 压强的改变是用  $(\rho_0 V_0^2)$  来化为量纲一的; 但在雷诺数很小的条件下, 压强的改变要用  $(\mu V_0/L)$  来化为量纲一。试在雷诺数很小的条件下, 重新将 N-S 方程化为量纲一, 定义所出现的一些组合参数, 并阐述这时的流动现象。

# 第 3 章 平面流动的边界层方程及其解

## 3.1 边界层概念的提出

粘性很小的流体以大雷诺数运动时,在大部分流场上可以略去粘性作用,但在物面附近的很薄一层的流体内必须考虑粘性的作用。这一薄层流体,称为边界层。提出这个概念是有历史原因的。

19 世纪末,流体力学的研究工作有两个互不沟通的方向:一是理论流体力学(亦称水动力学),采用数学方法研究流体对固体物的绕流,当时已达到较高的水平;但计算结果往往与实验结果不一致。例如圆柱体绕流,计算结果是没有阻力,但实验表明有阻力。于是,在流体力学史上留下了达朗伯疑题(d'Alembert's paradox)。二是水力学,主要采用实验方法进行研究,将实验结果归纳成经验公式或半经验公式应用于工程实际,但缺乏理论基础。

理论流体力学的计算结果与实验结果不一致的原因是在运动方程中没有将流体的粘性考虑进去。计及流体粘性的、由 Navier 与 Stokes 分别于 1821 年及 1845 年建立起来的 Navier - Stokes(N-S)方程,又因过于复杂而不可能在当时的技术条件下求解。所以,流体力学的发展遇到了困难。一方面是无粘流理论解决不了实际问题,另一方面是粘流理论无法求解(蠕流有解,但没有实用价值)。边界层概念提出来以后,把这两方面的困难都解决了。

德国空气动力学家路德维希·普朗特(Ludwig Prandtl)在汉诺威大学执教时,用水槽对流动现象进行了大量的观察研究。他发现,在大雷诺数前提下,粘性系数很小的流体在大部分流场上的流谱与无粘流的流谱是一致的,差别主要在物面附近(图 3.1)。因此,他提出了“边

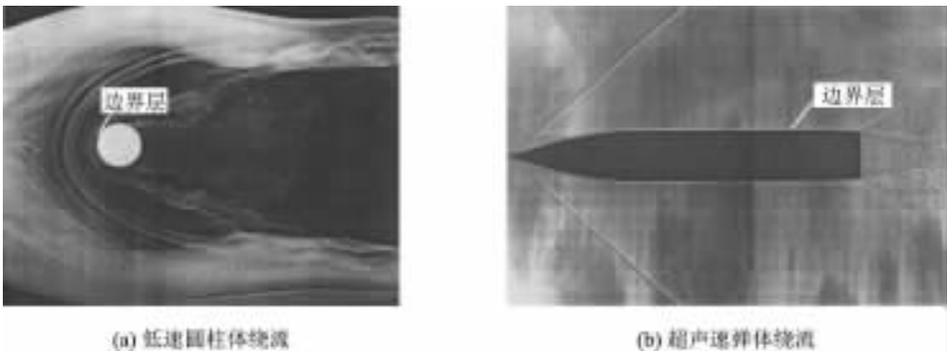


图 3.1 物体的粘性绕流流谱



“边界层”概念,即将大雷诺数下的流场分成两部分处理。在“边界层”以外,仍用无粘理论来处理问题,而在边界层之内则考虑流体的粘性(图 3.2)。但由于边界层很薄,粘流的运动方程在边界层内可以大大简化,以至于可以得到一些有用的解析解。所以,边界层概念提出来以后,既挽救了无粘流理论,使其在大部分流场上可以应用;也挽救了粘流理论,使其得以求得解答。在工程应用方面,尤其是在航空工程中,小粘性、大雷诺数的流动问题是非常多的,完全可以用边界层理论来解决。这样,边界层概念对流体力学的发展起了很大的作用。当然,现在已经进入 21 世纪了,计算技术与计算机发展得很快,人们已经可以用数值法直接求解 N-S 方程。但在研究物理现象时,边界层概念仍然是很有用的。

边界层概念是普朗特于 1904 年在德国海德堡召开的第三届国际数学大会上宣读的论文中正式提出的,论文题目是《论粘性很小的流体运动》(über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung)。参加此次大会的 Göttingen 大学数学系主任克莱因(F. Klein)教授称赞普朗特的文章是本届大会的最优秀论文,并邀请普朗特到 Göttingen 大学去组建应用力学系。此后,普朗特就一直在 Göttingen 工作,直到 1953 年去世。他研究边界层时用过的水槽原件,现在作为文物陈列在法兰克福的德国国家博物馆内。

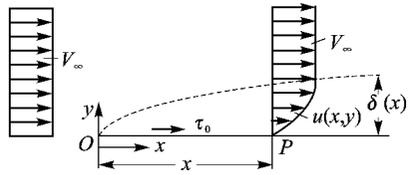


图 3.2 平板边界层示意图

## 3.2 平面不可压层流边界层微分方程

### 3.2.1 边界层流动图画

粘性流体流经任一物体(例如机翼与机身)的问题,归结为在相应的边界条件下解 N-S (纳维-斯托克斯)方程的问题。由于 N-S 方程太复杂,在很多实际问题中,不能不做一些近似假设使其简化,以求问题得以近似地解决。简化时,必须符合物理事实,因此首先看看空气流过静止物体(例如翼型)的物理图画。由直接观察得知,流场可以分为 3 个区,如图 3.3 所示。第 1 区称为边界层。注意到,在物体表面上,流动速度  $u=0$ ;离开表面很小的距离,速度就有很快的增长。沿物面任一点 P 处法线上的速度分布(速度型)如图 3.2 所示。由此图看出,在靠近物面的一薄层流体中,速度梯度很大。因此,即使流体的  $\mu$  很小,粘性摩擦力( $\mu$  与速度梯度的乘积)也是不能忽略的。此薄层流体称为边界层。在此层的外边界上,速度就和层外的自由流速差不多了。当然,边界层的内边界就是被绕流物体的表面。

第 2 区称为尾迹区。边界层内的流动是有旋流。顺流而下,在物体后面形成一系列细小的旋涡,称之为尾迹区。通常尾迹区是很狭窄的。

第 3 区称为位流区。在边界层和尾迹区以外,速度梯度很小。只要流体的粘性系数不大,

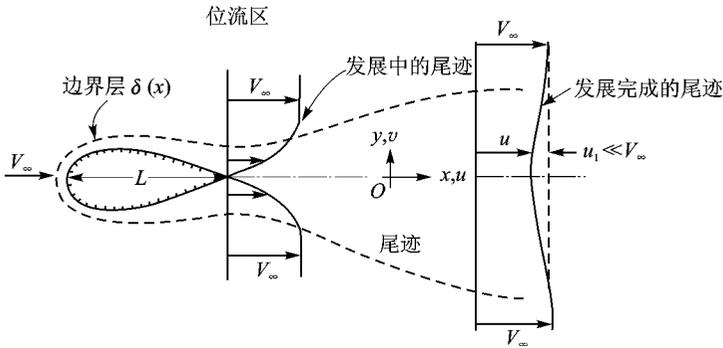


图 3.3 有边界层的流动图谱

摩擦力就可以忽略。也就是说,可以将边界层和尾迹区以外的广大区域视为位流区。

因此,位流区内的流体可看做理想流体,并用欧拉方程来研究其运动。在边界层内则用 N-S 方程来研究其运动。又因边界层很薄, N-S 方程可以大大简化。本章研究边界层内的流动问题。

### 3.2.2 二维平板的边界层微分方程式

设直匀流  $V_\infty$  以零迎角平行流过一块长度为  $l$  的平板,如图 3.4 所示。由于流体有粘性,在任一位置  $x$  处,平板表面上的速度为零,其他各点的流速则随  $y$  的增大而逐渐增大。从理论上讲,只有当  $y \rightarrow \infty$  时,速度才等于  $V_\infty$ 。不过,速度的增大主要集中在  $x$  轴附近的边界层

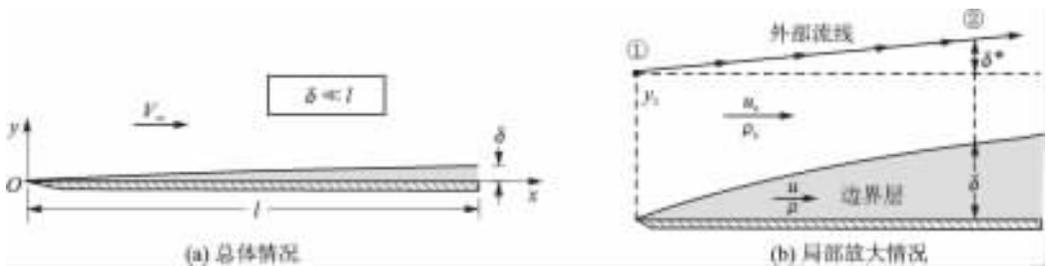


图 3.4 平板边界层

内。为了确切指明边界层的厚度,人们规定,当某个  $y$  处的速度达到层外自由流速(此时为  $V_\infty$ )的 99% 时,这一点到物体表面的距离( $y$ )称为边界层在该点的厚度,记为  $\delta$ 。显然,边界层的厚度是与  $x$  有关的,所以写成  $\delta(x)$ 。平板前缘处,  $\delta=0$ ; 往下游去,  $\delta$  是逐渐增大的。尽管如此,就总体来说,  $\delta(x)$  仍然是很薄的,即

$$\delta(x) \ll l \quad (3.1)$$

现在,在忽略彻体力的前提下,利用式(3.1)来简化平面流动的 N-S 方程



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

在式(3.2)中,  $y$  的数值限制在边界层之内, 即

$$0 \leq y \leq \delta \quad (3.3)$$

这就是说,  $y$  的数值是  $\delta$  级的小量, 记为

$$y \sim \delta \quad (3.4)$$

现在来比较式(3.2)中各项的大小, 并简化此式。因为物面上  $u=0$ , 而在边界层的外缘处(速度为  $V$ ),  $u$  具有  $V$  的量级, 由此可知, 当  $y$  由 0 变化到  $\delta$  时,  $u$  的增量  $\Delta u$  具有  $V$  的量级, 即  $\Delta u \sim V$ ,  $\Delta y \sim \delta$ , 所以  $\frac{\partial u}{\partial y}$  的量级应是

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta}$$

同样可以证明, 在边界层内,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  的量级应是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{V}{\delta^2}$$

现在来估计  $\frac{\partial u}{\partial x}$  的量级。当沿着物面移动物体长度  $l$  时,  $u$  的改变可以从 0 到  $V$ , 即  $\Delta u \sim V$  和  $\Delta x \sim l$ , 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{l}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{V}{l^2}$$

由式(3.2)中的第 3 式(连续方程)知

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &\sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{l} \end{aligned}$$

故得

$$v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy \sim \int_0^y \frac{V}{l} dy \sim \frac{V\delta}{l}$$

和

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{V\delta}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{V\delta}{l^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{V}{l\delta}$$

现在写下式(3.2)中的第 1 式, 并在其每一项的下方注明该项的量级



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{V^2}{l} \quad \frac{V^2}{l} \quad \quad \quad \frac{V}{l^2} \quad \frac{V}{\delta^2}$$

显然,此式右边括号中的第 1 项的量级远比第 2 项小,故此式可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{V^2}{l} \quad \frac{V^2}{l} \quad \quad \quad \nu \frac{V}{\delta^2}$$

根据边界层的定义,层内流体所受的粘性力与惯性力具有同一量级。即可以假设  $\frac{V^2}{l}$  和  $\nu \frac{V}{\delta^2}$  是同一量级的。再假设  $\frac{\partial u}{\partial t}$  和  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  的量级也是惯性项的级别,即  $\frac{V^2}{l}$ 。因此式(3.5)就是式(3.2)中第 1 式的简化结果。下面再看如何简化式(3.2)中的第 2 式。根据以上所述,该式各项的量级分别为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{V^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V^2 \delta}{l^2} \quad \quad \quad \frac{V \delta}{l^3} \quad \frac{V}{l \delta}$$

显然,右边括号中的第 1 项可以忽略不计,故上式可简化为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{V^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V^2 \delta}{l^2} \quad \quad \quad \frac{\nu V}{l \delta}$$

再假设粘性力与惯性力具有同一量级,以及  $\frac{\partial v}{\partial t}$  也与惯性项同量级,即  $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V^2 \delta}{l^2}$ 。因此,从上式可得结论

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{V^2 \delta}{l^2} \ll \frac{V^2}{l} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

意即

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$$

所以可用

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

来代替式(3.2)中的第 2 式。式(3.6)的物理意义是,在边界层内,沿物体表面法线方向的压强  $p$  是不变的,亦即等于外边界处自由流的压强。这个结果已为实验所证实。这样,粘性流体在边



界层中所服从的运动规律是下列边界层方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

在对式(3.7)第1式的简化过程中,曾假设  $\frac{V^2}{l} \sim \nu \frac{V}{\delta^2}$ , 这相当于假设了

$$\frac{V^2}{l} / \left( \nu \frac{V}{\delta^2} \right) \sim 1$$

即

$$\frac{Vl}{\nu} \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 \sim 1$$

也就是假设了雷诺数

$$Re = \frac{Vl}{\nu} \sim \left( \frac{1}{\delta} \right)^2$$

很大。而边界层的厚度

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

很小,这在层流边界层中一般都是如此的。

在定常流中,从式(3.7)的第2式知,在边界层内, $p$ 只是 $x$ 的函数,故边界层方程可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

### 3.2.3 二维微弯曲面的边界层方程式

空气流过曲面时,同样会形成边界层,如图3.5所示。边界层内任一点 $P$ 的位置可用其至物面的距离 $y$ (沿法线)和沿物面的长度 $x$ 来决定(即所谓曲线坐标系)。其速度也可以分解为 $u$ (沿物面的切线方向)和 $v$ (沿法线方向)。当物面曲率很小时,以上得到的边界层方程式(3.7)和式(3.8)也可以近似地使用,只是要将 $x$ 和 $y$ 按上述曲线坐标处理即可。但应指出

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

仍然成立。意即:在边界层内,沿物体表面的法线方向,压强 $p$ 是一个常数。

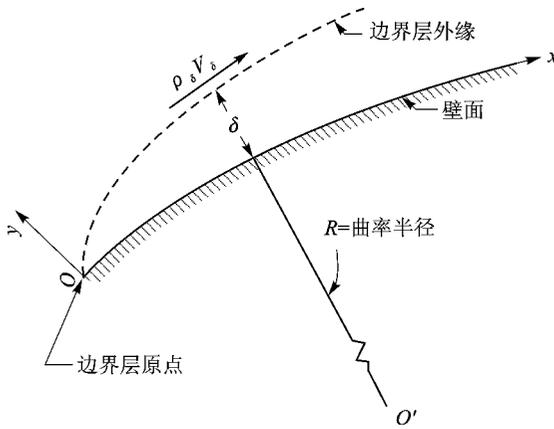


图 3.5 曲面边界层

### 3.2.4 定常层流边界层问题解法概述

边界层内的流动可能是层流,也可能是湍流。湍流边界层问题暂不讨论,现在来讨论定常层流边界层问题。上面已经导出了层流边界层的微分方程,接下来的任务就是结合具体的边界条件求解。可按下列步骤进行。

第一步,求位流解。这时,略去边界层与尾迹,求解理想流体流过物体的绕流问题。这个问题已在理论流体力学中解决了。所以,假设物体表面的速度分布已经求得,并以  $u(x)$  表示。此处的  $x$  表示自驻点沿物面量度之曲线坐标(弧长)。因边界层很薄,故  $u(x)$  可视为边界层外边界上的切向速度分布,即在任一坐标  $x$  处,当  $y = \delta$  时,有

$$u = u_\delta(x)$$

沿边界层外边界,伯努利方程成立,即

$$p + \frac{1}{2}\rho u_\delta^2 = \text{常数}$$

由此可求得

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \quad (3.9)$$

因此,边界层内的压强分布通过位流解得到了,即  $(dp/dx)$  是一个已知函数了。

第二步,考察边界层方程与边界条件。曲线坐标下的定常流边界层方程仍是式(3.8),但  $(x, y)$  是曲线坐标,即

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



因  $dp/dx$  是已知函数,所以这两个方程式中只有两个未知数  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$ ,问题是可解的。求解时,应服从的边界条件是

$$\text{物面,即 } y = 0 \text{ 处} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (3.10a)$$

$$\text{边界层外缘,即 } y = \delta \text{ 处} \quad u = u_\delta(x) \quad (3.10b)$$

严格地说,当  $y = \delta$  时,  $u$  并不等于  $u_\delta(x)$ ,而是等于  $0.99u_\delta(x)$ 。所以准确的外缘条件应是

$$y \rightarrow \infty \text{ 处} \quad u \rightarrow u_\delta(x) \quad (3.11)$$

第三步,解法思路。目前的问题就是在边界条件式(3.10a~b)和式(3.11)之下,求解边界层方程组(3.8)。下面的 Blasius 解就是一个求解的范例。假定已经解出了速度分布

$$u = u(x, y)$$

那么,物体表面的摩擦应力  $\tau_w(x)$  可自下式

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

求出。有了表面摩擦应力分布  $\tau_w(x)$  之后,再通过积分就不难求出物体所受的总的摩擦阻力了。

### 3.3 平板边界层的 Blasius 解

对于二维定常层流(平板或曲面)边界层问题,Blasius 根据式(3.8)中第 2 式(连续方程)引入流函数  $\psi(x, y)$ ,则

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (3.12)$$

并将此关系代入式(3.8)中的第 1 式,得

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3.13)$$

这时,二维定常层流边界层的求解问题,就化为在相应的边界条件下由式(3.13)求一个函数  $\psi(x, y)$  的问题了。对于平板的边界层问题,可以采用以下的提法:粘性不可压流体( $\rho, u_\delta$  已知)以零迎角、流速  $V_\infty$  流过一个厚度为零的半无限长平板,如图 3.6 所示。试求:① 摩擦应力分布  $\tau_w(x)$  和长度为  $L$  的平板的摩擦阻力;② 层内速度分布(速度型);③ 边界层厚度  $\delta(x)$ 。

先由图 3.6 看一下大致的流动图画。在原点  $O$  处,边界层厚度  $\delta = 0$ 。往下游流去,随着  $x$  增大,  $\delta$  逐渐增厚,而且是愈往下游愈厚。任一法线上的速度型大致如图 3.6 所示,从物面的零速度逐渐增大到外缘处的  $u_\delta$ 。对于一块没有厚度没有迎角的半无限长平板绕流而言,流动是上下对称的,所以只需求上表面的解即可。

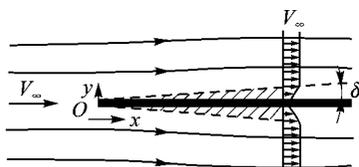


图 3.6 平板边界层



上面讲过,第一步是求速度分布的位流解。此平板绕流的位流速度分布非常简单,显然是

$$u(x) = u_\delta(x) = V_\infty = \text{常数}$$

所以

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u_\delta \frac{du_\delta}{dx} = 0 \quad (3.14)$$

将式(3.14)代入用流函数表示的边界层方程式(3.13),得

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3.15)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 处} \quad & u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ y \rightarrow \infty \text{ 处} \quad & (u)_{y \rightarrow \infty} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y \rightarrow \infty} = V_\infty \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

现在,问题化为在边界条件式(3.16)之下,求解式(3.15)。

Blasius 引进了一个新变量

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} \quad (3.17)$$

根据相似律,可导出  $\psi$  的函数形式应为

$$\psi = \sqrt{\nu x V_\infty} f(\eta) \quad (3.18)$$

式中,  $f(\eta)$  是  $\eta$  的待定函数。因此,以下诸关系式成立

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x V_\infty} f'(\eta) \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = V_\infty f'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -f(\eta) \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\nu x V_\infty}) - \sqrt{\nu x V_\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} (\eta f' - f)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = V_\infty f''(\eta) \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} V_\infty f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = V_\infty f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = -V_\infty \frac{y}{2x} \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} f''(\eta) = -\frac{V_\infty}{2x} \eta f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} V_\infty f'''(\eta) \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = \frac{V_\infty^2}{\nu x} f'''(\eta)$$

将以上诸式代入式(3.15),得



$$V_{\infty} f'(\eta) \left[ -\frac{V_{\infty}}{2x} \eta f''(\eta) \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_{\infty}}{x}} (\eta f' - f) \sqrt{\frac{V_{\infty}}{\nu x}} V_{\infty} f''(\eta) = \nu \frac{V_{\infty}^2}{\nu x} f'''(\eta)$$

所以

$$-\frac{V_{\infty}^2}{2x} \eta f'(\eta) f''(\eta) + \frac{V_{\infty}^2}{2x} (\eta f' f'' - f f''') = \frac{V_{\infty}^2}{x} f'''(\eta)$$

整理后得  $f(\eta)$  所服从的常微分方程为

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (3.19)$$

对应于边界条件式(3.16),  $f(\eta)$  应服从的边界条件由物面处 ( $y=0$ ) 的  $u=0$  和  $v=0$  改变为

$$\eta = 0 \text{ 处} \quad f'(0) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (3.20a)$$

无限远处的边界条件则由  $y \rightarrow \infty$  时  $u \rightarrow V_{\infty}$  改变为

$$\eta \rightarrow \infty \text{ 处} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1 \quad (3.20b)$$

式(3.19)是一个三阶非线性常微分方程, 有3个边界条件式(3.20a)和式(3.20b)可用, 所以  $f(\eta)$  是可以求得的。

对于非线性的常微分方程式(3.19), 只能用无穷级数来求解。Blasius 假设

$$f(\eta) = A_0 + A_1 \eta + \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 + \cdots + \frac{A_n}{n!} \eta^n + \cdots \quad (3.21)$$

式中,  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  为待定常数。

在满足边界条件式(3.20a)的前提下, 可以很容易地推得

$$A_0 = 0 \quad \text{以及} \quad A_1 = 0$$

因此,  $f(\eta)$  成为如下形式

$$f(\eta) = \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 + \cdots + \frac{A_n}{n!} \eta^n + \cdots$$

$$f''(\eta) = A_2 + A_3 \eta + \cdots + \frac{A_n}{(n-2)!} \eta^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(\eta) = A_3 + A_4 \eta + \frac{A_5}{2!} \eta^2 + \cdots + \frac{A_n}{(n-3)!} \eta^{n-3} + \cdots$$

将以上诸式代入式(3.19), 得

$$2 \left( A_3 + A_4 \eta + \frac{A_5}{2!} \eta^2 + \cdots \right) + \left( \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \frac{A_3}{3!} \eta^3 + \cdots \right) \cdot \left( A_2 + A_3 \eta + \frac{A_4}{2!} \eta^2 + \frac{A_5}{3!} \eta^3 + \cdots \right)$$

整理后, 得

$$2A_3 + \eta(2A_4) + \frac{\eta^2}{2!} (A_2^2 + 2A_5) + \frac{\eta^3}{3!} (4A_2 A_3 + 2A_6) +$$

$$\frac{\eta^4}{4!} (6A_2 A_4 + 4A_3^2 + 2A_7) + \frac{\eta^5}{5!} (11A_2 A_5 + 15A_3 A_4 + 2A_8) + \cdots = 0$$

因为上式对任何  $\eta$  值均须满足, 故各系数必须分别等于零, 即



$$A_3 = 0, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = -\frac{A_2^2}{2}$$

$$A_6 = 0, \quad A_7 = 0, \quad A_8 = -\frac{11}{2}A_2A_5 = \frac{11}{4}A_2^3$$

如此继续做下去,所有诸不等于零之系数  $A$  均可用  $A_2$  来表示。而  $A_2$  则是一个待定常数。令  $A_2 = a$ , 则

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{C_n a^{n+1}}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad (3.22)$$

式中

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 11$$

$$C_3 = 375, \quad C_4 = 27\,897, \quad C_5 = 3\,817\,137$$

...

所以,式(3.22)就是要求的解  $f(\eta)$ ,但其中尚有一常数  $a$  待定。此常数可用  $\eta \rightarrow \infty$  时

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$$

的边界条件来确定。Blasius 定得

$$a = 0.332$$

现在来求平板的摩擦应力  $\tau_w(x)$ 、摩擦阻力以及摩擦阻力系数。 $\tau_w(x)$  由下式表示为

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \left[ \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} f''(\eta) V_\infty \right]_{\eta=0} = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} f''(0)$$

又

$$f''(0) = \left( A_2 + A_3 \eta + \frac{A_4}{2!} \eta^2 + \dots \right)_{\eta=0} = A_2$$

所以

$$\tau_w(x) = \mu V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} A_2 = \mu a V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} \quad (3.23)$$

式(3.23)就是沿平板的摩擦应力分布,它的大小是与  $x$  的平方根成反比的。假设平板之宽度为 1(垂直于纸面),长为  $L$ ,试求此平板的一个表面所受的摩擦阻力  $D_f$ 。其表达式应是

$$D_f = \int_0^L \tau_w(x) \cdot 1 \cdot dx = \mu a \int_0^L V_\infty \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}} dx = 2a \sqrt{\mu \rho L V_\infty^2}$$

因此,摩擦阻力系数应是

$$C_{Df} = \frac{D_f}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot L} = 4a \sqrt{\frac{\mu}{\rho V_\infty L}} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} \quad (3.24)$$

式中

$$Re_L = \text{雷诺数} = \frac{\rho V_\infty L}{\mu}$$

即摩擦阻力系数  $C_{Df}$  与雷诺数  $Re_L$  的平方根成反比。



因  $a=0.332$ , Blasius 按式(3.22)算出了  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$ ,  $f''(\eta)$  的数值, 列在表 3.1 中。有了此表, 即可求速度分布曲线如图 3.7 所示。

表 3.1 零迎角平板边界层的函数  $f(\eta)$  及其导数

$\eta = y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{V_\infty}$	$f''$
0	0	0	0.332 06
0.2	0.006 64	0.066 41	0.331 99
0.4	0.026 56	0.132 77	0.331 47
0.6	0.059 74	0.198 94	0.330 08
0.8	0.106 11	0.264 71	0.327 39
1.0	0.165 57	0.329 79	0.323 01
1.2	0.237 95	0.393 78	0.316 59
1.4	0.322 98	0.456 27	0.307 87
1.6	0.420 32	0.516 76	0.296 67
1.8	0.529 52	0.574 77	0.282 93
2.0	0.650 03	0.629 77	0.266 75
2.2	0.781 20	0.681 32	0.248 35
2.4	0.922 30	0.728 99	0.228 09
2.6	1.072 52	0.772 46	0.206 46
2.8	1.230 99	0.811 52	0.184 01
3.0	1.396 82	0.846 05	0.161 36
3.2	1.569 11	0.876 09	0.139 13
3.4	1.746 96	0.901 77	0.117 88
3.6	1.929 54	0.923 33	0.098 09
3.8	2.116 05	0.941 12	0.080 13
4.0	2.305 76	0.955 52	0.064 24
4.2	2.498 06	0.966 96	0.050 52
4.4	2.692 38	0.975 87	0.038 97
4.6	2.888 26	0.982 69	0.029 48
4.8	3.085 34	0.987 79	0.021 87
5.0	3.283 29	0.991 55	0.015 91
5.2	3.481 89	0.994 25	0.011 34
5.4	3.680 94	0.996 16	0.007 93
5.6	3.880 31	0.997 48	0.005 43
5.8	4.079 90	0.998 38	0.003 65
6.0	4.279 64	0.998 98	0.002 40
6.2	4.479 48	0.999 37	0.001 55
6.4	4.679 38	0.999 61	0.000 98
6.6	4.879 31	0.999 77	0.000 61
6.8	5.079 28	0.999 87	0.000 37
7.0	5.279 26	0.999 92	0.000 22



续表 3.1

$\eta = y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$	$f$	$f' = \frac{u}{V_\infty}$	$f''$
7.2	5.479 25	0.999 96	0.000 13
7.4	5.679 24	0.999 98	0.000 07
7.6	5.879 24	0.999 99	0.000 04
7.8	6.079 23	1.000 00	0.000 02
8.0	6.279 23	1.000 00	0.000 01
8.2	6.479 23	1.000 00	0.000 01
8.4	6.679 23	1.000 00	0.000 01
8.6	6.879 23	1.000 00	0.000 01
8.8	7.079 23	1.000 00	0.000 01

由表 3.1 看出, 尽管各个  $x$  位置处的速度型是不同的, 但若以  $\eta$  作为自变量, 则速度型是一样的, 如图 3.7 所示。这个结果已由 Nikuradse 的实验予以证实了。

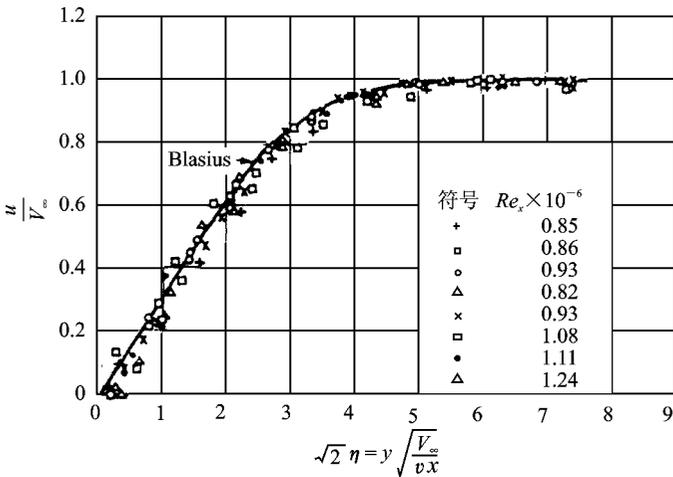


图 3.7 零迎角平板层流边界层内的速度分布

有了表 3.1, 计算边界层的厚度分布  $\delta(x)$  就很方便了。按定义,  $u$  达到  $0.99V_\infty$  时的  $y$  值就是边界层的外缘  $\delta$ 。由表 3.1 知, 当  $\frac{u}{V_\infty} = f'(\eta) = 0.99$  时,  $\eta = 5.0$ , 即

$$\eta = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = 5.0$$

由此得

$$\delta = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}} \quad (3.25)$$



式中

$$Re_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu} = \text{以 } x \text{ 为特征长度的雷诺数}$$

可见,边界层厚度  $\delta(x)$  是以抛物线形式随  $x$  的增大而增大的。

## 3.4 可压流边界层

### 3.4.1 温度边界层及气动热

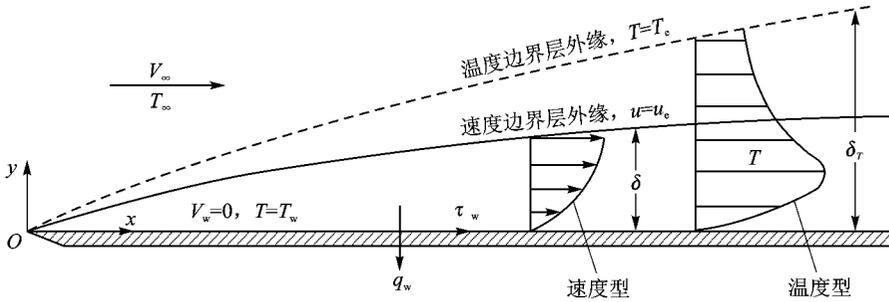
当一个物体以很高的速度在空气中运动时,由于物体与空气的摩擦,会产生很大的热量。大家熟知的陨石坠入大气层内时,由于飞行速度很高,所产生的高温常使陨石本身熔化。同样,高速飞行器在空气中飞行时,也产生大量的摩擦热,称为气动热。如果物面是绝热的,则物面处的静温度最高,因而在物面与附近的气流之间产生很大的温度梯度,从而由物面向外传热。实验证明,当气流以超声速流经一个物体时,传热作用只限于物体表面附近的一薄层气流内,称为温度边界层[图 3.8(a)]或热边界层。温度边界层内任一截面上的温度分布,称为温度分布剖面或温度型。

与速度型相似,温度型是指物面任一点法线上各点的温度分布。温度边界层的厚度,也是沿法线计量的,当温度从物面温度  $T_w$  沿法线方向递减(速度是沿法向递增的)到与当地自由流温度很接近的那一点时,就认为达到了温度边界层的外缘(或边界)。如果物体表面是绝热面,其温度分布如图 3.8(b)所示,从绝热壁温  $T_{aw}$  沿法线递减到外界静温  $T_\delta$ 。与速度边界层相类似,温度边界层的厚度以  $\delta_T$  表示。

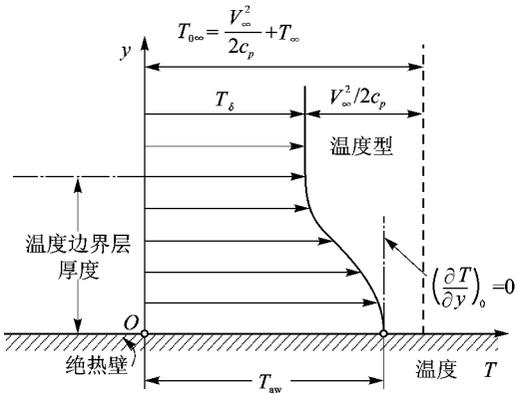
温度型与速度型的差异在物面处最显著。当流体与固体物直接接触时,由于传热作用而互相交换热量。因此,要按物面的冷热程度不同将物体分成不同的类型来处理。一是绝热壁,物面的温度梯度为零,  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ ; 二是热壁,物面温度大于气流温度,  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} < 0$ ; 三是冷壁,物面温度小于气流温度,  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} > 0$ , 如图 3.8(c)所示。壁面类型不同,温度边界层内的温度分布曲线是大不相同的。对绝热壁而言,温度分布曲线的特点是在物面处的切线与物面垂直,然后沿  $y$  由  $T_{aw}$  递减到  $T_\delta$ ; 对热壁而言,温度分布曲线的切线在物面处呈现负斜率,随后沿  $y$  由  $T_w$  递减到  $T_\delta$ ; 对冷壁而言,温度分布曲线的切线则是在物面处呈现正斜率,随后沿  $y$  由  $T_w$  递增到  $T_\delta$ 。但不论是哪种性质的壁面,其温度边界层内总有温度分布曲线(或温度型)  $T = T(y)$  的。据此,即可按 Fourier 公式求出单位时间内,通过单位面积的热量为

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

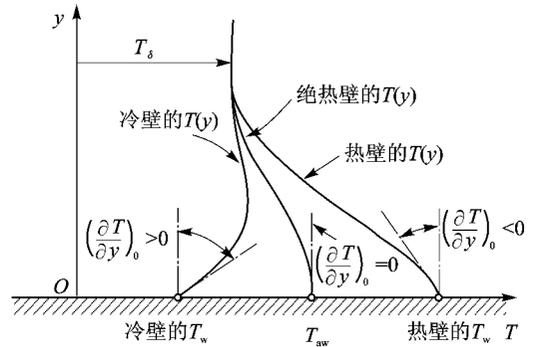
式中,  $\lambda$  是导热系数。



(a) 温度边界层概念



(b) 绝热壁的温度分布



(c) 三种壁的温度分布

图 3.8 温度边界层概念与三种壁面附近的温度分布

温度边界层厚度  $\delta_T$  与物体长度  $l$  之比的数量级为

$$\frac{\delta_T}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr} \sqrt{Re_l}}$$

其中,  $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$  是普朗特数, 其数量级是 1 (在空气中,  $0.76 > Pr > 0.68$ )。故以数量级而论, 只要  $Re_l$  足够大, 例如大于  $10^6$ , 那么  $\frac{\delta_T}{l}$  也是一个小量。

比较温度边界层厚度  $\delta_T$  与速度边界层厚度  $\delta_u$  可以看出

$$\frac{\delta_T}{\delta_u} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

当  $Pr=1$  时, 二者的数量级相同。当  $Pr < 1$  时,  $\delta_T > \delta_u$ ; 当  $Pr > 1$  时,  $\delta_T < \delta_u$ 。

由以上的边界层概念可以知道, 当高速气流流过物体时, 在物面附近, 速度减小, 温度增高, 而物面上的速度则降到零。假设边界层内的空气是理想气体, 速度降到零是一个等熵绝热



的过程,没有热变换和能量损失,因而物面上的温度就是驻点温度  $T_0$ ,表示为

$$T_0 = T_\delta \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_\delta^2 \right) \quad (3.26)$$

可是,实际流体是有粘性的。边界层内流体的能量,通过热传导和摩擦损失,不断地交换和传递。摩擦损失是机械能转化成了热能。速度大的地方动能也大,所以由边界层内的速度型可以看到:能量是由外层向物面传递的,而热传导则是由高温处向低温处传递的。由温度型可以看出,一般是由物面附近向外层传递出去的,因而物面附近的温度会有所降低。意即,即使物面是绝热的,其温度也会低于驻点温度  $T_0$ 。这个温度称为恢复温度,记为  $T_r$ ,其表示式为

$$T_r = T_\delta \left( 1 + r \frac{\gamma-1}{2} Ma_\delta^2 \right) = T_{aw} \quad (3.27)$$

式中,  $r$  称为复温系数,它表示当地自由流中的动能在物面上的回收值,即

$$r = \frac{T_{aw} - T_\delta}{T_0 - T_\delta} \quad (3.28)$$

此处,  $T_{aw} - T_\delta$  是相对于自由流而言的物面实际温度增高量,  $T_0 - T_\delta$  则是没有粘性和热传导时的理想温度增高量。由式(3.28)可以导出式(3.27)。为确定  $r$ , 已有人做过许多实验,如图 3.9 及图 3.10 所示。由实验得知,  $r$  主要是随  $Pr$  数而改变的。在层流与湍流边界层中,  $r$  的值也不同。理论计算和实验结果都一致表明,在层流边界层内,应取  $r = \sqrt{Pr}$ ,而在湍流边界层内,则应取  $r = \sqrt[3]{Pr}$ 。

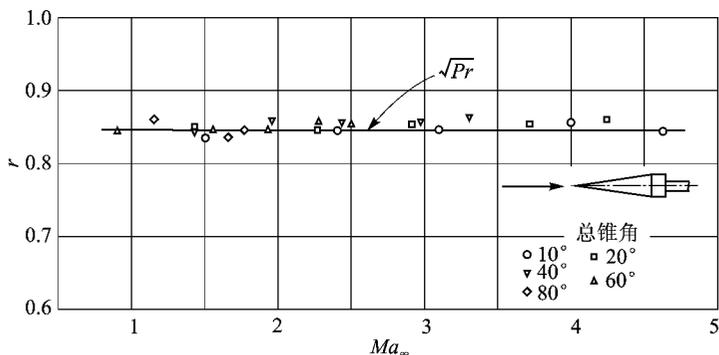
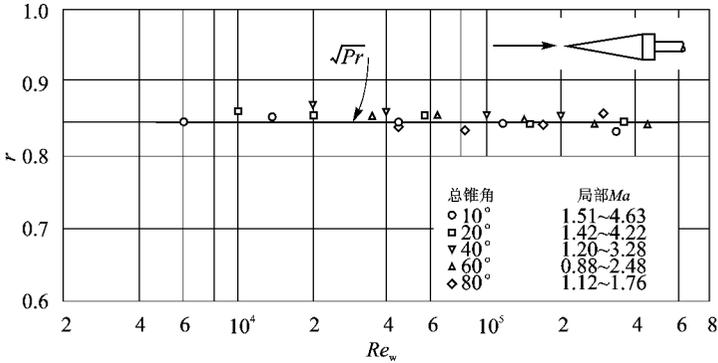


图 3.9 复温系数与  $Ma$  的关系

知道了  $r$  以后,即可由式(3.27)求出绝热壁温  $T_{aw}$ 。在实际问题中,当飞行器作长期定常飞行时,若蒙皮的导热性能不是很好,在飞行  $Ma$  不是很大的情况下(这时可以忽略蒙皮的辐射热),蒙皮所达到的平衡温度是很接近绝热壁温的。在设计飞行器时,绝热壁温就是蒙皮上所可能达到的最高温度。

事实上,飞行器的蒙皮并不是绝热的,因此,实际的物面温度比恢复温度低。在设计高速飞行器时,计算边界层传给蒙皮的热量是一个很重要的问题,这个热量是指气体与固体直接接

图 3.10 复温系数与雷诺数  $Re_w$  的关系

触时,相互间的对流换热量。而这又涉及气体本身的热传导以及气体运动而引起的热能对流交换过程。单位时间内单位面积上的对流换热量  $q$  (即面积热流量)与二者的温度差是成正比的,即

$$q \sim \Delta T \quad \text{或} \quad q = \alpha \Delta T \quad (3.29)$$

式中的  $\alpha$  称为表面传热系数 (有时也用  $h$  表示),它也是许多物理量的函数,并随飞行高度、 $Ma$  和蒙皮温度而变,是在边界层理论中要计算的一个量。不过,一般计算时并不直接求  $\alpha$ ,而习惯用一个量纲一的表面传热系数,叫 Stanton 数,符号是  $St$ 。其定义是

$$St = \frac{\alpha}{c_p \rho_\delta u_\delta} \quad (3.30)$$

因而

$$q = St \cdot \rho_\delta u_\delta \cdot c_p \Delta T \quad (3.31)$$

由此可见,要想求得  $q$ ,必须知道 Stanton 数。而  $St$  又随层流或湍流流态而不同,也与飞行高度、飞行  $Ma$  和蒙皮表面温度有关。对于一些简单形状的物体而言,层流边界层的  $St$  可以用理论方法求出;而湍流边界层的  $St$ ,则主要依靠半经验的理论和实验数据。

### 3.4.2 高速、高温对边界层的影响

在边界层计算中,由于飞行器速度增大(或相对而言,气流速度增大),使边界层内的气体温度增高,因而使许多物理参数(如粘性系数  $\mu$ 、密度  $\rho$ 、导热系数  $\lambda$  以及质量定压热容  $c_p$  等)都将随温度变化。所以,低速时建立起来的物理关系式不够用了,必须加上更多的物理条件,所用的数学表达形式也比较复杂。温度更高时,空气会被分解甚至电离,边界层内出现分子和原子的扩散现象,这时就要考虑化学性质甚至导电性质,问题就更复杂了。

作边界层计算时,需要利用外流的一些参数。当速度不太高时,边界层很薄。把无粘性气流在物体表面上的物理参数作为边界层的外缘值,误差不大,是可以这么做的。但在高超声速



时就有问题了,一方面是边界层增厚了,另一方面是激波强度更大了,与被绕流物体贴得更近了,这就导致激波与边界层的相互干扰。其结果是,外流的压强分布发生了变化,因而不能直接用无粘性流体绕流物体时的参数作为边界层的外缘值。

为了计算气体绕流物体时,物体上的温度分布及摩擦阻力,必须知道边界层内气体流动所遵循的规律,即边界层的基本方程式。由于介质是气体,它必须满足状态方程;又因气体是运动着的,又必须满足流体力学方程;再由于有热交换的关系,还必须满足热力学方程。也就是说,应满足连续方程(质量守恒定律),运动方程或动量方程(牛顿运动定律),能量方程(热力学第一定律或能量守恒定律)。在这些方程中,许多参数,如空气密度 $\rho$ ,粘性系数 $\mu$ ,导热系数 $\lambda$ ,质量定压热容 $c_p$ 等都随温度 $T$ 的变化而变化。本节中一方面根据边界层的简化物理条件,写出以前已知的而现在仍然有用的方程,并导出新的方程;另一方面,根据实验结果,分析一些参数与温度 $T$ 的关系,以决定能否简化,或写出这些参数与温度 $T$ 的关系式。

在人们感兴趣的实际应用问题中,一般来说,雷诺数是比较大的。根据边界层在大雷诺数时是很薄( $\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$ )的事实,在物体曲率不大的条件下,可以进行如下的近似简化(在此过程中,取平行于物体表面的方向为 $x$ ,垂直于表面的方向为 $y$ ,相应的分速则以 $u$ 及 $v$ 表示)。

① 由于 $\frac{\delta}{x} \ll 1$ ,故 $\delta \ll x$ ;而 $\frac{v}{u} \sim \frac{\delta}{x}$ ,因此 $v \ll u$ 。

②  $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ ,即沿垂直于边界层的方向,压强 $p$ 可以看做常值。所以 $p$ 由外界无粘性流体的流动规律来确定,认为是已知值。

③ 由于 $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ , $\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$ ,因而在方程中可以忽略由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial x}$ 所产生的粘性力和传导热。这样,就可以只考虑在 $x$ 方向上的粘性力和 $y$ 方向上的传导热,即 $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$ 。

粘性和热传导并不影响气流质量的变化,因而,在边界层内具有和理想流体同样的连续方程式,即

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

按简化条件②, $y$ 方向的动量方程可以写成

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (3.33)$$

现在来导出 $x$ 方向的动量方程。在边界层中取一个控制区,如图3.11所示。根据动量定律,通过控制区 $x$ 方向的动量流量应等于作用在控制区表面的合力在 $x$ 方向的投影。如忽略彻体力,则有



$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3.34)$$

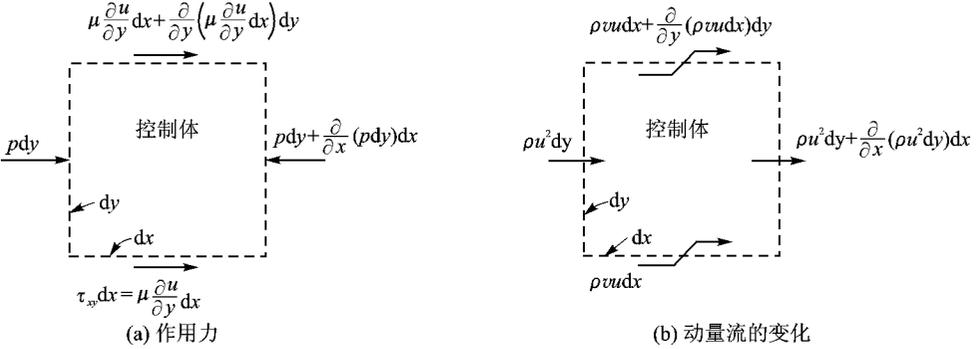


图 3.11 动量方程的推导图解

此式可整理成如下形式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3.35)$$

这就是平面、定常、可压流边界层内的动量方程。

关于能量方程,也可以取一个控制区来进行考察。根据热力学第一定律,输入与输出此控制区的能量一定保持平衡。因此,由控制区输出的焓和动能,必等于输入控制区的热流量和粘性力所作的剪切功。从图 3.12 可以看出,通过控制区的焓和动能的变化量为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho u)\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho v)\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)\right]$$

式中,  $h$  为气体的焓。将此式展开得

$$\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right] + \rho u \frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2}\right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y}\left(h + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$$

将式(3.32)和  $dh = c_p dT$  (设  $h$  只是  $T$  的函数)以及  $\frac{\partial h}{\partial y} = c_p \frac{\partial T}{\partial x}$  等关系代入该式,得

$$\rho u \left[ c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \right] + \rho v \left[ c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \right]$$

输入控制区的热流量为  $\frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})$ ; 单位面积上,粘性力所作的功为  $\frac{\partial}{\partial y}(u\mu \frac{\partial u}{\partial y})$ 。根据能量守恒定律,由控制区输出的焓和动能应等于输入的热流量和粘性力所作的功。因此,得到能量方程为

$$\rho u \left[ c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \right] + \rho v \left[ c_p \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \right] = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (3.36)$$

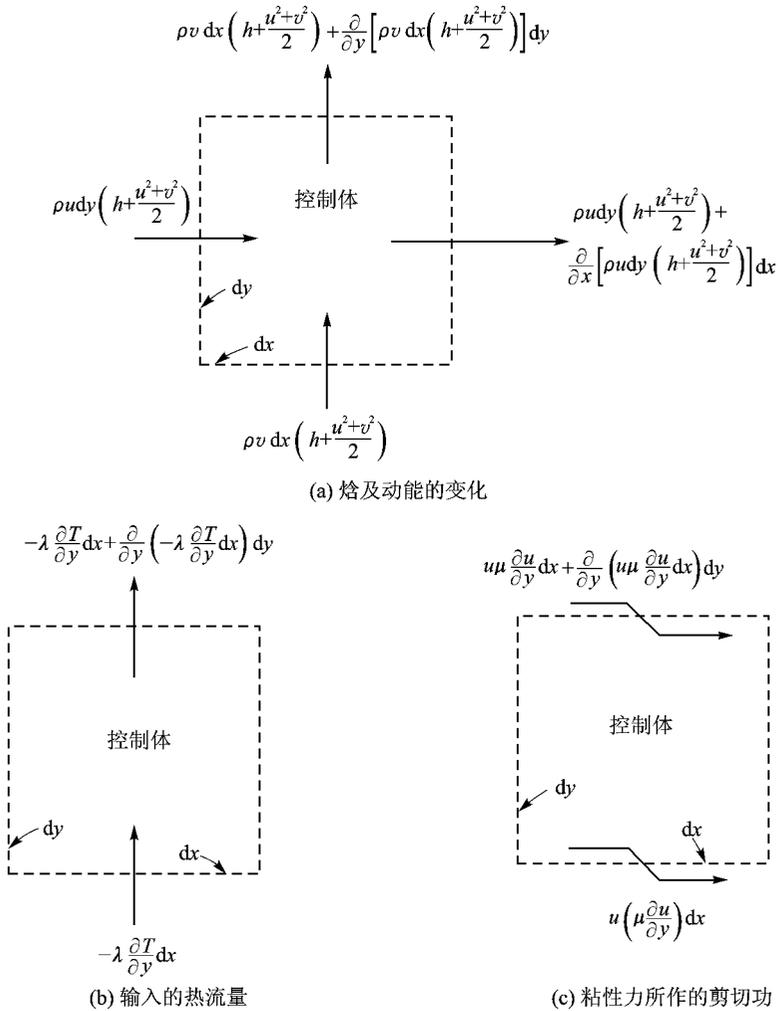


图 3.12 能量方程的推导图解

式(3.36)也可以做如下的变换:将式(3.35)乘以  $u$ ,再从式(3.36)减去所得结果,得

$$\rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

此式亦可写成

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.36a)$$

气体的密度  $\rho$ 、压强  $p$  及温度  $T$  是 3 个重要的物理量,它们之间是有函数关系的,最简单的关系式是



$$p = \rho RT \quad (3.37)$$

这是完全气体的状态方程,其中  $R$  是气体常数。在空气动力学中,除极高温度(或很低的压力)外,都可以将空气视为完全气体。在实用中,也可以用焓  $h$  来代替温度  $T$ ,将上式写成另外一种形式

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h \quad (3.37a)$$

其中,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $h = c_p T$ 。

在质量、动量和能量方程中,  $\rho, \mu, c_p$  和  $\lambda$  等参数都会随温度  $T$  改变。其中  $\rho$  随  $T$  的变化已在气体状态方程式(3.37)中描述了;  $c_p$  随  $T$  的变化不大(参见表 3.2),可以看做常数;  $\lambda$  在本书中当做给定的,它随  $T$  的变化关系不在这里讨论。这里要讨论的是  $\mu$  和  $T$  的关系。分子运动论中给出的单一成分气体的粘性系数公式为

$$\mu = CT^n \quad \text{或} \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^n \quad (3.38)$$

其中  $C$  是常数,在图 3.13 中给出了几种气体的  $\mu$  随  $T$  变化的曲线。

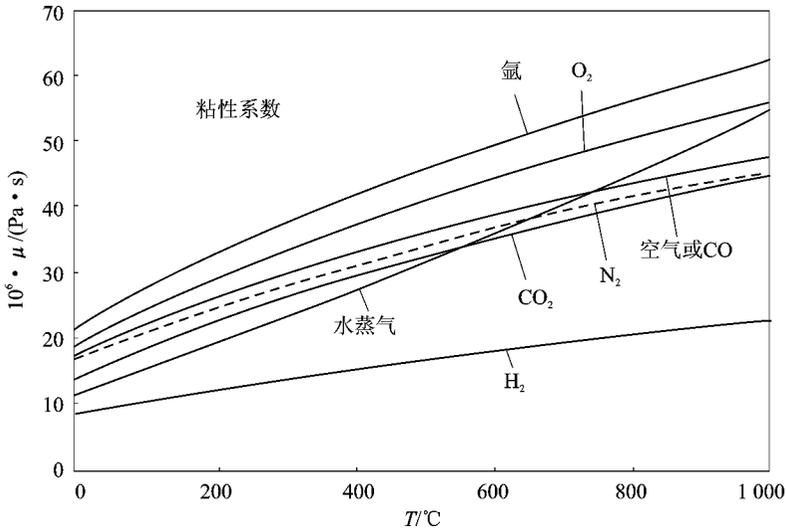


图 3.13 几种气体的粘性系数随温度的变化

空气是多种气体的混合物。实验测量表明,  $\mu$  随  $T$  的变化规律应该用更准确的 Sutherland 半经验公式

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{T_\infty + S}{T + S}\right) \quad (3.39)$$

其中,  $S = 114 \text{ K}$ 。



但在求解边界层方程时,使用此式增加了数值计算中的困难,因而许多人都设法简化式(3.39)。基本方向是采用式(3.38)的形式,但寻求适当的常数  $C$  及  $n$ 。常用的有以下三种形式

$$\frac{\mu}{\mu_{\delta}} = \frac{T}{T_{\delta}} \quad (3.40)$$

或

$$\frac{\mu}{\mu_{\delta}} = \left(\frac{T}{T_{\delta}}\right)^n \quad (3.41)$$

一般情况下,当边界层温度为  $90 \text{ K} < T < 300 \text{ K}$  时,取  $n = \frac{8}{9}$ ; 当  $250 \text{ K} < T < 600 \text{ K}$  时,取  $n = \frac{3}{4} = 0.75$  或  $0.76$ 。计算结果表明,这样做是足够准确的。

最后一种形式是

$$\frac{\mu}{\mu_{\delta}} = C \frac{T}{T_{\delta}}$$

其中的  $C$  值要按如下选取

$$C = \sqrt{\frac{T_w}{T_{\delta}}} \cdot \frac{T_{\delta} + S}{T_w + S}$$

此处的  $S$  就是 Sutherland 公式中的  $S$  值,其中的  $\frac{T}{T_{\delta}}$  也可以写成  $\frac{h}{h_{\delta}}$ 。图 3.14 给出了这三种近似表达式与准确公式的比较。

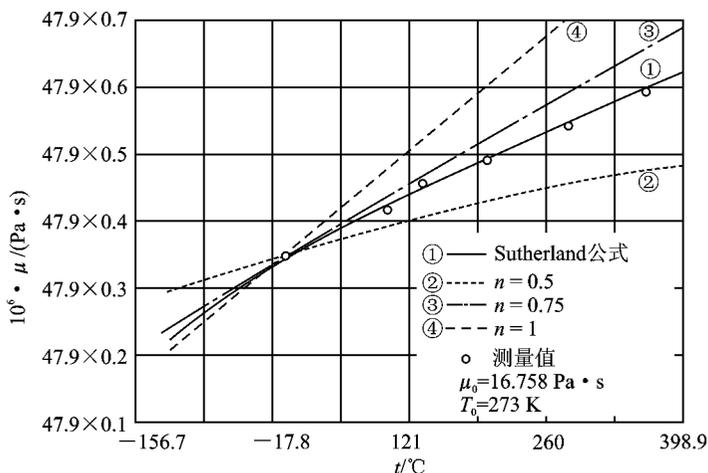


图 3.14 Sutherland 公式与幂次定律及线性近似的比较



为了对这几个参数随温度的变化有一个更清楚的数量上的概念,此处选取了传热学上的一个数值表(表 3.2)作为参考。表内数据是干燥空气的压强为 101.325 kPa 时的  $\rho, \mu, \lambda, c_p$  等随  $T$  的变化情况。

表 3.2 空气的诸参数随温度的变化

$T/^\circ\text{C}$	$\rho/$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\mu \times 10^6/$ ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	$\lambda \times 10^3/$ ( $\text{W} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$ )	$c_p/$ ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	$Pr$
0	1.294	17.2	24.2	1 003	0.71
50	1.093	19.5	27.6	1 006	0.71
100	0.947	21.7	31.0	1 010	0.71
150	0.835	23.8	34.4	1 016	0.70
200	0.747	25.7	37.6	1 024	0.70
250	0.675	27.6	40.8	1 034	0.70
300	0.616	29.3	43.9	1 045	0.70
400	0.525	32.5	49.7	1 069	0.70
500	0.457	35.5	55.3	1 093	0.70
600	0.405	38.3	60.9	1 114	0.70
700	0.363	40.9	65.9	1 135	0.70
800	0.329	43.4	70.3	1 153	0.71
900	0.301	45.7	74.7	1 170	0.72
1 000	0.277	47.9	78.6	1 184	0.72

在边界层中,气体的流动除了遵守一般的物理学规律以外,还受到流动边界上的物理条件所制约。具有不同边界条件的流动,虽然它们遵守的运动规律是一样的,但求解所得的结果是不同的。所以,要想求得式(3.32)、式(3.35)、式(3.36a)和式(3.39)确定的解,还必须给出流体运动的边界条件。

首先讨论在静止的、但气体不能穿透的物面上运动的边界条件,也就是阐明在这样的物面上,粘性流体速度的大小和方向是怎样的?它的十分严格的解答现在还给出,因为现今的测量仪器,还无法测量气流在物面本身上的速度。在有些实验中,虽然量过离开物面距离达 0.005 mm 处的速度,但测量误差也有 41%。不过,大量的实验证明,沿物面法线由外向内,速度是连续减小的。因此,只能假设在静止且流体不能穿透的物面上,气流速度为零。

这个假设可以从下面的事实来解释。从物理学中知道,在两个物体的接触面上与在它们内部一样,作用着分子间的相互作用力,但其有效的影响半径很小。正是这些力,在硬壁上滞止了一层极薄的流体微团,该流体层仅由几排静止状态的分子组成。因此,流体微团的运动始终不会在物面的边壁上发生,而是沿着被分子滞止在边壁上的流体分子层发生的。但是,由于这些分子的尺寸很小(数量级为  $1 \times 10^{-7} \sim 1 \times 10^{-5}$  mm),因此,在实际计算中,可以认为在  $y = 1 \times 10^{-5}$  mm  $\approx 0$  mm 时,  $v = 0$ 。此外,还通过一些间接的实验结果来判断,上述关于物面上流体速度的假设是可用的。此外,人们进行过大量实验,来确定物面上的摩擦力分布。在静止物面上速度为零的假设之下,将所得到的理论解答和实验结果做对比,在大多数的情况下,二



者都能很好地符合一致。因此,可以认为上述假设是完全可以采用的。

关于物面温度的边界条件,则应由物体表面的性质来决定。如果物面是绝热的,在流体和物面之间没有热交换,因而温度边界条件是

$$q_w = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

如果物面是不绝热的,根据温度分布的连续性这一性质,可以认为在物面边壁上的流体温度和物面温度是相等的,即

$$T \Big|_{y=0} = T_w$$

显然,在边界层的外缘,层内流体的运动速度和温度必须等于层外流体在这些点上的速度和温度。因此,下式应成立

$$y = \delta \text{ 时} \quad u = u_\delta \quad \text{以及} \quad T = T_\delta$$

但是,确定边界层厚度尚无精确方法。这一问题可以近似地用两个方法来解决。第一,近似地给出  $\delta(x) = \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$ 。第二,因在边界层之外,速度和温度的改变远没有边界层内那样剧烈。

所以可以认为不是当  $y = \delta$  时,  $u = u_\delta$  和  $T = T_\delta$ ; 而是当  $y \rightarrow \infty$  时,  $u = u_\delta$  和  $T = T_\delta$ 。显然,当  $y = \delta$  和  $y \rightarrow \infty$  时的两个速度和温度的差别愈小,则计算中的误差也愈小。对于平板而言,假设它们的差别为零。但在求解具体问题时,应用哪一种方法,则取决于问题本身的性质。例如,在求解平板问题时,实验表明,应用第二种方法有足够的精确度。但对于绕柱体的流动来说,第二种方法却导致显著的误差。因此,必须承认,上述求解方法的最大弱点是在确定边界层的厚度方面。因而用此方法只能解决一些为数有限的问题;而在其他情况下,则迫使人们想办法找出求解边界层内粘性流动的其他方法。

### 3.4.3 可压层流边界层的两个特解——完全气体定常流的 Crocco - Busemann 关系式

定常层流二维边界层的质量、动量、能量方程具有如下形式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.42a)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.42b)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.42c)$$

对于平板流动,  $dp_e/dx = 0$ 。将式(3.42b)通乘以  $u$ , 再与式(3.42c)相加, 最后得

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (3.43)$$

如果近似取  $Pr = 1$  (空气的  $Pr = 0.69$ ), 则式(3.43)的最后一项就没有了。由此立即可得到一个特解



$$H = \text{常数} \quad (3.44)$$

这是指在整个边界层内,总焓  $H$  为常数。但是

$$H = h + \frac{u^2}{2} \quad (3.44a)$$

在物面上,  $u=0$ , 由式(3.44a)得

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.44b)$$

这表明在壁面处的热流量为零,因此,这个壁面是绝热壁。

$Pr=1$  时,还可以得到另一个特解。令

$$h = h(u)$$

则

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dh}{du} \frac{\partial u}{\partial y}$$

将此关系代入能量方程式(3.42c),整理后得

$$\frac{dh}{du} \left[ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \left( 1 + \frac{d^2 h}{du^2} \right) \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.45)$$

此式左边方括号内正是  $\frac{dp_e}{dx}=0$  条件下的动量方程式(3.42b),应该等于零。因此,式(3.45)的右侧也应该等于零,即

$$\frac{d^2 h}{du^2} = -1$$

由此得

$$h = -\frac{u^2}{2} + C_1 u + C_2 \quad (3.46)$$

在物面上,  $u=0$ , 可见

$$C_2 = h_w$$

在边界层外缘  $u=u_e$  处,  $h=h_e$ , 由此得

$$C_1 = \left( h_e + \frac{u_e^2}{2} - h_w \right) / u_e$$

代入式(3.46),得

$$h = -\frac{u^2}{2} + \left( h_e + \frac{u_e^2}{2} - h_w \right) \frac{u}{u_e} + h_w$$

总焓应为

$$H = h + \frac{u^2}{2} = C_2 + C_1 u = h_w + (H_e - h_w) \frac{u}{u_e} \quad (3.47)$$

以上两个特解式(3.44)和式(3.47)是由德国人 Busemann 和意大利人 Crocco 分别于 1931 年



和 1932 年独立发现的,所以称为 Crocco - Busemann 能量积分关系式。

若进一步假设  $c_p = \text{常数}$ ,则在  $Pr=1$  及  $\frac{d\rho}{dx}=0$  的条件下,式(3.47)可写为

$$T = T_w + \left( T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} - T_w \right) \frac{u}{u_e} - \frac{u^2}{2c_p} \quad (3.48)$$

式中的  $\left( T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} \right)$  就是绝热壁温  $T_{aw}$ 。将上式对  $y$  微分,并考虑物面边界条件  $u=0$ ,即可得壁面热流与表面摩擦的关系为

$$q_w = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \frac{(T_{aw} - T_w) \lambda_w}{u_e \mu_w} \tau_w$$

或

$$St = \frac{q_w}{\rho_e u_e c_p (T_{aw} - T_w)} = \frac{C_{Df}}{2Pr} \quad (3.49)$$

这就是雷诺比拟关系式。严格地说,只有在  $Pr=1$  以及  $\frac{d\rho}{dx}=0$  时才正确。但对气体而言,若将上式中的  $Pr$  修改为  $Pr^{2/3}$ ,上式用于层流及湍流的任意情况下也都很好。

#### 3.4.4 可压湍流边界层的两个特解

可压湍流边界层的动量方程和能量方程分别为

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (3.50a)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) + \mu_t \left( 1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right] \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \quad (3.50b)$$

式中

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t} \quad (3.51)$$

是湍流 Prandtl 数。

如果假设  $Pr=Pr_t=1$ ,并略去压强梯度,则以上动量方程和能量方程与层流边界层的数学形式相同,且立即可以得到两个特解,即

$$H = \bar{h} + \frac{\bar{u}^2}{2} = \text{常数} \quad (3.52a)$$

以及

$$H = C_1 + C_2 \bar{u} \quad (3.52b)$$

或

$$\bar{h} = C_1 + C_2 \bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2} \quad (3.52c)$$



此式与层流的式(3.46)形式相同,在  $c_p$  为常数的条件下,也可写成温度之间的关系

$$\bar{T} \approx T_w + (T_{aw} - T_w) \frac{\bar{u}}{u_e} - \frac{r\bar{u}^2}{2c_p} \quad (3.53)$$

式中的  $r$  是复温系数。此式也称为 Crocco - Busemann 关系式。当然,实际上  $Pr \neq 1$ , 湍流时的复温系数  $r$  取为

$$r = Pr^{1/3} \approx 0.88$$

就可以认为足够准确了。

## 习 题

- 3.1 一块平板,弦长 12.7 cm,在海平面高度以  $Ma=4$  飞行。假设全板为层流,表面为绝热壁,试求单位展长平板的摩擦阻力。
- 3.2 续习题 3.1,假设全板为湍流,再求单位展长平板的摩擦阻力。
- 3.3 有一块平板,板上为层流边界层。假设  $Pr=1$ ,而且是完全气体( $c_p, c_v$  也都是常数)。试证明边界层内的总温分布与速度分布的关系为

$$T_0 = T_w + (T_{0,e} - T_w) \frac{u}{u_e}$$

式中,  $T_w$  是壁温,  $T_{0,e}$  和  $u_e$  是边界层外边界处的总温和速度。

- 3.4 有一飞行器在 35 km 高度飞行,其环境压强与温度分别为  $583.59 \text{ N/m}^2$  及  $246.1 \text{ K}$ 。此飞行器的球头半径为 2.54 cm。假设  $Pr=0.72, c_p=1008 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ,粘性系数按 Sutherland 公式确定。头部的壁温为 400 K。假设头部的复温系数为 1.0,试求飞行速度为 (a) 1500 m/s, (b) 4500 m/s 时,传给驻点的气动热是多大?
- 3.5 假设边界层内的温度型为

$$T - T_e = (T_w - T_e)(1 - 2\zeta + 2\zeta^3 - \zeta^4)$$

式中,  $\zeta = \delta_T / \delta$ 。问此温度型应满足什么样的边界条件?速度型按  $\frac{u}{V} = \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}$  计算。

- 3.6 参看图 3.15,一块等边三角形薄板淹没在直匀流中。来流速度为 12 m/s,  $T=20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p=101.325 \text{ kPa}$ 。假设流动为层流,试求此平板所受之阻力(以 N 计)。
- 3.7 参看图 3.16,整流器是由放置在气流中的小管阵列组成,用来除去旋涡和其他的横向速度。任取其中的一个小管,可以理想化为图示之薄壁小方盒。试用平板层流边界层理论导出流过一束  $n \times n$  个小方盒时的压降  $\Delta p$  公式。

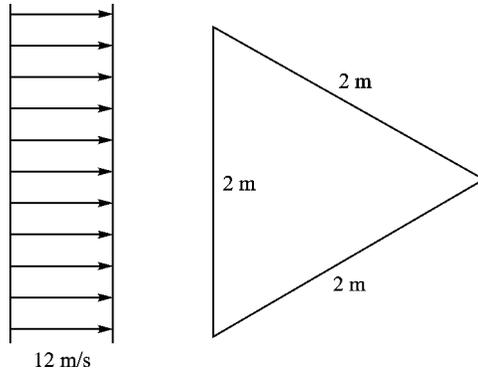


图 3.15 习题 3.6 附图

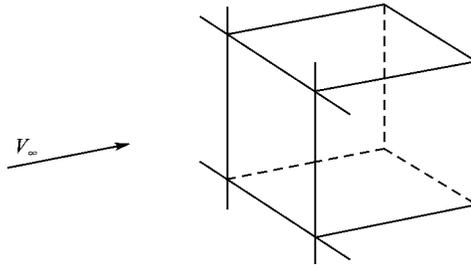


图 3.16 习题 3.7 附图

# 第 4 章 求解平面定常流边界层方程的近似方法

## 4.1 概 述

第 3 章已介绍了边界层概念,并描绘了边界层的流动图画。现在,继续讨论边界层问题。图 4.1(a)描述了边界层厚度及层内速度分布沿流动方向的变化,图 4.1(b)则是点 A 处流速沿物面法向的变化照片。在第 3 章还介绍过,边界层有层流和湍流之分。如果来流的湍流度

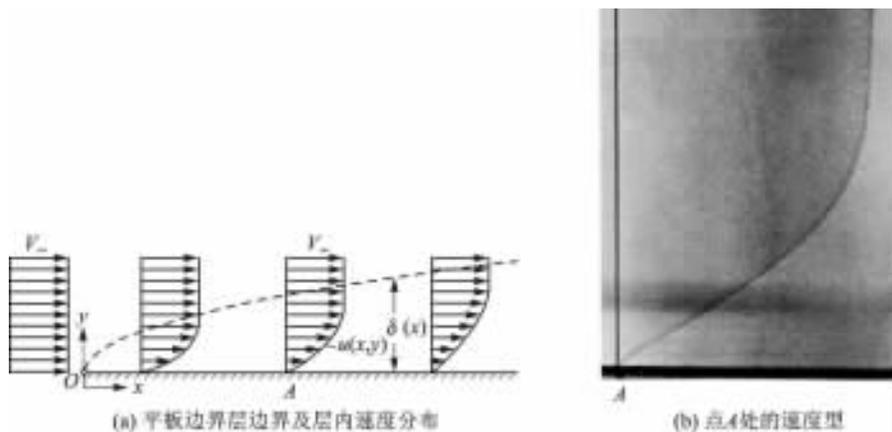


图 4.1 边界层流动图画

不大的话,物面上的边界层起初总有一段是层流流态。若将边界层某截面上的流动当做一个对应的管流来看,其对应的管直径是  $2\delta$ 。边界层厚度既然愈往下游愈厚,则以  $2\delta$  为代表性尺寸计算雷诺数时,总会超过临界值的。这时,层流流态便经过一个过渡段转变成湍流边界层。过渡段很短,通常看成一点。这样,整个边界层内的流态如图 4.2 所示。在第 3 章还讲述了怎样从 N-S 方程简化得出边界层方程,并据此求得了平板层流边界层的解析解,即 Blasius 解。这种做法虽然很严格,但只限于层流,湍流还办不到。本章讨论用比较简单的动量积分法来计算平板的阻力系数,从而可以得到很接近于 Blasius 解的结果。此方法不仅适用于层流,也适用于湍流,而且可以用来求解微弯物面的阻力。因为当物形不是平板时(例如机翼表面),往往需要借用平板的公式或将表面展开当成平板来计算。

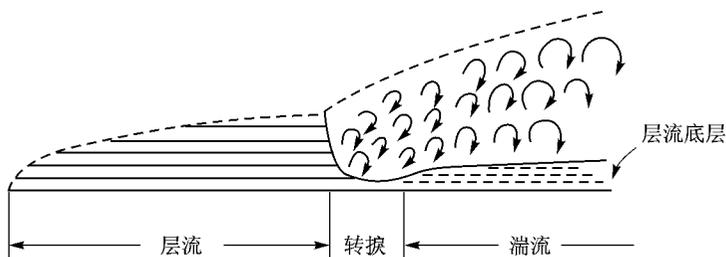


图 4.2 边界层流态

## 4.2 平板边界层

### 4.2.1 动量积分关系式

参看图 4.3, 在边界层内取控制面  $ABCD$ 。假设流动是定常流, 并假设垂直于纸面的尺寸为 1 单位。对此控制面内的流体应用动量定理, 来建立边界层的积分关系式。

假设边界层内某点  $P$  处的气流速度为

$$u = u(x, y)$$

则在  $dt$  时间内, 通过  $AB$  边的气流质量为

$$m = \int_0^{\delta} \rho u \cdot dt \cdot dy = dt \int_0^{\delta} \rho u \cdot dy$$

在同一时间间隔内, 由  $CD$  边流出的质量为

$$m + \frac{dm}{dx} \cdot dx = dt \int_0^{\delta} \rho v \cdot dy + \left( dt \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u \cdot dy \right) dx$$

因此, 经  $AB$  和  $CD$  流出控制面的净质量为

$$dt \cdot dx \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u \cdot dy \quad (4.1)$$

对于定常流而言, 从封闭的控制面内流出的质量应等于流进此控制面的质量。即在  $dt$  时间内, 应由  $AD$  边流进控制面的质量也是

$$dt \cdot dx \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u \cdot dy$$

在  $dt$  时间内, 由  $AB$  流进控制面的动量为

$$dt \int_0^{\delta} \rho u^2 \cdot dy$$

由  $CD$  边流出控制面的动量为

$$dt \int_0^{\delta} \rho u^2 \cdot dy + \left( dt \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 \cdot dy \right) dx \quad (4.2)$$

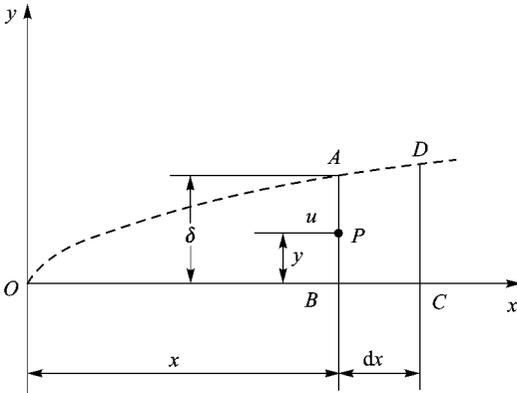


图 4.3 动量积分法示意图

由  $AD$  边流进控制面的动量为

$$dt \cdot V_\delta \cdot \left( \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \cdot dy \right) dx \quad (4.3)$$

$V_\delta$  表示边界层边界上的流速。于是,通过控制面  $ABCD$  的动量变化便是

$$dt \cdot dx \left( \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \cdot dy - V_\delta \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \cdot dy \right) \quad (4.4)$$

再看作用在控制面边界上的力。略去彻体力,并注意边界层边界上的摩擦力为零,而且  $AB$  及  $CD$  面上的摩擦力在  $x$  方向没有分力,所以只要列出  $AB, CD$  和  $AD$  这 3 个面上的压力以及物面  $BC$  上的摩擦力就行了。这几个面上

的作用力在  $x$  方向的投影分别为

$$\begin{aligned} AB \text{ 面} & \quad p \cdot \delta \\ CD \text{ 面} & \quad - \left[ p\delta + \left( p \cdot d\delta + \delta \cdot \frac{dp}{dx} dx \right) \right] \\ AD \text{ 面} & \quad p \cdot d\delta \\ BC \text{ 面} & \quad - \tau_w \cdot dx \end{aligned}$$

式中,下标“w”代表“物面”。这几个力的合力的冲量是

$$- \left( \delta \cdot \frac{dp}{dx} + \tau_w \right) dx \cdot dt \quad (4.5)$$

根据动量定律,动量的改变量应等于外力的冲量,故式(4.4)应与式(4.5)相等,即

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 \cdot dy - V_\delta \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u \cdot dy = - \delta \frac{dp}{dx} - \tau_w \quad (4.6)$$

式(4.6)就是定常流的边界层动量积分关系式,也叫卡门-波尔豪森(Karman-Pohlhausen)动量积分关系式。该式不仅适用于层流边界层,也适用于准定常湍流边界层;不仅适用于平板,也适用于微弯曲面;既适用于不可压流,也适用于可压流。在不可压流的情况下,密度  $\rho$  是常数,可以从积分号中移出来,于是式(4.6)化为

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 \cdot dy - V_\delta \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\delta u \cdot dy = - \frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{\tau_w}{\rho} \quad (4.7)$$

这是不可压流的动量积分关系式。不过,具体用来解决问题时,还要将此式改写成另一个样子。引用两个新概念,一个叫位移厚度  $\delta^*$ ,另一个叫动量损失厚度  $\delta^{**}$ (有的书上用记号  $\theta$ ),分别定义为

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{V_\delta} \right) dy \quad (4.8)$$



$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\delta}} \left(1 - \frac{u}{V_{\delta}}\right) dy \quad (4.9)$$

这两个量  $\delta^*$  及  $\delta^{**}$  的物理意义如下。参看图 4.4, 假设某点  $P$  处的边界层厚度是  $\delta$ , 则在  $\delta$  的范围内以速度  $V_{\delta}$  流动的理想流量是

$$\int_0^{\delta} \rho V_{\delta} \cdot dy = \rho V_{\delta} \cdot \delta$$

而实际通过  $\delta$  的流量却是

$$\int_0^{\delta} \rho u \cdot dy$$

此处  $u$  是边界层中距物面为  $y$  处的流速。上述两部分流量之差是

$$\int_0^{\delta} \rho (V_{\delta} - u) dy$$

这就是说, 当设想  $\delta$  范围内各点皆以速度  $V_{\delta}$  流动时, 通过的流量比实际流量多出来的值是  $\int_0^{\delta} \rho (V_{\delta} - u) dy$ 。或者说,  $\delta$  嫌太大了。为了保持实际的流量, 就必须把  $P$  点处的物面往上移动一段距离, 叫做位移厚度, 记为  $\delta^*$ , 它由下式确定, 即

$$\rho V_{\delta} \cdot \delta^* = \int_0^{\delta} \rho (V_{\delta} - u) dy$$

对于不可压流而言, 位移厚度  $\delta^*$  的表达式为

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_{\delta}}\right) dy \quad (4.10)$$

因此, 当  $P$  处物面上移  $\delta^*$  到达  $P'$  以后, 设想在  $P'Q$  这段距离上的各点皆以速度  $V_{\delta}$  (边界层边界处的流速) 流动时所通过的流量, 就正好等于由  $P$  到  $Q$  的实际流量。  $\delta^*$  也相当于流线在边界层边界处被挤入边界层外的距离。这在设计喷管时是有实际意义的。因为设计喷管时都是先按理想流来计算型线的, 为了把粘性影响考虑进去, 就要把按理想流算出的型线各点的  $y$  坐标都增加当地位移厚度  $\delta^*$  那么大的尺寸, 如图 4.5 所示。图中的虚线是理想流的型线, 实线是做了边界层修正之后的实际型线。

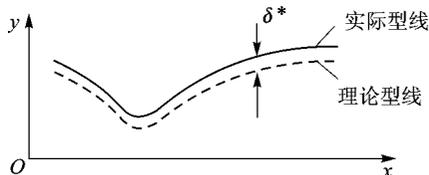


图 4.5 喷管型线的粘性修正示意图

$\delta^{**}$  的物理意义是: 由式(4.9)知

$$\rho V_{\delta}^2 \cdot \delta^{**} = \int_0^{\delta} (\rho V_{\delta} \cdot u - \rho u^2) dy$$

等号右侧第一项是实际流量乘以层外流速  $V_{\delta}$  这样一个假想动量, 而第二项则是实际流量乘以实际流速  $u$ , 这是实际动量。二者之差就是层内那部分流量在没有粘性力作用时应有的动量与有粘性力作用时的实际动



量之差,这也就是由于有粘性力作用而损失的动量。这些损失了的动量折合成以  $V_\delta$  流动的、厚度为  $\delta^{**}$  的一层流体所具有的动量,即

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{(\rho u V_\delta - \rho u^2)}{\rho V_\delta^2} dy = \int_0^\delta \frac{u}{V_\delta} \left(1 - \frac{u}{V_\delta}\right) dy \quad (4.11)$$

因此,  $\delta^{**}$  称为动量损失厚度。

有了  $\delta^*$  及  $\delta^{**}$ , 动量积分关系式(4.7)可以整理成比较整齐的形式了,式(4.7)中的第二项可以先改写为

$$\begin{aligned} V_\delta \cdot \frac{d}{dx} \int_0^\delta u \cdot dy &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_\delta \cdot u \cdot dy - \int_0^\delta u \cdot \frac{dV_\delta}{dx} dy = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_\delta \cdot u \cdot dy - \int_0^\delta V'_\delta \cdot u \cdot dy \end{aligned}$$

式中  $V'_\delta = \frac{dV_\delta}{dx}$ 。式(4.7)右侧第一项可写为

$$-\frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{\delta}{\rho} \frac{d}{dx} \left( p_0 - \frac{1}{2} \rho V_\delta^2 \right) = \delta \cdot V_\delta \cdot V'_\delta$$

因此,式(4.7)可按下述步骤改写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 \cdot dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta V_\delta \cdot u \cdot dy + \int_0^\delta V'_\delta \cdot u \cdot dy &= \delta \cdot V_\delta \cdot V'_\delta - \frac{\tau_w}{\rho} \\ \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(V_\delta - u) \cdot dy + V'_\delta \int_0^\delta (V_\delta - u) \cdot dy &= \frac{\tau_w}{\rho} \\ \frac{d}{dx} (V_\delta^2 \cdot \delta^{**}) + V'_\delta \cdot V_\delta \cdot \delta^* &= \frac{\tau_w}{\rho} \\ V_\delta^2 \cdot \frac{d\delta^{**}}{dx} + 2V'_\delta \cdot V_\delta \cdot \delta^{**} + V'_\delta \cdot V_\delta \cdot \delta^* &= \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned}$$

引用符号  $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$ , 上式可化为

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'_\delta \cdot \delta^{**}}{V_\delta} (2 + H) = \frac{\tau_w}{\rho V_\delta^2} \quad (4.12)$$

这就是最终的形式。这种形式的动量积分关系式,在做较复杂的计算时(如曲面边界层)用起来要方便一些。

具体求解边界层问题的步骤大致如下。首先,略去边界层厚度,用位流理论求出物面的速度分布,并认为这个速度分布就是边界层边界处的速度分布

$$V_\delta(x) \quad (4.13)$$

接着按伯努利方程  $p + \frac{1}{2} \rho V_\delta^2 = C$  求出边界层边界处的压强分布  $p(x)$ 。由  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  得知,这个  $p(x)$  就是物面上的压强分布。由此即可求得



$$\frac{dp}{dx} = -\rho V_\delta \frac{dV_\delta}{dx} \quad (4.14)$$

其次,找补充关系式。因把式(4.13)和式(4.14)代入式(4.7)以后,一个方程中还有3个未知数  $u, \delta$  和  $\tau_w$ ,故尚需找两个补充关系式。办法是根据具体的物理情况或根据实验,假设边界层内的速度分布曲线(即速度型)为

$$u = u(x, y) \quad (4.15)$$

层流时,即可由牛顿摩擦定律得到第二个补充关系式

$$\tau_w(x) = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4.16)$$

最后,将式(4.15)及式(4.16)代入式(4.12),使该式成为  $\delta$  的一个常微分方程,此方程一般是容易求解的。由此可见,这种解法的关键在于速度型  $u(x, y)$  是否假设得正确。当然,绝对正确是做不到的,但完全可以做到相当精确。所以,卡门动量积分法是一种近似方法,但精确度可以相当高。下面就用此方法具体求解平板边界层问题。

## 4.2.2 平板层流边界层

参看图4.6,假设流速为  $V_\infty$  的不可压( $\rho = \text{常数}$ )直匀流流过一块顺流放置的平板,边界层外的流速是  $V_\infty = \text{常数}$ ,层内速度  $u$  则是  $\frac{y}{\delta}$  的函数。这时

$$V'_\delta = \frac{dV_\delta}{dx} = 0$$

因而积分关系式(4.12)就变得很简单了,即

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} \quad (4.17)$$

现在的目的是要求出①边界层厚度的变化规律  $\delta(x)$ ;②摩擦阻力系数  $C_{Df}$ 。

根据4.2.1小节求解边界层问题的解法步骤,第一步求位流速度分布已自然解决了,因理想不可压直匀流流过平板时,流速不变,  $V_\delta = V_\infty = \text{常数}$ 。第二步

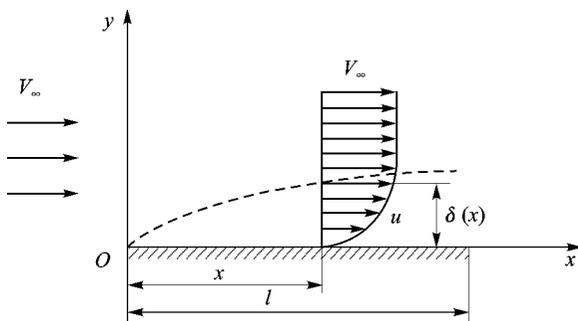


图4.6 平板层流边界层

是需要找两个补充关系式,即速度分布  $\frac{u}{V_\delta} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$  和  $\tau_w$ 。先找速度分布。比照圆管内的 Poiseuille 流动,流速沿管截面是按抛物线规律分布的。现在把边界层看做半径为  $\delta$  的半根管子,其速度分布规律应与抛物线类似,因而假设速度分布函数为



$$\frac{u}{V_\infty} = A_0 + A_1 \frac{y}{\delta} + A_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + A_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (4.18)$$

此式中的诸系数是待定的,由下述边界条件来确定,即

$$\text{物面条件 } y = 0 \text{ 时} \quad u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{边界层外边界条件 } y = \delta \text{ 时} \quad u = V_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

由这 4 个条件可以定出 4 个系数为

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{2}$$

于是,速度分布便是

$$\frac{u}{V_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad (4.19)$$

再找第二个补充关系。牛顿摩擦定律可写为

$$\tau_w = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

将式(4.19)代入上式,得

$$\tau_w = \frac{3}{2} \mu \cdot \frac{V_\infty}{\delta} \quad (4.20)$$

至此,两个补充关系式已找齐。第三步是对式(4.17)求解。为此,先求出  $\delta^{**}$  的表达式。把速度分布式(4.19)代入  $\delta^{**}$  的定义公式(4.11),得

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{39}{280} \delta \quad (4.21)$$

把式(4.21)及式(4.20)代入式(4.17),得到一个常微分方程

$$\frac{13}{140} \delta \cdot d\delta = \frac{\mu}{\rho V_\infty} dx \quad (4.22)$$

利用边界条件  $x=0$  时  $\delta=0$ ,积分上式,得边界层厚度沿板长的变化规律是

$$\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}} \quad (4.23)$$

其中  $Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$  就是距平板前缘为  $x$  处的、以长度  $x$  表示的当地雷诺数。

作用在宽度为  $b$ (垂直于纸面的)、长为  $l$  的平板一个面上的摩擦阻力为

$$D_f = \int_0^l \tau_w \cdot b \cdot dx$$

将式(4.20)及式(4.23)代入此式,得

$$D_f = \frac{1.296}{\sqrt{Re_l}} \frac{\rho V_\infty^2}{2} S$$



式中,  $Re_l = \frac{V_\infty l}{\nu}$ ;  $S$  是平板的投影面积, 其大小为  $bl$ 。于是, 单面平板的摩阻<sup>①</sup>系数为

$$C_{Df} = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cdot S} = \frac{1.296}{\sqrt{Re_l}} \quad (4.24)$$

式(4.23)与式(4.24)就是用动量积分关系式求解平板不可压层流边界层的最后结果, 与由边界层微分方程出发所求得的平台层流边界层 Blasius 精确解结果

$$\delta = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_l}} \quad (4.25)$$

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_l}} \quad (4.26)$$

相对比,  $C_{Df}$  的误差不超过 3%, 而 Blasius 精确解已由 Nikuradse 用实验证明了是符合实际的。因此, Karman 动量积分法虽然简单, 但其结果还是相当准确的。

由式(4.25)及式(4.26)可以看出, 边界层厚度  $\delta$  是随  $x$  而增厚的。所以, 在平板不可压层流边界层条件下, 边界层边界是一条二次抛物线。摩阻系数  $C_{Df}$  不是常数, 是随  $Re_l$  增大而减小的。

下面, 举例说明平板层流边界层公式的应用。

**例 4.1** 一块平板  $L=1.6$  m, 放在  $V_\infty=2$  m/s 的空气流中。已知空气温度为  $20^\circ\text{C}$ , 试求平板末端的边界层厚度  $\delta$ , 摩阻系数  $C_{Df}$ , 以及单面平板的总阻力。给定, 平板宽度  $b=1$  m(图 4.7)。

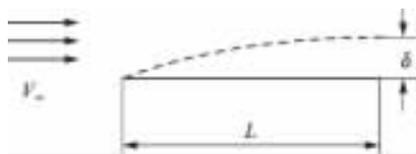


图 4.7 例 4.1 附图

**解:**  $t=20^\circ\text{C}$  时, 空气的运动粘性系数  $\nu=0.16 \times 10^{-4}$   $\text{m}^2/\text{s}$ 。因此

$$Re_L = \frac{V_\infty \cdot L}{\nu} = \frac{2 \times 1.6}{0.16 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^5$$

对平板而言, 以长度计的转捩雷诺数  $Re_L^* = 5 \times 10^5$ , 因此判定流态为层流边界层。

由式(4.25)得

$$\delta = \frac{5.0L}{\sqrt{Re_L}} = \frac{5 \times 1.6}{\sqrt{2 \times 10^5}} = 0.0179 \text{ m} = 17.9 \text{ mm}$$

由式(4.26)得

$$C_{Df} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}} = \frac{1.328}{\sqrt{2 \times 10^5}} = 0.00297$$

单面平板的总阻力为

$$D_f = C_{Df} \frac{\rho V_\infty^2}{2} bL = 0.00297 \times \frac{0.125 \times 4}{2} \times 1.6 = 0.01166 \text{ N}$$

① 摩阻是摩擦阻力的简称。该简称在本书中适用。



这个例题说明了怎样用边界层公式来求摩擦力及边界层厚度。顺便,还可以以边界层厚度公式为依据来补充说明连续介质假设的适用范围,即 Knudsen 数  $Kn < 0.01$ 。

#### 4.2.3 关于连续介质的范围

由雷诺数的定义得

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho \bar{V} l}{\mu} \cdot \frac{u}{c} \cdot \frac{c}{\bar{V}} \cdot \frac{L}{l} \quad (4.27)$$

式中,  $\bar{V}$  及  $l$  分别是气体分子运动的平均速度与平均自由程,  $c$  是声速,  $\mu$  是粘性系数,  $L$  是物体的特征长度,  $\rho$  是密度,  $u$  是气体宏观运动的速度。

由分子运动论得知,就数量级而言,下列关系式成立,即

$$\begin{aligned} \mu &= \rho \bar{V} l \\ \bar{V} &= c \end{aligned}$$

因此,就数量级而言,式(4.27)中的  $\rho \bar{V} l$  可与  $\mu$  消掉,  $c$  可与  $\bar{V}$  消掉,于是式(4.27)可写为

$$Re = \frac{L}{l} \cdot Ma$$

或

$$\frac{L}{l} = \frac{Re}{Ma} \quad (4.28)$$

对式(4.25),就数量级而言,边界层厚度与物体特征尺寸之比应是  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$  的数量级,即

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (4.29)$$

将式(4.28)代入式(4.29)得

$$\frac{\delta}{l} \frac{Re}{Ma} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

由此推知,边界层厚度  $\delta$  与分子运动平均自由程  $l$  之比的数量级应是

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{\sqrt{Re}}{Ma} \quad (4.30)$$

钱学森在 1946 年建议,连续介质气体动力学的范围要限制在,边界层厚度的数量级至少是分子运动平均自由程的 100 倍以上,就是说

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{\sqrt{Re}}{Ma} > 100 \quad (4.31)$$

而 Knudsen 数  $Kn$  就定义为

$$Kn = \frac{Ma}{\sqrt{Re}} \quad (4.32)$$



于是  $\frac{\delta}{l} > 100$  即可表示为

$$Kn < 0.01 \quad (4.33)$$

#### 4.2.4 平板湍流边界层

仍参看图 4.6, 假设有速度为  $V_\infty$  的不可压直匀流流过零迎角的平板, 板面上从头到尾都是准定常湍流边界层,  $\rho, V_\infty, \mu, L$  及  $b$  皆为已知, 试求  $\delta_{\text{湍}}(x)$  和  $C_{Df\text{湍}}$ 。

对于准定常湍流边界层而言, 卡门动量积分式对各参数的时均值是照样成立的。不过, 一般略去时均值符号。直接写成式(4.17)的形式, 即

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} \quad (4.34)$$

找补充关系时, 需要注意现在是湍流, 其速度分布比层流饱满。所以, 把湍流光滑管的速度分布借用过来, 即假设速度分布为

$$\frac{u}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (4.35)$$

代入式(4.11), 可求得

$$\delta^{**} = \delta \int_0^2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{7}{72} \delta \quad (4.36)$$

壁面摩擦应力  $\tau_w$  不能用牛顿公式计算, 因湍流不服从此规律。湍流的  $\tau_w$  也从圆管湍流借用过来, 即

$$\tau_w = 0.0225 \rho V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{V_\infty \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.37)$$

把式(4.36)及式(4.37)代入式(4.34), 得

$$\frac{7}{72} \cdot \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{V_\infty \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.38)$$

$$\delta_{\text{湍}} = \frac{0.37x}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (4.39)$$

可见, 湍流边界层的厚度是随  $x^{\frac{4}{5}}$  成正比增长的, 比层流的增长快得多。

单面平板的摩擦阻力为

$$\begin{aligned} D_{f\text{湍}} &= \int_0^l \tau_w \cdot b \cdot dx = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 \cdot b \cdot \delta = \\ &0.036 \rho V_\infty^2 \left(\frac{\nu}{V_\infty \cdot L}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot bL \end{aligned}$$

摩阻系数为



$$C_{Df\text{满}} = \frac{0.072}{Re_L^{\frac{1}{5}}} \quad (4.40)$$

图 4.8 中画出了不可压层流及湍流零迎角平板局部摩擦系数  $C_f \left[ = \tau_w / \left( \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \right) \right]$  与雷诺数的关系曲线。实验证明, 式(4.26)及式(4.40)很好地反映了实际情况。实验也表明, 式(4.40)中的常数若用 0.074 就更符合实际, 即式(4.40)应修正为

$$C_{Df\text{满}} = \frac{0.074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} \quad (4.41)$$

式(4.41)的应用范围为  $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$ 。当  $Re_L$  值更高时, 在  $10^7 \leq Re_L \leq 10^9$  范围内, 常用 Schlichting 经验公式

$$C_{Df\text{满}} = \frac{0.455}{(\lg Re_L)^{2.58}} \quad (4.42)$$

来计算湍流边界层的摩擦系数。

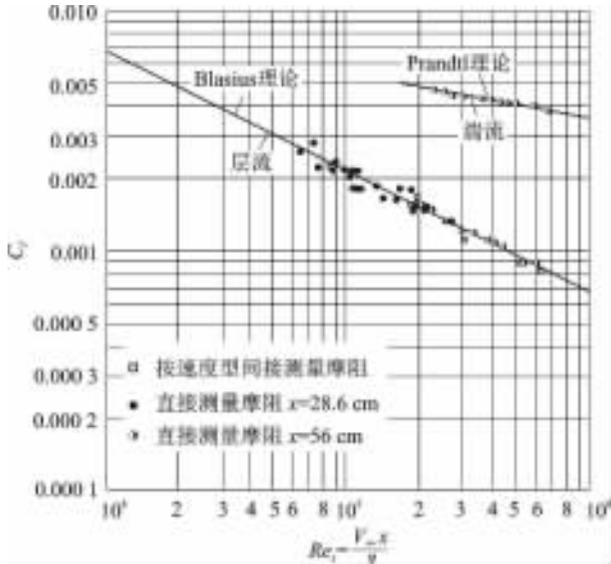


图 4.8 平板局部摩擦系数与雷诺数的关系

**例 4.2** 一块平板宽  $b=3.05 \text{ m}$ , 长  $L=30.5 \text{ m}$ , 以  $V_\infty=6.1 \text{ m/s}$  的速度在  $20^\circ \text{C}$  的水中运动, 试求平板末端的  $\delta$  和  $\delta^*$ , 平板的摩擦系数  $C_{Df}$ , 以及单面平板的阻力。

**解:** 水在  $20^\circ \text{C}$  时的运动粘性系数为  $\nu=0.01 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , 故得

$$Re_L = \frac{V_\infty L}{\nu} = \frac{6.1 \times 30.5}{0.01 \times 10^{-4}} = 1.86 \times 10^8$$



此值大于  $Re_L^* = 5 \times 10^5$ , 故判定流态为湍流。

由式(4.42)得

$$C_{Df} = \frac{0.455}{(\lg Re_L)^{2.58}} = 0.00196$$

单面阻力  $D_f$  为

$$D_f = C_{Df} \cdot \frac{\rho V_\infty^2}{2} \cdot bL = 0.00196 \times \frac{102 \times 37.21}{2} \times 3.05 \times 30.5 = 3.38 \text{ kN}$$

由式(4.39)得

$$\delta = \frac{0.37L}{Re_L^{0.2}} = \frac{0.37 \times 30.5}{45.1} = 0.35 \text{ m}$$

现在,  $V_\infty = V_\delta$ , 故  $\frac{u}{V_\infty} = \frac{u}{V_\delta}$ 。又因在湍流中

$$\frac{u}{V_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

所以, 由式(4.8)得位移厚度为

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^{\delta} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right] \cdot d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left[\frac{y}{\delta} - \frac{7}{8}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{8}{7}}\right]_0^{\delta} = \frac{1}{8}$$

即

$$\delta^* = \frac{\delta}{8} = \frac{350}{8} = 43.75 \text{ mm}$$

答:  $\delta = 350 \text{ mm}$ ,  $\delta^* = 43.75 \text{ mm}$ ,  $C_{Df} = 0.00196$ ,  $D_f = 3.38 \text{ kN}$ 。

### 4.3 曲面边界层的分离现象

用风洞观察实际流体流过曲面物体(例如圆柱体)时, 会看到分离现象。流过曲面与流过平板的主要不同之处在于沿着前者物面的压强梯度  $\frac{\partial p}{\partial x}$  不是零, 而沿平板的  $\frac{\partial p}{\partial x}$  则恒为零。而压强梯度是会影响边界层流动的。

参看圆柱体的无粘绕流图 4.9, 在圆柱体表面上, 由前驻点 A 往下游去, 流速在 AB 段是增大的, 到 B 点达最大值, 然后在 BC 段内减速, 到后驻点 C 处流速降为零。而压强的变化趋势则正与流速的变化趋势相反, 在 AB 段内, 压强是逐渐减小的, 而在 BC 段内则是逐渐增大的。如果取曲线坐标

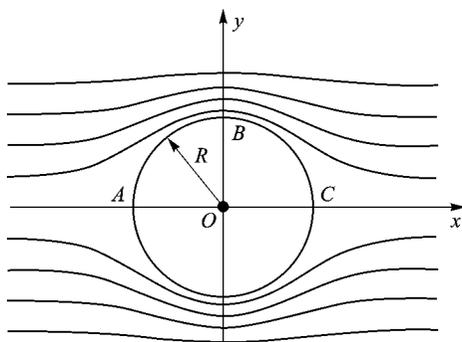
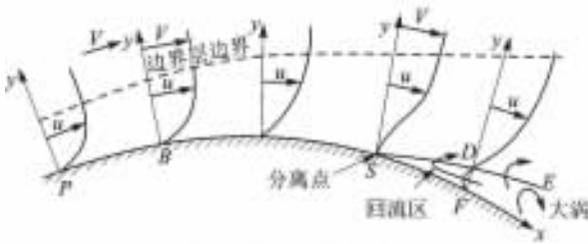


图 4.9 圆柱体的无粘绕流

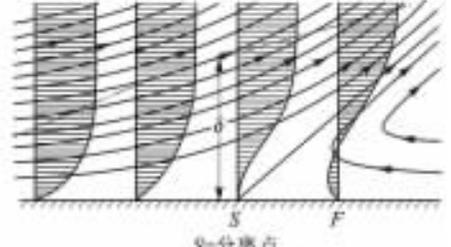


系,将圆柱面当做  $x$  坐标,就是  $\frac{\partial p}{\partial x}$  开始小于零,然后在  $BC$  段大于 0。在这种压强梯度的作用下,理想流体不会分离,因流体微团在  $B$  处得到的动能正好足够把流体微团送到  $C$  点。有粘性的实际流体就不同了,从  $A$  到  $B$  有摩擦,消耗了一部分动能;从  $B$  到  $C$  既有摩擦又有逆压,都要消耗动能,这就使流体微团没到  $C$  点就走不动了。现在把物面上分离点附近的流动图图示于图 4.10(a)中,由图看到,在  $B$  点下游,有这样一点  $S$ ,在该处

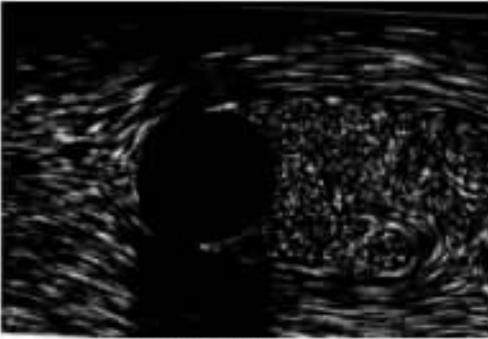
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (4.43)$$



(a) 有分离的曲面绕流示意图



(b) 分离点附近的流动



(c) 圆柱体分离绕流的实验观察



(d) 机翼分离绕流的实验观察

图 4.10 曲面边界层的分离

$S$  点称为分离点 [图 4.10(b) 中清晰地显示该点  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ]。在分离点下游,例如  $F$  点,因  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ,物面附近的流体微团将由下游向上游流去,形成一股逆流,这股逆流的总机械能是比较低的,不可能冲到  $S$  点上游的主流中去,而是不断地被主流带走,流线拐了一个弯。 $F$  点处的速度分布曲线如图 4.10(a) 和图 4.10(b) 所示,其中有一点  $D$ ,在该点  $u = 0$ ,而物面上  $F$  点的速度梯度是小于零的,即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$$



这是因为物面附近有回流之故。若将各个截面上  $u=0$  的点连接起来,则得主流与回流的分界线  $SDE$ 。在  $SDE$  上下两侧有两个反方向的流动,产生很大的剪应力,形成漩涡,迫使主流流线离开物面,这就是从实验中观察到的分离现象,如图 4.10(c)所示。这种现象,在物形不好(如圆柱体)或物形虽好但迎角过大[如图 4.10(d)]时,都会发生。

在发动机的进气扩压器内,又有摩擦作用又有逆压梯度,气流容易分离,在设计时一般是取扩压器的张角不超过  $6^\circ \sim 8^\circ$  来限制逆压梯度。在火箭发动机喷管中,情况好一些,因为虽然有摩擦,但没有逆压梯度,而只有顺压梯度,即  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ ,气流是不容易分离的。但是,在喷管的某些工作情况下,出现激波与边界层相互作用形成逆压梯度时,也会有分离现象。

## 习 题

- 4.1 图 4.11 所示是一根管道进口段中的层流流动,进口处为直匀流,  $u=V_\infty$ ,其下游速度型为抛物线  $u(r)=C(r_0^2-r^2)$ ,式中  $C$  为常数。试用动量积分关系式证明,从 0 到  $x$  这段管壁所受的摩擦阻力为

$$D_f = \pi r_0^2 \left( p_\infty - p_x - \frac{1}{3} \rho V_\infty^2 \right)$$

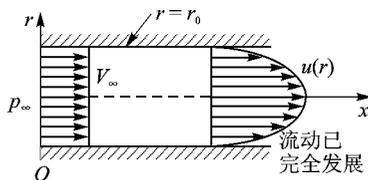


图 4.11 习题 4.1 附图

- 4.2 皮普-切诺基(Piper-Cherokee)多用途飞机的矩形机翼,展长 9.75 m,弦长 1.6 m。巡航速度为 226.91 km/h,飞行高度为海平面。假设此机翼的表面摩擦可以近似地按同样尺寸的平板计算,试求以下两种情况下的摩擦阻力:(a) 流动完全是层流;(b) 流动完全是湍流。
- 4.3 续习题 4.2,求机翼后缘边界层在 (a), (b) 两种情况下的厚度。
- 4.4 续习题 4.2,考虑转捩,并假设转捩雷诺数为  $5 \times 10^5$ ,再求此机翼的摩擦阻力。
- 4.5 一块平板以零迎角放置在气流中,气流处于海平面标准状态 [ $p_\infty = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $T_\infty = 288 \text{ K}$ ,  $\mu_\infty = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ ]。平板的弦长(从前缘到后缘)为 2 m,面积为  $40 \text{ m}^2$ ,平板表面为绝热壁。当自由流速为 (a) 100 m/s;(b) 1 000 m/s 时,此平板的摩擦阻力各是多大。



4.6 假设边界层内的速度型如下

$$\frac{u}{V} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

试用动量积分关系的结果求: (a)  $(\delta^{**}/x)\sqrt{Re_x}$ ; (b)  $(\delta^*/x)\sqrt{Re_x}$ ; (c)  $(\delta/x)\sqrt{Re_x}$ ; (d)  $C_{Df}\sqrt{Re_x}$ ; (e)  $C_{DF}\sqrt{Re_l}$ 。

4.7 几何参数及流动参数皆与习题 4.5 相同。试在全湍流条件下,再算此平板的摩阻。

4.8 参看图 4.12, 上方平板的速度  $V$  为 60.96 m/s, 下板不动, 二板的垂直距离  $h$  为 0.0254 cm。二板间的介质为空气, 假设是不可压的。二板的温度为 288 K。试求: (a)  $0.5h$  处的速度; (b) 各处的剪应力; (c) 气流中的最大静温; (d) 壁面的热流量; (e) 如果突然使下壁成为绝热壁, 壁温应是多大。

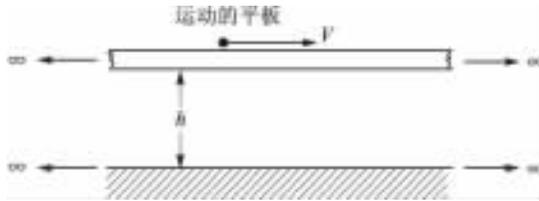


图 4.12 习题 4.8 附图

4.9 同习题 4.8, 二板温度都是 288 K, 空气压强为 101.325 kPa。上板  $Ma=3$ , 下板剪应力为  $72 \text{ N/m}^2$ , 再求两板的传热系数是多大。

# 第 5 章 湍流的产生

## 5.1 概 述

### 5.1.1 湍流的科学发现

湍流是自然界里最复杂的现象之一。它广泛存在于大气、海洋、河流以及工业流动中。人们很早就从水流中看到湍流,它是一种不规则的、不断变化的流动现象。但是人们还没有从科学角度认识湍流。

19 世纪雷诺在圆管流动实验中发现了湍流。图 5.1 是雷诺实验的圆管流动示意图。清水从一个有恒定水位的水箱流入等截面直圆管,在圆管入口的中心,一细空心针引入染色液体。在圆管的出口端有一个节门可调节流量,以改变流动的雷诺数。入口有收缩段,以增加流动的均匀性。通过圆管截面上的流量为  $q_v$ ,管内的平均流速为  $V$ ,雷诺数  $Re$  定义为

$$Re = Vd/\nu \quad (5.1)$$

式中, $d$  是圆管直径; $\nu$  为水的运动粘性系数。实验过程中,逐渐开大节门,这时管内流速逐渐增大。当管内流速较小时,圆管中心的染色线保持直线状态[图 5.1(a)];当流速增大到某一  $Re$  时染色线开始出现波形扰动;继续增大流量时,染色线由剧烈振荡到破裂,并很快和清水剧烈掺混以至不能分辨出染色液线[图 5.1(b)]。

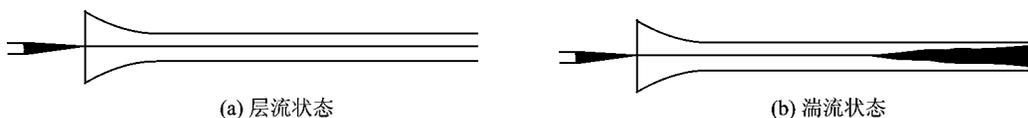


图 5.1 圆管层流和湍流染色液的显示图像示意图

上述第一阶段的流动状态称为层流,最后阶段的流动状态称为湍流。中间阶段的流动状态极不稳定,称为过渡流动。在不加特殊控制的情况下,圆管流动出现湍流状态的最低雷诺数约为  $Re=2\ 300$ 。在特殊控制环境下,使得外界扰动非常微弱(如控制环境振动和噪声或管壁粗糙度等)时,圆管内流动的层流状态可维持到  $Re=10^5$  量级。在常见的其他流动中,如边界层、射流或混合层等,随着流动特征雷诺数的增大,也会发生从层流到湍流的演变。总之,湍流是一种极普遍的现象,当流动的特征雷诺数足够大时,它就转变为不规则的湍流状态。

湍流的特性表现在它的流速的不规则性和不重复性。具体来说,就是当重复前面的雷诺

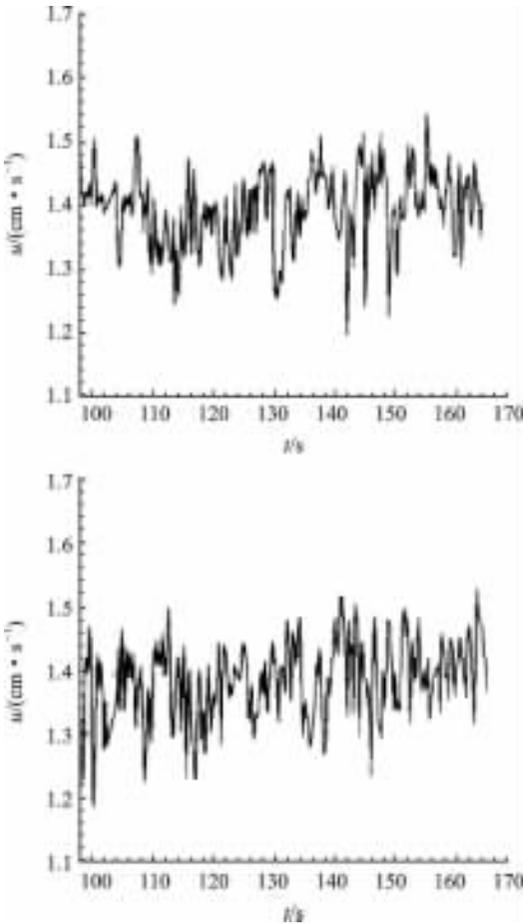


图 5.2 热线风速计两次测量的流速

例,从表面上看,每次采样的速度序列都极不规则,而且两次采集的结果没有重复性。如果把采集速度按速度大小分类,并考察出现在某速度区间上采集点数的分布,那么两次采样结果就有几乎相同的分布规律。而且基本上是高斯正态分布。图 5.3 是一次湍流脉动速度测量结果的概率密度分布,它表现出湍流脉动速度的概率密度基本上符合高斯正态分布。

湍流是极为复杂的流动,并不是所有的湍流脉动都符合高斯正态分布。但是所有的湍流都有不规则性和不重复性。

实验,并使每次实验保持相同流量、相同粘度等条件,并且每次实验的时间变量均由启动瞬间算起,则在这种重复试验的流动中,在同一空间点上的速度时间序列是不重复的。图 5.2 为表示不重复性的示意图,它表示在不同时刻采集的圆管湍流中心线上的流向瞬时速度  $u$  以及两次采集的速度时间序列都是极不规则的,并且两次采集的结果没有重复性,如图 5.2 所示。

湍流虽然很不规则,但是也有一定规律。用统计理论研究湍流,是把湍流流速分解为平均流速和脉动流速。速度的瞬时值写成

$$u = \bar{u} + u' \quad (5.2)$$

式中,上横线表示平均值,根据定义, $u'$  的平均值为零。湍流是不规则运动,但是它是否具有可预测特性呢?或者说,用什么方法可以从不规则的变量中寻求可预测的特征呢?不规则运动属于随机过程,随机变量最基本的可预测特性是它的概率和概率密度。首先,用直观的方法建立概率和概率密度的概念。以前面的圆管湍流中心脉动速度测量结果为

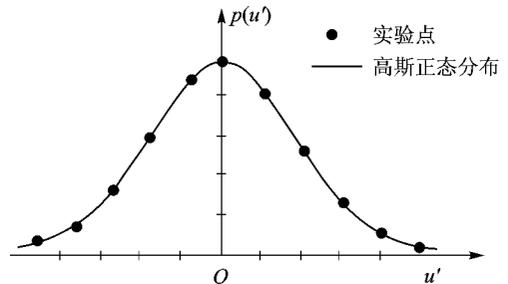


图 5.3 脉动流速的概率分布



### 5.1.2 湍流的主要特征、种类和研究方法

从雷诺实验发现湍流开始,流体力学研究者认识到,一切流动当在低雷诺数时是层流,超过临界雷诺数时转换为湍流。而临界雷诺数的数值是随流动的种类和条件变化的。湍流比层流复杂得多,而且湍流几乎无处不在,它对人类的生活、工农业以及地球环境都产生巨大的影响。流体力学家从此开始了对湍流一百多年的热烈的研究,至今仍在继续。

这里讨论的湍流是在连续介质范畴内流体的不规则运动,它不同于气体分子的不规则运动。湍流流动的最小时间尺度和最小空间尺度都远远大于气体分子热运动的相应尺度。由于湍流是流体微团的不规则运动,因此湍流运动产生的质量和能量的输运将远远大于分子热运动产生的宏观输运,这就导致湍流场中质量和能量的平均扩散速度远远大于层流扩散。例如,在化学反应器中,为了充分混合以加速化学反应,常常利用各种方法产生湍流以加强流动中反应物的质量扩散。另外,湍流脉动导致能量耗散,因此湍流运动往往导致流动摩阻的增加,例如,湍流边界层的物面摩阻远远大于层流摩阻。

研究湍流的目的有理论和应用两方面。在理论方面,湍流是最复杂的流体力学问题,了解和探索其规律是许多科学家追求的目标。在应用方面则以估计及控制湍流产生的摩阻、传热和扩散等工程问题为目标。

湍流自其被发现以后,直到20世纪60年代,一直被认为是一种紊乱的、无规律的和随机的流动;并按照处理随机现象的方法来进行研究。在20世纪20年代以后,随着热线风速计的发展,为湍流运动的统计理论积累了大量的实验数据,使湍流统计理论得到了很大的发展。当时的著名流体力学家几乎都参与了湍流的研究,如 Prandtl, Karman, Taylor, Heisenberg 等。到20世纪40年代 Komogorov 和周培源是这方面有名的代表。

湍流理论,亦即湍流统计理论,是把流动分解为平均速度和脉动速度来处理,建立和求解 Reynolds 方程。在建立 Reynolds 方程时,湍流流速被分解为时均流速和脉动流速之和。Reynolds 方程中由脉动流速的相关量组成的 Reynolds 应力项也是未知量,因此 Reynolds 方程不封闭。众多学者发展了很多湍流模式,用种种方法来建立补充方程,以使 Reynolds 方程封闭,用以求解。但是湍流模式的补充方程往往又引出一些新的未知量,它们一般需要从所研究对象的实验数据来确定。这样,虽然湍流模式理论在工程上得到广泛的应用,但是由于湍流在不同条件下表现出的差异性,使得这些模式理论的结果缺乏通用性,即当研究对象变更后,往往需要新的实验数据来确定有关的参数。

流体的运动是受到约束的。它受到连续方程、N-S 方程和涡量方程等的约束,因此它的随机性要受到一定的限制。早就有人猜想,湍流中可能存在具有一定组织性的流动。但是,这种有组织的流动,即拟序结构,是经过长期探索及大量实验才逐步发现的。早在1952年,Theodorsen 提出了在湍流边界层中存在发卡涡的假说。1956年 Townsend 提出了大涡假说(big eddy),即大涡加上随机的湍流次结构。Townsend 的双重结构概念是不清晰的,没有现



在拟序结构的组织性、相干性和拟序性等内容。Townsend 的双重结构的概念是基于定点测量的结果。定点测量是欧拉性质的实验；而拟序结构基本上是与流体运动，是拉格朗日性质的，是定点测量不能发现的。

拟序结构的名称是在三十多年前才广为流体力学界所采用。1967 年 Kline 等发表了用氢气泡法和色液法在湍流边界层的近壁区观测到的快慢斑和猝发等流动结构，认为湍流边界层中湍流能量的主要来源是猝发。其后，Kim 和 Kline(1971 年)又用氢气泡法发现了流向涡和横向涡等涡结构。Brown 和 Roshko(1974 年)又用光学法发现了混合层中的展向大涡结构。这些大涡在下游逐渐互相合并。大涡的流向分布以及合并都有拟序性质。后来 Roshko 等还用流动显示法发现了附于大涡的流向小涡。射流、分离流和尾流都是自由剪切流。这些自由剪切流也都有卷起大涡的现象，与混合层的大涡结构很相似。这些流动也是工程中和自然界广泛存在的一大类流动现象，它们包含的湍流拟序结构称为自由剪切流拟序结构。后来湍流拟序结构的概念逐渐广泛地在流体力学界中流行起来。它们几乎存在于一切剪切湍流中。

湍流实际上可以分为两大类型，一种是剪切湍流，它的时均速度为剪切层；另一种是无剪切层的湍流，例如均匀各向同性湍流。后者是统计湍流理论研究的主要对象。剪切湍流不是各向同性的，而且是大尺度。拟序结构存在于各种剪切湍流中。剪切湍流又分为壁湍流和自由剪切层湍流两大类，前者包括了湍流边界层、管流和槽道流等，后者存在于射流、混合层流动和尾流中。壁湍流的研究成果广泛应用于航空航天飞行器、车、船以及油、气、水等流体的输运；也应用于大气层和环境污染等的研究。自由剪切层湍流的研究成果则应用于化学工业和燃烧等方面。拟序结构存在于各种剪切湍流中，对其特性起主导作用。涡结构是拟序结构的核心。因为剪切层实际上是由涡线组成。拟序结构是大尺度结构，它们的尺度一般是剪切层厚度的量级，例如湍流边界层涡结构的尺度是边界层厚度的量级。涡结构一方面产生的传热传质的输运量，远远大于湍流微团产生的输运量，因而拟序结构对摩擦阻、传热及扩散等有很大影响；另一方面，由于涡结构的尺度大，有利于控制。拟序结构发现后，已经出现了多种控制涡结构的方法，有的已有成效。控制涡结构，在湍流边界层可起到减阻或增加传热率的作用，在混合层中可提高燃烧效率或提高化学反应的效率。拟序结构的发现是湍流研究在 20 世纪的重大进展。

## 5.2 湍流的测量方法

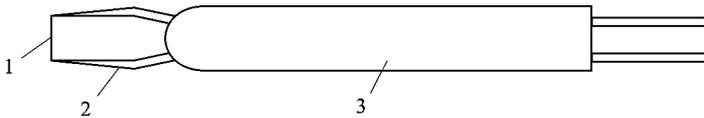
湍流是很复杂的流动现象，目前还主要依靠实验来进行研究。实验技术的进展，对研究的深入往往起到决定性的作用。对湍流测量的技术有两大类，一类是定点测量技术，如热线风速计和激光测速计，它们可得到大量的时间序列数据；另一类是流动显示技术，它可测量和观察流动结构的形态。



### 5.2.1 热线风速计

湍流流速是空间位置和时间的不规则函数  $u_i(x, y, z, t)$ 。目前,要完整测量  $u_i(x, y, z, t)$  还是不可能的。最常用的热线风速计和激光风速计是一种定点测速仪器,它们只能测量固定点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的时间序列流速。20 世纪初出现了热线风速计,并在 20 年代后期发展起来,它对湍流统计理论的发展具有重大贡献,至今仍是主要的湍流测量仪器。激光测速仪在 20 世纪 60 年代出现,它的优点是对流场无干扰,可以和一些测量流动的方法(如氢气泡法)同时使用一起显示、记录湍流的流动结构与瞬时流速的关系。粒子图像测速法是 20 世纪后期发展起来的,原则上它可以测量完整的  $u_i(x, y, z, t)$ 。不过目前只有少数研究者测量了二维的非定常不规则流场。本书只介绍应用最普遍的热线风速计。

热线风速计可分为热线探测头和电子仪器两部分。热线探测头又包括热线、支杆和保护罩,如图 5.4 所示。图中的探头是单热丝,只能测量一个分量的流速。



1—热线; 2—支杆; 3—保护罩

图 5.4 热线风速计探测头

热线风速计既可测量平均风速  $\bar{V}$ ,也可测量脉动速度  $u'$ ,  $v'$  和  $w'$ ,所以它在湍流边界层测量、湍流度测量以及一般试验中得到了广泛应用。其特点如下。

① 可测量小风速。Pitot 管所产生的压差正比于  $\bar{V}^2$ ,在小风速时只有极小的压差(如  $\bar{V}=4$  m/s 时,  $\Delta p$  大约为 10 Pa,在液体压力计上为 1 mm 水柱),不易测准。而热线风速计在小风速时更灵敏。因壁面附近边界层流速很低,所以应用热线风速计很方便。

② 感应元件小。热线直径  $d=0.2 \sim 2 \mu\text{m}$ ,长度  $l < 200d$  ( $l \approx 0.5$  mm),其尺寸比湍流尺度小,所以对流场干扰很小。

③ 反应快。可准确反应  $f=2\,000 \sim 5\,000$  Hz 的脉动。

热线风速计的工作原理是:垂直气流方向安装的通电金属丝,在达到热平衡后供给的电能与传到气流中的热能相等;而金属丝的散热随气流速度而改变,利用此关系可以测速。忽略热辐射和自然对流,考虑圆柱体强迫传热的热流密度公式为

$$q = h\pi dl(T_w - T_g) \quad (5.3)$$

式中,  $T$  为热力学温度;下标  $g$  代表气体,下标  $w$  代表热丝;  $h$  为表面传热系数,是气体速度  $u$  的函数。由实验可得下式

$$\frac{hd}{\kappa_g} = 0.42Pr^{0.2} + 0.57Pr^{0.33}Re^{0.5}$$



式中,普朗特数  $Pr = \frac{c_p \mu_g}{\kappa_g}$ , 雷诺数  $Re = \frac{\rho_g u d}{\mu_g}$ ,  $\kappa$  是导热系数。

电能为

$$q' = I^2 R_w \quad (5.4)$$

式中,热线电阻  $R_w = R_0 [1 + b_1 (T_w - T_0) + \dots]$ , 其中,  $R_0$  为标准温度下的标定电阻,  $b_1$  是材料常数。

达到平衡后  $q = q'$ , 即

$$I^2 R_w = h \pi d l (T_w - T_g) \cdot e$$

式中,  $e$  是单位换算常数 ( $= 4.2$ ), 即焦耳与卡的比值。由此可得

$$\frac{I^2 R_w}{R_w - R_g} = A + B \sqrt{u} \quad (5.5)$$

式中, 常数  $A = 0.42 \frac{e \pi \kappa_g l}{b_1 R_0} Pr^{0.2}$ ;  $B = 0.57 \frac{e \pi \kappa_g l}{b_1 R_0} Pr^{0.33} (d/u)^{0.5}$ ;  $R_g$  是在  $T_g$  下对应的热线电阻;  $R_w$  是平衡温度下的电阻。  $A$  和  $B$  值通过实验检测而得。检测是在低湍流速度风洞中进行的, 并绘出  $I^2 - \sqrt{u}$  曲线。

采用热线风速计的测量方法有两种, 即恒电流法和恒温法。恒电流法是把一个电阻  $R$  和热线串联。  $R$  远大于热线电阻  $R_w$ 。流速的变化导致  $R_w$  变化, 但因总电阻变化不大, 电流基本上恒定, 故可由跨热线电压  $V_w$  的变化测定气流速度。恒电流法热线风速计的电子线路简单, 在 20 世纪初期流行; 但是热惯性大, 不能测高频的脉动, 因而, 现在一般用恒温法。

一般热线探测头可以从市场上购买。不过世界上许多研究湍流的实验室和科学家往往自制适合自己研究目的热线探测头, 如超小型探头, 三维湍流边界层探头, 多热丝探头等。

热线风速计有一定的局限性, 主要是强度低, 易损坏; 如果受到气流中微粒的影响, 微粒冲击还可能损坏热线; 电吸附微粒还可使传热特性改变。

热线的老化 (氧化和粘污等) 使线径变化, 因此要经常校测标定, 标定工作要在低湍流度风洞中进行。

相对于边界层厚度, 热线探测头尺寸仍不小, 而且不适合于同时测量多点。在用多条热丝组合的多点测量方法中, 支杆对流场干扰很大。

20 世纪 60 年代后发展起来的激光测速计, 具有对流场无干扰的优点, 而且还可以测得大量时间序列数据; 但它也是定点测量, 不能得到空间序列数据。激光测速计的原理是用激光照射流场中散布的微粒, 测量其反光, 根据多普勒效应, 测量微粒运动的速度。实际上激光测速计测定的是流体中微粒的速度。只有当微粒的速度等于当地流速时, 所得的数据才是准确的。微粒在流场中的速度是否等于当地流速的问题, 称为跟随性问题, 这将在 5.2.2 节中讲述。

### 5.2.2 示踪粒子显示法

热线风速计和激光测速计虽然可以测得大量的时间序列数据, 但是得不到空间系列数



据,而湍流本身是三维的,湍流是在空间发展的。因此热线风速计虽然对统计湍流的研究有很大的贡献,但是不可能用于发现湍流拟序结构。故而对拟序结构的研究主要使用示踪粒子显示法。

### 1. 示踪粒子的跟随性

粒子示踪法是显示流动的一种方法,多半是在水洞(或水槽)中加入可见粒子,如氢气泡和固体微粒等,在强光照射下显示它们的运动。粒子示踪法对湍流拟序结构的发现和发展起了很大的作用。到了20世纪80年代后期,从粒子示踪法发展起来的粒子图像测速法,理论上可测瞬时三维流场的三维流速分布  $u_i(x, y, z, t)$ ,因而可望将来成为研究湍流的利器。粒子速度能否代表当地流速,是粒子示踪法的根本问题,即跟随性问题。激光测速计的准确性,也依赖于所使用的微粒的跟随性。

对粒子的跟随性问题,一般要考虑它的浮沉速度和它对流场动态变化的跟随问题。

#### (1) 粒子的沉浮速度

粒子在流体中受到自身重力和流体浮力的作用,如果浮力大于重力,则上浮,反之则下落。微粒观测法都应考虑微粒自身的上浮与下落速度不宜太大,否则干扰观测。设粒子的上浮速度或下落速度已达到定常,为  $V_p$ 。此时,粒子的浮力  $F$  和重力  $W$  之差等于粒子上浮或下落运动的阻力  $D$ ,即

$$F - W = D$$

由于粒子很小,一般是微米级,所以  $Re \ll 1$ ,其阻力  $D$  可由 N-S 方程中忽略惯性项后得到的线性方程而解出。一般阻力表示为

$$D = c\pi\mu dV_p \quad (5.6)$$

式中,  $d$  是粒子直径;  $\mu$  为流体粘性系数。对于固体微粒,适用 Stokes 式,  $c=3$ ; 对于气泡,由于表面速度不为零,所以可以近似解得  $c=2$ 。一般文献多用 Stokes 式。

由此可得

$$V_p = gd^2/b\nu \quad (5.7)$$

式中,  $\nu$  是流体运动粘性系数;  $g$  是重力加速度;  $b$  是物性常数,对于固体粒子  $b=18$ ,对于气泡  $b=12$ 。

例 一个氢气泡,  $d=0.02$  mm,水的运动粘性系数  $\nu=0.011$  cm<sup>2</sup>/s,则  $V_p=0.008$  cm/s。若水流速  $v=10$  cm/s,则  $V_p/v=0.0008$ ,其影响可以忽略。

#### (2) 粒子对动态流场的跟随性

粒子的动态跟随性是当流体有速度变化时,产生了粒子和流体的相对运动。这种相对运动如果较大,则是跟随性不好。在粒子和流体有相对运动时,粒子的加速度产生惯性力,相对运动产生阻力,两者应平衡。对于固体粒子其力的平衡方程式为

$$m \frac{du_p}{dt} = 3\pi\mu d(u - u_p) \quad (5.8)$$



左边是惯性力,右边是阻力。式中, $u$  是流体流速, $u_p$  是粒子速度,二者之差是相对速度; $d$  是粒子直径; $m$  是质量,它包括粒子质量和粒子加速产生的附加质量。物体加速时的附加质量是它带动周围流体一起加速时折合的等效质量。一般圆球粒子的附加质量近似为等体积流体质量的  $1/2$ 。

式(5.8)可整理为

$$\tau \frac{du_p}{dt} + u_p = u \quad (5.9)$$

式(5.9)是气泡或粒子动态运动的基本方程式。式中, $u$  为流场流速, $u_p$  为粒子的速度, $\tau$  为特征时间。对于液体中的气泡,气泡的质量远远小于附加质量,因此可以只考虑附加质量,故得  $\tau = d^2/24\nu$ ;对于固体粒子,则需按式(5.8)、粒子密度和流体密度计算的附加质量,求得  $\tau$ ,如果固体粒子密度远远小于流体密度,可得  $\tau = d^2/36\nu$ 。

粒子在湍流中的动态反应有很多种。下面只讨论常用的两种。

① 流场流速为  $u = u_0 \cos \omega t$ ,即流速有振动,求氢气泡的跟随性。

解式(5.9)得振幅比

$$\frac{u_p}{u_0} = \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{(1 + \omega^2 \tau^2)^{0.5}} \quad (5.10)$$

式中,相位差为  $\varphi = \arctan(\omega\tau)$ 。

粒子和流速的振幅差的百分比为

$$\epsilon = \frac{u_0 - u_p}{u_0} \% \quad (5.11)$$

2 个气泡的计算例子,其结果列在表 5.1 中。从表中可以看出若要反应高频脉动,气泡直径宜小。

表 5.1 气泡在振动流场中的振幅差  $\epsilon$  和相位差  $\varphi$

$\epsilon, \varphi$ 粒子直径 $d$	脉动频率 $f$	
	1 000 Hz	2 000 Hz
2 $\mu\text{m}$	0.5 %, 7°	3 %, 13°
40 $\mu\text{m}$	13 %, 25°	35 %, 42°

② 流场为:当  $t=0$  时,  $u=0$ ; 当  $t>0$  时,  $u=u_0$ ,即流场有台阶型速度增加。

解式(5.9),可得

$$\frac{u_p}{u_0} = 1 - e^{-t/\tau} \quad (5.12)$$

从式(5.9)导出

$$\epsilon = \frac{u_0 - u_p}{u_0} = e^{-t/\tau} \quad (5.13)$$



按式(5.13),当  $t/\tau=9$  时,表示跟随性误差的  $\epsilon=0.0001$ 。

例如氢气泡  $d=20\ \mu\text{m}$  时,  $\tau=0.000016\ \text{s}$ ,即大约在  $0.0001\ \text{s}$ ,氢气泡的速度即可达到流场流速的  $0.9999$  倍,几乎是瞬时跟上。而一般流场的加速远远小于台阶型增速,因此,可以认为微小氢气泡基本上反映出瞬间流场的变化。

示踪粒子的种类很多。在拟序结构的研究中,常用氢气泡显示法。

## 2. 氢气泡显示法

氢气泡法是 20 世纪 60 年代发展起来的方法,可做定性观测,也可做定量测量,主要用于湍流的结构研究以及一般复杂流动的观测。

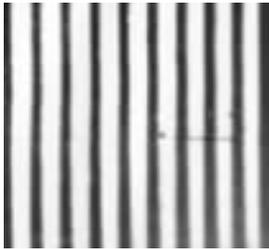
氢气泡的产生方法是將铂金丝或钨丝放置在水槽中与直流电的负极连接,在远处水中置正极,通电产生水电解,形成微小的氢气泡,气泡平均直径约为铂丝直径的一半。

氢气泡发生线的两端或一端连接电源的负极。电源输出通常是可调节的方波。它在均匀流场中形成的图像如图 5.5 所示,是一些平行线条。

在流向及流速定常和均匀的条件下,氢气泡时间线的间距  $s$  正比于当地的流速  $u$ ,再乘以氢气泡时间线产生的时间间隔  $\Delta t$ ,得

$$s = u\Delta t \quad (5.14)$$

时间线间距  $s$  可以从一条时间线的前缘到下一条时间线的前缘;也可以是从后缘到后缘。从时间线间距  $s$  可近似测量当地流速  $u$ 。如果流场是定常流,而且流速沿流向的变化梯度不大,那么,测量的误差是不大的。图 5.6 是氢气泡法显示的一个层流边界层的速度型。铂丝垂直于壁面。每一条氢气泡时间线的流向位移,基本上正比于 Blasius 速度型的流向坐标。



流速方向自左向右

图 5.5 一个均匀的加速流场的氢气泡时间线

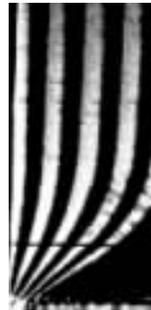


图 5.6 氢气泡时间线显示的层流边界层速度型

氢气泡法在湍流边界层中的流动显示,可以分为平面图和侧面图两种,铂丝的布置方法如图 5.7 所示。氢气泡法的平面图像是由一条平行于壁面并且垂直于来流的铂丝释放的氢气泡所形成的图像。这些氢气泡最初都是在一个平行于壁面的平面上,故称为平面图。平面图像照片是从  $y$  方向摄影的。侧面图像是由一条垂直于壁面的铂丝释放的氢气泡所形成的。这



些氢气泡最初是在一个垂直于壁面的平面内顺流向释放。侧面图像的照片是从  $z$  方向摄影的。一般氢气泡法用的是聚光灯照明,为了在平面图上得到一些拟序结构为垂直于壁面方向的状况,使用了聚光灯和倾斜片激光同时照射。

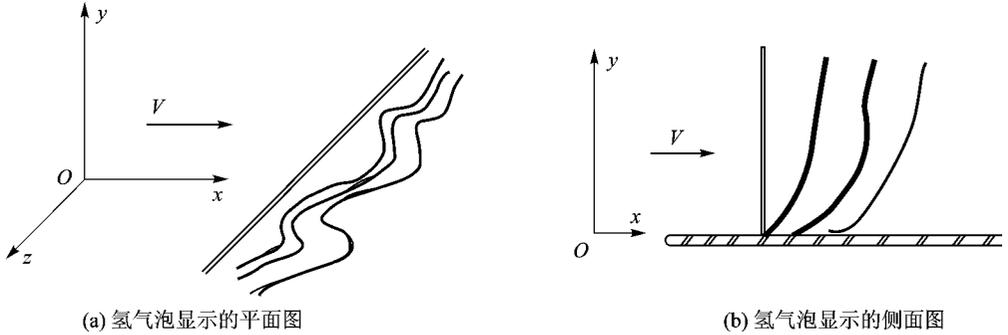


图 5.7 观测湍流边界层的氢气泡法的常用布置法

### 5.3 稳定性理论

一般流动在雷诺数很小时,总是层流;而在雷诺数很大时,总是湍流。从层流向湍流过渡是很复杂的过程。不同的流动有不同的过渡过程。层流向湍流的过渡,一般称为转捩。例如圆管层流的转捩就和层流边界层的转捩很不相同。实验室中边界层的转捩,一般有两种途径。一是用强烈的扰动造成湍流,例如在平板边界层内,装置一条展向的、较粗的线,干扰流场,使层流边界层转捩成湍流边界层,称为旁路转捩。另一途径是在层流边界层内,在雷诺数达到一定临界值的区域,引进微弱波动。由于流动的不稳定性,波动幅度逐渐放大,最后产生湍流。这种由微弱扰动导致转捩的过程,要经历线性放大,非线性放大,最后紊乱化,才完成转捩过程。此一过程要流经很长的距离。一般研究湍流边界层的科学家,并不使用这种产生湍流的途径,而是使用旁路转捩,从而可以用较短的试验平板,得到作为观测研究用的湍流边界层。

目前还没有整个转捩过程的理论,下面介绍的稳定性理论只是关于微弱简谐扰动的线性放大阶段的理论。它是预报在一定的扰动频率和雷诺数的条件下,微弱的简谐扰动在层流边界层内,是放大或衰减的理论。它对于进行实验研究转捩的研究者,在设置扰动频率时是有用的。

在稳定性理论的研究中,都认为在层流中有一个微小的扰动,例如对于管道,这个扰动可能是流体进入管道焊缝引起的;对于边界层流动,扰动可能是固体壁面的粗糙率或边界层外引起的。稳定性理论试图研究这一初始扰动随时间的变化规律。如果这附加于层流的微小扰动随着时间的推移而衰减,那么层流将是稳定的;如果随着时间而增长,那么层流将是不稳定的;也就有可能过渡到湍流状态。雷诺于 1895 年曾提出了下述假定:层流作为一种可能存在的运



动形式,当雷诺数达到其临界值以后将是不稳定的并将转变为湍流。

设直角坐标系的3个轴分别为  $x, y, z$ , 基本层流流速在各轴上的投影分别为  $v_x, v_y, v_z$ , 微小扰动流速在各轴上的投影分别为  $v'_x, v'_y, v'_z$ , 基本层流和扰动流的压强分别为  $p$  和  $p'$ , 而用  $V_x, V_y, V_z$  和  $P$  表示扰动层流各相应值, 因此有

$$\left. \begin{aligned} V_x &= v_x + v'_x \\ V_y &= v_y + v'_y \\ V_z &= v_z + v'_z \\ P &= p + p' \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

稳定性理论是研究在一定的基本层流流场中初始扰动量发展的规律。如果初始扰动量不断衰减, 最终恢复到没有扰动的流场, 则流场是稳定的; 反之则是不稳定的。

流动稳定性理论已经经历了约一百年的发展, 提出了许多理论和研究方法, 可用于许多自然现象和工程流动现象的解释。下面介绍应用最普遍的平行流稳定性的线性理论。

平行流是指流线都是互相平行的流动, 如平面 Poiseuille 流等。平板边界层、射流及自由剪切层等, 它们的流线不是严格地互相平行, 但在线性理论中, 一般近似地作为平行流来处理。

按平行流定义, 可设基本层流只在  $x$  方向上有流速  $v_x$ , 且其值仅在  $y$  轴方向上有变化, 即认为  $v_x = v_x(y), v_y = v_z = 0$ 。边界层中的层流运动也近似于这种简单情况, 因为流速沿程(即沿  $x$  方向)的变化远比沿垂直于壁面方向(即沿  $y$  方向)的变化为缓。基本层流的压强  $p$  应当认为同时是坐标  $x$  和  $y$  的函数。因此对于基本层流来说可以写出

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x(y) \\ v_y &= 0 \\ v_z &= 0 \\ p &= p(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

附加于基本层流上的二元扰动流的流速和压强, 则不仅是坐标  $x$  和  $y$  的函数, 而且也与时间  $t$  有关, 故

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v'_x(x, y, t) \\ v'_y &= v'_y(x, y, t) \\ v'_z &= 0 \\ p' &= p'(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

因此式(5.15)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} V_x &= v_x + v'_x \\ V_y &= v'_y \\ V_z &= 0 \\ P &= p + p' \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$



将式(5.18)代入 N-S 方程和连续方程并考虑到  $v'_x, v'_y$  和  $p'$  均为微小值而忽略其高阶项,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v'_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v'_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v'_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

这样,就有 3 个方程式可以用来确定 3 个扰动值  $v'_x, v'_y$  和  $p'$ 。其边界条件为,在固体壁面  $v'_x$  和  $v'_y$  均为零。

如果将式(5.19)的第 1 式取偏导数  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,第 2 式取偏导数  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,则很容易消去压强  $p'$ ,从而可以有 2 个方程式确定两个未知数  $v'_x$  和  $v'_y$ ,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v'_y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_x \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v'_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= \\ \nu \left( \frac{\partial^3 v'_x}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v'_x}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v'_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v'_y}{\partial x \partial y^2} \right) & \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

现在就来讨论这个方程组中的扰动流流速  $v'_x$  和  $v'_y$ 。设附加于基本层流的扰动是由一些单独振动组成的,每个振动都是一个沿轴向  $x$  传播的波。这个二元扰动的流函数用  $\psi(x, y, t)$  表示为

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (5.21)$$

式中,  $\varphi$  是振幅,由实值部分  $\varphi_r$  和虚值部分  $\varphi_i$  组成,即  $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ ,其中  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\alpha$  是一实值,即通常所说的波数,与扰动波长  $\lambda$  之关系为  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ ;  $\beta$  为一复数,即  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ ,其中  $\beta_r$  为振动频率,  $\beta_i$  为“发展系数”,当  $\beta_i > 0$  时振动随时间而增大,即层流不稳定,当  $\beta_i < 0$  时振动随时间而衰减,即层流是稳定的,当  $\beta_i = 0$  时属于从稳定到不稳定的“中性”状态。如果用  $c$  表示  $\beta$  与  $\alpha$  之比,则有

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i \quad (5.22)$$

式中,  $c_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$  表示波沿  $x$  方向的传播速度;而  $c_i = \frac{\beta_i}{\alpha}$  仍是一个表示振动发展或衰减的系数,即当  $c_i < 0$  时,振动将逐渐衰减,当  $c_i > 0$  时,振动将增大,当  $c_i = 0$  时,振动将处于不增不减的中性状态。于是基本层流只与  $y$  的坐标有关,故振幅  $\varphi$  也只是  $y$  的函数。

利用流函数可以写出



$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi' e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v'_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi e^{i(\alpha x - \beta t)} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

将式(5.23)代入式(5.20),并化简,得

$$(\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(v_x - c) - \varphi \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) \quad (5.24)$$

此式称为 Orr - Sommerfeld 方程式,是稳定性理论的基础方程。式中,  $Re = \frac{VL}{\nu}$ , 其他符号均为量纲一的数。式(5.24)左边各项是从运动方程式中的惯性项得来,右边各项则考虑粘滞阻力得来。这个四阶微分方程式应当满足 4 个边界条件。例如对于边界层的层流运动来说,在壁面处切向和法向扰动流速均应为零,即当  $y=0$  时,  $v'_x=0, v'_y=0$ , 也就是

$$\varphi' = 0, \quad \varphi = 0 \quad (5.25)$$

在远离壁面处,切向和法向的扰动流速也为零,即认为自由流无扰动。当  $y=\infty$  时,  $v'_x=0, v'_y=0$ , 亦即

$$\varphi' = 0, \quad \varphi = 0 \quad (5.26)$$

雷诺数  $Re$  中的特征长度和特征流速,在边界层流中则代表边界层厚度。在边界层问题中  $V$  是边界层外自由流速度。

层流稳定性问题的数学分析是非常困难的。为了能够从理论上确定层流失去稳定的雷诺数,许多学者先后经过几十年的探索才使问题得到初步解决。本书不对这个问题做详细介绍,只对某些重要成果做一些定性的论述。

虽然稳定性的线性理论已经做了重大简化,但求解线性理论的扰动微分方程式,即 Orr - Sommerfeld 方程,仍然是很复杂的。满足 O - S 方程和其边界条件的非零解(即扰动不为零的解)存在的条件,是方程式中的参数( $Re, \alpha, \beta$ )必须满足一定的函数关系,称为特征关系,即

$$F(\alpha, Re, \beta) = 0$$

当给定  $\alpha$  和  $Re$ , 就可以求得复特征值  $\beta$ , 且  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ , 其中  $\beta_r$  是其实部,  $\beta_i$  是其虚部。若  $\beta_i < 0$ , 则扰动将衰减,层流是稳定的;若  $\beta_i > 0$ , 则扰动随时间增长,层流是不稳定的;若  $\beta_i = 0$ , 扰动幅度将保持不变,称为中性情况。按中性条件求得不同的  $\alpha$  和  $Re$  的组合,可绘成中性曲线。

O - S 方程特征值问题的计算,在计算机未出现前遇到了很大的困难。O - S 方程是 1908 年提出的。经过许多科学家的努力,其中有著名科学家 Heisenberg, Tollmien, Schlichting 和林家翘等,到 1945 年才形成了基本上严格的理论,求得了比较简单的平行流层流,如平板层流,边界层的中性曲线,也建立了 T - S 波在平板层流边界层(Blasius 速度型)中发展的理论,并得到了实验证实。当时得到的中性曲线如图 5.8(a) 所示。图中  $\delta^*$  是边界层位移厚度,  $V$  是边界层外的自由流流速。图中的曲线是理论计算的中性曲线,黑点是实验点。中性曲线有上下分支,上下分支之间是层流边界层不稳定区域。计算机出现后,将数值计算用于求 O - S 方程的解,



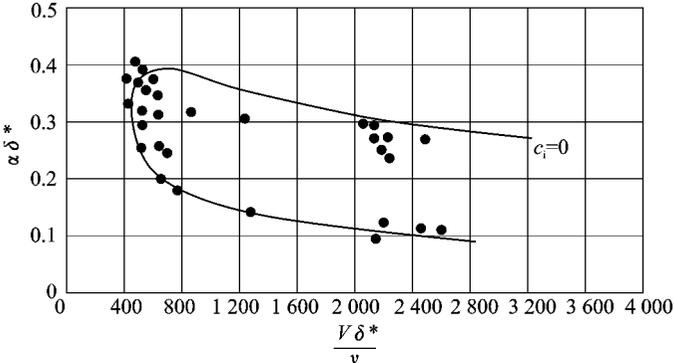
得到了更准确的中性曲线,如图 5.8(b)所示。图中纵坐标

$$F/10^6 = 2\pi\nu f/V^2$$

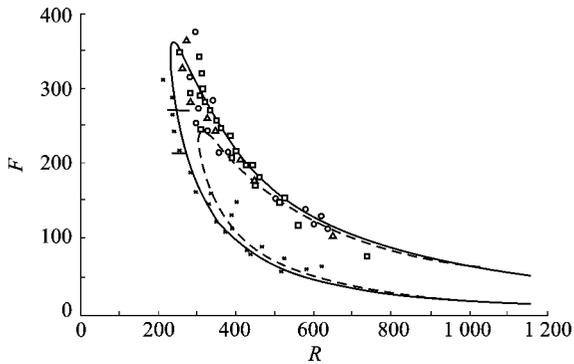
式中, $\nu$  是流体的运动粘性系数; $f$  是扰动频率,单位 Hz。横坐标

$$R = (Vx/\nu)^{0.5}$$

式中, $x$  是实验点离平板前缘的距离; $\nu$  是流体的运动粘性系数。



(a)早期的中性曲线



(b)近期常用的中性曲线

图 5.8 平板层流边界层线性稳定性理论的中性曲线

线性稳定性理论得到的中性曲线基本上符合实验结果。

有几点值得注意:现在计算机和计算方法有了很大的发展,在实际问题中人们已基本上不用他们发展的解析方法。对于边界层问题,平行流是近似的假定,非平行流的稳定性问题也在研究中。边界层转捩,即使是微弱扰动激发的转捩,经过初期的放大后,扰动速度可达到很大。例如 20 世纪 60 年代发现的尖峰脉动(spike),其瞬时脉动速度可达自由流流速的 40%。线性理论或弱非线性理论都不能适用于如此大幅度脉动的流场。

稳定性理论所预测的微弱扰动在一定条件下放大,只是从转捩到湍流的第一步,并不能完



全解释湍流的产生。稳定性理论所分析的微弱扰动是有规律的简谐波振动,放大只是增大其振幅,理论上不改变其简谐波的有规律的性质;而湍流是无规律的。不过稳定性理论是探索湍流产生中很重要的第一步,它给那些由微弱扰动激发的转捩的研究提供了一个基础。在一般进行人工激发的平板层流边界层转捩实验研究中,人工扰动的引进点是设置在稳定性的中性曲线的下分支。稳定性理论也表明,一定雷诺数的层流边界层,只能放大一定范围频率的微弱扰动。也就是有一定的选择性。

## 5.4 湍流的产生——层流边界层的转捩

湍流的产生有多种多样的方式。一般把流动从层流到湍流的变化称为转捩。本书只讨论层流边界层的转捩。目前受到注意的转捩有三种方式:自然转捩、旁路转捩和人为微弱扰动转捩。自然转捩是很普遍的现象,例如机翼上的边界层,靠近前缘的是层流边界层,是不用人为的扰动,到下游时转变为湍流边界层。旁路转捩是研究湍流边界层常用的方式。一般是在平板前缘下游的层流边界层内,放置一条展向的、平行于壁面的拌线,只要线径适当,即可在其下游产生湍流。旁路转捩的过程很短,不便于研究转捩发展的过程。自然转捩也不便于研究。研究转捩最普遍的方式是人为的微弱扰动转捩。它的发展过程缓慢,便于分析研究。

若直匀自由流流向一块平板,当气流未到达平板前缘时是不受摩擦影响的;而当气流到达了前缘并与平板接触以后,粘性摩擦立刻起作用,紧贴物面的一层气流受到滞止。愈往下游,平板上方受到滞止的气流愈多,所以边界层厚度沿流向逐渐增大。开始时,前缘下游的一段距离内,流动为层流;但经过一定的距离以后,层流变得不稳定,而且迅速得到强化,最终转捩为湍流。从层流到湍流的转捩是在一段距离之内发生的,图 5.9 画出了一个曲面上边界层转捩的示意图。但是,为了便于分析起见,通常用一个点来代表转捩区,称为“转捩点”。该点上游的流动看做层流,该点下游的流动则视为湍流。转捩点到前缘的距离记为  $x_{tr}$ ,其大小与如下物理因素有关。

- ① 表面粗糙度。
- ② 自由流的湍流度。
- ③ 逆压梯度。
- ④ 物面对气流的加热程度。

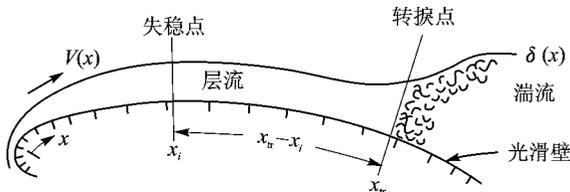


图 5.9 边界层转捩示意图



影响转捩的流动参数主要是雷诺数和马赫数,其中尤其是雷诺数的影响更重要。转捩雷诺数定义为

$$Re_{tr} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} x_{tr}}{\mu_{\infty}}$$

不过,对于不同的物形,在不同的流动条件下,很难确定  $Re_{tr}$  的值,通常按经验取  $Re_{tr} \approx 5 \times 10^5$ 。

设在风洞中沿流向放置一块平板,在海平面条件下吹风,  $\rho_{\infty} = 1.23 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{\infty} = 1.79 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ , 风速  $V_{\infty} = 120 \text{ m/s}$ , 测得  $x_{tr} = 0.05 \text{ m}$ 。由此求得:  $Re_{tr} = 4.12 \times 10^5$ 。若把风速增大为  $240 \text{ m/s}$ , 则在距前缘  $0.025 \text{ m}$  处即可观察到转捩。

当然,实际的转捩现象并非如此简单,更不是在一个点(转捩点)处突然转捩为湍流。近期的实验结果参看图 5.10。在此图中,画出了实际的转捩过程:前缘附近是稳定的层流;经过一段距离以后,出现了不稳定的二维 Tollmien - Schlichting 波;随后, T - S 波发展为三维的不稳定波及发卡涡;再往下游,进入局部高剪切区,出现涡破裂;涡破裂串联起来形成全三维脉动;在局部强脉处形成湍流斑;湍流斑聚合起来形成湍流区。

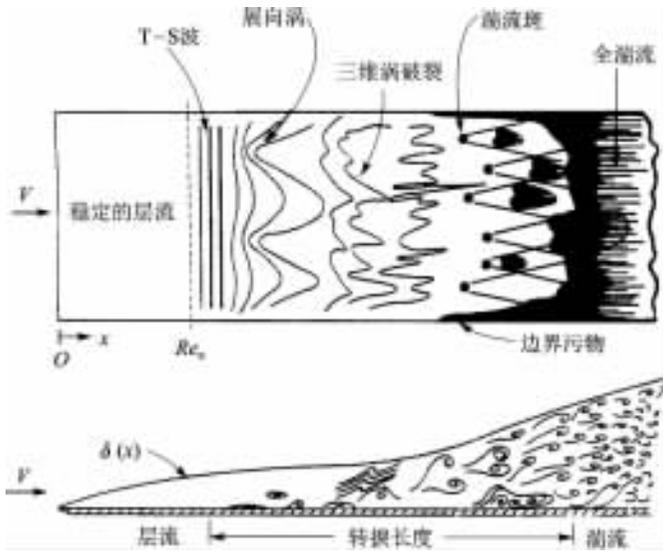


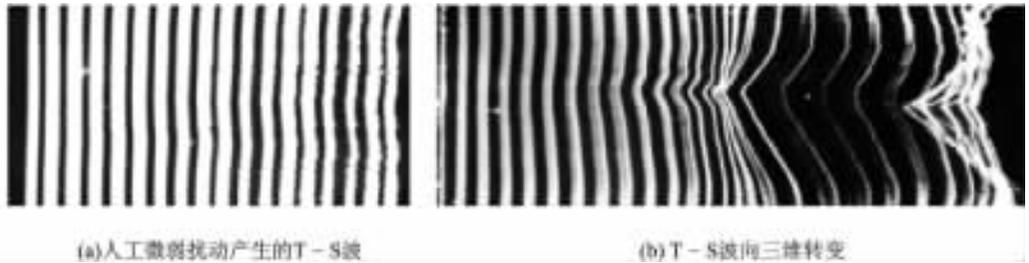
图 5.10 平板边界层实际转捩的流动图画

在上述三种转捩中,只有人工微弱扰动激发的转捩的初期是线性稳定性理论所描述的现象。初期微弱扰动的振幅沿流向逐渐放大,产生 T - S 波。T - S 波是层流边界层内的一种二维波动。放大现象表现在 T - S 波的幅度放大,但是周期不变,并仍然保持其二维特性,如图 5.11(a) 所示,图中氦气泡时间线的疏密变化是 T - S 波造成的。

湍流是三维的流动,在转捩过程中, T - S 波必然要向三维扰动转变。最先出现的是氦气



泡时间线的疏密度增加,如图 5.11(a)的中部;然后氢气泡时间线呈现明显的三维特征,时间线的中部向上游凸出,如图 5.11(b)所示。



流动方向自左向右

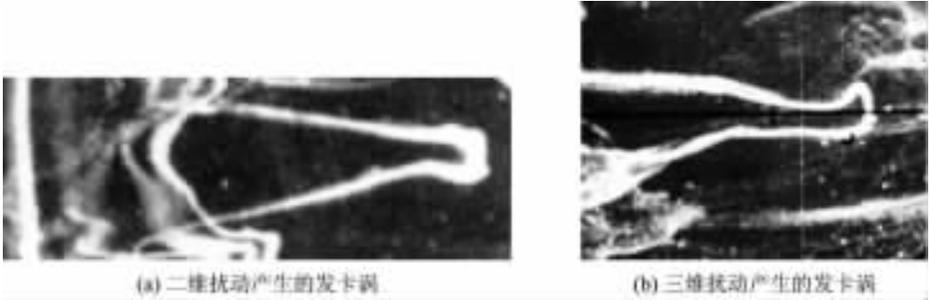
图 5.11 微弱扰动产生的 T-S 波向三维转变的氢气泡时间线图像

平板层流边界层所有的涡量都是展向的,可以设想涡量分布是由若干展向涡线组成。因此图 5.11(a)中的每一条氢气泡时间线都代表若干条涡线。涡线三维变形后,按 Biot - Savart 定律产生的诱导速度,使三维变形继续演变。它先发展成为“ $\Delta$ ”形状的结构,如图 5.12 所示。“ $\Delta$ ”结构的两侧是两条准流向涡。“ $\Delta$ ”结构继续发展,成为发卡涡,如图 5.13 所示。发卡涡是一条集中涡,呈发卡形状,亦称为马蹄涡。图 5.13 是用氢气泡法在转捩边界层观测到的发卡涡,流动是从左向右,发卡涡的头部呈“ $\Omega$ ”形状。按 Biot - Savart 定律和旋涡旋转的方向,发卡涡的头部不断地上升,头部上升到边界层外,伸入自由流。头部的“ $\Omega$ ”形状部分往往和发卡涡的两腿分离,形成一个涡圈。发卡涡的两腿在涡圈上游合并,形成新的发卡涡。涡圈在它的中间产生强烈的诱导速度,可达到自由流流速的 40%,即 Klebanov 在 1962 年用热线风速计发现的“尖峰结构”。当时人们对如此大的扰动的来源感到困惑。后来用氢气泡法观测到的图像,使人们对尖峰结构的产生和作用得到了满意的解释。



“ $\Delta$ ”结构在图像中部,呈“ $\Delta$ ”形状。流动方向自左向右

图 5.12 “ $\Delta$ ”结构的氢气泡时间线平面图



呈发卡形状。流动方向自左向右  
图 5.13 发卡涡的氢气泡时间线平面图

用数值模拟可以算得从涡线的三维变形演变为发卡涡的过程,如图 5.14 所示。

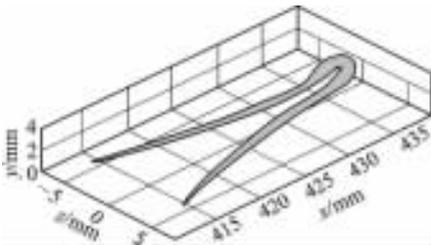


图 5.14 直接数值模拟得到的  
转捩边界层的发卡涡图像

虽然采用热线风速计进行测量,并配合直接数值模拟和流动显示法,对层流边界层在人工微弱扰动激发下的扰动转捩的研究已取得了很多进展,但是仍然有许多重要问题没有解决。湍流是不规则和不重复的。在目前微弱扰动转捩实验的最后阶段,虽然流动的周期性有变化,但是一些流动结构仍然有明显的周期性。目前的实验结果中,图像有紊乱,但是流动结构如何演变的过程和引起紊乱的直接因素还不清楚。况且目前的研究,主要是平板层流边界层的微弱扰动

所激发的转捩;而工业流动的转捩问题比平板流动要复杂得多,尚缺少系统的研究。人们研究层流转捩的一个重要目的是控制转捩。如果能抑制转捩,则在航空和汽车等交通运输工业,可能节约大量能源。如果能增强转捩过程,则可能在化工等需要混合的流动,产生巨大的效益。目前的转捩研究离此目标尚有很大的距离。

## 习 题

- 人类认识湍流主要是从经验、实验或理论入手?试述它们各自的局限性和优点。
- 试述稳定性理论对湍流产生的研究所起的作用。
- 常用铂丝产生的氢气泡的平均直径大约为  $10 \mu\text{m}$ ,你认为流速低于多少时,所显示的图像就显著失真。若设自由流流速为  $15 \text{ cm/s}$ ,氢气泡法可适用到离壁面的距离是多少?提示:设为层流边界层,自己设置两个距平板前缘的距离。
- 试述稳定性研究所取得的主要成就。
- 转捩的研究和稳定性的研究有何关系?
- 为何对转捩的研究基本上是在研究由人工激发的微弱扰动所产生的转捩过程?

# 第 6 章 湍流理论和湍流拟序结构

## 6.1 引言

人们对湍流的认识,是从实验得来的。20 世纪初,热线风速计出现。流体力学家用它对湍流进行测量,得到了大量湍流脉动速度的时间序列数据。湍流的脉动速度表现为随机的脉动,人们认为它服从于统计规律,由此发展了湍流的统计理论。统计理论把湍流流场的速度分解为时均速度和脉动速度。对脉动速度进行处理,得到可表达湍流脉动特征的关联函数、高阶矩和结构函数。把时均速度和脉动速度代入  $N-S$  方程,导出雷诺应力方程和湍流动能方程。为了求解不封闭的雷诺方程,20 世纪 40 年代后期,许多学者发展了模式理论,即从物理概念建立新的方程。但是引进一个新方程,往往又多了一个未知数。因此模式理论的方程组都要假定某些参数的数值,使方程组封闭。假定的参数数值,一般是根据实验来确定;计算对象如果超出实验范围,计算结果的准确性就不可靠了。

统计理论得到了小尺度湍流的一些基本规律。例如时均速度无剪切的湍流,因没有湍流动能产生,而耗散仍然存在,所以最终湍流必然消亡,这就是射流和尾流在远下游的湍流消亡的原因。由统计理论发展起来的模式理论,在湍流边界层的摩阻和传热率等的工程估算中发挥了很大的作用。但是模式理论采用的参数设定有一定的随意性;而由  $N-S$  方程采用直接数值模拟没有这些缺点,且有较高的准确性。随着计算机内存和计算速度的快速发展,以及数值计算方法的发展,采用直接数值模拟计算工程流动中的湍流问题将有很大的发展。不过,由于湍流问题十分复杂,直接数值模拟要完全取代模式理论在工程问题中的应用,还不是短期内可以达到的。

湍流是在剪切层中产生的,在转捩过程中,总有大尺度的涡结构出现。在边界层转捩中是出现发卡涡,在混合层中是大涡结构(Brown - Roshko 涡)。它们的尺度,都往往超过边界层或混合层的厚度。发卡涡的头部形成涡环,产生脉动速度高达自由流速度的 40%(即尖峰结构)。边界层转捩后,仍然有大尺度的发卡涡等涡结构。以小尺度脉动为基础的统计湍流和雷诺方程,不能预测拟序结构。用超级计算机和直接数值模拟,可以得到一些有拟序结构的湍流流场。不过对拟序结构的研究还主要是依靠实验。



## 6.2 湍流统计理论和模式理论

### 6.2.1 湍流的平均值运算、关联函数和高阶矩

#### 1. 湍流脉动值的平均运算

湍流虽然很不规则,但是也有一定规律。用统计理论研究湍流,是把湍流流速分解为平均流速和脉动流速。速度的瞬时值写成

$$u = \bar{u} + u'$$

式中,上横线表示平均值; $u'$ 为脉动速度。

可以用许多方法来确定平均值:如果湍流流场是准定常的或平衡随机的,则可用对时间的平均;在均匀湍流流场情况,可考虑对空间的平均;但如果流场既不是定常的又不是均匀的,则取时间平均或空间平均就不一定行了,在这种情况下,可假定对具有同样初始条件和边界条件的大量实验结果取平均,称为系综平均值。这三种平均方法用数学形式表示为对平衡湍流的时间平均

$$\overline{u(x_0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(x_0, t) dt \quad (6.1)$$

对均匀湍流的空间平均

$$\overline{u(t_0)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} u(x, t_0) dx \quad (6.2)$$

对  $n$  个相同实验的系综平均

$$\langle u(x_0, t_0) \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N u_i(x_0, t_0)}{N} \quad (6.3)$$

对一个平衡的均匀湍流,可假定这三种平均方法导致同样的结果,这就是所谓的各态历经假定。实际的湍流既不是真正平衡的,也不是均匀的,为了实用,只能对有限的  $T$  或  $X$  值来进行对时间或空间的平均;但这样就必须满足某些条件,例如,流动可包含很慢的变化,这种变化不把它看成属于湍流运动。取一有限值  $T$ ,现在把速度的瞬时值写成  $u = \bar{u} + u'$ ,其中上横线表示平均值。根据定义  $\bar{u}' = 0$ 。

前面规定平均值用上横线表示。在湍流研究中不仅经常对单个量而且还要对量的乘积进行平均。平均运算有下面的规则。

设  $A = \bar{A} + a$  与  $B = \bar{B} + b$ 。在进一步取任何平均时,  $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  可作为常数处理,这样有

$$\overline{A} = \overline{\bar{A} + a} = \bar{A} + \bar{a}$$

由此

$$\bar{a} = 0$$



$$\overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{A}\overline{B}} = \overline{A}\overline{B}$$

因为

$$\overline{b} = 0$$

故

$$\overline{Ab} = \overline{A}\overline{b} = \overline{A}\overline{b} = 0$$

类似地, 因为

$$\overline{a} = 0$$

故

$$\overline{Ba} = \overline{B}\overline{a} = \overline{B}\overline{a} = 0$$

$$\overline{AB} = \overline{(\overline{A}+a)(\overline{B}+b)} = \overline{\overline{A}\overline{B}} + \overline{\overline{A}b} + \overline{\overline{B}a} + \overline{ab} = \overline{A}\overline{B} + \overline{ab}$$

## 2. 湍流脉动值的关联函数

湍流脉动速度虽然是不规则的, 但是也有一定规律。在时间和空间都无限接近的两点的脉动速度总是相同的。假定湍流是准定常的, 则这个统计平均值应只是两时刻的间隔  $t$  的偶函数。定义量纲一的欧拉时间关联系数为

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(t')u_1(t'+t)}}{u^2} \quad (6.4)$$

它有如下形式的泰勒级数展开式

$$R_E(t) = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right)_{t=0} t^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\partial^4 R_E}{\partial t^4} \right)_{t=0} t^4 + \dots \quad (6.5)$$

根据上式  $t^2$  项的系数, 可定义一个时间尺度  $\tau_E$ , 使

$$\frac{1}{\tau_E^2} = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right)_{t=0}$$

$\tau_E$  是  $u_1(t)$  中出现的变化最快的时间尺度(周期)的代表, 由于它与泰勒的微尺度  $\lambda$  之间的密切联系, 故被称为欧拉耗散时间尺度。也可定义一个积分时间尺度

$$T_E = \int_0^{+\infty} R_E(t) dt \quad (6.6)$$

作为  $u_1(t)$  的脉动特性中变化最慢的时间尺度的代表。当  $t$  增大时,  $R_E(t)$  一般是减小; 当  $t$  增大到一定数值(此数值正比于  $T_E$ )时,  $R_E(t)$  趋近于零。  $T_E$  大, 表示有大尺度结构。

欧拉空间关联函数  $f(r)$  的定义为

$$f(r) = \frac{\overline{u_1(x_1)u_1(x_1-r)}}{u^2} \quad (6.7)$$

因为热线风速计不能同时测量相距不远的两点的流速, 因此, 一般是按泰勒的冻结假设, 把时间序列的测量数据, 换算为空间序列的数据。在均匀湍流场中有一平均速度  $\bar{V}$ , 假定  $\bar{V} \gg u'$ , 则在流场中一固定空间点上所观测到的  $u_1(x_1)$  设想被冻结起来, 并以平均速度  $\bar{V}$  快速地移过此点而形成脉动速度的空间分布。这一近似被称为泰勒的冻结假设。在此假设下, 空间关联中的  $r$  与时间关联中的  $t$  之间存在的变换关系为



$$r = \bar{V}t \quad (6.8)$$

于是,在积分长度尺度  $L$  与积分时间尺度  $T_E$  之间也有关系,如

$$L = \int_0^{+\infty} f(r)dr = \bar{V} \int_0^{+\infty} R_E(t) = \bar{V}T_E$$

湍流的泰勒微尺度  $\lambda$  与欧拉耗散时间尺度  $\tau_E$  之间也有关系,如

$$\frac{1}{\lambda^2} = - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_{r=0} = - \left( \frac{\partial^2 R_E}{\partial t^2} \right)_{t=0} \frac{1}{\bar{V}^2} = \frac{2}{(\bar{V}\tau_E)^2}$$

或

$$\sqrt{2}\lambda = \bar{V}\tau_E \quad (6.9)$$

欧拉时间关联函数  $R_E(t)$  与欧拉空间关联函数  $f(r)$  之间有何联系呢?只有在均匀湍流的情况下可以导出它们之间的一个近似关系。

### 3. 湍流脉动值的高阶矩

脉动速度的高阶矩也有一定的规律。利用脉动速度的概率分布是高斯正态分布的特点,可以求得脉动速度高阶矩的一些特征。已知高斯分布的概率密度函数为

$$p(u) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{1/2}} \exp(-u^2/2\sigma^2)$$

现将全系综平均(以下简称系综平均或平均值)用  $\langle u \rangle$  表示,即

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{N}$$

则  $u$  的  $n$  阶统计矩为

$$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p(u)du = \frac{\sum_{i=1}^N u_i^n}{N}$$

它的 1~4 阶统计矩分别等于

$$\langle u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)du = 0$$

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u)du = \sigma^2$$

$$\langle u^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^3 p(u)du = 0$$

$$\langle u^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^4 p(u)du = 3\sigma^4$$

已知高斯分布是关于  $u$  的偶函数,因此它的奇阶矩都等于零。平均值等于零的随机变量,它的 2 阶矩称为方差,  $\sigma^2$  就是高斯分布的方差。平均值等于零的随机变量的 3 阶矩表示该随机变量的概率密度函数的不对称性,用扭率表示,定义为

$$S = \langle u^3 \rangle / \langle u^2 \rangle^{3/2} \quad (6.10)$$



平均值等于零的随机变量的 4 阶矩表示该随机变量的间歇性,用平坦度表示,定义为

$$K = \langle u^4 \rangle / \langle u^2 \rangle^2 \quad (6.11)$$

通常认为高斯分布是没有间歇性的正态分布,它的平坦度等于 3;平坦度大于 3 的随机变量认为具有间歇性。由平坦度公式可以推断:如果  $|u|$  值很大时,概率密度  $p(u)$  值大,平坦度公式中分子上的 4 阶矩就大。形象地说,平坦度大的随机变量是以较高频率间歇地出现大值变量。式(6.10)和式(6.11)的  $S$  和  $K$  是按正态分布的脉动速度求得的;如果它不是正态分布,求得的  $S$  和  $K$  有不同的结果,并由此可以判断脉动速度偏离正态分布的程度。

### 6.2.2 纳维-斯托克斯方程和雷诺方程

本节讨论牛顿型流体的湍流运动方程。

不可压缩牛顿型流体运动的控制方程是纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程(简称 N-S 方程),在直角坐标系下,它可表示为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.13)$$

式中,  $\rho$  是流体的密度;  $\nu$  是流体的运动粘性系数;  $f_i$  是质量力。

N-S 方程是非线性的对流扩散型偏微分方程。一般情况下, N-S 方程初边值问题解的存在和惟一性尚未完全得到证明,只有在很苛刻的条件下, N-S 方程解的存在和惟一性才有明确的答案。

N-S 方程初边值问题,在雷诺数较小时,存在惟一的确定性解,也就是定常或非定常层流解。这和实际观察到的现象是一致的。

可以认为,无论是在层流还是湍流,流体运动都服从 N-S 方程。

湍流服从 N-S 方程,对 N-S 方程取平均就可以描述湍流统计量的演化。湍流速度和压强都可以分解为平均量和脉动量之和,即

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) + u'_i(x, t) \quad (6.14)$$

$$p(x, t) = \bar{p}(x, t) + p'(x, t) \quad (6.15)$$

下面分别导出湍流平均量和脉动量  $u'_i$  及  $p'$  的控制方程。有三种平均方法,即时间平均法、空间平均法和系综平均法。湍流实验的测量结果是时间序列数据,因此适于用时间平均法。

对 N-S 方程式(6.12)和式(6.13)做时间平均,有

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \bar{f}_i$$

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0$$



遵照求导和时间平均运算,以上公式中线性项的平均值可以直接求出,例如  $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}$ ,因而平均的连续方程为

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.16)$$

按平均值运算的规律,将各平均量稍加整理后可得

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \bar{f}_i \quad (6.17)$$

式(6.16)和式(6.17)称为雷诺方程。从式(6.16)和式(6.17)可见,除了在平均运动方程中多了一项  $-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$  外,湍流的平均运动控制方程与 N-S 方程极其相似。换句话说,在质点的平均运动中,除了有平均压强作用力、平均分子粘性作用力、平均质量力  $\bar{f}_i$  外,还有一项附加应力作用项  $-\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$ 。附加应力可记作  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ ,称为雷诺应力。由于雷诺应力是未知量,使未知量数目大于方程式数目,即方程式不封闭。

将 N-S 方程式(6.12)和式(6.13)与雷诺平均方程式(6.16)和式(6.17)相减,得到脉动量的控制方程。通常质量力是确定性的,即质量力没有脉动。

经过简单的代数运算,得到脉动量的控制方程为

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.19)$$

式(6.18)称为脉动运动方程,式(6.19)称为脉动连续方程。不难发现,在脉动运动方程中也出现了雷诺应力项  $\overline{u'_i u'_j}$ ,因此脉动方程也是不封闭的。

### 6.2.3 不可压流的雷诺应力方程及湍流动能方程

下面进一步考察雷诺应力  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ ,以及雷诺应力输运方程和湍流动能输运方程。

首先,雷诺应力  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  与脉动速度向量的一阶相关,因此它是二阶对称张量。在湍流平均运动中,附加的雷诺应力和流体分子运动产生的粘性应力有着量级上的区别。湍流平均运动中,雷诺应力往往远大于分子粘性应力。设想有一层厚度为  $\delta$  的湍流剪切层,它的平均速度为  $V$ ,假定流向脉动速度  $u'_1$  的均方根是  $0.1V$ ,横向脉动速度  $u'_2$  是  $u'_1/10$ ,这时典型的雷诺切应力为  $-\rho u'_1 u'_2 \sim 0.001\rho V^2$ ,而平均分子粘性应力的量级可估计为  $\mu V/\delta$ ,雷诺切应力和平均分子粘性切应力之比为  $0.001V\delta/\nu$ 。在高雷诺数时,如  $Re = V\delta/\nu$  是  $10^5$  量级,雷诺应力和平均分子粘性应力之比约为  $10^2$  量级。由此可见,湍流运动中,雷诺应力是不能忽略的,而分子粘性应力常常可以忽略(除了靠近固壁区域外)。分子运动的特征长度是分子运动的平均



自由程,它远远小于流动的宏观尺度;而湍流脉动的最小特征尺度仍在宏观尺度范围内。从湍流脉动方程式(6.18)出发,在 $u'_i$ 脉动方程上乘以 $u'_j$ ,再在 $u'_j$ 脉动方程上乘以 $u'_i$ ,两式相加后进行平均运算并整理,得到雷诺应力输运方程为

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} = - \underbrace{\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}}_{P_{ij}} + \frac{\overline{p'}}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \frac{\overline{p' u'_j} \delta_{ik}}{\rho} + \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right)}_{D_{ij}} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}}_{E_{ij}} \quad (6.20)$$

式(6.20)称为不可压缩湍流的雷诺应力输运方程,方程中各项分别用 $C_{ij}$ , $P_{ij}$ , $\Phi_{ij}$ , $D_{ij}$ , $E_{ij}$ 表示,它们的含义如下。

- ①  $C_{ij}$  (方程左边两项之和)是雷诺应力张量在平均运动轨迹上的增长率。
- ②  $P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}$  称为产生项。
- ③  $\Phi_{ij} = \frac{\overline{p'}}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} \right)$  称为再分配项。
- ④  $D_{ij}$  具有扩散性质,称为扩散项。
- ⑤  $E_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}$  称为耗散项。

在理解雷诺应力输运过程以前,先讨论脉动动能平均量(称为湍动能) $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ 的输运。

将雷诺应力输运方程做张量收缩运算,得

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_k} = - 2 \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{2 \overline{p' u'_k}}{\rho} + \overline{u'_i u'_i u'_k} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_k} \right) - 2\nu \left( \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right)$$

将 $\overline{u'_i u'_i} = 2k$ 代入上式,得湍动能输运方程为

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{C_k} = - \underbrace{\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{p' u'_k}}{\rho} + \overline{k' u'_k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right)}_{D_k} - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k}}_{\epsilon} \quad (6.21)$$

式中, $k' = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ 是单位质量脉动运动的动能,简称脉动动能。方程中各项分别用 $C_k$ , $P_k$ , $D_k$ , $\epsilon$ 表示,它们的含义如下。

- ①  $C_k$  是湍动能在平均运动轨迹上的增长率。
- ②  $P_k = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}$  表示雷诺应力通过平均运动的变形率向湍流脉动输入的平均能量。



$P_k > 0$  表示平均运动向脉动运动输入能量;反之, $P_k < 0$  将使湍动能减小。因此  $P_k$  称为湍动能的生成项。

③  $D_k$  是梯度形式项,它表示一种扩散过程,由三部分组成:Ⓐ 由压力速度相关产生的扩散作用;Ⓑ 由湍流脉动三阶相关  $\frac{1}{2}\overline{u'_i u'_j u'_k}$  产生的扩散,它是由湍流脉动  $u'_k$  的不规则运动携带的脉动动能平均值,属于湍流的扩散作用,有别于分子粘性的湍动能扩散;Ⓒ 由分子粘性产生的湍动能扩散  $\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_k}$ 。

④  $E_{ii} = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k}$ ,它是湍动能的耗散项,常用  $\epsilon$  表示。因为肯定有  $\epsilon > 0$ ,而在湍动能方程中这一项的贡献是  $-\epsilon$ ,它总是使湍动能减少。

湍动能的增长率主要来源于生成项  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j}$ 。在平均变形率等于零的均匀湍流场中,湍流必衰减。这时湍动能方程简化为

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} = -\epsilon < 0$$

由此可见,均匀无剪切平均流场中湍动能不断衰减,直至全部消灭。在平均变形率不等于零的湍流场中,通过雷诺应力将平均流场中的一部分能量转移到脉动运动,抵消湍动能耗散,维持湍流脉动。例如在湍流边界层中,自由流中的能量不断转移到边界层内,维持湍流脉动。

#### 6.2.4 可压缩湍流的统计方程

湍流流场使可压缩流体中速度、压强、密度、温度和其他热力学量也都有脉动分量,当流动速度很高时 ( $Ma \gg 1$ ),压强脉动和密度脉动等都很大,这时在统计运动方程中除了雷诺应力外,还有其他力学量和速度脉动之间的相关项。假定可压缩流体是常比热比的牛顿型完全气体,即它具有以下的运动方程和状态方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j e}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \quad (6.24)$$

式中, $e$  是气体内能; $\theta$  是气体的温度; $\kappa$  是气体的导热系数; $\tau_{ij}$  是牛顿流体粘性应力张量; $\Phi$  是粘性耗散功。它们分别有以下关系式,即

$$e = c_v \theta \quad (6.25)$$

$$p = R \rho \theta \quad (6.26)$$



$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (6.27)$$

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6.28)$$

式中,  $c_V$  是气体的质量定容热容;  $R$  是气体常数;  $\mu$  是气体的粘性系数。假定它们都是物性常数。牛顿型气体的湍流平均运动方程, 比不可压流的方程复杂得多。可压缩流体平均运动方程较不可压缩流体平均运动方程多出的项, 绝大多数是和密度脉动有关的, 如果密度脉动比较小, 可压缩流体的湍流运动性质可能接近于不可压缩流体的湍流运动性质, 从这种设想出发, 提出一种密度加权的平均方法, 用这种平均方法导出的可压缩流动的平均运动方程和不可压缩牛顿流体平均湍流方程极其相似。

密度加权平均量用上标“—”表示, 定义如下

$$\bar{q} = \frac{\langle \rho q \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (6.29)$$

即密度加权平均量(以下简称加权平均)等于该量和密度乘积的系综平均值与系综平均密度之商。物理量按加权平均的分解式为

$$q = \bar{q} + q'' \quad (6.30)$$

例如速度、温度和内能的分解式分别为

$$u_i = \bar{u}_i + u''_i$$

$$\theta = \bar{\theta} + \theta'' \quad (6.31)$$

$$e = \bar{e} + e'' \quad (6.32)$$

根据加权平均的定义, 加权平均分解有以下性质, 即

$$\langle \bar{q} \rangle = \bar{q}$$

$$\langle \rho q'' \rangle = 0$$

$$\langle q'' \rangle = -\langle \rho' q'' \rangle / \langle \rho \rangle$$

$$\langle q'' \rangle = \langle q \rangle - \bar{q}$$

连续性方程式(6.22)和运动方程式(6.23)经平均后得

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \bar{u}_j) = 0 \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u''_i u''_j \rangle \quad (6.34)$$

式中,  $\langle \rho \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle \tau_{ij} \rangle$  均为系综平均,  $\bar{u}_j$  是密度加权平均速度。可压缩流体的全系综平均方程很复杂, 加权平均方程要简单得多。

同样的推导可以得到密度加权的能量方程, 利用  $e = \bar{e} + e''$ ,  $\theta = \bar{\theta} + \theta''$ , 则有

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \bar{e}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \rho \rangle \bar{u}_j \bar{e}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - \langle \rho \rangle \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} +$$



$$\langle \Phi \rangle - \left\langle u''_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e'' u''_j) \quad (6.35)$$

密度加权的能量方程式(6.35)也比原来的方程简化了很多。

总之,采用密度加权的速度、内能和温度以后,可压缩流体湍流平均运动方程和不可压缩流体湍流平均运动方程在形式上基本相同,附加的湍流输运项则可近似地采用不可压缩湍流的相应关系式。一般认为密度加权平均可用于  $Ma < 5$  的流动。

### 6.2.5 湍流模式理论

湍流模式理论是用理论方法和经验,建立一些有关雷诺应力的假设,然后从雷诺方程得到封闭的方程组。这是工程计算中常用的方法。大量的工程流体力学问题,当涉及湍流,就需要估计湍流的影响,例如飞行器的边界层一般是湍流。湍流产生的阻力,湍流对边界层分离的影响,对壁面温度的影响,都是飞行器设计中十分重要的问题。解决此问题的途径有三个:实验、直接求解 N-S 方程和模式理论计算方法。实验往往耗费巨大,各大国虽然建立了许多庞大的风洞设备,但是也不能测试和解决所有飞行的湍流问题。随着计算机的迅速发展,从 N-S 方程直接数值模拟湍流虽然有很大的进展,但是离解决工程湍流问题还有很大距离。因此湍流模式理论成为解决工程湍流问题的常用途径。

许多科学家和工程师根据自己的经验和推理,建立了许许多多的湍流模型或湍流模式。它们的共同特点是从雷诺方程出发,增加一些联系雷诺应力的方程式,得到封闭的方程组。方程组中包含了若干由经验假定的常数,如果不需要调节这些常数,就能对不同的流动得到较准确结果的话,这样的模型就是较好的模型。

目前应用最广泛的模型是  $k-\epsilon$  模型。它是一种二方程模型,其雷诺应力模型为

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_k \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) + P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon - \\ &C_1 \frac{\epsilon}{k} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

式中,  $P_{ij} \equiv - \left( \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right)$ ,  $P_k$  为能量产生项。经验常数为

$$C_k = 0.09 \sim 0.11, \quad C_1 = 1.5 \sim 2.2, \quad C_2 = 0.4 \sim 0.5$$

模拟后的湍流动能方程( $k$  方程)则为

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_k \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_l} \right) + P_k - \epsilon \quad (6.37)$$

最广泛采用的模拟后的  $\epsilon$  方程为

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left( C_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right) - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_l} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (6.38)$$

式中的经验常数推荐值为



$$C_\epsilon = 0.07 \sim 0.09, \quad C_{\epsilon_1} = 1.41 \sim 1.45, \quad C_{\epsilon_2} = 1.9 \sim 1.92$$

在涉及传热或其他标量输运的问题中,在平均温度或标量的对流扩散方程中出现了湍流交换项  $\overline{u'_i \theta'}$  (这里  $\theta'$  可理解为脉动温度或脉动标量)。在二阶封闭模型的范围内还必须建立  $\overline{u'_i \theta'}$  的模型方程,即

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u'_i \theta'}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( C_T \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_i} + K \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_i} \right) - \left( \overline{u'_i u'_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \overline{u'_i \theta'} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \\ C_{T1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} + C_{T2} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \overline{u'_m \theta'} \end{aligned} \quad (6.39)$$

式中的经验常数由实验确定为

$$C_T = 0.07, \quad C_{T1} = 3.2, \quad C_{T2} = 0.5$$

于是,得到了完整的雷诺应力模型,它包括由平均运动的 1 个连续方程和 3 个动量方程、雷诺应力的 6 个方程、 $k$  方程与  $\epsilon$  方程,总共包含 12 个未知量的 12 个微分方程组成的封闭方程组。如还要计算温度或其他标量的分布,则还要加上 1 个平均温度方程与 3 个  $\overline{u'_i \theta'}$  的方程,总共有 16 个方程。对于一般工程中的湍流流动问题,这个方程组的计算工作量太大,为了减少计算工作量,又出现了许多简化模型。在简化的模型中,将雷诺应力  $\overline{u'_i u'_j}$  或  $\overline{u'_i \theta'}$  直接用推广的 Boussinesq 的涡粘性模型来表示,即

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (6.40)$$

$$-\overline{u'_i \theta'} = \kappa_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (6.41)$$

式中,涡运动粘性系数  $\nu_t$  与涡导热系数  $\kappa_t$  要用  $k$  和  $\epsilon$  来表示,根据量纲分析,得

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \kappa_t = C_T \frac{k^2}{\epsilon} = \frac{C_\mu}{Pr_t} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6.42)$$

式中的  $k$  和  $\epsilon$  要用  $k$  方程式(6.37)和  $\epsilon$  方程式(6.38)来求解,而经验常数要通过实验来确定。常用的数值为  $C_\mu = 0.09$ ,  $Pr_t = 0.8 \sim 1.3$ 。以上模型常简称为  $k-\epsilon$  模型,它是目前应用得最广泛的湍流模型。这个模型中除了用到平均运动的方程以外,只用到了  $k$  和  $\epsilon$  的两个微分方程,因此属二方程模型之列。除  $k-\epsilon$  模型外,还有多种不同的二方程模型。

一方程模型最简单,只保留  $k$  方程,即

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( C_k \frac{k^2}{\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \overline{u_i u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} - \epsilon$$

式中的  $\epsilon$  都要用

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l}$$

来代替。 $l$  可看为混合长度,它必须另做假设。一般地, $l$  随具体流动而变化,有不同的形式,不可能给出普遍有效的统一公式。因而一方程模型的通用性与预报性都很差。在一方程模型



中的雷诺应力或 $\overline{u_i\theta}$ 项仍用涡粘性模型,不过其中的涡运动粘性系数要用 $k$ 与 $l$ 来表示,设它正比于混合长度 $l$ ,则

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l$$

于是

$$-\overline{u_i u_j} = C_\mu \sqrt{k} l \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (6.43)$$

$$-\overline{u_i \theta} = \frac{C_\mu \sqrt{k} l}{Pr_l} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (6.44)$$

式中,常数 $C_\mu = C_k = 0.09$ , $Pr_l = 0.8 \sim 1.3$ 。

## 6.3 湍流拟序结构

### 6.3.1 湍流拟序结构概况

20世纪60年代后期发现在湍流中存在的大尺度结构。它反复出现,但没有固定周期;其形态相似,却不完全重复。也就是说,它是一种不完全随机,也不完全无序,并且不是周期性重复的流动结构,后来称为湍流拟序结构。湍流拟序结构的发现,对以前流行的湍流观念产生了很大的影响。

湍流拟序结构是三维非定常的流动结构。传统的热线风速计和激光测速计都是定点测量仪器,它们可以在短时间内测得在探测头所在点流速的大量时间序列数据,但是不能测得瞬时流速的空间分布数据,因而测不出湍流拟序结构。对湍流拟序结构的研究,常用的方法是流动显示。事实上,湍流边界层和混合层拟序结构的发现,都是采用了流动显示方法,前者是用氢气泡法,后者是用光学方法。

湍流作为一种连续介质流动,虽然是很复杂的,但它服从流体运动的基本方程,即连续方程和N-S方程,也就是服从质量守恒定律和牛顿动量定律。在湍流被发现之后,研究者一直寻求在一定条件下,即一定的边界条件和初始条件下,从基本方程求得一定的解。在计算机和数值模拟方法没有发展起来之前,直接求解N-S方程没有成功。湍流研究者多年追求从Reynolds方程获得一种普遍适用的解,但是这一努力也没有成功。随着计算机的快速发展,从N-S方程用数值模拟计算湍流已取得进展。拟序结构是瞬时流场中空间分布的流动结构,它的演变服从N-S方程和连续方程。拟序结构是湍流中客观存在的流动现象,是否能得到和流动显示观察到的拟序结构一致的结果,是评判数值模拟或其他理论计算的一个客观标准。实际上,在用数值计算研究湍流的初期,已经使用了这一标准。

湍流拟序结构可以分为两大类型。一类是自由剪切层拟序结构,它的主要代表是混合层的Brown-Roshko大涡结构,大涡的合并和演化具有拟序性质,这一类拟序结构也存在于纯



体的尾流区和分离区的剪切层,以及射流剪切层。20世纪80年代对大涡的合并进行了许多控制研究,其中声控方法取得了很大的进展。另一类是湍流边界层拟序结构,也称为壁湍流拟序结构。这两类拟序结构发生和演化的机制是有很多差别的。后一类拟序结构的机理要更复杂一些,因为壁面不断地产生或吸收涡量,参与了边界层拟序结构的演变。

无论是壁湍流或自由剪切层湍流,涡结构都是其中的拟序结构的核心。拟序结构是在剪切层中产生,而剪切层可视为由涡线组成。湍流脉动可使一些涡线拉伸,并使其涡量增强,聚集成涡结构。例如,在转捩边界层中,T-S波的扰动作用导致发卡涡的生成。在一切壁湍流中都有发卡涡或被扭曲了的不完整的发卡涡。涡结构产生的诱导速度产生上升流和下扫流,是产生壁湍流内外层的质量交换、动量交换和热量交换的源头,亦即是影响摩阻和传热率等特性的主要因素。因此,在工业中控制涡结构可以达到减阻或增加传热率等效果。在混合层用一定频率的扰动,可以控制大涡合并的过程,以达到增加混合速度的目的。在湍流边界层中用破坏流向涡的方法,可以减少内外层的动量交换,从而降低摩阻。这些方法都已经取得了成效。

涡量是附着于流体并随流体运动的,而涡量的粘性扩散是缓慢的过程,所以涡结构也随流体运动。因而拟序结构也是随流体流动的,并有拉格朗日性质。此特点对于实验研究中选择观测方法,或选择理论研究的分析方法都有重要的意义。

由于有粘性扩散或旋涡破裂,因此,一个涡结构终归要消亡。在自由剪切湍流中,涡结构消亡后,湍流也逐渐消散;而在壁湍流中,则必须要有新的涡结构不断生成,才能使涡结构和拟序结构得以持续。对于涡结构的再生和自持续,已是现在湍流拟序结构研究中的重点。

### 6.3.2 湍流边界层的拟序结构

#### 1. 快慢斑

湍流边界层拟序结构的发现主要来源于流动显示。1967年Kline等用氢气泡法在近壁区的氢气泡平面图上发现了慢斑快斑等结构,用色液法发现了猝发。图6.1是Kline等用间断绝缘的铂丝,在平板湍流边界层的近壁区所产生的氢气泡线平面图,流动的方向向上。铂丝平行于 $z$ 轴,它产生的氢气泡时间线,最初基本上在平行于 $xz$ 的平面上。铂丝产生的氢气泡时间线被间断地绝缘分割为若干白色的小块,这些小块中流向间距密集的区域表示当地流速慢,称为慢斑;稀疏的区域,表示当地流速高,称为快斑。图6.1下侧的左边箭头指向一个快斑,右边箭头指向一个慢斑。每个快慢斑都占有一定的流向和展向区域,在其内部,流动相对均匀。

在快慢斑块的下游,是一些长带条结构,它们是一些顺流向的白色带条,它们的间距分布具有一定的随机性,它们的平均值以量纲一的壁面单位表示,约为100。间距的量纲一的壁面单位定义为

$$\lambda^+ = \lambda u^+ / \nu$$



式中,  $\lambda$  是间距 (cm);  $\nu$  是运动粘性系数;  $u^+ = (\tau/\rho)^{0.5}$ , 其中  $\tau$  是壁面摩擦应力,  $\rho$  是流体密度。在湍流边界层的研究中, 壁面量纲一的单位是常用的,  $y^+$  也是量纲一的壁面单位, 且  $y^+ = yu^+/\nu$ 。这是基于认为壁面附近发生的湍流结构和壁面摩擦应力有关。长带条结构是壁湍流拟序结构的一种普遍现象, 在各种压力梯度的壁湍流中都有发现, 而且长带条间距平均值以量纲一的壁面单位表示也大约是 100。

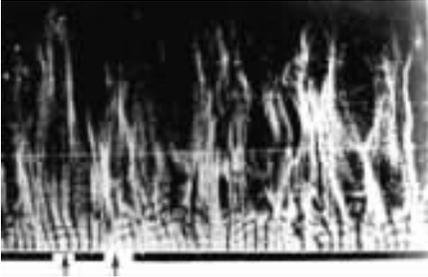


图 6.1 1967 年 Kline 等发现湍流边界层拟序结构的氢气泡平面图,  $y^+ = 2.7$

用间断绝缘的铂丝产生的氢气泡时间线虽然可以表现氢气泡的横向运动, 但是它显示的图像不太清晰。后来, 一般使用没有绝缘的铂丝产生连续的氢气泡时间线, 如图 6.2 所示。图 6.2(a) 是很靠近壁面的氢气泡时间线平面图, 是在无压力梯度的平板上的实验结果。图 6.2(b) 则是在有逆压梯度的湍流边界层的实验结果, 图下侧的两个箭头, 右边一个指向快斑, 左边一个指向慢斑; 图中三角形的标记指向长带条。快慢斑和长带条的图像都很清晰, 而且快慢斑的图像区别也很分明。比较图 6.2(a) 和 (b), 可见后者慢斑较宽, 而且多数慢斑只有一条长带条。图 6.2(a) 的慢斑都是很狭窄的, 分辨不了长带条是从慢斑中间还是快斑与慢斑的界面上产生的。长带条实际上是流向涡的遗迹。

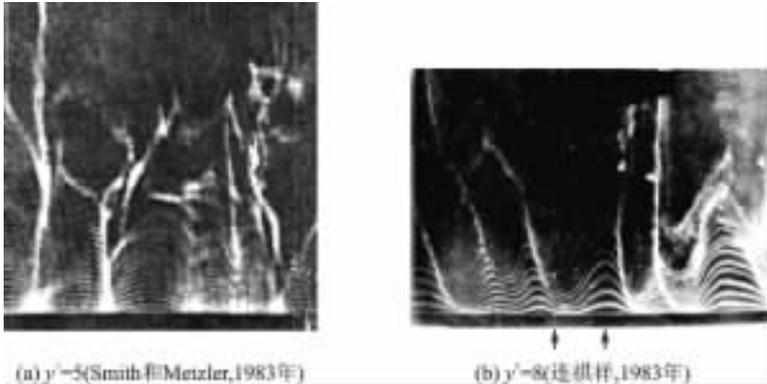


图 6.2 快慢斑示意图

快慢斑和长带条都是大尺度结构, 快慢斑的平均间距是 100 壁面单位, 长带条得到的长度是 1 000 壁面单位的量级, 是边界层厚度的 2 倍以上。这些大尺度结构, 出现在各种壁湍流中。在它们的内部, 流动相对均匀, 剧烈的变化出现在它们的界面上。这些现象超出了统计理论所描述的范围, 因此开始以新的观念来研究湍流, 特别是剪切湍流。



## 2. 猝发、上升流和下扫流

1967年 Kline 等的另一重要发现是猝发(burst)。猝发现象是用染色液从壁面小孔引进而观察到的。染色液带条在慢斑中缓慢上升,如图 6.3 中  $t$  为  $0 \sim 4\delta t$  的值。当上升到  $y^+ = 30$  左右,染色线开始振荡,最后崩溃。从观察的氩气泡平面图像也可以看到,从壁面上升的长带条的下游部分出现剧烈的大幅度振荡,然后长带条的下游部分迅速消散。染色线或氩气泡线的迅速消散,可认为是小尺度湍流脉动大量出现产生强烈的混合作用,使显示长带条的染色液与流体迅速混合,从而使它们的浓度降低而从图像中消失。

这一假说,在 1971 年 Kim 等的实验中得到进一步证实。在图 6.4 的直方图上,  $N$  是在一定时间内及规定的  $y^+$  (横坐标) 区间内观察到的猝发次数。从图 6.4 上看出,直方图与 1956 年 Klebanoff 用热线风速计测量的湍动能产生率的分布曲线基本上是重合的,故湍流能量的产生基本上正比于猝发的次数。由此可见,猝发是湍流边界层中的重要现象,它是产生湍流能量的主要来源。

Kline(1967年)和 Kim (1971年)等的研究把长带条的升起、振荡和造成猝发视为很重要的现象。长带条是慢斑流体所形成的,它从壁面上升,在一定高度发生振荡,并转化为尺度较小的湍流,是湍流边界层内小尺度湍流能量的主要来源。绝大多数振荡和猝发出现在  $y^+$  为  $10 \sim 40$  之间,如图 6.4 所示。由于猝发产生湍动能,因而受到研究湍流的科学家

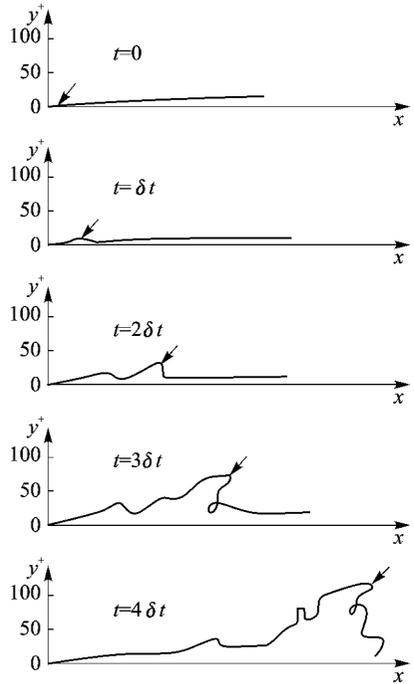


图 6.3 壁面引进的染色液表现的猝发现象(Kline 等, 1967 年)

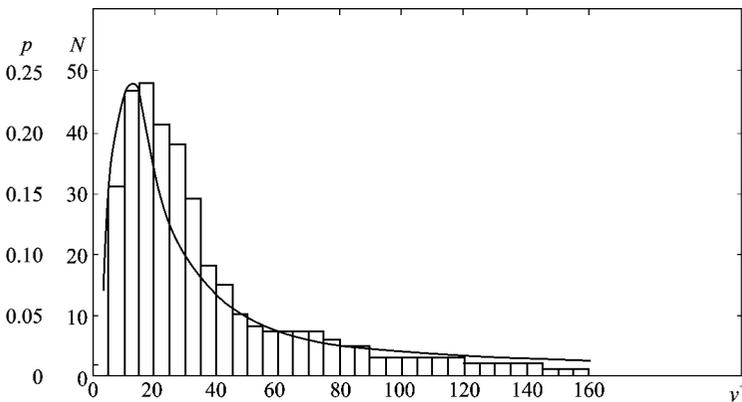


图 6.4 湍动能产生率  $p(y^+)$  (Klebanoff, 1956 年) 和猝发出现的概率分布 (Kim 等, 1971 年)



的重视。产生猝发的上升流,以及产生上升流的发卡涡和流向涡也受到很大的关注,并有许多着重研究发卡涡和流向涡的论文发表。

长带条从壁面附近上升,是低速流体上升的上升流,它带来的脉动速度  $u'$  为负值,  $v'$  为正值,产生的雷诺应力为正值。另一个产生正雷诺应力的流动结构是下扫流。

20 世纪 70 年代, Brodkey 和多个合作者用示踪粒子和立体摄影观测了湍流边界层的内区和外区的流动,发现了下扫流。不过立体摄影照片很难转换成文献上观看的图像。1978 年 Praturi 和 Brodkey 把观测的结果描绘成流动模型示意图,如图 6.5 所示。图中直线箭头是流动方向,圆弧箭头是旋涡旋转方向。密集的向下箭头代表下扫流。下扫流和壁面之间的锯齿形曲线代表自由流和边界层的界面。自由流方向向左。此模型主要描绘了边界层中从内区流向外区的上喷流,和从外区流向内区的下扫流。在外区边界层流体和自由流流体的界面呈锯齿状。如果一个热线风速计放置在边界层的外区,它所感受到的湍流流体和自由流流体的交替表现为湍流的间歇性。

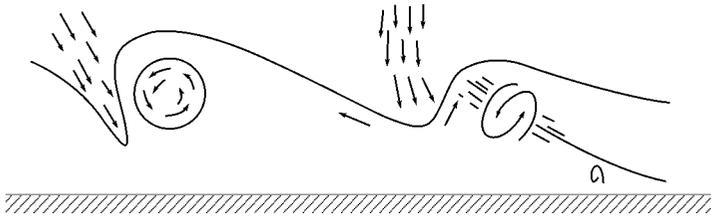


图 6.5 Praturi 和 Brodkey (1978 年)描绘的下扫流和相关的上升流模型

下扫流正好和上升流相反,是高速流体从边界层外层下扫到近壁区,它带来的脉动速度  $u'$  为正值,  $v'$  为负值,产生的雷诺应力为正值。因此下扫流也可能产生湍动能。

自 Brodkey 在 20 世纪 70 年代提出了下扫流之后,研究下扫流的文献不多。人们的研究集中在上升流引起的猝发,以及产生上升流的发卡涡。到近几年,下扫流才得到较大的重视。下扫流不但是雷诺应力的一个重要产生源,而且它把外层的高速流体带到近壁区,直接增加了壁面摩擦力。对于减阻研究,下扫流是值得关注的重要的研究对象<sup>[14]</sup>。

下面介绍下扫流在近壁区产生的流动结构。

图 6.6 是一个下扫流的侧面图。图 6.6(a)中的白色方框内有一小块氢气泡,它向壁面移动。在图 6.6(b)中,它已经很接近壁面。从实验所得的序列照片中很容易辨认和跟踪此小块氢气泡,这里取了其中 2 幅照片,用以说明下扫流流向壁面的形态,以及它在壁面附近引起的流动。从图 6.6 可见,下扫流经过的区域呈现一条没有氢气泡的黑色带条,其旁边的氢气泡基本上没有跟着它下扫。1978 年 Praturi 和 Brodkey 在其论文中描述下扫流呈手指形状。图 6.6(a)中的下扫流也是一狭窄的条带,下扫流在它的上游和下游都产生流体向上运动,如图中的氢气泡时间线向上凸出,就是当地流体向上流动形成的图像。

对下扫流和其周围的流动结构做了一系列的观测之后,发现其结果有两个特点:其一是下

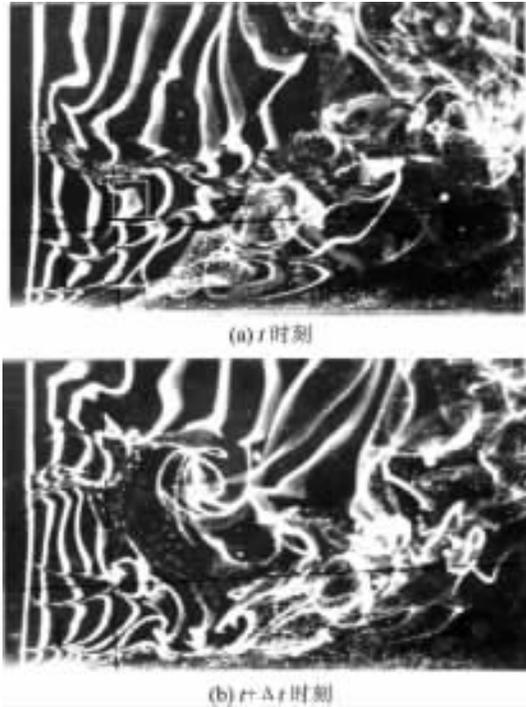


图 6.6 下扫流的侧面图(Lian,1999 年),图(a)和图(b)的时间间距为  $1/4$  s

扫流前后往往出现横向涡,在横向涡的前后又可能还有另外的下扫流;另一特点是一个下扫流两侧慢斑流体的上升高度,比一般慢斑流体上升得更高,而且速度更快。Kline 等在 1967 年指出,慢斑流体上升产生猝发,是湍流能量的主要来源。对下扫流特点的观测表明:下扫流流体是由外区下扫流体形成的,它具有比一般快斑流体更大的流速和更大的动能;它两侧的上升流体可能具有更高的上升高度和更大的上升速度,并且可能产生更多的湍流能量;这一结果还表明,下扫流区域是自由流或外层的流体动能传输到内层,并转化为湍流能量的一个重要渠道。

从上面叙述的下扫流对壁面摩擦应力的作用可见,如果能够控制下扫流就可能降低摩擦阻。因此,深入了解产生下扫流的机制和下扫流发展的过程,有助于开发有效的减阻技术。

### 3. 拟序结构的统计特征和条件采样

拟序结构的空间分布和时间分布都有一定的随机性,但是它们的统计特征却有一定的规律。例如长带条的展向间距呈对数正态分布,实验表明慢斑流体升起的时间间隔也呈现对数正态分布。

在对拟序结构特征的统计研究方法中,进行得最多的是条件采样法。条件采样法是利用热线风速计或激光测速计获得的大量时间序列信息,统计其中和某个拟序结构有关的信息。在 20 世纪 70 年代后,为了从热线风速计获得拟序结构或猝发产生的频率,出现了条件采样



法。无论是拟序结构还是猝发,都是一种空间结构,它们基本上随流体流动;而热线风速计则固定在空间的一定位置上。它所采集的信息,有一部分是某一特定的结构流过热线探针时产生的,其他部分则不是此特定结构所产生的。此结构可能多次通过探针,把此结构每一次通过时所产生的信息都采集下来,而其余的信息都不要,就是条件采样。

条件采样获得的信息,有可能是探针扫描过结构的中心、上部、下部、左部或右部所采集到的;也可能是结构变化比较平稳时,或是结构迅速变化时,例如染色线剧烈振荡时,所采集到的。因此,如何分析热线风速计所采集的信息与经过探针的结构特征的关系,成为一个复杂的问题,从而用多种方法研究湍流边界层猝发频率的论文很多。条件采样的基本方法如下。

设  $s(t)$  是流速计采集到的流速信息,令

$$f(t) = D(t)s(t) \quad (6.45)$$

式中,  $D(t)$  为检测函数。当流速信息满足欲检测的某个拟序结构时,令  $D(t) = 1$ ; 否则令  $D(t) = 0$ 。由此得到的  $f(t)$  就是条件采样提供的信息。用  $f(t)$  可以统计某个结构出现的频率,例如猝发频率;也可以得到某个结构的流速平均值,例如在检测湍流的间歇因子时,可在脉动速度大于边界层外的自由流的脉动速度时,令  $D(t) = 1$ ; 而其余时间,认为是非湍流,令  $D(t) = 0$ 。由此可得出出现湍流的时间比例,亦即间歇因子。

对于猝发的检测要复杂得多。检测函数  $D(t)$  的取舍往往要加上人为的门槛值。例如检测瞬时雷诺应力最大值的流速门槛法,设

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } u' < -Lu_{\text{rms}} \text{ 时} \\ \text{否则} \end{array} \right\} \begin{array}{l} D(t) = 1 \\ D(t) = 0 \end{array} \quad (6.46)$$

式中,  $u'$  为脉动流速;  $u_{\text{rms}}$  为脉动流速的均方根值;  $L$  为门槛值,一般取  $0.5 \sim 1.3$ 。人为取的门槛值大小,影响条件采样的结果。为了避免门槛值带来的误差,1997年姜楠、王振东和舒玮发展了一种小波分析的条件采样法。

### 6.3.3 壁湍流的涡结构

1952年 Theodorsen 提出了在壁湍流中发卡涡是基本涡结构的概念。他提出的发卡涡的初期形状如图 6.7 所示。图中直线箭头是来流方向,圆弧箭头是旋涡旋转方向。他论证了发卡涡的主要特征:在升力  $L$  的作用下,它的头部要从壁面附近上升到边界层的外层,两腿的下端则留在壁面,形成“发卡”形状。Theodorsen 提出发卡涡后,当时并未受到重视,到湍流边界层拟序结构发现之后才日益受到研究湍流的科学家们的重视,并出现了许多研究发卡涡的论文,如 1981年 Head 和 Bandyopadhyay 用倾斜片激光观测研究湍流边界层中的发卡涡; 1982年 Perry 和 Chong 试图用发卡涡为基本单元来组成湍流边界层,不过没有很大进展; 1987年 Acarlar 和 Smith 以及 1994年 Haidari 和 Smith 研究用人工扰动产生的发卡涡的发展; 1995年 Smith 和 Walker 评述发卡涡的发展。

发卡涡受到重视的原因是它与湍流边界层流动结构的生成、发展和持续有着密切的关系。



5.4 节中已经讲过,在人工激发的边界层转捩过程中都有发卡涡;发卡涡在它的两腿中间产生上升流;上升流是壁面低速流体上升,它的流速远远小于外层流速;它上升后,和高速流体的界面是一高剪切层,是不稳定的,导致猝发而产生湍动能。人们知道,二维层流边界层的涡线都是横向的,即垂直于流向,而没有流向涡线。湍流边界层中有许多流向涡,它们的流向涡量,当然只能是从横向的涡线转变而来。微弱流向扰动使横向涡线变形,如图 6.8(a)所示,成为一条微型发卡涡,它在按 Biot - Savart 定律产生的诱导速度作用下,头部向外层上升到流速较高的区域,而两腿下端仍然停留在壁面,两腿拉长,形成如图 6.8(b)所示的发卡涡。按涡动力学理论,旋涡拉伸,其涡量增加,但环量不变。两腿旋涡产生更大的诱导速度,头部进一步上升到外层,甚至到边界层之外,得到更大的速度,进一步迅速拉伸两腿(旋涡),产生两条很长的流向涡,这就是流向涡产生的原因。产生流向涡和相应的长带条是所有壁湍流中的普遍现象。拉伸后的流向涡的动能远大于它最初的动能,因为它从周围流场吸取了能量。这种旋涡拉伸也是一种能量从大尺度结构向小尺度结构转移的结果,例如自由流拉伸发卡涡,就是自由流能量向边界层能量转移的结果。

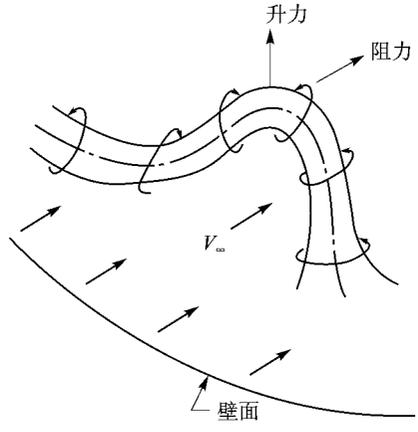


图 6.7 Theodorsen 提出的壁湍流基本结构模型——发卡涡,亦称马蹄涡(Theodorsen,1952 年)

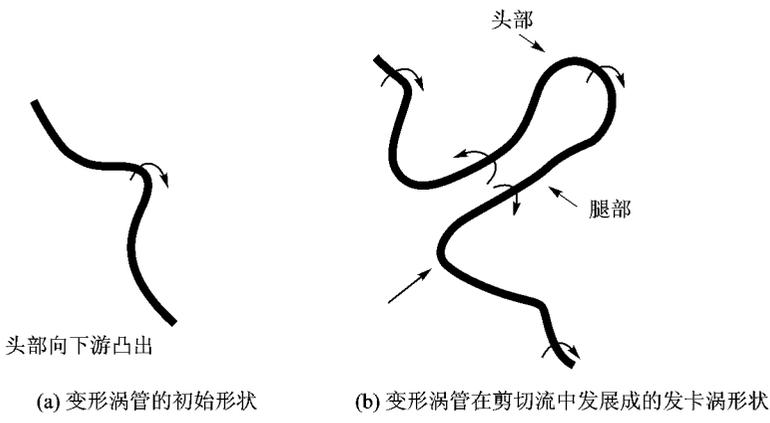


图 6.8 在剪切流中的涡管受到流向小扰动后发展成为发卡涡(Smith 和 Walker,1995 年)



拟序结构,如各种涡结构,由于粘性耗散总要消散,所以必须要有新的涡结构产生。流向涡的产生和拉伸是湍流边界层自持续的一个重要因素。

在湍流边界层实验中观测到,流向涡的数目远远超过横向涡的数目。如果按照发卡涡产生涡结构的概念,它的头部是横向涡,两腿是流向涡,则流向涡的数目应该是横向涡的两倍;而实际上,实验观测到的不止两倍,因为流向涡往往受到拉伸,涡量增加,存在的时间很长,而横向涡是很短的。在湍流边界层中,湍流脉动干扰了发卡涡的生长,因而完整的对称的发卡涡很少出现,观测到的基本上是单个的流向涡或横向涡。因此,1991年 Robinson 提出了不完整的发卡涡模型,如图 6.9 所示,它也称为“单腿发卡涡”。

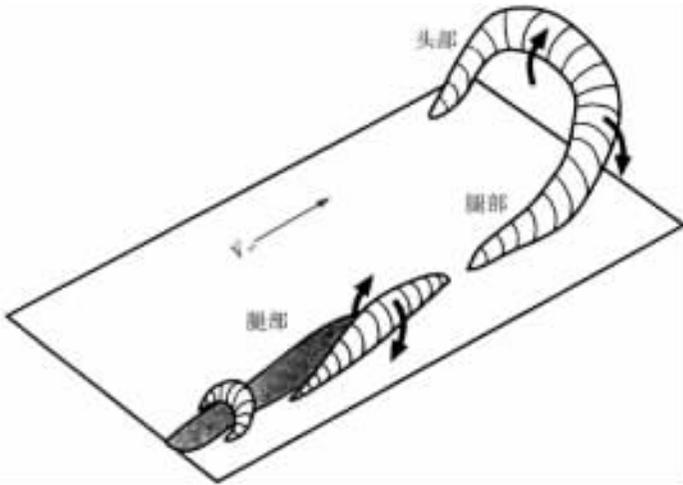


图 6.9 湍流边界层中受到湍流脉动影响而生成的变形的发卡涡 (Robinson, 1991 年)

单个流向涡和单个横向涡的图像如图 6.10~图 6.13 所示。

1971年 Kim 等从氢气泡侧面图像中发现了流向涡和横向涡。氢气泡侧面图像是由垂直于壁面的铂丝所释放的氢气泡形成的。照片是从  $z$  轴方向拍摄的。靠近铂丝的氢气泡时间线与铂丝的距离,正比于当时当地的流速,因此时间线的形状代表了当时当地的速度型。形成侧面图像的氢气泡基本上位于一个平行于  $xy$  面的平面上,它可以显示横向涡的截面,这是因为横向涡基本上垂直于  $xy$  面。侧面图也可以显示靠近它的流向涡或  $xy$  向涡。流向涡并不是完全平行于  $x$  轴,横向涡也不是完全平行于  $z$  轴,它们只基本上是流向或横向。这两类是湍流边界层主要的涡结构。

图 6.10 中,在近壁区有一个流向涡。图 6.11 是一个有逆压梯度的湍流边界层侧面图的序列照片,可看到一个流向涡的发展过程。此流向涡的下游部分逐渐向上抬升,形成向上倾斜的流向涡。发卡涡的腿部也是向上倾斜。

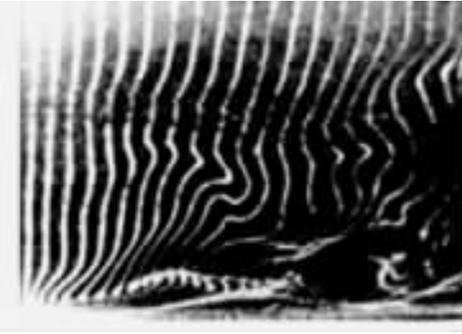


图 6.10 用氢气泡法取得的湍流边界层侧面图上显示的流向涡(Kim 等,1971 年)

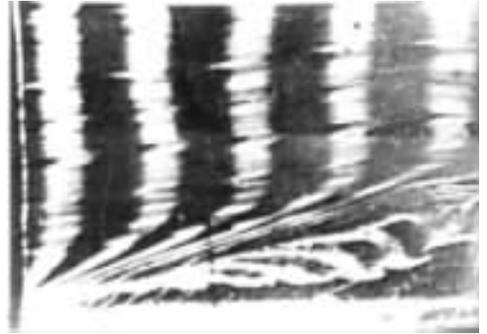


图 6.11 侧面图上的  $xy$  向涡(Lian,1990 年)

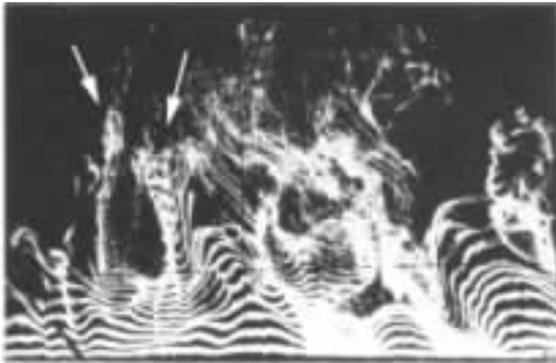


图 6.12 平面图上的流向涡(箭头所指)(Lian,1990 年)

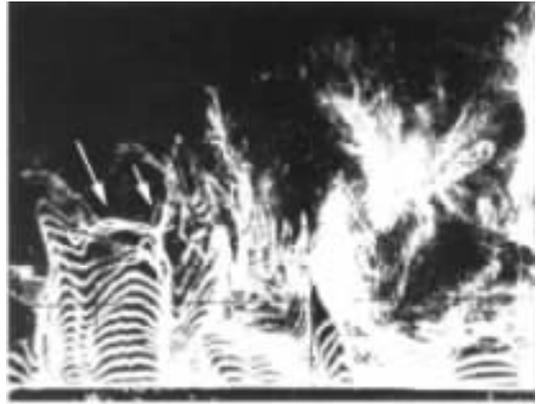


图 6.13 平面图上的横向涡(Lian,1990 年)

图 6.12 是一个在逆压区的湍流边界层的平面图,图中箭头所指的下方都是流向涡。这些流向涡也都处在慢斑的边缘。图 6.13 也是一个在逆压区的湍流边界层的平面图,图中左边箭头所指的下方是横向涡,右边箭头所指的是此横向涡和一个流向涡的连接处。从图 6.10~图 6.13 可见,湍流边界层中的流向涡和横向涡是很多的。湍流边界层中充满多种尺度的涡结构,多数流向涡是向上延伸的,如图 6.11 所示,这些向上延伸的流向涡受到拉伸,涡量增强,动能增加,长度增加,对于湍流边界层的湍动能和拟序结构的持续起到了重要作用。

#### 6.3.4 自由剪切层的拟序结构

1974 年 Brown 和 Roshko 观测两种气体形成的混合层,利用两种气体折光率的差别,采用光学方法显示了两种气体的分界面,从而显示了分界面形成的流动结构,即大涡结构。



图 6.14 是他们观测到的混合层大涡的照片。这种大涡的发生频率有一定的拟序性质,因而它的流向分布不是等间距的。

从图 6.14 可以明显地看出大涡分布的不均匀性。大涡随着往下游流动,不断地互相合并,从图 6.15 可以看出大涡合并的情况,这种合并也是拟序性质的。后来,1986 年 Bernal 和 Roshko 又用流动显示法发现了附着在大涡上的流向小涡。Brown 和 Roshko 发现的大涡结构是二维的,可以用纹影法或阴影法显示出来;而这种流向小涡是三维的,不能用这种光学方法显示,他们使用了一种激光激发荧光技术,观测到了这种三维小涡。混合层的作用是使两种流体充分混合,以促进其中的化学物质进行反应,因此,对于化学工业具有重要意义。

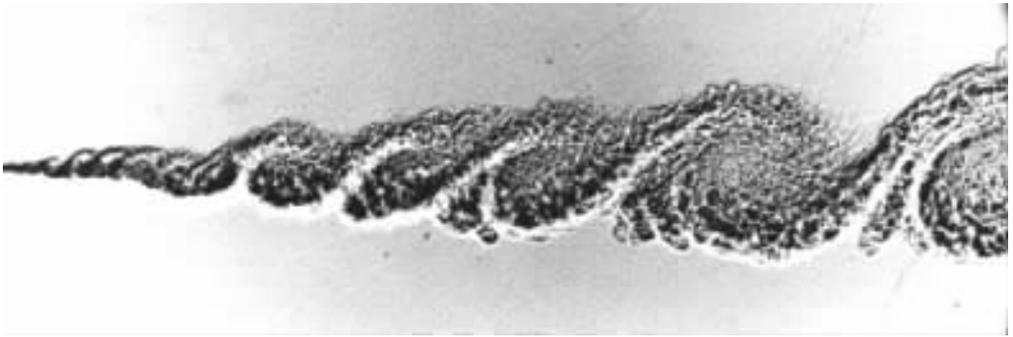


图 6.14 混合层大涡结构(Brown 和 Roshko,1974 年)

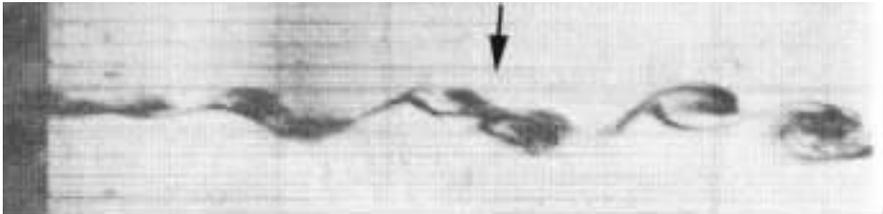


图 6.15 混合层大涡逐渐合并图(箭头所指为两涡正在合并)

大涡合并对于混合有重要作用。混合层的大涡合并本来是随机的,但在 1982 年 Ho 和 Huang 却使用声波来控制涡的合并过程。观察到的现象是:当声波为次倍频时,大涡成对地合并;当声波为  $1/3$  次倍频时,则每 3 个大涡进行合并。天津大学的舒玮和张洪泉在水槽中的混合层上游用振动片造成小扰动,也重现了次倍频扰动造成的大涡合并现象。

分离流的剪切层,尾流的剪切层,以及射流的剪切层都有卷成大涡的现象。1989 年 Lian 和 Huang 在对起动涡的观测中,就有分离流的剪切层卷涡和涡合并的现象,如图 6.16 所示,图中的大涡是由分离流的剪切层卷成。剪切层先分裂并卷成若干小涡,然后再卷入大涡。小涡在卷入大涡之前就有配对合并的现象,图 6.16 中箭头所指,就是一对小涡正在合并的图像。

分离流、尾流和射流都是工程中广泛存在的流动现象。用声音或其他小扰动控制自由剪

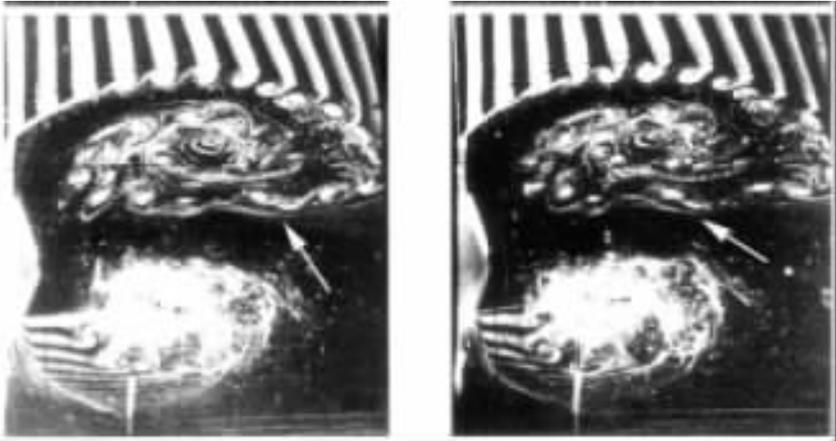


图 6.16 起动涡的外层剪切层卷涡和小涡的合并(Lian 和 Huang, 1989 年)

切流的大涡合并,可以影响分离,还可以改变阻力、减阻或增升。目前声控法控制这些流动用得广泛。

后向台阶流作为一种典型的分离流,它的分离线是固定的,流动结构比一般的分离流简单,经常用来研究分离流。1992 年 Hazan 用小扰动来控制一个后向台阶流的流动结构,实验是在风洞中进行的。风洞实验段是  $0.8\text{ m} \times 1.1\text{ m} \times 3\text{ m}$ ,风速为  $2 \sim 25\text{ m/s}$ ;实验用的后向台阶高度是  $3\text{ cm}$ ,宽度是  $60\text{ cm}$ ;用一个  $150\text{ W}$  的扩音器产生小扰动,来控制流动结构。

利用声控法直接控制机翼上的分离区,用以减少阻力和增加升力的研究文献也不少,例如 1992 年 Zaman 发表的文章。

壁剪切流的拟序结构与自由剪切流的拟序结构有很大的差异。在混合层和尾流中,大涡结构逐渐转化为小涡。虽然在初期,大涡要互相合并形成更大的涡;但是在合并过程中往往要形成轴向的不均匀性,导致涡的破裂,形成不规则的小尺度涡,越是往下游,涡的尺度越小。但是在壁湍流中,涡结构的尺度是正比于边界层厚度的,它顺流向的变化不大。任何一个涡,在时间增长过程中,要因粘性扩散而逐渐消失,或因破裂而消失。壁湍流的涡结构能够在流向保持稳定的尺度以及拟序相似图像的原因,应该是由于不断有新的涡结构的形成。

在湍流边界层中,除了涡结构区域,其他区域的涡量基本上是微弱而且混乱的。它们如何能聚集成集中的有规则的涡结构,有关这样的涡结构,对其生成过程的观测研究还很少,原因主要是由于观测的困难。涡的聚集过程也是在拉格朗日体系中随流体而运动的,它是一个缓慢的过程,在它的初期,氢气泡法也很难显示出来,因为氢气泡法要显示出一个清晰的涡结构图像,需要一定的条件<sup>[20]</sup>。在一般的氢气泡法观测中,即使有图像表现了氢气泡正在卷成旋涡状的图像,也很难判断它是正在形成新的旋涡,还是绕着一个已有的旋涡旋转。虽然没有从壁湍流中直接观测到从微弱分散的涡量聚集成大尺度流向涡或横向涡的实验资料,但是这种



聚集应该是存在的,否则由于粘性扩散,旧的大涡消失,在远下游的边界层,就会没有拟序性大涡了。自由流和壁面的相对运动产生的涡量是横向涡的方向,这也是时均速度型对壁面相对运动的涡量的方向。从这个意义上说,湍流边界层中生成的初始涡结构应该主要是横向涡,它受到不均匀的流速分布而变形和拉伸,逐渐演变成流向涡。

### 6.3.5 展望

湍流的发现虽然已有一百多年,而且许多著名的流体力学家都曾经涉足于湍流的研究,如 Prandtl, Karman, Taylor, Heisenberg 等;但是湍流仍然是一个很不清楚的物理现象,它的复杂性可能超过了许多流体力学家早期的估计。许多年来在对湍流的研究上,科学家都期望从基本方程求得一个适用范围广泛的解,但经过上百年的努力仍没有实现这一期望。

湍流拟序结构的发现加深了对湍流的认识,主要是对其复杂性的认识。现在看来,湍流基本上是由大尺度和小尺度的多重结构组成。结构的差异不仅在于尺度的大小,更主要的是它们的流动特征,二者的时、空变化都有一定的随机性。小尺度湍流的随机性表现为正态分布;大尺度的是拟序结构,其随机性多表现为对数正态分布。小尺度是相对均匀的,并且比较近于各向同性。

对于均匀各向同性的小尺度湍流,早期的流体力学家发展了湍流统计理论,并应用到湍流的传质传热分析和估算中。有关的研究在 1975 年 Hinze 所著的《Turbulence》一书中有丰富的文献。对均匀各向同性湍流的实验研究,早期广泛采用热线风速仪,这是一种定点的、欧拉性质的测量。不过既然是在空间均匀分布,且与测量点的位置无关,而且按 Taylor 的冻结理论,时间序列的测速数据也可以转化为脉动流速沿流向的分布,因此湍流拟序结构要比小尺度的均匀各向同性的湍流复杂得多。

现在能够对拟序结构进行量化的仅仅是一部分拟序结构的少数特征,如底层快慢斑的间距,慢斑上升或猝发的频率。因为现在对拟序结构的认识还主要是从它的图像,而拟序结构本身是立体的,是沿时空四度空间变化的,所以对于湍流边界层拟序结构的立体图像的观测很困难。虽然 1978 年 Praturi 和 Brodkey 用微粒显示进行过观测,但是所得的结果只有文字叙述。现在,虽然微粒成像测速技术(PIV)已有了很大的发展,但是测量三维流场瞬时流速的分辨率还是很低;虽然使用立体摄影可以测量散布微粒的瞬时三维流速的分布,但是现在只能使用很稀疏的微粒分布,因而所得的数据空间分辨率很低,不足以分析研究拟序结构。现在流动显示所得的拟序结构图像基本上是平面照片,因而它们只能代表拟序结构的一部分特征。即使对一种拟序结构的观测也是不完整的。例如,对于慢斑的观测,现在所得的图像大多数是近壁区的平面图像。一个慢斑如何向垂直于壁面的方向发展这样的问题就很少有人分析研究。猝发是一个重要的现象,它的频率已经在许多进行条件采样的实验中进行过测量。早期就知道它是慢斑上升的结果;但是在慢斑中,上升的流体如何演变成为猝发的过程还很不清楚,且研究文献也很少。



对于涡结构存在的形式,它们从内区到外区的变化以及涡结构的生成过程等也还不够清楚。发卡涡曾经被认为是主要的涡结构,但是近来的实验表明,在充分发展的湍流边界层中很难存在完整的发卡涡。这些都是有待解决的问题。

拟序结构的应用方面还是取得了不少进展。利用拟序结构研究的结果来发展应用性研究,例如减小摩阻、缩减分离区、增加传热率以及降低噪声等等都有所进展。

由于计算机的迅速发展,采用直接数值模拟研究湍流正在迅速发展。同时,三维 PIV 技术也在迅速发展,高分辨率的瞬时三维速度场的时间序列测量将可能实现。二者结合可能对湍流的研究有很大的促进作用。但二者都产生海量数据,如何从中获得规律性结果,是一难题。现今,采用流动显示获得拟序结构的直观图像,仍将在湍流研究中发挥重要作用。

## 习 题

- 6.1 试述用雷诺平均方法研究湍流的优点和局限性。
- 6.2 在一般风洞中,湍流的时间平均值、空间平均值和系综平均值能相同吗?说明其原因。
- 6.3 在风洞中,用热线风速计测量数据求得的自相关,可以代表流向的互相关吗?说明其原因。
- 6.4 雷诺方程为何难以获得准确解。
- 6.5 如果将来有一天,数值模拟可以比模式理论更方便更准确地求得湍流应用问题的解,那时基于雷诺平均方法得到的一些基本方程对湍流的研究还有用吗?
- 6.6 湍流是三维流动,而热线风速计一般不能测量三维脉动速度,更不能测量瞬时流场。从 20 世纪初至 60 年代,湍流研究仍然取得了很大的进展。分析其进展状况和原因。
- 6.7 湍流边界层的近壁面的结果尺度通常用量纲一的壁面单位表示,例如,  $\lambda^+ = \lambda u^+ / \nu$ , 其中,  $\lambda$  是物理长度(cm);  $\nu$  是流体运动粘性系数;  $u^+$  是壁面摩擦速度,且  $u^+ = (\tau/\rho)^{0.5}$ , 其中,  $\tau$  是壁面摩擦应力,  $\rho$  是流体密度。试解释使用壁面单位的机理。
- 6.8 分析下扫流对壁面摩阻的影响。
- 6.9 设下扫流的流量一定,分析下扫流集中和分散两种情况下产生的摩阻的差异。
- 6.10 设想一种减少摩阻的流动,并建议或设计一种减阻方法。
- 6.11 分析一个圆形湍射流的湍能的流向变化,设射流离开喷嘴时是层流。
- 6.12 分析湍流边界层快斑和慢斑的产生机理,为何快慢斑的流向长度一般远远大于其展向宽度?
- 6.13 是否快速发展计算机和计算技术,将来可取代湍流的实验研究?

# 第 7 章 边界层理论的应用——SCT\* 的减阻

## 7.1 引言

自从 Prandtl 于 1904 年提出边界层概念以来,人们一直将这一概念应用于减阻的研究和实践。当物体在空气中飞行或在水中航行时,与流体总有摩擦作用,必然受到阻力。为了克服阻力,飞行器上必须有动力,这就要消耗燃料,从而付出代价。

当飞行器的速度(或雷诺数)达到一定值以后,边界层内的流态就由层流转捩为湍流,而湍流中的阻力系数是远远大于层流的。这就提出了一个问题:怎样尽可能地保持层流流态?

此外,边界层是有分离现象的。边界层分离之后,对机翼而言,不但阻力大大增加,而且升力大大减小,甚至出现失速现象。因此,人们需要研究采用什么方法来避免失速或分离。

保持层流流态或防止流动分离,实质上都是边界层控制问题。如果能够付出较小的代价使边界层得到控制,以保持层流流态,并使流动不分离,从而得到较大的收益,这将是很有现实意义的事情。

最初的办法是使物体表面尽量光滑以保持层流,后来又设计了“层流翼型”,它可以在一定的条件下保持层流边界层。这称为自然层流(NFL)。这种方法毕竟很受限制。所以人们又采用了许多人工方法来控制边界层,以达到影响边界层结构,从而避免边界层内气流分离,进而达到减小阻力并增大升力的目的。通过对边界层的主动控制,使得边界层在按弦长计量的雷诺数大于不控制时的转捩值以后,仍能保持层流。这一技术称为层流控制(LFC)。不过,不要将 LFC 误解为是边界层的流态变为湍流以后再使其重新回到层流,那样的话,所消耗的能量将比 LFC 大一个量级。

## 7.2 超声速商用运输机的减阻问题

超声速运输机对阻力是非常敏感的,所以,应用层流流动来减阻的技术就很重要了。这是达到超远航程的先决条件。在早先的研究工作中,人们假设超声速运输机只有在应用层流技术的条件下才能实现;但是,现在要求超声速运输机不用层流也能实现,这样,当层流技术达到实际应用时,超声速运输机的竞争能力就会更强。层流减阻技术通过减少所烧掉的燃料而使飞机的尺

---

\* SCT 是超声速商用运输机的简称。



寸及质量减小,或者使航程增大;否则,飞机的尺寸及质量就会一直(随航程)增大上去。边界层从层流到湍流状态的各种转换机理(附着线转捩,横流不稳定,TSI\*)所起的作用和跨声速运输机是一样的;但超声速运输机上的条件则更苛刻一些,即后掠角较大、表面有冷却和较高的模态不稳定性(高模态不稳定性)等因素至少应该予以考虑(虽然在  $Ma < 3$  时这些因素还不是很重要)。但是迄今为止,在预计的巡航马赫数(1.6~2.4)之下,在世界范围内还没有地面试验设备来研究 TSI,在德国的斯图加特有这么一个设备,叫路德维希管,但仍处在验证阶段。

### 7.2.1 未来超声速商用运输机的性能指标

要造出一架新型的超声速运输机,必须满足一些极具挑战性的环境及成本要求(图 7.1)。只有在满足未来的关于排放及噪声条例的条件下,才能证明超声速运输机能否给制造商和航空公司带来利润。阻力是与烧掉的燃料、排放及营业成本直接相关的;但是也通过飞机的尺寸和质量影响到噪声。

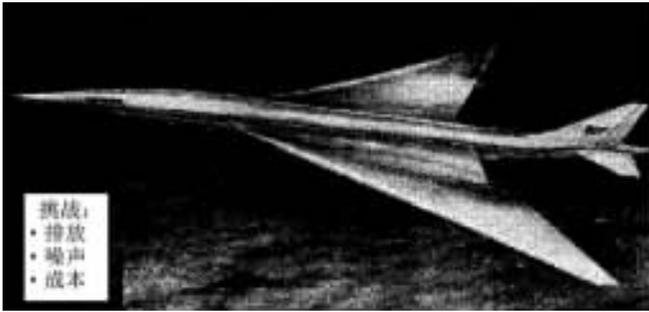


图 7.1 一种新型超声速商用运输机

一架超声速运输机只有在航程至少是 2 000 n mile(3 704 km)时才有意义。航程愈大,对乘客就愈有吸引力。当飞行时间大于 4~6 小时以后,大多数乘客会感到不舒服,而且很多人认为飞行时间是时间的浪费,甚至旅游者也这么看。但是超声速运输机必须和未来的新型亚声速运输机(图 7.2)去竞争,后者为了更好地适应长时间飞行而给旅客提供了更大的空间和更舒适的条件,而且这些飞机的营业费用很低,是超声速运输机比不了的。所以,超声速运输机必须用速度、舒适度和生产率去和亚声速运输机的效率、空间和舒适度竞争。为了满足这些挑战,超声速运输机必须主要针对以下 4 个不同的设计点予以优化。

- ① 以  $Ma=2\sim 2.4$  作非常高效的超声速巡航。
- ② 以陡峭的航迹角安静地起飞和着陆。
- ③ 以高亚声速巡航能力( $Ma=0.9$ )飞越不允许作超声速飞行的居民区。

\* TSI(Tollmin - Schlichting Instability)是托尔明-施利希廷不稳定波的缩写,或简称为托-施不稳定波。



④ 以  $Ma=1.1$  左右作跨声速加速。

在上述 4 点中,使气动阻力最小的问题将是各项挑战中的主要问题。阻力的来源有波阻、涡阻和摩阻。

本章重点放在通过层流化以减小摩阻方面。

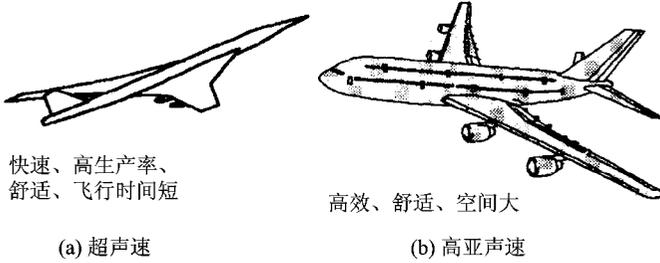


图 7.2 未来的远程飞机

超声速运输机的机翼面积比较大,大约是同级亚声速运输机的 3 倍。由于升致阻力(包括波阻和诱阻)大,巡航时必须用小迎角和小升力系数  $C_L$ 。超声速巡航时,摩阻约占总阻力的 35%,这部分阻力是可以通过层流化使之大大减小的。目前的超声速运输机设计方案中,在绕流为湍流的情况下,机翼的升阻比( $L/D$ )是 8.5 左右。作了部分层流化以后,升阻比有可能接近于 10。人们的目标是湍流时达到 9.5,层流时达到 11。250~300 座的超声速客机预计在 2010 年的最大航程,当采用湍流时不会超过 5 000 n mile(9 260 km),采用层流时则可达到 6 000 n mile(11 112 km),其起飞质量在 400 t 以下(图 7.3)。

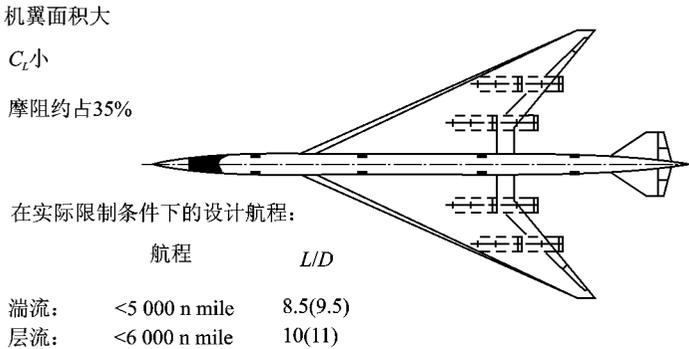


图 7.3 超声速运输机的各项指标

### 7.2.2 超声速运输机的层流化

为了使超声速运输机有效地层流化,需要一种杂交方法。图 7.4 表明了一种涉及不同物理属性的概念。

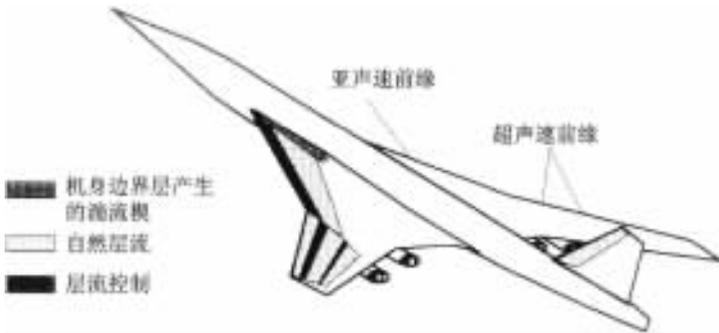


图 7.4 可能实现的层流化方案

因为内翼具有大后掠角的亚声速前缘(前缘位于其自身的马赫锥以内),因此,前缘设计成了圆头,但这仍然不能使用自然层流(NLF)技术,而要求使用层流控制(LFC)技术。自然层流只有在适当的造形之下(能控制压强梯度以及前缘处的三维扩张流动)才能实现层流化。层流控制是采用人工方法来改变边界层流动,即用边界层吸除法来改变与层流扰动阻尼有关的边界层速度型。

外翼及尾翼很可能具有超声速前缘(前缘位于其自身的马赫锥以外),这通常是尖前缘。自然层流多半可以用在尖前缘的下游,至少当剖面的曲率很小时可以做到;但是,局部雷诺数的迅速增大会导致转捩。此外,曲率所引起的压强梯度会在后掠翼上产生垂直于流动方向的压强梯度,而这又会激发某种失稳的边界层横流波。抽吸可以延长层流区,但在边界层达到活动舵面的铰链轴之前,层流应该转变为湍流,以免产生由不利的激波/边界层干扰而导致的层流分离。

只要机身边界层是湍流的,就会有一个湍流楔从翼身相交处向下游延伸,这在根弦很长的超声速运输机机翼表面上占了很大一部分。

在 NASA 的一项研究中,报道了波音已经研究了层流化对超声速运输机的影响。表 7.1 列举了得自层流化的改进情况:飞机是 250 座的运输机,设计  $Ma=2.4$ ,乐观的(至少是可以比拟的)设计航程为 5 000 n mile(9 260 km)以及 6 500 n mile(12 038 km),抽吸系统的附加质量大约是 4.5 t,推力减小 0.2%,而这与以下各项收益相比简直是可以略去不计了。

- ① 减少了燃料的受热(这在以  $Ma=2.4$  作远程飞行时是很严重的)。
- ② 质量大大减少。
- ③ 燃料消耗量大大减少。

这只是在略去不计某些滚雪球效应的条件下,并做了初步研究之后所证实的结果,具体的收益数量如表 7.1 所列。可以预料,经过优化之后,还能得到进一步改善。

表 7.1 层流超声速运输机的收益表 ( $Ma=2.4, 250$  座)

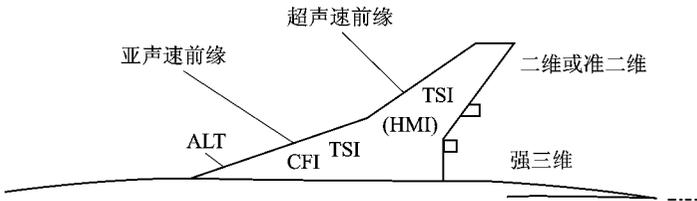
项 目	收 益	
	航程 5 000 n mile	航程 6 500 n mile
燃料受热量	-25.0%	-25.0%
$m_{MTOU}$	-8.5%	-12.5%
$m_{OEM}$	-6.0%	-10.0%
总耗油量	-12.0%	-16.0%
$m_{MTOW}$ (用涡喷时可达到)	350.0 t	530.0 t

注: MTOW—最大起飞质量; OEW—运营空载质量。

航程为 6 500 n mile (12 038 km) 且边界层为湍流的飞机, 在所假设的 500 t 质量限制之下是实现不了的。但是根据经验, 一架超声速运输机的质量甚至必须保持在 400 t 以下, 才能满足起飞噪声的限制。超过了 400 t, 所有的设计方案看来都不行, 尤其是因为这时已经达到了绝对噪声极限; 而在质量较小时, 噪声极限却是与起飞质量有关的。

### 7.2.3 影响超声速转换的因素及控制方法

在内翼的亚声速前缘处, 附着线转换是会像在亚声速运输机上一样发生的(图 7.5)。之所以在后掠翼上会如此, 是因为气流在附着线处并不与物面接触(当地雷诺数为 0), 而是沿着附着线将气流分为沿机翼上、下表面的两股流动。对于无限后掠机翼而言, 附着线处的边界层的发展处于某种平衡状态, 即沿附着线对流的边界层物质(使边界层质量增加)与绕过机翼移走物质的发散流动(使边界层质量减少)之间的质量平衡。



ALT—附着线转换; CFI—横流不稳定; HMI—高模态不稳定

图 7.5 转换的类型

圆前缘下游有一个很强的三维流区, 它产生横流不稳定波(CFI), 其程度比中等后掠翼跨声速飞机上的横流不稳定波强烈得多。一般地说, 横流不稳定波是一种“稳定的”、边界层内的涡流波, 其波峰指向流线, 或者说波是与流线垂直的。因为这种波指向流线, 但并不运动, 所以扰动是沿流线积累的。

再往下游去, 机翼的几何形状有一大块表面曲率很小的区域, 这里占优势的流动状态几乎是锥型流。典型的二维扰动是托-施不稳定波。当流速很低时, 托-施不稳定波的波峰是与流



动方向垂直的,但这些波是沿流动方向运动的。在超声速流中,托-施不稳定波是与流动方向倾斜的,因而波峰的方向是介于法线与马赫角之间,但较接近于无粘流的马赫角。此外,其他方向的不稳定波及波速也会出现,但是横流不稳定性(其方向几乎是沿流线)和托-施不稳定波通常是最重要的。

在超声速运输机上,几乎是常值流动状态的锥型流方向既不与主流方向一致,也不与主流方向垂直,而是与主流方向严重倾斜。这就给机翼上的三维流(几乎是锥型流区)施加了趋于生成旋涡的影响。因此,虽然托-施不稳定波在发展,但横流不稳定性在这里仍然存在。应该料到,必有很强的干扰。

在外翼及尾翼的超声速前缘后面如果是一个平面流动(绕楔流动),则流动只是二维的。在这里,附着线转捩是不存在的,TSI在发展,但只要一遇到曲率,横流不稳定性就变得很重要了。

在超声速流中,除了横流不稳定性及托-施不稳定波之外,还会出现高模态不稳定性:这些是以超声速的速度相对于未扰动气流而传播的波。对于平板而言,这些高模态不稳定性仅在自由流  $Ma$  数大于 3 时才发生;但还不能预料这些波对超声速运输机是否很重要。

托-施不稳定波及高模态不稳定性对于边界层内温度分布型的变化很敏感。冷却给托-施不稳定波以阻尼(即表面温度小于气流的恢复温度),但会使高模态不稳定性放大;加热作用与此正相反。在超声速运输机上,凡对层流化有意义的所有表面,都或多或少地能冷却边界层。有两种冷却机制很重要:一个是通过结构及燃料的热汇做热容式冷却,另一个是由于表面温度升高而产生的辐射冷却。后者在温度相当低(大多数情况下小于 450 K)的超声速运输机上没有多大的影响,但也不能做绝热流假设。热表面只发生在减速阶段,或在发动机上。

#### 7.2.4 超声速转捩的理论计算

附着线转捩可由 Pfenninger/Poll 准则来计算,可以假设这个准则在超声速之下是成立的。但是在人们感兴趣的  $Ma$  之下来证实这个准则的工作却没有人做过。避免附着线转捩的办法可以从亚声速知识借鉴过来。再做一些研究工作仍然很有意义,因为要设计及制造一种在巡航及起飞时能保持很高气动性能的亚声速前缘,既要避免附着线转捩,又要能够使用抽吸方法来控制 CFI,这在技术上是—项有分量的挑战。

横流不稳定性、托-施不稳定波及高模态不稳定性是通过边界层扰动的稳定性分析来预测的。

线化理论(“ $e^N$ ”)业已成熟,而且可以做例行的应用,即使是在超声速的研究课题中也可以利用,但是要注意受到冷却的表面和高模态不稳定性。线化理论用叠加法可以对以下两种流动方程求解:① 未受扰动气流;② 对单位扰动模态的小扰动(单位扰动模态是指在以流动方向为单位倾斜角之下的单位频率响应和单位波长)。

因为扰动很小,线化是允许的。最后,人们可以导出一个纯局部扰动方程的表达式,此式是用在上述扰动方程组沿垂直于壁面方向求解时的某个位置上的。结果是在这个位置上所选



定的扰动模态的局部增大值。总增大率则通过以下步骤求得。

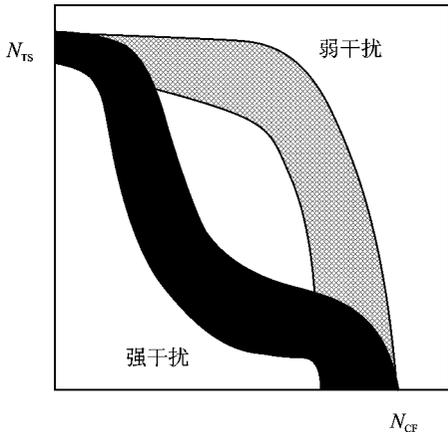
首先,找出一个增大率为 0 的中性点,即从有阻尼变到放大的那一点;然后从这一点出发,追随一条适当的积分线(无粘流线)往下游走,并沿这条积分线,对于所选定的扰动模态(此模态可能逐点变化,与所选用的积分策略有关)进行积分,求出局部增大率。若以指数形式写出这个积分,得出的增大率  $A$  为

$$A = e^N$$

式中,  $N = \ln A$  就是所谓的  $N$ -因子。因此,这个线化理论的结果就是一个增大率,而不是扰动本身。所以,对转捩的预测需要通过转捩试验来验证,并校核相关的增大率。这个校核可能与环境(自由飞,风洞,外部扰动如湍流度及噪声,内部扰动如粗糙度、波纹度及表面振动)有关。这个经常被引用的极限  $N$ -因子,其数值大约是 10,但仅限于一些专门的计算方法(包括所选用的边界层代码)和应用题目(有人提出,10 是看出来的,因为人有 10 个手指)。

按定义,线化理论不能计算以下问题。

- ① 由各种扰动所引发的未受扰动气流的变化。
- ② 不同增大模态的干扰。
- ③ 转捩对外部或内部扰动的敏感度(即所谓感受度)。



$N_{TS}$ —托-施  $N$ -因子;  $N_{CF}$ —横流  $N$ -因子

图 7.6 用于计算转捩的  $N_{TS}/N_{CF}$

线化理论所受到的各项限制是很明显的(图 7.6):首先,横流不稳定性和托-施不稳定波可能发生或强或弱的耦合。这强、弱两种情况下的相关数据是完全不同的,但在这二者之间的整个区域却可能是一致的。其次,其他的效应,如曲率问题和边界层发散也都必须予以关注。迄今为止,只有后者还没人去考虑,但它很可能是造成某些混乱结果的原由。再则,用于横流不稳定性时,线化理论的正确性是有问题的,特别在横流不稳定性很强时是如此(例如在超声速运输机的机翼上)。最后,在超声速流中,托-施不稳定波是不与流动方向垂直的,其倾斜角与马赫角很接近。因此,托-施不稳定波和横流不稳定性的耦合有可能增强。

此外,线化理论只能计算增大率(指数  $N$ ),而它又要由实验来验证,但目前还没有做超声速转换实验的地面设备。

此外,线化理论只能计算增大率(指数  $N$ ),而它又要由实验来验证,但目前还没有做超声速转换实验的地面设备。

有一种补救办法是把稳定性方程(偏微分方程)抛物化,它能处理横流不稳定性和托-施不稳定波的耦合,也许还可以用来研究感受度问题。后一个问题必须解决,才能理解超声速风洞的模拟问题。

解析方法限于一些非常特殊的问题。



为了深入了解复杂流动的物理现象,以及为了校核简化的方法,人们需要用直接的数值模拟(DNS)做进一步的研究。

对于所有的工程方法而言(线化或抛物化的扰动方程),其前提条件是要有未受扰动气流中的精确解。它要求有两个方向的边界层的速度型和温度型的解(精确到二阶导数)。在未来的几年内,这是对于强三维流的最重要的任务。

### 7.2.5 超声速层流风洞

附着线转捩及横流不稳定性对于来流或噪声放射的扰动不太敏感。因此,经典的风洞是适合做研究的。但是在后掠角的亚声速前缘条件下,所要求的抽吸量很大(模型雷诺数高达 $3 \times 10^8$ ),而上述风洞模拟不了这么大的抽吸流动,至少是不能对全机模型做模拟。抽吸表面上的抽吸孔直径已经小到了工艺上的极限,抽吸孔直径无法按模型的比例尺再缩小,这就破坏了模拟的定律。当抽吸孔直径不是比边界层厚度小很多时,这个破坏作用就很严重了。用在超声速运输机上,这种飞机前缘处的抽吸孔直径与边界层厚度相差不多,所以在全机模型上做抽吸模拟就不可能了,至少在前缘附近是如此。

托-施不稳定波对外界扰动是非常敏感的。对于超声速风洞而言,这些扰动是来流中的湍流度(像亚声速风洞一样)。还有大强度的噪声会放射到试验段中。有一部分是由上游噪声产生的,即通过稳定段放射过来的,例如下吹式风洞阀门的噪声;但最严重的部分还是边界层噪声,它是由进入试验段的风洞喷管湍流边界层放射过来的,边界层外缘处的每一个湍流涡团后部都产生一道很弱的激波,它沿马赫线方向放射出一股强噪声,这个噪声激起过早的转捩。因此,超声速风洞中有效的转捩,看来是取决于喷管的雷诺数,而不是模型的雷诺数,即所谓设备雷诺数的效应。

此外,在大多数超声速风洞中所能达到的雷诺数是绝对不够的,此值一般太小。在(通过绊丝)激起转捩以后,会出现重新层流化。超声速运输机的巡航雷诺数大约是 $Re_L = 3 \times 10^8$ (以飞机长度 $L$ 为准)!

过去,是不考虑超声速风洞模型的表面温度的。为了研究托-施不稳定波(及高模态不稳定性),就必须精确地模拟边界层中的温度型,即必须模拟模型的壁温与滞止温度之比。

为了能够测量超声速转捩,在NASA的Langley中心(图7.7)建造了一座安静的超声速风洞,这是一座 $Ma=3.5$ 的小型皮托式风洞;喷管喉部亚声速部分的边界层被除掉了,给风洞喷管以新生的层流边界层,这个层流边界层并不放射出严重的噪声进入试验段;当喷管边界层转变为湍流时,就有噪声放射出来;但是在超声速流中,噪声是紧跟在特征线(马赫线)后面的,这样,就能为人们提供一个安静的试验区,它从直匀流截面开始,以喷管转捩区的特征线结束。这座风洞提供了可以与飞行试验相比的转捩测量结果。

另一座风洞提供了不显示设备雷诺数效应的试验数据,这就是哥廷根的路德维希管,其测量 $Ma$ 为5(图7.8)。能获得这些高质量测量结果的原因还不完全清楚。路德维希管提供了

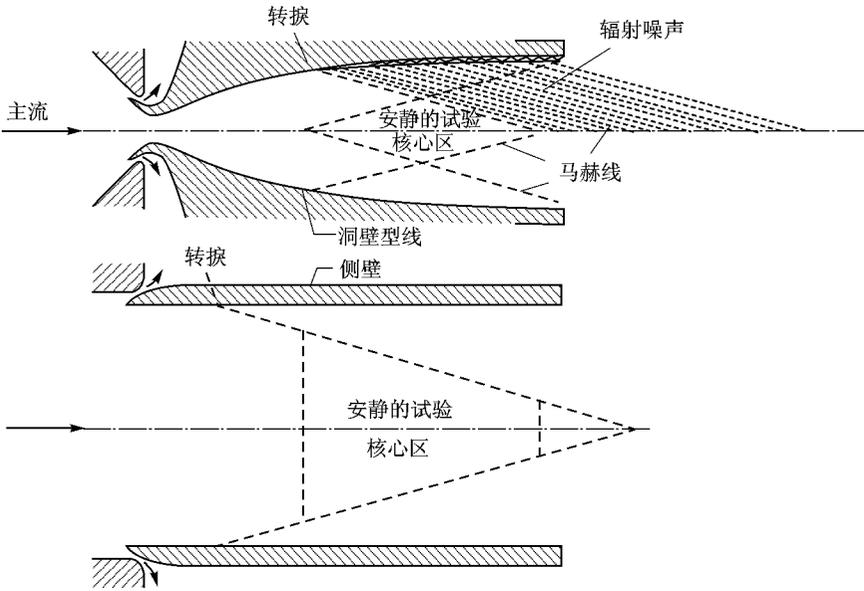
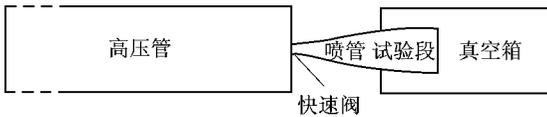


图 7.7 安静的超声速风洞



哥廷根的路德维希管( $Ma=5$ )没有发现设备雷诺数效应

图 7.8 路德维希管

湍流度极低的来流,但风洞喷管的湍流边界层是处于很高的喷管雷诺数之下的,即边界层厚度很薄,而这时扰动的噪声量级及波谱也许都不强。

对于未来的超声速层流实验而言,路德维希原理应该在欧洲得到考虑,在设计用于测试超声速运输机的路德维希管上,也许会像美国那样带有一个安静喷管。这种设施的某些优点是明显的,它们是:

- ① 气流质量极好。
- ② 可以达到很高的雷诺数( $3 \times 10^8$  左右)。
- ③ 测试时间短,容易设计安静喷管。
- ④ 测试时间短,模型容易冷却。
- ⑤ 造价低,欧洲能承受。
- ⑥ 运行时间较短。

由于运行时间短,这个测试设备不适用于标准的开发试验,而更适用于性能质量很高的校



核。已经有一座实用的路德维希管(目前的  $Ma$  为 1.5 及 2.5, 直径大于 1 m) 建在斯图加特大学。

考虑到这些实际情况, 人们必须开发一种设计飞机的新规程。它更多地依赖于理论计算、常规风洞的部分模拟试验(即涉及湍流的模型试验), 以及在高质量路德维希管中做一些经过细心选取的校核, 其中大多数是估算转捩现象的验证实验。有一些可以互相对比的规程已经对于再入飞行器(例如 Hermes) 开发出来了, 这些规程只用了部分模拟试验以及很少量的校核实验, 主要的是依赖于理论计算。

### 7.2.6 超声速层流的飞行试验

在 NASA 的 Langley 中心, 有一架 F-16XL 改装成了超声速层流研究机(F-16XL SSLFC, 图 7.9)。人们设计了一个抽吸套用于这架飞机上, 在超声速飞行时, 通过亚声速圆前缘后面的抽



图 7.9 F-16XL SSLFC 在试飞

吸作用, 成功地实现了层流流动。显然, 层流仅在俯冲(没有升力)时实现了, 但是要想理解这些结果以及证实所用的方法还有些困难, 原因可能出在未受扰动气流解中的边界层剖面分辨率不佳, 其中包括了二阶导数的分辨率在内(边界层内垂直于表面, 大约有 20 个测点, 而不是所要求的 80 个测点); 但是, 不管怎么说, 一套能够在超声速飞行时提供出层流流动的抽吸系统已经被证明是可行的。

此后, 在用 F-16XL SSLFC 作的第二批试飞系列中, 人们采用了左右翼不同的新翼套设计(图 7.10), 并完成了这些测试。

总之, 试飞对于验证层流技术是很关键的, 它们不能完全用地面上的试验来取代; 但由于费用太高, 应该限于最小的用量, 这可以通过改进理论计算及地面试验设备来达到。但某些验证试飞仍然是很根本的。

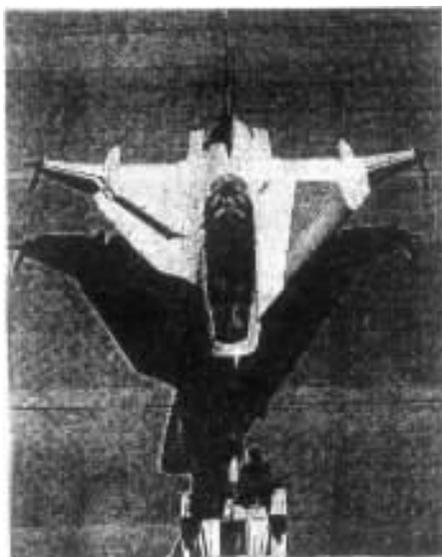


图 7.10 带有两个翼套的 F-16XL SSLFC



### 7.2.7 结 论

层流化对于未来的超声速商用运输机是一种很有前途的技术。初步的研究表明,层流化对于飞机的效率可以有重大的改进。

层流/湍流转捩的理论计算,要求对未受扰动的三维流大大改进其 CFD 解。

稳定性分析本身必须改进,以描述不同失稳(横流不稳定性及托-施不稳定波)的耦合,但也要考虑非绝热壁及高模态不稳定性。

一座  $Ma$  为 1.6~2.4 以及高雷诺数( $Re_L$  约为  $3 \times 10^8$ )的安静路德维希管应该投入使用,以便使人们能够在地面上做高质量的校核实验。总之,在层流化方面,人们应该注意以下各点。

- ① 理论计算。
- ② 用常规超声速风洞中的湍流试验做部分模拟。
- ③ 必须依赖在安静的高雷诺数地面试验设备中所选取的校核试验。
- ④ 利用仔细设计的飞行试验所做的验证来开发新的设计。

## 7.3 高速飞行器气动热的工程估算

### 7.3.1 边界层外缘条件的确定

边界层外缘条件在确定气动加热和表面摩擦中起着重要的作用。对于高超声钝头飞行器而言,由于头部形状是钝的,头部必产生弯曲的弓形激波,从而在边界层外缘的无粘流中产生很大的熵梯度,在靠近边界层外缘处形成很大的无粘流速度梯度。通过弓形激波上不同点处的流线有着不同的熵值。此外,物面上的边界层离驻点越远,其厚度就越大。所以,通过弓形激波上的不同点处的流线,将在不同距离处淹没在边界层中。这个过程叫做流线吞咽过程,也叫做熵层吞咽过程。因此,在边界层外缘形成了变熵条件。

为了精确确定变熵的影响,对于轴对称流动,在工程上最常用的是质量平衡方法(图 7.11)。这种方法的基本思想是通过所求物面点的边界层的质量流量和自由流中流管的质量流量相等,来求出对应于该点的边界层外缘的熵值。在这个方法中,要求给出沿物面的压力分布和激波形状。一般来说,应用这种方法,对于细长的钝体,不论是层流还是湍流,均可取得较满意的结果;但对于短的钝体,特别是湍流条件下,求得的热流会比只用粘性激皮层方法要高出 30% 至 40%。

质量平衡方法的计算步骤如下。

- ① 应用无粘流的计算方法,计算出物面压强分布  $p_e$ , 激波形状  $y_s$ 。
- ② 对于任何一个假设的激波角  $\beta_i$ , 由自由流压强  $p_\infty$  和焓值  $h_\infty$ , 通过斜激波关系求得激波后的压强  $p_{si}$  和焓值  $h_{si}$ 。

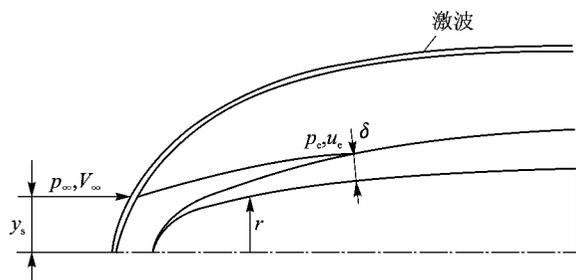


图 7.11 考虑变熵影响的质量平衡方法

③ 由状态方程求出激波后的熵值为

$$S_{si} = f(p_{si}, h_{si}) \quad (7.1)$$

由于式(7.1)既可以包括完全气体的状态方程,也可以包括真实气体的状态方程,因此在这一步中,可以考虑真实气体的影响。

④ 由  $S_{si}$  和  $p_e$  求出  $h_e$ , 即

$$h_e = f(S_{si}, p_e) \quad (7.2)$$

⑤ 由  $h_e$  和自由流的流动参数求出  $u_e, \rho_e$  和  $\mu_e$ , 即

$$u_e = u_\infty \left(1 - \frac{h_e}{h_0}\right)^{0.5} \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{Ma_\infty^2}\right)^{0.5} \quad (7.3)$$

$$\rho_e = f(p_e, h_e) \quad (7.4)$$

$$\mu_e = f(h_e) \quad (7.5)$$

式(7.3)中  $h_0$  为总焓。

⑥ 根据可压缩边界层的公式,计算边界层厚度  $\delta$  和动量损失厚度  $\delta^{**}$ 。

⑦ 根据质量平衡公式

$$\rho_\infty V_\infty^2 \pi y_s^2 = 2\pi r \int_0^\delta \rho u dy = \rho_e u_e 2\pi r (\delta - \delta^{**}) \quad (7.6)$$

判断计算求得的  $y_s, \rho_e, u_e, \delta$  和  $\delta^{**}$  是否满足质量平衡的条件。如果不能满足式(7.6),则要修改所假设的  $\beta_i$  值,直到满足质量平衡条件为止。

⑧ 根据最后确定的  $\beta_i$ , 求出相应的边界层外缘条件。

### 7.3.2 可压缩粗糙湍流边界层的工程计算方法

由于高超声速再入飞行器的头部在再入过程中承受严重的烧蚀而引起表面粗糙度增加,使得端头表面的热流和摩擦增加,因此要求确定高超声速再入飞行器粗糙壁的热流。除此以外,粗糙壁的表面粗糙度还会对边界层转捩产生重要的影响。不过,转捩问题将不在此讨论。

为了使用边界层方程,假定粗糙元的高度小于边界层的厚度。同时,和不可压缩的情况一



样,引进等价砂粒粗糙元的概念。下面,介绍可压缩湍流边界层的积分方法,为此要应用轴对称流动的边界层动量积分方程。为了求解这个方程,假设边界层内的速度剖面为幂次律,即

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad (7.7)$$

并假设边界层内的温度剖面满足克罗柯(Crocco)关系式,即

$$\frac{T}{T_e} = a_0 + a_1 \left(\frac{u}{u_e}\right) + a_2 \left(\frac{u}{u_e}\right)^2 \quad (7.8)$$

$$a_0 = \frac{T_w}{T_e} \quad (7.9)$$

$$a_1 = \frac{T_r - T_w}{T_e} \quad (7.10)$$

$$a_2 = \frac{T_e - T_r}{T_e} \quad (7.11)$$

根据  $H$  的定义,  $H = (\delta^* / \delta^{**})$ , 可以求得

$$H = \left(\frac{1}{n} - I_n\right) / (I_n - I_{n+1}) \quad (7.12)^*$$

$$I_i = \int_0^1 x^i (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)^{-1} dx \quad (7.13)$$

在具体计算中,假设  $n=6$ 。进一步,采用参考焓方法来估算光滑壁的表面摩阻系数为

$$\frac{C_{Df}}{2} = \frac{\rho^*}{\rho_e} \left[ 5.751 \lg \left( Re_\theta \frac{\mu_e}{\mu^*} \right) + 4.9 \right]^2 \quad (7.14)$$

式中, \* 表示参考量。

对于粗糙壁,将使光滑壁的速度剖面向下移动一段距离,即

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho^*}} \left[ 5.751 \lg \left( Re_\theta \frac{\mu_e}{\mu^*} \right) + 4.9 \right] - \frac{\Delta u_1}{u_\tau} \quad (7.15)$$

式中的  $u_\tau$  为摩擦速度,  $Re_\theta = u_\tau \delta^{**} / \nu_w$ , 则有

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} = \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_w} \frac{C_{Df}}{2}} u_e \quad (7.16)$$

图 7.12 绘出了  $\frac{\Delta u_1}{u_\tau}$  随粗糙区域雷诺数  $Re_K$  的变化,  $Re_K$  表示为

$$Re_K = \frac{u_\tau K_s}{\nu_w} \quad (7.17)$$

式中,  $K_s$  是等价砂粒粗糙元的高度。由图 7.12 可见,根据  $Re_K$  的不同,可以将图分成 3 个区域: ①  $Re_K \leq 5$ , 为光滑壁区域, 此时,  $\frac{\Delta u_1}{u_\tau} = 0$ ; ②  $5 \leq Re_K \leq 70$ , 为过渡区域; ③  $Re_K \geq 70$ , 为完全

\* 详见 AIAA Paper - 73 - 763。



粗糙区域,在这区域内

$$\frac{\Delta u_1}{u_\tau} = 5.751 \lg Re_K - 3.0 \quad (7.18)$$

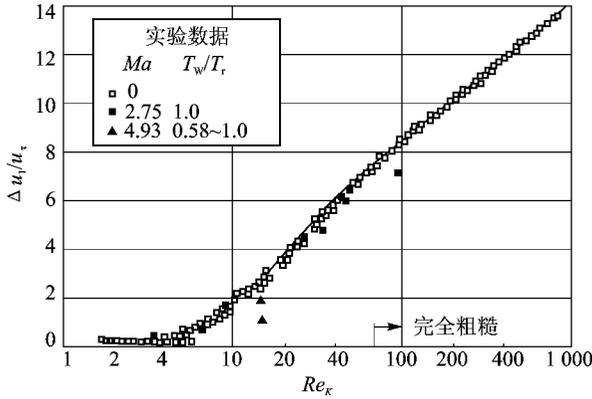


图 7.12  $\frac{\Delta u_1}{u_\tau}$  随  $Re_K$  的变化

在过渡区域内,则采用以  $\lg Re_K$  为参数的三项式。除此以外,还考虑了压力梯度的影响,由压力梯度而引起粗糙壁摩擦系数的增量为

$$\frac{\Delta C_{Df}}{2} = 0.378 K_s u_c^{-1} \frac{du_c}{dx} \quad (7.19)$$

最后可求得

$$\frac{u_\tau}{u_c} = \left\{ \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho^*}} \left[ 5.751 \lg \left( Re_\theta \frac{\mu_c}{\mu^*} \right) + 4.9 \right] - \frac{\Delta u_1}{u_\tau} \right\}^{-1} + \left( 0.378 \frac{\rho_c}{\rho_w} K_s u_c^{-1} \frac{du_c}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.20)$$

关于粗糙壁的热流,一般采用亚层斯坦顿数  $St_\delta$  的概念,此时不可压流的公式为

$$\frac{2St}{C_{Df}} = \left[ 1 + \sqrt{\frac{C_{Df}}{2}} \left( \frac{1}{St_\delta} - 8.5 \right) \right]^{-1} \quad (7.21)$$

推广到可压缩流动,此时有

$$\frac{2St}{C_{Df}} = \left[ 1 + \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_w} \frac{C_{Df}}{2}} \left( \frac{1}{St_\delta} - 8.5 \right) \right]^{-1} \quad (7.22)$$

式中,对于完全粗糙区有

$$\frac{1}{St_\delta} = 5.19 Re_K^{0.2} Pr^{0.44} \quad (7.23)$$

由于光滑壁的雷诺数比拟因子为  $Pr^{-\frac{2}{3}}$ ,所以此时的  $St_\delta$  满足

$$\frac{1}{St_\delta} = \left[ 8.5 - \left( 1 - Pr^{\frac{2}{3}} \right) \right] \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_c} \frac{2}{C_{Df}}} \quad (7.24)$$



在过渡区域,  $\frac{1}{St_\delta}$  可以采用以  $\lg Re_K$  为参数的三项式。至此, 就可以利用方程式(7.12)来

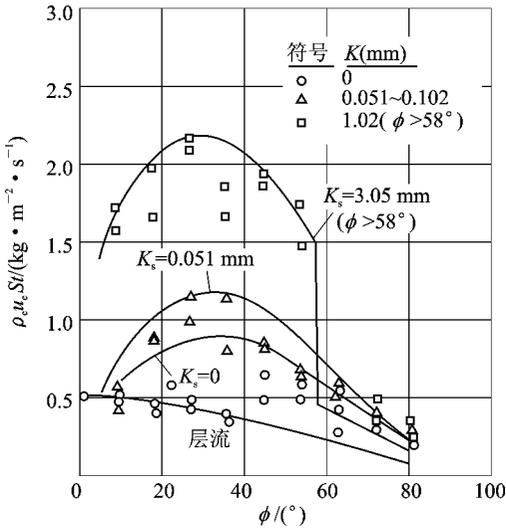
计算  $H$ , 用式(7.20)计算  $\frac{u_\tau}{u_e}$ , 并由式(7.14)计算  $C_{Df}$ 。求得  $H$  和  $C_{Df}$  后, 就可以用龙格-库塔

(Runge-Kutta)方法求解一个常微分方程

$$\frac{d(\delta^{**} r)}{dx} + \frac{r \delta^{**}}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2 + H - Ma_e^2) = \frac{C_{Df} r}{2} \quad (7.25)$$

最后, 通过方程式(7.22)求得粗糙壁的气动加热。

图 7.13 给出了一份计算结果和实验结果的比较。实验  $Ma$  为 5.0, 实验模型是半径为 89 mm 的半球, 表面粗糙度有两种情况: ① 中等尺度的随机粗糙度, 从波峰到波谷的粗糙元高度是 0.05 mm~0.1 mm; ② 大尺度的立体粗糙度, 在球心角  $\phi < 58^\circ$  时, 粗糙元的高度为 1 mm, 粗糙元之间的间距为 2 mm。由图 7.13 可见, 对于这两种情况, 计算结果和实验结果基本上是吻合的; 但实验结果有较大的散布, 很可能是由于风洞实验中测量粗糙壁热流很困难的缘故。由图 7.13 还可见到, 粗糙壁的热流要比光滑壁的热流增加很多。进一步的分析表明, 粗糙壁热流增加的原因是很复杂的, 包括附加的局部激波、粗糙元引起的分离旋涡等因素的



$K_s$ : 粗糙元的平均高度

图 7.13 球头粗糙壁的热流分布

影响, 以及粗糙元使得加热的面积增加等。

## 习 题

- 7.1 从减阻的角度考虑, 为什么要使超声速商用运输机的绕流层流化?
- 7.2 从减小气动热的角度考虑, 为什么要使超声速商用运输机的绕流层流化?
- 7.3 有哪些因素影响超声速商用运输机的绕流层流化? 怎样控制这些因素?
- 7.4 目前在超声速层流的风洞实验方面存在哪些困难? 应怎样解决?
- 7.5 目前在超声速层流的飞行试验方面存在哪些困难? 应怎样解决?

# 第 8 章 粘性流动的数值计算

## 8.1 引言

在流体工程设计、流体理论研究等诸多方面,需要研究大量的粘性流体力学问题。目前,粘性流体力学的研究手段一般分为理论分析、实验研究和数值计算等三种。

理论分析的方法是在研究流体运动规律的基础上,建立各种简化的流动模型,形成描述流动的各类控制方程。在一定假设和条件下,经过解析、推导和运算,得到问题的解析解或简化解。其最大特点是,它往往可以给出带普遍性的信息,在一些情况下可得到封闭及简单的公式,因此可以用最小的代价和时间给出规律性的结果或变化趋势。但由于粘性流体力学的控制方程一般是非线性的,只有极少数情况可以得到解析解,而与工程相关的复杂流体力学问题几乎不可能得到解析解。因此,这类方法主要用于进行定性分析或初步的设计和分析。

长期以来,实验研究一直是粘性流体动力学的主要研究手段。其原理是利用相对运动原理,建立地面实验设备,如水洞、水槽、风洞、激波管和电弧加热器等,直接测量流动参数,以获取速度、压力、力、力矩和热力学参数等流体力学方面的数据。这就形成了流体动力学的一个重要分支——实验流体动力学。一般说来,由于它是实际测量的流动参数,比较真实可靠,因此一直是流体力学研究的主要手段。但是,实验研究一般是在模拟条件——一定比例的缩小模型和一定相似条件的流动环境——下完成的,几乎所有的地面实验设备都不能完全满足所有相似参数和相似定律的要求,而且实验有洞壁效应、支架干扰及测量误差,还有在高超声速流动中真实气体的非平衡效应等很难模拟的因素等,所以实验研究也具有不少限制。一般说来,实验研究周期长、费用高。

上述的理论分析和实验研究方法历史悠久,它们伴随着整个流体力学的发展历程;而数值计算方法(通常称为计算流体力学或计算流体动力学——Computational Fluid Dynamics,缩写为 CFD)则是一个年轻的方法,经过三十多年的发展,目前已经成为一个独立的学科分支,成为当今流体力学中最活跃和最有生命力的领域之一。

本章就介绍粘性流体力学的 CFD 方法和技术。

已经知道,流体的动力学行为服从质量、动量和能量三大守恒定律,并由这三大守恒定律定量确定。经典流体力学的主要成就之一就是给出了这三大守恒定律的严格数学形式——控制方程。从 18 世纪开始,科学家们陆续创立了各种形式的控制方程,如经典的 Euler 方程和 Navier - Stokes 方程。遗憾的是,这些控制方程绝大多数无解析解,只能采用各种数学手



段求其近似解,这就是广义的流体力学数值计算,也就是今天的 CFD 的雏形。所以说,实际上 CFD 方法一直伴随着流体力学的发展,历史悠久。但是,由于受当时计算条件等的限制,CFD 真正成为一门独立的学科是从 20 世纪 60 年代起,许多流体力学专家、计算数学专家在研究求解流体力学基本方程的数值方法的同时,研制相应的计算机软件,于是,一个流体力学新的分支逐渐形成。这一时期,是 CFD 的探索时期、出生时期。重要的是,从 20 世纪 70 年代末期,由于一大批杰出科学家在计算方法上的突破,加上计算机技术的快速发展,CFD 从此开始了飞速的发展。因此,CFD 真正的发展也就是近三十年的事情。

所谓计算流体动力学,就是在电子计算机上数值求解流体与气体动力学基本方程的学科。它通过数值求解各种简化的或非简化的流体动力学基本方程,以获取各种条件下流场的数据和作用在绕流物体上的力、力矩、流动图像和热量等。

目前,常用的 CFD 方法主要有:有限差分法(包括其一脉相承的有限体积法)、有限元法、边界元法、有限分析法和谱方法等,其中主要的是有限差分法。对于空气动力学来说,有限差分法更是占据了绝对优势,所以这里只介绍有限差分法。

同目前流体力学研究最常用的实验方法相比较,CFD 的特点如下。

- ① CFD 只需使用计算机和 CFD 软件,所以花费低、周期短、损耗小。
- ② 可以在计算机上方便地改变几何数据和流动条件,也没有洞壁干扰、支架干扰等的影响。
- ③ 可以给出流体运动区域内的离散解,定量给出各个物理量的流动参数,细致描述局部或总体的流场以及定量刻画流动的时间变化。
- ④ 目前,CFD 还没有完全发展成熟,抽象出来的数学提法往往是十分复杂的、多维非线性偏微分方程组,其数值解的数学理论尚研究得不够充分,如严格的稳定性分析、误差估计、收敛性和惟一性等理论的发展还不能提供完全可靠的数值解,仍需要进行验证和确认等进一步的研究。

⑤ 一些复杂的流动问题还缺乏可靠、有效的模型,如湍流、燃烧流动和真实气体效应等。

⑥ 在一些情况下,如复杂非定常流动计算、直接数值模拟等,CFD 的计算量巨大,超过了目前的计算机水平。

一般说来,CFD 计算分为以下三步。

① 前处理。选定包含所要研究物体的流动区域,也就是计算区域;对计算区域进行网格划分,也就是将计算区域离散成一个个的网格点或网格单元;给出边界条件和初始条件。

② 流场计算。在离散的网格上,构造逼近物理方程的近似离散方程——使用最广泛的是有限差分方程;通过计算机和 CFD 计算软件,求解这些近似离散方程,得到网格点上的物理量的近似解,如压力、密度和速度等的近似解。

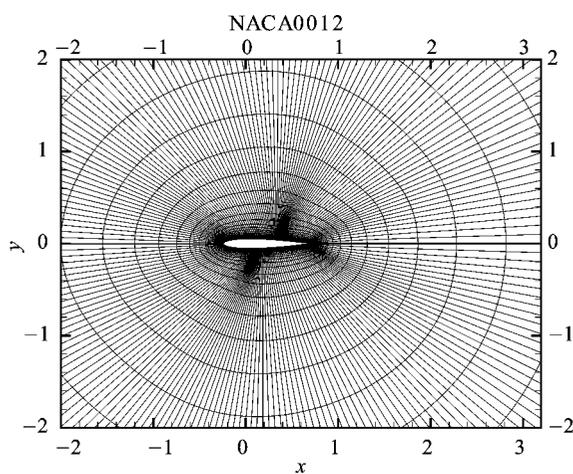
③ 后处理。对这些近似解进行处理,得到人们关心的计算结果:如画出压力等值线图、积分得出气动力和力矩、画出速度分布图等。

上述 CFD 的计算过程如图 8.1 所示。

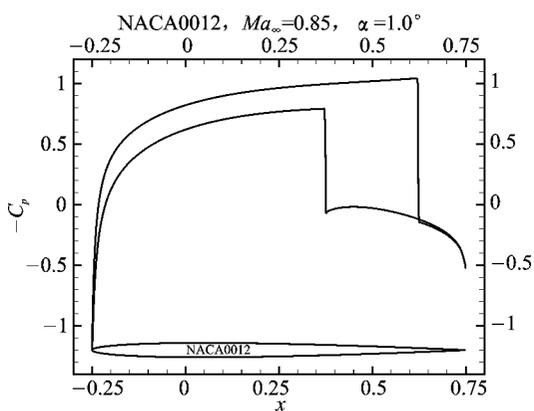


图 8.1 CFD 计算的基本流程示意图

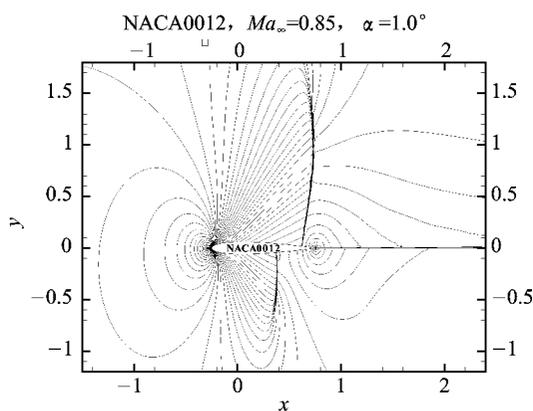
图 8.2 给出了一个用 CFD 方法计算 NACA0012 翼型跨声速流动的实例,使用的是“O”型网格,控制方程为 Euler 方程。



(a) 计算网格



(b) 计算出的翼型表面压力系数分布



(c) 计算出的翼型等马赫线

图 8.2 CFD 计算实例



## 8.2 有限差分法介绍

有限差分法是数值解法中最经典、最常用的方法。简单地说,它是将求解域划分为差分网格(最简单的为矩形网格),用有限个网格结点(即离散点)代替连续的求解域,然后将偏微分方程的导数用差商代替,推导出含有离散点上有限个未知数的差分方程组。差分方程组(即代数方程组)的解,就作为微分方程定解问题的数值近似解。它是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法,发展的历史较长、较成熟。

### 8.2.1 差分网格划分

以一维的初值问题为例:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} &= \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty; t > 0; \alpha, \beta > 0) \\ u(x, 0) &= F(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

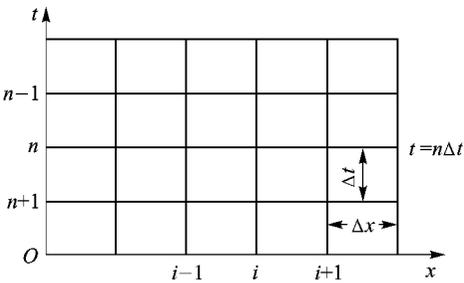


图 8.3 网格划分示意图

在求解域  $x-t$  上划分矩形网格如图 8.3 所示,其格距称步长,  $\Delta x$  为空间步长(一般设为等距),  $\Delta t$  为时间步长,步长大小根据以后说明的稳定性条件决定。网格中的每个结点可分为边界点和内点两类。待求函数  $u$  及其导数的结点值分别表示为  $u_i^n$  ( $i$  表示  $i\Delta x$  位置,  $n$  表示  $n\Delta t$  时刻)及  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n, \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n$ 。在多维情况下,脚标就不止一个,如用  $u_{i,j}^n$  表示点  $(x_i, y_j, t_n)$  的  $u$  值。

### 8.2.2 几种差商近似

差分法依据于差商为微商的近似,微商是差商的极限,即

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

对于一阶导数  $dy/dx$ ,可用下列几种差商近似,如图 8.4 所示。

#### 1. 前差商(又称右差商)

前差商表示为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (8.2)$$

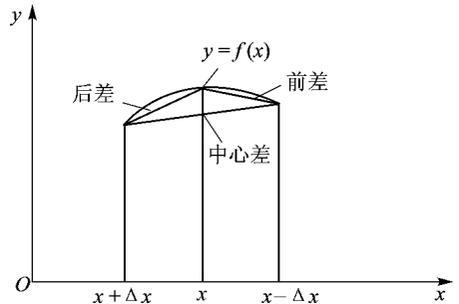


图 8.4 差商近似示意图



## 2. 后差商(又称左差商)

后差商表示为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x \approx \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (8.3)$$

## 3. 中心差商

中心差商表示为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x - \Delta x)}{2(\Delta x)} \quad (8.4)$$

## 4. 二阶差商

一般采用前差商的后差商来得到,即

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_x &\approx \frac{y'(x) - y'(x - \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (8.5)$$

## 5. 一阶和二阶偏差商

对于多元函数  $u(x, y, t)$ , 则用偏差商来逼近偏导数。对空间和时间的偏导数也有三种主要差商(差分)形式, 例如对时间的向前差分为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (8.6)$$

对空间  $x$  的向后差分为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (8.7)$$

对空间  $x$  的二阶差分为

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (8.8)$$

式中,  $n$  表示  $n\Delta t$  时刻,  $i, j$  表示位置  $(i\Delta x, j\Delta y)$ ,  $u_{i,j}^{n+1}$  表示时刻为  $(n+1)\Delta t$ 、位置为  $(i\Delta x, j\Delta y)$  的  $u$  值。

## 6. 逼近误差和差商精度

用差商近似微商而带来的误差称为逼近误差。通过泰勒级数展开, 可导出其逼近误差。假定  $u(x, t)$  具有任意阶偏导数, 这样,  $u_{i-1}^n$  及  $u_{i+1}^n$  的泰勒级数展开式(保留三阶项)为

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n \cdot (\Delta x) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4] \quad (8.9)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n \cdot (\Delta x) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^2 - \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4] \quad (8.10)$$



式中,  $O[(\Delta x)^4]$  表示展开式后面高于  $(\Delta x)^4$  的所有高阶项, 则前差商为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^3] = \\ &\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (8.11)$$

所以, 用前差商近似微商是舍去了含有因子  $(\Delta x)$  以后的所有高阶项而得到的, 通常称前差商的逼近误差为  $O(\Delta x)$ 。同样, 后差商的逼近误差也为  $O(\Delta x)$ , 因为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n - O[(\Delta x)^3] = \\ &\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (8.12)$$

中心差商的逼近误差为  $O[(\Delta x)^2]$ , 将式(8.11)和式(8.12)相加得

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^4] = \\ &\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^2] \end{aligned} \quad (8.13)$$

二阶差商的逼近误差同样为  $O[(\Delta x)^2]$ , 将式(8.11)与式(8.12)相减得

$$\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^2] \quad (8.14)$$

由此可见, 不同差商的逼近误差不同。若前差商和后差商的逼近误差为  $O(\Delta x)$ , 则称前差商和后差商具有一阶精度; 若中心差商和二阶差商的逼近误差为  $O[(\Delta x)^2]$ , 则称中心差商和二阶差商具有二阶精度。

### 8.2.3 差分格式

将微分方程中每一微商用相应的差商来代替, 就可以得到在每一网格点上相应的差分方程式。逼近微分方程的差分方程和逼近微分方程定解条件的公式一起, 称为微分方程定解问题的差分格式。

#### 1. 差分格式的构造

现以一维对流方程的初值问题为例, 说明差分格式的构造。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) &= F(x) \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

在时间与空间上可取不同的差商来逼近, 因而得到以下不同的差分格式。

#### (1) A 格式

A 格式为在时间上取前差商, 空间上取中心差商, 代入式(8.15)得



$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} = O[\Delta t + (\Delta x)^2] \quad (8.16)$$

$O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ 表示该 A 格式的截断误差,则得差分格式的 A 格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} &= 0 \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.17a)$$

写成求解式为

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.17b)$$

从式(8.16)看出,用 A 格式近似微分方程,若其截断误差用  $R_i^n$  表示,则  $R_i^n = O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ ,它具有对时间差商的一阶精度和对空间差商的二阶精度,记为  $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ 。当  $\Delta t/\Delta x = \gamma$  时( $\gamma = \text{常数}$ ), $R_i^n = O(\Delta t)$ ,通常称此  $R_i^n$  为一阶精度格式。A 格式图如图 8.5(a)所示,即由  $n$  时层上的  $i-1$  和  $i+1$  两点“×”求  $n+1$  时层上的  $i$  点“○”。

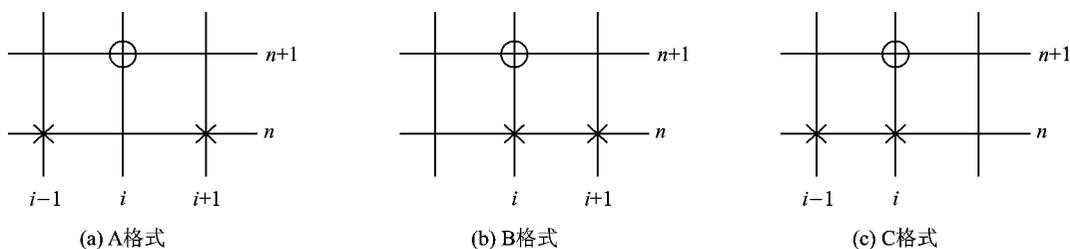


图 8.5 差分格式示意图

## (2) B 格式

B 格式为在时间和空间上都取前差商,代入式(8.15)得

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = O(\Delta t + \Delta x) \quad (8.18)$$

则得差分格式的 B 格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} &= 0 \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.19a)$$

写成求解式为

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.19b)$$

从式(8.18)看出, B 格式的截断误差为  $R_i^n = O(\Delta t + \Delta x)$ ,说明 B 格式具有一阶精度。



B 格式图如图 8.5(b) 所示,表示由  $n$  时层上的  $i$  和  $i+1$  两点求  $n+1$  时层上的  $i$  点。

### (3) C 格式

C 格式在时间上取前差商,空间上取后差商,同样分析得到其差分格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= 0 \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.20a)$$

写成求解式为

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ u_i^0 &= F(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (8.20b)$$

C 格式的截断误差为  $R_i^n = O(\Delta t + \Delta x)$ ,说明 C 格式也具有一阶精度,C 格式图如图 8.5(c) 所示,表示由  $n$  时层上的  $i$  和  $i-1$  两点求  $n+1$  时层上的  $i$  点。

以上对同一问题的三种格式,因其稳定性条件不同,有的甚至不能用于计算。这将在以后说明。

## 2. 显式与隐式差分格式

为了便于说明,以一维扩散方程的混合问题为例

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1, t > 0, \beta > 0) \\ u(x, 0) &= F(x) \\ u(0, t) &= G_0(t) \\ u(1, t) &= G_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

用时间前差及在  $n$  时层上取空间二阶差进行离散得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \beta \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (8.22)$$

设  $S = \frac{\beta \Delta t}{(\Delta x)^2}$ , 则得其差分格式为

$$\left. \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + S(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ u_j^0 &= F(x_j) \\ u_0^n &= G_0(t_n) \\ u_1^n &= G_1(t_n) \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

式中,  $j=1, 2, \dots, J-1$ , 其中  $J=L/\Delta x$  为整数;  $n=1, 2, \dots, N$ , 其中  $N=T/\Delta t$  为整数;  $L, T$  为计算总长度和总时间。故其截断误差为  $R_i^n = O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ , 它对时间具有一阶精度, 对空间具有二阶精度。其格式图如图 8.6(a) 所示。

这种格式称为 FTCS 显格式, 它与式(8.17a~b)、式(8.19a~b)和式(8.20a~b)具有一个共同特点, 即  $n+1$  时层某结点的待求函数值完全能由格式图上  $n$  时层上的已知点值确定。这



样利用第 1 时层的已知值(边界和初始值),可以单独计算求得第 2 时层上各点的函数值;依此类推,逐层计算下去,就可以得到全部的待求未知变量值,也就是完成了数值计算。所以称这种格式为显式差分格式或简称显格式(explicit scheme)。

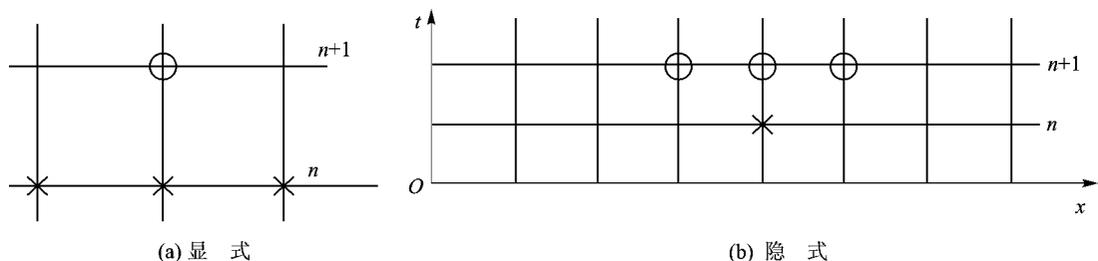


图 8.6 显式与隐式差分格式示意图

现在对同一方程式(8.21)构造另一种差分格式,对时间取前差商,而在  $n+1$  时层上取空间二阶差商,则得到 FTCS 隐格式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \beta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ u_j^0 &= F(x_j) \\ u_0^n &= G_0(t_n) \\ u_1^n &= G_1(t_n) \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

式(8.24)是联系  $n$  时层上的 1 个已知量及  $n+1$  时层上的 3 个未知量的方程,从格式图 8.6(b)看出,由  $n$  时层上的已知点,不可能列一个方程求解  $n+1$  时层上的 3 个未知结点值。如果  $x$  方向有  $J+1$  个结点,其内结点有  $J-1$  个,则需列  $J-1$  个方程联立求解,因而称为隐式差分格式或简称隐格式(implicit scheme)。

### 3. 截断误差与差分格式精度

这里再说明截断误差的定义。以式  $\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  为例,设  $\bar{u}_j^n$  表示点  $(j\Delta x, n\Delta t)$  上微分方程的精确解,将其代入微分方程,一定满足  $\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_j^n + \alpha \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_j^n = 0$ , 但将  $\bar{u}_j^n$  代入任一差分方程,如 C 格式差分方程,则

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} + \alpha \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} \neq 0$$

该格式截断误差定义为

$$R_j^n = \left( \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} \right) + \alpha \left( \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} \right) - \left( \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_j^n + \alpha \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_j^n \right) \quad (8.25)$$

确定  $R_j^n$  可直接从差商的逼近误差来分析,例如,很明显地看出 C 格式对时间是前差,对



空间是后差,则根据其差商的逼近误差得到差分格式的截断误差为  $R_j^n = O[\Delta t + \Delta x]$ 。对于构造形式比较复杂的差分格式,则需采用泰勒级数推导得到截断误差。以 C 格式为例进行分析。 $\bar{u}_j^{n+1}$  及  $\bar{u}_{j-1}^n$  的泰勒级数展开式为

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n + (\Delta t) \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right|_j^n + \dots \quad (8.26a)$$

$$\bar{u}_{j-1}^n = \bar{u}_j^n - (\Delta x) \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right|_j^n + \dots \quad (8.26b)$$

从式(8.26a)可得

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_j^n + O(\Delta t) \quad (8.26c)$$

$$\frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_j^n + O(\Delta x) \quad (8.26d)$$

将式(8.26d)乘以  $\alpha$  并与式(8.26c)相加得

$$R_j^n = \left( \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} \right) + \alpha \left( \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} \right) - \left( \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_j^n + \alpha \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_j^n \right) = O(\Delta t + \Delta x) \quad (8.27)$$

即

$$R_j^n = O(\Delta t + \Delta x)$$

差分格式的精度可根据式  $R_j^n = O[(\Delta t)^q + (\Delta x)^p]$  确定,并称对  $t$  具有  $q$  阶精度,对  $x$  具有  $p$  阶精度。例如 C 格式对  $t$  及  $x$  都具有一阶精度。

## 8.2.4 差分方程的相容性、稳定性、收敛性以及 Lax 等价定理

### 1. 相容性(consistency)

相容性说明某个差分方程能否真正代表对应的微分方程。如果偏微分方程与其差分表达式之间的差别(即截断误差)随网格变细而减少,或者说当网格间距或步长趋于零时,截断误差亦趋于零,此时差分方程趋于微分方程,则称该偏微分方程的差分表达式(即差分方程)是相容的。

### 2. 稳定性(stability)

严格说来,数值稳定性的概念仅适用于可推进求解的问题,例如双曲型方程的初值问题。所谓差分方程是稳定的,它的含义是:在利用推进方法数值推进求解差分方程的过程中,如果初始误差的增长有界,即这些误差的传播逐渐减小或只控制在一个有限的范围内,则称差分方程或差分格式是稳定的,否则称为是不稳定的。

### 3. 收敛性(convergence)

如果网格间距或步长趋于零,差分方程的真解趋于具有同样边界和起始条件的微分方程的真解,则称计算用的差分方程或差分格式是收敛的。

直接证明差分格式的收敛性是比较困难的,利用 Lax 等价性定理,可以绕过收敛性的证明,通过比较容易的稳定性证明来间接证明解的收敛性。



#### 4. Lax 等价定理

Lax 很早就注意到了收敛性问题,当他研究偏微分方程的初始值问题时发现,如果存在条件:① 初始值问题是适定的(即微分方程初始值问题的解存在、惟一且连续依赖于初值);② 偏微分方程是线性的,且系数不明显依赖于  $t$ ;③ 偏微分方程的差分表达式(即差分方程)是线性的,且满足相容性条件,则稳定性是收敛性的必要和充分条件。

也就是说:对于一个适定的线性初值问题,及一个与它相容的差分格式,其收敛性的充分和必要条件是此差分格式的稳定性。也就是说对一适定的线性初值问题,相容性加稳定性等价于收敛性。

### 8.3 流体力学控制方程组的数学性质与双曲型方程的求解

目前,差分格式种类繁多,但都有一定的适用范围,不同数学性质的控制方程只能使用相应的差分格式。

流体力学控制方程是拟线性偏微分方程,其时间导数项是线性的,而空间导数项常常是非线性的,因此计算流体力学或流体流动中的数值方法,是偏微分方程数值解法的一部分。为此,首先要对控制方程的数学性质有一个较好的了解。

#### 8.3.1 偏微分方程的分类及其意义

偏微分方程一般划分为双曲型、抛物型和椭圆型三种类型。不同类型的方程所描述流场的主要特征与物理背景不一样,求解时定解条件的提法也不同,数值计算的处理方法也大相径庭。因此,这里首先按数理方程的基本原理对控制方程组在不同条件下属于什么类型进行分类。三种类型方程的基本差别如下。

##### 1. 三种类型微分方程解的适定性要求对定解条件有不同的提法

以椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y \in D) \quad (8.28)$$

为例,提第一类边值问题

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (x, y \in \partial D)$$

式中,  $D$  是边界为  $\partial D$  的有界区域。这样的问题是适定的,即解存在、惟一且稳定,还连续依赖于定解条件或其他附属数据。但如果对式(8.28)提柯西问题,即纯初值问题,通常是不适定的。阿达玛(Hadamard)指出,此时只要初始条件稍有变化,解就会出现大的变动,即不适定。在数值求解过程中,定解条件表达中误差的出现是不可避免的,较小的误差若引起解的很大变动,将会使解失去意义;另外,对双曲型方程如只提边值问题,也是不适定的。总之,三种不同类型的方程,其定解条件有相应的正确提法,进而对数值解的定解条件也有相应的规则。若违



背这些规则,就得不到正确的解。

### 2. 三类方程解的光滑性不同,对定解条件的光滑性要求也不一样

椭圆型和抛物型方程的解是充分光滑的,因此对定解条件的光滑性要求不高。双曲型方程允许有所谓弱解存在(如流场中的激波),即解的一阶导数可以不连续,因而对定解条件的光滑性要求甚高。这也正是有限元法解双曲型方程困难较多的原因之一。

### 3. 三类方程的影响区和依赖区不一样

双曲型和抛物型方程控制的流场,某一点的影响区是有界的,可以步进求解。如双曲型方程求解时,为了与影响区的特征一致,采用迎风差分格式比较适宜;而椭圆型方程的影响范围遍及全场,必须全场计算,所选用的差分方法也要相应采用中心差分格式。

从上面的叙述可知,应当对控制微分方程进行数学分类,然后根据其不同的属性分别探讨求解的数值方法。

目前的 CFD 理论,一般将流体力学的控制方程通过各种方法转化为双曲型方程,所以下面介绍双曲型方程的基本解法。

## 8.3.2 双曲型方程的求解

现代的 CFD 主要是指针对 Euler 方程和 N-S 方程的各类数值方法。N-S 方程的数值方法一般分为无粘项(Euler 方程)和粘性项,而粘性项的数值方法很简单——采用中心差分方法,所以 N-S 方程的数值方法归根结底依然是 Euler 方程的数值方法。因此,一般的 CFD 理论主要是针对 Euler 方程而展开的。

无粘流动的基本控制方程是 Euler 方程,这是一个非线性耦合方程,可以写成多种形式。已经知道,Euler 方程是由质量守恒、动量守恒和能量守恒推导出的,因此,为了正确描述波的传输、激波和接触间断等不连续特性,一般使用守恒形式的 Euler 方程。

因变量的选择不同,Euler 方程有不同的表达形式。由密度、动量和总能所构成的向量,因为服从方程的守恒形式,称为守恒变量;而能够直接描述和定义流动的密度、速度和压力的向量称为原始变量。

Euler 方程是一种典型的非线性双曲型守恒系统,因此,了解 Euler 方程的基本数学理论,对于认识、构造和掌握 CFD 格式是一件基础和十分重要的事情。

已知,同椭圆型方程和抛物型方程不同,双曲型方程存在特征线,且信息或扰动以特征速度沿特征线传播。这是双曲型方程的主要性质,因此,求解双曲型方程的差分格式应该体现这种特征性质,这类格式就是迎风(upwind,也译为上风)差分格式。目前,迎风差分格式已经成为 CFD 的主要计算方法,得到了很高的评价和广泛的应用,而且仍然在不断发展之中,这里仅简单介绍它的基本原理和构造方法。



## 1. 特征线与迎风(upwind,也译为上风)概念

典型的双曲型方程有一阶形式如一维对流方程,二阶形式如波动方程,等等。这里首先以常系数方程——一维对流方程为例进行分析,方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (a = \text{常数}) \quad (8.29)$$

其初始条件为  $u(x,0) = F(x)$ 。

设  $a > 0$ , 因

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

当  $a = \frac{dx}{dt}$  时,  $\frac{du}{dt} = 0$ , 说明存在一族特征线, 即

$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{或} \quad x - at = \xi \quad (\xi \text{ 为常数})$$

在这些特征线上满足特征关系

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad u(x,t) = \text{常数}$$

以初始条件代入, 可得其解析解

$$u(x,t) = u(\xi,0) = F(\xi) = F(x-at)$$

这说明:  $x-t$  平面上任一点  $(x,t)$  上的  $u(x,t)$  值, 只要过点  $(x,t)$  作特征线  $x-at=\xi$ , 且此特征线与初值线 ( $t=0$ ) 的交点为  $(\xi,0)$ , 则初始函数  $F(x)$  在该交点上的值就是待求点的  $u$  值, 如图 8.7 所示。

特征线的方向代表初始扰动传播的方向, 因为  $a > 0$ , 则式(8.29)表示向右传播的扰动波。若初始扰动  $F(x)$  为一尖峰波形, 则该波形以速度  $a$  向右移动, 在  $t$  时刻移动  $at$  的距离, 而波形不变。称初值线 ( $t=0$ ) 上的点  $(\xi,0)$  为过该点的特征线上  $(x,t)$  解的依赖区, 而直线  $x-at=\xi$  称为初值点  $(\xi,0)$  的影响区。

## 2. 上风格式构造方法的基本原理

特征线体现了微分方程的解, 或者说其扰动、信息的传播方向。它既具有很强的数学意义, 更体现了问题的物理背景, 换句话说, 它表达了波动、流量等的传输方向。因此, 在理论分析和数值方法的设计上, 就应该与之相适应, 而不可反其道而行之。这就是通常所说的数值方法的迎风性(或 upwind 型)设计。例如, 当  $a > 0$  时, 考虑到当前信息来自后方, 应该采用向后空间差分逼近, 此时差分格式就是迎风的或者说上风的, 即

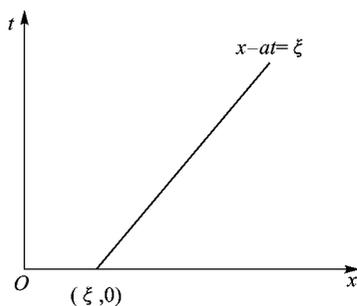


图 8.7 特征线示意图



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

或写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\lambda(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad \left(\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \quad (8.30)$$

这就是最简单的上风格式,理论证明,该格式在  $|a|\lambda \leq 1$  时是稳定的、有效的或数值耗散的;反之,可以证明,采用向前空间差分或空间中心差分都是不稳定的,或者称为数值逆耗散的。

同样,如果  $a < 0$ ,应该采用向前空间差分,则上风格式应为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\lambda(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad \left(\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \quad (8.31)$$

正是基于这种物理背景的考虑,目前很多的数值方法,尤其是一些高分辨率的有限差分方法、有限元方法和有限体积方法,常常把 upwind 型的设计看做是求解双曲型守恒律方程问题的数值方法的重要特征。上风格式在今天众多的 CFD 格式中占有明显优势。

为了将式(8.30)和式(8.31)写为统一的形式,引入记号

$$\left. \begin{aligned} a^+ &= \max(a, 0) = \frac{1}{2}(a + |a|) \geq 0 \\ a^- &= \min(a, 0) = \frac{1}{2}(a - |a|) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

于是,式(8.30)和式(8.31)可以统一写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda[a^+(u_i^n - u_{i-1}^n) + a^-(u_{i+1}^n - u_i^n)] \quad (8.33)$$

或

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}a\lambda(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}|a|\lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (8.34)$$

将式(8.34)写为守恒型格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (8.35)$$

式中的数值通量

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}(au_{i+1}^n + au_i^n) - \frac{1}{2}|a|(u_{i+1}^n - u_i^n) = \\ &= \begin{cases} au_{i+1}^n & (a < 0) \\ au_i^n & (a > 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (8.36)$$

如果将  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  理解为是对  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt$  的逼近,在方程式(8.29)中,  $f(u) = au$ ,则式(8.36)可以写为

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = f^n(u_{i+1}^n, u_i^n) = \begin{cases} f(u_{i+1}^n) & (a < 0) \\ f(u_i^n) & (a > 0) \end{cases} \quad (8.37)$$



也就是说,在计算通量  $f_{i+\frac{1}{2}}^n$  时,所用到的  $u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$  的信息是根据特征速度  $a$  的方向来选取的,这就是上风格式的特点。

由方程式(8.36)还可以得到

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(au_{i+1}^n + au_i^n) - \frac{1}{2}|a|(u_{i+1}^n - u_i^n) = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}|a|(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (8.38)$$

这个数值通量表达式是现代 CFD 先进格式常用的基本公式,在此基础上,可以构造一些高分辨率的先进 CFD 格式,如著名的 Roe 格式。

### 3. 其他著名的格式

#### (1) 蛙步格式(leap frog)

对  $x, t$  都取中心差分,则有

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

这是一个三层二阶显式格式,其稳定条件是  $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 。它在计算第  $n+1$  层的函数值时,需要利用第  $n$  层及第  $n-1$  层的值。这种多层格式对存储要求较高、计算精度较差。

#### (2) Lax 格式

Lax 格式的基本思想是利用特征线和特征线插值,如图 8.8 所示。

在特征线  $PD$  上,  $u_P = u_D$ ,  $u_D$  在  $B$  和  $C$  之间的插值为

$$u_D = u_B + \frac{u_C - u_B}{|BC|} |BD| = u_P$$

将各点  $u_P = u_i^{n+1}$ ,  $u_B = u_{i-1}^n$  等联系起来,上式可写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

这就是 Lax 格式,可以证明它是一阶显式的,其稳定性条件为

$$\left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

#### (3) Lax-Wendroff 格式

该格式采用泰勒级数法推导,即

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i (\Delta t) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots$$

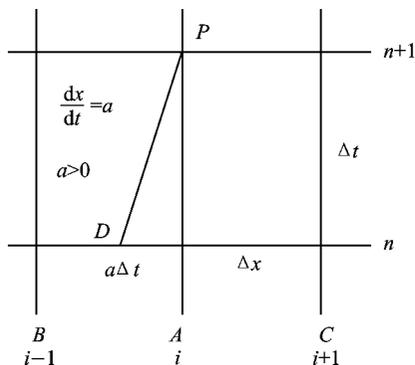


图 8.8 Lax 格式示意图



利用原微分方程求  $\frac{\partial u}{\partial t}$  和  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  的离散式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \approx -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

将上述两式带入原微分方程,有

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

这就是著名的 Lax - Wendroff 格式,简称 L - W 格式,其稳定条件是

$$\left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

## 8.4 目前 CFD 计算方法介绍

计算流体动力学的计算方法包括有限差分、有限元和边界元等多种,由于流动方程的高度非线性,有限差分最为常用。有限差分数值格式按照空间离散流动控制方程所采用的方法,通常可将计算格式分成两大类:迎风格式和中心格式。

### 8.4.1 迎风格式和中心格式的比较

迎风格式是根据特征速度方向来确定差分取向,在物理上符合信息传播规律。由于含有自适应性的格式粘性,因此不必添加人工粘性便可捕捉间断。迎风格式的格式粘性耗散自然而合理,分辨率和精度较高,其显式格式的稳定性较好,隐式格式因系数矩阵对角占优势而有利于求解;然而与中心格式相比,迎风格式存在着构造复杂、单步计算量大以及处理二阶粘性项不便等缺点。

与迎风格式相比,中心格式优点突出,但缺点明显。中心格式的最大缺点是不能保持解的单调特性,且稳定性较差,需要添加人工粘性来阻尼高频误差及抑制激波及驻点附近出现的非物理振荡;而人工粘性包含依赖于流动问题的可调参数,这些都需要依靠经验和数值试验确定,因此人为因素较多。但是,中心格式具有构造简单、易于编程、计算量小、适应性强,以及对连续流动具有高分辨率等优点,计算定常流动时易于结合加速收敛措施,从而构成高效算法。

### 8.4.2 中心格式的发展

20 世纪 60 年代提出的 Lax - Wendroff 格式是一种典型的二阶精度的中心格式。它的出现不但提高了带激波流动的计算精度,而且在当时还掀起了研究高于二阶精度格式的热潮。Lax - Wendroff 格式影响深远,至今仍是构造其他格式的重要参考。MacCormack 于 1969 年



提出了以他自己名字命名的中心格式,该格式成为 20 世纪 70 年代二维定常流动计算的主角之一。

目前实际计算中最具有代表性的中心格式是由 Jameson, Schmidt 和 Turkel 于 1981 年提出的二阶精度的有限体积中心格式,该格式与多步 Runge - Kutta 法相结合后获得了高效可靠的计算性能。然而,Jameson 等最初提出的人工粘性是各向同性的,仅适合于求解无粘流动。Martinelli 对各向同性的人工粘性进行了改进,提出了各向异性的人工粘性,将 Jameson 中心格式应用于粘性流动计算。一般将各向同性人工粘性和各向异性人工粘性统称为标量人工粘性。

20 世纪 90 年代初期, Turkel 等通过类 TVD 变量修正将 Jameson 中心格式从亚声速、跨声速流动计算推广到超声速、高超声速流动计算。中心格式的人工粘性和迎风格式的数值粘性是相通的,两类格式之间可以相互转化;中心格式加上适当的人工粘性后可解释为迎风格式;反之,迎风格式也可写为中心格式加耗散项。两类格式的主要区别在于如何处理耗散。基于上述结论, Swanson 等又提出了矩阵人工粘性,与类 TVD 变量修正相结合后,成功地将 Jameson 中心格式应用于高雷诺数及高马赫数的流动计算,获得了高分辨率特性。

在此基础上,近年来 Jameson 及其合作者们又相继提出了 LED, ELED 和 CUSP 等格式构造的新概念,可以说中心格式在应用与理论方法两个方面仍在继续发展。因此,中心格式在理论研究与实际应用两个方面是不断发展完善的,对其能力不应低估。

### 8.4.3 迎风格式的发展

目前广受欢迎的迎风格式一般可分为两类:① Steger 和 Warming 及 van Leer 等分别提出的矢通量分裂格式(Flux Vector Splitting, FVS);② Roe 和 Osher 等分别提出的通量差分分裂格式(Flux Difference Splitting, FDS)。

Steger 和 Warming 格式是将无粘通量矢量按其特征值的符号进行分裂。van Leer 格式则改进了分裂方式,是按当地的马赫数进行分裂,它的突出优点是通量矢量的一阶导数在声速时是连续的,而 Steger 和 Warming 格式在该处的不连续性则会导致非物理膨胀激波的产生。

多数 FDS 格式推演自 Godunov 开拓性的一阶迎风格式,该格式具有其他一阶格式无可比拟的激波捕获效果。Godunov 格式假设每个单元内物理量常值分布,单元间存在间断,每个间断按当地 Riemann 问题处理。在每一个单元上精确求解 Riemann 问题非常费时,从而引入多种简化形式。Roe 格式就是在构造近似 Riemann 解法基础上得到的。

van Leer 格式与 Roe 格式具有优秀的激波间断分辨率,自诞生以来广泛应用于各种复杂流场的计算,可以说是实际应用中成功的两种迎风格式;但在计算实践过程中仍发现一些不足, van Leer 格式分裂形式简单,计算效率高,但数值耗散比较大,尤其是分辨接触间断时有较为明显的抹平现象,这会导致显著的粘性区计算误差,而且通过简单地加密网格或是使用高阶差分并不能消除这种误差。Roe 格式则存在红玉(covuncle)现象,一些情况下会出现非物理



解,由于它的耗散项与通量 Jacobian 矩阵有关,逻辑构造复杂,计算量大,当推广到真实气体、平衡流和非平衡流时,增加控制方程,耗散项会更为复杂,计算量也将不仅仅是线性地增加。

#### 8.4.4 计算格式的新进展

近些年来,发展了一些介于中心格式和迎风格式之间的新型格式——汲取了中心格式和迎风格式的优点且尽量避开其缺点的混和格式,其代表是 M. S. Liu 于 1993—1995 年构造的 AUSM(Advection Upstream Splitting Method) 格式。AUSM 格式在理论上将流动对流特征中的线性场(与特征速度  $u$  有关)和非线性场(与特征速度  $u \pm a$  有关)相区别,并且压力项与对流通量分别分裂。从格式构造来讲,AUSM 格式是 van Leer 格式的一种发展改进,但从其耗散项来分析,这是一种 FVS 与 FDS 的复合格式。AUSM 格式兼有 Roe 格式的间断高分辨率和 van Leer 格式的计算效率,而且克服了二者的部分缺点。这类方法目前仍然在发展中。

目前计算格式的发展目标是高分辨率(高精度)、高计算效率、高可靠性和高适用范围。

### 8.5 数值计算实例

粘性流体力学的数值计算在流体力学基础研究和流体工程应用等方面都取得了长足的进展,图 8.9~图 8.14 给出一些计算实例,以增强感性认识。



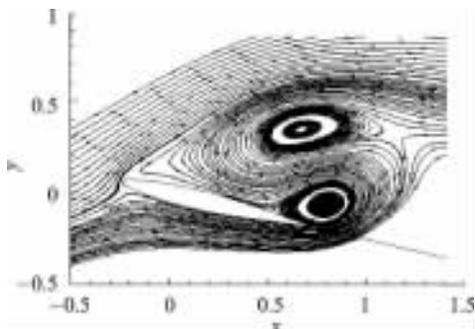
对称面和横截面等处的马赫线

图 8.9 Peshing II 导弹弹头流场计算结果  
( $Ma=5.0, \alpha=10^\circ$ )



流线图

图 8.10 F-18 战斗机流场计算结果  
( $Ma=0.3, \alpha=30^\circ$ )



流线图

图 8.11 翼型俯仰振荡的非定常计算结果 ( $Ma=0.3, \alpha=30^\circ$ )

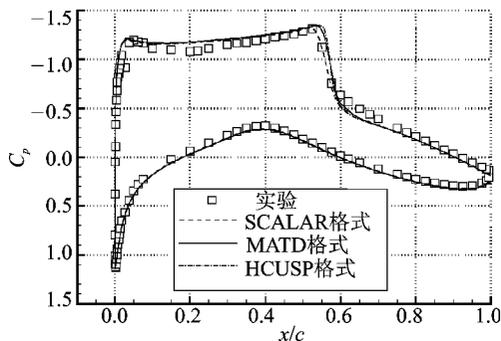


图 8.12 翼型压力分布计算同实验的比较 ( $Ma=0.73, \alpha=2.79^\circ$ )

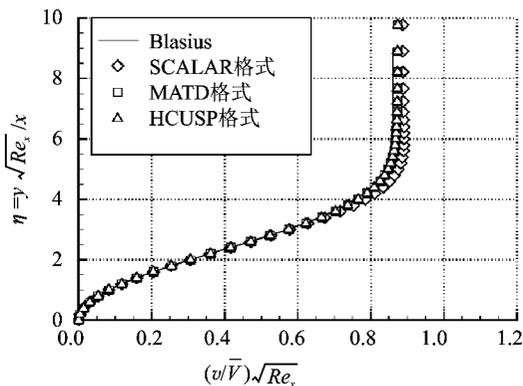
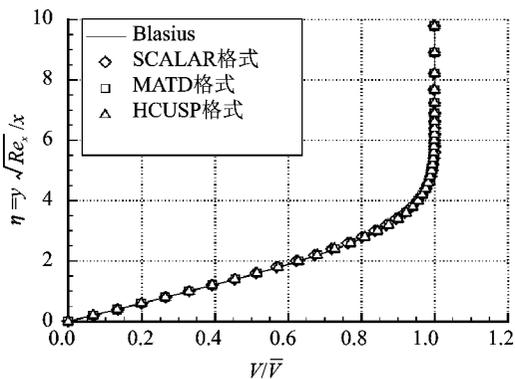
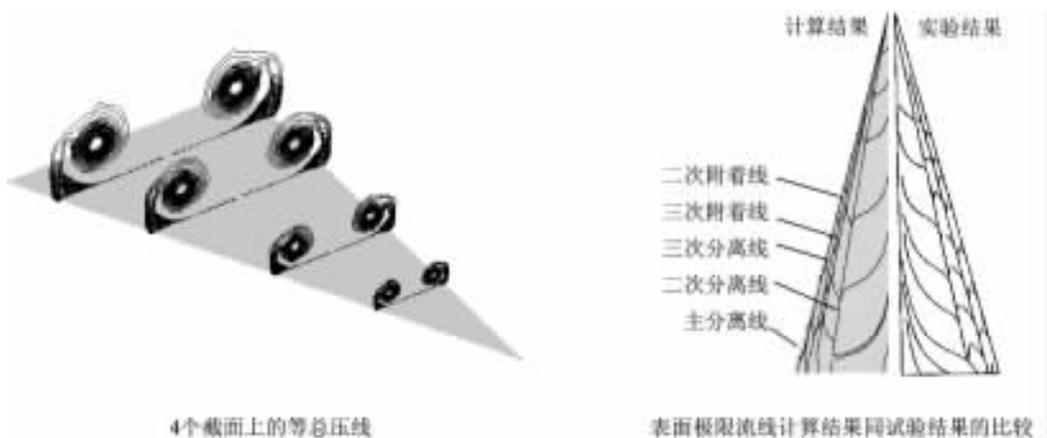


图 8.13 平板边界层速度分布计算结果及其同 Blasius 解的比较 ( $Ma=0.15, \alpha=0^\circ$ )



4个截面上的等总压线

表面极限流线计算结果同试验结果的比较

图 8.14  $76^\circ$ 后掠三角翼分离及涡流计算结果 ( $Ma=0.3, \alpha=20.5^\circ$ )



## 习 题

- 8.1 试用 Taylor 级数推导分析 B 格式的精度。  
 8.2 构造以下齐次波动方程混合问题的差分格式, 并分析其精度。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad (0 \leq x \leq 1, t > 0) \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, 0)} &= \psi(x) \\ u(0, t) &= G_1(t) \\ u(1, t) &= G_2(t) \end{aligned} \right\}$$

其中,  $\phi(0) = G_1(0)$ ,  $\phi(1) = G_2(0)$ 。

- 8.3 假设有一根初始温度为  $0^\circ\text{C}$  的传热细杆, 长度为 1 单位, 其边界两端突然加热至  $100^\circ\text{C}$ , 并随时间保持不变。用  $T(x, t)$  代表细杆  $x$  断面  $t$  时刻的温度。设杆是均质的, 其热扩散率  $a$  是常数。要求:
- (1) 说明该问题是边值问题、初值问题、还是混合问题。
  - (2) 写出其热传导方程、初始条件和边界条件。
  - (3) 构造 FTCS 显格式, 并分析其精度。
- 8.4 根据迎风格式的概念, 构造  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的迎风格式。

## 参考文献

- 1 陆涵江(陆士嘉,张涵信,吴江航). 附面层理论. 北京:北京科学教育编辑室,1962
- 2 Schlichting Hermann. Boundary-Layer Theory. 7th ed, New York; McGraw-Hill Companies Inc, 1979
- 3 White Frank M. Viscous Fluid Flow. 2nd ed, McGraw-Hill International Editions, Mechanical Engineering Series. New York; McGraw-Hill Companies Inc, 1991
- 4 Van Vyke Milton. An Album of Fluid Motion. 7th ed. Stanford, Clifornia; The Parabolic Press, 1998
- 5 John D Anderson Jr. Fundamentals of Aerodynamics. 3rd ed, McGraw-Hill International Editions, Mechanical Engineering Series. New York; McGraw-Hill Companies Inc, 2001
- 6 张兆顺. 湍流. 北京:国防工业出版社, 2002
- 7 是勋刚. 湍流:模式理论. 天津:天津大学出版社, 1993
- 8 Hinze J O. 湍流. 黄永念, 颜大椿译. 北京:科学出版社, 1987
- 9 窦国仁. 紊流力学. 北京:高等教育出版社, 1981
- 10 Borodulin V I, Gaponenko V R, Kachanov Y S, et al. Late-stage transitional boundary-layer structures: Direct numerical simulation and experiment Theoret. Comput Fluid Dynamics, 2002, 15: 317~337
- 11 Brown G L, Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech. , 1974, 64: 775
- 12 Hinze J O. Turbulence. 2nd ed. New York; McGraw-Hill Companies Inc, 1975
- 13 Ho C M, Huang L S. Sub-harmonics and vortex merging in mixing layers. J. Fluid Mech. , 1982, 119: 443~473
- 14 Karniadakis G E, Choi Kwing-So. Mechanisms on transverse motions in turbulent wall flows. Ann. Rev. Fluid Mech. , 2003, 35: 45~62
- 15 Klebanoff P S. NACA TN-2178. 1956
- 16 Klebanoff P S. NACA Report 1247. 1956
- 17 Kim H T, Kline S J, Reynolds W C. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. , 1971, 50: 133
- 18 Kline S J, Reynolds W C, Schraub F A, et al. The structure of turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. , 1967, 37: 741
- 19 Lian Q X, Huang Z. Starting flow and structures of starting vortex behind bluff bodies with sharp edges. Experiments in Fluids, 1989, 8: 93~103
- 20 Lian Q X. A visual study of the coherent structures of the turbulent boundary layer in flow with adverse pressure gradient. J. Fluid Mech. , 1990, 215: 101
- 21 Lian Q X. A kind of fast changing coherent structure in a turbulent boundary layer. ACTA MECHANICA SINICA (English Series), 1999, 15: 193~200
- 22 Praturi A K, Brodkey R S. A stereoscopic visual study of coherent structures in turbulent shear flows. J. Fluid Mech. , 1987, 89: 251
- 23 Robinson S K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. Ann. Rev. Fluid Mech. , 1991, 23: 601



- 24 Smith C R, Metzler S P. The characteristics of low speed-streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 1983, 129: 27
- 25 Smith C R, Walker J D A. *Fluid Vortices*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995. 235~290
- 26 Theodorsen T. Mechanism of Turbulence. Proc. 2nd Midwestern Conf. on Fluid Mech., Ohio State Univ. Columbus, Ohio, 1952
- 27 姜楠, 王振东, 舒玮. 子波分析辨识壁湍流猝发事件的能量最大准则. *力学学报*, 1997, 29: 406~412
- 28 周雪漪. *计算水力学*. 北京: 清华大学出版社, 1995
- 29 陈作斌主编. *计算流体力学及应用*. 北京: 国防工业出版社, 2003
- 30 朱自强, 吴子牛, 李津, 等. *应用计算流体力学*. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998
- 31 王承尧. *计算流体力学及其并行算法*. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000
- 32 刘儒勋, 王志峰. *数值模拟方法和运动界面追踪*. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001
- 33 John D Anderson Jr. *Computational Fluid Dynamics—The Basics with Applications*. New York: McGraw-Hill Companies Inc, 1995
- 34 Liou Meng-Sing. Ten Years in the Making—AUSM Family. AIAA paper 2001 - 2521, 2001
- 35 阎超, 黄贤禄, 李亭鹤, 等. 涡流数值模拟中的计算格式粘性分辨率探讨. *计算物理*, 2001, 18(4): 308~312
- 36 阎超, 李亭鹤, 黄贤禄. 三角翼上分离及涡流的数值模拟. *力学进展*, 2001, 31(2): 227~244