

上海交通大学学术文库
上海科技专著基金资助图书

动力系统的混沌化

——理论、方法与应用

陈关荣 汪小帆 著

上海交通大学出版社

内 容 简 介

动力系统的混沌化是一个全新的控制论问题,它在数学理论上和工程技术上都极富挑战性。它不但有助于我们加深对混沌理论的认识,而且在高新技术的应用上具有十分广阔和诱人的前景。本书系统地总结了作者近 10 年来在混沌化方面所做的工作,介绍其中的主导分析思想和主要理论成果,以及基本技术和有效方法。

本书适合理工科大学研究生、博士后和教师阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

前言

“混沌”(chaos)是一个颇为古老的名字,大家对它并不感到陌生。然而,混沌作为一个科学或者数学的概念,对许多人来说还是比较新鲜的。从数学和现代科学技术的含义来说,混沌和非线性总是连在一起的。自然界的万事万物在本质上是是非线性的。例如,没有人见过自然界中有形状完全笔直而又不是人造的东西。在世界上,非线性无处不在,因而混沌也可以说是无处不在的。

从字面上看,混沌是一种缥缈不定、紊乱无序的东西,似乎不会有什么值得研究、特别是有什么可以应用的价值。这种感觉对一般人来说,或许不无道理。可是,对于一个科学工作者来说,许多表面上看来非常简单的事情往往都很不简单,许多直观上看来完全无用的概念常常都很有用处。从这种哲理看,数学家会想起“虚数”、“模糊数”和“无理数”等名词,物理学家则会想起“负能量”和“反物质”等术语。自从洛伦兹(E. N. Lorenz)于上世纪 60 年代中期在数值实验中意外地发现了奇怪吸引子,以及李天岩(T. Y. Li)和约克(J. A. Yorke)于 70 年代末在数学分析中正式引入“混沌”(chaos)这一术语以来,混沌这个名字在学术界中已逐渐家喻户晓。正如过去的“无理数”其实并不无理一样,今天的“混沌”实在并不混沌,它已经得到了数学家、科学家、工程技术人员和社会及文史研究人员的认可和青睐。

然而,至今科学家们对混沌这一概念尚未有统一的理解,因而几乎所有关于混沌的书都没有可能甚至没有打算为读者写下一个简单明确而又完整严格的混沌定义——特别是连续系统的情形。离散系统相对比较简单,有 Devaney 和 Li-Yorke 的两个定义,其涵义本书会详细介绍。这件事情本身也说明了混沌是十分奇妙的。混沌那神秘的足迹和漂亮的面纱已经吸引了成千上万科学工作者近 40 年的刻意研究和热忱追求,然而,至今仍未为它写下一个最后定论——至少不是一两页文字就能把它深奥的本质和复杂的特征刻画清楚。当然,对于从事非线性科学、特别是非线性动力系统研究的科学工作者来说,混沌的基本概念还是相当明确的。这是近 40 年来学术界好几代人共同努力的结果。

过去的 40 年是人们对混沌逐步认识和深化了解的过程。其中,在前面 20 多年步履艰难的探索过程中,混沌能否被控制,特别是能否被利用以促进生产力的发展和改善人类的生活,是一个几乎未曾被考虑过的问题。在这一漫长的过程中,不能说从来没有过这种思想的闪烁,但是,可以说一直没有过系统成形的科学设想和提案——直到 20 世纪 80 年代末 90 年代初为止。

在科学研究中,当条件和时机趋于成熟时,新思想的产生是有必然性的,而且随时随地都可能发生。在 1987 年至 1990 年期间,相信看上去放荡不羁的混沌是可以被人驾驭的,从而可以有目的地控制它,这种信念先后在好几个不同的科学家小组(包括本书的第一作者在内)产生了。初期的想法是利用或改造一些工程上卓有成效的常规自动控制手法,以达到把复杂的混沌状态引导到稳定的平衡状态中去的目的。这一方向的研究通常称为混沌控制,或控制混沌。显然,这种尝试所基于的信念是:混沌是有害的因而需要通过控制手段把它弱化或者消除。因为混沌一旦被控制到稳定平衡状态上,它就消失了。由于在上世纪 70~80 年代期间人们对混沌本身的认识还远未清晰,其神秘的色彩使不少人相信“混沌是既不可以控制又不可以预测”的。因此,在大多数人试图通过控制方式去驾驭混沌的初期,常规的自动控制手法经常被使用到。其中一种企图就是消除“混沌不可控”的误解。人们很快就发现,如果对控制手段不加特别约束的话,比如说,不要求微小控制增益或者简化控制手段的话,那么,控制混沌的事情并不比稳定化一个一般的非线性动力系统困难多少。混沌确实是能控的。

到了 20 世纪 90 年代中期,另一种新颖的思想又滋长起来了:难道混沌控制的目的只是为了简单地把它消除掉吗?难道混沌这东西总是有害无益因而不值得保留、更没有理由把它人为地产生出来或者加以强化吗?答案是否定的。其实混沌在许多场合是很有用、甚至是必不可少的。例如,两种不同性质的流体或溶剂,如果它们是处于混沌状态的话,它们可以很容易地被充分地混合起来,而不需要长时间和大功率的机械搅拌。又如,混沌映射为多媒体信息加密和隐藏提供了一种快速有效而且简单经济的新途径。利用混沌性态为生物系统,如为大脑思维、学习、记忆、推理以及心脏病治疗等方面的研究开辟新途径的可行性,更是为医学及生物工程研究人员所关注。在这些情形下,混沌当然就不应该被削弱或消除,反而应该被强化,甚至被从无到有地产生出来。通过控制手段而有目的地强化或者产生混沌,这是混沌的反向控制,简称为混沌反控制。显然,称之为“混沌化”一个本来并非混沌的系统也是十分恰当的。

混沌化即混沌反控制是一个全新的控制问题,它在数学理论上和工程技术上都极富挑战性。它不但有助于我们加深对混沌理论的认识,而且在高新技术的应用中具有十分广阔和诱人的前景。本书的两位作者不但最早参加了奠定和开辟对非混沌系统实现混沌化的工程反馈控制技术的开创性工作,而且首先给出了并持续地发展着反馈混沌化的严格数学理论。撰写这本书的主要动机,是希望把作者过去近 10 年来在混沌化方面的工作做一个系统总结,将其中的主导分析思想和主要理论成果,以及基本技术和有效方法介绍给国内的广大读者、特别是青年学生和青年科学研究人员,以达到抛砖引玉、承前启后的目的。系统混沌化是一个极有吸

引力而又极富挑战性的现代动力系统和现代控制理论的新方向,需要更多的科研工作人员参加研究,共同努力,才能获得长足的进步。

本书两位作者在过去近 10 年间在系统混沌化的科研工作中,得到了不少国内外同行的协助和支持。其中特别要提到的是:赖德健教授参加了最早期离散系统反馈混沌化的开创性工作;陈巩教授提供了最早期连续偏微分系统反馈混沌化的开创性工作;史玉明教授开始了最早期无限维系统的混沌判定和反馈混沌化的开创性工作;上田哲史(Tetsushi Ueta)教授协助用计算机仿真,验证了由本书作者陈关荣第一次用反控制方法找到的新的混沌吸引子——陈氏吸引子。此外,作者衷心感谢丁明州、方锦清、关治洪、李常品、李翔、李忠、林伟、刘文波、刘曾荣、吕金虎、茅耀斌、文剑锋、邓杰生、王华、杨凌、余星火、张怀宙、赵怡、郑永爱、钟国群、周天寿,以及 Leon O. Chua, Marius-F. Danca, Edgar N. Sanchez, Ira Schwarz, Konstantin Starkov 等教授和博士,他们对本书的写作给予了热情的关注和协助,并以不同的形式和在不同程度上对本书的形成和出版作出了贡献。

两位作者十分感谢他们的家人对他们长期连续和忙碌的科研工作的充分理解和大力支持。

作者陈关荣感谢香港研究资助局[RGC CERG Grants CityU1018/01E,1004/02E, 1115/03E]的资助。作者汪小帆感谢国家杰出青年科学基金[No. 60225013]、国家自然科学基金[No. 60174005 和 70271072]、教育部优秀青年教师资助计划、教育部高等学校博士点基金和教育部留学回国人员科研启动基金等的资助。作者还要感谢上海交通大学出版社韩正之总编审读了本书和对本书出版的大力支持,感谢上海交通大学学术出版基金的资助,并感谢 IEEE、Springer-Verlag 和 World Scientific 等出版社允许书中使用作者在他们那里发表的少量图稿。

最后,作为从事复杂系统反馈控制的研究人员,作者深知反馈对改进系统性能的重要性。因此,热忱欢迎读者把对本书的任何意见及时反馈给我们。

陈关荣,香港城市大学混沌控制与同步学术研究中心

汪小帆,上海交通大学复杂网络与控制研究室

2004 年 初夏

目 录

第 1 章 引论	1
1.1 混沌:控制与反控制	1
1.2 混沌的刻画	4
第 2 章 离散时间系统反馈混沌化:Chen-Lai 算法	6
2.1 问题的描述	6
2.2 Chen-Lai 算法	7
2.3 混沌验证:正的 Lyapunov 指数	8
2.4 一个例子	10
2.5 混沌验证:Devaney 混沌	11
2.5.1 一维线性控制系统情形	11
2.5.2 n 维线性定常系统情形	13
2.6 混沌验证:Li-Yorke 混沌	14
2.6.1 n 维线性定常系统情形	14
2.6.2 一维非线性定常系统情形	15
2.6.3 n 维非线性定常系统情形	16
2.7 Lyapunov 指数的配置	18
2.8 Chen-Lai 算法的推广	21
2.8.1 用锯齿函数取代模函数	21
2.8.2 Lai-Chen 算法	23
第 3 章 离散时间系统反馈混沌化:Wang-Chen 算法	24
3.1 问题的描述	24
3.2 控制器设计	24
3.3 一个例子	28
3.4 Li-Yorke 混沌的验证	31
3.4.1 一维非线性系统情形	31
3.4.2 n 维线性系统情形	33

3.5	输出反馈混沌化·····	40
3.6	一维映射的光滑反馈混沌化·····	45
第4章	离散时间反馈混沌化的应用 ·····	50
4.1	离散时间神经网络的反馈混沌化设计·····	50
4.2	SISO 非线性 Elman 网络的混沌化设计 ·····	53
4.2.1	混沌 Elman 网络 ·····	53
4.2.2	不动点稳定判据与混沌生成准则·····	55
4.2.3	仿真研究·····	61
4.3	MIMO 线性 Elman 网络的混沌化设计 ·····	63
4.3.1	MIMO 自治线性 Elman 网络 ·····	63
4.3.2	混沌化线性 Elman 网络 ·····	64
4.4	耦合映射格子的时空混沌化·····	68
4.5	离散时间 TS 模糊系统的反馈混沌化 ·····	71
4.6	非线性系统的全局稳定化·····	73
4.7	病态心律的分岔控制·····	78
第5章	基于混沌分组密码的图像加密 ·····	80
5.1	引言·····	80
5.2	混沌映射与密码学的联系·····	80
5.2.1	从分组密码的定义比较密码变换与混沌映射的关系·····	81
5.2.2	从分组密码的设计原理比较密码变换与混沌映射的关系·····	83
5.2.3	从分组密码的整体结构比较密码变换与混沌映射的关系·····	85
5.3	混沌分组密码的构造方法·····	85
5.3.1	混沌映射数字化带来的性能下降·····	86
5.3.2	混沌映射的选择·····	88
5.3.3	基于混沌映射的分组密码的一般设计方法·····	89
5.4	基于二维可逆映射的混沌图像分组加密方案·····	89
5.4.1	已有图像加密算法回顾·····	90
5.4.2	一类基于二维可逆混沌映射的图像分组加密方案·····	91
5.5	基于三维可逆混沌映射的图像分组加密方案 ·····	101
5.5.1	二维 Baker 映射的三维扩展 ·····	101
5.5.2	基于三维 Baker 映射的图像加密方案 ·····	103
5.5.3	安全性分析与测试结果 ·····	105

第 6 章 连续时间系统时延反馈混沌化	111
6.1 问题的描述	111
6.2 线性控制系统的时延反馈混沌化	111
6.3 非线性微分方程的时延反馈混沌化	117
6.3.1 近似线性化方法	118
6.3.2 精确线性化方法	118
6.4 仿射非线性系统的时延反馈混沌化	119
6.5 最小相位系统的时延反馈混沌化	124
6.6 Chua 电路的时延反馈混沌化	129
6.7 时延反馈混沌化的数学严格表示	136
第 7 章 高维连续时间系统状态反馈混沌化	137
7.1 引言	137
7.2 混沌系统标准型	137
7.3 线性可控系统的混沌化	141
7.4 可反馈线性化系统的混沌化	143
7.5 不可反馈线性化系统的混沌化	146
第 8 章 连续时间系统混沌化的切换控制方法	150
8.1 切换分段线性控制方法	150
8.2 用切换控制产生多个混沌吸引子	157
8.3 用切换控制产生具有多重融合吸引域的混沌吸引子	162
8.4 切换控制系统的动力学行为	164
8.5 切换控制系统的定性分析	167
第 9 章 抽象空间和无穷维系统的混沌化	169
9.1 引言	169
9.2 抽象空间中的混沌	169
9.3 连续映射生成离散动力系统的混沌化	174
9.4 非线性偏微分系统的混沌及其生成	177
参考文献	185

第1章

引 论

1.1 混沌 控制与反控制

由于混沌系统对初始条件的极端敏感性,在相当长一段时间内,混沌曾经被认为是既不可预测也无法控制、因而是一种有害的运动形式。20 世纪 90 年代以来,人们在混沌控制与反控制领域的大量研究表明,混沌不仅是(长期)可控制的和(短期)可预测的,而且可以在许多领域中得到有益的应用。

混沌控制是指用控制的方法消除或者削弱系统的混沌行为。确实,在许多实际问题中,混沌是一种有害的运动形式。例如,等离子体混沌会导致等离子体失控;半导体激光阵列中混沌运动会减弱输出光的相干性,从而大大减弱输出强度,等等。自从 1990 年美国马里兰大学的三位数学和物理学家提出了通过对系统参数的微小扰动以控制(消除或抑制)混沌的 OGY 方法以来[Ott, Grebogi & Yorke, 1990],人们在控制混沌方面作了大量的研究工作[Chen & Dong, 1998; Chen, 1999; Chen & Yu, 2003],国内也相继出版了一些有关书籍[胡岗等,2000;王光瑞等,2001;方锦清,2002;陈关荣、吕金虎,2003;张化光等,2003]。

但是,混沌行为并不总是有害的。近年来的研究表明,混沌在许多场合具有良好的应用前景。一些典型的例子包括:

1. 多媒体信息安全与保密

近年来,随着 Internet 的发展,网络信息安全与保密问题显得愈发重要和突出,它直接威胁到国防及许多重要的经济领域,已引起各国政府的高度重视。传统的加密方法并不能完全有效地用于数据量大的实时传输多媒体信息的加密。多媒体信息的隐藏和加密成为一个重要的挑战性课题。近几年来,混沌同步及其在保密通信中的应用已成为一个引起广泛兴趣的研究课题。在数据保密通信中,通常需要将原始数据与某种伪随机数据相调制。因而采用什么样的伪随机数据是十分

关键的。混沌信号由于具有快速衰减的关联函数和宽带功率谱,无疑是这种伪随机数据的极佳候选者。基于混沌理论的数据保密通信在抗干扰性、截获率、信号隐蔽和保密性等方面都具有潜在的优势,但目前这方面的研究尚不能有效地用于多媒体信息的加密。事实上,混沌系统与加密系统之间有着密切的联系,只是这种联系尚未得到充分的认识和实际应用;

2. 柔性系统设计

混沌吸引子中蕴含稠密的不稳定周期轨道(极限环),对于须在多种工作状态间灵活切换的柔性系统(如柔性智能信息处理系统和柔性制造系统),可以用混沌吸引子中的一个极限环对应于一种期望的状态。其好处是,根据混沌控制原理,可利用微小的控制扰动,使得系统在不同极限环之间灵活切换,从而使系统具有满意的灵活性;

3. 流体及超细粉末混合

从动力学的观点来看,流体混合需要物质线和面的充分拉伸和折叠,因而在两种液体需要充分混合而所需的能量要尽可能小的情况下,混沌是很有用的。如果两种液体的微粒运动的动态足够混沌,就很容易实现充分混合。这种流体混合称为“混沌对流”,它可用于加热,比如将热波注入核聚变反应器来充分加热等离子体。同样的原理亦有可能用于超细粉末均匀混合;

4. 在控制系统中的应用

近期的研究表明,反馈混沌化理论可用于具有输入约束的非线性系统的全局稳定化,即先用反馈混沌化方法使受控系统产生混沌行为,当系统状态因混沌的遍历特性而接近期望状态时,再用局部稳定化方法使系统稳定在该期望状态上。

近代科学技术中的一些令人惊讶的发现表明:混沌在许多情况下是有益的,甚至是非常有用的。加利福尼亚州立大学 Berkeley 分校从事了多年大脑神经科学研究(特别是大脑神经活动的混沌现象)的 Freeman 教授指出[Freeman, 1995]:“大脑中被控制的混沌现象其实不仅仅是大脑复杂性的一种副产品”,控制混沌现象的这种能力“可能是大脑区别于任何一种人工智能机器的主要特性”。在医学方面,人们已经开始尝试控制心脏跳动韵律:从混沌状态到规则的周期脉动,甚至控制人类大脑活动的行为。此外,控制混沌的技术还被应用到神经网络、激光、化学反应过程、流体力学、非线性机械系统和非线性电路,以及具有分布参数的物理系统的研究工作中去[陈关荣, 1997]。

1994 年,美国科学家 Schiff 等人在 *Nature* 上发表文章认为,混沌有可能在大

脑活动中起重要作用,并提出了“混沌反控制(anticontrol of chaos)”的概念[Schiff *et al.*, 1994]。稍后,Vanecek 和 Celikovsky[1996]初步探讨了“混沌的综合(synthesis of chaos)”的概念和方法。一些学者还研究了当参数变化时使一个混沌系统保持混沌行为的扰动方法[Yang & Ding, 1995; In, Spano & Ding, 1998; Chacon, 2001]。

美国工业和应用数学协会(SIAM)在 1988 年发表的一份题为《控制理论未来的发展方向》的指导性文献中,特别提出了“混沌的控制”作为一个新的研究方向[SIAM, 1988]。文献中指出:“一个生气勃勃的研究分支最近在非线性和动力系统领域中发展起来了,它正开始在控制理论科学中形成巨大的影响。……在其中,两个特别引人注意的方向是:在分支点邻域中的控制,它提供了使用微小控制量而获得巨大效果的唯一可能性,以及把动力系统诱导到混沌状态中去,其目的是用复合起来的、不相协调然而又对系统危害较小的振荡频率去取代令人讨厌的噪声(例如在某些机械系统的处理上)。”文献接着指出:“混沌动力系统已被证明在描述和量化大批的复杂现象中非常有用,其中包括化学反应和电路的动力形态等。有时人们需要控制和强化混沌现象而不是试图去消除它。……因而,①不同的控制思想(如反馈控制)应该被使用到混沌系统中,从而动力系统的某些特征(如功率谱、Lyapunov 指数等)可能会获得控制;②控制科学中的一般理论应当像确定性和随机性系统那样发展到混沌系统中去。”

1996 年,陈关荣和赖德健率先研究了用反馈控制产生离散混沌的方法,并对该方法作了严格的理论分析[Chen & Lai, 1996, 1997, 1998; Lai & Chen, 2000, 2003, 2004]。其后,本书作者明确提出了反馈混沌化(chaotification)的概念,并研究了用小幅值反馈控制实现离散时间系统混沌化的理论、方法及其潜在的应用前景[Wang & Chen, 1999, 2000a, 2000b, 2000c, 2000d, 2001; Wang, Chen & Man, 2000, 2001a]。接着,作者又研究了连续时间系统的反馈混沌化方法[Wang & Chen, 2003; Wang, Chen & Man, 2001b; Wang, Chen & Yu, 2000; Wang *et al.*, 2001]。与此同时,陈关荣还与其他学者合作对反馈混沌化作了广泛的研究[Chen & Yang, 2003; Chen, Yang & Liu 2002; Li, Chen, Yuan & Chen, 2001; Li, Chen, Chen & Yuan, 2002; Lü, Yu & Chen, 2003; Lü, Zhou, Chen & Yang, 2002; Yang, Liu & Chen, 2002; Zheng, Chen & Liu, 2003]。作者还分别就离散时间和连续时间系统反馈混沌化的进展作了综述[Chen, 2003; Wang, 2003]。

本书将系统性地介绍反馈混沌化的理论、方法与应用,其中,着重介绍作者在这一研究领域所做的工作。

1.2 混沌的刻画

刻画混沌的一个最重要的物理特征量是 Lyapunov 指数,它是用来刻画系统行为对初始条件敏感性的一个指标。一个 n 维系统具有 n 个 Lyapunov 指数。如果系统的最大 Lyapunov 指数为正,那么系统行为就具有对初始条件的极端敏感性。如果系统的解又是有界的,那么,一般来说该系统就是混沌的。如果系统具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数,那么就称该系统是超混沌的。

关于混沌的最早的数学定义是由李天岩和 James A. Yorke 于 1975 年在一篇题为《周期三意味着混沌》的论文中提出的[Li & Yorke, 1975]。

定义 1.1(Li-Yorke 混沌) 闭区间 $I \subseteq \mathcal{R}$ 上的连续映射 F 称为是混沌的,如果它满足如下条件:

(1) 对于任意自然数 k , 映射 F 具有周期为 k 的周期点。

(2) 存在一个不包含映射 F 的周期点的不可数集合 $S \subset I$, 满足对任意的 $p, q \in S, p \neq q$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| > 0, \liminf_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0。$$

(3) 对于任意 $p \in S$ 和任意周期点 $q \in I$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F^n(p) - F^n(q)| = 0。$$

注 1.1 这里采用

$$F^0(x) = x, \quad F^{n+1}(x) = F(F^n(x)), \quad n = 0, 1, \dots。$$

如果存在 $p \in I$, 使得

$$F^n(p) = p, \quad F^k(p) \neq p, \quad 1 \leq k < n,$$

那么称 p 为映射 F 的 n 周期点。特别地, 当 $n=1$ 时, 称 p 为映射 F 的不动点。

1978 年, Marotto 把 Li-Yorke 混沌的概念推广到了 m 维连续可微映射的情形, 使得判断高维映射的混沌行为的存在性成为可能[Marotto, 1978]。以下记 $B_r(x^*)$ 为以点 x^* 为中心、半径为 r 的闭球。

定义 1.2(回归排斥子) 如果 $\mathcal{R}^m$ 中的可微映射 F 的不动点 x^* 满足以下条件:

(1) 存在实数 $r > 0$, 使得 $B_r(x^*)$ 中的任意一点 x 的 Jacobi 矩阵 $DF(x)$ 的所有特征值的模(绝对值)大于 1。

(2) 存在 $B_r(x^*)$ 中的一个点 $x_0 \neq x^*$ 和自然数 $N > 1$, 使得 $F^N(x_0) = x^*$, 并且点 x_0 是非退化的, 即

$$\det\{DF^N(x_0)\} \neq 0。$$

则称不动点 x^* 是映射 F 的一个回归排斥子(snap-back-repeller)。

定理 1.1(Marotto 定理) 如果 $\mathcal{R}^n$ 中的可微映射 F 具有一个回归排斥子,那么,映射 F 具有 Li-Yorke 意义下的混沌行为,即有如下性质成立:

(1) 存在自然数 $N>1$,对于任意自然数 $p \leq N$,映射 F 具有周期为 p 的周期点。

(2) 存在一个不包含映射 F 周期点的不可数集合 S 满足:

(a) $F(S) \subset S$;

(b) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0, \forall x \neq y \in S$;

(c) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| > 0, \forall x \in S, y$ 是 F 的周期点。

(3) 存在 S 的子集 S^0 ,对于任意 $x, y \in S^0$,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^k(y)\| = 0.$$

近 30 年来,Marotto 定理被许多学者用来分析具体的高维系统的复杂动力学行为。人们也对 Marotto 定理的证明中存在的错误作了改正[Li & Chen, 2003; Shi & Chen, 2004],详见第 9 章。

关于混沌的另一个常用定义是从拓扑学角度给出的[Devaney, 1987]。

定义 1.3(Devaney 混沌) 称一有界闭域 χ 上的映射 $F: \chi \rightarrow \chi$ 是混沌的,如果它满足下述条件:

(1) 它是对初值敏感的,即存在 $\delta > 0$,使得对于任何 $x \in \chi$ 与 x 的任何一个邻域 B ,存在 $y \in B$ 和自然数 k ,满足

$$\|F^k(x) - F^k(y)\| > \delta;$$

(2) 它是拓扑传递的,即对任何两个开集 $U, V \subset \chi$,存在自然数 k ,使得 $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$;

(3) 它在 χ 中有稠密的周期轨道。

数学家还研究了 Devaney 混沌三条性质之间的内在联系,证明了条件(1)和(2)一起可以推出条件(3)[Banks *et al.*, 1992]。此外,在特定条件下可以验证 Devaney 意义下的混沌定义强于 Li-Yorke 意义下的混沌定义[Huang & Ye, 2002]。

第2章

离散时间系统反馈混沌化:Chen-Lai 算法

2.1 问题的描述

考虑 n 维非线性离散时间动力系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k, \quad (2.1)$$

式中 $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^n$ 为系统的状态, $\mathbf{f}_k$ 为 n 维连续可微映射。考虑如下的控制问题:设计控制器 $\mathbf{u}_k$ 使得受控系统混沌的,即受控系统为全局有界且具有正的 Lyapunov 指数,并且满足常用的混沌的数学判据(例如,上一章中讨论的 Li-Yorke 定义或 Devaney 定义)。

考虑简单的线性状态反馈

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k, \quad (2.2)$$

其中, $\mathbf{B}_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 为待定矩阵,则受控系统为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k. \quad (2.3)$$

受控系统(2.3)的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_j(\mathbf{z}) = \mathbf{f}_j'(\mathbf{z}) + \mathbf{B}_j. \quad (2.4)$$

记

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_j(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_j) = \mathbf{J}_j(\mathbf{x}_j) \mathbf{J}_{j-1}(\mathbf{x}_{j-1}) \cdots \mathbf{J}_1(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}_0(\mathbf{x}_0). \quad (2.5)$$

再记

$$\mu_i^j = \mu_i(\mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j)$$

为第 j 个乘积矩阵 $\mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j$ 的第 i 个特征值。根据定义,受控系统(2.3)的第 i 个 Lyapunov 指数为 [Oseledec, 1968; Holzfuss & Parlitz, 1991]

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i[\mathbf{T}_j^T \mathbf{T}_j]|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

现要求设计反馈增益矩阵 $\{\mathbf{B}_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得受控系统的 Lyapunov 指数均为正,即

$$0 < c \leq \lambda_i(\mathbf{x}_0) < \infty, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

其中 c 为预先给定常数。当然,事实上只要其中一个 Lyapunov 指数为正就足够了。

考虑到具体实现,还要求控制增益矩阵一致有界,即,

$$\sup_{0 \leq k < \infty} \|B_k\| \leq M < \infty, \quad (2.8)$$

其中, M 为一常数, $\|\cdot\|$ 为谱范数,即矩阵的最大奇异值。将证明(2.8)式是可以满足的,只要 $\{f'_k(x_k)\}$ 一致有界,即存在常数 N ,使得

$$\sup_{0 \leq k < \infty} \|f'_k(x_k)\| \leq N < \infty. \quad (2.9)$$

2.2 Chen-Lai 算法

下面的算法由陈关荣和赖德健于 1996 年提出[Chen & Lai, 1996, 1997, 1998]。

给定初始状态 x_0 , 对于控制系统

$$x_1 = f_0(x_0) + B_0 x_0, \quad (2.10)$$

计算其 Jacobi 矩阵

$$J_0(x_0) = f'_0(x_0) + B_0, \quad (2.11)$$

并记 $T_0 = J_0(x_0)$ 。取 $B_0 = \sigma_0 I$ 并选取常数 $\sigma_0 > 0$ 使得矩阵 $[T_0 T_0^T]$ 有限且对角占优。

对 $k=0, 1, 2, \dots$, 考虑控制系统

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + B_k x_k, \quad (2.12)$$

式中 $B_k = \sigma_k I$ 已由前一步求得。

现作如下计算:

步骤 1 计算 Jacobi 矩阵

$$J_k(x_k) = f'_k(x_k) + \sigma_k I, \quad (2.13)$$

记 $T_k = J_k T_{k-1}$ 。

步骤 2 选取常数 $\sigma_k > 0$, 使得矩阵

$$[T_k T_k^T] - e^{2kc} I$$

有限且对角占优, 其中常数 $c > 0$ 满足(2.7)式。(下面将证明这一要求是可以满足的。)

步骤 3 对控制系统采用如下的模运算:

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + B_k x_k \pmod{1}. \quad (2.14)$$

上述算法的前两个步骤使受控系统的 Lyapunov 指数严格为正, 从而系统轨道在所有方向上扩张。满足步骤 1 和 2 的一个简单的控制器是

$$u_k = B_k x_k = \sigma_k x_k, \quad \sigma_k = N + e^c. \quad (2.15)$$

第三步的模运算使整个轨道全局有界。下面将验证这两种效果的混合,使得系统轨道在有界区域内产生混沌行为。

2.3 混沌验证 正的 Lyapunov 指数

首先验证如下两个关系式[Chen & Lai, 1996]:

- (1) $[T_{k-1} T_{k-1}^T]^{-1} > 0$;
- (2) $[J_k^T J_k] - e^{2kc} [T_{k-1} T_{k-1}^T] \geq 0$ 。

事实上,只需验证以上两式在 $k=0$ 和 1 时成立,再由数学归纳法可推得结论。
在 $k=0$ 时,控制系统为

$$x_1 = f_0(x_0) + B_0 x_0。$$

设计控制增益矩阵 $B_0 = \sigma_0 I$, 其中,正常数 σ_0 满足如下正定性要求:

$$\begin{aligned} T_0 T_0^T &= J_0 J_0^T \\ &= [f_0'(x_0) + \sigma_0 I_n][f_0'(x_0) + \sigma_0 I_n]^T \\ &= [f_0'(x_0)][f_0'(x_0)]^T + \sigma_0([f_0'(x_0)] + [f_0'(x_0)]^T) + \sigma_0^2 I_n \\ &> 0。 \end{aligned}$$

如果选取常数 $\sigma_0 > 0$, 使得矩阵 $[T_0 T_0^T]$ 有限且对角占优, 那么, 上述正定性要求即可满足。从而

$$[T_0 T_0^T] > 0, \quad [T_0 T_0^T]^{-1} > 0。$$

在 $k=1$ 时, 控制系统为

$$x_2 = f_1(x_1) + B_1 x_1。$$

设计控制增益矩阵 $B_1 = \sigma_1 I$, 其中常数 $\sigma_1 > 0$ 满足如下非负定要求:

$$\begin{aligned} J_1^T J_1 - e^{2c} [T_0 T_0^T]^{-1} &= [f_1'(x_1) + \sigma_1 I]^T [f_1'(x_1) + \sigma_1 I] - e^{2c} [T_0 T_0^T]^{-1} \\ &= [f_1'(x_1)]^T [f_1'(x_1)] + \sigma_1([f_1'(x_1)]^T + [f_1'(x_1)]) \\ &\quad + \sigma_1^2 I - e^{2c} [T_0 T_0^T]^{-1} \\ &\geq 0。 \end{aligned}$$

只要选取常数 $\sigma_1 > 0$, 使得矩阵

$$[T_1 T_1^T] - e^{2c} I$$

有限且对角占优, 那么, 上述非负定要求即可满足。从而有

$$J_1^T J_1 \geq e^{2c} [T_0 T_0^T]^{-1} > 0,$$

即有

$$[T_1 T_1^T]^{-1} > 0。$$

在第 k 步,只要选取 $\sigma_k > 0$,使得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k - e^{2c} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} &= [\mathbf{f}_k'(\mathbf{x}_k)]^T [\mathbf{f}_k'(\mathbf{x}_k)] + \sigma_k ([\mathbf{f}_k'(\mathbf{x}_k)]^T \\ &\quad + [\mathbf{f}_k'(\mathbf{x}_k)]) + \sigma_k^2 \mathbf{I} - e^{2kc} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

从而可得,对 $k \geq 1$ 有

$$\textcircled{1} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} > 0;$$

$$\textcircled{2} [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k] - e^{2kc} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} \geq 0;$$

并进而有

$$\textcircled{3} [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k] > 0.$$

下面引理给出线性代数中的一个结果[Rao, 1973]。

引理 2.1 假设对称矩阵 A 和 B 满足

$$A > 0, A - B \geq 0,$$

则特征方程

$$\det[A - \lambda B] = 0 \quad (2.16)$$

的根均不小于 1。

在上述引理中取

$$A = \mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k, \quad B = e^{2kc} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1},$$

则特征方程

$$\det[\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k - \lambda e^{2kc} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1}] = 0$$

的根均不小于 1。于是特征方程

$$e^{2kc} \cdot \det[\mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} \cdot \det[e^{-2kc} \mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k - \lambda \mathbf{I}] \cdot \det[\mathbf{T}_{k-1}]^{-1} = 0$$

的根均不小于 1。进而特征方程

$$\det[e^{-2kc} \mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k - \lambda \mathbf{I}] = 0$$

的根均不小于 1,这表明矩阵 $[\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k]$ 的特征值均不小于 e^{2kc} 。于是对所有 $i=1, \dots, n$, 受控系统的 Lyapunov 指数满足

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln |\mu_i(\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k)| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln(e^{2kc}) = c > 0. \quad (2.17)$$

下面验证控制器

$$\{\mathbf{u}_k = \sigma_k \mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$$

的一致有界性,即存在常数 M 使得

$$\sup_{0 \leq k < \infty} |\sigma_k| \leq M < \infty.$$

注意到

$$[\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k] \geq e^{2kc} \mathbf{I} > 0,$$

从而

$$e^{2kc} [T_k^T T_k]^{-1} \leq I。$$

由于 $[T_k^T T_k]$ 为对称矩阵,则有

$$\| e^{2kc} [T_k^T T_k]^{-1} \| = \| e^{2kc} [T_k^T T_k]^{-1} \| \leq 1,$$

因此可得

$$\| J_k^T J_k - e^{2kc} [T_{k-1}^T T_{k-1}]^{-1} \| \leq \| J_k^T J_k \| + e^{2c} \leq (N + \sigma_k)^2 + e^{2c}。$$

由于上式的右边项只与 σ_k 有关,而与 $\sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}$ 无关,总可以选取一个一致有界的 σ_k 以满足算法中的对角占优条件。例如,可以取

$$\sigma_k \equiv N + e^c, \quad k \geq 0。 \quad (2.18)$$

由此可以推得

$$\begin{aligned} \lambda_i(x_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln | \mu_i(T_k^T T_k) | \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln | \mu_i(J_0^T(x_0) \cdots J_k^T(x_k) J_k(x_k) \cdots J_0(x_0)) | \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln | \mu_{\max}([f_0'(x_0) + (N + e^c)I]^T \cdots [f_k'(x_k) + (N + e^c)I]^T \\ &\quad \cdot [f_0'(x_0) + (N + e^c)I] \cdots [f_k'(x_k) + (N + e^c)I]) | \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln(2N + e^c)^{2(k+1)} \\ &= \ln(2N + e^c) < \infty。 \end{aligned}$$

并且由(2.17)式知,这些有限的 Lyapunov 指数均是正的,即

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln | \mu_i(T_k^T T_k) | \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \ln(e^{2kc}) = c > 0。$$

有关受控系统的 Lyapunov 指数的统计分布,后来也有了详尽的研究[Lai & Chen, 2000]。

2.4 一个例子

考虑如下受控 Logistic 映射:

$$x_{k+1} = f(x_k) \equiv 3x_k(1 - x_k) + u_k \pmod{2.5}。 \quad (2.19)$$

因为它的系数是 3,所以不受控的原系统有稳定周期解,是非混沌的。选取 $c = 0.3$,增益 σ_k 在区间

$$[-f'(x_k) - e^{kc} T_{k-1}^{-1} - 0.001, \quad -f'(x_k) - e^{kc} T_{k-1}^{-1}]$$

或

$$[-f'(x_k) + e^{kc} T_{k-1}^{-1}, \quad -f'(x_k) + e^{kc} T_{k-1}^{-1} + 0.001],$$

受控系统(2.19)的 Lyapunov 指数为 $\lambda = 0.5922$,图 2.1 给出了受控系统的状态轨迹。

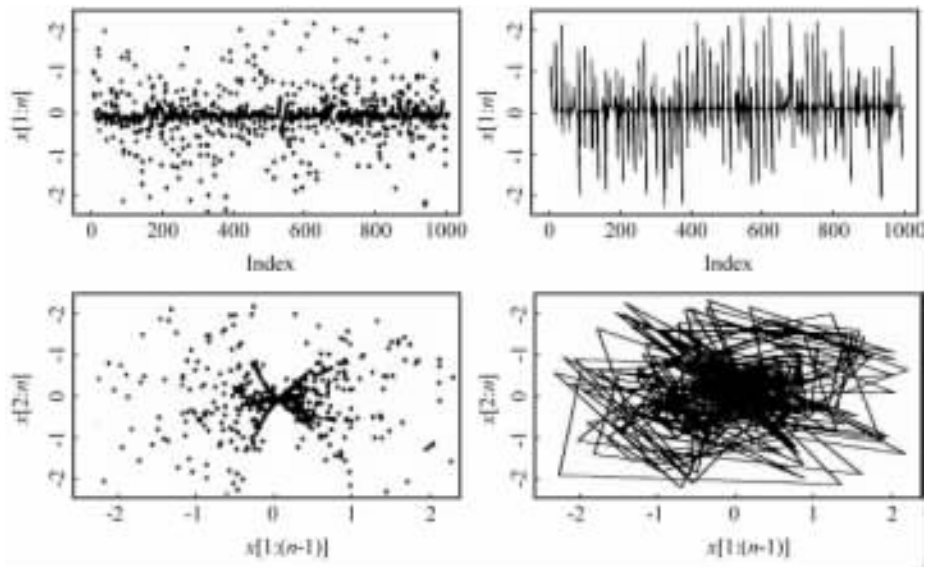


图 2.1 受控 Logistic 映射的状态轨迹*

2.5 混沌验证 : Devaney 混沌

针对线性控制系统, 本节证明 Chen-Lai 算法能够使受控系统产生 Devaney 意义下的混沌行为[Chen & Lai, 1997, 1998]。

2.5.1 一维线性控制系统情形

首先, 考虑最简单的一维线性控制系统

$$x_{k+1} = ax_k + u_k, \quad (2.20)$$

其中控制器取为

$$u_k = (N + e^c)x_k, \quad (2.21)$$

式中常数 $N \geq |a|$ 。

注意到控制系统(2.20), (2.21)可写为

$$x_{k+1} = ax_k + (N + e^c)x_k = (a + N + e^c)x_k \pmod{1}, \quad (2.22)$$

这里 $a + N \geq 0$, 且由于 $c > 0$, 因此有

$$(a + N + e^c) > 1。$$

定义一个映射 $\phi: S^1 \rightarrow S^1$ 如下:

* 除非特别说明, 本书中图像均是用 Matlab 制作。

$$\phi(x) = (a + N + e^c) \angle x, \quad x \in S^1, \quad (2.23)$$

式中 S^1 为二维平面上的单位圆, $\angle x$ 为点 $x \in S^1$ 的角度。注意到该映射为单变量映射, 这是因为圆的半径是固定的, 只有角度是变化的。

可以验证系统(2.22)和(2.23)是等价的。易见, 两边同乘以 2π 后(2.22)式等价于

$$x_{k+1} = (a + N + e^c)x_k \pmod{2\pi}, \quad (2.24)$$

或者

$$\angle x_{k+1} = (a + N + e^c) \angle x_k, \quad x_k \in S^1. \quad (2.25)$$

如果初始状态可任意选取, 那么上式和(2.23)式等价。

我们可以用三种方法证明映射(2.23)满足混沌映射的 Devaney 判据。

首先可以按照 Devaney 给出的一般性步骤, 逐条验证 Devaney 混沌定义中的三个判据[Chen & Lai, 1997]。由于下面将给出一种更简捷的证明, 所以将这种证明方式略去。

第二种方法是证明映射(2.23)和著名的混沌 Logistic 映射等价。在 Logistic 映射

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k) \quad (2.26)$$

中, 令

$$x_k = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\xi y_k)],$$

式中

$$\xi \equiv (a + N + e^c) > 1.$$

则 Logistic 映射变为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\xi y_{k+1})] &= 4 \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\xi y_k)] \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2}[1 - \cos(2\pi\xi y_k)] \right\} \\ &= [1 - \cos(2\pi\xi y_k)] \cdot [1 + \cos(2\pi\xi y_k)], \end{aligned}$$

它的解为(2.24)式。

为了给出另外一种简捷、直接的证明方法, 引入如下引理[Touhey, 1997]:

引理 2.1 给定映射 $\phi: S \rightarrow S$, S 为非空集, 若对 S 内的任意两个非空开子集, 存在 ϕ 的一个周期解与这两个子集均有交的话, 则映射 ϕ 在 S 上是 Devaney 意义下混沌的。

可以验证映射(2.23)在 S 上满足上述定义。注意到在该映射的 k 步迭代以后, 有

$$\phi^k(x) = \xi^k \angle x, \quad (2.27)$$

式中

$$\xi \equiv (a + N + e^c) > 1.$$

由于 ϕ 是周期为 2π 的, 可令

$$\xi^k \angle x = \angle x + 2l\pi,$$

l 为一个正整数, 满足

$$0 \leq l \leq [\xi^k] - 1,$$

式中, $[\xi^k]$ 表示不超过 ξ^k 的最大整数。可以看到方程(2.27)的根, 记为 $x_{k,l}$, (也就是映射 ϕ 的周期解)在单位圆上几乎一致地分布:

$$\angle x_{k,l} = \frac{2l\pi}{\xi^k - 1}, \quad l = 0, 1, \dots, [\xi^k] - 1.$$

这意味着, 对于 S^1 内的两个任意给定的非空开子集, 总存在两个足够大的整数 k_0 和 l_0 , 使得映射的周期解 x_{k_0, l_0} 至少在每个开子集中有一个点。

2.5.2 n 维线性定常系统情形

考虑 n 维线性定常系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \pmod{1} \quad (2.28)$$

控制器为

$$\mathbf{u}_k = (N + e^c)\mathbf{x}_k, \quad (2.29)$$

式中常数 $N \geq \|\mathbf{A}\|$ 。下面证明受控系统(2.28), (2.29)在 Devaney 意义下是混沌的。

不失一般性, 只需讨论状态向量 $\mathbf{x}_{k+1} = [x_{k+1}(1) \cdots x_{k+1}(n)]^T$ 的第一个分量 $x_{k+1}(1)$ 。该分量可表示为

$$\begin{aligned} x_{k+1}(1) &= [a_{11}x_k(1) + \cdots + a_{1n}x_k(n)] + (N + e^c)x_k(1) \\ &= (a_{11} + N + e^c)x_k(1) + [a_{12}x_k(2) + \cdots + a_{1n}x_k(n)] \pmod{1}. \end{aligned}$$

由于

$$N \geq \|\mathbf{A}\| \geq a_{11}, \quad c > 0,$$

因此

$$a_{11} + \|\mathbf{A}\| \geq 0, \quad a_{11} + N + e^c > 1.$$

在由坐标 $x(1), \dots, x(n)$ 所张成的相空间中, 定义映射 $\phi: S^1 \times \cdots \times S^1 \rightarrow S^1$ 如下:

$$\phi(x(1), x(2), \dots, x(n)) = (a_{11} + N + e^c)\angle x(1), \quad x(1) \in S^1, \quad (2.30)$$

式中, S^1 为二维平面的单位圆, $\angle x(1)$ 是点 $x(1) \in S^1$ 的角度, 它满足 $0 \leq \angle x(1) < 2\pi$ 。显然, ϕ 关于 $x(1)$ 有 2π 周期。

可以与上一节类似地验证映射(2.30)满足混沌映射的 Devaney 判据。

从直觉上说, 如果给定的系统是时变的或非线性的, 则人们会有更多的机会产生一个混沌的受控系统。由于映射的时变或非线性特征, 因此使得理论分析要困

难得多。但由常微分方程的比较定理,结果还是可以证明的[Chen & Lai, 1998]。另外,单输入状态反馈同样也可以实现高维系统的混沌化[Zhang & Chen, 2004]。

2.6 混沌验证 : Li-Yorke 混沌

本节进一步证明,Chen-Lai 算法产生的混沌也满足 Li-Yorke 的混沌定义[Wang & Chen, 1999]。

2.6.1 n 维线性定常系统情形

定理 2.1 考虑 n 维线性定常控制系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \pmod{1}, \quad (2.31)$$

控制器为

$$\mathbf{u}_k = (N + \epsilon^c)\mathbf{x}_k, \quad (2.32)$$

如果常数 $c > 0$, 且 $N \geq \|\mathbf{A}\|_\infty$, 那么, 受控系统(2.31), (2.32)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 控制系统(2.31), (2.32)可写为

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} + (N + \epsilon^c)\mathbf{I})\mathbf{x}_k \pmod{1} \equiv g(\mathbf{x}_k). \quad (2.33)$$

现在证明系统(2.33)的不动点 $\mathbf{x}^* = 0$ 是一个回归排斥子。

记 $\mathbf{b} = [1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathcal{R}^n$, 并取

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &= (\mathbf{A} + (N + \epsilon^c)\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b} \\ &= (N + \epsilon^c)^{-1}(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

由于

$$\|(N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A}\|_\infty < 1,$$

故 $(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})$ 可逆。

由等式

$$(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})^{-1},$$

得到

$$\|(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - (N + \epsilon^c)^{-1}\|\mathbf{A}\|_\infty}. \quad (2.35)$$

再由(2.34)和(2.35)式可得

$$\begin{aligned} \max_i |x_i^0| &\equiv \|\mathbf{x}^0\|_\infty \\ &\leq (N + \epsilon^c)^{-1} \|(\mathbf{I} + (N + \epsilon^c)^{-1}\mathbf{A})^{-1}\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{N + e^c - \|A\|_\infty} \\ &< 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

显然,有

$$g(x_0) = 0 = x^*. \quad (2.37)$$

给定常数 r 满足

$$\|x^0\|_\infty \leq r < 1,$$

则对任意

$$x \in B_r \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq r\},$$

有

$$g'(x) = A + (N + e^c)I,$$

式中常数 $c > 0$, 且 $N \geq \|A\|_\infty$ 。由矩阵论中的 Gerschgorin 定理 [Golub & van Loan, 1983] 知, 对任意 $x \in B_r$, $g'(x)$ 的特征值的模均大于 1, 这表明受控系统 (2.33) 的不动点 $x^* = 0$ 是一个回归排斥子。根据 Marotto 定理 (第 1 章), 受控系统 (2.33) 在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

2.6.2 一维非线性定常系统情形

定理 2.2 考虑一维非线性控制系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k \pmod{1}, \quad (2.38)$$

其中控制器为

$$u_k = (N + e^c)x_k. \quad (2.39)$$

如果

$$f(0) = 0, \quad c > 0,$$

f 可微且对 $|x| \leq 1$, 有

$$N \geq |f'(x)|,$$

那么, 受控系统 (2.38), (2.39) 在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 受控系统 (2.38), (2.39) 可写为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + u_k \\ &= f(x_k) + (N + e^c)x_k \pmod{1} \\ &\equiv g(x_k). \end{aligned} \quad (2.40)$$

显然, 对 $|x| \leq 1$, 有

$$g'(x) = f'(x) + N + e^c > 1. \quad (2.41)$$

下面证明存在点 $x^0, 0 < x^0 < 1$, 使得 $g(x^0) = x^*$ 。

考虑方程

$$h(x) \equiv f(x) + (N + e^c)x - 1 = 0, \quad (2.42)$$

对 $|x| \leq 1$, 有

$$|f(x)| \leq N |x| \leq N.$$

由于 $h(\cdot)$ 为连续函数, 且

$$h(0) = -1 < 0, \quad h(1) = f(1) + N + e^c - 1 > 0,$$

必存在点 $x^0, 0 < x^0 < 1$, 使得

$$h(x^0) = f(x^0) + (N + e^c)x^0 - 1 = 0.$$

这意味着,

$$g(x^0) = f(x^0) + (N + e^c)x^0 \pmod{1} = 0 = x^*.$$

这表明受控系统(2.40)的不动点 $x^* = 0$ 是一个回归排斥子。根据 Marotto 定理, 受控系统(2.40)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

2.6.3 n 维非线性定常系统情形

定理 2.3 考虑 n 维非线性控制系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k \pmod{1}, \quad (2.43)$$

其控制器为

$$\mathbf{u}_k = (N + e^c)\mathbf{x}_k. \quad (2.44)$$

假设

- (1) $f(0) = 0$ 且当 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 可微;
- (2) 存在常数 N 使得对

$$\mathbf{x} \in \Omega_1 \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\},$$

有

$$N \geq \max\{1, \|f'(\mathbf{x})\|_\infty\}; \quad (2.45)$$

- (3) $e^c > N$ 。

则受控系统(2.43), (2.44)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 受控系统(2.43), (2.44)可写为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + (N + e^c)\mathbf{x}_k \pmod{1} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}_k). \quad (2.46)$$

给定常数 ϵ 满足

$$0 < \epsilon < N^{-1} - e^{-c}.$$

记

$$\rho \equiv e^{-c} + \epsilon < N^{-1}.$$

下面证明存在点 $\mathbf{x}^0, 0 < \mathbf{x}^0 \leq \rho \mathbf{b}$, 使得

$$h(\mathbf{x}^0) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + (N + e^c)\mathbf{x}^0 - \mathbf{b} = 0. \quad (2.47)$$

为此, 定义如下函数

$$\phi(\mathbf{x}) = \max\{0, \mathbf{x} - \mathbf{h}(\mathbf{x})\}$$

$$\equiv [\max\{0, x_1 - h_1(\mathbf{x})\} \cdots \max\{0, x_n - h_n(\mathbf{x})\}]^T$$

根据假设(1)和(2),对任何有界 $\mathbf{x}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 有界,存在常数 $\tau \geq \rho$,使得对任意

$$\mathbf{x} \in \Omega_\tau \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \rho\},$$

有

$$\phi(\mathbf{x}) \in \Omega_\tau \equiv \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \tau\}.$$

再定义标量函数

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_\rho, \\ \max_{x_i > \rho} \left(\frac{\rho}{x_i} \right), & \mathbf{x} \in \Omega_\tau - \Omega_\rho. \end{cases}$$

记

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \psi(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{r}(\mathbf{x})).$$

容易验证对任意 $\mathbf{x} \in \Omega_\tau$,

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \Omega_\rho, \quad \psi(\mathbf{x}) \in \Omega_\tau.$$

由于 $\psi(\mathbf{x})$ 是 Ω_τ 上的连续函数,根据 Brouwer 不动点定理[Chen *et al.*, 1997],存在点 $\mathbf{x}^0 \in \Omega_\tau$,使得

$$\mathbf{x}^0 = \psi(\mathbf{x}^0),$$

亦即

$$\mathbf{x}_i^0 = \phi_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0)) = \max\{0, r_i(\mathbf{x}^0) - h_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0))\}. \quad (2.48)$$

假设 $\mathbf{x}^0 \notin \Omega_\rho$. 那么存在指标 $i, 1 \leq i \leq n$,使得

$$\rho < x_i^0 = \|\mathbf{x}^0\|_\infty \leq \tau, \quad r_i(\mathbf{x}^0) = \lambda(\mathbf{x}^0)x_i^0 = \rho,$$

由于 $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \Omega_\rho$,对 $\xi \in \Omega_\rho$,

$$\|f_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0))\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0))\|_\infty \leq \|\mathbf{f}'(\xi)\|_\infty \|\mathbf{r}(\mathbf{x}^0)\|_\infty \leq N\rho.$$

我们有

$$h_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0)) = f_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0)) + (N + \epsilon)\rho - 1 \geq \epsilon\rho - 1 > 0,$$

从而

$$x_i^0 > \max\{0, r_i(\mathbf{x}^0) - h_i(\mathbf{r}(\mathbf{x}^0))\}.$$

这与(2.48)式矛盾。故必有 $\mathbf{x}^0 \in \Omega_\rho$,于是

$$\lambda(\mathbf{x}^0) = 1, \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0.$$

从而(2.48)式可写为

$$\mathbf{x}^0 = \max\{0, \mathbf{x}^0 - \mathbf{h}(\mathbf{x}^0)\}, \quad (2.49)$$

上式等价于

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) \geq 0, \quad (\mathbf{x}^0)^T \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) = 0. \quad (2.50)$$

由于

$$\|x^0\|_{\infty} \leq \rho < N^{-1},$$

有

$$\|f(x^0)\|_{\infty} \leq N\|x^0\|_{\infty} < 1.$$

如果存在指标 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得 $x_i^0 = 0$, 那么

$$h_i(x^0) = f_i(x^0) - 1 < 0,$$

从而

$$x_i^0 = 0 < -h_i(x^0) = \max\{0, x_i^0 - h_i(x^0)\},$$

这是一个矛盾不等式。因此, 点 x^0 满足

$$0 < x^0 \leq \rho b.$$

由(2.50)式可得

$$h(x^0) \equiv f(x^0) + (N + \epsilon^c)x^0 - b = 0,$$

这意味着

$$g(x^0) = f(x^0) + (N + \epsilon^c)x^0 \pmod{1} = 0.$$

再记

$$B_{\rho} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\infty} \leq \rho\},$$

则

$$x^0 \in \Omega_{\rho} \subset B_{\rho}.$$

且对任意 $x \in B_{\rho}$,

$$g'(x) = f'(x) + (N + \epsilon^c)I,$$

式中

$$\|f'(x)\|_{\infty} \leq N, \epsilon^c > N \geq 1.$$

由 Gerschgorin 定理[Golub & van Loan, 1983]知, 对任意 $x \in B_{\rho}$, $g'(x)$ 的特征值的模均大于 1。这表明受控系统(2.46)的不动点 $x^* = 0$ 是一个回归排斥子。根据定理 1.1, 受控系统(2.46)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

2.7 Lyapunov 指数的配置

本节介绍一种可以任意配置 n 维离散时间动态系统的 $n-1$ 个 Lyapunov 指数的反馈混沌化算法[Lai & Chen, 2002]。

考虑如下 n 维离散时间动态系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1}), \\ x_k = x_{k-1}, \\ \dots\dots\dots \\ x_{k-n+2} = x_{k-n+1}, \end{cases} \quad (2.51)$$

其中 f_k 是二次可微的。

记

$$\mathbf{x}_k = [x_k \quad x_{k-1} \quad \cdots \quad x_{k-n+1}]^T \in \mathcal{R}^n,$$

且 x_0 为系统初始状态。再记

$$f_k(\mathbf{x}_k) = [f_k(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-n+1}) \quad x_k \quad \cdots \quad x_{k-n+2}]^T。$$

考虑如下控制系统：

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k, \quad (2.52)$$

采用状态反馈控制器

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k, \quad (2.53)$$

则控制系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \quad (2.54)$$

的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{z}) = f'_k(\mathbf{z}) + \frac{d[\mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k]}{d\mathbf{x}_k}。$$

取

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k) = -f'_k(\mathbf{x}_k) + \begin{pmatrix} e^{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

式中 σ_i 为待定常数,且假设

$$\sup_{\mathbf{x}_k \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^n, 0 \leq k < \infty} \|\mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)\| \leq M < \infty,$$

其中 Ω 为系统的状态空间。于是控制系统的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} e^{\sigma_1} - \sum_{j=1}^n f''_{k,1,x_{k,j}} x_{k,j} & - \sum_{j=1}^n f''_{k,2,x_{k,j}} x_{k,j} & \cdots & - \sum_{j=1}^n f''_{k,n,x_{k,j}} x_{k,j} \\ 0 & e^{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\sigma_n} \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{J}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{J}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})\cdots\mathbf{J}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{J}_0(\mathbf{x}_0) \\ &= \begin{pmatrix} \prod_{l=0}^k (e^{\sigma_1} - \sum_{j=1}^n f''_{l,1,x_{k,j}} x_{k,j}) & * & \cdots & * \\ 0 & e^{(k+1)\sigma_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{(k+1)\sigma_n} \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 指数的定义有

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \ln \left| e^{\sigma_1} - \sum_{j=1}^n f''_{l,1,x_{k,j}} x_{k,j} \right|,$$

$$\lambda_i = \sigma_i, \quad i = 2, 3, \dots, n。$$

这说明控制系统具有预先给定的 $n-1$ 个 Lyapunov 指数。对剩下的一个 Lyapunov 指数,假设

$$\|f''\| \leq M < \infty$$

并采用模(mod m)运算,那么可选取 σ_1 ,使得

$$\sigma_1 > \ln(1 + nMm),$$

因此

$$\left| e^{\sigma_1} - \sum_{j=1}^n f''_{l,1,x_{k,j}} x_{k,j} \right| > 1,$$

从而

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^k \ln \left| e^{\sigma_1} - \sum_{j=1}^n f''_{l,1,x_{k,j}} x_{k,j} \right| > 0。$$

作为一个例子,考虑如下系统:

$$x_{k+2} = \frac{1}{1 + \frac{A^{1+b} x_k^{ab} (1-x_k)^{b^2}}{[1 + A x_k^a (1-x_k)^b]^{a+b}}}, \quad (2.56)$$

式中取

$$A = 3.0, \quad a = 1.6, \quad b = -0.4, \quad x_0 = 0.6, \quad x_1 = 0.3。$$

此时系统(2.56)具有一个稳定的周期 2 轨道(见图 2.2)。可以求得

$$f'_k = \begin{bmatrix} 0 & S_{k+2,k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

式中

$$S_{k+2,k} = \frac{1-x_{k+2}}{1-x_k} \frac{x_{k+2}}{x_k} [(a+b)x_{k+1} - a][(a+b)x_k - a]。$$

取

$$\sigma_1 = \ln(1.9) = 0.6418539$$

$$\sigma_2 = \ln(0.5) = -0.6931472$$

并采用(mod 1)运算。图 2.3 显示了受控系统的混沌状态。

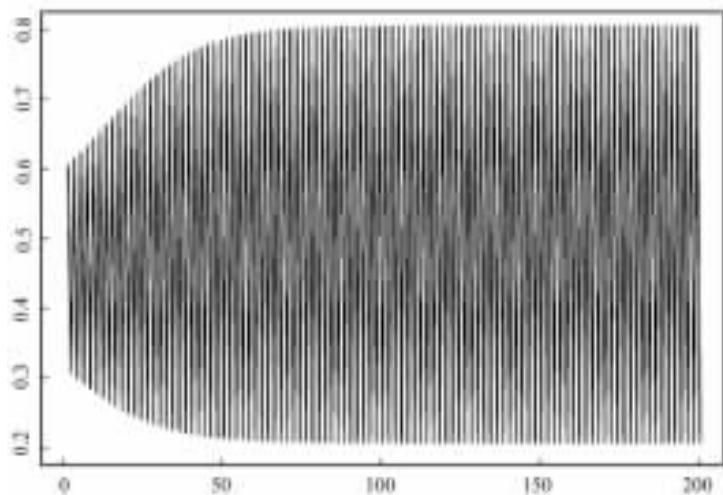


图 2.2 系统(2.56)的稳定周期 2 轨道

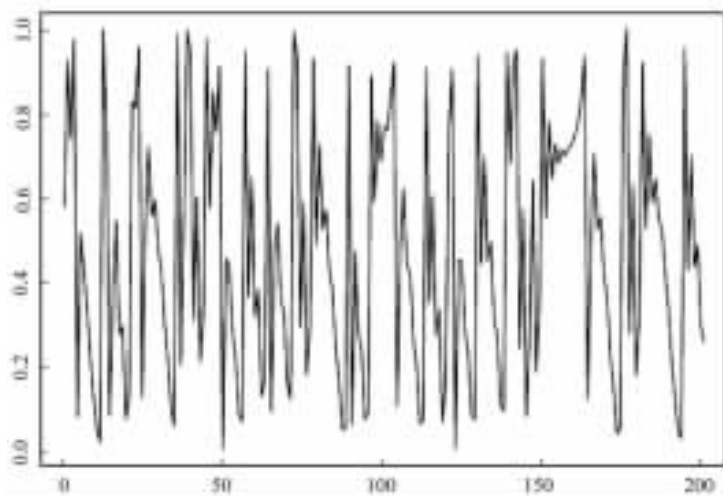


图 2.3 系统(2.56)受控后的混沌轨道

2.8 Chen-Lai 算法的推广

2.8.1 用锯齿函数取代模函数

在 Chen-Lai 算法中,为保证系统状态的有界性,采用了不连续的模函数。这里用连续的锯齿函数取代不连续的模函数,把 Chen-Lai 算法的第三步改为

$$x_{k+1} = \Phi(f(x_k) + u_k), \quad (2.57)$$

式中

$$\Phi(y) = [\varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n)]^T, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

锯齿函数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下(图 2.4):

$$\varphi(y) \equiv \text{saw}_\varepsilon(y) = (-1)^m(y - 2m\varepsilon), \quad (2m-1)\varepsilon \leq y \leq (2m+1)\varepsilon,$$

式中, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

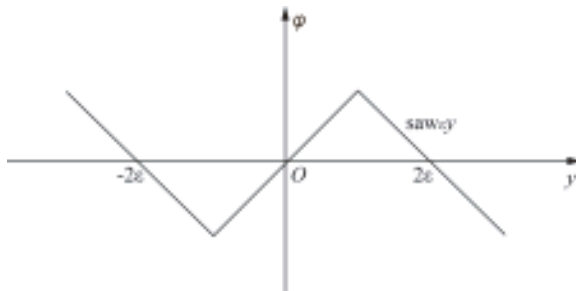


图 2.4 锯齿函数 $\text{saw}_\varepsilon(y)$

该算法在本质上是与 Chen-Lai 算法等价的。显然, 函数 Φ 具有如下性质:

- (1) $\|\Phi(y)\|_\infty \leq 1, y \in \mathbb{R}^n$;
- (2) $\Phi(y) = y, \|y\|_\infty < 1$;
- (3) $\Phi(2mb) = 0, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

采用与定理 2.3 的证明类似的思想, 可以证明如下结果 [Wang & Chen, 2000]:

定理 2.4 考虑 n 维非线性控制系统(2.57), 控制器为

$$u_k = (N + \varepsilon^c)x_k. \quad (2.58)$$

假设

- (1) $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 可微;
- (2) 存在常数 N , 使得对

$$x \in \Omega_1 \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\},$$

有

$$N \geq \|f'(x)\|_\infty; \quad (2.59)$$

- (3) 存在常数 c , 满足

$$c > \max\{\ln(\sqrt{2}+1)N, \ln(\sqrt{4N+1}+1)\}.$$

则受控系统(2.57), (2.58)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

进一步, 用正弦函数取代锯齿函数也是可以的 [Zheng *et al.*, 2003]。

2.8.2 Lai-Chen 算法

在 Chen-Lai 算法中,选取反馈增益阵 B_k ,使得

$$(1) [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} > 0,$$

$$(2) [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k] - e^{2kc} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} \geq 0,$$

式中 c 为一固定的正常数。最近, Lai 和 Chen[2005]指出,可用一个收敛到常数 c 的序列 $\{c_k\}$ 来取代固定常数 c 。也就是说,选取反馈增益阵 B_k ,使得

$$(1') [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} > 0,$$

$$(2') [\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k] - e^{2kc_k} [\mathbf{T}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1}^T]^{-1} \geq 0,$$

式中 $c_k \rightarrow c, k \rightarrow \infty$ 。

第3章

离散时间系统反馈混沌化:Wang-Chen 算法

3.1 问题的描述

考虑如下离散时间非线性定常控制系统:

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k, \quad (3.1)$$

式中, $x_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_k \in \mathbb{R}^n$ 分别为系统的状态和输入, $f(x)$ 是 n 维连续可微映射。第2章介绍的使系统(3.1)产生混沌行为的 Chen-Lai 算法实际上包含两部分:首先是设计高增益线性状态反馈 u_k , 使得受控系统的 Lyapunov 指数为正;然后,再对整个受控系统采用模运算以使系统的状态有界。本章所考虑的问题是:能否不对整个受控系统采用模运算,而只通过设计合适的控制器 u_k , 就能使整个受控系统产生有界的混沌行为?

假设原点为标称(未受控)系统

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad (3.2)$$

的一个不动点,即 $f(0)=0$ 。控制理论中的一个最基本的问题,就是设计一个反馈控制器,使得原点为闭环控制系统的渐近稳定的不动点。而在本章中,假设未受控系统(3.2)的原点是渐近稳定的。反馈混沌化控制问题是,设计一个具有预先给定(可以任意小的)幅值 $\epsilon > 0$ 的反馈控制器 u_k , 即

$$\|u_k\|_{\infty} \leq \epsilon, \quad k \geq 0, \quad (3.3)$$

使得受控系统(3.1)是混沌系统。当然,如果未受控系统(3.2)已经是混沌系统,那么反馈混沌化控制问题,就是设计反馈控制器使得受控系统(3.1)具有新的期望的混沌吸引子。

3.2 控制器设计

在混沌的诸多特征中,具有正的 Lyapunov 指数的有界轨道是目前被广泛采

用的混沌判据,其主要原因是容易验证。本节的目的是设计反馈控制器,使得受控系统具有如下意义下的混沌行为:受控系统状态一致有界且其最大 Lyapunov 指数为正。

首先,对控制器(而不是对受控系统)作取模运算,有如下结果:

定理 3.1 假设原点为标称系统(3.2)的一个指数渐近稳定的不动点。控制系统(3.1)中的控制输入为

$$u_k = \sigma x_k \pmod{\epsilon}, \quad (3.4)$$

式中 σ 和 ϵ 为两个正常数。则存在两个正常数 q 和 r ,使得对 $\epsilon < q$ 和 $\|x_0\| < r\epsilon$, 有

$$\|x_k\| < r\epsilon, \quad k > 0. \quad (3.5)$$

进一步,记 N 为一正常数,满足

$$N \geq \|f'(x)\|, \quad \|x\| < r\epsilon. \quad (3.6)$$

如果存在一个正常数 c ,使得

$$\sigma \geq N + e^c, \quad (3.7)$$

那么控制系统(3.1)的所有 Lyapunov 指数均大于零。

证明:显然,控制输入(3.4)满足

$$\|u_k\|_\infty \leq \epsilon, \quad k \geq 0. \quad (3.8)$$

如果把控制系统(3.1)看作是标称系统(3.2)受到最大幅值为 ϵ 的扰动,那么,(3.5)式即为扰动系统的 Lyapunov 稳定性理论中的一个标准结果[Khalil, 1996]。

给定 $\|x_0\| < r\epsilon$,控制系统(3.1)在 x_k 的 Jacobi 矩阵为

$$J(x_k) = f'(x_k) + \sigma I. \quad (3.9)$$

根据[Chen & Lai, 1996]的分析(见第 2 章),如果 $\sigma \geq N + e^c$,那么,控制系统(3.1)的所有 Lyapunov 指数均不小于 c 。

注 3.1 把控制输入(3.4)视为加在标称系统(3.2)上的一个扰动项,有界性结果(3.5)可看作是具有指数稳定的不动点的标称系统(3.2)的鲁棒性。它表明小的扰动不会导致系统状态对原点的大的偏离。另一方面,当 σ 充分大时,控制输入(3.4)能使控制系统(3.1)的所有 Lyapunov 指数均为正,这表明系统的轨迹在所有方向上都是局部扩张的。这两种有界和扩张效应的组合,就在原点的一个邻域内产生了复杂的混沌动力学行为。

注 3.2 在定理 3.1 中,如果原点是标称系统(3.2)的一个全局指数稳定不动点,那么 q 可以是任意正数。换句话说,对任意给定的有界输入,控制系统的状态均有界,那末,如果允许大的控制幅值的话,就可使受控系统在一个大的区域内产生混沌行为。

为了放松对标称系统(3.2)原点的稳定性要求,引入如下定义:

定义 3.1 如果存在正常数 p 和 $\mathcal{R}^n$ 中的两个有界子集 O_1 和 O_2 , 使得对任意满足

$$\|u_k\|_{\infty} \leq p, \quad k \geq 0$$

的输入 u_k 和任给初始状态 $x_0 \in O_1$, x_k 为有界并且对所有充分大的 k 有 $x_k \in O_2$, 那么, 控制系统(3.1)称为是 $\{p, O_1, O_2\}$ -BIBS 稳定的, 这里 BIBS 表示“有界输入意味着有界状态”。

容易推得如下结果。

定理 3.2 假设控制系统(3.1)是 $\{p, O_1, O_2\}$ -BIBS 稳定的, 正常数 N 满足

$$N \geq \|f'(x)\|, \quad x \in O_2. \quad (3.10)$$

如果控制输入为(3.4), 即

$$u_k = \sigma x_k \pmod{\epsilon},$$

式中

$$\epsilon < p, \quad \sigma \geq N + e^c, \quad (3.11)$$

那么, 对任意 $x_0 \in O_1$, 控制系统(3.1)的状态是有界的并且其所有的 Lyapunov 指数均为正。

下面的定理给出了一个全局性的结果。

定理 3.3 考虑如下控制系统

$$x_{k+1} = f_1(x_k) + f_2(x_k) + u_k, \quad (3.12)$$

式中, 函数 f_1 是全局 Lipschitz 的, 即满足

$$\|f_1(x) - f_1(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad x, y \in \mathcal{R}^n. \quad (3.13)$$

假设原点为如下系统

$$x_{k+1} = f_1(x_k) \quad (3.14)$$

的一个全局指数稳定的不动点, 即存在两个正的常数 c 和 M , 使得

$$\|f_1^k(x)\| \leq M e^{-ck} \|x\|, \quad x \in \mathcal{R}^n. \quad (3.15)$$

假设 f_2 为一个一致有界函数: 存在一个正常数 Γ , 使得

$$\|f_2(x)\|_{\infty} \leq \Gamma, \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad (3.16)$$

则存在常数 $p > 0$ 和两个有界开子集 $O_1, O_2 \in \mathcal{R}^n$, 使得控制系统(3.12)是 $\{p, O_1, O_2\}$ -BIBS 稳定的。进一步, 对于给定控制幅值 $0 < \epsilon \leq p$, 如果控制输入取(3.4), 即

$$u_k = \sigma x_k \pmod{\epsilon},$$

那么, 对充分大的 σ , 控制系统(3.12)的所有 Lyapunov 指数均为正。

证明: 记 $0 < q < 1$ 。构造正定函数

$$V(x) = \sup_{k \geq 0} \|f_1^k(x)\| e^{qck}.$$

显然, 对 $x \equiv f_1^0(x)$, 有

$$\|x\| \leq V(x) \leq \sup_{k \geq 0} M e^{-(1-q)ck} \|x\| \leq M \|x\|,$$

且

$$\begin{aligned} V(f_1(x)) &= \sup_{k \geq 0} \|f_1^{k+1}(x)\| e^{qc k} \\ &= \sup_{k \geq 0} \|f_1^{k+1}(x)\| e^{qc(k+1)} e^{-qc} \\ &\leq e^{-qc} V(x). \end{aligned}$$

由条件(3.15)可得

$$\|f_1^k(x)\| e^{qc k} \leq M e^{-(1-q)ck} \|x\|.$$

如果

$$k > \frac{\ln M}{(1-q)c} \equiv \alpha,$$

那么

$$\|f_1^k(x)\| e^{qc k} \leq \|x\|.$$

因此可以取

$$V(x) = \sup_{0 \leq k \leq \alpha} \|f_1^k(x)\| e^{qc k},$$

再由(3.13)式可以得到

$$\|V(x) - V(y)\| \leq \sup_{0 \leq k \leq \alpha} \|f_1^k(x) - f_1^k(y)\| e^{qc k} \leq e^{qc \alpha} L^\alpha \|x - y\|.$$

记 $\theta \equiv e^{-qc} < 1$ 。对 $k > \alpha$, 受控系统(3.12)的状态满足

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) &= V(f_1(x_k) + f_2(x_k) + u_k) \\ &\leq V(f_1(x_k)) + e^{qc \alpha} L^\alpha \|f_2(x_k) + u_k\| \\ &\leq \theta V(x_k) + e^{qc \alpha} L^\alpha (\epsilon + \Gamma). \end{aligned}$$

如果

$$V(x_k) > \frac{e^{qc \alpha} L^\alpha (\epsilon + \Gamma)}{1 - \theta},$$

那么

$$V(x_{k+1}) < V(x_k),$$

这意味着, 对任意给定控制幅值 ϵ 和任意初始状态 $x_0 \in \mathcal{R}^n$, x_k 是全局一致有界的, 且令其界为 β , 即存在正整数 $T = T(x_0)$, 使得 $\|x_k\| < \beta$ ($k > T$), 亦即存在有界开子集 O_2 , 使得 $x_k \in O_2$ 。

注意到受控系统在 x_k 的 Jacobi 矩阵为 $f'(x_k) + \sigma I$ 。假设正整数 N 满足

$$N \geq \|f'(x)\|, \quad \|x\| \leq \beta.$$

如果

$$\sigma \geq N + \epsilon^c, \quad (3.17)$$

式中 c 为一正整数, 那么, 受控系统(3.12)的所有 Lyapunov 指数均不小于 c 。

注 3.3 控制器(3.4)中的不连续的模函数可替换为连续的锯齿函数(图 2.4),即取

$$\mathbf{u}_k = \text{saw}_\varepsilon(\alpha \mathbf{x}_k) \equiv [\text{saw}_\varepsilon(\alpha x_k^1) \cdots \text{saw}_\varepsilon(\alpha x_k^n)]^T, \quad (3.18)$$

式中 $\mathbf{x}_k = [x_k^1 \cdots x_k^n]^T$ 。详见第 2 章 2.8 节。

3.3 一个例子

例 3.1 考虑如下受控的 Logistic 映射:

$$x_{k+1} = px_k(1-x_k) + u_k, \quad (3.19)$$

式中

$$u_k = \alpha x_k \pmod{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

假设

$$0 < p < 4, \quad 0 < \varepsilon < 1 - 0.25p, \quad \sigma > p + \varepsilon, \quad (3.21)$$

c 为正常数。则对任意初始状态 $x_0 \in (0, 1)$, 有

$$x_k \in (0, 1), \quad k > 0, \quad (3.22)$$

且控制系统(3.19)的 Lyapunov 指数不小于 c 。

事实上,如果 $x_k \in (0, 1)$, 那么

$$0 < x_{k+1} = px_k(1-x_k) + u_k < 0.25p + \varepsilon < 1,$$

这意味着,如果 $x_0 \in (0, 1)$, 那么 $x_k \in (0, 1), k > 0$ 。进一步,受控 Logistic 映射(3.19)的 Jacobi 矩阵为

$$J_x(x_k) = p(1-2x_k) + \sigma > \sigma - p > \varepsilon,$$

这说明映射(3.19)的 Lyapunov 指数不小于 c 。

在仿真中,先取 $p=0.5$, 此时, $x^*=0$ 是未受控 Logistic 映射的一个稳定不动

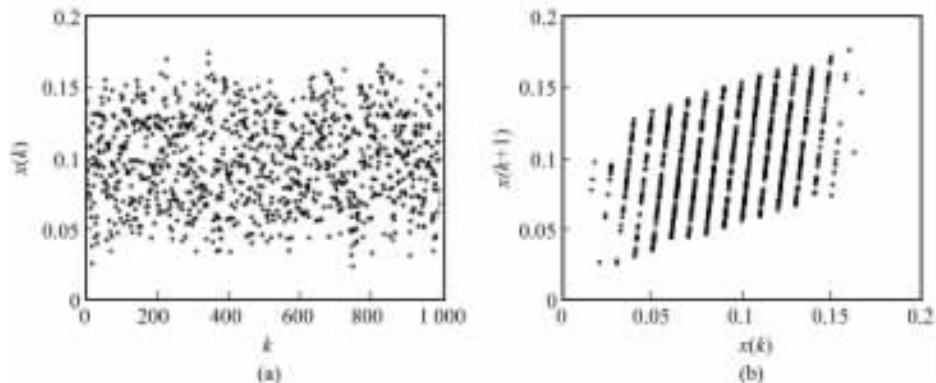


图 3.1 受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=0.5, \sigma=10, \varepsilon=0.1$

点。在控制器(3.20)中,取 $\sigma=10, \epsilon=0.1$ 。图 3.1 显示了受控系统的混沌行为。再取 $p=3.5$,此时,未受控的 Logistic 映射具有稳定周期 4 轨道(见图 3.2)。图 3.3~图 3.5 分别给出了当 $\epsilon=0.01, 0.05$ 和 0.1 时受控 Logistic 映射的混沌行为仿真结果。最后取 $p=3.73$,此时未受控的 Logistic 映射是混沌的(图 3.6),但小的控制幅值就能显著增强受控的 Logistic 映射的混沌行为,即显著提高系统的 Lyapunov 指数(图 3.7)。

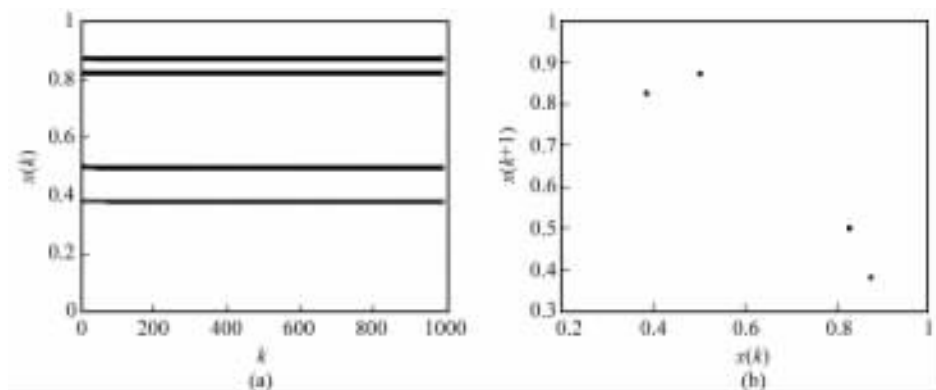


图 3.2 未受控 Logistic 映射的稳定周期 4 轨道: $p=3.5$

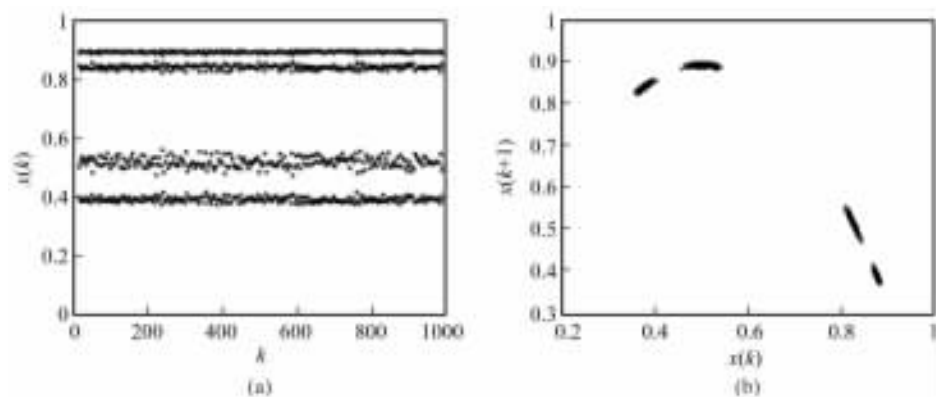


图 3.3 受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=3.5, \sigma=10, \epsilon=0.01$

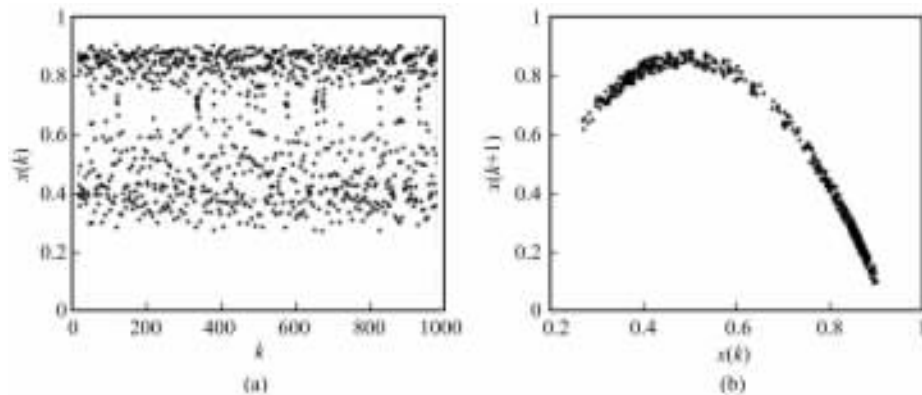


图 3.4 受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=3.5, \sigma=10, \epsilon=0.05$

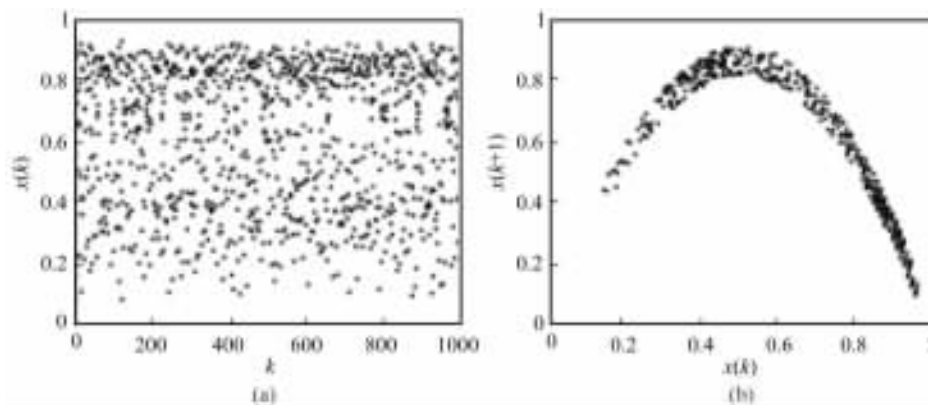


图 3.5 受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=3.5, \sigma=10, \epsilon=0.1$

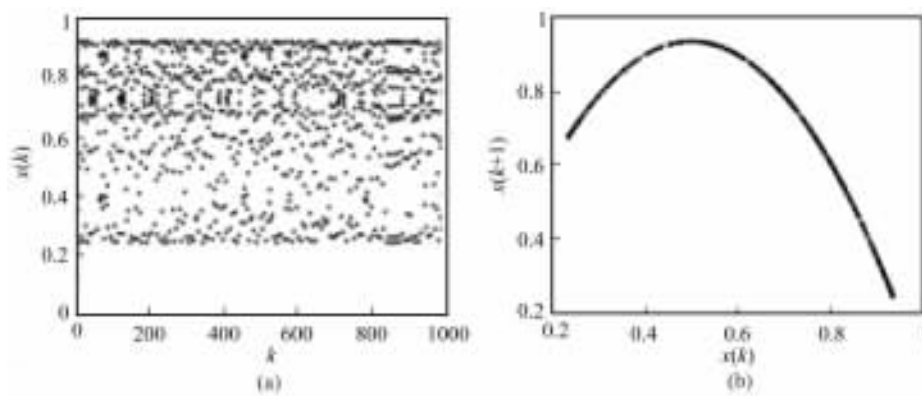


图 3.6 未受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=3.73$

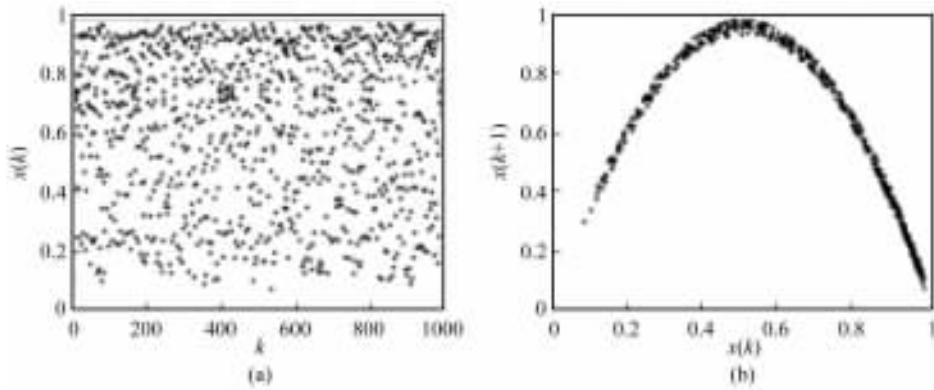


图 3.7 受控 Logistic 映射的混沌行为: $p=3.73, \sigma=10, \epsilon=0.05$

3.4 Li-Yorke 混沌的验证

3.4.1 一维非线性系统情形

定理 3.4 考虑一维非线性控制系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k, \quad (3.23)$$

其中控制输入为锯齿函数(图 2.4)

$$u_k = \text{saw}_\epsilon(\alpha x_k). \quad (3.24)$$

假设 f 是连续可微的, $f(0)=0$, 且存在正数 N 使得当 $|x| \leq \epsilon$ 时,

$$|f'(x)| \leq N, \quad (3.25)$$

且

$$\sigma > \max\{3N, N+1+\sqrt{2N+1}\}, \quad (3.26)$$

则控制系统(3.23), (3.24)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 控制系统(3.23), (3.24)可写为

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k = f(x_k) + \text{saw}_\epsilon(\alpha x_k) \equiv g(x_k). \quad (3.27)$$

显然, 对 $|x| < \sigma^{-1}\epsilon$,

$$g(x) = f(x) + \alpha x,$$

且有

$$g'(x) = f'(x) + \sigma > 1. \quad (3.28)$$

以下先证明存在点 x^0 , 满足

$$0 < x^0 < \sigma^{-1}\epsilon,$$

使得

$$g^2(x_0) = x^* = 0。$$

为此,考虑方程

$$h(x) \equiv f(x) + (2\varepsilon - \sigma x) = 0, \quad (3.29)$$

条件(3.25)意味着,当 $|x| \leq \varepsilon$ 时,

$$|f(x)| \leq N|x|,$$

由于 h 是连续函数,且

$$h(0) = 2\varepsilon > 0,$$

$$h\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma - N}\right) < (N - \sigma) \frac{2\varepsilon}{\sigma - N} + 2\varepsilon = 0。$$

必存在点 x^1 满足

$$0 < x^1 < \frac{2\varepsilon}{\sigma - N} < \varepsilon,$$

使得

$$h(x^1) = f(x^1) + (2\varepsilon - \sigma x^1) = 0。$$

这意味着,存在点 $\xi, 0 < \xi < x^1$,使得

$$x^1 = \frac{2\varepsilon}{\sigma - f'(\xi)}。$$

由于

$$|f'(\xi)| \leq N, \quad \sigma > 3N,$$

因而

$$\sigma x^1 > \frac{2\varepsilon}{1 + \sigma^{-1}N} > \varepsilon,$$

$$\sigma x^1 < \frac{2\varepsilon}{1 - \sigma^{-1}N} < 3\varepsilon。$$

根据锯齿函数的定义,

$$g(x^1) = f(x^1) + \text{saw}_\varepsilon(\sigma x^1) = f(x^1) + (2\varepsilon - \sigma x^1) = 0 = x^*, \quad (3.30)$$

进一步考虑方程

$$\bar{h}(x) = f(x) + \sigma x - x^1 = 0,$$

因为

$$\bar{h}(0) = -x^1 < 0,$$

$$\bar{h}(x^1) = f(x^1) + (\sigma - 1)x^1 > (\sigma - N - 1)x^1 > 0,$$

所以存在点 $x^0, 0 < x^0 < x^1$,使得

$$\bar{h}(x^0) = f(x^0) + \sigma x^0 - x^1 = 0。$$

而且

$$x^0 < \frac{x^1}{\sigma - N} < \frac{2\varepsilon}{(\sigma - N)^2} < \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

于是有

$$g(x^0) = f(x^0) + \text{saw}_\varepsilon(\alpha x^0) = f(x^0) + \alpha x^0 = x^1. \quad (3.31)$$

(3.30)和(3.31)式意味着

$$g^2(x^0) = g(x^1) = 0 = x^*, \quad (3.32)$$

且

$$(g^2)'(x^0) = g'(x^0)g'(x^1) = (f'(x^0) + \sigma)(f'(x^0) - \sigma) \neq 0. \quad (3.33)$$

这样,(3.28),(3.32)和(3.33)式表明: $x^*=0$ 是控制系统(3.27)的一个回归排斥子。根据 Marotto 定理(第1章),控制系统(3.27)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

3.4.2 n 维线性系统情形

考虑 n 维线性控制系统

$$x_{k+1} = Ax_k + u_k, \quad (3.34)$$

其中控制器为 n 维向量且各分量为锯齿函数,记为

$$u_k = \text{saw}_\varepsilon(\alpha x_k). \quad (3.35)$$

控制系统(3.34),(3.35)的解可写为

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} u_i. \quad (3.36)$$

由于 $\rho(A) < 1$, 存在矩阵范数 $\|\cdot\|$, 使得 $\|A\| < 1$ 。注意到,有限维空间上的任意两个范数是等价的,即存在两个常数 $p, q > 0$, 使得

$$\|x_k\| \leq p \|x_k\|_\infty, \quad \|u_i\| \leq q \|u_i\|_\infty \leq q\varepsilon.$$

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| &\leq p \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_\infty \\ &\leq p \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} \|A\|^{k-1-i} \|u_i\| \\ &\leq pq\varepsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} \|A\|^{k-1-i} \\ &= \frac{pq}{1 - \|A\|} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.37)$$

这表明控制系统(3.34),(3.35)的状态是一致有界的。

引理 3.1 假设矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $\rho(M) < 1$ 。记 m_i 为向量 $(I - M)^{-1}b, b = [1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$ 的第 i 个元素。则有

$$\frac{1 - 2\|M\|_\infty}{1 - \|M\|_\infty} \leq m_i \leq \frac{1}{1 - \|M\|_\infty}. \quad (3.38)$$

证明:由于 $\rho(M) < 1$, 有

$$(I-M)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} M^j = I + M + M^2 + \cdots,$$

因此

$$\begin{aligned} m_i &= [(I-M)^{-1}b]_i = 1 + [Mb]_i + [M^2b]_i + \cdots \\ &\leq 1 + \|M\|_{\infty} + \|M\|_{\infty}^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - \|M\|_{\infty}}. \end{aligned}$$

定理 3.5 考虑控制系统(3.34),(3.35)。如果

$$\sigma > \max\{3\|A\|_{\infty}, \sqrt{\|A\|_{\infty} + 1} + 1\}, \quad (3.39)$$

那么,控制系统(3.34),(3.35)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明:控制系统(3.34),(3.35)可写成:

$$x_{k+1} = Ax_k + \text{saw}_{\varepsilon}(\sigma x_k) \equiv g(x_k). \quad (3.40)$$

条件(3.39)意味着 $\sigma I \pm A$ 为可逆矩阵。记 $b = [1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$ 。再记

$$x_0 = 2\varepsilon(\sigma I + A)^{-1}(\sigma I - A)^{-1}b = 2\varepsilon(\sigma^2 I - A^2)^{-1}b.$$

以下证明:

(1) 存在常数 $r, 0 < r < \sigma^{-1}\varepsilon$, 使得

$$x_0 \in B_r \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\infty} \leq r\},$$

且对所有 $x \in B_r, g'(x)$ 的所有特征值的模均大于 1。

(2) $g^2(x_0) = 0 = x^*$, 且 $\det((g^2)'(x_0)) \neq 0$ 。

注意到

$$x_0 = 2\varepsilon\sigma^{-2}(I - \sigma^{-2}A^2)^{-1}b,$$

式中

$$\rho(\sigma^{-2}A^2) < 1,$$

由引理 3.1 和(3.39)知道,

$$\|x_0\| \leq \frac{2\varepsilon\sigma^{-2}}{1 - \sigma^{-2}\|A\|_{\infty}^2} = \frac{2\varepsilon}{\sigma^2 - \|A\|_{\infty}^2} < \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

选取 r 使得

$$\|x_0\|_{\infty} \leq r < \sigma^{-1}\varepsilon,$$

则有 $x_0 \in B_r$ 。对任意 $x \in B_r$,

$$g(x) = Ax + \sigma x = (A + \sigma I)x,$$

且

$$g'(x) = A + \sigma I.$$

由 Gerschgorin 定理[Golub & van Loan, 1983]知,对所有 $x \in B_r, g'(x)$ 的所有特征值的模均大于 1。

注意到

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{A} + \sigma \mathbf{I})\mathbf{x}_0 = 2\varepsilon(\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}。$$

因而只要证明 $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ 。再注意到

$$\rho(\sigma^{-1}\mathbf{A}) < 1,$$

且

$$\sigma \mathbf{x}_1 = 2\sigma\varepsilon(\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = 2\varepsilon(\mathbf{I} - \sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}。$$

如果记 x_1^i 为 $\mathbf{x}_1$ 的第 i 个元素,那么由引理 3.1 可得,

$$\sigma x_1^i \geq \frac{2(1 - 2\sigma^{-1} \|\mathbf{A}\|_\infty)}{1 - \sigma^{-1} \|\mathbf{A}\|_\infty} \varepsilon > \varepsilon,$$

且

$$\sigma \mathbf{x}_1 \leq \|\sigma \mathbf{x}_1\|_\infty \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \sigma^{-1} \|\mathbf{A}\|_\infty} < 3\varepsilon。$$

根据定义,

$$\text{saw}_\varepsilon(\sigma \mathbf{x}_1) = 2\varepsilon \mathbf{b} - \sigma \mathbf{x}_1,$$

因此,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \text{saw}_\varepsilon(\sigma \mathbf{x}_1) = (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{x}_1 + 2\varepsilon \mathbf{b} = \mathbf{0}。$$

又 $\mathbf{g}^2$ 在 $\mathbf{x}_0$ 连续可微,且

$$\det(\mathbf{g}^2(\mathbf{x}_0)) = \det(\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0))\det(\mathbf{g}'(\mathbf{x}_1)) = \det(\mathbf{A} + \sigma \mathbf{I})\det(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}) \neq 0。$$

把(1)和(2)合起来意味着,受控系统(3.40)的不动点 $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ 是一个回归排斥子。根据 Marotto 定理,受控系统(3.40)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

注 3.4 显然,由(3.39)式可推得,存在常数 $c > 0$,使得

$$\sigma > \|\mathbf{A}\|_\infty + e^c > \|\mathbf{A}\|_\infty + 1。$$

因此,控制系统(3.34),(3.35)的 Lyapunov 指数均不小于 c 。

例 3.2 考虑如下 3 维控制系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0.2 & -0.5 & 0.1 \\ 0 & -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k。 \quad (3.41)$$

因为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\{0.78 \quad 0.20 \quad -0.38\}$,因此未受控系统是渐近稳定的。为使受控系统变成是混沌的,取如下控制器:

$$\mathbf{u}_k = [u_k^1 \quad u_k^2 \quad u_k^3]^T = [\varphi(\sigma x_k^1) \quad \varphi(\sigma x_k^2) \quad \varphi(\sigma x_k^3)]^T。$$

在仿真中,取 $\sigma = 10, \varepsilon = 0.1$,于是有 $\|\mathbf{u}_k\|_\infty \leq 0.1$ 。图 3.8 和图 3.9 分别给出了 φ 为锯齿函数和模函数的仿真结果。图中,(a),(b)和(c)分别表示状态 x_k^1, x_k^2 和 x_k^3 演化轨迹,(d)为受控系统的混沌吸引子。

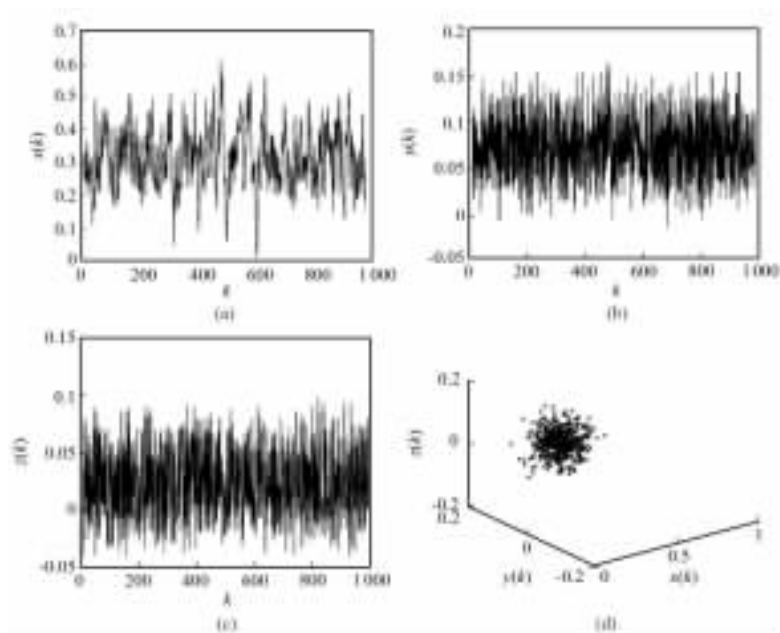


图 3.8 用锯齿函数作控制的仿真结果

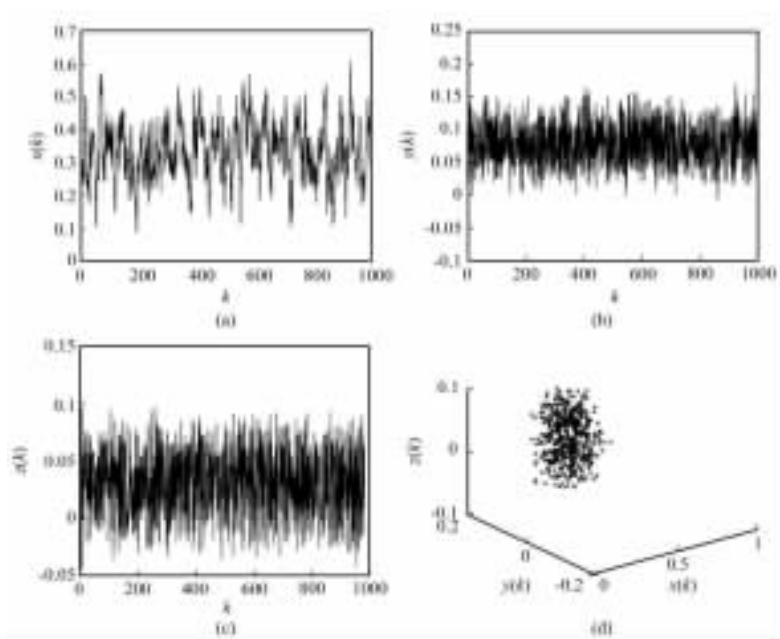


图 3.9 用模函数作控制的仿真结果

定理 3.6 考虑 n 维非线性控制系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k, \quad (3.42)$$

控制器为

$$\mathbf{u}_k = \text{saw}_\varepsilon(\sigma \mathbf{x}_k). \quad (3.43)$$

假设 f 是连续可微的, $f(0)=0$, 且存在正数 N , 使得

$$\|f'(x)\|_\infty < N, \quad x \in \Omega \equiv \{x \in \mathcal{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 3\sigma^{-1}\varepsilon\}. \quad (3.44)$$

如果

$$\sigma > \max\{3N, N+1+\sqrt{2N+1}\}, \quad (3.45)$$

那么, 控制系统(3.42), (3.43)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 控制系统(3.42), (3.43)可写为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \text{saw}_\varepsilon(\sigma \mathbf{x}_k) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}_k). \quad (3.46)$$

记 $\mathbf{b} = [1 \ \cdots \ 1]^T \in \mathcal{R}^n$ 。以下分两步证明存在点 $\mathbf{x}_0, 0 < \mathbf{x}_0 < \sigma^{-1}\varepsilon \mathbf{b}$, 使得

$$\mathbf{g}^2(\mathbf{x}_0) = 0.$$

步骤 1 首先证明存在点 $\mathbf{x}_1$, 满足

$$\sigma^{-1}\varepsilon \mathbf{b} < \mathbf{x}_1 < 3\sigma^{-1}\varepsilon \mathbf{b},$$

使得

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \text{saw}_\varepsilon(\sigma \mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + 2\varepsilon \mathbf{b} - \sigma \mathbf{x}_1 = 0.$$

为此, 定义两个函数:

$$\mathbf{h}(x) = \mathbf{f}(x) + 2\varepsilon \mathbf{b} - \sigma x$$

和

$$\phi(x) = \max\{0, x + \mathbf{h}(x)\} = [\max\{0, x_1 + h_1(x)\} \ \cdots \ \max\{0, x_n + h_n(x)\}]^T.$$

这里 $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T$ 。记

$$\rho = 2(\sigma + N)^{-1}\varepsilon.$$

根据条件(3.44), 对任何有界的 x , 函数 f 也有界。故存在常数 $\tau \geq \rho$, 使得对

$$x \in \Omega_\rho \equiv \{x \in \mathcal{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_\infty \leq \rho\},$$

有

$$\phi(x) \in \Omega_\tau \equiv \{x \in \mathcal{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_\infty \leq \tau\}.$$

定义标量函数:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\rho, \\ \min_{x_i > \rho} \left(\frac{\rho}{x_i} \right), & x \in \Omega_\tau / \Omega_\rho. \end{cases}$$

再记

$$\mathbf{r}(x) = \lambda(x)x, \quad \bar{\phi}(x) = \phi(\mathbf{r}(x)).$$

容易验证, 对 $x \in \Omega_\tau$, 有

$$r(x) \in \Omega_\rho, \quad \bar{\phi}(x) \in \Omega_\tau,$$

注意到 $\bar{\phi}(x)$ 是 Ω_τ 上的连续函数。由Brouwer不动点定理[Chen *et al.*, 1997]知, 存在点 $x_1 \in \Omega_\tau$, 使得 $x_1 = \bar{\phi}(x_1)$, 亦即

$$x_1 = \bar{\phi}(r(x_1)) = \max\{0, \quad r(x_1) + h(r(x_1))\}. \quad (3.47)$$

假设 $x_1 \notin \Omega_\rho$, 则存在指标 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得

$$\begin{aligned} \rho < x_{1i} &= \|x_1\|_\infty \leq \tau, \\ r_i(x_1) &= \lambda(x_1)x_{1i} = \rho, \end{aligned}$$

式中, $x_1 = [x_{11} \quad \cdots \quad x_{1n}]^T$ 。

由于 $r(x) \in \Omega_\rho$, 因而

$$|f_i(r(x_1))| \leq \|f(r(x_1))\|_\infty \leq \|f'(\xi)\|_\infty \|r(x_1)\|_\infty \leq N\rho, \quad \xi \in \Omega_\rho.$$

并且,

$$h_i(r(x_1)) = f_i(r(x_1)) - 2\varepsilon + \sigma\rho < (\sigma + N)\rho - 2\varepsilon = 0,$$

从而

$$x_{1i} > \max\{0, \quad r_i(x_1) + h_i(r(x_1))\},$$

这与(3.47)式矛盾。因为有

$$x_1 \in \Omega_\rho, \quad \lambda(x_1) = 1,$$

从而

$$r(x_1) = x_1.$$

于是(3.47)式可写为

$$x_1 = \max\{0, \quad x_1 + h(x_1)\}. \quad (3.48)$$

上式等价于

$$h(x_1) \leq 0, \quad (x_1)^T h(x_1) = 0. \quad (3.49)$$

事实上, 如果(3.48)式成立, 那么 $h(x_1) \leq 0$; 否则, $x_1 < x_1 + h(x_1)$, 与(3.48)式矛盾。

又由(3.48)式得

$$(x_1)^T x_1 = (x_1)^T x_1 + (x_1)^T h(x_1),$$

从而 $(x_1)^T h(x_1) = 0$ 。反过来, 亦可由(3.49)式推得(3.48)式。

由于 $\|x_1\|_\infty \leq \rho$, 因而

$$\|f(x_1)\|_\infty < N\|x_1\|_\infty \leq 2N(\sigma + N)^{-1}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

如果存在指标 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得 $x_{1i} = 0$, 那么

$$h_i(x_1) = f_i(x_1) + 2\varepsilon > 0,$$

故有

$$x_{1i} = 0 < h_i(x_1) = \max\{0, \quad x_{1i} + h_i(x_1)\}.$$

因为这是一个矛盾的不等式, 因此点 x_1 必满足 $0 < x_1 \leq \rho b$ 。再由(3.49)式得

$$h(x_1) = f(x_1) + 2\epsilon b - \sigma x_1 = 0。$$

从而

$$\sigma^{-1}\epsilon b < \frac{2\epsilon}{\sigma+N}b < x_1 < \frac{2\epsilon}{\sigma-N}b < 3\sigma^{-1}\epsilon b。$$

上式意味着

$$g(x_1) \equiv f(x_1) + \text{saw}_\epsilon(\sigma x_1) = f(x_1) + 2\epsilon b - \sigma x_1 = h(x_1) = 0。$$

步骤 2 现在证明存在点 x_0 , 满足

$$0 < x_0 < \sigma^{-1}\epsilon b,$$

使得

$$g(x_0) = x_1。$$

为此, 定义两个函数:

$$\bar{h}(x) = f(x) + \sigma x - x_1,$$

和

$$\psi(x) = \max\{0, x - \bar{h}(x)\} = [\max\{0, x_1 - \bar{h}_1(x)\} \cdots \max\{0, x_n + \bar{h}_n(x)\}]^T。$$

记

$$\bar{\rho} = (\sigma + N)^{-1}\rho = 2(\sigma + N)^{-2}\epsilon。$$

与步骤 1 的证明类似, 可以证明存在点 x_0 , 满足

$$0 < x_0 \leq \bar{\rho}b < \sigma^{-1}\epsilon b,$$

使得

$$\bar{h}(x_0) = f(x_0) + \sigma x_0 - x_1 = 0。$$

这意味着

$$g(x_0) = f(x_0) + \text{saw}_\epsilon(\sigma x_0) = f(x_0) + \sigma x_0 = x_1。$$

步骤 1 和 2 合起来意味着存在点 x_0 , 满足

$$0 < x_0 < \sigma^{-1}\epsilon b,$$

使得

$$g^2(x_0) = g(x_1) = 0。 \quad (3.50)$$

记 γ 为一常数, 满足

$$\|x_0\|_\infty < \gamma < \sigma^{-1}\epsilon,$$

则

$$x_0 \in B_r = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \gamma\},$$

且对任意 $x \in B_r$,

$$g(x) = f(x) + \text{saw}_\epsilon(\sigma x) = f(x) + \sigma x,$$

其导数为

$$g'(x) = f'(x) + \sigma I,$$

式中

$$\|f'(x)\|_{\infty} < N < \sigma。$$

由 Gerschgorin 定理,对任意 $x \in B_r$, $g'(x)$ 的所有特征值的模均大于 1。根据 g 和 x_1 的定义, g 在 x_1 连续可微且其导数为

$$g'(x_1) = f'(x_1) + \sigma I。$$

因此,

$$\det((g^2)'(x_0)) = \det(g'(x_1))\det(g'(x_0)) \neq 0。 \quad (3.51)$$

这意味着,受控系统(3.46)的不动点 $x^* = 0$ 是一个回归排斥子。根据 Marotto 定理,受控系统(3.46)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

3.5 输出反馈混沌化

考虑一个 SISO 离散时间控制系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, u_k), \\ y_k = h(x_k). \end{cases} \quad (3.52)$$

式中, $x_k \in \mathcal{R}^n$, $u_k \in \mathcal{R}$ 和 $y_k \in \mathcal{R}$ 分别为系统(3.52)的状态,输入和输出。假设输入的标称值为 $\bar{u}$,且有

$$\bar{x} = F(\bar{x}, \bar{u}), \quad y = h(\bar{x}) = 0。$$

则称 $(\bar{x}, \bar{u})$ 为控制系统(3.52)的不动点。现希望设计一个输出反馈控制器

$$u_k = \bar{u} + \Delta u_k,$$

使得控制系统(3.52)的状态产生混沌行为,且控制满足如下幅值要求:

$$|\Delta u_k| \leq \epsilon, \quad k \geq 0。$$

式中, $\epsilon > 0$ 为任一给定常数。

下文提出的反馈混沌化方法需要用到离散控制系统的相对阶概念。记

$$\hat{F}^i(x, u) = F^u \circ \cdots \circ F^u \circ F^u(x), \quad i \geq 1,$$

其中, $\circ$ 为函数复合记号, $F^u(\cdot) = F(\cdot, u)$ 。系统(3.52)称为在点 $(\bar{x}, \bar{u})$ 具有相对阶 r 。如果在点 $(\bar{x}, \bar{u})$ 的一个邻域内,有

$$\frac{\partial}{\partial u} \{h \circ \hat{F}^i(x, u)\} = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1,$$

和

$$\frac{\partial}{\partial u} \{h \circ \hat{F}^r(x, u)\} \neq 0。$$

从直观上看,相对阶 r 表示的是, $k=0$ 时刻的输入首次对系统输出产生直接影响的未来时刻。对于线性离散控制系统,相对阶为极点和零点个数之差。

有些非线性系统可能没有适当的相对阶。例如,考虑受控的 Logistic 映射

$$x_{k+1} = u_k x_k (1 - x_k),$$

u_k 的标称值为 $\bar{u}=0.4$, 未受控的 Logistic 映射具有指数稳定的平衡点 $\bar{x}=0$, 并且受控 Logistic 映射在该点没有相对阶定义。事实上, 对于任何形式的控制输入 $u_k = \bar{u} + \Delta u_k$, 只要 Δu_k 的幅值 $\varepsilon < 1 - \bar{u} = 0.6$, 那么, 平衡点 $\bar{x}=0$ 也仍然是受控 Logistic 映射的指数稳定平衡点。

根据非线性控制系统理论[Isidori, 1995], 如果系统(3.52)在不动点 $(\bar{x}, \bar{u})$ 具有相对阶 r , 那么 $1 \leq r \leq n$, 并且函数 $h \circ \hat{F}^i(x, u)$ ($1 \leq i \leq r-1$) 只与 x 有关而与 u 无关。因此, 记

$$h \circ \hat{F}^i(x, u) = h \circ \hat{F}^i(x, *), \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

现在引入局部状态坐标变换。记

$$\begin{cases} \phi_1(x) = h(x), \\ \phi_2(x) = h \circ \hat{F}^1(x), \\ \dots \\ \phi_r(x) = h \circ \hat{F}^{r-1}(x). \end{cases}$$

如果 $r < n$, 那么记

$$\Psi_1(x) = [\phi_1(x) \quad \dots \quad \phi_r(x)]^T.$$

再选取 $n-r$ 个光滑函数, 记为

$$\Psi_2(x) = [\phi_{r+1}(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)]^T,$$

使得映射

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix} = \Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

满足

$$\Psi(\bar{x}) = 0, \quad \det \frac{\partial \Psi}{\partial x} \bigg|_{\bar{x}} \neq 0.$$

在坐标变换(3.53)下, 系统(3.52)变为:

$$\begin{cases} \zeta_{i,k+1} = \zeta_{i+1,k}, \\ \zeta_{r,k+1} = \alpha(\zeta_k, \eta_k, u_k), \\ \eta_{k+1} = \beta(\zeta_k, \eta_k, u_k), \\ y_k = \zeta_{1,k}. \end{cases} \quad (3.54)$$

式中

$$\alpha(\zeta_k, \eta_k, u_k) = h \circ \hat{F}^r(\Psi^{-1}(\zeta_k, \eta_k), u_k),$$

$$\beta(\zeta_k, \eta_k, u_k) = \Psi_2(F(\Psi^{-1}(\zeta_k, \eta_k), u_k)).$$

系统(3.54)称为系统(3.52)的标准型, 其中变量 ζ 和 η 分别对应于系统的内部和

外部行为。

标称系统(其中 $u_k \equiv \bar{u}$)的不动点 $\bar{x}$ 的指数稳定性,意味着控制系统(3.52)至少是局部输入状态稳定的(ISS)[Isidori, 1995]。即存在两个正常数 ϵ 和 σ ,使得如果

$$|\Delta u_k| \leq \epsilon, \quad k \geq 0,$$

且

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta,$$

那么,当 $k > 0$ 时有

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \delta。$$

根据构造,有

$$[\zeta^T \eta^T]^T = \Psi(\bar{x}) = 0。$$

因此,如果 $\eta = \Psi_2(x)$ 是合适的坐标变换,那么对任何非零常数 τ , $\hat{\eta} = \tau \Psi_2(x)$ 也是合适的坐标变换。因而 $\hat{\eta}$ 的幅值可任意小。此时,对系统(3.54)的第二个方程的近似线性化可得

$$\begin{cases} \zeta_{i,k+1} = \zeta_{i+1,k}, \\ \zeta_{r,k+1} \approx \alpha_1 \zeta_{1,k} + \cdots + \alpha_r \zeta_{r,k} + \beta \Delta u_k, \end{cases} \quad (3.55)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial \alpha(0,0,\bar{u})}{\partial \zeta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \beta &= \frac{\partial \alpha(0,0,\bar{u})}{\partial u} \neq 0。 \end{aligned}$$

如果取

$$\Delta u_k = \sigma y_k \pmod{\epsilon},$$

那么,系统(3.55)可近似看作一个分段线性系统,其 Lyapunov 指数由特征多项式

$$p(s) = s^r - \alpha_r s^{r-1} - \cdots - \alpha_2 s - \alpha_1 - \beta \sigma$$

的根确定。显然,对充分大的 σ ,多项式 $p(s)$ 至少有一个根的幅值大于 1,即系统(3.55)至少有一个正的 Lyapunov 指数,从而使得受控系统在一个有界区域内产生混沌行为。

例 3.3 考虑一个三维线性控制系统

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k} - x_{2,k} + x_{3,k}, \\ x_{2,k+1} = 0.2x_{1,k} - 0.5x_{2,k} + 0.1x_{3,k} + u_k, \\ x_{3,k+1} = -0.3x_{2,k} + 0.1x_{3,k}。 \end{cases} \quad (3.56)$$

在不加控制($u_k \equiv 0$)时,上述线性系统是渐近稳定的。假设系统输出为 $y_k = x_{3,k}$ 。容易验证,系统具有相对阶 2。取控制输入为

$$u_k = \sigma y_k \pmod{\epsilon}.$$

图 3.10 显示了当取 $\epsilon=0.1$ 和 $\sigma=10$ 时,控制系统的混沌行为。

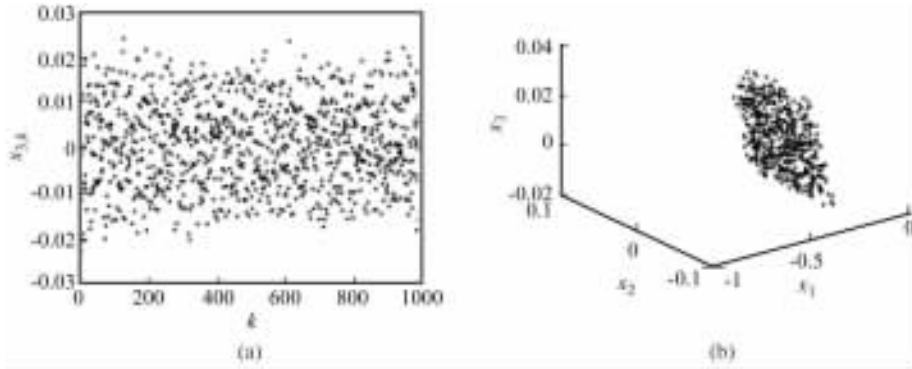


图 3.10 $\epsilon=0.1$ 和 $\sigma=10$ 时控制系统(3.56)的混沌行为

例 3.4 考虑二阶 Hénon 映射

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + 0.3x_{k-1}. \quad (3.57)$$

当参数 a 从零增大时,Hénon 映射经由倍周期分岔走向混沌。当 $0 < a < 0.35$ 时,Hénon 映射有一对稳定的不动点

$$x^\pm = \frac{-0.7 \pm \sqrt{0.49 + 4a}}{2a}.$$

取 $\bar{a}=0.2$,则 Hénon 映射的一个稳定平衡点为 $x^+=1.0895$ 。考虑如下参数扰动

$$a_k = \bar{a} + \Delta a_k,$$

式中

$$\Delta a_k = \sigma(x_{k-1} - x^+) \pmod{\epsilon}.$$

受控 Hénon 映射

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 1 - a_k x_k^2 + 0.3x_{k-1} \\ &= 1 - \bar{a}x_k^2 + 0.3x_{k-1} - x_k^2 \Delta a_k, \end{aligned}$$

当 σ 充分大时可以产生混沌行为。

事实上,可以采用更简单的控制器

$$\Delta a_k = \sigma x_{k-1} \pmod{\epsilon}.$$

仿真结果表明,当 $0 < \epsilon < 1.2, \sigma > 4.7$ 时,受控 Hénon 映射能产生混沌行为。图 3.11 显示当 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=10$ 时,受控 Hénon 映射的混沌行为。

此外,即使原系统具有稳定的多周期轨道,也可以用上述方法使系统产生混沌行为。例如,当 $\bar{a}=1$ 时,未受控 Hénon 映射具有一个稳定的周期 4 轨道

$$\{1.27498, -0.65636, 0.95169, -0.10263\}.$$

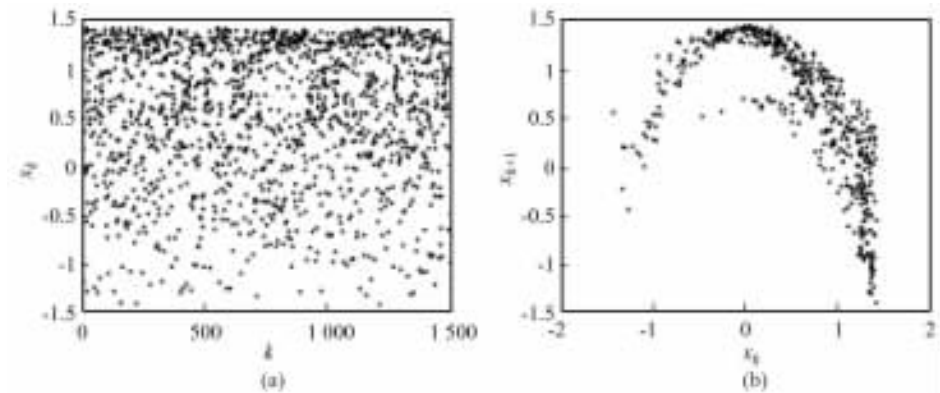


图 3.11 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=10$ 时受控 Hénon 映射的混沌行为

固定 $\sigma=10$ 。图 3.12(a)~(d) 分别显示了, 当 $\epsilon=0.03, 0.07, 0.11, 0.20$ 时受控 Hénon 映射的混沌行为。

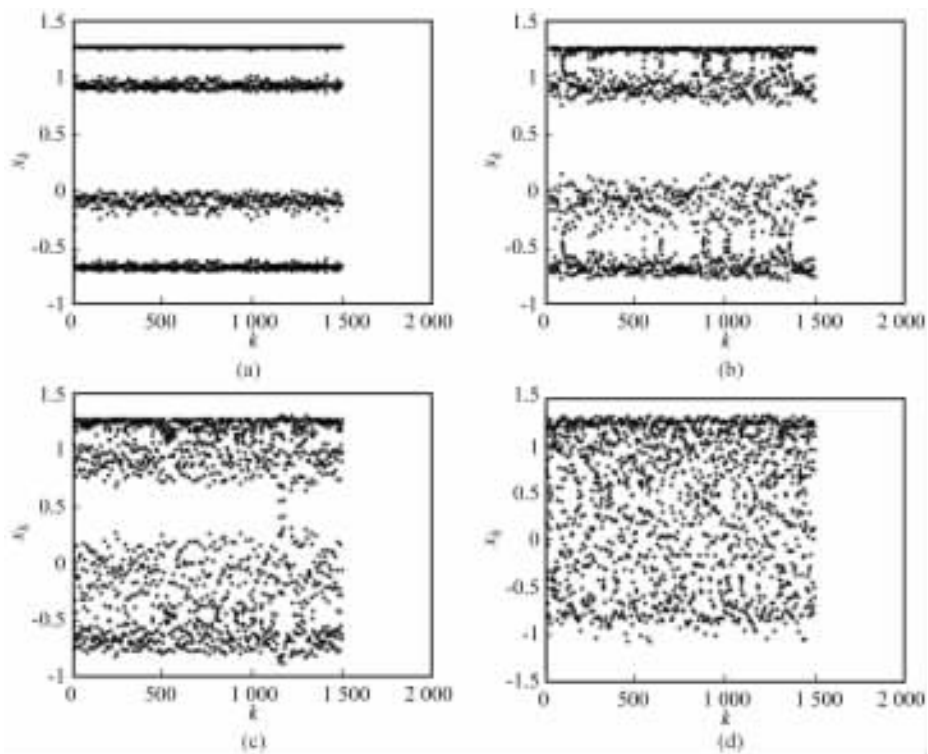


图 3.12 固定 $\sigma=10$ 时受控 Hénon 映射的混沌行为:

(a) $\epsilon=0.03$; (b) $\epsilon=0.07$; (c) $\epsilon=0.11$; (d) $\epsilon=0.20$

3.6 一维映射的光滑反馈混沌化

考虑一维离散时间控制系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad (3.58)$$

式中, f 为关于 x 和 u 的可微函数。作如下假设:

假设 A-1 标称映射

$$x_{k+1} = f(x_k, \bar{u}) \quad (3.59)$$

具有一个指数稳定不动点 x^* , 即

$$x^* = f(x^*, \bar{u}), \quad |f'_x(x^*, \bar{u})| < 1. \quad (3.60)$$

假设 A-2 $f'_x(\cdot, u)$ 是连续的, 且 $f'_u(x^*, \bar{u}) \neq 0$ 。

目标为设计一个光滑的反馈控制器

$$u_k = \bar{u} + \Delta u_k, \quad (3.61)$$

满足

$$|\Delta u_k| \leq \epsilon,$$

式中, $\epsilon > 0$ 为任一给定常数, 使得受控系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \equiv g(x_k) \quad (3.62)$$

在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

定理 3.7 考虑控制系统 (3.62)。如果假设 A-1 和 A-2 成立, 且存在两个正常数 $\bar{\delta}$ 和 $\bar{\epsilon}$, 使得

$$|x_0 - x^*| < \bar{\delta}, \quad |u_k - \bar{u}| < \bar{\epsilon}, \quad k \geq 0, \quad (3.63)$$

那么

$$|x_k - x^*| < \bar{\delta}, \quad k \geq 0. \quad (3.64)$$

证明: 由于

$$|f'_x(x^*, \bar{u})| < 1,$$

根据 $f'_x(\cdot, u)$ 的连续性, 存在正常数 $\bar{\delta}$, 使得当 $|x - x^*| < \bar{\delta}$ 时, 有

$$|f'_x(x, \bar{u})| < 1.$$

因此, 当 $|x - x^*| < \bar{\delta}$ 时, 有

$$|f(x, \bar{u}) - x^*| = |f(x, \bar{u}) - f(x^*, \bar{u})| < |x - x^*| < \bar{\delta}.$$

再由函数 f 的连续性, 存在正常数 $\bar{\epsilon}$, 使得当

$$|x - x^*| < \bar{\delta}, \quad |u - \bar{u}| < \bar{\epsilon}$$

时, 有

$$|f(x, u) - x^*| < \bar{\delta}.$$

这意味着如果 (3.63) 成立, 那么就有

$$|x_{k+1} - x^*| = |f(x_k, u_k) - x^*| < \bar{\delta}, \quad k \geq 0.$$

定理 3.8 考虑控制系统(3.62)。如果假设 A-1 和 A-2 成立,控制器为

$$u_k = \bar{u} + \epsilon \sin(\sigma(x_k - x^*)), \quad (3.65)$$

并且如果存在两个正常数 $\bar{\delta}$ 和 $\bar{\epsilon}$,使得

$$|x_0 - x^*| < \bar{\delta}, \quad 0 < \epsilon < \bar{\epsilon},$$

那么

$$|x_k - x^*| < \bar{\delta}, \quad k \geq 0.$$

且对任意给定满足 $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ 的常数 ϵ , 存在正常数 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\epsilon)$, 使得当 $\sigma > \bar{\sigma}$ 时, 系统(3.62)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明:不失一般性,假设 $x^* = 0, \bar{u} = 0$ 。控制系统(3.62)变为:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) = f(x_k, \epsilon \sin(\sigma x_k)) \equiv g(x_k). \quad (3.66)$$

上式在点 $(x^*, \bar{u}) = (0, 0)$ 的线性化为

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k = ax_k + b\epsilon \sin(\sigma x_k) \equiv g_1(x_k), \quad (3.67)$$

式中

$$a = f'_x(0, 0), \quad b = f'_u(0, 0).$$

显然,

$$g'(0) = g'_1(0) = a + b\epsilon\sigma.$$

对任何给定正常数 ϵ , 如果 $\sigma > \sigma_1 \equiv (1-a)/(b\epsilon)$, 那么 $g'(0) = g'_1(0) > 1$ 。这意味着, $x^* = 0$ 是系统(3.66)和(3.67)的一个双曲不动点。根据 Hartman-Grobman 线性化定理[Chen & Dong, 1998], 存在正常数 δ_1 , 使得当 $|x| < \delta_1$ 时, $g(x)$ 和 $g_1(x)$ 是拓扑共轭的。

再由定理 3.7 的证明可知, 存在两个正常数 $\bar{\delta} \leq \delta_1$ 和 $\bar{\epsilon}$, 使得当

$$|x_0 - x^*| < \bar{\delta}, \quad 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$$

时

$$|x_k - x^*| < \bar{\delta}, \quad k \geq 0,$$

并且 $g(x)$ 和 $g_1(x)$ 仍是拓扑共轭的。

现在证明系统(3.67)的不动点 $x^* = 0$ 是一个回归排斥子。为此, 首先注意到

$$g'_1(x) = a + b\epsilon\sigma \cos(\sigma x).$$

如果

$$|x| < r \equiv \frac{1}{\sigma} \cos^{-1}\left(\frac{1-a}{b\sigma\epsilon}\right),$$

那么 $|g'_1(x)| > 1$ 。易见, 如果

$$\sigma > \sigma_2 \equiv \frac{3a\pi}{2b\epsilon},$$

那么

$$g_1\left(\frac{\pi}{2\sigma}\right) > 0, \quad g_1\left(\frac{3\pi}{2\sigma}\right) < 0。$$

这意味着存在常数 β , $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$, 使得在点 $x_1 = \beta\pi/\sigma$, 有

$$g_1(x_1) = g_1\left(\frac{\beta\pi}{\sigma}\right) = 0。$$

由于

$$\begin{aligned} g_1(r) &= ar + b\epsilon \sin(\sigma r) \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(a \cos^{-1} \left(\frac{1-a}{b\sigma\epsilon} \right) + \sqrt{\sigma^2 b^2 \epsilon^2 - (1-a)^2} \right), \end{aligned}$$

存在常数 $\sigma_3 > 0$, 如果使得 $\sigma > \sigma_3$, 那么

$$g_1(0) = 0 < x_1, \quad g_1(r) > x_1。$$

这意味着存在点 x_0 , $|x_0| < r$, 使得 $g_1(x_0) = x_1$ 。于是

$$g_1^2(x_0) = g_1(x_1) = 0。$$

显然, 当 $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$ 时, 有

$$\cos(\alpha x_1) = \cos(\beta\pi)。$$

因此存在正常数 σ_4 , 使得如果 $\sigma > \sigma_4$, 那么

$$g_1'(x_1) = a + b\epsilon\sigma \cos(\alpha x_1) < 0,$$

而且由于

$$|x_0| < r = (1/\sigma) \cos^{-1} \left(\frac{1-a}{b\sigma\epsilon} \right),$$

故有

$$g_1'(x_0) > 0。$$

从而

$$(g_1^2)'(x_0) = g_1'(x_0)g_1'(x_1) \neq 0。$$

综上所述, 如果

$$\sigma > \bar{\sigma} \equiv \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\},$$

那么, $x^* = 0$ 是系统(3.67)的一个回归排斥子, 这说明系统(3.66)和(3.67) 在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

作为一个应用例子, 考虑一个处于不连续模式简单的反馈推进切换调节器(图 3.13)。通常, 开关和二极管是按互补方式打开或关闭的, 故感应电流始终是非零的。我们称这时的电路处于连续模式。如果电感太小或者开关周期相对太长, 感应电流就可能在下一个周期开始之前下降到零, 从而就有一段“空载”区间使得二

极管 D 和开关 S 不导电。这一运行模式称为不连续模式[Tse, 1994]。这一系统中的混沌行为是由反馈器产生的, 因为开环系统是稳定的。

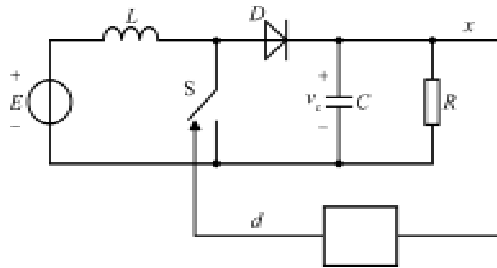


图 3.13 反馈推进切换调节器

不连续模式变流器是按周期 T 周期性地驱动的, 其输出电压动力行为可由映射

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \frac{\beta d_k^2 E^2}{x_k - E} \quad (3.68)$$

描述, 式中, x_k 为 $t = kT$ 时刻的输出电压, E 为输入电压, d_k 是相应的占空因数,

$$\alpha = 1 - \frac{T}{CR} + \frac{T^2}{2C^2 R^2}, \quad \beta = \frac{T^2}{2LC}.$$

如果占空因数是输出电压的函数, 那么系统就处于闭环状态。

文献[Chan & Tse, 1998]中考虑了如下的线性反馈

$$d_k = D + \kappa(x_k - X), \quad (3.69)$$

式中, D 和 X 分别表示定态占空因数和输出电压。以反馈增益 κ 为分岔参数, 控制系统(3.68)~(3.69)具有典型的经由倍周期分岔走向混沌的道路。文献[Chan & Tse, 1998]给出了控制系统(3.68), (3.69)具有负的 Schwarz 导数的一个简单的充分条件。但是负的 Schwarz 导数只是出现通向混沌的倍周期分岔序列的必要条件。而且由于饱和和非线性的作用, 占空因数的值被限制在区间 $[0, 1]$ 上, 即 $0 \leq d \leq 1$, 这只是为使系统有界, 而上界是永远不应该达到的。为此, 在实验中须选取一个相对小的定态占空因数和相对高的初始输出电压。

考虑采用如下小幅值高频反馈控制器:

$$d_k = D + \epsilon \sin(\sigma(x_k - X)). \quad (3.70)$$

采用反馈控制(3.70)的一个好处是, 只要 $\epsilon \in (0, 1 - D)$ 就能保证 $d \in [0, 1]$ 。而且由定理 3.7 可知, 当 σ 充分大时, 控制系统(3.68), (3.70)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

例如, 考虑如下系统参数

$$\alpha = 0.8872, \quad \beta = 1.2, \quad E = 16, \quad D = 0.2874, \quad X = 25.$$

ϵ 可为区间 $(0, 1-D)$ 中的任一常数。图 3.14 是当 $\epsilon=0.2$ 时控制系统 (3.68)~(3.70) 的分岔图。

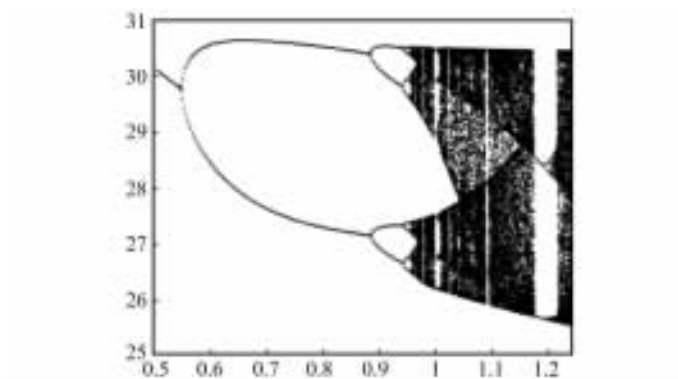


图 3.14 当 $\epsilon=0.2$ 时控制系统 (3.68)~(3.70) 的分岔图

第4章

离散时间反馈混沌化的应用

4.1 离散时间神经网络的反馈混沌化设计

神经系统活动中的混沌现象是近年来引人关注的一个重大课题。美国加州大学 Berkeley 分校的 Freeman 教授曾经指出[Freeman, 1995]:“大脑中被控制的混沌现象其实不仅仅是大脑复杂性的一种副产品”,而控制混沌现象的能力“可能是大脑区别于任何一种人工智能机器的主要特性”。伴随着对生物(人脑)神经系统的混沌的探索过程,众多学者也开始剖析人工神经网络模型的复杂动力学行为。近年来,人们相继提出了多种混沌神经网络模型,并用于联想记忆、模式识别、信息处理、组合优化、同步与通信等领域。其中,用于组合优化的混沌神经网络引起了人们的很大兴趣。人们相继提出并研究了改造后(如神经元状态自反馈、离散步长周期衰减、引入混沌噪声等)的混沌 Hopfield 网络和暂态混沌神经网络。在这些模型中,混沌被激发以避免陷于局部极小,并最终在某种退火机制下衰减,以确保优化求解收敛到全局最小,其中的混沌退火机制或搜索收敛条件成为关键。

本节将给出使神经网络产生混沌行为的系统性设计方法。一个包含 n 个神经元的离散时间连续状态神经网络,可用如下微分方程描述:

$$\dot{x}_{k+1}^i = f_i(x_k^i) + g_i(x_k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

式中, $x_k = [x_k^1 \ \cdots \ x_k^n]^T$ 为时刻 k 网络的状态, $f_i(x_k^i)$ 表示第 i 个神经元的自反馈, $g_i(x_k)$ 表示第 i 个神经元与其他神经元的耦合。

方程(4.1)可写为如下向量形式:

$$\dot{x}_{k+1} = f(x_k) + g(x_k), \quad (4.2)$$

式中

$$f(x_k) = [f_1(x_k^1) \ \cdots \ f_n(x_k^n)]^T, \quad g(x_k) = [g_1(x_k) \ \cdots \ g_n(x_k)]^T.$$

假设 $g(x)$ 是连续可微的, $g(0)=0$, 且存在正常数 G , 使得

$$\|g(x)\|_{\infty} \leq G, \quad x \in \mathcal{R}^n. \quad (4.3)$$

一个常见的耦合结构是

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{W} \tanh(\mathbf{V} \mathbf{x}_k) \quad (4.4)$$

式中, $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{V}$ 为两个常数矩阵, 双曲正切函数定义为

$$\begin{aligned} \tanh(\mathbf{x}) &= [\tanh(x^1) \quad \cdots \quad \tanh(x^n)]^T, \\ \tanh(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)}, \quad z \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

易见

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_\infty \leq \|\mathbf{W}\|_\infty \|\tanh(\mathbf{V} \mathbf{x})\|_\infty \leq \|\mathbf{W}\|_\infty, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n.$$

假设局部自反馈项是一致有界的, 即

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x^i)| \leq \epsilon, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n. \quad (4.5)$$

于是对任意初始条件 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n$, 有

$$\|\mathbf{x}_k\|_\infty \leq (\epsilon + G), \quad k > 0.$$

系统(4.2)的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) = \text{diag}\{f'_1(x_k^1) \quad \cdots \quad f'_n(x_k^n)\} + \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k),$$

记 N 为一个正常数, 满足

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{x})\| \leq N, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq (\epsilon + G).$$

由第 2 章可知, 如果存在两个正常数 σ 和 c , 使得当

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq (\epsilon + G)$$

时, 有

$$f'_i(x) \geq \sigma > N + e^c, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad (4.6)$$

那么系统(4.2)的 Lyapunov 指数全为正。

上述分析表明, 一个具有大的反馈增益的局部有界自反馈, 会在一个有界区域内产生混沌行为。事实上, 可以取自反馈项为锯齿函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \text{saw}_\epsilon(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_k) \equiv [\text{saw}_\epsilon(\alpha x_k^1) \quad \cdots \quad \text{saw}_\epsilon(\alpha x_k^n)]^T,$$

此时, 离散时间混沌神经网络可描述为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{saw}_\epsilon(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k). \quad (4.7)$$

由第 3 章知道, 当 σ 充分大时, 系统(4.7)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。仿真表明, 这种混沌行为对耦合项的扰动具有鲁棒性。

例 4.1 考虑如下含 3 个神经元的网络模型:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{saw}_\epsilon(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_k) + \mathbf{W} \tanh(\mathbf{V} \mathbf{x}_k), \quad (4.8)$$

式中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1.6663 & -0.7588 & 1.1636 \\ -0.0571 & -0.3085 & -0.1793 \\ -0.8565 & -1.0656 & -0.5651 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.0542 & -0.4616 & -1.1819 \\ -1.1169 & 0.2699 & -0.6723 \\ 0.8167 & -0.1313 & 0.0912 \end{bmatrix}.$$

由于

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{W}\| \|\mathbf{V}\| \approx 3.8547,$$

当

$$\sigma > \|\mathbf{W}\| \|\mathbf{V}\| + 1 \approx 4.8547, \quad \varepsilon > 0$$

时,系统(4.8)的 Lyapunov 指数全为正。在 $\varepsilon=0$ 的特殊情形(即没有自反馈),系统(4.8)可写为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{W} \tanh(\mathbf{V} \mathbf{x}_k).$$

由线性系统稳定性分析可知,该系统有一个不稳定不动点 $\mathbf{x}^* = [0 \ 0 \ 0]^T$ 和两个局部稳定不动点(见图 4.1):

$$\bar{\mathbf{x}} = [3.4820 \ 0.1838 \ 1.3086]^T, \quad \underline{\mathbf{x}} = [-3.4820 \ -0.1838 \ -1.3086]^T.$$

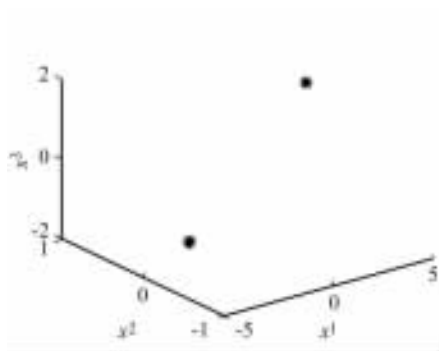


图 4.1 没有自反馈时系统(4.8)的两个局部稳定不动点

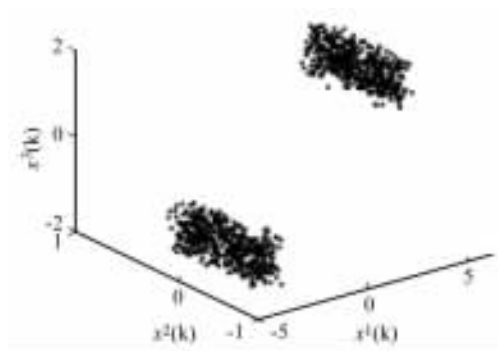


图 4.2 当 $0 < \varepsilon < 1.2$ 时,系统(4.8)具有两个独立的混沌吸引子

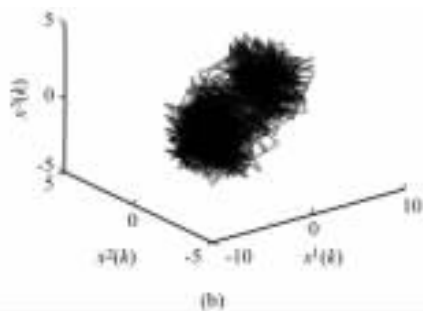
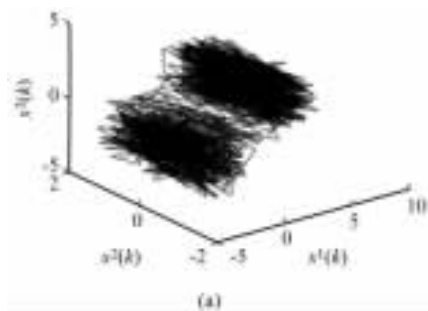


图 4.3 (a) 当 $1.2 < \varepsilon < 1.8$ 时,系统(4.8)具有一个双卷形的混沌吸引子;
(b) 当 $\varepsilon > 1.8$ 时,系统(4.8)具有一个单带的混沌吸引子

当 $0 < \epsilon < 1.2$ 时,系统(4.8)具有两个独立的混沌吸引子,它们分别在具有自反馈系统的两个稳定不动点的吸引域内(图 4.2)。当 $1.2 < \epsilon < 1.8$ 时,系统(4.8)具有一个双卷形的混沌吸引子(图 4.3(a))。当 $\epsilon > 1.8$ 时,系统(4.8)具有一个单带的混沌吸引子(图 4.3(b))。

4.2 SISO 非线性 Elman 网络的混沌化设计

本节和下一节在标准的(非混沌的)Elman 网络结构下,通过引入一种新的非线性神经元激励函数而构成混沌的 Elman 网络[Li, *et al.*, 2001; Li, *et al.*, 2002]。

4.2.1 混沌 Elman 网络

SISO(单输入单输出)的标准(非线性)Elman 网络的结构如图 4.4 所示,其中记忆层 $x^c(k)$ 满足通常的定义:

$$x^c(k) = x(k-1)。$$

这样,图 4.4 中的标准 Elman 网络的方程(即状态空间方程形式)为

$$x_i(k) = f\left(\sum_{j=1}^N w_{i,j}^x x_j(k-1) + w_i^u u(k-1)\right), \quad (4.9)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^N w_i^y x_i(k), \quad (4.10)$$

式中, $w_{i,j}^x$ 是第 i 个隐层神经元与第 j 个记忆层神经元之间的连接权值, w_i^u 是输入神经元 $u(k-1)$ 和第 i 个隐层神经元之间的连接权值, w_i^y 是输出神经元 $y(k)$ 和第 i 个隐层神经元之间的连接权值, $f(\cdot)$ 是隐层神经元中的非线性激励函数, N 是隐层神经元的节点数目。在非线性系统的建模与控制中,隐层神经元的激励函数通常选择为 Sigmoid 类函数,例如

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

或双曲正切函数。标准 Elman 网络只有不动点和周期解,而不可能呈现出混沌的动力学行为。

为混沌化 Elman 网络,引入如下的非线性函数作为隐层神经元的激励函数:

$$g(x) = \sqrt{e} \frac{g_m}{R} x e^{-\frac{x^2}{2R^2}}。 \quad (4.11)$$

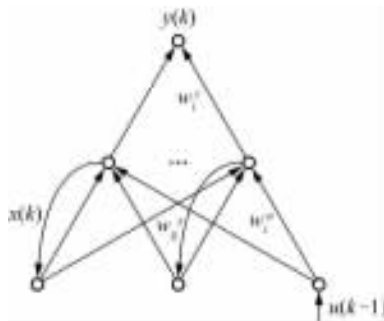


图 4.4 Elman 网络的结构

首先, $g(x)$ 具有如下的动态特性:

- (1) $g(0)=0$, 即在没有输入信息时, 神经元的激励状态为 0;
- (2) 如果将自变量 x 当作是系统(4.9), (4.10)的游动能量, 则 x 很大, 表明此时系统具有摆脱整个大吸引域的能力而走向发散, 故 $g(x)$ 应该足够小, 使得神经元的激励状态能够重新被拉入产生混沌的整个大吸引域中;
- (3) 当 x 处于中间值的状态或者很小时, 此时 $g(x)$ 的激励作用将产生新的游动能量, 以确保神经元的激励状态不断在吸引域内作“漫游”。

其次, (4.11) 式中的 g_m 和 R 可以看作是非线性激励驱动的幅度和半径, 通过调节这两个参数来控制神经元激励状态的活动范围。当 R 固定时, g_m 决定激励状态的动力学系统在运动空间转移的动力, g_m 越大则激励状态的运动范围也越大。

图 4.5(a) 是非线性激励函数(4.11)在 $g_m=2.5, R=0.5$ 时的形状曲线, 图 4.5(b) 是在 $g_m=2.5, R=0.4$ 和初始状态 $x(0)=0.1$ 下的激励状态, 相应的 Lyapunov 指数为 $\lambda=0.5012$ 。

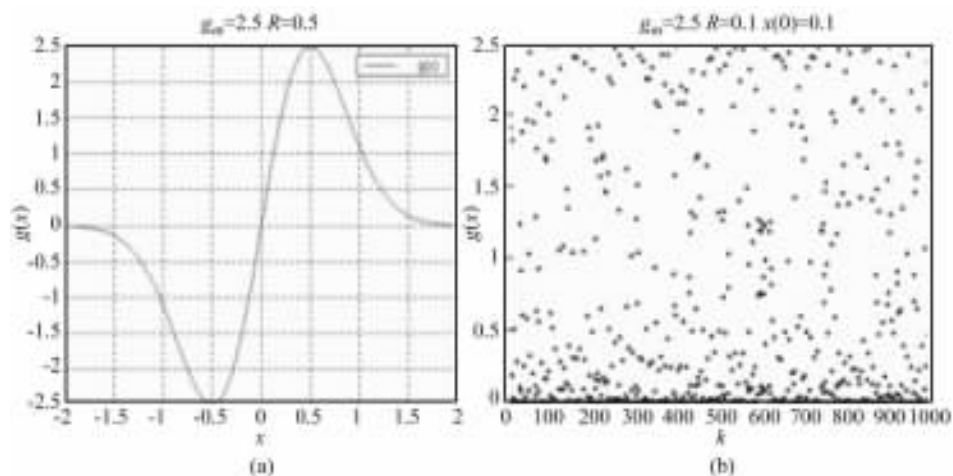


图 4.5 $g(x)=\sqrt{e} \frac{g_m}{R} x e^{-\frac{x^2}{2R^2}}$ 示意图

- (a) 激励函数 $g(x), g_m=2.5, R=0.5$ 形状 (b) 函数 $g(x), g_m=2.5, R=0.4, x(0)=0.1$ 状态

将输出反馈到输入神经元, 即

$$u(k-1) = y(k-1)。$$

(4.9), (4.10) 式可以重新写成:

$$I_i(k) = \sum_{j=1}^N w_{i,j}^x x_j(k-1) + w_i^y y(k-1), \quad (4.12)$$

$$x_i(k) = g(I_i(k)) = \sqrt{e} \frac{g_m}{R} I_i(k) e^{-\frac{I_i(k)^2}{2R^2}}, \quad (4.13)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^N w_i^y x_i(k). \quad (4.14)$$

系统(4.12)~(4.14)在初始权值连接下,隐含层单元节点和输出节点就可以观察到混沌现象。图 4.6 是在一组分布在 $[0, 0.5]$ 的随机产生的权值连接下,隐含层有 3 个节点的混沌 Elman 网络在激励函数参数为 $g_m=1, R=0.4$ 时,其隐含层节点和输出节点激励状态的 Poincare 截面图。

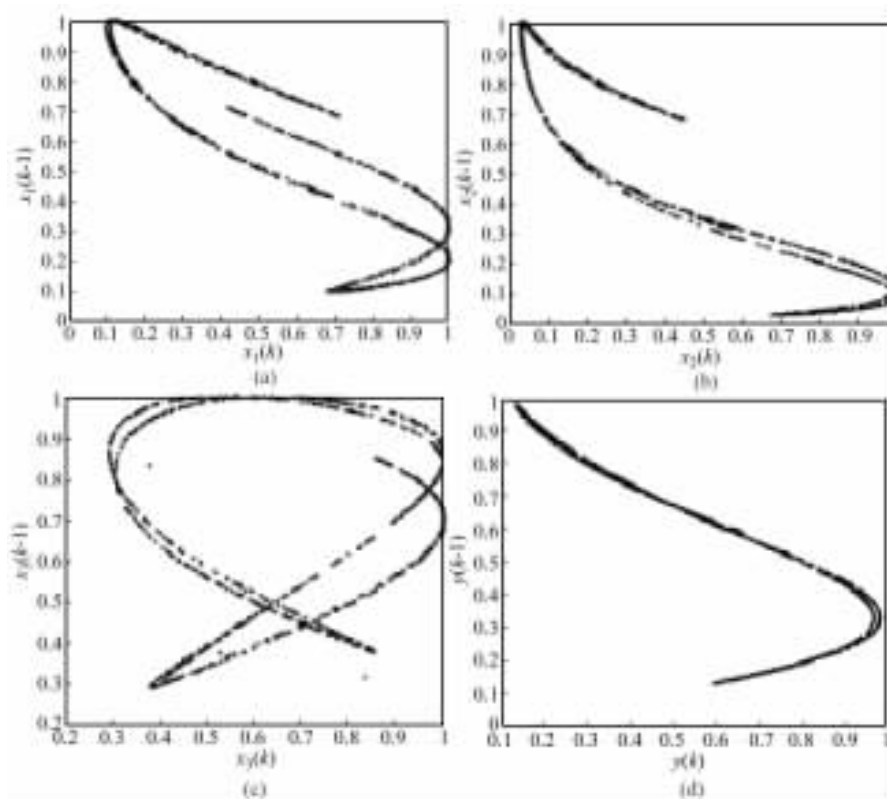


图 4.6 混沌 Elman 网络:隐含层节点和输出节点激励状态的 Poincare 截面图

- (a) 隐层神经元 x_1 激励状态 (b) 隐层神经元 x_2 激励状态
(c) 隐层神经元 x_3 激励状态 (d) 输出神经元 y 激励状态

4.2.2 不动点稳定判据与混沌生成准则

在这一小节中,将讨论混沌 Elman 网络的不动点稳定性和 Lyapunov 指数,同

时,也将分析隐层神经元激励函数的参数 g_m 和 R 对于整个动态网络的影响。不失为一般性,这里对网络规模稍作简化,仅考虑隐含层只有一个神经元的情形,并且所有的初始权值都是从 $[0, 0.5]$ 之间随机产生。显然,此时隐层神经元和输出神经元的激励状态都是正的。(4.12)~(4.14)式可以简化为:

$$y(k) = w^o x(k), \quad (4.15)$$

$$I(k) = w^c x(k-1) + w^l y(k-1), \quad (4.16)$$

$$x(k) = \sqrt{e} \frac{g_m}{R} I(k) e^{-\frac{I(k)^2}{2R^2}} \equiv g(I(k)). \quad (4.17)$$

A. 不动点稳定性分析

令隐含层节点激励状态 $x(k)$ 的不动点为 $\bar{x}$, 输出层节点状态 $y(k)$ 的不动点为 $\bar{y}$ 。由(4.15)式,有 $\bar{y} = W^o \bar{x}$ 。因此下面只着重讨论隐层神经元节点激励状态的不动点稳定性。

将(4.15), (4.16)式代入(4.17)式,并将相应的 $x(k-1)$ 用 $\bar{x}$ 替换,得到

$$\bar{x} = \sqrt{e} \frac{g_m}{R} (w^c + w^l w^o) \bar{x} e^{-\frac{(w^c + w^l w^o)^2 \bar{x}^2}{2R^2}}. \quad (4.18)$$

令

$$w^c + w^l w^o = w^{\text{clo}}, \quad \sqrt{e} \frac{g_m}{R} w^{\text{clo}} = \pi,$$

则上式可写为:

$$\bar{x} [1 - \pi e^{-\frac{1}{2} (\frac{w^{\text{clo}} \bar{x}}{R})^2}] = 0. \quad (4.19)$$

因为隐层神经元的激励状态恒正,如果 $\pi > 1$, 即

$$\frac{g_m}{R} > \frac{1}{\sqrt{e} w^{\text{clo}}},$$

那么方程(4.19)有两个解

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{2 \ln \pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}};$$

如果

$$\frac{g_m}{R} \leq \frac{1}{\sqrt{e} w^{\text{clo}}},$$

那么(4.19)式只有一个解 $\bar{x} = 0$ 。

根据上面两种不同情况来讨论不动点的稳定性。易知 $g(x)$ 在不动点 $\bar{x}$ 的导数为

$$g'(x) |_{x=\bar{x}} = \pi \left[1 - \left(\frac{w^{\text{clo}} \bar{x}}{R} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{w^{\text{clo}} \bar{x}}{R} \right)^2}. \quad (4.20)$$

若 $|g'(\bar{x})| < 1$, 则不动点 $\bar{x}$ 是稳定的; 如果 $|g'(\bar{x})| > 1$, 则 $\bar{x}$ 是不稳定的不动点。

考虑不动点 $\bar{x}=0$ 。此时 $g'(0)=\pi$, 因此

$$\begin{cases} \frac{g_m}{R} < \frac{1}{\sqrt{e}w^{\text{clo}}}, & \bar{x} = 0, \text{稳定}, \\ \frac{g_m}{R} > \frac{1}{\sqrt{e}w^{\text{clo}}}, & \bar{x} = 0, \text{不稳定}。 \end{cases} \quad (4.21)$$

对于不动点

$$\bar{x} = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}},$$

有

$$g'(\sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}) = 1 - 2\ln\pi, \quad (4.22)$$

不动点

$$\bar{x} = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}$$

的存在已经要求 $\pi > 1$, 故有

$$g'(\bar{x}) = 1 - 2\ln\pi < 1。$$

因此只要满足 $-1 < 1 - 2\ln\pi$, 不动点

$$\bar{x} = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}$$

就是稳定的, 此时要求 $\pi < e$, 即

$$\frac{g_m}{R} < \frac{\sqrt{e}}{w^{\text{clo}}},$$

而当

$$\frac{g_m}{R} > \frac{\sqrt{e}}{w^{\text{clo}}} (\pi > e)$$

时, $1 - 2\ln\pi < -1$, 即 $|g'(\bar{x})| > 1$, 此时不动点

$$\bar{x} = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}$$

不稳定。

综上所述, 得到不动点稳定性判据:

(1) 若

$$\frac{g_m}{R} < \frac{1}{\sqrt{e}w^{\text{clo}}},$$

则有且只有一个不动点 $\bar{x}_s=0$, 并且该不动点是稳定的;

(2) 若

$$\frac{\sqrt{e}}{w^{\text{clo}}} > \frac{g_m}{R} > \frac{1}{\sqrt{e}w^{\text{clo}}},$$

则有两个不动点, $\bar{x}_u = 0$ 是不稳定的,

$$\bar{x}_s = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}$$

是稳定的;

(3) 若

$$\frac{R_m}{R} > \frac{\sqrt{e}}{w^{\text{clo}}},$$

则两个不动点

$$\bar{x}_u^1 = 0, \quad \bar{x}_u^2 = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{w^{\text{clo}}}$$

均为不稳定。

B. 混沌化的参数条件

对一维映射的一条轨迹:

$$x_0, x_1 = h(x_0), \dots, x_n = h(x_{n-1}), \dots,$$

考虑在微小扰动 δx_0 下, 以 $x_0 + \delta x_0$ 为初值所产生的另一映像轨迹。经过 n 步后它与原轨迹的偏差为

$$\delta x_n = h'(x_{n-1})h'(x_{n-2})\cdots h'(x_0)\delta x_0. \quad (4.23)$$

该映射在点 x_0 的 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \lim_{\delta x_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |h'(x_i)|. \quad (4.24)$$

可以求得

$$\begin{aligned} h'(x(k-1)) &= \frac{dx(k)}{dx(k-1)} = \frac{dx(k)}{dI(k)} \frac{dI(k)}{dx(k-1)} \\ &= g'(I(k)) [w^e + w^l w^o], \end{aligned} \quad (4.25)$$

式中

$$g'(I(k)) = x(k) \frac{R^2 - I^2(k)}{I(k)R^2}.$$

对任意小的正实数 $\epsilon > 0$, 如果

$$\frac{dg(x(k-1))}{dx(k-1)} = g'(I(k)) [w^e + w^l w^o] \geq 1 + \epsilon, \quad (4.26)$$

则当

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |h'(x_i)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+\epsilon) = \ln(1+\epsilon) > 0 \quad (4.27)$$

时,Elman 网络是混沌的。因此,若要产生混沌,则要求满足

$$|g'(I(k))(\omega^c + \omega^1 \omega^o)| \geq 1 + \epsilon. \quad (4.28)$$

上式左边满足

$$\begin{aligned} |g'(I(k))(\omega^c + \omega^1 \omega^o)| &= \omega^{\text{clo}} \left| \sqrt{e} \frac{g_m}{R} e^{-\frac{I(k)^2}{2R^2}} - x(k) \frac{I(k)}{R^2} \right| \\ &\geq \omega^{\text{clo}} \left(\left| \sqrt{e} \frac{g_m}{R} e^{-\frac{I(k)^2}{2R^2}} \right| - \left| \frac{x(k)}{R} \frac{I(k)}{R} \right| \right) \\ &\geq \omega^{\text{clo}} \left(\left| \sqrt{e} \frac{g_m}{R} e^{-\frac{I(k)^2}{2R^2}} \right| - \frac{g_m}{R} \left| \frac{I(k)}{R} \right| \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

又令 $\frac{g_m}{R} = t$, 并记 $I(k) = I_k$ 。去掉(4.29)式中的绝对值符号,则有

$$\omega^{\text{clo}} \left(\sqrt{e} e^{-\frac{I_k^2}{2R^2}} - \frac{I_k}{R} \right) t \geq 1 + \epsilon. \quad (4.30)$$

不等式(4.30)有解的条件是

$$\sqrt{e} R e^{-\frac{I_k^2}{2R^2}} > I_k, \quad (4.31)$$

$$t \geq \frac{(1+\epsilon)R}{\omega^{\text{clo}} (\sqrt{e} R e^{-\frac{I_k^2}{2R^2}} - I_k)}. \quad (4.32)$$

为计算 $\frac{g_m}{R} = t$ 的界,对 $e^{-\frac{I_k^2}{2R^2}}$ 做级数展开,并忽略其中的高阶项,得

$$e^{-\frac{I_k^2}{2R^2}} = 1 - \frac{I_k^2}{2R^2} + O(I_k^4) \approx 1 - \frac{I_k^2}{2R^2}. \quad (4.33)$$

考虑二次不等式

$$2\sqrt{e}R^2 - 2RI_k - \sqrt{e}I_k^2 > 0. \quad (4.34)$$

由判别式

$$\Delta = 4I_k^2 - 4 \times 2\sqrt{e}(-\sqrt{e}I_k^2) = (4+8e)I_k^2 > 0,$$

所以(4.34)式永远成立,并且最小值为

$$-\frac{-2R}{2 \times 2\sqrt{e}} = \frac{R}{2\sqrt{e}}.$$

于是有

$$t \geq \frac{(1+\epsilon)R}{\omega^{\text{clo}} \frac{R}{2\sqrt{e}}} = \frac{2\sqrt{e}}{\omega^{\text{clo}}} (1+\epsilon). \quad (4.35)$$

由于已经假设所有权值都属于 $[0, 0.5]$ 这个区间,有

$$|\omega^c + \omega^l \omega^o| = \omega^{clo} < 1。$$

考虑到在(4.33)式中展开级数后所作的忽略,产生混沌要求的参数取值范围可以取为:

$$\frac{g_m}{R} = t \geq 2\sqrt{e}(1+\epsilon) > 2\sqrt{e}。 \quad (4.36)$$

结合前面关于不动点稳定性的判据,最终可以得到如下选择激励函数参数的推断:

(1) 当

$$\frac{g_m}{R} < \frac{1}{\sqrt{e}\omega^{clo}}$$

时,只有一个稳定不动点 $\bar{x}_s = 0$;

(2) 当

$$\frac{\sqrt{e}}{\omega^{clo}} > \frac{g_m}{R} > \frac{1}{\sqrt{e}\omega^{clo}}$$

时,不动点 $\bar{x}_u = 0$,不稳定,而不动点

$$\bar{x}_s = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{\omega^{clo}}$$

是稳定的;

(3) 当

$$\frac{g_m}{R} > \frac{\sqrt{e}}{\omega^{clo}}$$

时,不动点

$$\bar{x}_u^1 = 0, \quad \bar{x}_u^2 = \sqrt{2\ln\pi} \frac{R}{\omega^{clo}}$$

都不稳定;

(4) 在(1)~(3)情形中,如果同时满足

$$\frac{g_m}{R} > 2\sqrt{e},$$

则产生混沌;否则,不会产生混沌。

注 4.1 不动点稳定性判据和混沌产生参数范围都是在单个隐层神经元节点情形下讨论的。如果是对输出神经元节点或多个隐层节点情形,可以类似地讨论。值得指出的是,不等式(4.36)并不是严格数学意义下的混沌生成参数条件,而只是通过级数展开以后的近似处理,用以混沌化 Elman 网络时对激励函数的参数 g_m , R 选择提供指导。

注 4.2 本节为进行上述的解析性讨论,假设所有权值均从 $[0, 0.5]$ 中初始化产生,保证神经元各节点的激励状态恒为正,从而在解析求解过程中可作相应的简化。更加广义的情形,如权值范围在 $[0, A]$ 或 $[-A, A]$ ($A>0$)的情形,可以类似地讨论其解析结论。

4.2.3 仿真研究

在 $[0, 0.5]$ 区间随机获得初始化权值:

$$w^l = 0.2029, \quad w^c = 0.4677, \quad w^o = 0.4585,$$

即有

$$\frac{1}{\sqrt{e}w^{clo}} = 1.0817, \quad \frac{\sqrt{e}}{w^{clo}} = 2.9403.$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{e}w^{clo}} < \frac{\sqrt{e}}{w^{clo}} < 2\sqrt{e}.$$

为验证不动点稳定判据并观察混沌是否产生,选择下面四组不同的激励函数参数:

- (1) $g_m=0.5, \quad R=0.5, \quad \left(\frac{g_m}{R}=1<1.0817\right);$
- (2) $g_m=1.2, \quad R=0.5, \quad \left(1.0817<\frac{g_m}{R}<2.9403\right);$
- (3) $g_m=1.5, \quad R=0.5, \quad \left(2.9403<\frac{g_m}{R}<2\sqrt{e}\right);$
- (4) $g_m=2.5, \quad R=0.5, \quad \left(2\sqrt{e}<\frac{g_m}{R}\right).$

相应的隐层节点激励状态混沌与否和不动点稳定性特征,可以从图 4.7(a)~(d)中观察得到。

图 4.7(a)中,只有一个稳定的不动点 $\bar{x}_s=0$;图(b)中,则可以观察到不稳定不动点 $\bar{x}_u=0$ 和稳定不动点 $\bar{x}_s=1.1258$ 并存;图(c)中可以观察到两个不稳定不动点, $\bar{x}_u^1=0$ 和 $\bar{x}_u^2=1.2737$;图(d)中同样有两个不稳定不动点, $\bar{x}_u^1=0$ 和 $\bar{x}_u^2=1.5603$ 。在图(a)~(c)中均没有发现混沌现象,而图(d)中则显示有混沌的存在,图 4.8 给出了相应的 Lyapunov 指数曲线。

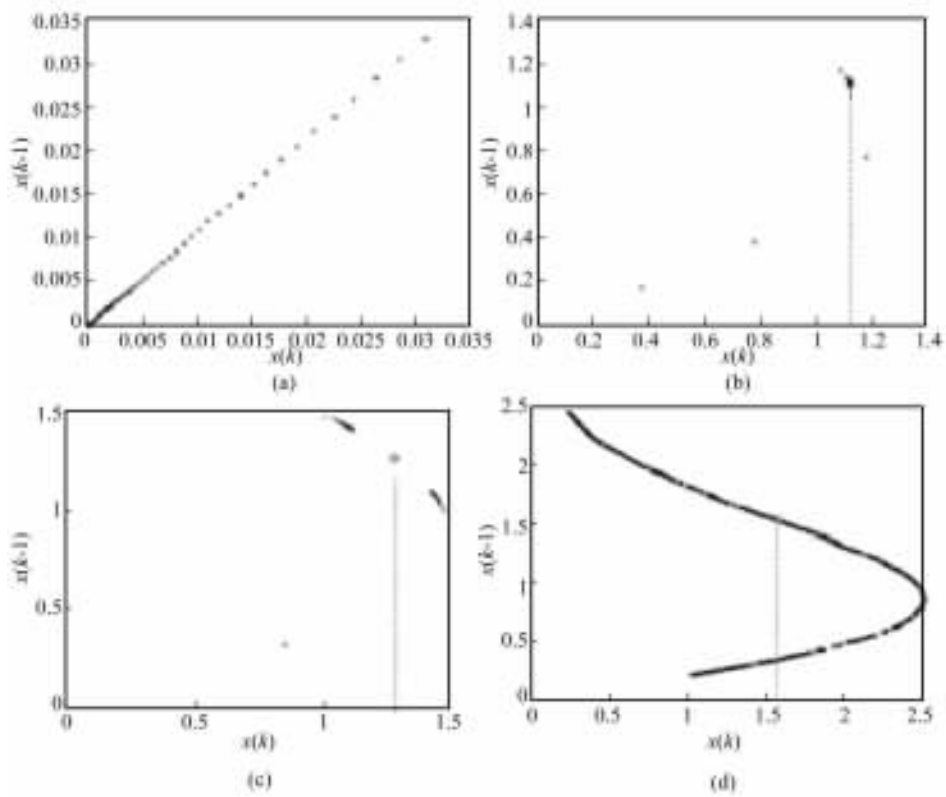


图 4.7 仿真中的神经元激励状态和不动点稳定性特性的 Poincaré 截面图

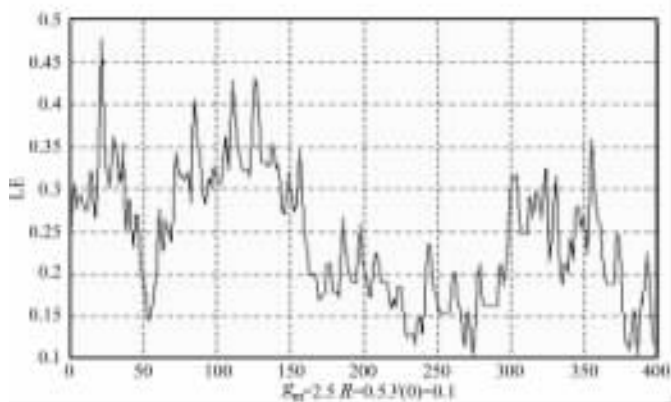


图 4.8 Lyapunov 指数曲线

4.3 MIMO 线性 Elman 网络的混沌化设计

本节通过在 MIMO(多输入多输出)线性 Elman 网络施加一个简单的模运算来获得 Li-Yorke 意义的混沌。不同于上一节在正 Lyapunov 指数意义下分析一维 Elman 网络混沌化激励函数的参数条件,本节着重从网络权值矩阵的角度,阐明使高维 Elman 网络产生 Li-Yorke 混沌的条件。

4.3.1 MIMO 自治线性 Elman 网络

MIMO 线性 Elman 网络可描述如下(图 4.9):

$$x_i(k) = f\left(\sum_{j=1}^N w_{i,j}^x x_j(k-1) + \sum_{m=1}^M w_{i,m}^u u_m(k-1)\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.37)$$

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^N w_{i,l}^y x_i(k), \quad l = 1, \dots, L, \quad (4.38)$$

式中, $w_{i,j}^x$, $w_{i,m}^u$, $w_{i,l}^y$ 分别是连接第 i 个隐层神经元和第 j 个记忆层神经元之间的、第 m 个输入层神经元 $u_m(k-1)$ 和第 i 个隐层神经元之间的、第 i 个隐层神经元和第 l 个输出层神经元 $y_l(k)$ 之间的权值, $f(\cdot)$ 是隐层神经元的线性激励函数, N 是隐层神经元节点的数目。

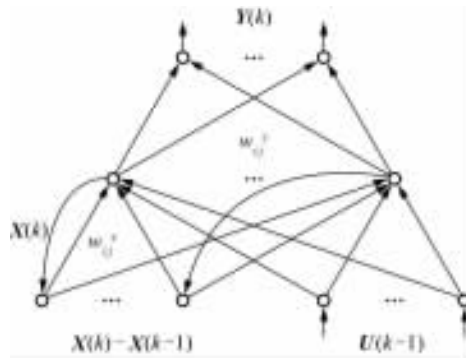


图 4.9 MIMO 的线性 Elman 网络结构

记三个权值矩阵分别为

$$W_x = [w_{i,j}^x]_{N \times N}, \quad W_u = [w_{i,m}^u]_{N \times M}, \quad W_y = [w_{i,l}^y]_{N \times L}.$$

并将(4.37),(4.38)式写成向量形式:

$$X(k) = f(W_x X(k-1) + W_u U(k-1)), \quad (4.39)$$

$$Y(k) = W_y^T X(k). \quad (4.40)$$

式中

$$\mathbf{Y}(k) = [y_1(k) \cdots y_L(k)]^T,$$

$$\mathbf{U}(k-1) = [u_1(k-1) \cdots u_M(k-1)]^T,$$

$$\mathbf{X}(k) = [x_1(k) \cdots x_N(k)]^T.$$

为简单起见,采用线性激励函数 $f(x)=x$,则式(4.39),(4.40)可改写为:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}_x \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{W}_u \mathbf{U}(k-1), \quad (4.41)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{W}_y^T \mathbf{X}(k). \quad (4.42)$$

若将输出神经元的激励状态反馈到输入神经元,则此时闭环的 Elman 网络是一个自治系统。不失为一般性,假设输入向量和输出向量的维数相等,即 $M=L$,则 $\mathbf{U}(k-1)=\mathbf{Y}(k-1)$,此时可以得到 N 维线性 Elman 网络自治系统的描述方程

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}_x \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{W}_z \mathbf{X}(k-1), \quad (4.43)$$

式中, $\mathbf{W}_z = \mathbf{W}_u \mathbf{W}_y^T$ 。

4.3.2 混沌化线性 Elman 网络

为混沌化自治的线性 Elman 网络,在线性 Elman 网络上施加一个模运算,得到

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}_x \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{W}_u \mathbf{U}(k-1) \pmod{1}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{U}(k-1) = \mathbf{W}_y^T \mathbf{X}(k-1). \quad (4.45)$$

相应地,自治系统(4.43)也成为如下的非线性自治系统:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}_x \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{W}_z \mathbf{X}(k-1) \pmod{1}, \quad (4.46)$$

式中, $\mathbf{W}_z = \mathbf{W}_u \mathbf{W}_y^T$ 。

定理 4.1 对于自治系统(4.46),如果

$$|\omega_{ii}^z| > 1 + \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^x| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\omega_{ij}^z|, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.47)$$

那么 $\mathbf{W}_x + \mathbf{W}_z$ 所有的特征根均在闭单位圆之外。

证明: 令

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}_x + \mathbf{W}_z = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) + \mathbf{F},$$

即

$$d_i = \omega_{ii}^x + \omega_{ii}^z, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.48)$$

所以

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_x + \mathbf{W}_z - \text{diag}(d_1, \dots, d_N).$$

并且矩阵 $\mathbf{F}$ 的对角元素均为 0。由 Gerschgorin 定理得到所有特征根 $\lambda(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$ 。下面证明所有的 $D_i, i=1, \dots, N$, 均在闭单位圆外。

由(4.48)式知

$$|w_{ii}^z| > 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^x| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^z| + |w_{ii}^x|. \quad (4.49)$$

因此,对 $i=1, \dots, N$, 均有

$$\begin{aligned} |d_i| &= |w_{ii}^x + w_{ii}^z| \\ &\geq |w_{ii}^z| - |w_{ii}^x| \\ &> 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^x| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^z| \\ &> 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^x + w_{ij}^z| \\ &= 1 + \sum_{j=1}^N |f_{ij}|. \end{aligned} \quad (4.50)$$

假设存在某一 $D_I, I \in \{1, \dots, N\}$, 它与闭单位圆的交集非空, 即 D_I 中至少存在一点 $\tilde{z} \in \mathcal{C}$, 满足

$$|\tilde{z} - d_I| < \sum_{j=1}^N |f_{Ij}|,$$

而且 $\tilde{z}$ 在复平面上的单位圆内。即以 d_I 为圆心, 半径为 $\sum_{j=1}^N |f_{Ij}|$ 的圆与闭单位圆有交点, 即

$$\left| d_I - \sum_{j=1}^N |f_{Ij}| \right| \leq 1,$$

则

$$|d_I| \leq 1 + \sum_{j=1}^N |f_{Ij}|.$$

这显然与(4.50)式矛盾, 故假设不能成立。因此所有 $D_i, i=1, \dots, N$, 均在闭单位圆之外, 即 $w_x + w_z$ 的特征根均在闭单位圆外。

推论 4.1 记 $\|w_x\|_\infty = w_x$ 。对于满足定理 4.1 条件的矩阵 w_z , 若 w_z 可逆, 且 $\|w_z^{-1}\|_\infty < 1$, 则存在实数 $\delta > 1$, 使得下式成立:

$$\|w_z^{-1}\|_\infty = \frac{1}{w_x + \delta}. \quad (4.51)$$

证明: 由(4.49)式可知

$$\begin{aligned} |w_{ii}^z| &> 1 + \sum_{j=1}^N |w_{ij}^x| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |w_{ij}^z| \\ &\geq 1 + \sum_{j=1}^N |w_{ij}^x|, \quad i = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.52)$$

显然

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^c| &= |\omega_{ii}^c| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\omega_{ij}^c| > 1 + \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^r| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\omega_{ij}^c| \\ &\geq 1 + \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^r|, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.53)$$

此外,

$$\|W_z\|_{\infty} > 1 + \|W_x\|_{\infty} = w_x + 1, \quad (4.54)$$

即存在一实数 $\delta_1 > 1$, 使得

$$\|W_z\|_{\infty} = w_x + \delta_1. \quad (4.55)$$

若 W_z^{-1} 存在, 则

$$1 = \|W_z W_z^{-1}\|_{\infty} \leq \|W_z\|_{\infty} \cdot \|W_z^{-1}\|_{\infty},$$

即

$$\|W_z^{-1}\|_{\infty} \geq \frac{1}{w_x + \delta_1}.$$

如果 $\|W_z^{-1}\|_{\infty} < 1$, 则存在一实数 $\delta_1 \geq \delta > 1$, 使得

$$\|W_z^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{w_x + \delta}.$$

定理 4.2 假设矩阵 W_x, W_z 满足定理 4.1 的条件, W_z 可逆且

$$\|W_z^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{w_x + \delta},$$

式中, 实数 $\delta > 1$. 则 N 维自治 Elman 网络在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

证明: 记

$$X(k) = g(X(k-1)) \equiv W_x X(k-1) + W_z X(k-1) \pmod{1}. \quad (4.56)$$

下面证明 $\bar{X} = 0$ 是系统(4.56)的回归排斥子。

因为

$$\|W_x W_z^{-1}\|_{\infty} \leq \|W_x\|_{\infty} \|W_z^{-1}\|_{\infty} < 1,$$

所以 $I + W_x W_z^{-1}$ 也可逆。由于

$$W_z^{-1}(I + W_x W_z^{-1})^{-1} = [(I + W_x W_z^{-1})W_z]^{-1} = (W_x + W_z)^{-1},$$

则 $W_x + W_z$ 可逆。定义两个 N 维向量: $b = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ 和

$$X_0 = (W_x + W_z)^{-1}b = W_z^{-1}(I + W_x W_z^{-1})^{-1}b.$$

显然,

$$(I + W_x W_z^{-1})^{-1} = I - W_x W_z^{-1}(I + W_x W_z^{-1})^{-1},$$

所以

$$\|(I + W_x W_z^{-1})^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \|W_x\|_{\infty} \|W_z^{-1}\|_{\infty}} \leq \frac{w_x + \delta}{\delta}.$$

从而

$$\|X^0\|_{\infty} \leq \|W_z^{-1}\|_{\infty} \|(I + W_x W_z^{-1})^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{w_x + \delta} \frac{w_x + \delta}{\delta} = \frac{1}{\delta} < 1,$$

即,存在一实数 $0 < r < 1$,使得 $\|X^0\|_{\infty} \leq r < 1$ 。显然,在经过模运算以后,

$$g(X^0) = W_x X^0 + W_z X^0 \pmod{1} = b \pmod{1} = 0 = \bar{X}.$$

同时,对任意 $X \in B_r = \{X \in \mathcal{R}^n \mid \|X\|_{\infty} \leq r\} = B(0, r)$,函数 $g(\cdot)$ 在 X 点的导数为

$$g'(X) = W_x + W_z,$$

式中

$$\|W_z^{-1}\|_{\infty} = \frac{1}{w_x + \delta}, \quad \delta > 1.$$

由于已经满足定理 4.1 的条件,即

$$|\omega_{ii}^z| > 1 + \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^x| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |\omega_{ij}^z|, \quad i = 1, \dots, N,$$

所以定理 4.1 成立,从而 $W_x + W_z$ 的特征根均在闭单位圆外。因此,对任意 $X \in B(0, r)$, $g'(X)$ 的特征根也在闭单位圆外,从而,不动点 $\bar{X} = 0$ 是系统(4.56)的回归排斥子。因此,由 Marotto 定理(第 1 章),自治的 Elman 网络是 Li-Yorke 意义下混沌的。

定理 4.2 可以用来设计如何混沌化一个线性 Elman 网络。对于某一线性 Elman 网络,首先计算 $W_z = W_u W_y^T$,并判断矩阵 W_x, W_z 是否满足定理 4.2 中的条件。若条件满足,则可以通过施加一个模运算来使得 Elman 网络产生混沌;反之,可以对矩阵 W_u, W_y 稍作调整,使得 Elman 网络在新的权值矩阵 $W_x, \tilde{W}_u, \tilde{W}_y$ 下满足定理 4.2 的条件而产生混沌。

下面的定理 4.3 提供了一种比较简单的设计混沌 Elman 网络权值矩阵 W_x 和 W_u, W_y 的方法。

定理 4.3 设 Elman 网络(4.44), (4.45)中的矩阵 W_x 是 $N \times N$ 的, W_u, W_y 是 $N \times M$ 的,其中, $N \geq 2$ 为隐含层神经元个数, $M \geq 1$ 为输出层(输入层)神经元个数。则对任意给定的 W_x :

(1) 如果 $N = M$,则下面两种 W_u, W_y 矩阵均能使得构造的 Elman 网络是 Li-Yorke 意义下混沌的:

(a) W_u, W_y 二者中一个为单位矩阵,另一个为对角矩阵,其对角线元素的绝对值和为

$$\delta + \sum_{j=1}^N |\omega_{jj}^x|, \quad j = 1, \dots, N, \quad \delta > 1;$$

(b) W_u, W_y 二者均为对角矩阵, 其对角元素满足

$$|\omega_{ii}^u \cdot \omega_{ii}^y| > \delta + \sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^x|, \quad i = 1, \dots, N, \quad \delta > 1.$$

(2) 如果 $N < M$, 令 W_u, W_y 中的对角元素

$$|\omega_{ii}^u| = |\omega_{ii}^y| = \left(\sum_{j=1}^N |\omega_{ij}^x| \right)^{1/2} + \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \delta > 1,$$

而其他元素 $\omega_{im}^u = \omega_{im}^y = 0, i = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M, m \neq i$ 。

(3) 如果 $N > M$, 则不存在矩阵 W_u, W_y 可以使得 Elman 网络是 Li-Yorke 意义下混沌的。

证明: 显然(1)中的两种方法构造的矩阵 W_u, W_y , 它们的乘积 $W_z = W_u W_y^T$ 满足定理 4.2 中的条件, 所以用这样的 W_u, W_y , Elman 网络(4.44), (4.45)是 Li-Yorke 意义下混沌的。(2)中构造的 W_u, W_y 的乘积 W_z 为对角阵, 可以看成是(1)中(a)的情形, 因此 Elman 网络此时也是 Li-Yorke 意义下混沌的。

对于(3), 我们用反证法来证明它的成立。

假设存在 W_u, W_y , 它们的乘积 $W_z = W_u W_y^T$ 可逆, 并满足定理 4.2 中的其他条件, 使得 Elman 网络是 Li-Yorke 意义下混沌的。 W_z 可逆, 即 $W_u W_y^T$ 的秩为 N 。由矩阵乘积可知, W_u, W_y 是行满秩才能保证 $W_u W_y^T$ 满秩。由于 $N > M$, 因此 W_u, W_y 不可能行满秩, 这与前面产生矛盾, 因此假设不成立。

4.4 耦合映射格子的时空混沌化

考虑一个具有耗散最近邻耦合的一维耦合映射格子(CML)模型:

$$x_{k+1}^{(i)} = (1 - \bar{\epsilon})f(x_k^{(i)}) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}(f(x_k^{(i-1)}) + f(x_k^{(i+1)})), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.57)$$

这里假设周期性边界:

$$x_k^{(n+i)} = x_k^{(i)},$$

耦合强度 $\bar{\epsilon}$ 满足 $0 < \bar{\epsilon} < 1$ 。作为一个例子, 考虑 Logistic 映射

$$f(x_k^{(i)}) = p x_k^{(i)} (1 - x_k^{(i)}). \quad (4.58)$$

系统规模取 $n=60$, 初始状态在区间 $[0, 1]$ 中按均匀分布随机选取。图 4.10 显示了当 $p=4$ 和 $\bar{\epsilon}=0.8$ 时 CML(4.57)的时空混沌行为。

现在考虑的问题是要使一个原来非混沌的 CML 混沌化。例如, 假设 $p=0.5$, $\bar{\epsilon}=0.4$ 。那么, 原点是未受控的 CML 的一个均匀的不动点: 即对任给属于 $[0, 1]$ 的初始条件, 有

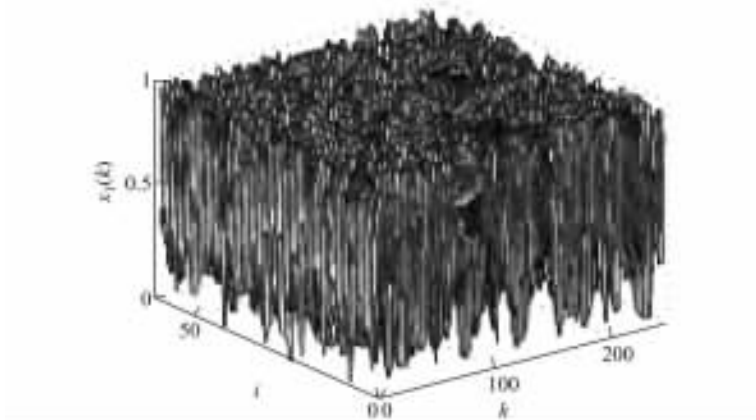


图 4.10 $p=4$ 和 $\bar{\epsilon}=0.8$ 时 CML(4, 57) 的时空混沌行为

$$x_k^{(i)} \in [0, p/4] \subset [0, 1], \quad k > 0,$$

且有

$$x_k^{(i)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n。$$

定理 4.4 考虑受控的 CML

$$x_{k+1}^{(i)} = (1 - \bar{\epsilon})f(x_k^{(i)}) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}(f(x_k^{(i-1)}) + f(x_k^{(i+1)})) + u_k^{(i)}, \quad (4.59)$$

局部反馈控制律为

$$u_k^{(i)} = \alpha x_k^{(i)} \pmod{\epsilon}。 \quad (4.60)$$

如果

$$0 < p < 4, \quad 0 < \epsilon < 1 - \frac{p}{4}, \quad \sigma > p + 1, \quad (4.61)$$

那么对区间 $[0, 1]$ 上任给初始条件, 有

$$x_k^{(i)} \in [0, 1], \quad k > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

并且受控 CML 的 Lyapunov 指数全为正。

证明: 如果对 $k \geq 0, x_k^{(i)} \in [0, 1]$, 那么

$$0 \leq f(x_k^{(i)}) \leq p/4, \quad x_{k+1}^{(i)} \in [0, \epsilon + p/4] \subset [0, 1]。$$

因此, 如果 $x_0^{(i)} \in [0, 1]$, 那么对 $k > 0, x_k^{(i)} \in [0, 1]$ 。受控系统的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{M}_k + \sigma \mathbf{I},$$

式中

$$f'(x_k^{(i)}) = p(1 - 2x_k^{(i)}).$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} (1-\bar{\epsilon})f'(x_k^{(1)}) & \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(2)}) & 0 & \cdots & \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(n)}) \\ \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(1)}) & (1-\bar{\epsilon})f'(x_k^{(2)}) & \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(3)}) & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(2)}) & (1-\bar{\epsilon})f'(x_k^{(3)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\bar{\epsilon}}{2}f'(x_k^{(1)}) & 0 & 0 & \cdots & (1-\bar{\epsilon})f'(x_k^{(n)}) \end{bmatrix}$$

。

容易验证,

$$\|\mathbf{M}_k\|_{\infty} \leq p, \quad \|\mathbf{M}_k\|_1 \leq p,$$

于是有

$$\|\mathbf{M}_k\| \leq \sqrt{\|\mathbf{M}_k\|_{\infty} \|\mathbf{M}_k\|_1} \leq p.$$

如果 $\sigma > p+1$, 那么受控 CML 的 Lyapunov 指数全为正。

在仿真中, 取 $p=0.5, \bar{\epsilon}=0.4$ 。此时, 原点就是未受控 CML 的一个均匀的不动点。图 4.11 显示了当 $\sigma=10$ 和 $\epsilon=0.5$ 时受控 CML 的充分发展的混沌行为。

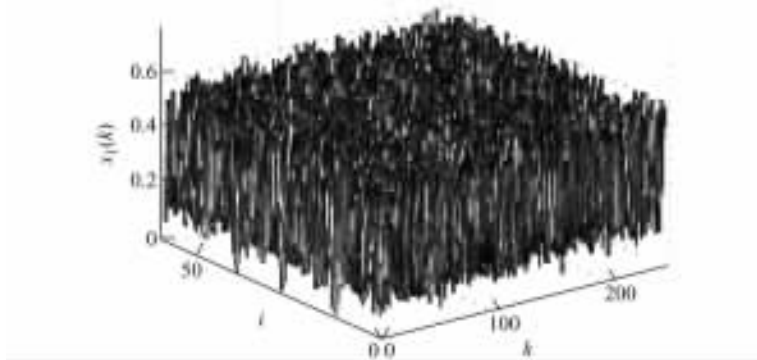


图 4.11 $\sigma=10$ 和 $\epsilon=0.5$ 时受控 CML 的充分发展的混沌行为

反馈定点控制(pinning control)已被广泛用于时空系统的控制。假设系统包含偶数个节点并且只对第 $i=1, 3, 5, \dots, (n/2)-1$ 节点加入局部控制。受控 CML 系统方程为

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(2i-1)} = (1-\bar{\epsilon})f(x_k^{(2i-1)}) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}(f(x_k^{(2i-2)}) + f(x_k^{(2i)})) + (\alpha x_k^{(2i-1)} \pmod{\epsilon}), \\ x_{k+1}^{(2i)} = (1-\bar{\epsilon})f(x_k^{(2i)}) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}(f(x_k^{(2i-1)}) + f(x_k^{(2i+1)})), \end{cases} \quad (4.62)$$

式中, $i=1,2,\dots,n/2, 0<\epsilon<1-p/4$ 。易见,对区间 $[0,1]$ 上任给初始条件

$$x_k^{(2i-1)} \in \left[0, \frac{p}{4} + \epsilon\right] \subset [0,1], \quad x_k^{(2i)} \in \left[0, \frac{p}{4}\right],$$

对充分大的 σ , 系统具有 $n/2$ 个正的 Lyapunov 指数。仍取系统参数 $p=0.5$, $\bar{\epsilon}=0.4, \sigma=10$ 和 $\epsilon=0.5$ 。图 4.12 显示了受控子系统和未受控子系统的混沌行为, 它们具有不同的幅值。

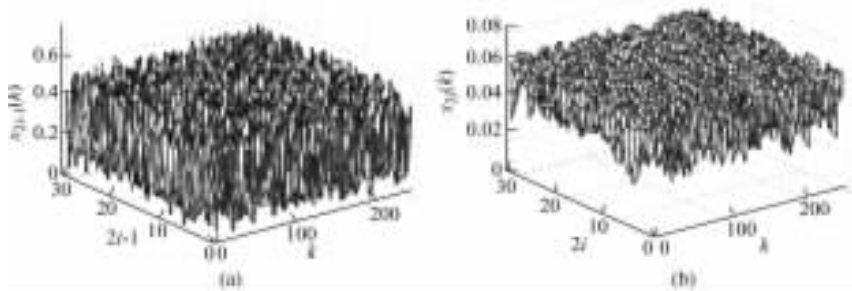


图 4.12 受控子系统和未受控子系统的混沌行为, 它们具有不同的幅值

4.5 离散时间 TS 模糊系统的反馈混沌化

一个一般的 Takagi-Sugeno(TS)模糊系统可描述如下:

规则 i : IF $x_1(k)$ is M_{i1} $\cdots$ AND $x_n(k)$ is M_{in} THEN

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), \quad (4.63)$$

式中, $i=1,2,\dots,r$, r 为规则的数目, M_{ij} 为模糊集,

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \cdots \ x_n(k)]^T, \quad \mathbf{u}(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ \cdots \ u_m(k)]^T.$$

假设 A_i 和 B_i 是一致有界的, 即存在常数 N 和 Q , 使得

$$\sup_{1 \leq i \leq r} \|A_i\| \leq N < \infty, \quad \sup_{1 \leq i \leq r} \|B_i\| \leq Q < \infty$$

采用并行分布补偿(PDC)来确定模糊控制器的结构。每个控制规则根据 PDC 中的 TS 模糊模型的相应规则来构造。每个模糊控制规则具有如下的线性状态反馈形式[Li et al., 2001]:

控制规则 i : IF $x_1(k)$ is M_{i1} $\cdots$ AND $x_n(k)$ is M_{in} THEN

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(k)。$$

总的模糊控制可表示为

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(k) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(k)} \equiv -\sum_{i=1}^r h_i(k) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(k), \quad (4.64)$$

其中要求控制增益矩阵 $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^r$ 一致有界,即存在常数 M 使得

$$\sup_{1 \leq i \leq r} \|\mathbf{F}_i\| \leq M < \infty.$$

把(4.64)式代入(4.63)式可得

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(k)h_j(k) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j\} \mathbf{x}(k). \quad (4.65)$$

而系统(4.65)又可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(k)h_i(k) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i\} \mathbf{x}(k) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(k)h_j(k) \frac{\{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j\} + \{\mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i\}}{2} \mathbf{x}(k) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(k)h_i(k) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(k) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(k)h_j(k) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (4.66)$$

式中, $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j$ 。取 $\mathbf{B}_i \equiv \mathbf{B}$, 从而有

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(k) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{B} \mathbf{F}_i\} \mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(k) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(k). \quad (4.67)$$

可以证明[Li et al., 2001], TS 模糊系统(4.63)可用 PDC 模糊控制器(4.64)精确线性化。如果存在反馈增益 $\mathbf{F}_i$, 使得

$$\{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B} \mathbf{F}_1) - (\mathbf{A}_i - \mathbf{B} \mathbf{F}_i)\}^T \{(\mathbf{A}_1 - \mathbf{B} \mathbf{F}_1) - (\mathbf{A}_i - \mathbf{B} \mathbf{F}_i)\} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, r. \quad (4.68)$$

则线性化控制系统为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, r. \quad (4.69)$$

如果对上述系统引入模运算, 则有

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) \pmod{1}. \quad (4.70)$$

根据第2章分析可知, 如果

$$\mathbf{G} = \text{diag}\{e^{\sigma_1} \quad e^{\sigma_2} \quad \cdots \quad e^{\sigma_n}\}, \quad \sigma_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

那么系统(4.70)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

例 4.2 考虑如下离散时间 TS 模糊模型:

$$\text{规则 1: IF } x(t) \text{ is } M_1 \text{ THEN } \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u,$$

$$\text{规则 2: IF } x(t) \text{ is } M_2 \text{ THEN } \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u,$$

式中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -d & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$x(t) \in [-d, d], d > 0$, 隶属函数

$$M_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x(t)}{d} \right), \quad M_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x(t)}{d} \right).$$

在不加控制时($u=0$),系统是稳定的。选取两个期望的 Lyapunov 指数为

$$\sigma_1 = \ln(1.9) = 0.6418539, \sigma_2 = \ln(2.0) = 0.6931472.$$

图 4.13 显示了相应的受控系统(4.70)的混沌输出。

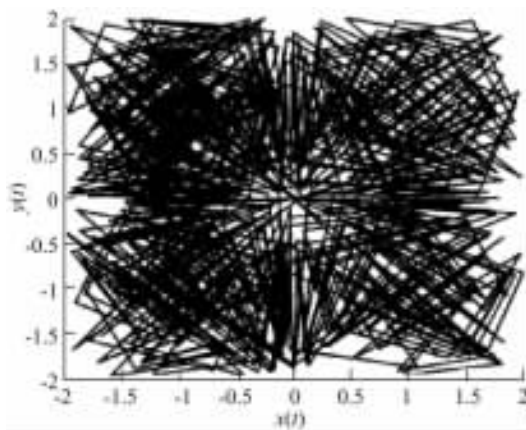


图 4.13 受控模糊系统的混沌行为

4.6 非线性系统的全局稳定化

在控制系统分析与设计中,一个最基本的问题是系统稳定性。但所有的实际控制系统都是有控制约束的。这里必须指出,反馈混沌化可用于具有有界输入的非线性系统的全局稳定化。整个稳定化算法包含两个部分:首先,设计一个有界的混沌化控制器使得受控系统产生混沌行为;其次,由于混沌的遍历性,一旦系统轨道进入期望的不动点的某个小的邻域,就关闭混沌化控制器,而启用某个有界的局部稳定化控制器,使系统轨道稳定在期望的不动点上。这里的关键技术性问题是,如何使得所产生的混沌吸引子包含期望的不动点或与该不动点充分接近。

考虑如下的非线性控制系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k. \quad (4.71)$$

假设 x^* 是未受控系统的一个期望的、不稳定的不动点,即满足

$$x^* = f(x^*). \quad (4.72)$$

具有有界输入约束的全局反馈稳定化问题,就是要设计一个反馈控制器 u_k 满足约束条件

$$\|u_k\|_{\infty} \leq U, \quad k \geq 0, \quad (4.73)$$

使得 x^* 是受控系统(4.71)的全局稳定不动点,其中 U 为一给定正数。

根据第3章的讨论,可采用如下的混沌化控制器:

$$u_k = \bar{u}(x_k) = \text{saw}_{\varepsilon}(\sigma x_k), \quad \varepsilon \leq U, \quad (4.74)$$

或者

$$u_k = \bar{u}(x_k) = \sigma x_k \pmod{\varepsilon}, \quad \varepsilon \leq U, \quad (4.75)$$

使得受控系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + \bar{u}_k \quad (4.76)$$

产生混沌行为,相应的混沌吸引子记为 Ω_c 。

再取矩阵 K 使得 $f'(x^*) - K$ 是稳定阵(例如,可简单地取 $K = f'(x^*)$)。可以采用传统的线性反馈控制器

$$u_k = \bar{u}(x_k) = -K(x_k - x^*), \quad (4.77)$$

使得 x^* 是受控系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + \bar{u}_k \quad (4.78)$$

的一个局部稳定的不动点,相应的吸引域记为 Ω_s 。

假设混沌吸引子 Ω_c 和吸引域 Ω_s 的交集非空。对任意给定的初始状态,首先用混沌化控制器 $\bar{u}(x_k)$ 使得受控系统产生混沌。一旦系统状态进入 Ω_s ,并且局部反馈稳定化控制器 $\bar{u}(x_k)$ 的幅值不超过 U ,则关闭混沌化控制器 $\bar{u}(x_k)$,启用局部反馈稳定化控制器 $\bar{u}(x_k)$ 。即取全局反馈稳定化控制器为

$$u_k = \begin{cases} \bar{u}(x_k), & \text{if } x_k \in \Omega_s \text{ 和 } \|\bar{u}(x_k)\|_{\infty} \leq \bar{U}, \\ \bar{u}(x_k), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.79)$$

但采用控制器(4.79)的困难在于,难以较精确地估计吸引域 Ω_s 。因此,在实际使用中,采用如下全局反馈稳定化控制器

$$u_k = \begin{cases} \bar{u}(x_k), & \text{if } \|\bar{u}(x_k)\|_{\infty} > \bar{U}, \\ \bar{u}(x_k), & \text{if } \|\bar{u}(x_k)\|_{\infty} \leq \bar{U} \leq U. \end{cases} \quad (4.80)$$

例 4.3 考虑受控的含3个神经元的神经网络系统

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k = W \tanh(Vx_k) + u_k, \quad (4.81)$$

式中矩阵 W 和 V ,以及函数 $\tanh(\cdot)$ 由(4.4)和(4.8)式定义。已知未受控系统($u_k \equiv 0$)具有一个不稳定的不动点 $x^* = [0 \ 0 \ 0]^T$,以及两个局部稳定不动点 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}$ 。如果 $\sigma > 5$,那么混沌化控制器

$$\bar{u}(x_k) = \sigma x_k \pmod{\varepsilon} \quad (4.82)$$

可以使受控系统产生混沌行为。这里的问题是要保证原点 x^* 为受控系统的全局稳定的不动点。

由于

$$f'(x^*) = f'(0) = WV, \quad (4.83)$$

可选择局部稳定化控制器

$$\bar{u}(x_k) = -Kx_k = -WVx_k, \quad (4.84)$$

其相应的全局稳定化控制器为

$$u_k = \begin{cases} \sigma x_k \pmod{\epsilon}, & \text{if } \|Kx_k\|_{\infty} > \bar{U}, \\ -Kx_k, & \text{if } \|Kx_k\|_{\infty} \leq \bar{U}. \end{cases} \quad (4.85)$$

仿真发现,当 $\bar{U} \geq \epsilon \geq 1.2$ 时,可以实现原点的全局稳定化。图 4.14 显示了在混沌化算法作用下,受控神经网络的混沌吸引子,其中参数为 $\epsilon=1.5, \sigma=10$ 。图 4.15 显示了在全局稳定化算法(4.85)作用下受控神经网络的稳定化过程,其中参数选取

$$\epsilon = \bar{U} = 1.5, \quad x_0 = [-5.80 \quad 5.75 \quad 2.80]^T.$$

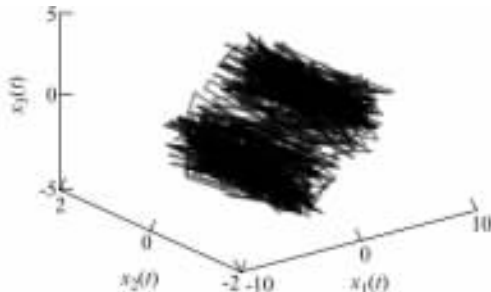


图 4.14 在混沌化控制作用下,受控神经网络的混沌吸引子

这里也可以实现原来局部稳定的不动点(比如 $\bar{x}$)的全局稳定化,控制器可取

$$u_k = \begin{cases} \text{saw}_{\epsilon}(\sigma x_k), & \text{if } \min_{1 \leq i \leq n} x_k(i) \leq 0, \\ 0, & \text{if } \min_{1 \leq i \leq n} x_k(i) > 0. \end{cases} \quad (4.86)$$

图 4.16 给出了相应的仿真结果,其中参数选取

$$\epsilon = 1.5, \quad \sigma = 10, \quad x_0 = [-8.80 \quad -6.75 \quad -3.80]^T.$$

例 4.4 考虑二阶 Henon 映射

$$x_{k+1} = 1.0 - ax_k^2 + 0.3x_{k-1}, \quad (4.87)$$

当参数 a 从零开始增加时, Henon 映射会经由倍周期分岔走向混沌。这里取 $a=1$ 。此时 Henon 映射具有稳定的周期 4 轨道

$$\{1.27489, \quad -0.65636, \quad 0.95169, \quad -0.10263\}.$$

该映射有两个不稳定的不动点, $x^* = 0.7095$ 和 $x^* = -1.4095$ 。现希望设计一个具有最大幅值为 U 的控制器 $u_k = u(x_k)$, 使得受控 Henon 映射

$$x_{k+1} = 1.0 - ax_k^2 + 0.3x_{k-1} + u_k \quad (4.88)$$

的状态稳定在不动点 x^* 上。为此,把受控系统写为:

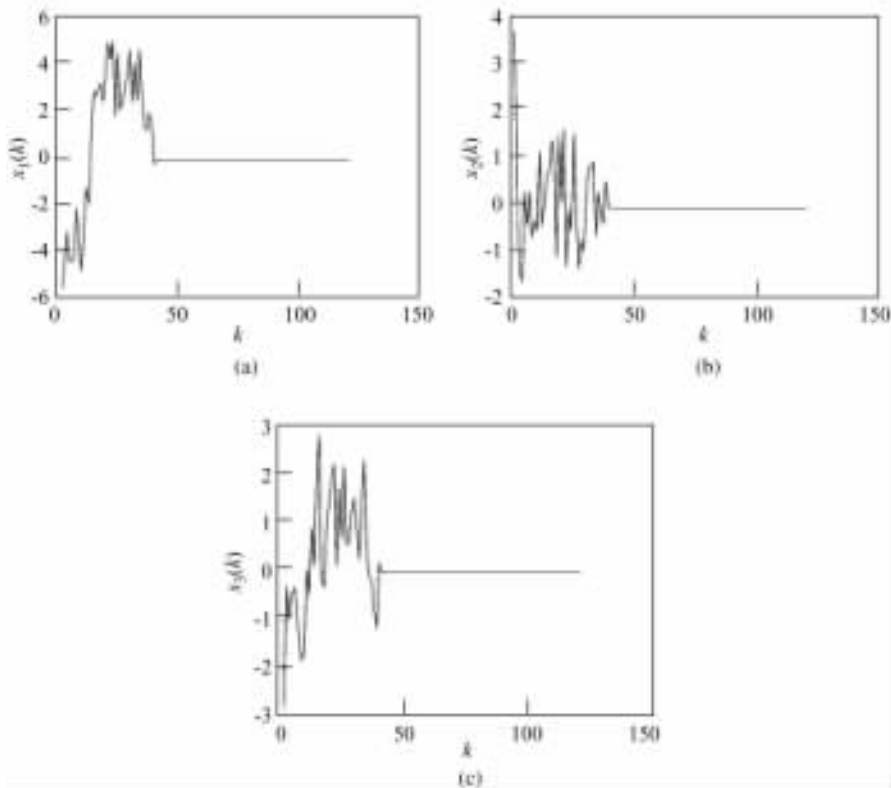


图 4.15 在全局稳定化控制作用下受控神经网络的稳定化过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1.0 - x_k^2 + y_k + u_k, \\ y_{k+1} = 0.3x_k. \end{cases} \quad (4.89)$$

如果取

$$u_k = \bar{u}(x_k) = \alpha x_k \pmod{\epsilon}, \quad (4.90)$$

那么受控系统(4.89)当 $\sigma > 3$ 和 $\epsilon > 0$ 时是混沌的。图 4.17 显示了当 $\sigma = 10$ 和 $\epsilon = 0.15$ 时受控系统的混沌吸引子。

容易验证,如果取 $u_k = \bar{u}(x_k) = -1.4(x_k - x^*)$,那么受控系统(4.89)在点 $[x^* \ 0.3x^*]^T$ 的 Jacobi 矩阵是稳定的。全局稳定化控制器为

$$u_k = \begin{cases} \bar{u}(x_k), & \text{if } |\bar{u}(x_k)| > \bar{U}, \\ \bar{u}(x_k), & \text{if } |\bar{u}(x_k)| \leq \bar{U}. \end{cases} \quad (4.91)$$

在仿真中,取 $\epsilon = \bar{U} = 0.15$ 。控制效果见图 4.18。随机选取一个初始状态,在随后的 1000 步没有加控制($u_k = 0$),系统状态很快稳定在周期 4 轨道上。在随后的 1000 步加入混沌化控制器 $u_k = \bar{u}(x_k) = 10x_k \pmod{0.15}$,可以看出受控系统

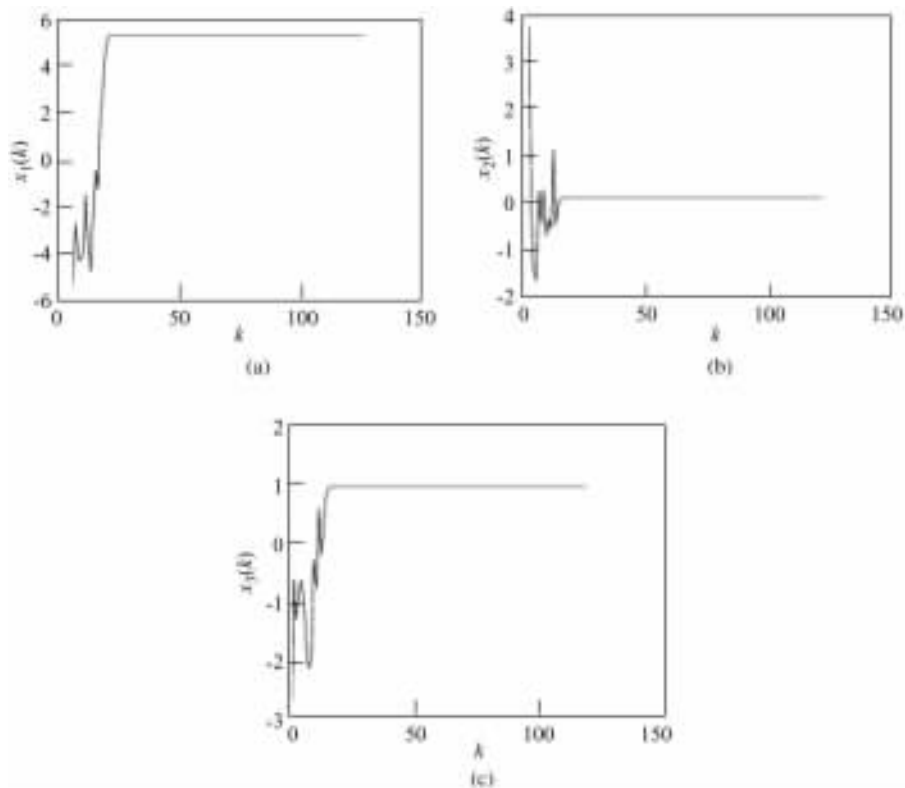


图 4.16 局部稳定的不动点 $\bar{x}$ 的全局稳定化

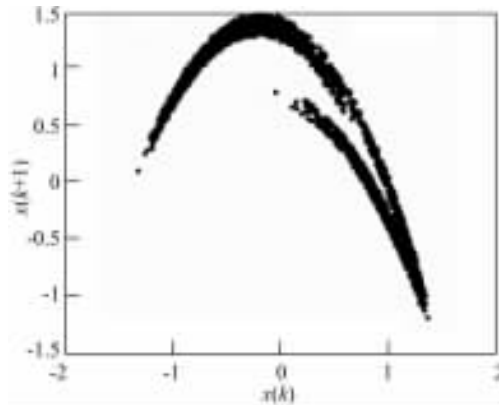


图 4.17 受控 Henon 映射的混沌吸引子

处于混沌状态。从 $n=2000$ 开始,我们采用全局稳定化控制器(4.91),经过大约 250 步之后(即总的迭代次数 $n \geq 2250$),受控系统稳定在不动点 $x^* = 0.7095$ 上。

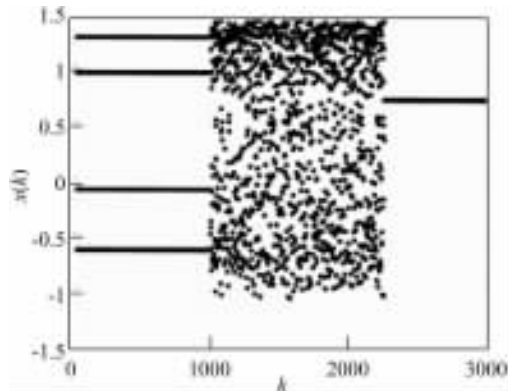


图 4.18 受控 Henon 映射的全局稳定化

4.7 病态心律的分岔控制

考虑一个基于对某些兔子心脏的刺激响应测量而得到的,通过心室的电导的经验模型。该模型可表示为如下非线性离散时间差分方程[Chen & Dong, 1998]:

$$A_{k+1} = f(A_k, H_k) = A_{\min} + R_{k+1} + \beta_k \exp(-H_k/\tau_{\text{rec}}), \quad (4.92)$$

式中, H_k 为第 k 个心动周期的心室恢复时间, A_{k+1} 表示在第 $k+1$ 个心动周期的心室颤颤时间间隔,

$$A_{\min} = 33\text{ms}, \quad \tau_{\text{rec}} = 70\text{ms}, \quad R_0 = \gamma \exp(-H_0/\tau_{\text{fat}}),$$

$$R_{k+1} = R_k \exp[-(A_k + H_k)/\tau_{\text{fat}}] + \gamma \exp(-H_k/\tau_{\text{fat}}),$$

$$\beta_k = \begin{cases} 201 - 0.7A_k, & \text{for } A_k < 130\text{ms}, \\ 500 - 3.0A_k, & \text{for } A_k \geq 130\text{ms}, \end{cases}$$

式中, H_0 是初始区间, $\gamma = 0.3\text{ms}$, $\tau_{\text{fat}} = 30\text{s}$ 。

如果对按固定时间周期 $\bar{H} > 0$ 电激兔子心脏,在一束电激后,会观察到一种再进入心动过速的状态,这时区间 A 呈现交替的时间序列。为模拟这一现象,我们在模型(4.92)中把 H_k 取为一个常数 $\bar{H} < 57\text{ms}$ 。图 4.19 显示了 $\bar{H} = 45\text{ms}$ 和 $k = 1 \sim 1000$ 时模型(4.92)的输出 A_k 。可以看出,在接近于 $k = 250$ 处, A 分岔为交替节律。人们已提出了几种控制方法以设法消除分岔而使该系统稳定在一个不动点上[Chen & Dong, 1998]。

这里考虑对 $\bar{H}$ 加一可用实验实现的小扰动,即

$$H_k = \bar{H} + \delta H_k. \quad (4.93)$$

期望的目标值取 $\bar{A} = 134.3083$,这是当 $H_k = \bar{H}$ 时系统(4.92)的一个不稳定的不

动点。局部稳定化控制器为

$$\delta H_k^{ls} = g(A_k - \bar{A}), \quad (4.94)$$

式中, $g=0.85$ 。由于 $A_k > 0$, 为保证

$$|\delta H_k^c| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

反馈混沌化控制器取

$$\delta H_k^c = [\sigma A_k \pmod{2\epsilon}] - \epsilon. \quad (4.95)$$

我们发现当 $\sigma > 2$ 时, 反馈混沌化控制器(4.95)能使受控系统产生混沌行为。全局稳定化控制器为

$$\delta H_k^{gs} = \begin{cases} \delta H_k^c, & \text{if } |\delta H_k^{ls}| \geq \epsilon, \\ \delta H_k^{ls}, & \text{if } |\delta H_k^{ls}| < \epsilon. \end{cases} \quad (4.96)$$

图 4.19 给出了 $\epsilon=8$ 时的仿真结果。其中, 为了比较控制的效果, 当 $k \leq 1000$ 时未加控制, 当 $1000 < k \leq 1500$ 时, 采用反馈混沌化控制器(4.95), 当 $1500 < k \leq 2000$ 时, 采用全局稳定化控制器(4.96)。

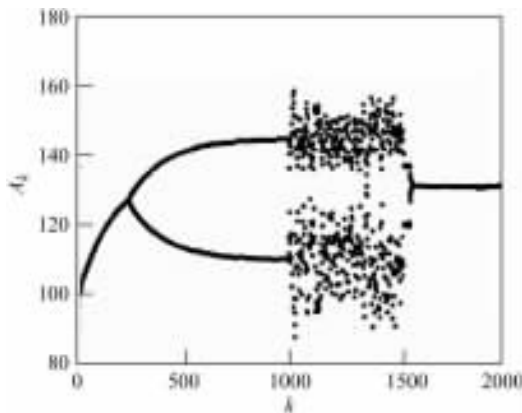


图 4.19 心律模型的输出 A_k

第5章

基于混沌分组密码的图像加密

5.1 引言

经典密码学一般将密码区别为分组密码和序列密码。所谓分组密码是指,将明文消息编码表示后的数字(通常是0和1)序列 $x_1, x_2, \dots$ 划分成长度为 m 的组 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,各组分别在密钥 $k = (k_1, k_2, \dots, k_t)$ 的控制下变换成输出数字序列 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。而序列密码则直接用密钥序列(一般为0和1) $k = (k_1, k_2, \dots)$ 对原始明文消息编码进行操作,获得密文序列。与传统的密码学类似,这里讨论的混沌密码也分成两类:混沌分组密码和混沌序列密码。

由于分组密码容易被标准化,且在通常的数据通信中,信息往往被分成块来传输,再加上分组密码的同步容易实现,因此这种密码形式获得了广泛的应用。目前已有的密码标准,包括DES, AES等,都是分组密码。

本章介绍混沌分组密码的设计及其在图像加密中的应用,主要介绍混沌映射与密码学之间的联系与区别;研究一些混沌分组密码的设计方法;最后提出两种基于可逆混沌映射的混沌图像加密算法,并对它们进行安全性分析。

5.2 混沌映射与密码学的联系

Shannon在他的经典论文中指出:好的加密系统应具有对密钥的敏感性,以及能够将明文充分地置乱并改变其统计特性[Shannon, 1949],而这正与混沌的混迭(mixing)特性相一致。其实,混沌映射和加密系统二者之间存在着许多相似之处,例如:混沌的拓扑传递与混迭特性类似于密码的扩散(diffusion)与混淆(confusion)特性;混沌对参数的敏感性则对应着密码对密钥的敏感性;混沌映射通过多轮的迭代获得指数分离的轨道,加密系统则通过多轮的置乱(permutation)与替换(substitution)将明文打乱。然而,混沌与密码学之间仍然有着很大的不

同,最重要的就是,混沌是定义在连续的闭集上的,而密码学的操作只限于有限域,二者之间更深层的联系还有待进一步地研究[Kocarev & Jakimovski, 2001]。

尽管如此,我们仍然能够利用混沌的特性来设计序列密码或分组密码,特别是对分组密码来说,利用混沌的拓扑传递性来快速地置乱和扩散明文数据,以达到改变明文统计特性的目的。这一点对多媒体数据的加密尤其重要。因为对于语音、图像以及视频这些多媒体信息来说,由于其固有的大数据量、高冗余性等特性,传统的对称和非对称密码对它们来说并不太合适[Li, Chen & Zheng, 2004; Mao & Chen, 2004]。为解决多媒体加密的问题,人们已经提出了许多新的加密方案,其中比较典型的是一类称之为部分加密(partial encryption)的算法[Tang, 1996; Cheng & Li, 2000; Wu & Kuo, 2000],但这些算法只是减少了加密的数据,在加密算法上依然使用的是传统的 DES, IDEA 等方法,因此是以牺牲加密强度来换取加密速度。近年来,人们尝试采用混沌的方法构造快速的加密算法,如[Scharinger, 1998]提出了采用 Kolmogorov 流进行替代和置乱图像的快速图像加密方法;[Fridrich, 1998]提出了两种混沌加密方法,分别采用 Baker 映射和 Cat 映射构造了二维可逆图像加密方案。这些方法给我们提供了一个新的思路,很有参考价值。

下面以分组密码为例,从混沌映射与密码学的关系出发,探讨混沌用作密码的可行性。可以从分组密码的定义,设计原理和整体结构三个方面来比较它与混沌映射的联系。

5.2.1 从分组密码的定义比较密码变换与混沌映射的关系

定义 5.1 [冯登国, 吴文玲, 2000] 分组密码是一种满足下面条件的映射 $E: F_2^m \times S_K \rightarrow F_2^m$, 对每个 $k \in S_K$, $E(\cdot, k)$ 是从 F_2^m 到 F_2^m 的一个置换。

在定义 5.1 中, $E(\cdot, k)$ 为密钥为 k 的一个加密函数, 其逆为密钥为 k 的解密函数(可记为 $D(\cdot, k)$)。分组密码要求能够在密钥的控制下, 从一个足够大且足够安全的置换中选择出一个置换, 使得由它构成的密码系统能够做到:

(1) 对每一个密钥 $k \in S_K$, 存在加密变换 $E(\cdot, k) \in E$ 和对应的解密变换 $D(\cdot, k) \in D$, 使得对于每一个明文 $p \in F_2^m$, 唯一解密条件 $D(E(p, k), k) = p$ 能得到满足;

(2) 变换 $E(\cdot, k)$ 和 $D(\cdot, k)$ 对密钥 k 是敏感的, 若密钥存在很小的差异, 即 $|k_1 - k_2| \ll \epsilon, k_1 \neq k_2$, 则有 $|c_1 - c_2| = |E(p, k_1) - E(p, k_2)| > M$, 表明密文会有很大的不同;

(3) 已知密文 c 在密钥 k 未知的情况下, 求取明文 p 是困难的; 并且已知 $c = E(p, k)$ 和 $p = D(c, k)$ 求出密钥 k 是困难的。

另一方面, 混沌映射具有如下特性(第 1 章):

- (1) 混沌映射是定义在相空间 I 上的一个确定性的自映射 $f: I \rightarrow I$, 具有复杂的动力学特性;
- (2) 混沌映射对初值具有极端的敏感性, 即存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\epsilon > 0$ 和任意的 $x \in V$, 在 x 的 ϵ 邻域内存在 y , 和存在自然数 n , 满足 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$;
- (3) 混沌映射具有拓扑传递性, 即对 I 上的任一对开集 X, Y , 存在 $k > 0$, 使得 $f^k(X) \cap Y \neq \emptyset$ 。

混沌的这些特性与密码变换的特性是一致的(参见表 5. 1):

- (1) 二者都是确定性的变换, 但都会表现出某种类似于随机的特性。密码变换通过迭代和混合的方法将信源信息置乱, 使得在有限计算能力下, 信源的随机性增加[Kocarev & Jakimovski, 2001]; 而混沌则通过多轮的迭代将一个确定性的系统变成一个具有遍历性的信源, Kolmogorov-Sinai 熵可以用来描述映射 f 产生信息的渐近速率。
- (2) 混沌映射具有拓扑传递性, 而密码变换具有混合特性。混沌的拓扑传递性使映射所在的相空间不能够被平凡地分割成有限子集, 而密码变换的混合特性使得明文和密钥完全混合, 密文的统计特性不依赖于明文。
- (3) 混沌对初值和参数的敏感性, 使得两个初值很接近或者参数有微小变化的混沌映射, 其轨道会指数分离; 而密码变换则要求对密钥敏感, 密钥或明文的微小变化会带来密文的显著不同。
- (4) 混沌是通过多轮的迭代来获得指数分离的轨道; 而密码则通过多轮的置乱与混合将明文打乱。

但是, 混沌与密码系统之间仍然存在着许多不同, 最大的不同之处就在于: 混沌是定义在连续的闭集上的, 而密码系统的操作只限于有限域。而正是这一点不同, 造成混沌系统不能采用数字化的方法直接应用于加密系统, 同时, 也不是所有的混沌系统都适合用来设计密码。因此需要巧妙的设计, 才能适当地将混沌映射用于密码系统。

表 5. 1 混沌与密码系统的关系

	混沌映射	密码变换
不同点	相空间: 实数集	相空间: 有限的整数集
相似点	迭代次数	加密轮数
	由系统参数控制	密钥控制
	对参数和初值敏感	通过混合打乱明文统计关系

密码变换和混沌映射的联系还可以从计算复杂性的角度来看。密码系统的基

本问题之一就是其安全性。在应用密码学中,这个安全性是通过计算的复杂性来保证的。也就是说,利用有限的计算资源,在有限的时间内,一个问题是单向的,不可解。比如,在密码学中广泛使用的陷门函数(trapdoor)就是一种单向函数(one-way function);再如,伪随机数发生器、分组密码算法也具有这种单向特性。在传统密码学中,这种单向函数的构造一般都利用一些数论中的难题,如大素数分解问题,离散对数问题等来实现。而一些混沌的系统数字化后也构成单向函数。譬如,我们可以看一个简单的例子:考虑定义在区间 $(0,1)$ 上的移位映射(shift map)

$$x_{n+1} = ax_n \pmod{1}, \quad (5.1)$$

式中, a 为正整数。当 $a > 1$ 时,该映射的 Lyapunov 指数为 $\ln a > 0$,且模运算使迭代序列有界,故该映射是混沌的。如果将上式数字化为映射

$$x_{n+1} = ax_n \pmod{N}, \quad (5.2)$$

式中, $a > 1$, N 和 x_n 都为整数,则对于(5.1)式来说,对所有的 a 值,该映射是不可逆的;而对(5.2)式,仅当 a 和 N 非互质时,映射在 $[0, N-1]$ 上不可逆。

(5.2)式所描述的映射也可以看成是一个离散对数问题。令 $x_0 = 1$,然后将其代入(5.2)式,进行多轮迭代后,有

$$x_n = a^n \pmod{N}. \quad (5.3)$$

离散对数问题就是已知 x_n 和 a ,求解指数 n 。这个问题用动态系统来解释就是:从某个初始值 x_0 出发,在给定轨道上的某个点 x_n 时,求取其迭代的轮数 n 。

5.2.2 从分组密码的设计原理比较密码变换与混沌映射的关系

分组密码的设计就是找到一种算法,该算法能在密钥的控制下从足够大的置换子集中迅速找到一个置换,用来对当前输入的明文进行加密变换。要使这样的加密变换足够安全,需要很好地利用混淆和扩散原则。

所谓扩散原则是指,所设计的密码应该使得密钥的每一位数字影响密文的许多位数字,以防止对密钥进行逐段破译,并且明文的每一位数字也应该影响密文的许多位数字,以便隐藏明文数字的统计特性。而所谓混淆原则是指,所设计的密码应该使得密钥和明文以及密文之间的依赖关系变得相当复杂,以至于这种依赖关系对密码分析者来说无法利用。

上面两个著名的原则最早由 Shannon 提出。他在 1949 年所写的经典论文《保密的通信理论》中还指出[Shannon, 1949]:

“好的混合变换通常是两个简单的非可交换运算的乘积。比如 Hopf 已经证明,做馅饼皮的生面团可以通过下面一系列的操作进行混合:面团首先被揉搓成一个扁面皮,然后将它折叠,再搓揉,再折叠,如此往复。一

个混合变换中的函数应该是复杂的,它的所有变量都应敏感,对任何一个变量来说,一个很小的变化都应引起输出的显著不同。”

这种在有限区域内进行反复折叠、拉伸变换正是混沌映射的典型表现。例如,Cat映射(猫映射)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (5.4)$$

就是在单位正方形内不断地进行线性的拉伸,然后通过取模来进行折叠(见图 5.1),从而呈现一种复杂的混沌行为。Shannon 还指出:好的加密系统应具有对密钥的敏感性,以及能够将明文充分地置乱并改变其统计特性。而这与混沌的混迭特性,对初始条件和参数的敏感性也相一致。

混沌由于具有拓扑传递性,因而具有混迭特性。所谓映射 f 具有混迭特性是指:对任意两个可测集 A_1 和 A_2 ,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}(A_1 \cap A_2)) = \mu(A_1)\mu(A_2),$$

也就是说,任何一个非零测度初始集合在映射 f 的作用下,在演化过程中将扩散到整个相空间。这一点和

分组密码设计中要求的扩散作用相对应。如果考虑将明文空间作为映射(对应于加密变换)的一个初始区域,那么,混沌的混迭特性意味着可以将明文的任意一位扩散到整个密文的每一位上去。

同时,混迭的系统还有下面一个有用的特性:如果 μ_0 是任意一个测度(假设它已经归一化,并且对 μ 连续)且 $\mu_n = \mu_0(f^{-n}A)$,则对任意 μ_0 -可测集 A ,有 $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ 。也就是说,在一个具有混迭特性的动态系统中,任何初始非均匀分布的集合都将趋于均匀分布。由此,若采用具有混迭特性的系统来加密,当迭代趋于无穷时,由于密文的分布已经不同于初始的明文分布,因此密文的统计特性不会依赖于明文。这一点正好符合分组密码设计的混淆原则。

由此可见,将混沌映射用于分组密码,实际上就是应用混沌的混迭特性来快速地混淆和扩散数据。我们在设计分组密码时常常采用置乱和替换方法来混淆和扩散数据。很多分组密码系统都采用这两种方法,如目前广泛应用的 S-Box 和 P 置换(DES 中就广泛采用了这种 SP 网络)。

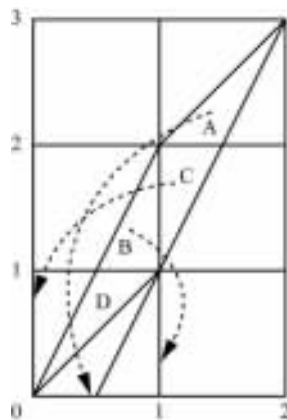


图 5.1 Cat 映射的几何解释

5.2.3 从分组密码的整体结构比较密码变换与混沌映射的关系

为了使分组密码具有足够的安全性且容易实现,在分组密码的设计中常常使用一种被称为 Feistel 网络的结构。该结构是由 H. Feistel 发明的,并且已经在很多分组密码系统中使用,如 DES,FEAL,GOST,LOKI,E2,Blowfish,以及 RC5 等。

对于一个分组长度为 $2n$ 比特的 r -轮 Feistel 密码,它的加密过程如下(图 5.2):

- (1) 将明文 P 分成左右两部分,分别记为 L_0 和 R_0 ;
- (2) 进行 r 轮完全相同的运算,计算规则如下:

$$\begin{cases} L_i = R_{i-1}, \\ R_i = L_{i-1} \oplus F(R_{i-1}, K_i) \end{cases} \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5.5)$$

式中, K_i 是密钥, N 为长度, $F: GF(2)^n \times GF(2)^N \rightarrow GF(2)^n$, 这里 $GF(2)^m$ 表示一个以 2 为生成元的有限 (m) 个元素的乘法;

- (3) 输出密文 C 。

令

$$x_1(i) = L_i, \quad x_2(i) = R_i。$$

并将(5.5)式写成迭代形式

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_2(i), \\ x_2(i+1) = x_1(i) \oplus f_K(x_2(i)). \end{cases} \quad (5.6)$$

例如,考察 Henon 映射

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_2(i), \\ x_2(i+1) = bx_1(i) + f_a(x_2(i)), \end{cases} \quad (5.7)$$

式中, $f_a(x_2)$ 为某种带参数 a 的非线性函数,如 $f_a(x_2) = 1 - ax_2^2$ 。当 $a = 1.4, b = 0.3$ 时,该系统是混沌的。可以发现, (5.6) 和 (5.7) 式在形式上有惊人的相似之处。也就是说,对分组密码的整体结构设计,也可以采用某种混沌映射。

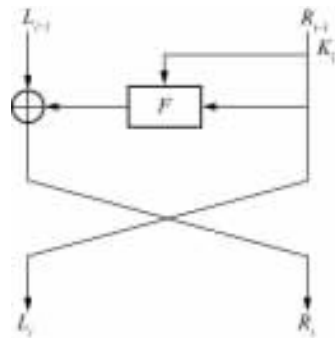


图 5.2 Feistel 网络

5.3 混沌分组密码的构造方法

由于混沌映射是作用在连续集合上,而分组密码变换是定义在有限集上的映射,因此二者之间存在着差异。直接将连续的混沌映射数字化用来构造加密算法未必可行,因为数字化后的混沌映射会带来性能的下降,同时,也并非所有的混沌映射都适合用于加密系统[Li, Chen & Mou, 2005]。下面先探讨数字化后的混沌系统的降质问题,然后讨论用于加密的混沌系统的选择。

5.3.1 混沌映射数字化带来的性能下降

根据混沌的定义,从理论上来说,一个定义在连续域上的混沌映射的周期点的测度为零。也就是说,一个周期轨道的任意小的邻域内都会存在非周期轨道。这一点说明,若任意选择相空间中的某个值作为初始值进行迭代,得到周期轨道的概率接近于零,一般情况下得到的都是非周期的混沌轨道。而将这个连续的混沌映射数字化以后,情形就不一样了。

下面首先定义有限域上的迭代映射。

定义 5.2 令 X_d 为一个有限集合, F_d 为一个定义在 X_d 上的自映射,即 $F_d: X_d \rightarrow X_d$, 则

$$x_{n+1} = F(x_n), x_0 \in X_d, n = 0, 1, 2, \dots$$

称为有限域上的迭代映射。

所讨论的数字混沌映射可以采用下面的定义。

定义 5.3 设 F 为一个定义在连续相空间 X 上的混沌映射,则按下面数字化方法获得的有限域上的迭代映射 F_d 称为数字混沌映射:

取一个有限的分割 $\beta = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$ 覆盖相空间 X , 将 $F: X \rightarrow X$ 用 $F_d: X_d \rightarrow X_d$ 代替, 此处 $X_d = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 。

需要说明的是,关于数字混沌映射,目前并没有一个公认的定义,下文将数字化后的混沌映射称为数字混沌。

严格地说,混沌映射数字化以后获得的映射不再是混沌的,一个明显的标志就是,该映射的轨道全为周期轨道。可以用移位映射和 Cat 映射为例来说明。

原始的移位映射定义为(5.1),数字化后的映射为(5.2)。映射(5.2)为周期映射,其周期最大为 $N-1$ 。将 Cat 映射(5.4)数字化后得到如下映射:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & ab+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{N} \quad (5.8)$$

则此映射亦为一个周期映射。比如,当选取 $a=40, b=8, N=124$ 时,对图像的像素位置采用上述 Cat 映射置乱,经过 5 轮迭代后,图像恢复原样(见图 5.3)。

从上面的例子可以看出,数字混沌映射的周期性对密码系统的安全性来说是不利的。在实际应用中,希望所选择的数字混沌映射具有尽可能大的周期性。也就是说,要求研究一个映射的周期 P 和控制参数之间的关系,如 $P=P(N)$ 。但不幸的是这类关系很难获得。对每一个特定的数字混沌映射,都需要利用数论和遍历性理论等专门的数学工具进行独立的研究。并且,目前尚没有理论的研究结果可以指导这方面的计算。比如,对前面提到的数字化后的移位映射(5.2),当 $a=2$ 时,有下面的结论: $P(N)$ 在 $N=2^k-1$ 时,取得最小值 $P(N)=\lceil \ln \ln N \rceil + 1$; 当 N

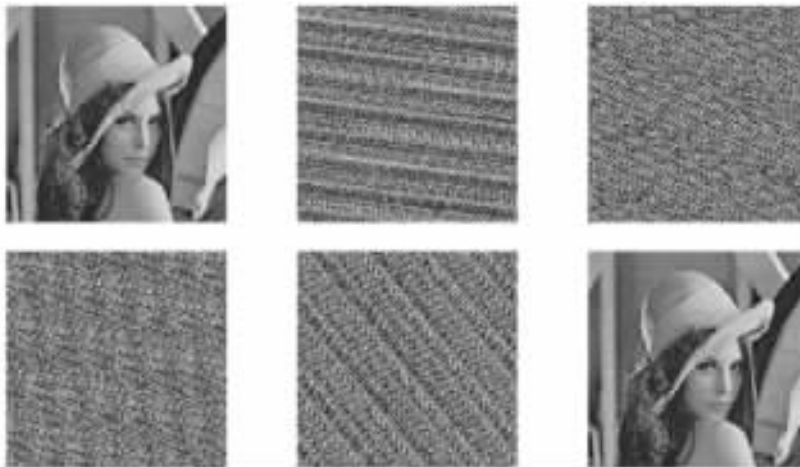


图 5.3 Cat 映射的周期性

为素数且 2 为一个乘法群的生成元时, $P(N)$ 取最大值 $N-1$ 。而当 N 为其他数时, $P(N)$ 的典型值为多少却不得而知。

另外, 虽然 N 的增大使得 $P(N)$ 增大, 但这种关系绝非单调, 更不呈线性。譬

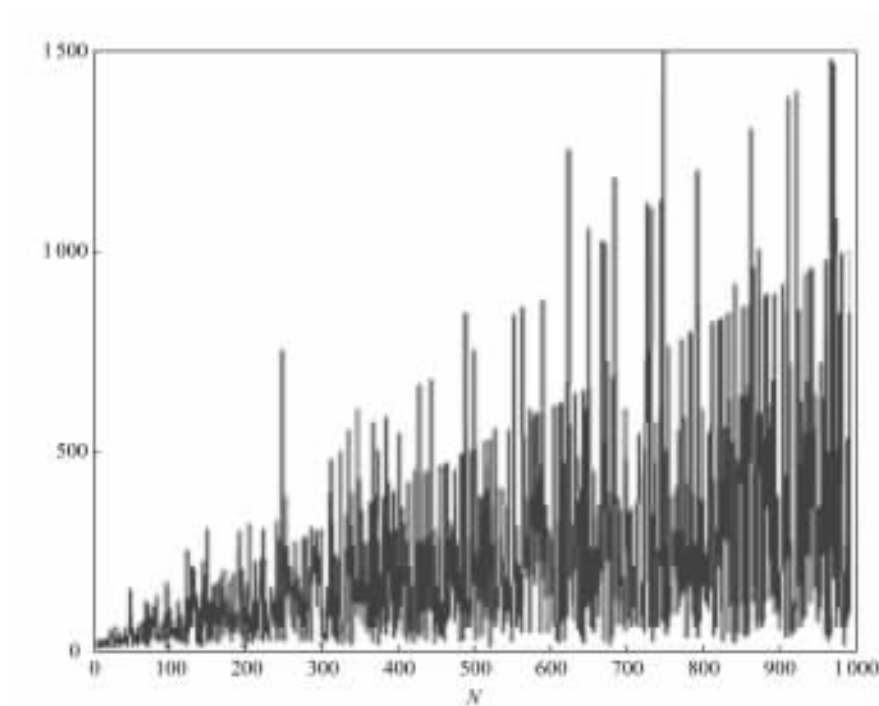


图 5.4 N 从 4 到 1000 变化时, 周期 $P(N)$ 和 N 的关系

如,对于(5.8)所描述的离散化后的 Cat 映射,并不是 N 越大,周期越长。如取 $a=1, b=1$, 当 $N=125$ 时, $P(N)=250$, 但当 $N=124$ 时, $P(N)=15$ 。我们计算了 N 从 4 到 1 000 的情况, 结果如图 5.4 所示。周期 $P(N)$ 和 N 有下述关系:

$$\begin{aligned} P(N) &= 3N, \quad N = 2 \cdot 5^k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ P(N) &= 2N, \quad N = 5^k \text{ 或 } N = 6 \cdot 5^k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ P(N) &\leq \frac{12N}{7}, \quad \text{其他情况。} \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.3.2 混沌映射的选择

一般说来,用于加密的混沌映射应符合下面三个条件:① 具有良好的混迭特性;② 为鲁棒混沌或者至少是结构稳定的混沌映射;③ 具有较大的参数集。其中所谓鲁棒混沌或结构稳定的混沌映射是指参数在具有小扰动的情況下获得的混沌映射和原混沌映射具有拓扑等价性。比如, Logistic 映射 $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ 就不是一个鲁棒混沌映射, 因为当 $\lambda \in (3.569\,945\dots, 4]$ 时, 混沌区域会出现稠密的周期窗口。但是, 目前尚没有公认的指标, 可以用来定量地评价混沌映射用于密码系统的程度, 虽然从 Lyapunov 指数和混沌映射的分布均匀性角度可以给出一些定量的描述。

研究表明, 满足下面条件的混沌映射比较适合用于构造分组密码。

(1) 混沌映射的 Lyapunov 指数尽可能大。

Lyapunov 指数是一个动态系统对初始条件敏感性强弱程度的定量刻画。对于一个一维系统, 可以按下式来计算:

$$\lambda(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \ln |f'(x_k)|, \quad x_0 \in I. \quad (5.10)$$

一个混沌映射的最大 Lyapunov 指数大于 0, 且 Lyapunov 指数越大, 该映射对初值越敏感, 也就越适合用于加密系统。

(2) 混沌映射具有均匀的概率分布。

对于一个离散混沌映射 $F: X \rightarrow X, X \subseteq \mathbb{R}^N$, 其迭代轨迹 $\{x, F(x), F^2(x), \dots\}$ 在相空间会呈现一定的分布。由于混沌映射具有拓扑传递性, 因此具有遍历特性。混沌轨迹会落到 X 中的每一点的小邻域, 但在 X 上的分布却并不均匀。比如, 对 Logistic 映射来说, 它在区间 $(0, 1)$ 上的分布为

$$v(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

但这并不是均匀分布, 在两端有奇异性。

对于一个混沌映射, 如果它的轨迹的分布具有均匀性, 则可以保证明文经过一

定次数的迭代后,能获得分布均匀的密文。一个具有均匀分布的混沌映射的例子为如下的帐篷映射:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 0.5, \\ -2x_n + 2, & 0.5 < x_n \leq 1. \end{cases}$$

(3) 混沌映射的控制参数要多,且参数空间要大。

因为对于混沌密码系统,参数往往用作密钥,因此控制参数多就意味着密钥多,参数空间大才能保证密钥空间大。这样的密码系统的保密性能才高。

(4) 可逆的一一映射对分组密钥具有优越性。

因为要求分组密码能共用加密和解密器,所以,密码变换应该在密钥的控制下可逆,并且明文和密文的大小一致。在分组密码设计中,通常采用置乱和替换的方法,而一一映射可以保证置乱变换是一一对应的。

5.3.3 基于混沌映射的分组密码一般设计方法

将混沌映射用于分组密码,实际上就是应用混沌的混沌特性来快速地置乱和扩散数据。一般地,在设计分组密码时利用扩散、置乱和替换等方法设计单轮加密变换 E ,然后,通过对该加密变换 E 进行多轮迭代,最后达到扩散和混淆明文的目的。

目前,尚没有公认的混沌分组密码设计的一般理论和方法。主要设计步骤可概括如下:

(1) 选择一个混沌映射:要求所选的混沌映射须具有良好的混沌特性,较大的参数空间,以及是一个结构稳定的混沌映射;

(2) 引入加密参数:也就是选择哪些参数可以用作密钥,参数范围是什么,以及如何选择参数保证映射是混沌的;

(3) 离散化混沌映射:将原始的连续映射离散化,在这一过程中,须保证数字混沌映射能保持原混沌的混沌特性,并检查数字化后的映射的周期性;

(4) 密钥的分配:合理地将混沌映射的控制参数与密钥对应起来,保证获得足够大的密钥空间;

(5) 密码分析:一般是利用尽可能有的密码攻击方法对系统的安全性进行测试。但即使通过了已知的密码攻击方法,仍然不能保证该密码系统是绝对安全的。

上面叙述的法则是一个一般化的方法,在具体设计时,还有很多要考虑的因素。下面将结合具体的图像混沌加密算法来做较为详细的阐述。

5.4 基于二维可逆映射的混沌图像分组加密方案

由于图像数据具有大容量、高冗余性、像素之间高相关性以及较大的尺寸等特

性,传统的加密方法存在一定的困难而不适合实时应用。在此,我们尝试用高维混沌映射来构造混沌图像分组加密方法,从而获得相对优越的结果。首先总结一下目前已有的对静态图像和动态图像的加密方法。

5.4.1 已有图像加密算法回顾

已有的图像加密方法可以分为两类:一类是在压缩域内对已压缩的数据流进行加密;另一类是对原始数据进行加密。尽管 Shannon 指出,为了消除数据之间的统计依赖性,数据应该先压缩再加密,然而,由于各种数据压缩算法的不同,带来图像数据存储格式不一,压缩过的数据再经过加密后无法为一般的图像软件所识别,也无法对密文图像进行格式转换,从而给数据的使用带来不便。而若先加密再压缩,则因为加密过的数据其相关性被破坏,很难获得高的压缩率;同时,因为当前的许多图像压缩算法是有损的,压缩加密过的数据会带来解密错误,因此,具体采用哪种方法要根据实际的需要而定。

为了加快加密速度,同时考虑到图像数据的特点,对图像的加密算法分为全加密和部分加密两类。部分加密又称选择加密,就是只选择图像数据中的一部分来进行加密。这种加密思想的出发点在于:图像数据的各个分量对图像质量或图像保密来说并不同等重要。比如,对于图像的 DCT 变换来说,大部分能量都集中在少部分的低频和直流系数上,因此加密少部分重要的数据就可以实现对整幅图像的安全保护。很多图像和视频序列的加密就采用了部分加密的算法。文献 [Cheng & Li, 2000] 曾给出几种部分加密的方案。对一个 512×512 的图像,通过部分加密,只有 $13\% \sim 27\%$ 的四叉树压缩输出数据需要被加密。对 SPIHT 压缩算法来说,被加密的数据低于 2% 。为适应当前的图像和视频编码格式,很多加密方案集中于对 DCT 变换系数的修改上。这些方案或者修改 DCT 直流系数,或者改变 DCT 系数的符号位。对 MPEG 编码来说,目前也有只加密 I 帧 DCT 变换系数和加密运动矢量的算法。针对 DCT 系数的图像部分加密,虽然可以提高加密速度,也可以和现有图像压缩标准结合,以及不改变图像的格式,但是它有一些难以克服的缺点。另外,人们已发现重要的 DCT 系数并不完全是知觉重要的系数。换句话说,部分加密 DCT 系数并不能完全加密图像的可理解性。这是因为 DCT 变换并不和人眼视觉系统的特性相一致,它只是做到了能量的集中。从这一点上来说,小波变换具有其优越性 [Uehara *et al.*, 2000]。

为克服在变换域中加密数据带来的数据膨胀和可压缩性降低的缺陷,某些研究者也考虑在图像压缩的同时进行加密,提出一类将压缩和加密结合的方法。实际上,从 Shannon 信息论的角度看,压缩数据也可看成是某种加密,因为二者都是在降低数据的相关性,使最终数据相互之间统计独立。

在混沌图像加密研究方面,文献[Scharinger, 1998]介绍了一种采用 Kolmogorov 流进行替代和置乱图像的快速图像加密方法。文献[Fridrich, 1998]分别采用 Baker 映射和 Cat 映射构造了二维图像加密方案:将这两种映射离散化,利用离散化后的映射对像素的位置进行置乱,然后再对像素灰度值进行扩散。交替进行这种扩散和置乱操作,便可以达到图像快速加密的目的。

5.4.2 一类基于二维可逆混沌映射的图像分组加密方案

基于混沌的图像分组加密就是利用混沌模型对图像进行某种置换,使得置换后的图像与原始图像存在视觉差异。对图像进行的加密置换要交替地使用置乱和扩散机制。置乱是对图像的像素坐标进行变换,而扩散则是对图像像素值进行混迭。操作的目的是使得加密后的图像的统计特性变得均匀,并且密文图像和明文图像之间的依赖关系变得复杂。

对像素值的扩散有三种方法。一种方法是:由一确定的混沌模型产生具有足够长度的混沌序列 $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$,并将该序列映射为图像像素值域上的序列 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$,然后将序列 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 与像素值进行某种相关运算,如异或运算 XOR。由于混沌序列具有类似随机性的行为,使得变换后的图像亦表现出类似随机性,从而实现图像加密。解密过程也很简单,只要用序列 $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 与加密图像的像素值进行相关逆运算即可。该方法实际上就是一种混沌序列加密。第二种方法是将图像分成若干个小块,将图像的像素值代入一个混沌映射进行迭代,以此来改变每个像素数值。图像的像素值是表征该像素的颜色、亮度等信息的整数,它可以是颜色分量,也可以是亮度信息,或者是颜色索引。第三种方法是一种构造替换表的方式。假设像素值的取值空间为 $P = \{0, 1, \dots, 255\}$,采用一个一维的混沌系统进行迭代,获得一个混沌序列 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$,然后对这个混沌序列进行数字化,使得 $c_i \in [0, 255]$,再将序列 C 中重复的数据剔除,最后 P 和 C 便构成一个像素值的替换表。这种方法类似于传统分组密码中 S-box 的构造,具有很好的扩散效应。但不足之处在于没有混淆作用,因此常常需要结合某些异或、取模等操作以达到扩散的目的。

像素坐标变换的实现可以有多种方法。在此采用一种简捷有效的算法,即采用二维可逆混沌映射,如前面提到的 Cat 映射,以及即将介绍的 Baker 映射等。该映射可以将图像中的每个像素的原始坐标 (x, y) 一一映射到新坐标 (x', y') ,从而得到加密图像。图像的解密则利用混沌映射的逆映射将新坐标 (x', y') 映射到原始坐标 (x, y) 。

这类可逆的二维混沌映射目前研究得并不多,但采用它们进行坐标置乱具有很多优点:

(1) 由于该类映射是一一映射,因此,明文图像和密文图像之间存在着一一对应的关系,避免了坐标位置的冲突;

(2) 数字化后的混沌映射具有周期性,而周期的长短一般和初始值的选取是相关的,但对于可逆混沌映射来说,周期的大小只和参数有关,而与初值无关;

(3) 采用二维混沌映射具有大的密钥空间,且这类混沌映射是结构稳定的;

(4) 采用这类二维混沌映射对图像的置乱速度很快;

(5) 像素变换位置对应表的构造简单,通过矩阵运算即可实现。

下面以 Cat 映射为例,详细分析基于二维混沌映射的图像加密方法。

1. 混沌 Cat 映射

为叙述方便,将混沌 Cat 映射重写如下:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

由于 $\det A = 1$, Cat 映射是保面积的一一映射。该映射的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = \ln\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right) > 0, \quad \lambda_2 = \ln\left(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\right) < 0.$$

该映射的几何解释如图 5.5 所示:一幅图像在 Cat 映射的作用下先进行线性拉伸,然后通过取模运算进行折叠;如此循环往复,最终达到混乱。

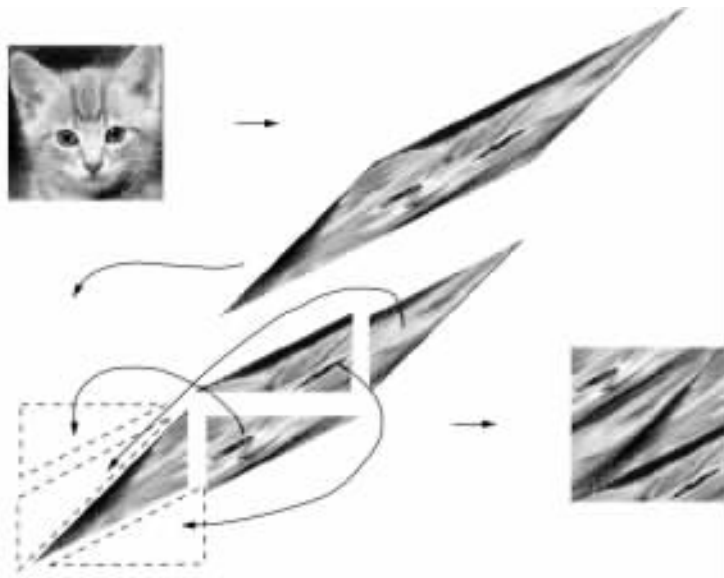


图 5.5 Cat 映射的变换作用

2. Cat 映射的离散化

将 Cat 映射用于加密,需要先对它进行预处理。

首先,引入加密参数。加密参数的引入可以通过改变矩阵 A 的元素来获得。

考虑如下更为一般的 Cat 映射

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A_d \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad A_d = \begin{pmatrix} ab+1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in N, \quad (5.12)$$

该映射仍为一个保面积映射,且具有正的 Lyapunov 指数。

其次,将 Cat 映射扩展到 $N \times N$ 并离散化,得到

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A_d \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{N}, \quad x_0, y_0 \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \quad (5.13)$$

该映射仍然是一一映射。容易证明,映射(5.13)的参数 a, b 以 N 为周期,即

$$\begin{pmatrix} (a+k_1N)(b+k_2N)+1 & a+k_1N \\ (b+k_2N) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{N} = \begin{pmatrix} ab+1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{N},$$

式中, k_1, k_2 为正整数。由此,要求 a, b 都为小于 N 的正整数。

3. 基于混沌 Cat 映射的图像加密方法

所构造的分组图像加密算法是将整个图像作为一个数据块,通过多轮的迭代完成对明文统计特性的改变。在每一轮的迭代中,交替地使用置乱和扩散操作(在改进的 Cat 映射算法中,还加入了替换操作),以使得数据经过较少的轮数操作完成加密。

(1) 置乱变换。

在所构造的加密算法中,置乱操作是将像素的位置置乱,采用(5.13)式所定义的数字化的 Cat 映射来做置乱变换。

(2) 扩散变换。

单纯采用像素置乱不会改变图像的统计直方图,因此,攻击者会利用直方图进行统计攻击。为此,须引入像素值的扩散变换,进一步使密文的直方图变均匀。

图像扩散操作可以这样进行:设原始图像为 f ,将之分解成 2×2 的小方块,对每个方块中的四个像素值

$$f(2i, 2j), \quad f(2i+1, 2j), \quad f(2i, 2j+1), \quad f(2i+1, 2j+1)。$$

运用如下变换:

$$X' = TX, \quad (5.14)$$

式中

$$X = [f(2i, 2j) \quad f(2i, 2j+1) \quad f(2i+1, 2j) \quad f(2i+1, 2j+1)]^T$$

为图像块中四个像素值组成的向量,

$$\mathbf{X}' = [f'(2i, 2j) \quad f'(2i, 2j+1) \quad f'(2i+1, 2j) \quad f'(2i+1, 2j+1)]^T$$

为经过扩散变换后的像素值向量; $T \in \mathcal{L}^{4 \times 4} \subset \mathcal{R}^{4 \times 4}$ 为变换阵, 选取原则与 Cat 映射变换阵相同, 即行列式为 1, 以保证逆映射存在且是一对一的。例如, 可以取

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

并保证变换后 $\mathbf{X}'$ 的各元素为落在 $[0, N-1]$ 之间的整数。

(3) 加密算法。

完整的加密过程如下:

- 步骤 1 设置加密密钥: Cat 映射的映射参数 a, b 和迭代轮数 k ;
- 步骤 2 将图像分成 m 个大小为 $N \times N$ 的数据块^①, 比如 256×256 的图像数据;
- 步骤 3 利用离散化的 Cat 映射(5.13)进行位置置乱;
- 步骤 4 在每轮置乱之后, 进行一次扩散操作, 扩散变换采用公式(5.14);
- 步骤 5 转到步骤 3, 将上面 3, 4 步循环做 k 轮;
- 步骤 6 将分块数据重新组合, 然后输出。

(4) 解密算法。

解密流程与加密流程相似, 只是反置乱变换公式变为:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{N}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -b & ab+1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

同时, 反扩散公式为

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X}', \quad \text{其中 } \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

值得指出的是, 由于在实际的编程实现中, 反变换会出现负数取模的问题, 因此可以做正向变换的查找表, 而在解密时反过来查。另外, 因为数字化后的混沌系统只涉及整数运算, 所以, 无论是置乱变换还是扩散变换, 运行都是相当快的。

4. 基于 Cat 映射加密方法的安全性分析

(1) 密钥空间分析。

^① 如果图像的大小小于 $N \times N$, 则不足部分填充零。

由于在此所使用的扩散操作是固定参数的变换,因此密钥主要是 Cat 映射的控制参数 a, b 和加密轮数 k 。将引入一个查找表来进一步增加加密算法的安全性。

显然,加密轮数越多,密钥空间越大。比如,如果只进行一轮加密,则对 256×256 的图像,密钥空间只有 2^{16} ;但如果加密轮数增加到 4 轮,则该加密系统的密钥空间变为 2^{64} 。在实际使用中,一般可取 $k \geq 4$ 。另外,密钥空间也依赖于图像的尺寸:图像越大,密钥空间越大,且呈 N^{2k} 增长,其中 N 为图像尺寸(在此假设图像为正方形)。

(2) 密钥雪崩效应分析。

从密钥更换的有效性考虑,一个分组密码算法对密钥的变化应是敏感的,即密钥具有所谓的雪崩现象。根据分组密码测度中的严格雪崩准则,改变密钥中的任意一位,应导致密文分组中大约一半比特的变化。

从图 5.6 和图 5.7 的实验结果来看,在参数 a, b 分别改变 1 位的情况下,不能从密文中提取更多的信息,这表明算法对密钥非常敏感。

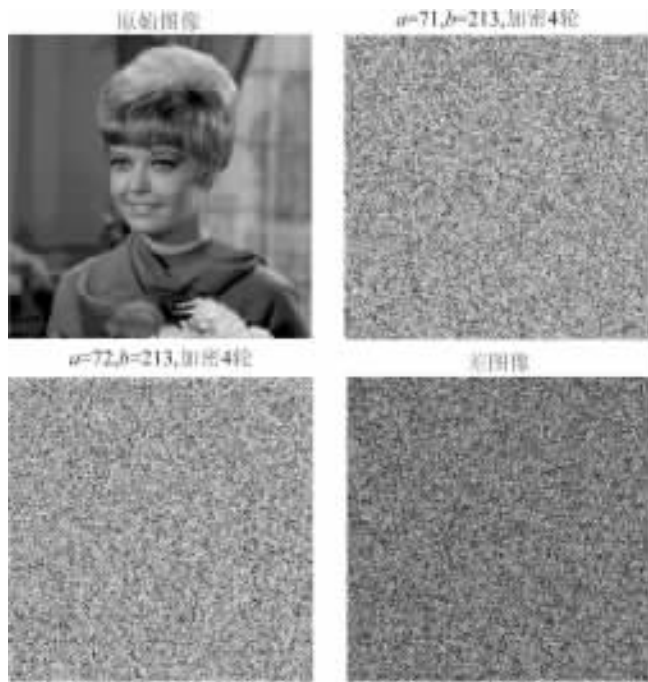


图 5.6 密文对密钥 a 的敏感性

下面再看一下加密前后统计直方图的变化。图 5.8(b)为原始图像的灰度值直方图,图 5.8(d)为加密图像的灰度值直方图。由比较可知,变换前后的直方图

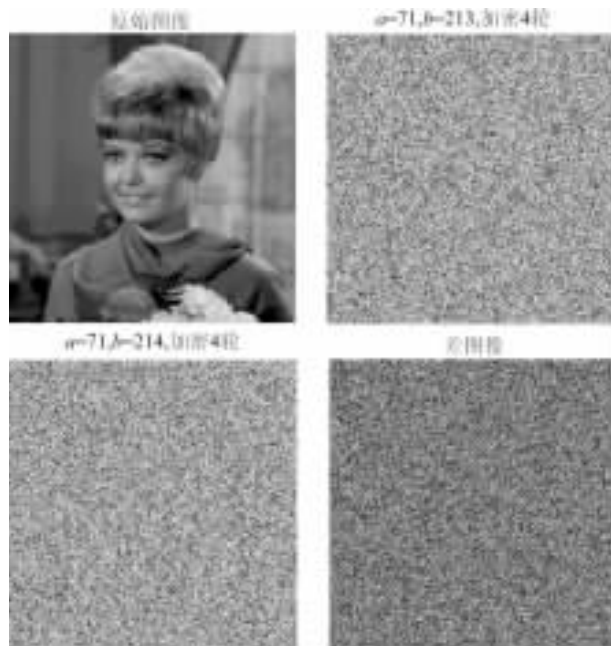


图 5.7 密文对密钥 b 的敏感性

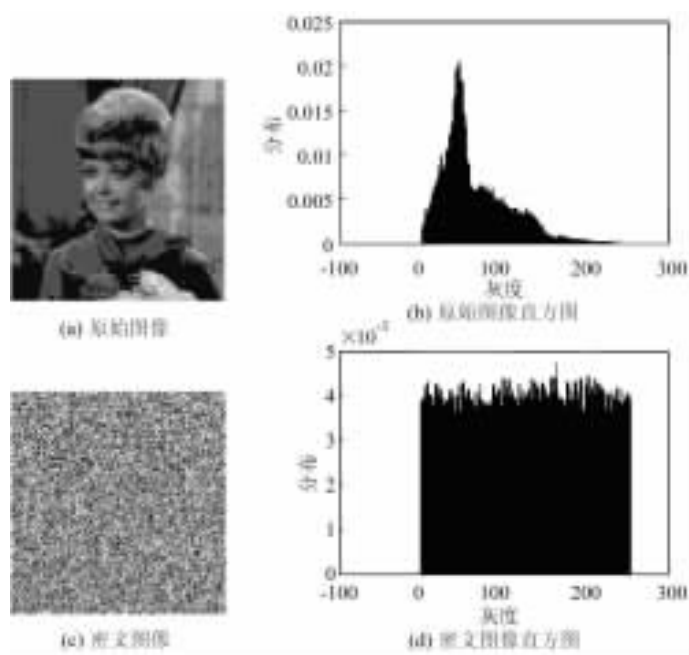


图 5.8 加密前后的图像灰度直方图

发生了明显的变化:变换后的直方图呈均匀分布,它掩盖了变换前的分布规律。由 Shannon 对高强度理想密码和唯一解距离的定义可知,对于已知密文攻击,用此种方法加密后的密文对密钥的贡献很小,即

$$H(K | C_1 \cdots C_n) \approx H(K),$$

式中, H 是信息熵, K 为密钥, $C_1, \dots, C_n$ 为密文。这大大增加了破译者的工作量和难度,因此该密码可以有效地抵抗统计和已知密文攻击。

(3) 相关性分析。

在测试图像中,随机选取 1 000 对相邻(包括水平、垂直和对角方向相邻)的像素点对,记为 (x_i, y_i) ,其中 x_i, y_i 分别代表第 i 对像素的两个像素值。按如下定义的相关系数,计算这 1 000 对像素灰度值之间的线性相关系数

$$\text{Cov}(x, y) = E[x - E(x)][y - E(y)], \quad (5.18)$$

$$r_{xy} = \frac{|\text{Cov}(x, y)|}{\sqrt{D(x)} \sqrt{D(y)}}, \quad (5.19)$$

式中, x, y 表示两个相邻的像素灰度值。在实际测试中用如下离散化的计算公式

$$E(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5.20)$$

$$D(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))^2, \quad (5.21)$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))(y_i - E(y)). \quad (5.22)$$

以相邻两像素灰度值为 x, y 坐标,得到加密前后相邻两点的相关性分析结果如图 5.9 所示。

表 5.2 列出了对明文图像和密文图像多次随机选取 1 000 对像素测试后得到的相关系数。可以看出,加密前的图像像素之间具有较强的相关性,经过加密过后,这种相关性已经基本被破坏。

表 5.2 明文图像和密文图像相邻像素间的相关系数

加密前	0.932 7	0.949 6	0.936 9	0.972 4	0.966 1	0.920 9	0.906 9	0.941 4	0.947 7
加密后	0.031 5	0.015 1	0.032 1	0.002 1	0.018 0	0.035 5	0.006 2	0.012 7	0.055 0

(4) 明文雪崩效应分析。

一个分组密码算法对明文的变化应是敏感的,即明文对密文存在着雪崩现象。根据分组密码测度中的严格雪崩准则,改变明文分组的任一比特,应导致密文分组中大约一半比特的变化。我们对一幅 256×256 的图像进行了测试。首先,对一幅图像进行加密,获得加密图像 C_1 ;然后,随机改变原图像的某一个像素点的值,再

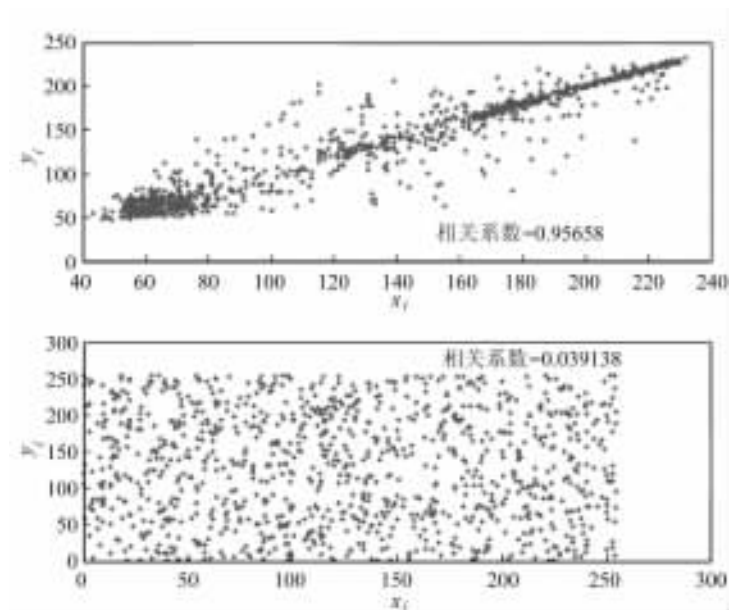


图 5.9 明文图像和密文图像相邻两点的相关性分析结果

采用同样的密钥进行加密,获得密文图像 C_2 ;比较 C_1 和 C_2 对应位置的像素值,并统计密文改变的百分比。这种密文改变的百分比一般会随着加密轮数的改变而增大,如图 5.10 所示。从图中不难看出,密文改变的百分比随着加密轮数的增大而迅速上升;在加密轮数大于 10 轮以后,密文的改变达到 96%左右,之后基本保持不变。明文的稍许改变带来密文的巨大变化,随着加密轮数的增加,被影响的像素点呈指数上升,具有这种特性的加密方法对差分攻击具有很强的抵抗能力。

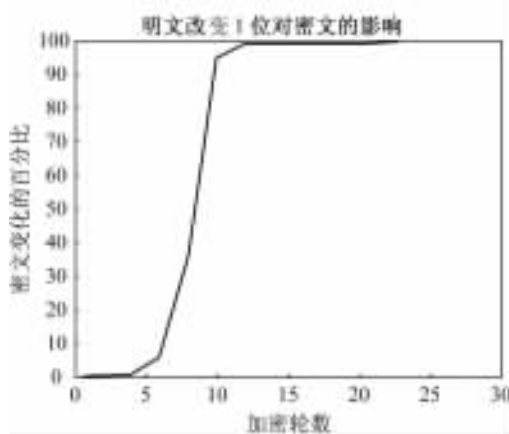


图 5.10 明文改变 1 位带来密文变化的百分比

此外,在安全性测试中,还应对全 0 信号或全 1 信号进行测试。通过测试,发现本算法对这样的特殊数据 also 具有很好的加密效果——密文均匀地分布在所属的空间,明文的统计特性完全被隐藏。

5. 其他实验结果

对实时图像加密来说,速度是一个非常重要的因素。表 5.3 给出对加密速度的测试。其中,测试所用数据块的大小为 1 600K 字节,时间单位为 s,运行环境为 PⅢ-1G CPU,256M 内存和 Windows XP 操作系统。

表 5.3 加密时间的比较

算法	CatMap 加密							
	1 轮	2 轮	3 轮	4 轮	5 轮	6 轮	7 轮	8 轮
运行时间	0.050	0.130	0.210	0.310	0.382	0.470	0.535	0.621

6. 算法的改进与扩展

前面所叙述的基于 Cat 映射的分组加密算法交替使用了扩散和置乱的操作。如果在每次的置乱与扩散操作之间再插入一个替代操作,则密码的安全性会得到提高。尽管替代操作会带来一些附加的操作,增加了密码的复杂性,但是,由于替代操作的插入,使得混淆效应变得更明显,这样就可以适当减少加密轮数。比如,如果在前面所介绍的加密算法中增加了下面将要阐述的替换操作,则明文改变 1 位带来的密文改变的百分比增加速率会非常快。如图 5.11 所示,只要经过短短的 4 轮迭代,就可以达到 94%。

下面详细介绍一种简单可行的替代操作,用于增强前述的基于 Cat 映射的分组密码。这种替换操作是一种基于混沌替换表的加密变换。首先采用混沌的 Logistic 映射来构造替代表,然后利用该替代表对置乱后的明文按像素值进行替换。

考虑 Logistic 映射

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)。$$

按下面步骤构造替换表:

(1) 将区间[0,1]均匀分成 256 个子区间 $\{s(0),s(1),\cdots,s(255)\}$,每个区间分别赋予一个整数 0,1,⋯,255,即 $V(s(i))=i$,并记 $s(i)$ 的上下界为 $s_d(i)$ 和 $s_u(i)$,即任意 $s(i)$ 中的数据 s ,有 $s_d(i) \leq s \leq s_u(i)$ 。

(2) 任意取一个值为初始值。经过 N 轮初始迭代后,开始根据数值迭代后所

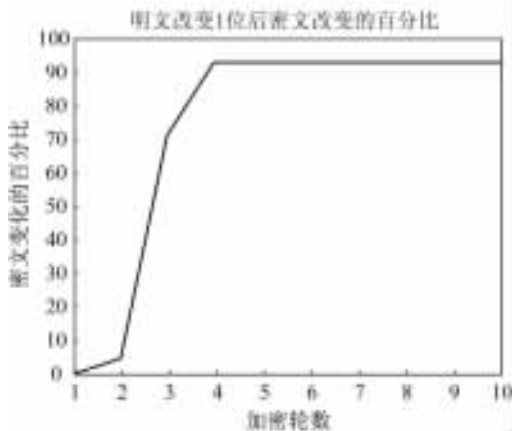


图 5.11 加入替换操作后,明文改变 1 位带来密文变化的速率加快

落的区间记录下该整数序列。若第 $n(n > N)$ 次迭代获得的数值在区间 $s(k)$ 中,则该次得到的整数值为 k 。如此重复下去,直到获得一个有 256 个不重复数据的序列 $\{k_0, k_1, k_2, \dots, k_{255}\}$, 且 k_i 属于 $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$ 。在此,需要处理一下迭代中迭代结果落入以前已经走过的区间的问题(这样的区间对应的整数值已经取出来了)。对于这种情况,不记录该区间对应的整数值,而继续迭代下去,直到落入到另一个从未走到过的新区间为止。

(3) 如果原来相空间分割对应的整数序列为 $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$, 现在的序列为 $\{k_0, k_1, k_2, \dots, k_{255}\}$, 则找到的映射关系为 $k_i = f(i)$, 即为一个替换表。

上述基于 Cat 映射的加密算法代表了一类利用高维可逆混沌映射的加密算法。还可以用二维可逆的 Baker 混沌映射来构造。

一般的 Baker 映射 $B_g: I \rightarrow I$ 定义为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \begin{cases} x_n/\alpha, & \text{当 } x_n < \alpha, \\ (x_n - \alpha)/\beta, & \text{当 } x_n > \alpha; \end{cases} \\ y_{n+1} &= \begin{cases} \lambda_a y_n, & \text{当 } y_n < \alpha, \\ (1 - \lambda_b) + \lambda_b y_n, & \text{当 } y_n > \alpha; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.23)$$

式中,常数 $\beta = 1 - \alpha$, 且 $\lambda_a + \lambda_b \leq 1$ 。取 $\lambda_a + \lambda_b = 1$ 是因为这时映射是个保面积映射。否则它将是压缩映射。该映射的两个 Lyapunov 指数分别为

$$\lambda_1 = -\alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta > 0, \quad \lambda_2 = \alpha \ln \lambda_a + \beta \ln \lambda_b < 0。$$

该映射是先在水平方向上对数据进行分割,然后再对数据进行拉伸,再将结果顺序排列在单位面积内。

利用 Baker 映射的二维可逆混沌分组密码的构造与采用 Cat 映射相类似,故这里不再详细阐述。值得指出的是,利用 Baker 映射构造的二维图像加密算法在

相同条件下,具有更大的密钥空间。

5.5 基于三维可逆混沌映射的图像分组加密方案

由上述可知,利用高维可逆混沌映射进行图像加密能够获得高安全性。然而,由于混沌具有短期的可预测性,因此要想通过很少的几轮迭代就将数据打乱,采用低维的混沌映射是困难的。现考虑将混沌映射扩展到高维。这里介绍一种茅耀斌等[Mao *et al.*, 2004]设计的将二维 Baker 映射扩展到三维并将之应用于图像加密的方法。其实,无论是二维 Baker 映射还是二维 Cat 映射都可以被扩展到三维,并都可以被用来构造更快更好的加密算法。

5.5.1 二维 Baker 映射的三维扩展

将上节介绍的 Baker 映射定义中的 α, λ_a 和 λ_b 都取 $1/2$, 则定义在单位正方形上的连续二维 Baker 映射可表示为:

$$B(x, y) = \begin{cases} (2x, y/2), & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (2x - 1, y/2 + 1/2), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.24)$$

该变换过程可以看成是先在平面内沿着 x 轴切分竖条,再将每个竖条沿着 x 轴扩展,沿着 y 轴压缩,再层层垒起,但最终保持变换前后的面积不变,如图 5.12 所示。

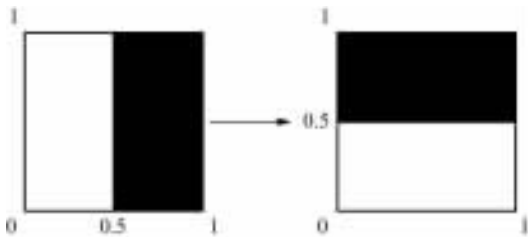


图 5.12 连续二维 Baker 映射

该 Baker 映射的最大 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = \ln 2 > 0$ 。

将二维 Baker 映射扩展到三维空间,便得到三维 Baker 映射。具体做法如下:将立方体分别沿着 x 轴和 y 轴切块,得到四个立方条,再将每个立方条在保持体积不变的情况下压扁,层层堆叠成新的立方体,如图 5.13 所示。其数学表达式为

$$B(x, y, z) = \begin{cases} (2x, 2y, z/4), & 0 \leq x < 1/2, 0 \leq y < 1/2, \\ (2x, 2y-1, z/4+1/2), & 0 \leq x < 1/2, 1/2 \leq y < 1, \\ (2x-1, 2y, z/4+1/4), & 1/2 \leq x < 1, 0 \leq y < 1/2, \\ (2x-1, 2y-1, z/4+3/4), & 1/2 \leq x < 1, 1/2 \leq y < 1. \end{cases} \quad (5.25)$$

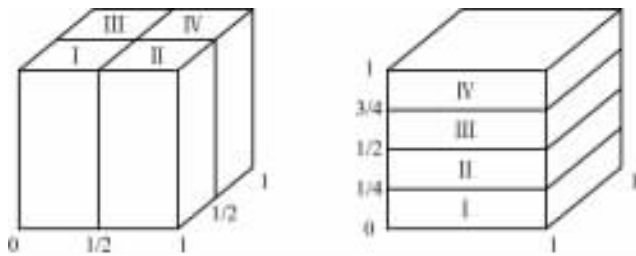


图 5.13 连续二维 Baker 映射的三维扩展

映射(5.25)有三个 Lyapunov 指数,分别表示系统在三个方向上的轨迹分离情况。将四个分块中 $I \rightarrow II$ 的方向定为 x 方向, $I \rightarrow III$ 定为 y 方向,剩下的一个为 z 方向。则单位正方体在 x 方向是受到拉伸的,且拉伸倍数是 2,又由于四个分块大小一样,所以左边分块投射到右边分块的概率相同,因此该三维 Baker 映射有一个 Lyapunov 指数为

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 = \ln 2$$

同理,在 y 方向有相同的情况,所以还应有一个 Lyapunov 指数为 $\lambda_2 = \ln 2$ 。在 z 方向上,正方体是受到压缩的, Lyapunov 指数为 $\lambda_3 = 4 \times \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$ 。由此可以发现,扩展后的三维 Baker 映射是超混沌的。

现在将上述的三维 Baker 映射通用化。如图 5.14 所示,一个立方体被分成许多小长条,每个小长条被压扁并被堆叠起来,构成与原立方体体积一样的新的立方体。假设原立方体被切成了 $k \times t$ 个块,每块大小为 $[W_{i-1}, W_i) \times [H_{j-1}, H_j) \times [0, 1)$, 其中 $i=1, \dots, k, j=1, \dots, t, W_i = w_1 + \dots + w_i, W_0 = 0$, 并满足 $w_1 + \dots + w_k = 1$, 且 $H_j = h_1 + \dots + h_j, H_0 = 0$, 并满足 $h_1 + \dots + h_t = 1$ 。通用化的 Baker 映射定义如下:

$$B_3(x, y, z) = \left(\frac{1}{w_i}(x - W_{i-1}), \frac{1}{h_j}(y - H_{j-1}), w_i h_j z + L_{ij} \right), \quad (5.26)$$

式中, $(x, y, z) \in [W_{i-1}, W_i) \times [H_{j-1}, H_j) \times [0, 1)$, 且 $L_{ij} = W_i \times h_j + H_j$ 。

可以进一步将上述通用化的连续 Baker 映射转变为离散映射。为保证离散化后的映射仍然保持原始混沌系统的基本特性,如混沌特性和对初值的敏感性等,离

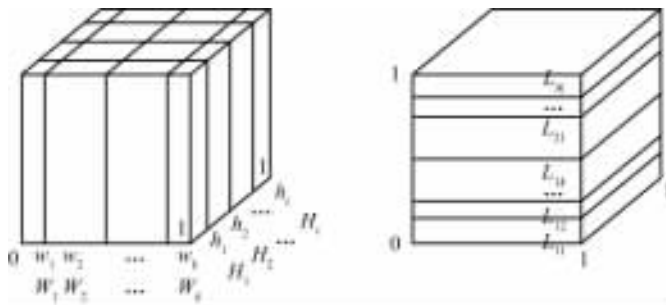


图 5.14 通用化的三维 Baker 映射

离散化后的映射 B_{3d} 与原始连续映射 B_3 须满足下面的关系：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq m, n, l < N} |B_3(m/N, n/N, l/N) - B_{3d}(m, n, l)| = 0$$

因此,可以这样来离散化连续 Baker 映射:不失为一般性,假设一个立方体为 $W \times H \times L$,且被分割成 $k \times t$ 个块。设 k 个整数构成的序列 $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ 满足 $W_i = w_1 + \dots + w_i, W = w_1 + \dots + w_k$, 且 $W_0 = 0$ 。相应地,序列 $\{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ 也要满足类似的条件,即 $H_j = h_1 + \dots + h_j, H = h_1 + \dots + h_t$, 且 $H_0 = 0$ 。三维离散 Baker 映射定义为:

$$S = (H_{j-1}W + W_{i-1})L + w_i h_j l + (n - H_{j-1})w_i + (m - W_{i-1}), \quad (5.27a)$$

$$(m', n', l') = B_{3d}(m, n, l)$$

$$= ((S \bmod(WH)) \bmod W, [(S \bmod(WH))/W], [S/(WH)]). \quad (5.27b)$$

上式使原立方体上的任意点 (m, n, l) 被映射到新立方体的点 (m', n', l') 上,如图 5.15 所示。

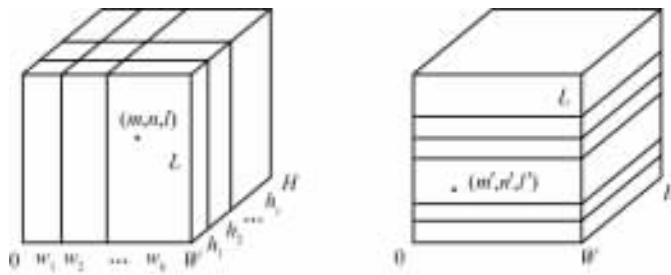


图 5.15 三维离散 Baker 映射

5.5.2 基于三维 Baker 映射的图像加密方案

下面将离散化后的三维 Baker 映射应用于图像加密。因为单纯使用离散化后的混沌映射来对像素进行位置置乱是不安全的,它不能经受已知明文的攻击,所以在加密方案中,将插入异或和取模操作,以此来进行像素值的混迭,最终达到增强

安全性的目的。

(1) 混迭过程。

这个混迭过程实际上是将扩散操作和替换操作糅合在一起。首先,选定两个数,一个为在 $(0,1)$ 之间的浮点数 L_i ,另一个为整型数 S 。浮点数 L_i 用作 Logistic 映射的初始值,整型数 S 作为取模和异或操作的初始值。接着,将 L_i 代入 Logistic 映射

$$x(k+1) = 4x(k)[1-x(k)]$$

中,并在经过一轮映射后得到一个新值。如果这个新的数据没有落在区间 $(0.2, 0.8)$ 之内,则继续迭代,直到得到的数据落在该区间内。之所以这么做,是因为 Logistic 映射的统计分布在两端具有奇异性,而在 $(0.2, 0.8)$ 区间内,分布较平均。

把获得的一个 Logistic 映射迭代数据乘以整数值 $N-1$,然后再量化它,就得到了一个在 $[0, N-1]$ 之间的数值。此处的 N 是图像像素的灰度量化级数,对灰度图像来说为 256。

利用 Logistic 映射循环迭代下去,并在每次获得一个需要的数值后进行一次尺度放大和量化,最终可得到一个整数序列。将第 k 次得到的数据序列记为 $\phi(k)$ 。对于灰度值的混迭,可以采用对相邻像素和 $\phi(k)$ 进行异或与取模操作进行。具体公式如下:

$$C(k) = \phi(k) \oplus \{[I(k) + \phi(k)](\bmod N)\} \oplus C(k-1), \quad (5.28)$$

相应的解密公式为

$$I(k) = \{\phi(k) \oplus C(k) \oplus C(k-1) + N - \phi(k)\}(\bmod N) \quad (5.29)$$

式中, $C(k)$ 为第 k 次混迭后的密文数据, $I(k)$ 为第 k 次混迭时的明文数据。这里采用相邻两点进行异或操作就是为了将前一点的影响耦合到下一点上,如此循环,直到将一点的数值扩散到整个图像上。将 Logistic 映射得到的序列 $\phi(k)$ 和像素异或操作结合在一起进行,是为了对抗选择明文攻击。比如,如果用一个除了第 n 个点外的像素值全为 0 的图像进行加密,则由于相邻两像素作异或仍然得 0,因此,得到的密文图像是一个除了个别点处有值外,其余全为 0 的图像。不断改变明文中不为 0 的像素点的位置,可以得到多对明文-密文对。再通过分析这些明文-密文对,就能攻破密码。但是在采用 Logistic 映射得到的序列 $\phi(k)$ 以后,由于 $\phi(k)$ 的分布相当均匀,因此一幅全 0 的图像经过混迭后就变成了一幅统计直方图分布均匀的图像,从而使得选择明文攻击失效。

(2) 加密方案。

整个加密方案如图 5.16 所示。

步骤 1 密钥的产生。选择一个 128 比特的序列作为密钥,将这 128 比特分成 6 组,前 4 组每组为 24 比特,后 2 组每组 16 比特。将这 6 组比特流分别映射为

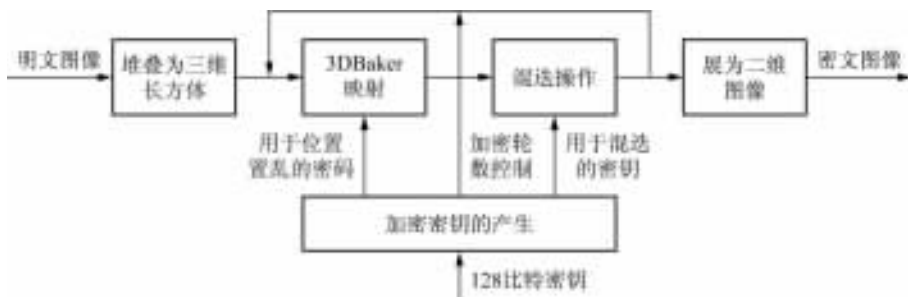


图 5.16 基于三维离散 Baker 映射的图像加密方案

6 个数字, $k_1, k_2, \dots, k_6$, 其中 k_1, k_2, k_3 为 $(0, 1)$ 之间的浮点数, 其余为整数。

步骤 2 将二维图像堆叠成三维。假设待加密图像为 W 像素宽, H 像素高, 又设堆叠成的长方体尺寸为 $M \times N \times L$, 则它们之间应有下述关系:

$$M \times N \times L = W \times H$$

可以这样来分解 M, N, L : 令 $T = W \times H$, 并提取出所有 T 的素数因子 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 使得 $T = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \times 1$ 关系成立。置乱序列 $\{p_1, p_2, \dots, p_n, 1\}$, 然后将它们分成 3 组, 重新组成 3 个数 M, N, L 。在置乱序列中, 要用到两个密钥 k_5 和 k_6 , 它们分别被用来作为种子数和控制置乱轮数。

步骤 3 用三维离散 Baker 映射进行图像位置置乱。这里采用 k_1 和 k_2 作为两个 Logistic 映射的种子数。然后, 分别让这两个 Logistic 映射进行演化, 并在每一步量化获得浮点数。最终, 将得到两个整数序列 $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ 和 $\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$, 满足 $M = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 和 $N = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ 。利用上述两个序列, 并采用三维 Baker 映射进行图像位置置乱。

步骤 4 像素值扩散。令 $k_3 = L_i, k_4 = S$ 对图像像素进行混迭操作。

步骤 5 将三维立方体变回到二维图像。

上述的步骤 3 和 4 会重复多次。重复次数越多, 加密强度越大, 但是加密所需的时间越长。解码步骤与此类似, 不再赘述。

5.5.3 安全性分析与测试结果

与其他加密方案相比, 所构造的三维混沌 Baker 映射加密方法具有较高的安全性, 能抵抗诸如已知明文攻击、统计分析、差分攻击等多种攻击, 且具有较大的密钥空间。最重要的是, 在具有高安全性的同时, 该算法的加解密速度也相当快。

1. 密钥空间分析

一个好的图像加密方案应该具有大的密钥空间。这样攻击者将不能通过穷举

攻击来解密图像。同时,加密图像又必须对密钥敏感,以抵抗差分攻击。下面分析一下上述加密方案的密钥空间,然后测试其密钥的敏感性。

(1) 加密的控制参数。

本加密方案为 128 位的加密,密钥空间达 $2^{128} \approx 3.4028 \times 10^{38}$ 。因为三维 Baker 映射需要用到两个整数序列 $\{m_1, \dots, m_k\}$ 和 $\{n_1, \dots, n_l\}$ 作为密钥,这样需要估计一下,对一幅图像来说,当它堆叠成三维后,所有长、宽、高三个尺寸(M, N 和 L)可能的组合构成的密钥空间。但这一密钥空间比较难以估计。对二维 Baker 映射,若图像大小为 $N \times N$,则密钥空间约为

$$K(N, k) = \binom{N}{k-1},$$

式中, k 为整数序列的长度。因为三维是二维的扩展, $N \times N \times 1$ 只是二维图像堆叠成三维长方体的一种情况,所以,三维 Baker 映射加密算法的密钥空间大于二维加密方法的密钥空间。

(2) 密钥敏感性测试。

假设密钥是 16 个字节长的字符(恰好 128 位长)。按如下方法来测试密钥的敏感性:首先,对一幅 256×256 的图像用密钥“1234567890123456”进行加密。然后,任意改变密钥的 1 位,如改变密钥最低位,也就是将密钥变为“1234567890123457”,再来加密图像。再比较两幅加密图像对应的不同像素的个数。图 5.17 给出两幅加密图像及其差值。测试结果为,两幅图像约有 99.59% 的不同像素。

还可以采用密钥“1234567890123456”来加密图像,然后用“1234567890123457”来解密图像,实验结果如图 5.18 所示。

2. 统计攻击

Shannon 曾说过“通过统计分析,许多密码可以被攻破。”因此,需要用混迭和扩散方法来加强密码强度。下面测试一下所构造加密方法的混迭和扩散强度。

(1) 加密图像的统计直方图。

选择了多幅大小为 256×256 的 256 级灰度图像,然后比较它们在加密前后的直方图。图 5.19 是其中的一个结果。可以看出,加密后图像的直方图与原始图像的直方图有很大的不同,且非常均匀。

(2) 相邻像素的相关性。

图像中相邻两个像素的相关性通常是很大的。为了破坏统计攻击,必须使相邻两个像素的相关性降低。在加密图像和原始图像中各随机选择了 1000 对像素对,测试其水平方向、垂直方向和对角方向的像素相关性,并进行相关系数的计算。

图 5.20 给出了水平方向原始图像和加密后图像的相邻像素的相关关系,其中

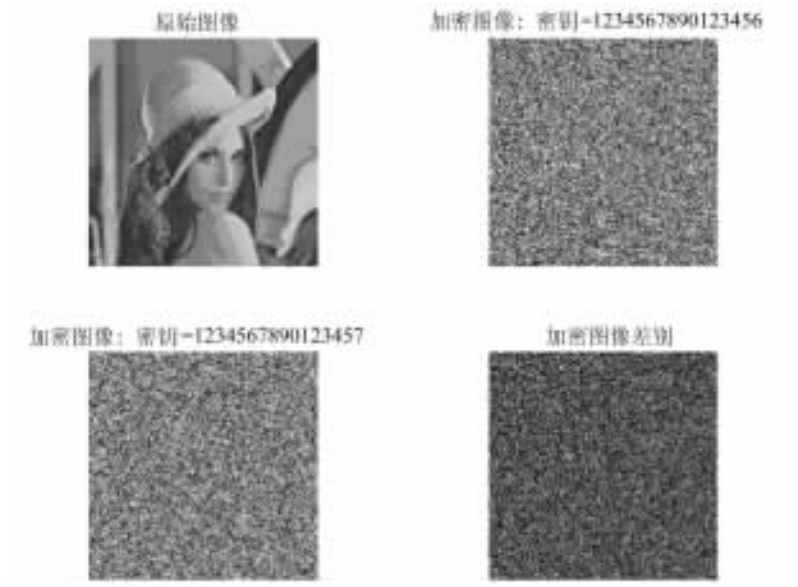


图 5.17 密钥敏感性测试一



图 5.18 密钥敏感性测试二

相关系数分别为 0.974 05 和 0.033 704。表 5.4 给出对 10 幅不同内容明文图像及其对应的密文图像相邻像素平均相关系数的测试结果。

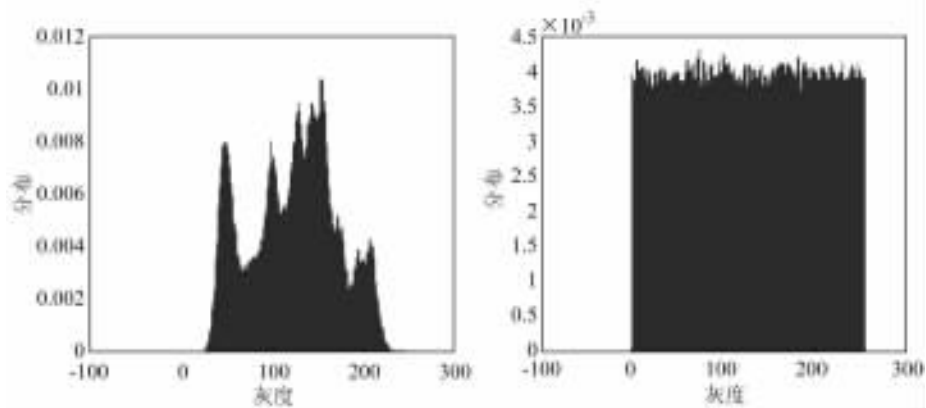


图 5.19 明文图像和密文图像的直方图

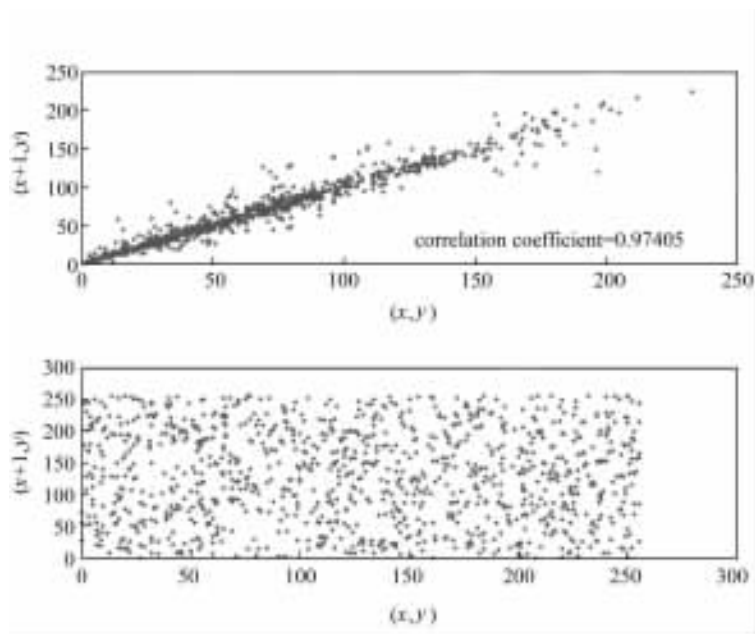


图 5.20 水平方向相邻两像素点的相关性

表 5.4 明文图像和密文图像相邻像素对之间的相关关系

	明文图像	密文图像
水平方向相邻两像素	0.976 53	0.044 535
垂直方向相邻两像素	0.979 61	0.028 434
对角方向相邻两像素	0.950 25	0.020 662

3. 明文雪崩效应分析

通常攻击者会通过改变图像中很少的一点,比如只改变一个像素,来观察加密后图像的变化情况。通过这种方式,攻击者可能破解加密图像。下面测试了明文一个像素的改变对密文的影响。

首先定义两个量——像素变化率(Number of Pixels Change Rate, NPCR)和归一化平均变化强度(Unified Average Changing Intensity, UACI)。

令两幅加密图像分别为 C_1 和 C_2 。这两幅图像对应的明文只有一个像素的改变。像素在位置 (i, j) 的强度标记为 $C_1(i, j)$ 和 $C_2(i, j)$ 。定义一个二值矩阵 D , 它和 C_1 与 C_2 有相同的尺寸。若 $C_1(i, j) = C_2(i, j)$, 则 $D(i, j) = 1$; 否则 $D(i, j) = 0$ 。NPCR 定义为

$$NPCR = \frac{\sum_{i,j} D(i, j)}{WH} \times 100\%; \quad (5.30)$$

UACI 定义为:

$$UACI = \frac{1}{WH} \left[\sum_{i,j} \frac{|C_1(i, j) - C_2(i, j)|}{256} \right] \times 100\%。 \quad (5.31)$$

对 256 级灰度图像的测试结果如图 5.21 所示。可以看出,随着加密轮数的增多,一个像素的变化对密文图像的影响也加大。因此增多加密轮数能够加强加密强度,但这是以减小加密速度为代价的。

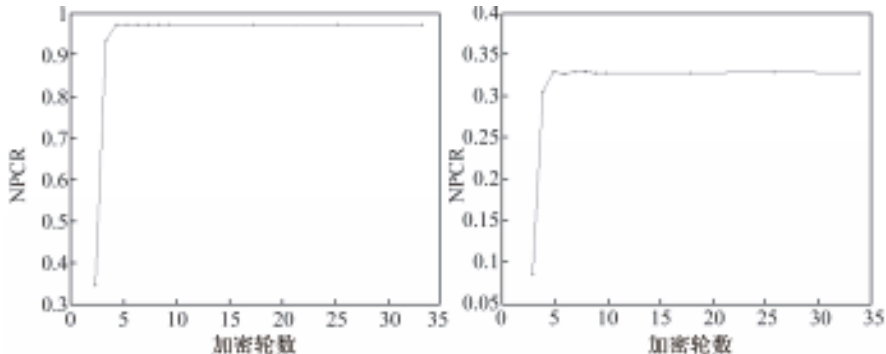


图 5.21 像素值变化对密文图像的影响

4. 其他测试

加密速度的测试结果见表 5.5,在此为使图像充分置乱,2D Baker 方法迭代了 8 轮,而 3D Baker 方法只需要 4 轮,可见该算法的加密速度是相当快的。相比于

文献[Fridrich, 1998] 所述的二维 Baker 方法,本章介绍的三维 Baker 映射加密算法速度要快 2~3 倍。

表 5.5 3D Baker 方法的加解密速度

图像尺寸(像素)	颜色数	2D Baker 映射(s)	3D Baker 映射(s)
256×256	2	<0.3	<0.3
256×256	16	<0.3	<0.3
256×256	256	<0.3	<0.3
256×256	16 777 216	<0.3	<0.3
512×512	2	1	<0.3
512×512	16	1	<0.3
512×512	256	1.1	<0.3
512×512	16 777 216	1	<0.3
1 024×1 024	2	3.3	1.0
1 024×1 024	16	3.3	1.1
1 024×1 024	256	3.3	1.2
1 024×1 024	16 777 216	3.3	1.3
2 048×2 048	2	13.6	3.4
2 048×2 048	16	13.5	3.2
2 048×2 048	256	14.0	3.4
2 048×2 048	16 777 216	13.6	4.3

测试条件:所用计算机的配置为 P4 1G CPU,256M 内存,40G 硬盘。

第6章

连续时间系统时延反馈混沌化

6.1 问题的描述

考虑连续时间控制系统

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (6.1)$$

式中, $x \in \mathcal{R}^n$ 和 $u \in \mathcal{R}$ 分别为系统的状态和输入, F 是 x 和 u 的连续函数。假设 x^* 为未受控系统 ($u \equiv 0$) 的一个渐近稳定的不动点。现要求设计一个时延状态反馈控制器, 使得控制系统在点 x^* 的一个邻域内是混沌的。

考虑采用时延状态反馈混沌化的动机有两点: 首先, 根据动力系统理论中著名的 Poincare-Bendixon 定理 [Glendinning, 1994], 如果系统 (6.1) 的阶数小于 3, 那么任何无时延的状态反馈都不可能使受控系统产生混沌; 其次, 众多例子表明 [Celka, 1997; Diekmann *et al.*, 1995; Farmer, 1982; Ikeda & Matsumoto, 1995; Lu & He, 1996; Mackey & Glass, 1977], 即使是对非常简单的一阶系统, 时延反馈也能产生复杂的混沌行为。当然, 从数学上看, 具有时延反馈的系统是无限维的。这也是连续时间系统反馈混沌化的一个难点。

本章首先介绍连续时间线性控制系统及可反馈线性化系统的时延状态反馈混沌化方法 [Wang, Chen & Yu, 2000], 接着介绍最小相位系统的时延状态反馈混沌化 [Wang, Chen & Man, 2001], 最后对时延反馈 Chua 电路作出理论分析、计算机仿真与电路实验 [Wang *et al.*, 2001]。

6.2 线性控制系统的时延反馈混沌化

首先考虑如下单输入单输出 (SISO) 的线性定常控制系统

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \beta_0u(t), \quad (6.2)$$

式中, $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统输入与输出, $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和 β_0 为常数, $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ 。

设

$$s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

为 Hurwitz 稳定多项式,即该多项式的所有根的实部均为负。这表明,当控制输入 $u(t) \equiv 0$ 时,未受控系统

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y(t) = 0$$

是渐近稳定的,即

$$z(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

式中

$$z(t) = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n]^T = [y \quad y^{(1)} \quad \cdots \quad y^{(n-1)}]^T。$$

希望设计时延反馈

$$u(t) = w(y(t-\tau)), \quad (6.3)$$

满足

$$|u(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.4)$$

且使得控制系统(6.2)的输出 $y(t)$ 具有期望的混沌行为。这里, $w(\cdot)$ 为一连续函数, $\tau > 0$ 为延迟时间, $\varepsilon > 0$ 为给定的控制幅值。

方程(6.2)可改写为 n -维状态空间形式

$$\dot{z} = A_c z + \beta_0 b_c u, \quad (6.5)$$

式中, $A_c \in R^{n \times n}$ 和 $b_c \in R^n$ 具有可控标准形,即

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

由于 A_c 为 Hurwitz 矩阵,且 $u(t)$ 一致有界,对任何有界初始条件,方程(6.5)的解也有界,且可在每个 τ 时间区间 $(m\tau, (m+1)\tau]$, $m=0, 1, \cdots$, 上迭代计算求得。记

$$z(t) \equiv z(m\tau + \hat{t}) \equiv z(m, \hat{t}), \quad t = m\tau + \hat{t}, \quad \hat{t} \in (0, \tau],$$

则有

$$z(t) = z(m, \hat{t}) = e^{A_c \hat{t}} z(m-1, \tau) + \int_0^{\hat{t}} e^{A_c (\hat{t}-t')} b_c w(y(m-1, t')) dt'. \quad (6.7)$$

引理 6.1 记 $\delta(t-t_0)$ 为中心在 $t_0 \geq 0$ 的标量值 Dirac 分布,

$$d\xi(t, t_0) = e^{A_c(t-t_0)} dt$$

为定义在 $[0, \tau]$ 上的矩阵值测度。如果把该矩阵值测度写为:

$$d\xi(t, t_0) = B(t, t_0) \delta(t-t_0) dt,$$

那么对充分大的时延 τ 有

$$\mathbf{B}(t, t_0) \approx -\mathbf{A}_c^{-1} e^{\mathbf{A}_c(t_0-t)}, \quad (6.8)$$

并且

$$\mathbf{B}(t, t_0) \rightarrow -\mathbf{A}_c^{-1} \quad (t \rightarrow t_0). \quad (6.9)$$

证明:注意到

$$\int_0^{\hat{t}} \delta(t - t_0) dt = \vartheta(\hat{t} - t_0),$$

其中

$$\vartheta(\hat{t} - t_0) = \begin{cases} 0, & \hat{t} < t_0, \\ 1, & \hat{t} \geq t_0. \end{cases}$$

在 $[0, \hat{t}]$ 上对测度 $d\xi(t, t_0)$ 积分得

$$\begin{aligned} \int_0^{\hat{t}} d\xi(t, t_0) &= \int_0^{\hat{t}} e^{\mathbf{A}_c(t_0-t)} dt \\ &= -\mathbf{A}_c^{-1} [e^{\mathbf{A}_c(t_0-\hat{t})} - e^{\mathbf{A}_c t_0}] \\ &\approx -\mathbf{A}_c^{-1} e^{\mathbf{A}_c(t_0-\hat{t})} \vartheta(\hat{t} - t_0); \end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_0^{\hat{t}} d\xi(t, t_0) = \int_0^{\hat{t}} \mathbf{B}(t, t_0) \delta(t - t_0) dt = \mathbf{B}(\hat{t}, t_0) \vartheta(\hat{t} - t_0).$$

因此,

$$\mathbf{B}(\hat{t}, t_0) \vartheta(\hat{t} - t_0) \approx -\mathbf{A}_c^{-1} e^{\mathbf{A}_c(t_0-\hat{t})} \vartheta(\hat{t} - t_0),$$

即

$$\mathbf{B}(\hat{t}, t_0) \approx -\mathbf{A}_c^{-1} e^{\mathbf{A}_c(t_0-\hat{t})}, \quad \hat{t} \geq t_0.$$

引理 6.2 记 $y(m, \hat{t}) = y(m\tau + \hat{t})$ 。对充分大的 τ 和 $\hat{t}, t_0 < \hat{t} < \tau$,

$$y(m, \hat{t}) \approx \frac{\beta_0}{\alpha_0} w(y(m-1, \hat{t})), \quad y^{(k)}(m, \hat{t}) \approx 0, \quad (6.10)$$

式中, $m=0, 1, \dots; k=1, 2, \dots, n-1$ 。

证明:注意到对任何给定的有界初始条件, $z(t)$ 一致有界, 且

$$e^{\mathbf{A}_c \hat{t}} \mathbf{z}(m-1, \tau) \rightarrow 0 \quad (\hat{t} \rightarrow \infty).$$

由(6.7)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(m, \hat{t}) &\approx \int_0^{\hat{t}'} e^{\mathbf{A}_c(\hat{t}-t')} \beta_0 \mathbf{b}_c w(y(m-1, t')) dt' \\ &\approx \int_0^{\hat{t}} \mathbf{B}(t', \hat{t}) \delta(t' - \hat{t}) \beta_0 \mathbf{b}_c w(y(m-1, t')) dt' \\ &\approx \mathbf{B}(\hat{t}, \hat{t}) \beta_0 \mathbf{b}_c w(y(m-1, \hat{t})) \\ &\approx -\beta_0 \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{b}_c w(y(m-1, \hat{t})). \end{aligned}$$

由于

$$A_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_0} & \cdots & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} & -\frac{1}{\alpha_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此

$$z(m, \hat{t}) \approx [\alpha_0^{-1} \beta_0 w(y(m-1, \hat{t})) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T,$$

即有(6.10)式成立。

引理 6.2 在时延微分方程(6.2)和差分方程(映射)(6.10)之间建立了渐近的近似关系。尽管这两个方程之间存在一些重要的区别,仍然可以期望,如果 $(\beta_0/\alpha_0)w(\cdot)$ 是有界混沌映射,那么当时延充分大时,时延方程(6.2)的输出 $y(t)$ 也会是混沌的。显然,函数 $w(\cdot)$ 的形式是不唯一的。一个简单的选取是

$$u(t) = w(y(t-\tau)) = \varepsilon \sin(\sigma y(t-\tau)). \quad (6.11)$$

记 $\varepsilon_0 \equiv \beta_0/\alpha_0$ 。如果映射

$$y_{k+1} = \varepsilon_0 \sin(\sigma y_k) \quad (6.12)$$

是混沌映射,那么当时延充分大时,时延方程(6.2)的输出 $y(t)$ 也应是混沌的。

现在考察映射(6.12)的动力学行为。对任何 $\varepsilon_0 \neq 0$, 当 $0 < \sigma < \varepsilon_0$ 时,原点为映射(6.12)的全局渐近稳定不动点。当 σ 增大到 $\sigma > \varepsilon_0$ 时,映射(6.12)有一对共轭的局部渐近稳定不动点: $y^+ > 0, y^- = -y^+$ 。随着 σ 继续增大,这两个不动点各自经过倍周期分岔道路走向混沌。如果分岔参数 σ 值进一步增大,那么两个混沌吸引子也不断增大。最终在 $\sigma = \bar{\sigma} = \pi/\varepsilon_0$ 处,两个混沌吸引子融合为一个混沌吸引子,其大小与 ε_0 值成正比。此后,当 σ 值继续增大时,该混沌吸引子的大小几乎保持不变。此时,可以从数学上严格证明映射(6.12)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。证明的基本思想与第 3 章中有关内容的思路相同。图 6.1 给出了当 $\varepsilon_0 = 0.1$ 时映射(6.12)的分岔图。

例 6.1 考虑一个简单的一阶系统:

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t, \tau), \quad (6.13)$$

当 $u(t, \tau) \equiv 0$ 时,上述系统是稳定的。取控制输入为

$$u(t) = \varepsilon \sin(\sigma x(t-\tau)). \quad (6.14)$$

首先取 $\varepsilon = \tau = 1$ 。图 6.2 给出了控制系统(6.13), (6.14)的分岔图。图 6.3 分别给出了当 $\sigma = 7.5, 8.5, 10, 20$ 时控制系统的不同的混沌吸引子。再取 $\varepsilon = 1, \tau = 0.1$ 。图 6.4 分别给出了当 $\sigma = 52, 60, 120$ 时控制系统的 3 个混沌吸引子。

现在考虑一个一般的 n -维单输入线性定常控制系统

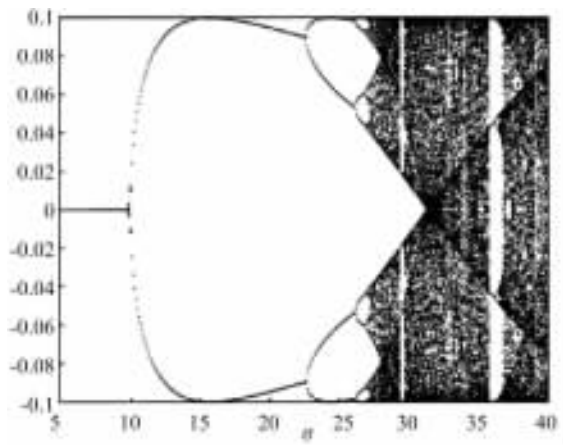


图 6.1 映射(6.12)的分岔图($\epsilon_0=0.1$)

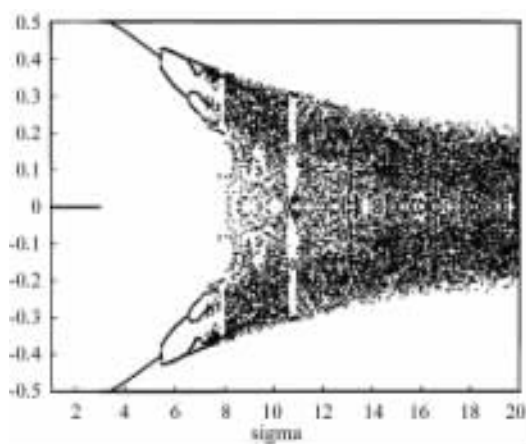


图 6.2 控制系统(6.13), (6.14)的分岔图

$$\dot{x} = AX + bu \quad (6.15)$$

式中, $u \in \mathcal{R}$ 和 $x \in \mathcal{R}^n$ 分别为系统的输入和状态, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 为 Hurwitz 矩阵。假设 (A, b) 是可控的, 即矩阵

$$\Theta = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b]$$

的秩为 n 。记 q_1^T 为 Θ^{-1} 的第 n 行。由线性系统理论[Kailath, 1980], 可以构造一个 $n \times n$ 非奇异矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^T A \\ \vdots \\ q_1^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

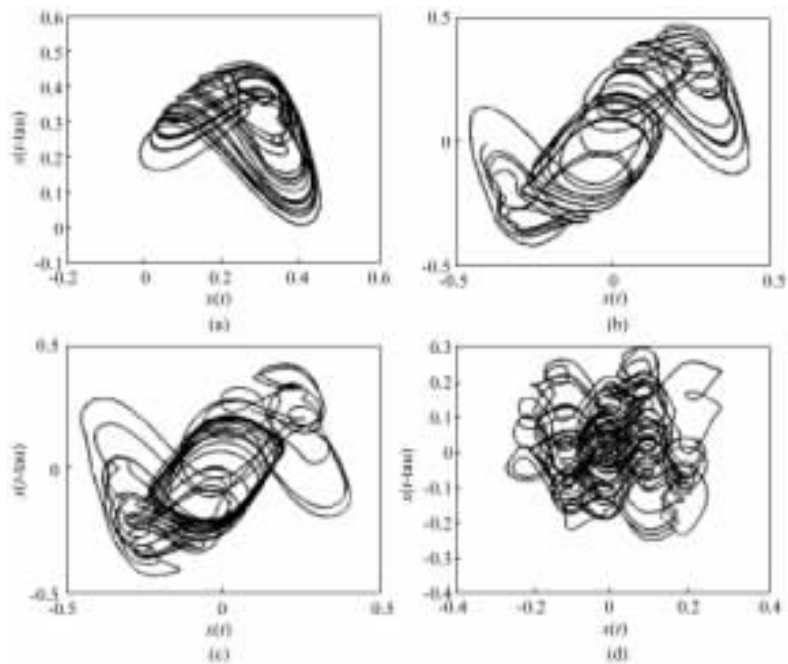


图 6.3 当 $\sigma=7.5, 8.5, 10, 20$ 时控制系统(6.13), (6.14)的不同的混沌吸引子

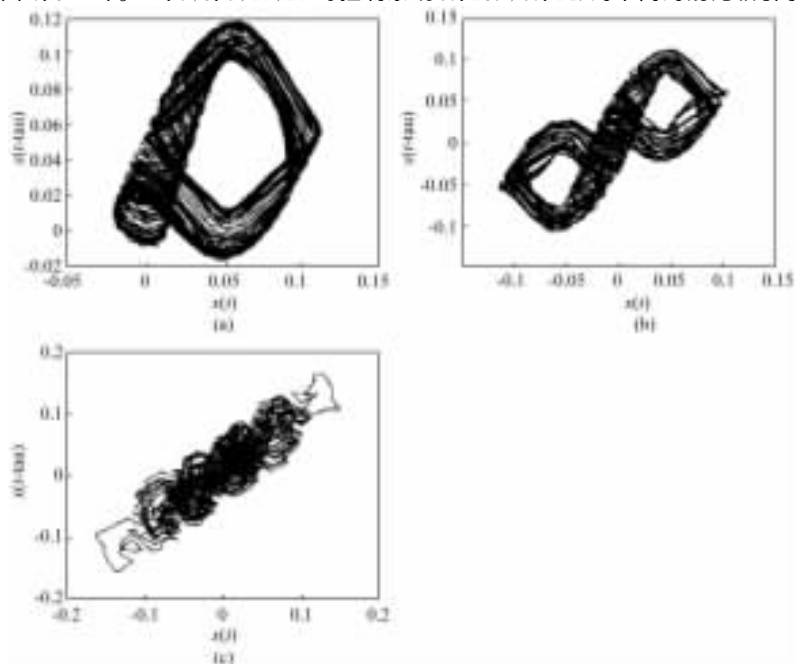


图 6.4 $\sigma=52, 60, 120$ 时控制系统(6.13), (6.14)的 3 个混沌吸引子

使得系统(6.15)通过变换 $z=Qx$, 可变换为如下的可控标准型:

$$\dot{z} = A_c z + b_c u \quad (6.16)$$

式中 A_c 和 b_c 由(6.6)式定义。记 $y(t) = z_1(t) = q_1^T x(t)$ 。方程(6.16)可变为如下形式:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y(t) = u(t),$$

于是可用时延控制器

$$u(t) = \varepsilon \sin(\sigma y(t - \tau)) = \varepsilon \sin(\sigma q_1^T x(t - \tau)) \quad (6.17)$$

使受控系统(6.16)产生混沌行为。

例 6.2 考虑如下二维线性控制系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

当 $u(t) \equiv 0$ 时, 上述系统是稳定的。由于

$$\Theta = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q = \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

成立 $q_1^T x = x_1$ 。取时延反馈控制器为

$$u(t) = \sin(30x_1(t-1)).$$

图 6.5 显示了受控系统的混沌吸引子。

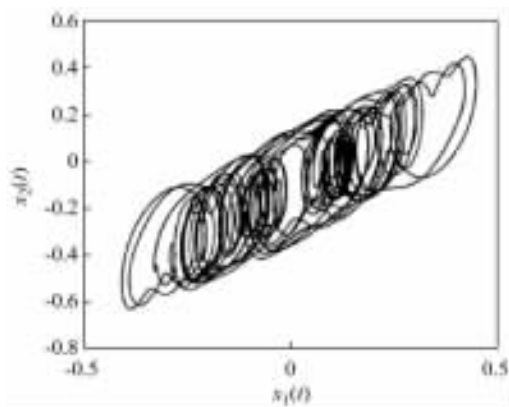


图 6.5 例 6.2 中受控系统的混沌吸引子

6.3 非线性微分方程的时延反馈混沌化

考虑如下的 SISO 非线性系统:

$$y^{(n)} = \phi(y) + \Psi(y)u, \quad (6.18)$$

式中, ϕ 和 Ψ 为 $y = [y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(n-1)}]^T$ 的光滑非线性函数。假设 $y=0$ 是未受控

系统的一个渐近稳定的不动点, $\Psi(\mathbf{0}) \neq 0$ 。下面介绍两种方法把非线性控制系统(6.18)转化为线性控制系统(6.2)。

6.3.1 近似线性化方法

首先介绍典型的近似线性化方法。假设控制输入 $u(t)$ 的最大幅值将被设计为 $\epsilon > 0$ 。由于未受控系统的原点是渐近稳定的, 对于充分小的 ϵ , 存在原点的一个小的邻域 Ω 使得如果 $y(0) \in \Omega$, 那么对任意 $t > 0$, $y(t) \in \Omega$ 。在邻域 Ω 中, 可以把方程(6.18)近似地表示为该方程在原点的线性化方程:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \Psi(\mathbf{0})u(t), \quad (6.19)$$

式中

$$\alpha_i = -\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial y^{(i)}} \right|_{y=\mathbf{0}}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1。$$

从而可用小幅值时延反馈

$$u(t) = w(y(t-\tau)) = \epsilon \sin(\sigma y(t-\tau)),$$

使输出 $y(t)$ 在区域 Ω 产生混沌行为。

6.3.2 精确线性化方法

在系统(6.18)中取控制器为

$$u = \frac{1}{\Psi(\mathbf{y})}(-\phi(\mathbf{y}(t) - \gamma_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - \gamma_1y^{(1)}(t) - \gamma_0y(t) + v(t)), \quad (6.20)$$

式中, $\{\gamma_i\}_{i=0}^{n-1}$ 为常数, $\gamma_0 \neq 0$ 。

设

$$s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \gamma_1s + \gamma_0$$

是 Hurwitz 多项式。方程(6.18)变为:

$$y^{(n)}(t) + \gamma_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \gamma_1y^{(1)}(t) + \gamma_0y(t) = v(t)。$$

上式等同于方程(6.2)。因而, 如果在控制器(6.20)中取

$$v(t) = \epsilon \sin(\sigma y(t-\tau)),$$

那么就可使系统(6.18)的输出 $y(t)$ 产生混沌行为。

例 6.3 Duffing 振子的反馈混沌化。考虑 Duffing 振子模型

$$\ddot{y} + p_1\dot{y} + p_2y + p_3y^3 = u(t), \quad (6.21)$$

式中, $p_i (i=1, 2, 3)$ 为常数。Duffing 振子是一个典型的非线性振荡模型, 可用于描述许多实际的动力系统振荡行为。在外加谐波输入

$$u(t) = \beta \cos(\omega t)$$

的作用下,受迫 Duffing 振子能产生丰富的混沌动力学行为。

取

$$p_1 = 0.4, \quad p_2 = -1.1, \quad p_3 = 1.0,$$

此时未受控的 Duffing 系统(6.21)具有两个稳定的不动点: $y^+ = \sqrt{1.1}$ 和 $y^- = -\sqrt{1.1}$ 。考虑采用小幅值时延反馈控制

$$u(t) = \epsilon \sin(\sigma y(t - \tau))。$$

图 6.6 显示了当 $\epsilon = 0.5$ 和 $\sigma = 50$ 时受控的 Duffing 系统(6.21)的一个混沌吸引子。

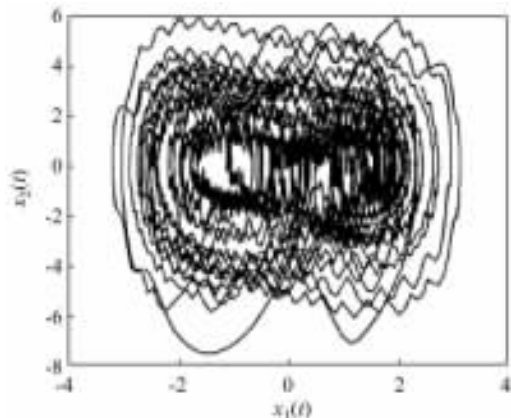


图 6.6 当 $\epsilon = 0.5$ 和 $\sigma = 50$ 时受控的 Duffing 系统(6.21)的混沌吸引子

6.4 仿射非线性系统的时延反馈混沌化

考虑 SISO 仿射非线性控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u) = f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (6.22)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别为系统的状态、输入和输出, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场, 光滑函数 $h(\cdot)$ 满足 $h(0) = 0$ 。假设 x^* 为未受控系统的一个渐近稳定的不动点。现要求设计一个时延反馈控制器, 使得控制系统(6.22)在点 x^* 的一个邻域内是混沌的。为此, 需要用到微分几何控制理论的有关知识 [Isidori, 1995]。

光滑函数 $h(\cdot)$ 关于向量场 $f(x)$ 的李导数定义为

$$L_f h(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^T f(x),$$

第 i 阶李导数可递推定义为

$$L_f^i h(x) = L_f(L_f^{i-1} h(x)) = \left(\frac{\partial(L_f^{i-1} h)}{\partial x} \right)^T f(x), \quad i > 1.$$

两个光滑向量场 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的李括号定义为

$$\text{ad}_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x),$$

第 i 阶李括号可递推定义为

$$\text{ad}_f^i g(x) = \text{ad}_f(\text{ad}_f^{i-1} g) = \frac{\partial(\text{ad}_f^{i-1} g)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\text{ad}_f^{i-1} g(x)), \quad i > 1.$$

定义在 $\mathcal{R}^n$ 的一个开子集上的线性子空间

$$\Delta \equiv \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$$

称为是不变的, 如果 $\tau_1(x) \in \Delta$ 和 $\tau_2(x) \in \Delta$, 则意味着 $\text{ad}_{\tau_1} \tau_2 \in \Delta$ 。

系统(6.22)称为在点 x^* 具有相对阶 r , 如果存在点 x^* 的邻域 D , 使得

$$L_g L_f^k h(x) = 0, \quad 0 \leq k < r-1,$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \quad \forall x \in D.$$

相对阶 r 是对系统输出 $y(t)$ 逐次求导, 以使输入 $u(t)$ 显式第一次出现时的求导次数, 即在 $y^{(r)}(t)$ 的表达式中才显式出现 $u(t)$ 。因而, 如果系统(6.22)具有相对阶 n , 那么它可表示为 n 阶微分方程(6.18)的形式。此时, 称系统(6.22)是可反馈线性化的。

引理 6.3 系统(6.22)在点 x^* 具有相对阶 n 当且仅当存在点 x^* 的邻域 D , 使得

$$(1) \text{rank}[g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} g(x)] = n, \quad x \in D;$$

$$(2) \text{span}\{g(x), \text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x)\} \text{ 在 } D \text{ 中不变}.$$

如果系统(6.22)在点 x^* 具有相对阶 n , 那么系统输出 $y(t)$ 满足

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} [g(x) \quad \text{ad}_f g(x) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-2} g(x)] = 0, \quad (6.23)$$

并且有如下微分同胚:

$$y = \Phi(x) = [h(x) \quad L_f h(x) \quad \cdots \quad L_f^{n-2} h(x)]^T,$$

式中, $y = [y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(n-1)}]^T$, 使得

$$y^{(n)} = \alpha(y) + \beta(y)u,$$

式中

$$\alpha(y) = L_f^n h(\Phi^{-1}(y)), \quad \beta(y) = L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(y)) \neq 0, \quad \forall x = \Phi^{-1}(y) \in D.$$

于是, 根据前面的讨论, 可用小幅值时延反馈

$$u(t) = \varepsilon \sin(\sigma y(t - \tau)) = \varepsilon \sin(\sigma h(x(t - \tau))),$$

使系统(6.22)的输出产生混沌行为。

例 6.4 Lorenz 系统的反馈混沌化。考虑 Lorenz 方程

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ -x_2 - x_1x_3 + rx_1 \\ -bx_3 + x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

式中,取 $a=10$ 和 $b=8/3$, r 为常数。若 $0 < r < 1$, 原点为 Lorenz 系统(6.24)的一个全局指数稳定平衡点;若 $1 < r < r_H \approx 24.74$, 则 Lorenz 系统具有两个局部指数稳定平衡点

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_+ &= [\sqrt{b(r-1)} \quad \sqrt{b(r-1)} \quad r-1]^T, \\ \mathbf{A}_- &= [-\sqrt{b(r-1)} \quad -\sqrt{b(r-1)} \quad r-1]^T, \end{aligned}$$

当 $r > r_H$ 时, Lorenz 系统会产生复杂的混沌行为。

取 $r=5 < r_H$ 。此时,未受控 Lorenz 系统的两个局部指数稳定平衡点为

$$\mathbf{A}_+ = [3.27 \quad 3.27 \quad 4]^T, \quad \mathbf{A}_- = [-3.27 \quad -3.27 \quad 4]^T。$$

对参数 r 加扰动 $\delta r(t)$ 。受控 Lorenz 系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\delta r(t),$$

式中, $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ -x_2 - x_1x_3 + rx_1 \\ -bx_3 + x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{ad}_f \mathbf{g} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -ax_1 \\ ax_2 + (1-a)x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

下面将说明,即使 $0 < \delta r(t) < r_H - r \approx 19.74$, 受控 Lorenz 系统也能产生混沌行为。可以验证,对 $\mathbf{x} \neq 0$, 受控 Lorenz 系统满足引理 6.3 中的条件(1)和(2)。因而受控 Lorenz 系统在两个平衡点 $\mathbf{A}_+$ 和 $\mathbf{A}_-$ 处的相对阶为 $r=3$ 。由(6.23)式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} x_1 = 0, \\ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= -a \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} [ax_2 + (1-a)x_1] - \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_3} x_1^2 = 0。 \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0, \quad a \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_3} x_1^2 = 0,$$

上述方程的一个解为

$$y = h(\mathbf{x}) = 0.5x_1^2 - ax_3,$$

因此可以取

$$\delta r(t) = \epsilon \sin(\sigma(0.5x_1^2(t-\tau) - ax_3(t-\tau))).$$

在仿真中固定 $\tau=1$ 。图 6.7 显示了当 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=30$ 时受控 Lorenz 系统有两个孤立的混沌吸引子。当 $\epsilon=10$ 和 $\sigma=20$ 时,受控 Lorenz 系统有一个混沌吸引子(图 6.8)。

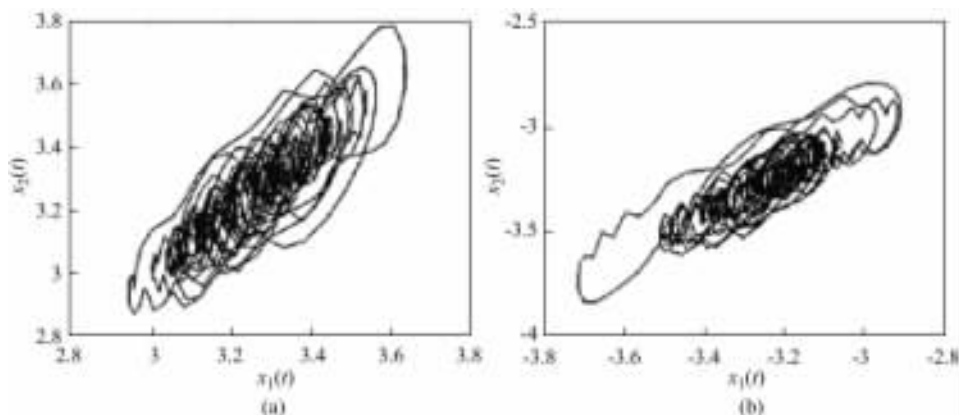


图 6.7 当 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=30$ 时受控 Lorenz 系统有两个孤立的混沌吸引子

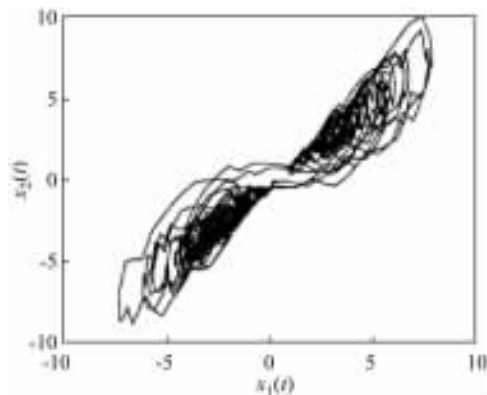


图 6.8 当 $\epsilon=10$ 和 $\sigma=20$ 时受控 Lorenz 系统的一个混沌吸引子

例 6.5 Chua 电路的反馈混沌化。Chua 电路包括一个线性电感 L , 两个线性电阻 R 和 R_0 , 两个线性电容 C_1 和 C_2 , 以及一个非线性电阻 N_R (图 6.9(a))。Chua 电路的无量纲状态方程可写为 [Chua *et al.*, 1993]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 \end{cases}, \quad (6.25a)$$

式中(图 6.9(b), $E=1$)

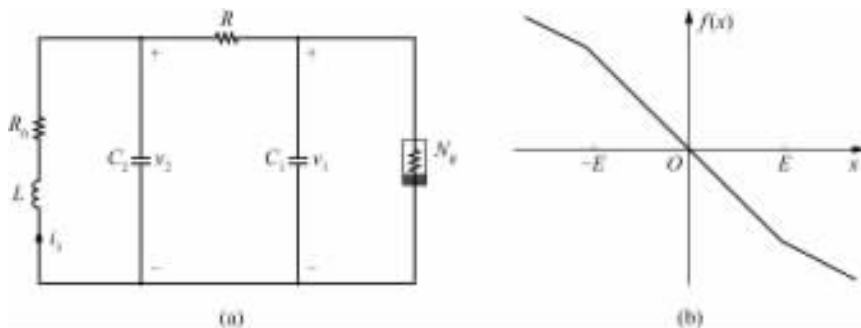


图 6.9 Chua 电路结构图

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)[|x+1| - |x-1|]. \quad (6.25b)$$

在仿真中,固定如下参数

$$\alpha = 10, \quad \beta = 24.5, \quad \gamma = 0, \quad a = -1.27, \quad b = -0.68.$$

此时电路具有两个稳定的周期轨道(图 6.10)。现在对参数 γ 作反馈扰动,即

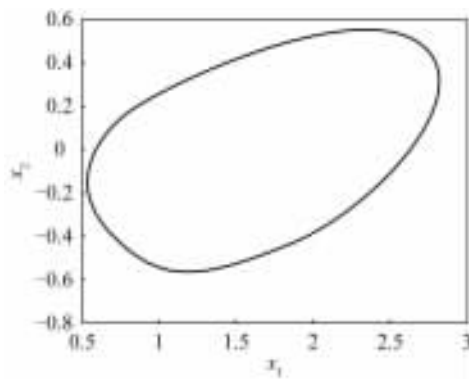


图 6.10 未受控 Chua 电路的两个稳定的周期轨道中的一个

$$\gamma(t) = \gamma + \delta\gamma(t),$$

取输出 $y(t) = x_1(t)$ 。

可以验证当 $|x_1| \neq 1$ 时受控的 Chua 电路具有相对阶 $r=3$ 。为使受控系统产生混沌行为,取反馈扰动为

$$\delta\gamma(t) = \epsilon \sin(\alpha x_1(t - \tau)),$$

式中固定 $\tau=1$ 。当取 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=50$ 时,受控系统(6.25)具有两个对称的螺旋形混沌吸引子。

图 6.11 显示了其中的一个混沌吸引子。当取 $\epsilon=2.5$ 和 $\sigma=50$ 时,受控系统(6.25)具有一个双卷形混沌吸引子(图 6.12)。

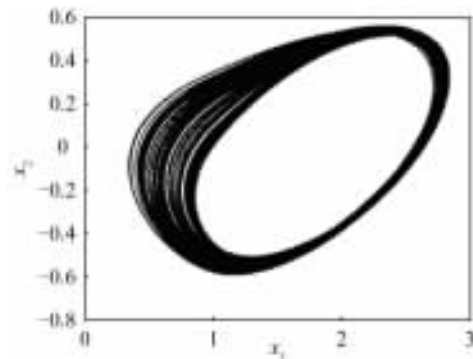


图 6.11 当 $\epsilon=1$ 和 $\sigma=50$ 时,受控系统(6.25)的一个螺旋形混沌吸引子

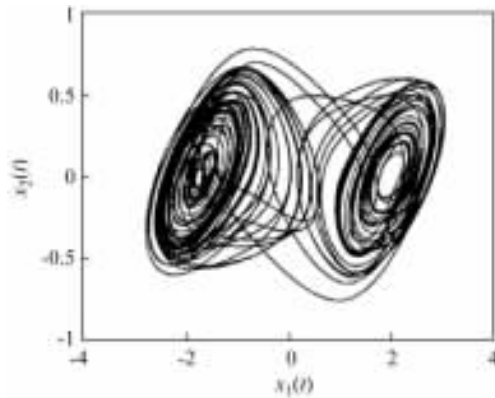


图 6.12 当取 $\epsilon=2.5$ 和 $\sigma=50$ 时,受控系统(6.25)具有一个双卷形混沌吸引子

6.5 最小相位系统的时延反馈控制

考虑 SISO 仿射非线性控制系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) = f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x).\end{aligned}\tag{6.26}$$

上一节假设系统(6.26)是可反馈线性化的,即控制系统的相对阶 $r=n$ 。本节假设系统的相对阶 $r < n$ 。

根据微分几何控制理论[Isidori, 1995],存在光滑坐标变换

$$z = \Phi(x),$$

满足

$$\Phi(0) = 0,$$

使在该变换下系统(6.26)的状态方程变为:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, & i = 1, \dots, r-1, \\ \dot{z}_r = a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})u, \\ \dot{z}_j = q_j(\mathbf{z}), & j = r+1, \dots, n, \end{cases} \quad (6.27)$$

式中, $\mathbf{z} = [z_1 \ \dots \ z_n]^T \in \mathbb{R}^n$, 且

$$z_1 = y = h(\mathbf{x}), \quad z_2 = \dot{y} = L_f h(\mathbf{x}), \dots$$

$$z_r = y^{(r-1)} = L_f^{r-1} h(\mathbf{x}),$$

$$a(\mathbf{z}) = L_f^r h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})), \quad b(\mathbf{z}) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\mathbf{z})) \neq 0.$$

记

$$\xi = [z_1 \ \dots \ z_r]^T \in \mathbb{R}^r, \quad \eta = [z_{r+1} \ \dots \ z_n]^T \in \mathbb{R}^{n-r},$$

再定义

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

并记

$$\mathbf{q}(\mathbf{z}) = [q_{r+1}(\mathbf{z}) \quad q_{r+2}(\mathbf{z}) \quad \dots \quad q_n(\mathbf{z})]^T,$$

则有

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}(a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u), \\ \dot{\eta} = \mathbf{q}(\xi, \eta), \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\xi. \end{cases} \quad (6.28)$$

在本节中, 假设系统(6.26)是最小相位的, 即原点为零动态

$$\dot{\eta} = \mathbf{q}_0(\eta) \quad (6.29)$$

的指数稳定平衡点, 式中

$$\mathbf{q}_0(\eta) = \mathbf{q}(\mathbf{0}, \eta).$$

现要求设计反馈控制器 $u(t)$, 使得控制系统(6.26)产生混沌行为。特别地, 如果原点为未受控系统的指数稳定平衡点, 则希望能够用小幅值输出反馈控制

$$|u(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

使受控系统产生混沌行为, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任一给定常数。

设 $s^r + \alpha_{r-1}s^{r-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$ 是 Hurwitz 多项式。取控制输入为

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{b(\mathbf{z})} (-a(\mathbf{z}) - \alpha_{r-1}z_r - \dots - \alpha_0 z_1 + v) \\ &= \frac{-L_f^r h(\mathbf{x}) - \alpha_{r-1}L_f^{r-1}h(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_0 h(\mathbf{x}) + v}{L_g L_f^{r-1}h(\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

控制系统(6.28)变为:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + Bv, \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta), \end{cases} \quad (6.31)$$

式中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}。$$

定理 6.1 考虑控制系统(6.31)。假设

$$\sup_{t \in \mathcal{R}} |v(t)| \leq \varepsilon,$$

式中, $\varepsilon > 0$ 为一任意给定常数。则存在原点的邻域 Ω , 使得如果系统(6.31)的初始状态在 Ω 中, 那么系统(6.31)的状态是有界的。

证明: 把 $\xi(t)$ 看作是系统(6.31)的第二个方程

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) \quad (6.32)$$

的输入。由于当 $\xi(t) \equiv 0$ 时, 原点是系统(6.32)的指数稳定平衡点, 根据非线性系统理论中的输入状态稳定性分析(例如, 见[Khalil, 1996]中的定理 5.2), 存在两个正常数 r_1 和 r_2 , 使得如果

$$\|\xi(t)\| \leq r_1, \quad \forall t \in \mathcal{R}; \quad \|\eta(t)\| \leq r_2, \quad t \leq 0,$$

那么系统(6.32)的状态是有界的。

根据系统(6.31)的第一个方程和线性系统稳定性理论, 存在两个正常数 ε 和 $r_3 \leq r_1$, 使得如果

$$|v(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathcal{R}; \quad \|\xi(t)\| \leq r_3, \quad t \leq 0,$$

那么

$$\|\xi(t)\| \leq r_1, \quad \forall t \geq 0。$$

如果

$$\|[\xi(t) \quad \eta(t)]^T\| \leq \min\{r_2, r_3\},$$

那么系统(6.31)的状态是有界的。

系统(6.31)的第一个方程可写为输入-输出形式:

$$y^{(r)}(t) + \alpha_{r-1}y^{(r-1)}(t) + \cdots + \alpha_1\dot{y}(t) + \alpha_0y(t) = v(t)。 \quad (6.33)$$

根据上几节的讨论, 可用时延反馈控制

$$v(t) = \varepsilon \sin(\sigma y(t - \tau)),$$

使系统(6.33)产生混沌。这说明, 对最小相位控制系统(6.26), 可采用如下控制器实现反馈混沌化:

$$u(t) = \frac{-L_f^r h(\mathbf{x}) - \alpha_{r-1} L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) - \cdots - \alpha_0 h(\mathbf{x}) + \varepsilon \sin(\sigma h(\mathbf{x}(t-\tau)))}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})}. \quad (6.34)$$

根据构造,如果 $\eta = \Phi_\eta(\mathbf{x})$ 是一个合适的状态变换,那么 $\bar{\eta} = w\eta$ 也是一个合适的状态变换,这里 w 为任意非零常数。这样,如果系统(6.26)的状态是有界的,则可选取状态变换使得 η 的范数充分小。于是,在原点的一个小邻域内,系统(6.28)可用其在原点的线性化方程近似地表示,即

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u \\ &\approx a(\xi, 0) + b(0, 0)u \\ &\approx \beta_{r-1}y^{(r-1)} + \beta_{r-2}y^{(r-2)} + \cdots + \beta_0 y + b(0, 0)u, \end{aligned}$$

式中, $b(0, 0) \neq 0$, 且

$$\beta_i = \left. \frac{\partial a(\mathbf{z})}{\partial y^{(i)}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1,$$

如果原点为未受控系统(6.26)的指数稳定平衡点,那么 $s^r - \beta_{r-1}s^{r-1} - \cdots - \beta_1 s - \beta_0$ 是 Hurwitz 多项式。于是可用小幅值时延反馈控制

$$u(t) = \varepsilon \sin(\sigma y(t-\tau)), \quad (6.35)$$

使受控系统(6.26)的输出 $y(t)$ 在原点的一个邻域内产生混沌行为。

例 6.6 考虑一个三阶线性控制系统:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 + x_3 + u \\ -3x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad y = x_1. \quad (6.36)$$

容易验证,未受控系统是一个渐近稳定的线性系统。控制系统(6.36)具有相对阶 $r=2$, 且其零动态是指数稳定的。采用时延反馈控制(6.35), 并取 $\varepsilon=0.1, \sigma=200, \tau=1$ 。图 6.13 显示了受控系统的混沌吸引子和控制信号。

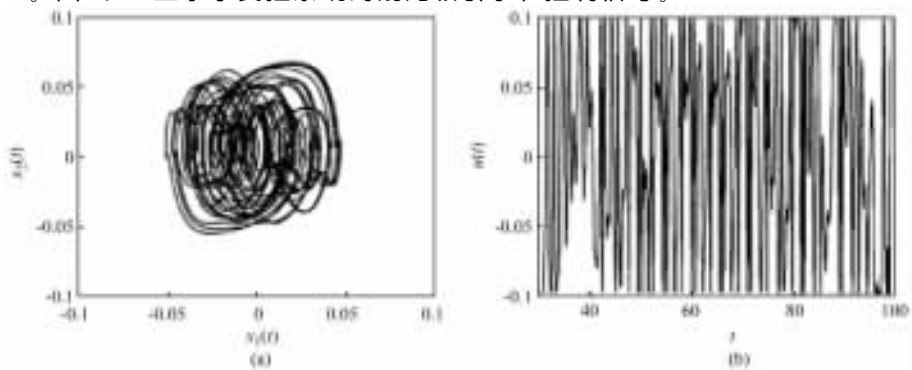


图 6.13 受控系统(6.36)的混沌吸引子和控制信号

例 6.7 考虑 Lorenz 方程

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ -x_2 - x_1x_3 + rx_1 \\ -bx_3 + x_1x_2 \end{pmatrix},$$

其中,假设系统输出为 $y=x_1$,并固定 $a=10, b=8/3, r=5$ 。此时,未受控 Lorenz 系统有两个局部指数稳定平衡点 A^+ 和 A^- 。对参数 r 加扰动 $\delta r(t)$ 可得受控 Lorenz 系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\delta r(t) \quad (6.37)$$

式中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ -x_2 - x_1x_3 + rx_1 \\ -bx_3 + x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

控制系统(6.37)在点 A^+ 和 A^- 的零动态是指数稳定的。取时延反馈参数扰动为

$$\delta r(t) = \epsilon \sin(\sigma x_1(t - \tau))$$

在仿真中,取 $\tau=1, \sigma=10$ 。图 6.14(a)~(d)分别给出了当 $\epsilon=1, 5, 10, 40$ 时受控系统的混沌吸引子。

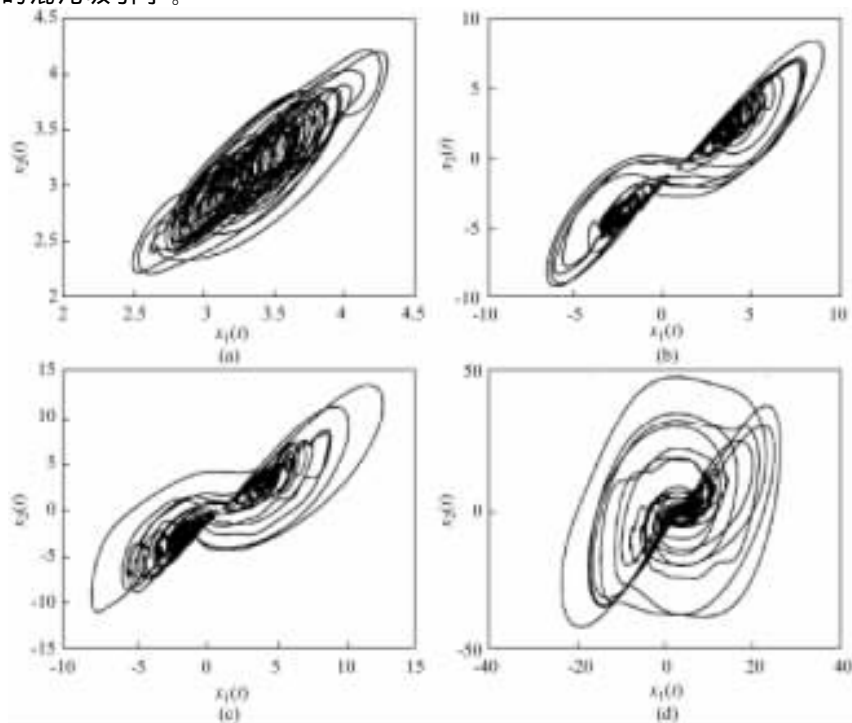


图 6.14 当 $\epsilon=1, 5, 10, 40$ 时受控系统(6.37)的混沌吸引子

6.6 Chua 电路的时延反馈混沌化

标准的 Chua 电路(图 6.9(a))状态方程可写为:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1}(G(v_2 - v_1) - f(v_1)), \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2}(i_3 - G(v_2 - v_1)), \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}(v_2 + R_0 i_3). \end{cases} \quad (6.38a)$$

式中, v_1 , v_2 和 i_3 分别为穿过 C_1 的电压, 穿过 C_2 的电压和穿过 L 的电流, $G = 1/R$,

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)\{|v_1 + E| - |v_1 - E|\}, \quad (6.38b)$$

为一段线性函数(图 6.9(b))。可以把状态空间分为三个区域: $v_1 < -E$, $|v_1| \leq E$ 和 $v_1 > E$ 。不失为一般性, 这里取 $E=1$ 。这三个区域分别记为 D_{-1} , D_0 和 D_1 。对一组给定的系统参数和初始状态, Chua 电路的状态可能收敛到一个平衡点, 一条周期轨道或具有一个正的 Lyapunov 指数的低维混沌吸引子。

在标准的 Chua 电路中加入时延电压反馈, 如图 6.15 所示。时延反馈 Chua 电路状态方程为

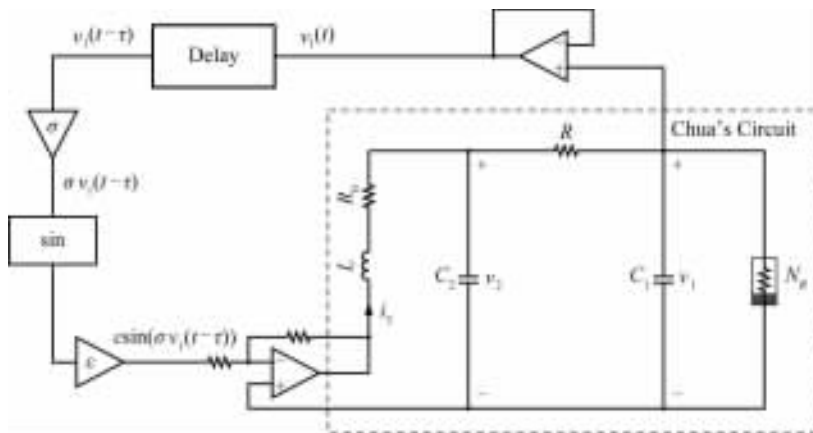


图 6.15 时延反馈 Chua 电路结构图

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C_1}(G(v_2 - v_1) - f(v_1)), \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{C_2}(i_3 - G(v_2 - v_1)), \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}(v_2 + R_0 i_3 + w(v_1(t - \tau))), \end{cases} \quad (6.39)$$

式中, 时延电压反馈取

$$w(v_1(t - \tau)) = \varepsilon \sin(\sigma v_1(t - \tau)). \quad (6.40)$$

将通过理论分析、计算机仿真和电路实验三方面验证, 对任意给定常数 $\varepsilon > 0$, 即使标准 Chua 电路具有稳定的周期轨道, 只要常数 σ 和 τ 充分大, 那么时延反馈控制的 Chua 电路总能够产生混沌。

1. 理论分析

假设对给定的系统参数, 标准 Chua 电路具有一对指数稳定的平衡点:

$$\mathbf{P}_+ = [v_1^* \quad v_2^* \quad i_3^*]^T \in D_1, \quad \mathbf{P}_- = [-v_1^* \quad -v_2^* \quad -i_3^*]^T \in D_{-1},$$

式中

$$v_1^* = -\frac{(GR_0 + 1)(G_a - G_b)}{G + (GR_0 + 1)G_b}, \quad v_2^* = \frac{GR_0}{GR_0 + 1}v_1^*, \quad i_3^* = -\frac{G}{GR_0 + 1}v_1^*.$$

由于 $\mathbf{P}_+$ 和 $\mathbf{P}_-$ 的对称性, 只考虑 $\mathbf{P}_+$ 。下面将证明, 时延反馈 (6.40) 能使受控的 Chua 电路在 $\mathbf{P}_+$ 的一个邻域内产生混沌行为。

记 $\mathbf{x}(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad i_3(t)]^T$, $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{P}_+$ 。由于 $\mathbf{P}_+$ 是标准 Chua 电路的指数稳定的平衡点, 根据稳定性理论 [Khalil, 1996], 存在 Lyapunov 函数 $V(t, \bar{\mathbf{x}})$ 满足对任意 $(t, \bar{\mathbf{x}}) \in [0, \infty) \times D$ 有

$$\begin{cases} d_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq V(t, \bar{\mathbf{x}}) \leq d_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|_2^2, \\ \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.38)} \leq -d_3 \|\bar{\mathbf{x}}\|_2^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\|_2 \leq d_4 \|\bar{\mathbf{x}}\|_2, \end{cases} \quad (6.41)$$

式中, $D = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{\mathbf{x}}\| < r\}$, $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 和 r 均为正常数。记

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}(G(v_2 - v_1) - f(v_1)) \\ \frac{1}{C_2}(i_3 - G(v_2 - v_1)) \\ -\frac{1}{L}(v_2 + R_0 i_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L}w(v_1(t - \tau)) \end{bmatrix}.$$

方程 (6.39) 可写为:

$$\dot{x} = f(x) + g(t, x)。$$

在上述方程中把 $g(t, x)$ 看作是扰动项, 再利用文献[Khalil, 1996]的引理 5.2, 可得到如下结论。

定理 6.2 假设 P_+ 是标准 Chua 电路(6.38)的指数稳定的平衡点, 相应的 Lyapunov 函数 $V(t, \bar{x})$ 满足(6.41)。如果存在正常数 $\theta < 1$, 使得

$$|\omega(v_1(t - \tau))| \leq \epsilon < \frac{d_3}{d_4} \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} L \theta r,$$

那么对所有满足 $\|\bar{x}(t)\|_2 < \sqrt{d_1/d_2} r (t \leq 0)$ 的初始条件, 时延反馈 Chua 电路(6.39)的状态有界且存在有限时间 $t_1 > 0$, 使得

$$\|\bar{x}(t)\| \leq b\epsilon, \quad \forall t \geq t_1,$$

式中

$$b = \frac{d_4}{L\theta d_3} \sqrt{\frac{d_2}{d_1}},$$

并且, 如果

$$\epsilon < \frac{v_1^* - E}{b},$$

那么 $x(t) \in D_1$, 即 $v_1(t) > E (t \geq t_1)$ 。

在区域 D_1 中, 有

$$f(v_1) = G_b v_1 + G_a - G_b, \quad \frac{df(v_1)}{dv_1} = G_b。$$

由方程(6.38)得

$$\begin{aligned} v_2 &= RC_1 \frac{dv_1}{dt} + (RG_b + 1)v_1 + (G_a - G_b)R, \\ i_3 &= RC_1 C_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + (RC_2 G_b + C_1 + C_2) \frac{dv_1}{dt} + G_b v_1 + G_a - G_b。 \end{aligned}$$

记

$$\bar{v}_1(t) = v_1(t) - v_1^*, \quad \bar{\omega}(\bar{v}_1(t - \tau)) = \omega(v_1(t - \tau)) = \omega(\bar{v}_1(t - \tau) + v_1^*),$$

可以得到

$$\frac{d^3 \bar{v}_1}{dt^3} + \alpha_2 \frac{d^2 \bar{v}_1}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d \bar{v}_1}{dt} + \alpha_0 \bar{v}_1(t) = \beta_0 \bar{\omega}(\bar{v}_1(t - \tau)), \quad (6.42)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{G + G_b(GR_0 + 1)}{LC_1 C_2}, \\ \alpha_1 &= \frac{LGG_b + C_1(1 + R_0 G) + (G + G_b)R_0 C_2}{LC_1 C_2}, \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{GLC_1 + LC_2(G + G_b) + R_0 C_1 C_2}{LC_1 C_2},$$

$$\beta_0 = -\frac{G}{LC_1 C_2}.$$

因此,在区域 D_1 内,方程(6.39)等价于方程(6.42)。由于 P_+ 是标准 Chua 电路(6.38)的指数稳定的平衡点, $s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ 是 Hurwitz 多项式。从而(6.42)式可视为一个稳定的三阶线性微分方程加一个时延反馈

$$\beta_0 \bar{w}(\bar{v}_1(t - \tau)) = \varepsilon \beta_0 \sin(\sigma(\bar{v}_1(t - \tau) + v_1^*)).$$

根据前几节的讨论,当常数 σ 和 τ 充分大时,时延反馈 Chua 电路(6.39)总能够产生混沌行为。

2. 计算机仿真

在计算机仿真时,固定如下参数:

$$\begin{cases} C_1 = 10 \text{ nF}, & C_2 = 100 \text{ nF}, & L = 18.68 \text{ mH}, & R_0 = 16 \Omega, \\ G_a = -0.75 \text{ mS}, & G_b = -0.41 \text{ mS}, & E = 1 \text{ V}, & \tau = 0.001. \end{cases}$$

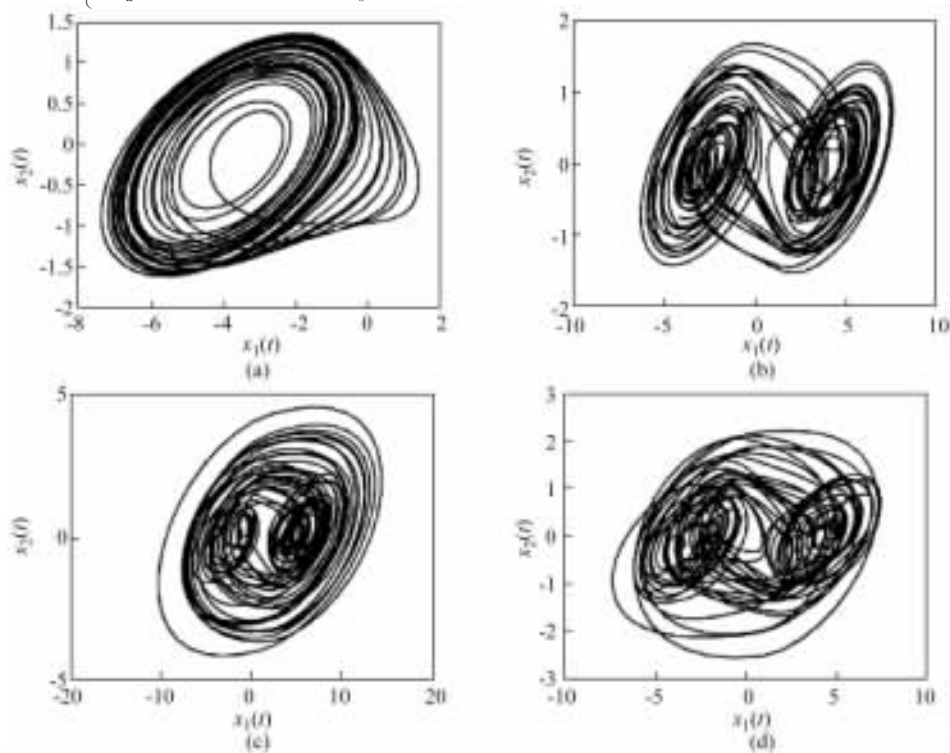


图 6.16 $R=1950\Omega$, ε 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为

首先取 $R=1950\Omega$ 。此时标准 Chua 电路(6.38)有一对指数稳定的平衡点

$$P_+ = [3.4478 \quad 0.0296 \quad -0.0018]^T,$$

$$P_- = [-3.4478 \quad -0.0296 \quad -0.0018]^T。$$

图 6.16 显示了当 ϵ 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为。再取 $R=1910\Omega$ 。此时标准 Chua 电路(6.38)有两个稳定的周期轨道(图 6.17)。图 6.18 显示了当 ϵ 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为。

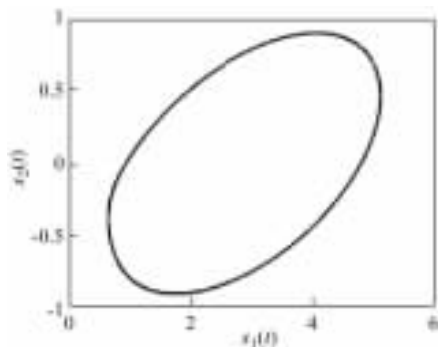


图 6.17 $R=1910\Omega$ 时,标准 Chua 电路(6.38)的两个稳定的周期轨道中的一个

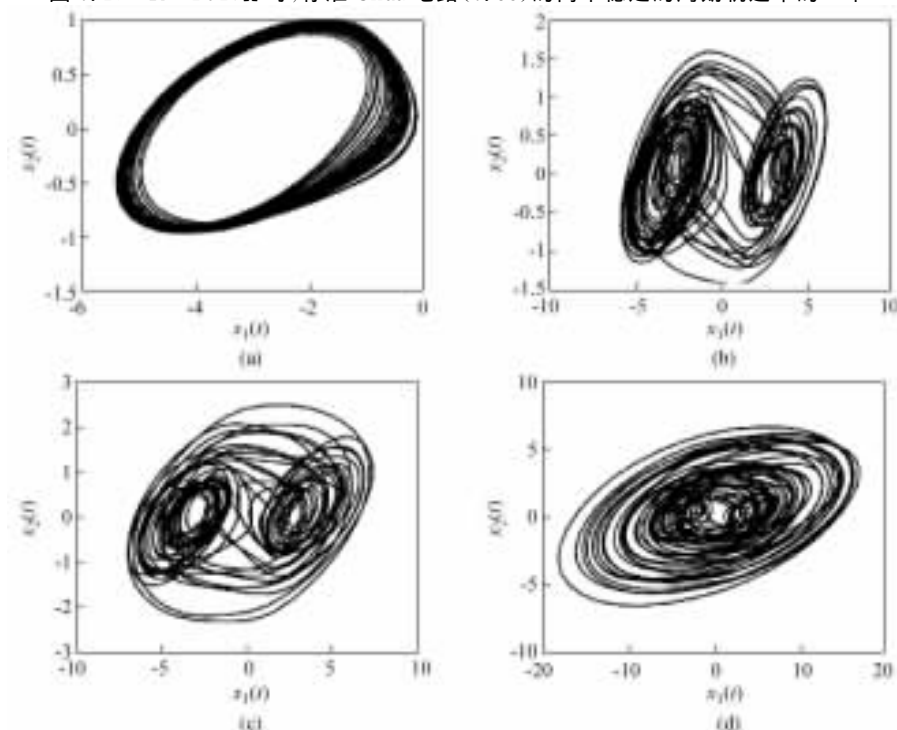


图 6.18 $R=1910\Omega$, ϵ 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为

3. 电路实验

在电路实验中,固定如下电路参数:

$$\begin{cases} C_1 = 11.00 \text{ nF}, C_2 = 108.99 \text{ nF}, L = 18.68 \text{ mH}, \\ R_0 = 14.78 \Omega, G_a = -0.87 \text{ mS}, G_b = -0.44 \text{ mS}, \\ E = 1 \text{ V}, \tau = 0.004096. \end{cases}$$

正弦函数是用三角函数发生器 IC, AD639 实现。时延的电路实现见图 6.19。首先取 $R=1800 \Omega$ 。此时标准 Chua 电路(6.38)有一对指数稳定的平衡点(图 6.20(a))。图 6.20(b)~(d)分别显示了当 ϵ 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为。再取 $R=1700 \Omega$ 。此时标准 Chua 电路(6.38)有一对稳定的周期轨道(图 6.21(a))。图 6.21(b)~(d)分别显示了当 ϵ 和 σ 取不同值时,时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为。

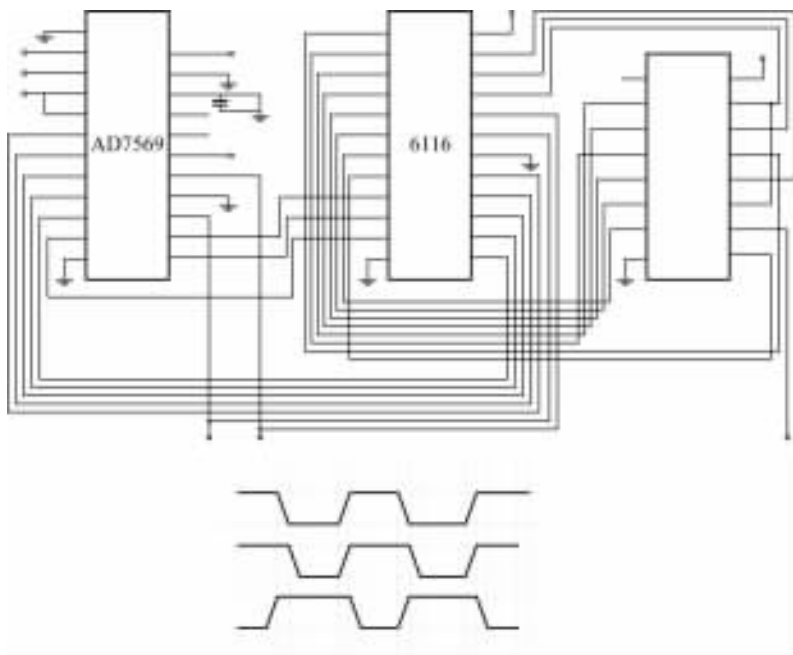


图 6.19 时延的电路实现

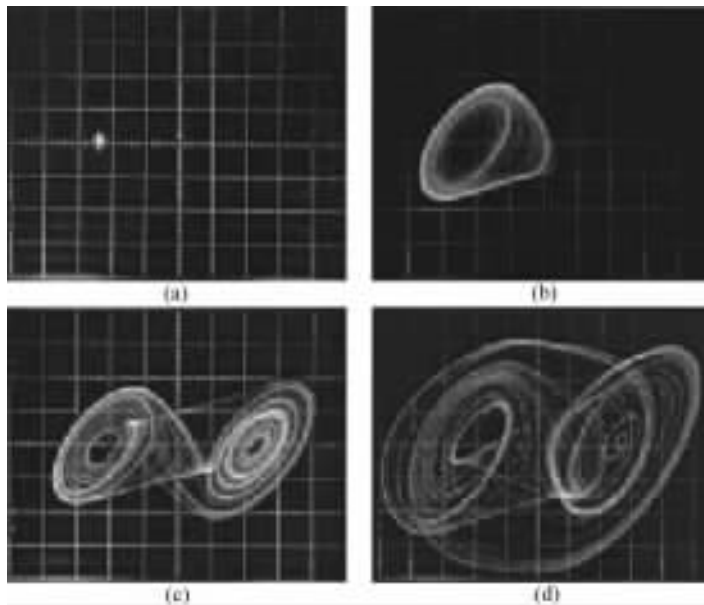


图 6.20 时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为($R=1800\Omega$)

- (a) 平衡点;无反馈;(b) 螺旋形混沌吸引子: $\varepsilon=0.045, \sigma=0.855$;
(c) 双卷形混沌吸引子: $\varepsilon=0.065, \sigma=0.855$;(d) 完全发展混沌吸引子: $\varepsilon=0.199, \sigma=0.901$

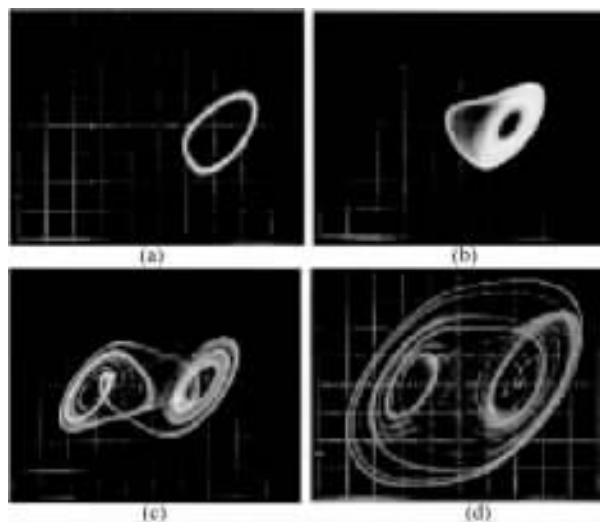


图 6.21 时延反馈 Chua 电路(6.39)的混沌行为($R=1700\Omega$)

- (a) 周期轨道;无反馈;(b) 螺旋形混沌吸引子: $\varepsilon=0.026, \sigma=0.855$;
(c) 双卷形混沌吸引子: $\varepsilon=0.058, \sigma=0.855$;(d) 完全发展混沌吸引子: $\varepsilon=0.185, \sigma=1.274$

6.7 时延反馈混沌化的数学严格表示

本章提出的时延反馈混沌化方法的近似理论分析,是基于把一个时延反馈连续时间系统近似地转化为一个离散映射来讨论。最近,文献[Zhou, Chen & Yang, 2004]对该方法作了更为严格的理论分析。

考虑如下单输入单输出(SISO)的线性定常控制系统

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = u(t), \quad (6.43)$$

采用时延反馈

$$u(t) = w(y(t-\tau)) = \varepsilon \sin(\sigma y(t-\tau)). \quad (6.44)$$

记 $y(m, \hat{t}) = y(m\tau + \hat{t})$ 。由引理 6.2, 对充分大的 τ 和 $\hat{t}, t_0 < \hat{t} < \tau$, 近似地有如下离散映射

$$y(m, t) \approx \frac{\varepsilon}{\alpha_0} \sin(\sigma y(m-1, \hat{t})). \quad (6.45)$$

值得指出的是, 这一公式在工程设计上是方便的, 但严格地说, 应该有

$$y(m, t) = \psi_m(t, \tau) + \frac{\varepsilon}{\alpha_0} \sin(\sigma y(m-1, \hat{t})), \quad (6.46)$$

其中对于某个常数 ξ 有

$$|\psi_m(\hat{t}, \tau)| \leq \xi. \quad (6.47)$$

这时可以严格证明[Zhou, Chen & Yang, 2004], 在适当的参数条件下, 映射(6.46)在 Li-Yorke 意义下是混沌的。

第7章

高维连续时间系统状态反馈混沌化

7.1 引言

根据动力系统理论中的 Poincare-Bendixson 定理[Hirsch & Smale, 1974], 一个 n 维连续的向量场产生混沌的必要条件为 $n \geq 3$ 。本章将介绍一个使 n 维连续时间系统($n \geq 3$)产生混沌的状态反馈控制方法[Wang & Chen, 2003]。首先给出一类混沌系统的标准型。然后, 基于该标准型, 分别针对线性可控系统和可反馈线性化系统设计反馈控制器, 使得受控系统拓扑共轭于某个给定的混沌系统, 从而产生混沌行为。最后, 对于不可反馈线性化的单输入单输出(SISO)系统, 如果该系统的相对阶不小于 3, 并且相应的内部动力学方程是从输入到状态稳定的, 那么可以设计一个状态反馈控制器, 使得受系统的一个子系统拓扑共轭于某个给定的混沌系统, 从而产生混沌行为。

7.2 混沌系统标准型

考虑一个 n 维连续时间混沌系统

$$\dot{x} = f_c(x_c), \quad (7.1)$$

式中, $x_c \in \mathcal{R}^n$ 为系统状态。根据 Poincare-Bendixson 定理, 如果 f_c 是连续的, 那么系统(7.1)是混沌系统的必要条件为 $n \geq 3$ 。根据 Takens 重构定理[Takens, 1981], 对于光滑动力系统(7.1)和一光滑标量输出函数 $y = \phi(x)$, 只要 $m > 2n$, 就可以用输出样本

$$y \equiv [y \quad \dot{y} \quad \cdots \quad y^{(m-1)}]^T, \quad (7.2)$$

重构系统(7.1)的混沌吸引子。

本章假设对给定的混沌系统(7.1), 存在标量光滑函数

$$y_c = \phi_{cl}(x_c), \quad (7.3)$$

使得

$$\mathbf{z}_c \equiv [y_c \quad \dot{y}_c \quad \cdots \quad y_c^{(n-1)}]^T = \Phi_c(\mathbf{x}_c) \quad (7.4)$$

是包含系统(7.1)的混沌吸引子的集合 $\Omega_c \subseteq \mathcal{R}^n$ 上的微分同胚,在坐标变换(7.4)下,系统(7.1)变为如下标准形式:

$$\dot{\mathbf{z}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{z}_c + \mathbf{b}_c g_c(\mathbf{z}_c), \quad (7.5)$$

式中, $g_c(\mathbf{z}_c)$ 是 $\mathbf{z}_c \in \mathcal{R}^n$ 的非线性函数,

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n. \quad (7.6)$$

显然, y_c 满足 n -阶微分方程

$$y_c^{(n)} = G_c(y_c, y_c', \cdots, y_c^{(n-1)}). \quad (7.7)$$

在力学系统中,三阶导数表示加速度的变化率,有时称为“jerk”。因此,对 $n=3$,方程(7.7)称为 jerk 方程, G_c 称为 jerk 函数[Sprott, 1997b]。

已经知道,如果 Φ_c 的 Jacobi 矩阵在点 $\mathbf{x}^0$ 是非奇异的,那么 $\Phi_c(\mathbf{x})$ 是点 $\mathbf{x}^0$ 的一个邻域中的局部微分同胚。下列定理表明,一大类混沌系统都可由定义在 $\mathcal{R}^n$ 上的全局微分同胚变换为标准型(7.5)。

定理 7.1 考虑一个 n 维动力系统

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A} \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c g(\mathbf{x}_c), \quad (7.8)$$

式中 $\mathbf{b}_c$ 由(7.6)式定义, g 是实值函数,常数矩阵 $\mathbf{A}$ 具有如下形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

式中

$$a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \quad (7.10)$$

记 $\mathbf{z}_c = [x_{c1} \quad \dot{x}_{c1} \quad \cdots \quad x_{c1}^{(n-1)}]^T$ 。则存在一个全局线性坐标变换

$$\mathbf{z}_c = \mathbf{Q}_c \mathbf{x}_c, \quad (7.11)$$

式中, $\mathbf{Q}_c$ 为非奇异阵,使得系统(7.8)变为标准型(7.5)。

证明:可以验证 $\mathbf{Q}_c = (q_{ij}^c)$ 是一个常数下三角矩阵,具体构造如下:

$$q_{i1}^c = 1, \quad q_{kl}^c = \sum_{j=l-1}^{k-1} q_{k-1,j}^c q_{jl}^c, \quad k = 2, 3, \cdots, n, \quad l = 1, 2, \cdots, k,$$

式中, $q_{0i}^c = a_{i0} = 0$ 。由条件(7.10)可得

$$\det(\mathbf{Q}_c) = q_{11}^c q_{22}^c \cdots q_{mm}^c \neq 0,$$

即表明 $\mathbf{Q}_c$ 为一非奇异阵。

例 7.1(Rössler 环形混沌) Rössler 曾发现了一个简单的混沌系统[Rössler, 1979]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{cases} -x_2 - x_3 \\ x_1 \\ \alpha(x_2 - x_3^2) - \beta x_3 \end{cases}, \quad (7.12)$$

式中 α 和 β 为实参数。

图 7.1 显示了当 $\alpha=0.386$ 和 $\beta=0.2$ 时系统(7.12)的混沌吸引子。如果取

$$\mathbf{x}_c = [x_{c1} \ x_{c2} \ x_{c3}]^T = [x_2 \ x_1 \ x_3]^T,$$

那么系统(7.12)就具有(7.8)的形式,从而可用如下全局微分同胚

$$\mathbf{z} = [x_2 \ \dot{x}_2 \ \ddot{x}_2]^T = [x_2 \ x_1 \ -x_2 - x_3]^T \quad (7.13)$$

把系统(7.12)变为标准型(7.5),相应的 jerk 函数为

$$g_c(\mathbf{z}) = -\beta z_3^2 - z_2 - (\alpha + \beta)z_1 + \alpha z_1^2. \quad (7.14)$$

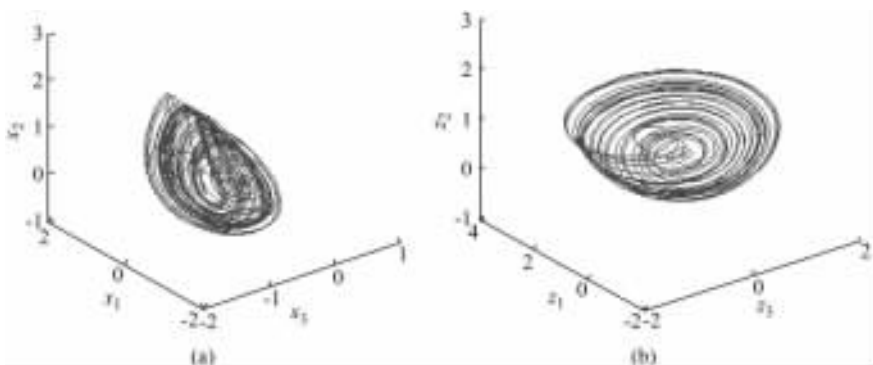


图 7.1 Rössler 系统(7.12)的混沌吸引子,这里 $\mathbf{z} = [x_2 \ \dot{x}_2 \ \ddot{x}_2]^T$

例 7.2(Chua 电路) Chua 电路的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(x_2 - x_1 + f(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 \end{cases}, \quad (7.15a)$$

式中 $f(\cdot)$ 为一段线性函数(图 6.9(b))

$$f(x_1) = \begin{cases} -bx_1 - a + b, & x_1 > 1, \\ -ax_1, & |x_1| \leq 1, \\ -bx_1 + a - b, & x_1 < -1, \end{cases} \quad (7.15b)$$

式中, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, a < b < 0$ 。图 7.2 显示了 Chua 电路的一个混沌吸引子, 参数取

$$\alpha = 10.0000, \beta = 15.0000, \gamma = 0.0385, a = -1.2700, b = -0.6800。$$

如果取

$$\mathbf{x}_c = [x_{c1} \ x_{c2} \ x_{c3}]^T = [x_3 \ x_2 \ x_1]^T,$$

那么系统(7.15)就具有形式(7.8)。可用微分同胚

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_3 \\ \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -\beta x_2 - \gamma x_3 \\ -\beta x_1 + \beta(\gamma + 1)x_2 + (\gamma^2 - \beta)x_3 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

把系统(7.15)变为标准型(7.5), 相应的 jerk 函数

$$g_c(\mathbf{z}) = -\alpha\beta z_1 + (\alpha\gamma + \gamma - \beta)z_2 - (\alpha + \gamma + 1)z_3 + \alpha\beta f(\beta^{-1}(-(\beta + \gamma)z_1 + (\gamma + 1)z_2 - z_3))。 \quad (7.17)$$

可以证明, Chua 电路拓扑共轭于许多由 3 段奇对称分段线性连续向量场描述的 3 维系统[Chua *et al.*, 1993]。

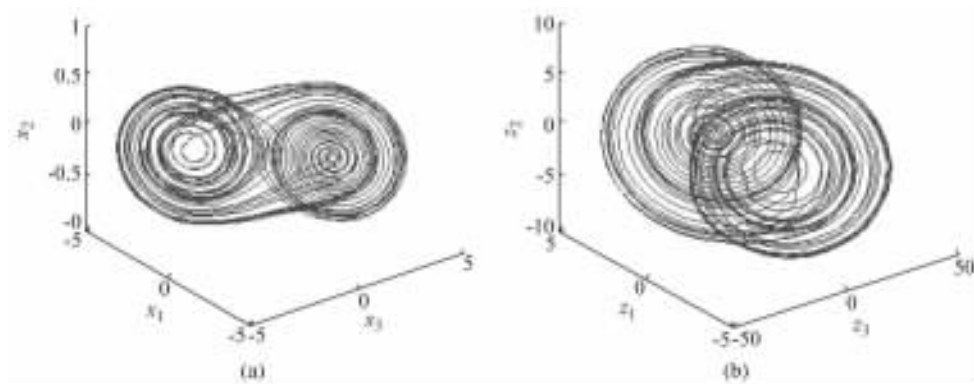


图 7.2 Chua 电路(7.15)的混沌吸引子, 这里 $\mathbf{z} = [x_3 \ \dot{x}_3 \ \ddot{x}_3]^T$

此外, 文献[Sprott, 1994]中列出的 19 个简单的 3 维混沌系统中有 14 个可以转化为 jerk 方程[Eichhorn *et al.*, 1998]。Sprott 还发现, 许多非常简单的 jerk 方程都能产生混沌行为[Sprott 1997b, 2000], 其中最简单的一个方程具有二次非线性:

$$\ddot{x} = -x \pm \dot{x}^2 - a\ddot{x}。 \quad (7.18)$$

系统(7.18)当 $a = 2.017$ 时是混沌的。具有分段线性函数的最简单的混沌 jerk 方程为

$$\ddot{x} = -1 + |x| - b\dot{x} - a\ddot{x}。 \quad (7.19)$$

系统(7.19)当 $a = 0.6$ 和 $b = 1$ 时是混沌的。这些系统都可以直接变换为标准型

(7.5)。

也可以把三维以上的高维系统变换为标准型。下面给出一个四维超混沌系统的变换的例子。

例 7.3(TNC 超混沌振子) TNC 振子的状态方程为[Tamasevicius, Namas-junas & Cenys, 1996]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - bx_2 \\ \mu^{-1}(x_1 - cx_3 - x_4) \\ \epsilon^{-1}(x_3 - d(x_4 - 1)H(x_4 - 1)) \end{pmatrix}, \quad (7.20a)$$

式中

$$H(x_4 - 1) = \begin{cases} 0, & x_4 < 1, \\ 1, & x_4 \geq 1. \end{cases} \quad (7.20b)$$

系统(7.20)可由如下全局坐标变换变为标准型(7.5)：

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ a-b & b^2-1 & -1 & 0 \\ a(a-b)+b^3-1-\mu^{-1} & 2b-a-b^3 & b-a+c\mu^{-1} & \mu^{-1} \end{pmatrix} x. \quad (7.21)$$

7.3 线性可控系统的混沌化

考虑一个一般的 n 维单输入控制系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (7.22)$$

假设系统(7.22)是可控的,即可控性矩阵

$$P_c = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \quad (7.23)$$

是非奇异的。记 q_1^T 为 P_c^{-1} 的第 n 行。根据线性系统理论[Kailath, 1980],存在非奇异矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^T A \\ \vdots \\ q_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

使得系统(7.22)在线性变换 $z=Qx$ 下变为：

$$\dot{z} = A_c z + b_c(u - \alpha^T z), \quad (7.25)$$

式中, A_c 和 b_c 由(7.6)式给出, $\alpha = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1}]^T$ 为一常数向量。

如果系统(7.25)中的控制器取

$$u = \alpha^T z + g_c(z), \quad (7.26)$$

那么闭环系统(7.25)具有标准型(7.5)。这表明, 如果系统(7.22)中的控制器取

$$u = \alpha^T Qx + g_c(Qx), \quad (7.27)$$

那么闭环系统(7.22)拓扑共轭于混沌系统(7.1), 从而也是混沌的。

例 7.4 考虑如下 3 维线性控制系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (7.28)$$

取线性变换 $z = Qx$, 其中

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.75 \\ 1 & 0.5 & -1.25 \end{pmatrix},$$

那么系统(7.28)变为如下可控标准型

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (7.29)$$

如果控制器为

$$u = [-4 \quad -4 \quad -3]^T Qx + g_c(Qx), \quad (7.30)$$

那么闭环系统(7.28)和(7.30)拓扑共轭于混沌系统(7.1), 从而也是混沌的。

图 7.3 和 7.4 分别给出了当 g_c 为 Rössler 系统和 Chua 电路的 jerk 函数时, 受控系统(7.28)的两个混沌吸引子。

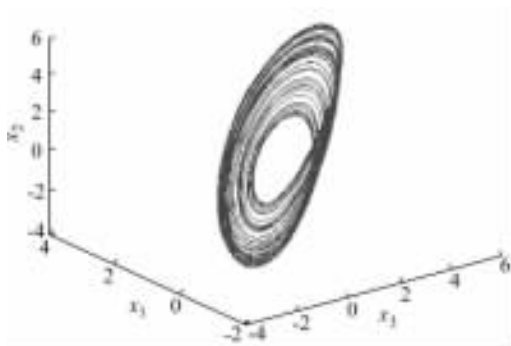


图 7.3 当 g_c 为 Rössler 系统(7.12)的 jerk 函数时, 受控系统(7.28)的混沌吸引子

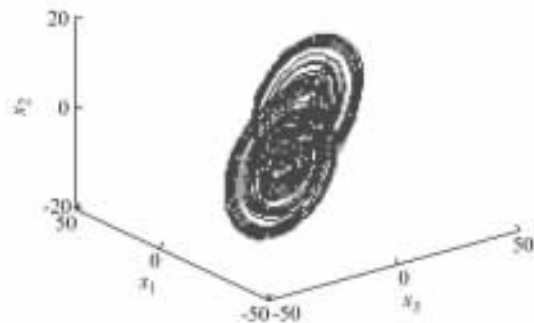


图 7.4 当 g_c 为 Chua 电路(7.15)的 jerk 函数时,受控系统(7.28)的混沌吸引子

7.4 可反馈线性化系统的混沌化

考虑一个 n 维单输入非线性控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (7.31)$$

系统(7.31)称为是在点 x^0 的一个邻域 U 内可反馈线性化的,如果存在 U 定义在上的反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (7.32)$$

和坐标变换

$$z = \Phi(x), \quad (7.33)$$

使得闭环系统(7.31)可变换为如下线性控制系统:

$$\dot{z} = A_c z + b_c v, \quad (7.34)$$

式中 A_c 和 b_c 由(7.6)式定义。

控制系统(7.31)在集合 $\Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ 上是可反馈线性化的,如果它在每一点 $x^0 \in \Omega$ 都可反馈线性化。如果 $\Omega \supseteq \Phi^{-1}(\Phi_c(\Omega_c))$ 且系统(7.31)中的控制器为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)g_c(\Phi(x)), \quad (7.35)$$

那么闭环系统(7.31)在包含系统(7.1)的混沌吸引子的集合 Ω_c 上拓扑共轭于混沌系统(7.1)。从而系统(7.31)也是混沌的。

为了设计控制器(7.35),首先需要确定给定系统是可反馈线性化的,然后再构造线性化反馈控制器(7.32)和线性化坐标变换(7.33)。类似于第6章6.4节,需要以下关于非线性系统的一些基本结果。

引理 7.1[Isidori, 1995] 控制系统(7.31)在点 x^0 的一个邻域 U 内是可反馈线性化的充要条件为存在一个光滑函数 $\lambda(x)$,使得 SISO 系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = \lambda(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (7.36)$$

在点 $\mathbf{x}^0$ 具有相对阶 n , 即

$$L_g L_f^k \lambda(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{对 } 0 \leq k < n-1 \text{ 及 } \mathbf{x} \in U, \quad L_g L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x}_0) \neq 0. \quad (7.37)$$

引理 7.2 [Isidori, 1995] 控制系统 (7.31) 在点 $\mathbf{x}^0$ 的一个邻域 U 内是可反馈线性化的充要条件为

(1) 矩阵

$$[\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{ad}_f \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})]$$

在点 $\mathbf{x}^0$ 具有秩 n ;

(2) 分布

$$D = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \cdots, \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}\}$$

在 U 上是不变的, 即 D 中任何一对向量场的李括号也是 D 中的任何一对向量场。

基于上述结果, 构造控制器 (7.35) 的步骤如下:

(1) 检验反馈线性化条件 (1) 和 (2)。

(2) 若上述条件满足, 解如下偏微分方程得到 $\lambda(\mathbf{x})$

$$L_g \lambda(\mathbf{x}) = L_{\text{ad}_f \mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = \cdots = L_{\text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.38)$$

且要求

$$L_{\text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) \neq 0.$$

(3) 取

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{-L_f^n \lambda(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x})}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x})}. \quad (7.39)$$

(4) 取

$$\Phi(\mathbf{x}) = [\lambda(\mathbf{x}) \quad L_f \lambda(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x})]^T. \quad (7.40)$$

(5) 取 g_c 为某个混沌系统的 jerk 函数, 构造控制器 (7.35)。

例 7.5 考虑如下非线性控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (7.41)$$

由于

$$\text{ad}_f \mathbf{g} = [1 \quad -1 \quad 0]^T, \quad \text{ad}_f^2 \mathbf{g} = [2 \quad -2 \quad 1]^T.$$

可以验证系统 (7.41) 在 $\mathcal{R}^3$ 上满足反馈线性化条件 (1) 和 (2)。方程

$$L_g \lambda(\mathbf{x}) = L_{\text{ad}_f \mathbf{g}} \lambda(\mathbf{x}) = 0$$

的解为

$$\lambda(\mathbf{x}) = x_3. \quad (7.42)$$

(7.42)满足 $L_{ad^2_g}x_3 \neq 0 (x_3 \neq 0)$ 。故有

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{-L_f^3\lambda(\mathbf{x})}{L_gL_f^2\lambda(\mathbf{x})} = -2[(1+x_3)(x_2-x_1) + (x_2-x_3^2)(3x_3^2-x_2)],$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_gL_f^2\lambda(\mathbf{x})} = 1.$$

全局坐标变换为

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 - x_3^2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3(x_2 - x_3^2) \end{bmatrix}, \quad (7.43)$$

如果 g_c 是一个混沌系统的 jerk 函数,那么反馈控制器

$$u(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})g_c(\Phi(\mathbf{x})) \\ = -2[(1+x_3)(x_2-x_1) + (x_2-x_3^2)(3x_3^2-x_2)] + g_c(\Phi(\mathbf{x})), \quad (7.44)$$

就能使系统(7.40)产生混沌行为。图 7.5,图 7.6 分别给出了当 g_c 为 Rössler 系统和 Chua 电路的 jerk 函数时,受控系统(7.41)的两个混沌吸引子。

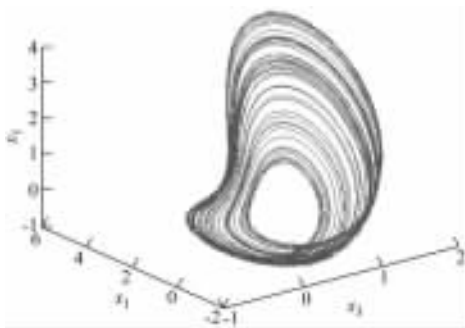


图 7.5 当 g_c 为 Rössler 系统(7.12)的 jerk 函数时,受控系统(7.40)的混沌吸引子

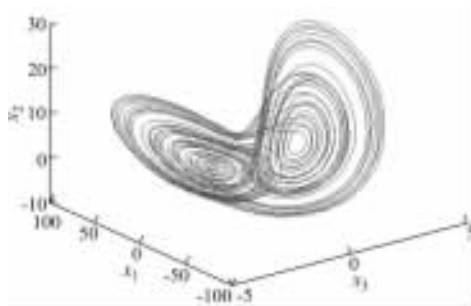


图 7.6 当 g_c 为 Chua 电路(7.15)的 jerk 函数时,受控系统(7.41)的混沌吸引子

7.5 不可反馈线性化系统的混沌化

现在考虑一个 m 维不可反馈线性化的单输入控制系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (7.45)$$

假设存在一个标量输出函数

$$y = h(x), \quad (7.46)$$

使得系统(7.45), (7.46)在 $\mathcal{R}^m$ 上具有相对阶 $n, 3 \leq n < m$ 。不失为一般性, 假设 $f(0)=0$ 及 $h(0)=0$ 。记

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

由微分几何控制理论[Isidori, 1995], 可以找到另外 $m-n$ 个函数。

$$\eta = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_{n+2} \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{n+1}(x) \\ \phi_{n+2}(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{pmatrix}, \quad (7.48)$$

使得

$$L_g \phi_i(x) = 0, \quad \forall n+1 \leq i \leq m, \quad x \in \mathcal{R}^m, \quad (7.49)$$

且

$$z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \Phi(x) \quad (7.50)$$

为一非奇异的坐标变换。

在新坐标下, 系统(7.45)的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n, \\ \dot{z}_n &= b(\xi) + a(\xi)u, \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (7.51)$$

式中

$$a(\xi) = L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(\xi)) \neq 0, \quad b(\xi) = L_f^n h(\Phi^{-1}(\xi)). \quad (7.52)$$

η 子系统的动态方程为

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta), \quad (7.53)$$

它描述的是系统“内部”的动力学行为。把 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别看作是系统(7.53)的输入和状态,并假设系统(7.53)是从输入到状态稳定的 [Isidori, 1999],即存在一个 KL 类函数 $\beta(\cdot, \cdot)$ 和一个 K 类函数 $\gamma(\cdot)$,使得对任何有界函数 $\xi(t)$ 和任何有界初始状态 $\eta(0) = \eta^0$, 系统(7.53)的解 $\eta(t)$ 对任意 $t \geq 0$ 满足

$$\|\eta(t)\| \leq \beta(\|\eta^0\|, t) + \gamma(\|\xi(t)\|_\infty). \quad (7.54)$$

注 7.1 连续函数 $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ 称为是 K 类的, 如果它满足 $\alpha(0) = 0$, 且是严格单调递增函数。进一步, 如果 $a = \infty$, 且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, 该函数称为是 K_∞ 类的。连续函数 $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 称为是 KL 类的, 如果对每个固定的 s , 函数 $\beta(r, s)$ 属于 K 类, 且对每个固定的 r , 函数 $\beta(r, s)$ 是下降的, 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$ 。

引理 7.3 [Isidori, 1999] 如果把 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别看作是 η 子系统(7.53)的输入和状态, 那么 η 子系统(7.53)是输入到状态稳定的当且仅当对该子系统存在一个 ISS-Lyapunov 函数。

注 7.2 一个连续可微函数 V 称为是一个 ISS-Lyapunov 函数, 如果存在 K_∞ 类函数 $\underline{\alpha}(\cdot), \bar{\alpha}(\cdot), \alpha(\cdot)$, 和 K 类函数 $\sigma(\cdot)$, 使得

$$\underline{\alpha}(\|\eta\|) \leq V(\eta) \leq \bar{\alpha}(\|\eta\|), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{m-n}, \quad (7.55)$$

并且

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} q(\xi, \eta) \leq -\alpha(\|\eta\|) + \sigma(\|\xi\|), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}^{m-n}. \quad (7.56)$$

如果取

$$u = \frac{g_c(\xi) - b(\xi)}{a(\xi)}, \quad (7.57)$$

那么 ξ -子系统方程

$$\dot{\xi} = A_c \xi + b_c g_c(\xi) \quad (7.58)$$

具有标准型(7.5)。这意味着闭环系统(7.51)的 n 维 ξ -子系统拓扑共轭于混沌系统(7.1), 从而是混沌的。

综上所述, 如果 m 维 SISO 系统(7.45)~(7.46)具有一致相对阶 $n, 3 \leq n < m$, 且相应的 η -子系统是从输入到状态稳定的, 那么在反馈控制器

$$u = \frac{g_c(\Phi_\xi(x)) - L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (7.59)$$

作用下, 系统(7.45)能产生混沌行为。

例 7.6 考虑一个给定的 SISO 非线性控制系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 x_4 + x_3 \\ x_1 x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = x_1. \quad (7.60)$$

可以验证该系统具有相对阶 3。记

$$\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \Phi_\xi(\mathbf{x}),$$

并取

$$\eta = z_4 = x_4,$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= 2z_2 - z_3 + z_1 z_4 + u, \\ \dot{z}_4 &= z_1(2z_2 + z_3) - 2z_4. \end{aligned} \quad (7.62)$$

显然,如果把 $\xi = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ 和 z_4 分别看作是系统(7.62)的输入和状态,那么系统(7.62)是从输入到状态稳定的。可以求得

$$L_f^3 h(\mathbf{x}) = 4(x_2 - x_1) - x_3 + x_1 x_4, \quad L_g L_f^2 h(\mathbf{x}) = 1,$$

因此,如果 g_c 是某个混沌系统的 jerk 函数,那么反馈控制器

$$u = \frac{g_c(\Phi_\xi(\mathbf{x})) - L_f^3 h(\mathbf{x})}{L_g L_f^2 h(\mathbf{x})} = g_c(\Phi_\xi(\mathbf{x})) + 4(x_1 - x_2) + x_3 - x_1 x_4 \quad (7.63)$$

能使系统(7.60)产生混沌行为。图 7.7,图 7.8 分别给出了当 g_c 为 Rössler 系统和 Chua 电路的 jerk 函数时,受控系统(7.60)的两个混沌吸引子。

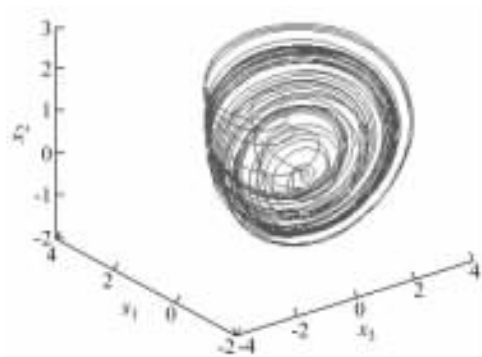


图 7.7 当 g_c 为 Rössler 系统(7.12)的 jerk 函数时,受控系统(7.60)的混沌吸引子

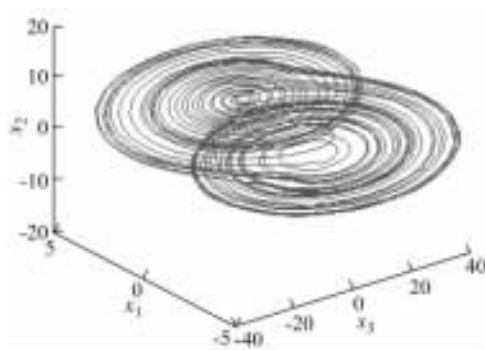


图 7.8 当 g_c 为 Chua 电路(7.15)的 jerk 函数时,受控系统(7.60)的混沌吸引子

第 8 章

连续时间系统混沌化的切换控制方法

8.1 切换分段线性控制方法

本章将介绍分段线性切换控制方法,该方法可以用来在连续时间系统中产生混沌[Lü *et al.*, 2002; Lü *et al.*, 2003; Zheng *et al.*, 2004]。

考虑如下线性控制系统

$$\dot{x} = Ax + u, \quad (8.1)$$

式中, $x = [x \ y \ z]^T \in R^3$ 为系统状态, $u \in R^3$ 为控制输入,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}。$$

对控制系统(8.1)采用切换分段线性控制器[Lü *et al.*, 2002]

$$u \equiv f(x) = \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d \end{pmatrix}, & \text{if } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (8.2)$$

式中, a, b, c, d, k 为实参数。当

$$a = 3, \quad b = 20, \quad c = -20, \quad k = 4, \quad d = 10$$

时,控制系统(8.1),(8.2)具有一个混沌吸引子(图 8.1),其最大 Lyapunov 指数为 1.5963。文献[Yang & Li, 2002]所研究的系统是系统(8.1),(8.2)的一个特例。下面分析控制系统(8.1),(8.2)的基本性质。

1. 对称性和耗散性

显然,系统(8.1),(8.2)在变换

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$$

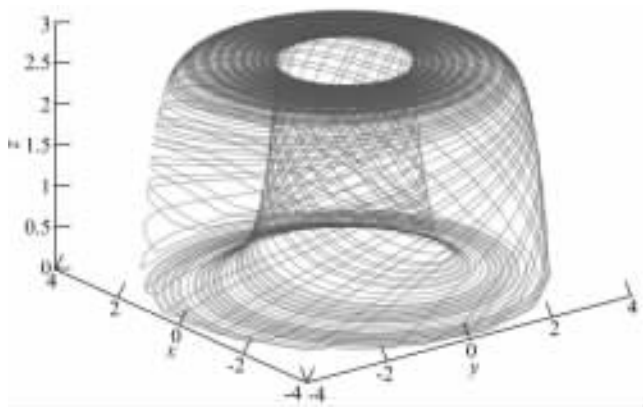


图 8.1 控制系统(8.1),(8.2)的混沌吸引子

下具有对称性。假设

$$a > 0, \quad c < -2a, \quad k > 0,$$

状态空间中小元素 $\delta\Omega(t) = \delta x \delta y \delta z$ 的体积 $V(t)$ 的变化由散度

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

确定。可以求得

$$\nabla V = \begin{cases} 2a + c - 2k < 0, & \text{if } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 2a + c < 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这说明系统(8.1),(8.2)是耗散的,并具有指数压缩率

$$\delta\Omega(t) = \begin{cases} e^{2a+c-2k}, & \text{if } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ e^{2a+c}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因而所有的系统轨道最终将限制在 $\mathcal{R}^3$ 空间中的一个体积为零的集合上。

2. 系统平衡点

本小节假设 $b \neq 0, c \neq 0, k > 0$ 。可以推得

(1) 如果 $-d/c > 1$, 那么系统(8.1),(8.2)具有两个平衡点

$$[0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad [0 \quad 0 \quad -kd/c]^T;$$

(2) 如果 $-d/c < 1$, 那么系统(8.1),(8.2)具有唯一平衡点 $[0 \quad 0 \quad 0]^T$ 。

系统(8.1),(8.2)在平衡点 $[0 \quad 0 \quad 0]^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = a \pm bi, \lambda_3 = c$ 。因此,当 $a > 0$ 或 $c > 0$ 时,平衡点 $[0 \quad 0 \quad 0]^T$ 是不

稳定的;当 $a < 0$ 且 $c < 0$ 时,平衡点 $[0 \ 0 \ 0]^T$ 是稳定的。且若 $c < 0$,则 $a = 0$ 为系统(8.1),(8.2)的 Hopf 分岔点。

类似地,系统(8.1),(8.2)在平衡点 $[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a-k & b & 0 \\ -b & a-k & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = a - k \pm bi, \lambda_3 = c$ 。因此,当 $a > k$ 或 $a > 0$ 时,平衡点 $[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 是不稳定的;当 $a < k$ 且 $c < 0$ 时,平衡点 $[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 是稳定的。且若 $c < 0$,则 $a = k$ 为系统(8.1),(8.2)的 Hopf 分岔点。

3. 控制系统的动态分析

本小节假设 $a > 0, k > 0, c < 0, d > 0$ 且 $a < k \leq a - c, d < -c$ 。定义两个区域

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid z + \sqrt{x^2 + y^2} \leq k\},$$

$$\bar{\Sigma} = \{(x, y, z) \mid z + \sqrt{x^2 + y^2} > k\}。$$

当

$$z + \sqrt{x^2 + y^2} \leq k$$

时,系统(8.1),(8.2)变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = -bx + ay, \\ \dot{z} = cz. \end{cases} \quad (8.3)$$

由系统(8.3)的第三个方程,

$$z(t) = z(0)e^{ct} \rightarrow 0(t \rightarrow \infty),$$

记 $V = x^2 + y^2$ 。则有

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2a(x^2 + y^2) = 2aV,$$

即

$$V(t) = V(0)e^{2at} \rightarrow \infty(t \rightarrow \infty),$$

从而

$$f(t) \equiv z + \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty(t \rightarrow \infty)。$$

因此必然存在时刻 t_1 使得 $f(t_1) > k$,此时控制系统(8.1),(8.2)的状态将不再按式(8.3)变化,而是穿过平面 $z + \sqrt{x^2 + y^2} = k$ 进入区域 $\bar{\Sigma}$ 。系统方程变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - k)x + by, \\ \dot{y} = -bx + (a - k)y, \\ \dot{z} = cz + kd. \end{cases} \quad (8.4)$$

对于系统(8.4),取 Lyapunov 函数

$$V = x^2 + y^2 + [z + (kd/c)]^2。$$

那么

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2\left[\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \left(z + \frac{kd}{c}\right)\dot{z}\right] \\ &= 2\left[(a-k)(x^2 + y^2) + c\left(z + \frac{kd}{c}\right)^2\right] \\ &= 2\left[(a-k)V + (c+k-a)\left(z + \frac{kd}{c}\right)^2\right] \\ &\leq 2(a-k)V。$$

因此,

$$V(t) \leq V(0)e^{2(a-k)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

从而

$$f(t) \equiv z + \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow -(kd/c) < k \quad (t \rightarrow \infty),$$

但当且仅当

$$f(t) = z + \sqrt{x^2 + y^2} > k$$

时,系统(8.1),(8.2)的状态才演化为(8.4)。因此,系统(8.1),(8.2)的轨道必然会再次穿过平面

$$z + \sqrt{x^2 + y^2} = k$$

而回到 Σ 。

当 $0 < d < -c$ 时,系统(8.1),(8.2)只有一个平衡点 $[0 \ 0 \ 0]^T$,并且该平衡点是不稳定的。而由上面的分析可知,随着时间的演化,系统(8.1),(8.2)的轨道会不断地穿越平面

$$z + \sqrt{x^2 + y^2} = k,$$

正是这种不断的拉伸与折叠,导致了复杂的混沌动力学行为。

图 8.2 显示了系统轨道运动的方向。系统参数和初始状态取

$$a = 3, b = 20, c = -20, k = 4, d = 10, [x_0 \ y_0 \ z_0]^T = [0.1 \ 1 \ -0.1]^T。$$

当 $t < 0.5$ 时系统轨道在 Σ 内;当 $0.5 < t < 1.6$ 时系统轨道在 $\bar{\Sigma}$ 内;当 $1.6 < t < 2$ 时,系统轨道又回到 Σ 内……如此不断穿越。

4. 参数变化的动力学结构分析

(1) 参数 a 的变化。

固定参数

$$b = 20, \quad c = -15, \quad k = 6, \quad d = 10,$$

当参数 a 变化时,系统(8.1),(8.2)的动力学行为可归纳如下:

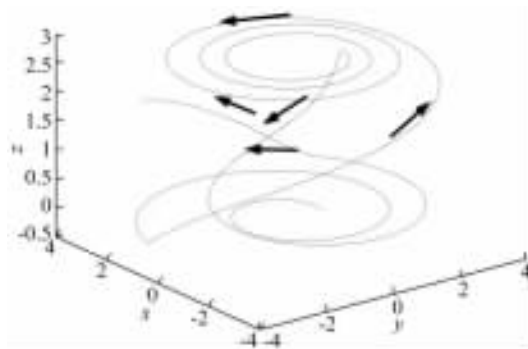


图 8.2 系统(8.1),(8.2)的轨道演化

- (a) 当 $a < 0$ 时,系统轨道收敛到一个平衡点;
- (b) 当 $a = 0$ 时存在一个极限环(图 8.3(a));

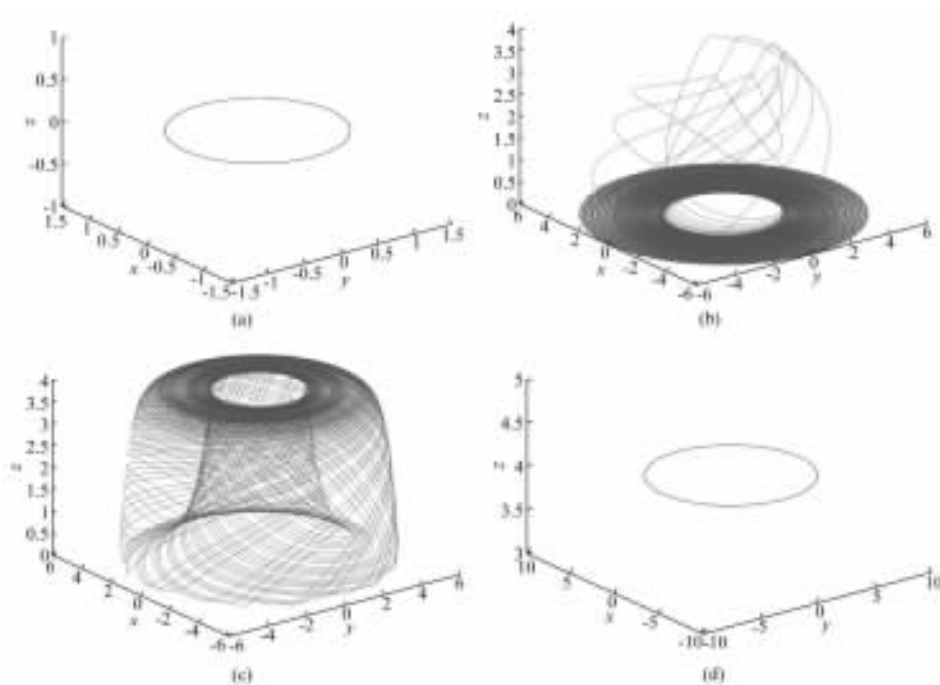


图 8.3 系统(8.1),(8.2)的相图

(a) $a = 0$; (b) $a = 0.1$; (c) $a = 5$; (d) $a = 6$

- (e) 当 $0.1 < a < 6$ 时存在一个混沌区域,其最大 Lyapunov 指数见图 8.4;
- (d) 当 $a = 6$ 时存在一个极限环(图 8.3(d));
- (e) 当 $a > 6$ 时系统轨道发散。

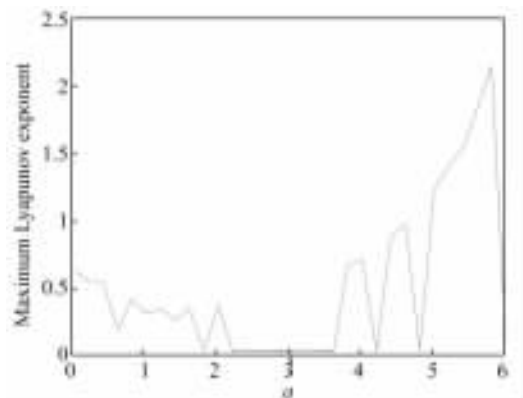


图 8.4 当 $0.1 < a < 6$ 时系统(8.1),(8.2)的最大 Lyapunov 指数

(2) 参数 b 的变化。

固定参数

$$a = 3, \quad c = -15, \quad k = 8, \quad d = 10,$$

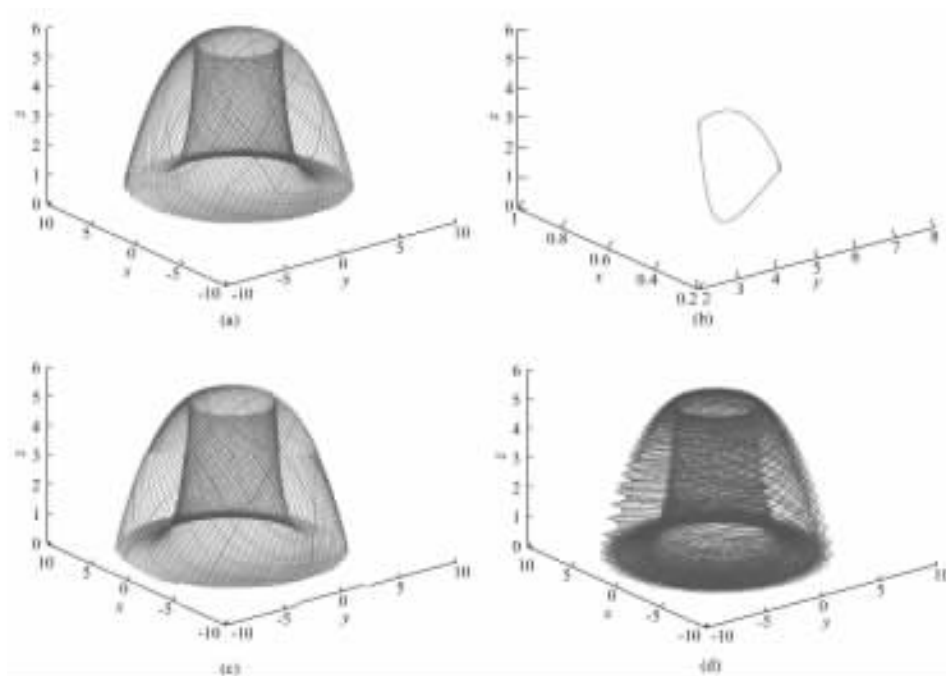


图 8.5 系统(8.1),(8.2)的相图

(a) $b = -10$; (b) $b = 0$; (c) $b = 10$; (d) $b = 100$

数值实验表明,对几乎所有的参数 b , 系统(8.1),(8.2)都具有混沌化的行为(图 8.5)。

(3) 参数 c 的变化。

固定参数

$$a = 3, \quad b = 20, \quad k = 8, \quad d = 10,$$

当 $c \geq 0$ 时,系统(8.1),(8.2)的轨道发散;当 $-10 < c < 0$ 时,系统轨道收敛到一个平衡点;当 $c < -10$ 时,系统轨道具有混沌化的行为(图 8.6)。

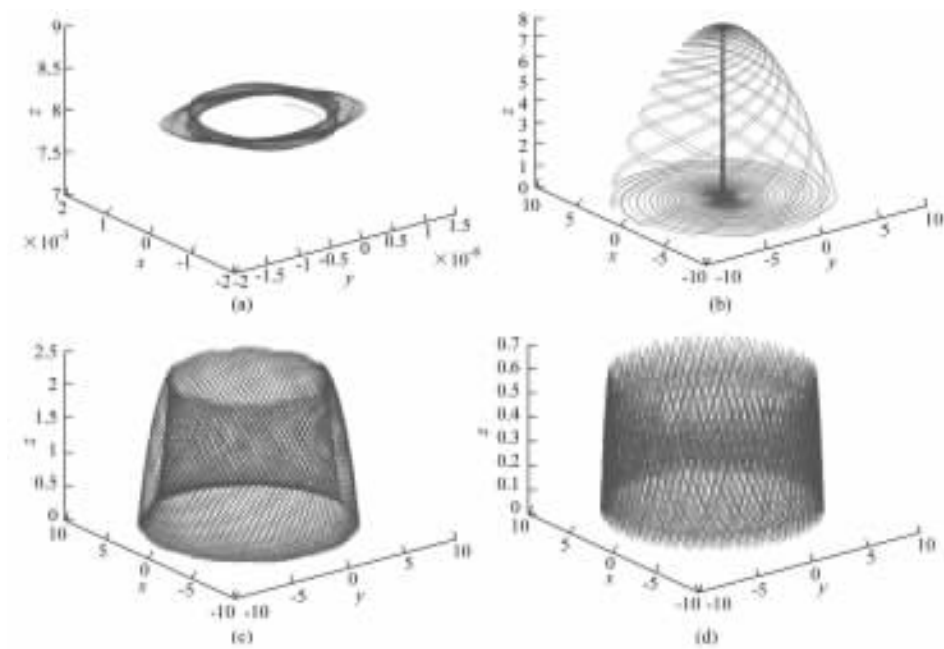


图 8.6 系统(8.1),(8.2)的相图

(a) $c = -10$; (b) $c = -10.1$; (c) $c = -30$; (d) $c = -100$

(4) 参数 k 的变化。

固定参数

$$a = 3, \quad b = 20, \quad c = -15, \quad d = 10,$$

当 $k < 3$ 时,系统(8.1),(8.2)的轨道发散;当 $k = 3$ 时,存在一个极限环;当 $3 < k < 12$ 时,系统(8.1),(8.2)的轨道具有混沌化的行为(图 8.7)。

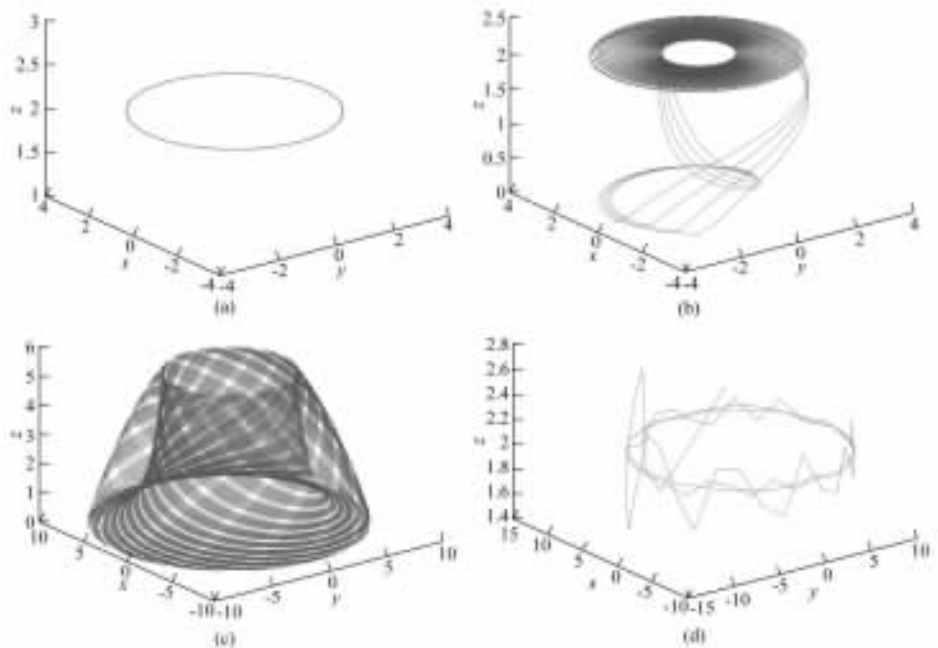


图 8.7 系统(8.1),(8.2)的相图

(a) $k=3$; (b) $k=3.1$; (c) $k=10$; (d) $k=12$

8.2 用切换控制产生多个混沌吸引子

仍然考虑控制系统(8.1)。把控制器(8.2)改为如下的分段线性切换控制器 [Zheng *et al.*, 2003]:

$$u = f(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ d \end{bmatrix}, & \text{if } z > 0 \text{ and } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ e \end{bmatrix}, & \text{if } z < 0 \text{ and } z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8.5)$$

控制系统(8.1)和(8.5)能同时具有两个混沌吸引子——一个上吸引子和一个下吸引子。图 8.8 显示了系统参数为

$$a = 3, b = 20, c = -20, d = 10, e = -10, k = 4, m = 4$$

时的两个混沌吸引子。注意到 $z=0$ 是该系统的一个不变流形。

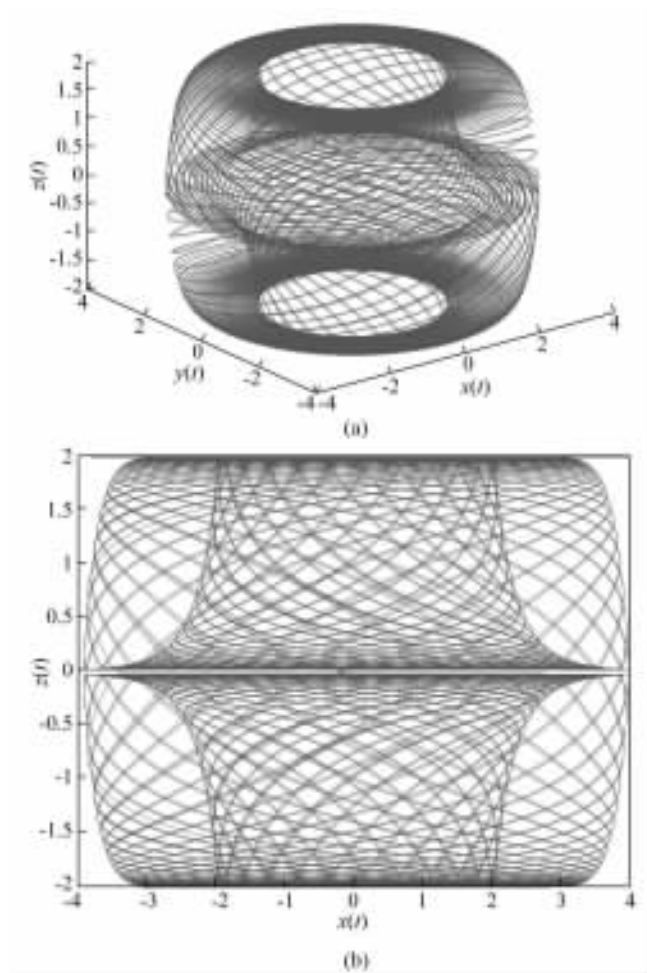


图 8.8 控制系统(8.1)和(8.5)的两个混沌吸引子
控制器(8.5)有两个切换:一个是在曲面

$$S_1: z + \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad (z > 0)$$

上,另一个是在曲面

$$S_2: z - \sqrt{x^2 + y^2} = -m \quad (z < 0)$$

上。若取参数 $k=m, d=-e$, 则这两个曲面是关于不变流形 $z=0$ 对称的。并且上吸引子和下吸引子也是关于平面 $z=0$ 对称的。

类似地,可以通过平移和旋转两种变换,使系统(8.1)产生任意多个混沌吸引子。例如,可以用如下控制器产生 3 个混沌吸引子:

$$u \equiv f(x) = \begin{cases} \text{if } z \leq h_1 \begin{cases} k \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ d \end{bmatrix}, & \text{if } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ \text{if } h_1 < z \leq h_2 \begin{cases} k \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ d - ch_1/k \end{bmatrix}, & \text{if } z - h_1 + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ \text{if } z > h_2 \begin{cases} k \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ d - ch_2/k \end{bmatrix}, & \text{if } z - h_2 + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{cases} \quad (8.6)$$

图 8.9 显示了系统参数为

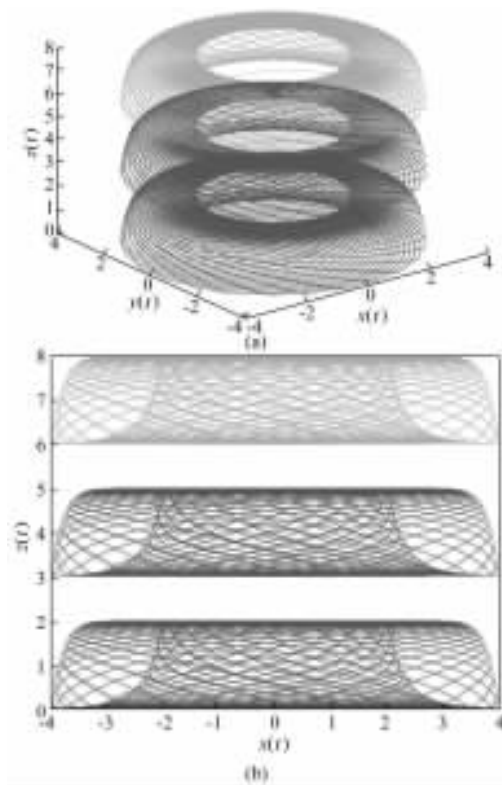


图 8.9 控制系统(8.1)和(8.6)的三个混沌吸引子

$$a = 3, b = 20, c = -20, d = 10, k = 4, h_1 = 3, h_2 = 6$$

时的三个混沌吸引子。注意到 $z=0, z=3$ 和 $z=6$ 均为系统(8.1)~(8.6)的一个不变流形。

进一步,可采用如下控制器使系统(8.1)产生四个混沌吸引子:

$$u \equiv f(x) = \begin{cases} \text{if } z \leq h_1 \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d \end{pmatrix}, & \text{if } z > 0 \text{ and } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ m \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ e \end{pmatrix}, & \text{if } z < 0 \text{ and } z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ \text{if } z > h_1 \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d - \frac{c(h+h_1)}{k} \end{pmatrix}, & \text{if } z - (h+h_1) > 0 \text{ and } z - h - h_1 + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ m \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ e - \frac{c(h+h_1)}{m} \end{pmatrix}, & \text{if } z - (h+h_1) < 0 \text{ and } z - h - h_1 + \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{cases} \quad (8.7)$$

图 8.10 显示了系统参数为

$$a = 3, b = 20, c = -20, d = -e = 10, k = m = 4, h_1 = 3, h = 3$$

时的四个混沌吸引子。

上述过程可一直继续下去,即可通过平移和旋转变换产生 n 个混沌吸引子。由于控制系统(8.1)在变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 下具有对称性,因而可以把整个空间沿 z 轴分割为 n 个高度分别为 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 的子空间(见图 8.11)。于是可以把原来的一个吸引子复制到每个子空间中,从而使得系统(8.1)同时产生 n 个混沌吸引子。但需要注意的是,这 n 个混沌吸引子是互不交叉的,每个吸引子具有自己的吸引域。下面考虑如何产生单个具有多重融合的吸引域的复杂混沌吸引子。

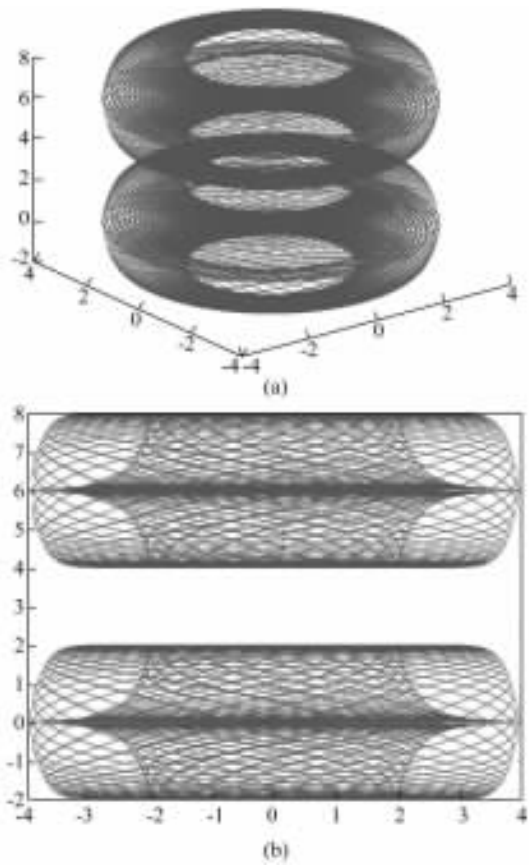


图 8.10 控制系统(8.1)和(8.7)的两个混沌吸引子

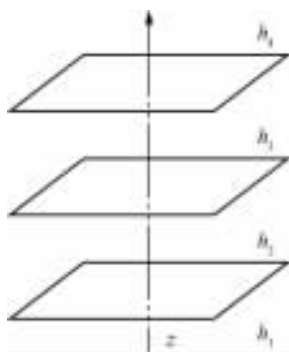


图 8.11 系统(8.1)的平行分割子空间

8.3 用切换控制产生具有多重融合吸引域的混沌吸引子

我们已经知道,控制器(8.5)有两个切换:一个切换是在曲面 S_1 上产生上吸引子,另一个是在曲面 S_2 上产生下吸引子。这两个曲面是关于 $z=0$ 对称的。并且上吸引子和下吸引子也是关于 $z=0$ 对称的。为了把上吸引子和下吸引子的轨道连接起来,必须有一种控制机制,迫使上吸引子的轨道穿过平面 $z=0$ 而进入子空间 $z<0$,下吸引子的轨道穿过平面 $z=0$ 而进入子空间 $z>0$ 。为此,把控制器(8.5)修改为:

$$u \equiv f(x) = \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d \end{pmatrix}, & \text{if } z > 0 \text{ and } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ m \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ e \end{pmatrix}, & \text{if } z < 0 \text{ and } z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sign}(z) \end{pmatrix}, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (8.8)$$

式中, $\delta > 0$ 为增益, $\text{sign}(z)$ 表示 z 的符号函数。

在控制器(8.8)中,当 $z > 0$ 时,负值控制 $-\delta < 0$ 迫使轨道进入子空间 $z < 0$;而当 $z < 0$ 时,正值控制 $\delta > 0$ 迫使轨道进入子空间 $z > 0$ 。这样,就把原来孤立的两个混沌吸引子合为单个复杂的混沌吸引子。图 8.12 给出了当

$$a = 3, b = 20, c = -20, d = -e = 10, k = m = 4, \delta = 1$$

时,控制系统的混沌吸引子。

控制器(8.8)包含三个切换平面: S_1, S_2 和 $z=0$ 。切换平面 S_1 和 S_2 分别用于产生上吸引子和下吸引子,而切换平面 $z=0$ 则起着把这两个混沌吸引子连接在一起的作用。类似地,可产生一个具有三个融合吸引域的混沌吸引子,相应的控制器为

$$u \equiv f(x) = \begin{cases} \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d \end{pmatrix}, & \text{if } z > 0 \text{ and } z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ m \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ e \end{pmatrix}, & \text{if } z < 0 \text{ and } z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sign}(z) \end{pmatrix}, & \text{otherwise;} \end{cases} \\ \begin{cases} k \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ d - \frac{ch}{k} \end{pmatrix}, & \text{if } z - h + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sign}(z - h) - \frac{ch}{\delta} \end{pmatrix}, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{cases} \quad (8.9)$$

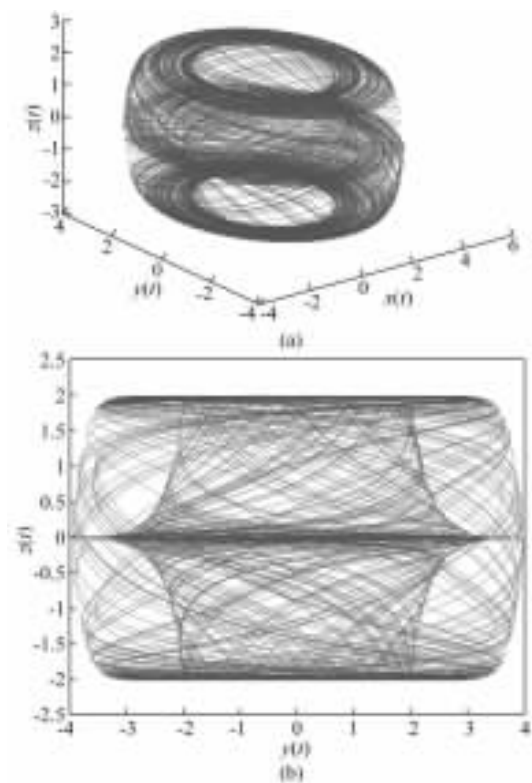


图 8.12 控制系统(8.1)和(8.8)的单个混沌吸引子

图 8.13 给出了当

$a = 3, b = 20, c = -15, d = -e = 10, k = m = 4, h = 2, \delta = 5$ 时,控制系统的混沌吸引子。

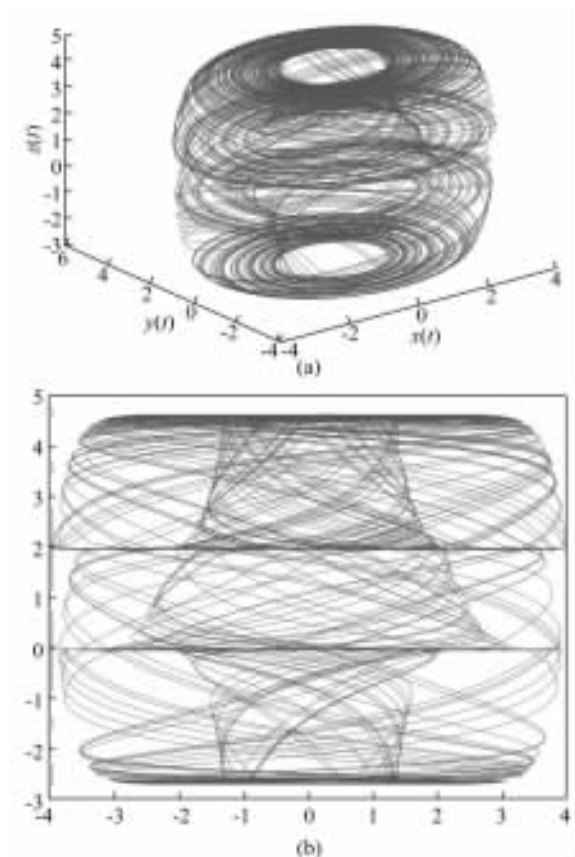


图 8.13 控制系统(8.1)和(8.9)的单个混沌吸引子

一般地,可通过如下步骤产生具有 n 个融合吸引域的混沌吸引子:

- (1) 把整个空间沿 z 轴分解为 n 个子空间;
- (2) 把原来的混沌吸引子复制到各个子空间;
- (3) 用切换控制策略把 n 个孤立的混沌吸引子连接起来,形成单个复杂的混沌吸引子。

8.4 切换控制系统的动力学行为

下面分析系统(8.1)在控制器(8.8)作用下的基本性质。对采用控制器(8.9)

的系统(8.1)的性质可作完全类似的分析。

1. 对称性

显然,对任何参数,系统(8.1)具有在变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 下的对称性。

2. 耗散性和吸引子的存在性

假设

$$a > 0, c < -2a, k > 0, m > 0,$$

状态空间中小元素 $\delta\Omega(t) = \delta x \delta y \delta z$ 的体积 $V(t)$ 的变化由散度

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

确定。可以求得

$$\nabla V = \begin{cases} 2a + c - 2k < 0, & \text{if } z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ 2a + c - 2m < 0, & \text{if } z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ 2a + c < 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这说明系统(8.1)是耗散的,并具有指数压缩率

$$\delta\Omega(t) = \begin{cases} e^{(2a+c-2k)t}, & \text{if } z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k, \\ e^{(2a+c-2m)t}, & \text{if } z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} < -m, \\ e^{(2a+c)t}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所有的系统轨道最终将限制在 $\mathcal{R}^3$ 空间中的一个体积为零的集合上。

3. 系统平衡点

本小节假设 $b \neq 0, c \neq 0, m > 0, k > 0$ 。可以推得:

(1) 如果 $-d/c > 1, e/c > 1$ 且 $\delta/c > 0$, 那么系统(8.1)具有四个平衡点:

$$S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T, \ S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T,$$

$$S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T, \ S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T;$$

(2) 如果 $-d/c > 1, e/c > 1$ 且 $\delta/c < 0$, 那么系统(8.1)具有两个平衡点:

$$S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T, \ S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T;$$

(3) 如果 $-d/c < 1, e/c < 1$ 且 $\delta/c > 0$, 那么系统(8.1)具有两个平衡点:

$$S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T, \ S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T;$$

(4) 如果 $-d/c < 1, e/c < 1$ 且 $\delta/c < 0$, 那么系统(8.1)没有平衡点;

(5) 如果 $-d/c > 1, e/c < 1$ 且 $\delta/c > 0$, 那么系统(8.1)具有三个平衡点:

$$S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T, \quad S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T, \quad S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T;$$

(6) 如果 $-d/c > 1, e/c < 1$ 且 $\delta/c < 0$, 那么系统(8.1)具有一个平衡点:

$$S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T;$$

(7) 如果 $-d/c > 1, e/c > 1$ 且 $\delta/c > 0$, 那么系统(8.1)具有三个平衡点:

$$S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T, \quad S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T, \quad S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T;$$

(8) 如果 $-d/c < 1, e/c > 1$ 且 $\delta/c < 0$, 那么系统(8.1)具有一个平衡点:

$$S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T.$$

系统(8.1)在平衡点 $S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T$ 和 $S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = a \pm bi, \lambda_3 = c$ 。因此,当 $a > 0$ 或 $c > 0$ 时,平衡点 $S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T$ 和 $S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T$ 是不稳定的;当 $a < 0$ 且 $c < 0$ 时,平衡点 $S_3[0 \ 0 \ \delta/c]^T$ 和 $S_4[0 \ 0 \ -\delta/c]^T$ 是稳定的。且若 $c < 0$, 则 $a = 0$ 为系统(8.1)的 Hopf 分岔点。

如果 $-(d/c) > 1$, 那么系统(8.1)在平衡点 $S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a-k & b & 0 \\ -b & a-k & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = a - k \pm bi, \lambda_3 = c$ 。因此,如果 $a > k$ 且 $c \neq 0$, 那么平衡点 $S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 是不稳定的;如果 $a < k$ 且 $c < 0$, 那么平衡点 $S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 是稳定的;如果 $a < k$ 且 $c > 0$, 那么平衡点 $S_1[0 \ 0 \ -kd/c]^T$ 是不稳定的。因此,如果 $c < 0$, 那么 $a = k$ 为系统(8.1)的 Hopf 分岔点。

类似地,如果 $e/c > 1$, 那么系统(8.1)在平衡点 $S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} a-m & b & 0 \\ -b & a-m & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = a - m \pm bi, \lambda_3 = c$ 。因此,如果 $a > m$ 且 $c \neq 0$, 那么平衡点 $S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T$ 是不稳定的;如果 $a < m$ 且 $c < 0$, 那么平衡点 $S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T$ 是稳定的;如果 $a < m$ 且 $c > 0$, 那么平衡点 $S_2[0 \ 0 \ -me/c]^T$ 是不稳定的。因此,如果 $c < 0$, 那么 $a = m$ 为系统(8.1)的 Hopf 分岔点。

8.5 切换控制系统的定性分析

现在分析系统(8.1)在控制器(8.8)作用下的定性特征。定义四个区域:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, y, z) \mid z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} > k\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x, y, z) \mid z > 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} \leq k\}, \\ \Sigma_3 &= \{(x, y, z) \mid z < 0, z - \sqrt{x^2 + y^2} \geq -m\}, \\ \Sigma_4 &= \{(x, y, z) \mid z < 0, z + \sqrt{x^2 + y^2} < -m\}.\end{aligned}$$

在区域 Σ_1 , 系统(8.1)变为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (a - k)x + by, \\ \dot{y} = -bx + (a - k)y, \\ \dot{z} = cz + kd. \end{cases} \quad (8.10)$$

记 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 。系统(8.1)可写为:

$$\begin{cases} \dot{r} = (a - k)r, \\ \dot{\theta} = -b, \\ \dot{z} = c(z + (kd/c)). \end{cases} \quad (8.11)$$

该方程的解为

$$\begin{cases} r = r_0 e^{(a-k)t}, \\ \theta = \theta_0 - bt, \\ z = (z_0 + (kd/c))e^{ct} - (kd/c). \end{cases} \quad (8.12)$$

类似地,在区域 Σ_4 , 系统(8.1) 的解为

$$\begin{cases} r = r_0 e^{(a-m)t}, \\ \theta = \theta_0 - bt, \\ z = (z_0 + (me/c))e^{ct} - (me/c). \end{cases} \quad (8.13)$$

在区域 Σ_2 , 系统(8.1) 的解为

$$\begin{cases} r = r_0 e^{at}, \\ \theta = \theta_0 - bt, \\ z = (z_0 - (\delta/c))e^{ct} + (\delta/c). \end{cases} \quad (8.14)$$

在区域 Σ_3 , 系统(8.1) 的解为

$$\begin{cases} r = r_0 e^{at}, \\ \theta = \theta_0 - bt, \\ z = (z_0 + (\delta/c))e^{ct} - (\delta/c). \end{cases} \quad (8.15)$$

要使系统产生混沌,系统参数必须满足

$$a > 0, c < 0, k > a, m > a, \delta > 0。$$

由于上切换平面为 $z+r=k (z>0)$ 。如果初始状态位于该平面之上,那么系统行为由(8.12)确定,即有

$$r = r_0 e^{(a-k)t} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -(kd/c), \quad z+r \rightarrow -(kd/c)。$$

为使系统产生混沌,系统轨道必须在某一时刻 t_1 穿过平面 $z+r=k$ 而进入区域 Σ_2 ,此时系统行为由(8.14) 确定,即有

$$r = r_0 e^{at} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \delta/c < 0。$$

因此,系统轨道在某一时刻 t_2 穿过平面 $z=0$ 而进入区域 Σ_3 。此时系统行为由(8.15) 确定,即有

$$r = r_0 e^{at} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow -\delta/c > 0, \quad z-r \rightarrow -\infty。$$

因此,系统轨道在某一时刻 t_3 穿过平面 $z-r=-m$ 而进入区域 Σ_4 。此时系统行为由(8.13)确定,即有

$$r = r_0 e^{(a-m)t} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -me/c, \quad z-r \rightarrow -me/c。$$

为使系统产生混沌,系统轨道必须在某一时刻 t_4 穿过切换平面 $z-r=-m$ 而进入区域 Σ_3 ,然后,在某一时刻 t_5 穿过平面 $z=0$ 而再次进入区域 Σ_2 ,再在某一时刻 t_5 穿过平面 $z+r=k$ 而再次进入区域 Σ_1 。系统轨道将不断重复经过这些区域,形成单个复杂的混沌吸引子。

第 9 章

抽象空间和无穷维系统的混沌化

9.1 引言

前几章都是讨论有限维的 Euclid 空间中由常微分方程或常差分方程(映射)定义的混沌和混沌化问题。本章将把混沌化问题推广到无穷维空间(拓扑空间或度量空间)以及由偏微分方程描述的混沌现象。在自然界中,许多具有分布参数系统,如空气动力学、大气波动、湍流、热力学、电磁场扰动、量子物理运动,等等,都只能通过偏微分方程在无穷维空间中才能得到清晰准确的描述。而无穷维空间和由偏微分方程或偏差分方程刻画的混沌现象是十分复杂的,目前尚未有很完备的研究结果。因而其中的混沌化问题就更不成熟,且技术上更为困难。本章将介绍目前这方面的一些研究进展。

9.2 抽象空间中的混沌

考虑离散动力系统

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad (9.1)$$

式中, $f: X \rightarrow X$ 为映射, X 为拓扑空间。

定义 9.1(Devaney 意义下的混沌, Devaney, 2003) 设 (X, d) 为度量空间, 称连续映射 $f: X \rightarrow X$ 在 X 上混沌, 如果

- (1) f 是拓扑传递的;
- (2) f 的周期点在 X 中稠密;
- (3) f 对初始条件具有敏感性。

可以证明[Banks *et al.*, 1992], 性质(1)与(2)蕴含 f 在 X 上对初始条件具有敏感性。因此, 在上述定义中性质(3)本质上是多余的。由于 f 的混沌经常出现在 X 的某个子集上, 有必要给出映射在某个子集上混沌的相应定义。

定义 9.2 设 V 是度量空间 (X, d) 的一个子集。如果连续映射 $f: V \rightarrow V$ 在 V 上满足性质(1)和(2), 则称 f 在 V 上在 Devaney 意义下是混沌的。

如果 X 是紧的度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续的且是满射, 那么 Devaney 意义下的混沌比 Li-Yorke 意义下的混沌强[Huang & Ye, 2002]。

为介绍抽象空间中的混沌概念和混沌化方法, 先回顾一些经典的动力系统知识。

1. 符号动力系统

令 $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ 为一序列, 其中 s_j 只取值 0 或 1, $j = 0, 1, 2, \dots$ 。定义

$$\Sigma_2^+ \equiv \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) : s_j = 0 \text{ 或 } 1\}, \quad (9.2)$$

$$\rho(s, t) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}, \quad s = (s_0, s_1, s_2, \dots), \quad t = (t_0, t_1, t_2, \dots), \quad (9.3)$$

则 (Σ_2^+, ρ) 是一个紧的、完全不连通的、完备度量空间。移位映射 $\sigma: \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$, $\sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ 是连续的, 并称其导出的系统 (Σ_2^+, σ) 为符号动力系统[Hao & Zheng, 1998]。

引理 9.1 令 $\text{Per}_n(\sigma)$ 为移位映射 σ 的所有周期为 n 的周期点的集合, 即

$$\text{Per}(\sigma) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(\sigma).$$

$\text{Card Per}_n(\sigma)$ 为 $\text{Per}_n(\sigma)$ 中周期点的总数目。则

- (1) $\text{Card Per}_n(\sigma) = 2^n$;
- (2) $\text{Per}(\sigma)$ 在 Σ_2^+ 内稠密;
- (3) σ 在 Σ_2^+ 内存在一个稠密轨道。

显然, 性质(3)蕴含 σ 具有拓扑传递性。因此, 该符号动力系统在 Devaney 意义下是混沌的。

2. 无穷维离散动力系统

考虑映射

$$f: Q \rightarrow X, \quad (9.4)$$

式中, X 为可分度量空间, $Q \subset X$ 为局部连通且紧的子集, f 连续。在马蹄假设(还有另外两个条件)之下, 存在紧不变集 $S \subset Q$, 使得 $f: S \rightarrow S$ 半共轭于一个单边符号动力系统[Kennedy & Yorke, 2001]。

设 X 为度量空间, $Q \subset X$ 为紧子集。若存在 $m \geq 2$ 个互不相交的闭子集 $Q_i (1 \leq i \leq m)$, 使得 $f: D = \bigcup_{i=1}^m Q_i \rightarrow X$ 连续且 $F(Q_i) \supset D, 1 \leq i \leq m$, 则存在紧不变集 $S \subset D$, 使得 $f: S \rightarrow S$ 半共轭于 m -单边符号动力系统[Yang & Tang, 2004]。

现在介绍关于完备度量空间上连续映射的混沌的两个判定定理。度量空间 (X, d) 上的两个子集 A 和 B 之间的距离定义为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

子集 A 的直径定义为

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$

定理 9.1 [Shi & Chen, 2004] 设 (X, d) 是完备度量空间, V_0 和 V_1 是 X 的两个不相交非空闭有界子集且 $d(V_0, V_1) > 0$ 。若连续映射 $f : V_0 \cup V_1 \rightarrow X$ 满足下述条件:

(1) $f(V_j) \supset V_0 \cup V_1, j=0, 1$;

(2) f 分别在 V_0 和 V_1 上都是扩张的, 即存在常数 $\lambda_0 > 1$, 使得

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda_0 d(x, y), \quad \forall x, y \in V_0, \forall x, y \in V_1;$$

(3) 存在常数 $\mu_0 > 0$, 使得

$$d(f(x), f(y)) \leq \mu_0 d(x, y), \quad \forall x, y \in V_0, \forall x, y \in V_1;$$

则存在一个 Cantor 集 $\Lambda \subset V_0 \cup V_1$, 使得 $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ 拓扑共轭于符号动力系统 $\sigma : \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ 。从而 f 在 Λ 上在 Devaney 意义下是混沌的。

$\mathcal{R}^n$ 与一般完备度量空间不同的是: $\mathcal{R}^n$ 的任意有界闭集是紧的, 而紧性的等价条件是: X 是紧的充要条件是 X 的闭集族若有有限交性质, 则必有非空交。而一般完备度量空间不具有该性质。在定理 9.1 的证明中为克服非紧性所引起的困难, 需要用到下面的结果。

引理 9.2 设 (X, d) 是完备度量空间, $\{A_n\}$ 是 X 的有界闭子集列且具有有限交性质。若当 $n \rightarrow \infty$ 时, $d(A_n) \rightarrow 0$, 则 $\{A_n\}$ 有非空交, 即

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n \neq \emptyset,$$

而且 $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ 仅含有一个点。

定理 9.1 中的条件(3)可保证所讨论的两个不交闭子集的原像集之间的距离大于零。该性质对紧子集自然成立。因此, 若 V_0 与 V_1 都是紧集时, 可将条件(3)去掉。

定理 9.2 设 (X, d) 是度量空间, V_0 与 V_1 是 X 的不相交非空紧子集。若连续映射 $f : V_0 \cup V_1 \rightarrow X$ 满足定理 9.1 的条件(1)与(2), 则定理 9.1 的结论成立。

现在回到 Marotto 给出的 R^n 上关于连续可微映射的扩张不动点(也称排斥子)和返回扩张不动点(也称回归排斥子)的定义, 以及相关的一个重要结果:

$\mathcal{R}^n$ 上连续可微映射的返回扩张不动点产生混沌。

首先将 Marotto 的两个概念的本质抽出来, 将其推广到一般度量空间映射上去。令 $\bar{B}_r(z)$ 和 $B_r(z)$ 分别为以点 z 为中心, r 为半径的闭球和开球。

定义 9.3 设 (X, d) 为度量空间, $f : X \rightarrow X$ 为映射。

(1) 称点 $z \in X$ 为 f 在 $\bar{B}_r(z)$ 上的一个扩张不动点, 如果 $f(z) = z$ 且存在常数 $\lambda > 1$, 使得

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_r(z),$$

式中, 常数 λ 称为 f 在 $\bar{B}_r(z)$ 上的一个扩张系数。进一步, 称 z 为 f 在 $\bar{B}_r(z)$ 上的一个正则扩张不动点, 如果 z 是 $f(B_r(z))$ 的内点。

(2) 假设 z 为 f 在 $\bar{B}_r(z)$ 上的一个扩张不动点。 z 称为 f 的一个返回扩张不动点, 如果存在一点 $x_0 \in B_r(z)$, $x_0 \neq z$, 和正整数 m , 使得 $f^m(x_0) = z$ 。进一步,

(2. a) z 称为 f 的一个非退化返回扩张不动点, 如果存在正常数 μ 与 r_0 , 使得 $B_{r_0}(x_0) \subset B_r(z)$ 且

$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \mu d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{r_0}(x_0)$$

(2. b) z 称为 f 的一个正则返回扩张不动点, 如果 $f(B_r(z))$ 是开集且存在正常数 δ_0 , 使得 $B_{\delta_0}(x_0) \subset B_r(z)$ 且对每一个正常数 $\delta \leq \delta_0$, z 均是 $f^m(B_\delta(x_0))$ 的内点。

(3) 假设 $z \in X$ 是 f 的一个正则扩张不动点。设 U 是 z 的满足下述条件的最大开邻域: 对每一个点 $x \in U$, $x \neq z$, 存在正整数 $k \geq 1$, 使得 $f^k(x) \notin U$ 并且对每一个点 $x \in U$, $x \neq z$, $f^{-n}(x)$ 在 U 内有唯一定义且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f^{-n}(x) \rightarrow z$ 。 U 称为 f 在点 z 的局部不稳定集, 并记为 $W_{\text{loc}}^u(z)$ 。

(4) 假设 $z \in X$ 是 f 的一个正则扩张不动点。称 $x \in X$ 是关于 z 的一个同宿点, 如果 $x \in W_{\text{loc}}^u(z)$, $x \neq z$, 且存在 $n \geq 1$, 使得 $f^n(x) = z$ 。

(4. a) 一个同宿轨道 (由同宿点 x , 向后轨道 $\{f^{-j}(x)\}_{j=1}^{-\infty}$ 及向前轨道 $\{f^j(x)\}_{j=1}^{+\infty}$ 构成) 称为非退化的, 如果对同宿轨道上每一点 x_0 均存在正常数 r_1 与 μ_1 , 使得

$$d(f(x), f(y)) \geq \mu_1 d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{r_1}(x_0).$$

(4. b) 一个同宿轨道称为是正则的, 如果对轨道上每一点 x_0 , 存在正常数 r_2 , 使得对每一个正常数 $r \leq r_2$, $f(x_0)$ 是 $f(B_r(x_0))$ 的内点。

注 9.1 设 $X = \mathbb{R}^n$ 。则:

(1) 若 z 为 f 在 $\bar{B}_{r^*}(z)$ 上的扩张不动点, 且 f 在 $\bar{B}_{r^*}(z)$ 上连续, 则 z 为 f 的正则扩张不动点。

(2) 设 z 为 f 的非退化返回扩张不动点, 相关的 x_0, m, r, r_0 及 μ 如定义 9.3 (2)。如果 f 在 $\bar{B}_r(z)$ 上连续且 f^m 在 $\bar{B}_{r_0}(x_0)$ 上连续, 则 z 为 f 的正则非退化返回扩张不动点。

(3) 如果 f 存在关于 z 的非退化同宿轨道 Γ , 且 f 在 Γ 上的每一点附近连续, 则 Γ 是正则非退化同宿轨道。

引理 9.3 设 (X, d) 是度量空间, z 为映射 $f: X \rightarrow X$ 在 $\bar{B}_{r^*}(z)$ 上的一个正则扩张不动点。若 f 在 $\bar{B}_{r^*}(z)$ 上连续, 则存在一个正常数 $r_0 \leq r^*$, 使得对每一正常数

$r \leq r_0$, $f(\bar{B}_r(z))$ 是闭集, $f(B_r(z))$ 是开集, 且有

$$f(\bar{B}_r(z)) \supset \bar{B}_r(z), \quad f(B_r(z)) \supset B_r(z).$$

定理 9.3 设 (X, d) 是完备度量空间, $f: X \rightarrow X$ 是映射。又设

(1) f 有一个正则非退化返回扩张不动点 $z \in X$, 即存在正常数 r_1 和 $\lambda_1 > 1$, 使得 $f(B_{r_1}(z))$ 是开集,

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda_1 d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{r_1}(z),$$

并且存在一点 $x_0 \in B_{r_1}(z)$, $x_0 \neq z$, 和正整数 m 以及正常数 δ_1, γ , 使得

$$f^m(x_0) = z, B_{\delta_1}(x_0) \subset B_{r_1}(z),$$

z 为 $f^m(B_{\delta_1}(x_0))$ 的内点, 且

$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq \gamma d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{\delta_1}(x_0).$$

(2) 存在正常数 μ_1, μ_2 使得

$$d(f(x), f(y)) \leq \mu_1 d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{r_1}(z),$$

$$d(f^m(x), f^m(y)) \leq \mu_2 d(x, y), \quad \forall x, y \in \bar{B}_{\delta_1}(x_0).$$

进一步, 假设 f 在 $\bar{B}_{r_1}(z)$ 上连续, f^m 在 $\bar{B}_{\delta_1}(x_0)$ 上连续。则对 z 的每一个邻域 U , 存在正整数 $n > m$ 和 Cantor 集 $\Lambda \subset U$, 使得 $f^n: \Lambda \rightarrow \Lambda$ 拓扑共轭于符号动力系统 $\sigma: \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ 。从而 f^n 在 Λ 上在 Devaney 意义下是混沌的。

注 9.2 定理 9.3 推广了有限维情形的相关结果(一维[Devaney, 1987], 高维[Chen et al., 1998d])。

定理 9.4 设 (X, d) 为度量空间且任意有界闭集是紧的。若 $f: X \rightarrow X$ 满足定理 9.3 的条件(1), 则定理 9.3 结论成立。

下面介绍一般 Banach 空间上混沌的一个判定定理[Shi & Chen, 2005a]。

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, $L: X \rightarrow X$ 为线性映射, 并定义

$$\|L\|^0 = \inf\{\|Lx\| : x \in X, \|x\| = 1\}. \quad (9.5)$$

定理 9.5 设映射 $f: X \rightarrow X$ 有一不动点 $z \in X$, 并假设:

(1) f 在 z 的某邻域内 Frechét 连续可微, $Df(z)$ 是可逆线性映射, 且满足

$$\|Df(z)\|^0 > 1.$$

(2) f 存在关于 z 的同宿轨道 Γ 且 f 在 Γ 上的任一点 x 的某邻域内连续可微, $Df(x)$ 是可逆线性映射, 且满足

$$\|Df(x)\|^0 > 0,$$

则对 z 的每一个邻域 U , 存在正整数 k 和一个 Cantor 集 $\Lambda \subset U$, 使得 $f^k: \Lambda \rightarrow \Lambda$ 与符号动力系统 $\sigma: \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ 拓扑共轭。从而 f^n 在 Λ 上在 Devaney 意义下是混沌的。

简言之, 该定理指出, 正则的非退化同宿轨道产生混沌。

下面给出 $\mathcal{R}^n$ 上的两个混沌判定定理。

定理 9.6 设 $z \in \mathbb{R}^n$ 为映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的一个不动点, 并假设:

(1) f 在 z 的某邻域内连续可微且 $Df(z)$ 的所有特征值之绝对值大于 1, 从而, 存在一个正常数 r 和 $\mathbb{R}^n$ 的一个范数 $\|\cdot\|$, 使得 f 在范数 $\|\cdot\|$ 之下在 $\bar{B}_r(z)$ 上扩张;

(2) z 为 f 的一个返回扩张不动点, 即存在点 $x_0 \in B_r(z)$, $x_0 \neq z$, 和正整数 m , 使得 $f^m(x_0) = z$, 且 f 分别在 $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ 的某邻域内连续可微, 并满足 $\det Df(x_j) \neq 0, 0 \leq j \leq m-1$, 其中 $x_j = f(x_{j-1}), 0 \leq j \leq m-1$ 。

则定理 9.5 的结论成立。

简言之, 该定理指出, 正则的非退化返回扩张不动点产生混沌。

依据 Marotto 定理和定理 9.6 的证明 [Shi & Chen, 2004b], 容易推得: 如果定理 9.6 的所有假设都满足, 那么 Marotto 定理的结论成立。此结论可认为是 Marotto 定理的一个修正定理。现将其总结如下。

定理 9.7 (修正的 Marotto 定理) 设映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有一个不动点 $z \in \mathbb{R}^n$ 。如果定理 9.6 的假设 (1) 和 (2) 均满足, 则 Marotto 定理的结果成立。

注 9.3 定理 9.7 的条件在以下两个方面比原来 Marotto [1978] 给出的条件, 以及后人 [Lin, et al., 2002; Li & Chen, 2003] 给出的条件要弱:

(1) 可微性条件: 定理 9.7 要求 f 在 z 和 $x_j, 0 \leq j \leq m-1$, 附近连续可微, 而 Marotto 定理要求 f 在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上连续可微;

(2) $Df(z)$ 特征值之条件: 定理 9.7 要求 $Df(z)$ 的所有特征值之绝对值大于 1, 而文献 [Lin, et al., 2002; Li & Chen, 2003] 则要求 $(Df(z))^T Df(z)$ 的所有特征值大于 1。

9.3 连续映射生成离散动力系统的混沌化

考虑离散动力系统

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad (9.6)$$

式中, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^m$ 。目标是设计一个控制输入序列 $\{u_n\}$ 使得受控系统

$$x_{n+1} = f(x_n) + u_n, \quad n \geq 0, \quad (9.7)$$

呈现 Devaney 意义下的混沌 [Shi & Chen, 2005b]。假定控制器具有如下形式

$$u_n = \mu g(x_n), \quad (9.8)$$

式中, $\mu = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}, \mu_j > 0 (1 \leq j \leq m)$ 是常参数, 映射 $g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。记 $F_\mu(x) = f(x) + \mu g(x)$ 。

首先介绍一维离散动力系统的混沌化。

定理 9.8 设 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为映射, 其中 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间。又设存在常数 a ,

p, q , 及 $b, a < p < q < b$, 使得 $V_1 = [a, p]$ 和 $V_2 = [q, b]$ 为 I 的子区间, 并且 f 和 g 满足下述条件:

(1) f, g 在 $V_1 \cup V_2$ 上连续;

(2) f, g 在 V_1 和 V_2 上分别有相同的单调性, 且 g 在 V_1 和 V_2 上均为严格单调;

(3) $g(a)g(p) < 0, g(q)g(b) < 0$;

(4) 存在正常数 δ 使得

$$|g(x) - g(y)| \geq \delta |x - y|, \quad \forall x, y \in V_1, \quad \forall x, y \in V_2.$$

则存在常数 $\mu_0 > 0$, 对每一个 $\mu > \mu_0$, 存在 Cantor 集 $\Lambda_\mu \subset V_1 \cup V_2$, 使得 $F_\mu: \Lambda_\mu \rightarrow \Lambda_\mu$ 与符号动力系统 $\sigma: \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ 拓扑共轭。从而对每个 $\mu > \mu_0$, F_μ 在 Λ_μ 上在 Devaney 意义下是混沌的。

推论 9.1 设 $f, g: I \rightarrow R$ 为映射, 其中 I 是 R 的一个区间。又设存在常数 a, p, q , 及 $b, a < p < q < b$, 使得 $V_1 = [a, p]$ 和 $V_2 = [q, b]$ 为 I 的子区间, 并且 f 和 g 满足下述条件:

(1) f, g 在 $V_1 \cup V_2$ 上连续可微;

(2) $g'(x) \neq 0, f'(x)g'(x) \geq 0, \forall x \in V_1 \cup V_2$;

(3) $g(a)g(p) < 0, g(q)g(b) < 0$ 。

则定理 9.8 的所有结论成立。

根据上面的结果容易看出, 控制器对应的映射 g 可以是许多简单函数, 如在 V_1 和 V_2 上为线性函数、二次函数、正弦函数等。例如, 考虑离散系统

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

式中

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易见 f 在 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$ 上连续可微, 且导数

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在 $[-1, 0)$ 和 $(0, 1]$ 上连续, $x=0$ 是 f 在 $[-1, 1]$ 上的一个不动点。但是, f 在 $x=0$ 处不可微, 而且 f 在 $x=0$ 附近振动。因此, 前面几章介绍的混沌化格式对该系统均不适用。然而, 利用推论 9.1 可以构造出很简单的控制器使得受控系统变为混沌。

下面介绍高维离散动力系统的混沌化。

定理 9.9 设 $f, g: D \rightarrow \mathcal{R}^m$ 为映射, 其中 D 是 $\mathcal{R}^m$ 的一个区域。又设存在两个

不相交的矩形区域

$$V_1 = [a_1, p_1] \times [a_2, p_2] \times \cdots \times [a_m, p_m],$$

$$V_2 = [q_1, b_1] \times [q_2, b_2] \times \cdots \times [q_m, b_m] \subset D,$$

使得 f 和 g 满足下述条件:

(1) f, g 在 $V_1 \cup V_2$ 上连续;

(2) 存在正常数 λ 和 δ 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V_1, \forall x, y \in V_2,$$

$$\|g(x) - g(y)\| \geq \delta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V_1, \forall x, y \in V_2,$$

式中 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的 Euclid 范数;

(3) 对 $1 \leq j \leq m$ 及任意 $x \in V_1, g_j(x) < 0$, 当 $x_j = a_j$; 而 $g_j(x) > 0$, 当 $x_j = p_j$; 任意 $x \in V_2, g_j(x) > 0$, 当 $x_j = q_j$; 而 $g_j(x) < 0$, 当 $x_j = b_j$; 这里 $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)^\top, x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^\top$ 。

则存在常数 $\mu_0 > 0$, 对每一个 $\mu_j > \mu_0, 1 \leq j \leq m$, 存在 Cantor 集 $\Lambda_\mu \subset V_1 \cup V_2$, 使得 $F_\mu: \Lambda_\mu \rightarrow \Lambda_\mu$ 与符号动力系统 $\sigma: \Sigma_2^+ \rightarrow \Sigma_2^+$ 拓扑共轭。从而对每个 $\mu_j > \mu_0, 1 \leq j \leq m, F_\mu$ 在 Λ_μ 上在 Devaney 意义下是混沌的。

类似地, 控制器对应的映射 g 可以是许多简单 m -维向量值函数, 如在 V_1 和 V_2 上为线性函数和正弦函数, 甚至在每一维上可以是单变量状态反馈函数。

记

$$Dg(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \begin{pmatrix} g_{1,x_1}(\xi_1) & g_{1,x_2}(\xi_1) & \cdots & g_{1,x_m}(\xi_1) \\ g_{2,x_1}(\xi_2) & g_{2,x_2}(\xi_2) & \cdots & g_{2,x_m}(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,x_1}(\xi_m) & g_{m,x_2}(\xi_m) & \cdots & g_{m,x_m}(\xi_m) \end{pmatrix}$$

式中, $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)^\top$ 在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}^m$ 处可微,

$$g_{i,x_j}(\xi_j) = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{x=\xi_j}, i, j = 1, \dots, m.$$

当 $\xi_i = \xi, 1 \leq i \leq m$ 时, $Dg(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ 为 g 在 ξ 处的 Jacobi 矩阵。

推论 9.2 设 $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为映射, 其中 D 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个区域。又设存在两个不相交的矩形区域

$$V_1 = [a_1, p_1] \times [a_2, p_2] \times \cdots \times [a_m, p_m],$$

$$V_2 = [q_1, b_1] \times [q_2, b_2] \times \cdots \times [q_m, b_m] \subset D,$$

使得 f 和 g 满足下述条件:

(1) f, g 在 $V_1 \cup V_2$ 上连续可微;

(2) 对任意 $\xi_i \in V_1, 1 \leq i \leq m$ 及任意 $\xi_i \in V_2, 1 \leq i \leq m$, 有

$$\det Dg(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \neq 0;$$

(3) 对每个 $j, 1 \leq j \leq m, g_j(x)$ 在矩形区域 V_1 和 V_2 的每一面上均不变号, 且在两个相对面上它们的符号相反, 即

$$\operatorname{sgn} g_j(x) \operatorname{sgn} g_j(y) < 0, \quad x \in S_{ij}, \quad y \in \bar{S}_{ij}, i = 1, 2; \quad 1 \leq j \leq m,$$

式中

$$S_{1j} = \{x \in V_1 : x_j = a_j\}, \quad \bar{S}_{1j} = \{x \in V_1 : x_j = p_j\},$$

$$S_{2j} = \{x \in V_2 : x_j = q_j\}, \quad \bar{S}_{2j} = \{x \in V_2 : x_j = b_j\},$$

则定理 9.9 的所有结论成立。

9.4 非线性偏微分系统的混沌及其生成

对于非线性偏微分方程的研究已经有很长的历史, 特别是著名的 Navier-Stokes 方程中的湍流现象一般都被认为是混沌动力行为。偏微分方程所描述的分布参数系统的边界控制是控制理论中的一个重要分支, 其出发点及应用范围, 包括通过控制管壁的温度而改变管中液流或气流的物理状态, 通过控制薄膜周边的振动条件而改变薄膜本身的波动, 通过控制喷嘴的大小和形状而改变气流或液流喷射的动力学性态, 等等。人们发现, 即使在一个线性波动方程中加入适当的边界控制, 也能使它产生复杂的动力学现象, 包括混沌行为。这一方面有代表性的是陈巩等人的研究工作 [Chen *et al.*, 1996, 1998a, b, c, d, 2001, 2002a, b, 2003, 2004]。

考虑一个最简单的一维线性波动方程

$$w_{tt}(x, t) - w_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (9.9)$$

及其初始条件

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (9.10)$$

和边界条件(右端)

$$w_x(1, t) = \alpha w_t(1, t) - \beta w_t^3(1, t), \quad t > 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (9.11)$$

及(左端)

$$w_t(0, t) = -\eta w_x(0, t), \quad t > 0, \quad \eta > 0 (\eta \neq 1). \quad (9.12)$$

这里

$$w_t(x, t) \equiv \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}, \quad w_{tt}(x, t) \equiv \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2},$$

等等。右端的边界条件实质上为一个 van der Pol 振子:

$$\ddot{x} - (\alpha - 3\beta x^2)\dot{x} + \gamma x = 0,$$

左端的边界条件是指负的作用力在端点 $x=0$ 处反馈到波速上去。

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\dot{w}_x^2(x, t) + \dot{w}_t^2(x, t)] dx \quad (9.13)$$

于是有

$$\frac{d}{dt}E(t) = \eta \dot{w}_x^2(0, t) + \dot{w}_t^2(1, t) [\alpha - \beta \dot{w}_t^2(1, t)] \quad (9.14)$$

因为 $\eta \dot{w}_x^2(0, t) \geq 0$, 可见左端边界条件是给定(控制)能量的输入以激励波动的传播。另一方面,

$$\dot{w}_t^2(1, t) [\alpha - \beta \dot{w}_t^2(1, t)] \begin{cases} \geq 0, & |\dot{w}_t(1, t)| \leq \sqrt{\alpha/\beta}, \\ < 0, & |\dot{w}_t(1, t)| > \sqrt{\alpha/\beta}. \end{cases} \quad (9.15)$$

因此,右端边界条件是保证系统有自调整的性能,即当波速 $|\dot{w}_t(1, t)|$ 增大时系统的能量自动减小(因为这时 $\frac{d}{dt}E(t) < 0$),而当波速 $|\dot{w}_t(1, t)|$ 减小时系统的能量自动增大(因为这时 $\frac{d}{dt}E(t) \geq 0$)。

引入记号

$$u(x, t) \equiv \frac{1}{2} [\dot{w}_x(x, t) + \dot{w}_t(x, t)], \quad (9.16)$$

$$v(x, t) \equiv \frac{1}{2} [\dot{w}_x(x, t) - \dot{w}_t(x, t)], \quad (9.17)$$

则它们满足如下的一阶双曲线性方程组:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (9.18)$$

其初始条件为当 $0 < x < 1$,

$$u(x, 0) = u_0(x) = \frac{1}{2} [\dot{w}'_0(x) + \dot{w}_1(x)], \quad (9.19)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) = \frac{1}{2} [\dot{w}'_0(x) - \dot{w}_1(x)],$$

其边界条件为

$$u(1, t) = F_{\alpha, \beta}(v(1, t)), \quad t > 0. \quad (9.20)$$

其中隐函数 $F_{\alpha, \beta}$ 由下式定义(边界控制器)

$$\beta(u - v)^3 + (1 - \alpha)(u - v) + 2v = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (9.21)$$

以及

$$v(0, t) \equiv G_\eta(u(0, t)) = \frac{1 + \eta}{1 - \eta} u(0, t), \quad t > 0. \quad (9.22)$$

上述两式分别描述了在右端($x=1$)和左端($x=0$)处波动的反射传播,如图 9.1 所

示。

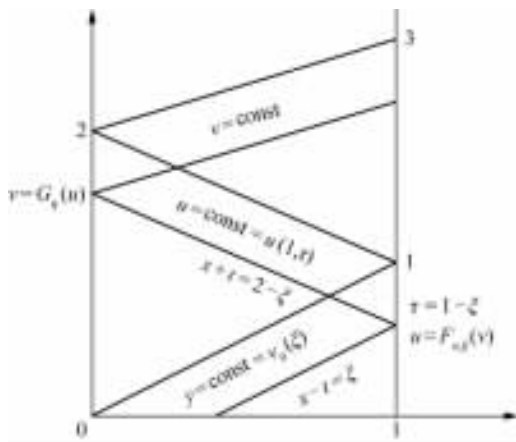


图 9.1 反射过程示意图

下面用 $F \equiv F_{\alpha, \beta}$ 和 $G \equiv G_{\eta}$ 并通过它们的复合 $F \circ G$ 来表示函数 u 和 v

$$u(x, t) = \begin{cases} (F \circ G)^k(u_0(x + \tau)), & \tau \leq 1 - x, \\ G^{-1} \circ (G \circ F)^{k+1}(v_0(2 - x - \tau)), & 1 - x < \tau \leq 2 - x, \\ (G \circ F)^{k+1}(u_0(\tau + x - 2)), & 2 - x < \tau \leq 2; \end{cases} \quad (9.23)$$

$$v(x, t) = \begin{cases} (G \circ F)^k(v_0(x - \tau)), & \tau \leq x, \\ G \circ (F \circ G)^k(u_0(\tau - x)), & x < \tau \leq 1 + x, \\ (G \circ F)^{k+1}(v_0(2 + x - \tau)), & 1 + x < \tau \leq 2. \end{cases} \quad (9.24)$$

其中 $G \circ F$ 是上述偏微分系统的 Poincare 截面。容易看出, 如果映射 $F \circ G$ 或 $G \circ F$ 是混沌的, 那么行波解 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 也是混沌的。以下, 混沌是在这个意义下来定义和描述的。注意映射 $F \circ G$ 和 $G \circ F$ 是拓扑共轭的:

$$F \circ G = G^{-1} \circ (G \circ F) \circ G,$$

只要 F 取为定义它的三次代数方程(9.21)的光滑解。

下面讨论基本解的混沌振动。

注意到, 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 对任意 $v \in R$ 都有唯一的 $u \in R$ 满足 $u = F_{\alpha, \beta}(v)$ 。作为一个例子, 当 $\alpha = 0.5, \beta = 1, \eta = 0.552$ 时, 映射 $G \circ F$ 如图 9.2 所示, 其中

$$\pm I_1 = v \text{ 轴上的非零截点 } (I_1 \equiv \sqrt{1 + (\alpha/\beta)}),$$

$$\pm v_c = \text{局部转折点 } (v_c \equiv \frac{2 - \alpha}{3} \sqrt{(1 + \alpha)/(3\beta)}),$$

$$\pm M = \text{局部极值 } (M \equiv \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \frac{1 + \alpha}{3} \sqrt{1 + (\alpha/3\beta)}),$$

$$\pm I_2 = \text{与直线 } u - v = 0 \text{ 相交的 } v \text{ 值},$$

$[-I_2, I_2] \times [-I_2, I_2]$ 在 $M \leq I_2$ 时是不变区域。

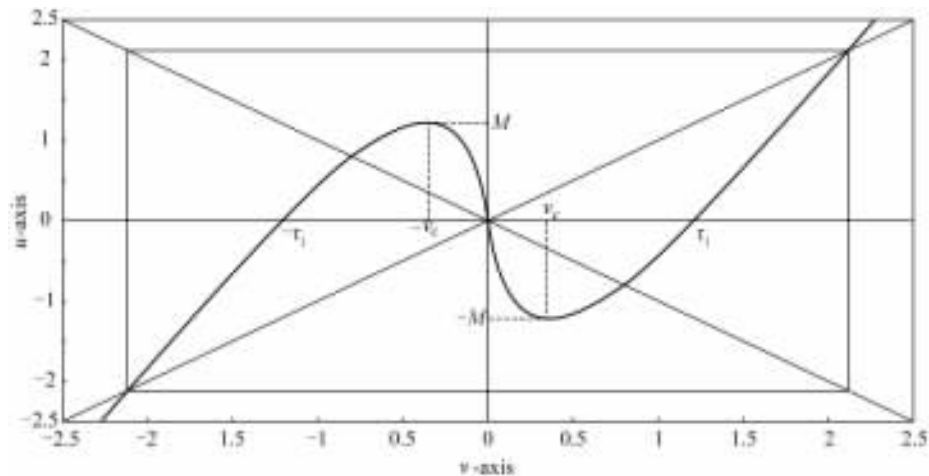


图 9.2 映射 $u = G \circ F(v)$, $\alpha = 0.5, \beta = 1, \eta = 0.552$

另外, 映射 $G \circ F$ 有如下的一些动力学行为 (固定 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $\beta > 0$, 变动 $\eta \in (0, 1)$):

(1) 倍周期分岔。

记 $h(v, \eta) \equiv -G_\eta \circ F(v)$, 并令

$$v_0(\eta) \equiv \frac{\eta(\eta+1)}{2} \sqrt{\frac{\alpha+\eta}{\beta}}$$

为 h 的不动点, 满足 $h(v_0(\eta), \eta) = v_0(\eta)$ 。那么, 代数方程

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\alpha\eta}{3\beta\eta}} \frac{1+(3-2\alpha)\eta}{3\eta} = \frac{1+\eta}{2} \sqrt{\frac{\alpha+\eta}{\beta}} \quad (9.25)$$

有唯一解

$$\eta = \eta_0 : 0 < \eta_0 < \eta_H \equiv \frac{1 - \frac{1+\alpha}{3\sqrt{3}}}{1 + \frac{1+\alpha}{3\sqrt{3}}},$$

满足

$$\frac{\partial}{\partial v} h(v_0, \eta_0) = -1.$$

因此, 可以观察到映射 $G \circ F$ 的倍周期分岔, 如图 9.3 所示。

(2) 同宿轨道。

如果 $\eta_H \leq \eta < 1$, 那么图 9.2 中有 $M \geq I_1$, 导致到映射 $G \circ F$ 的排斥性不动点 O 上有同宿轨道, 如图 9.4 所示。这时, 映射 $G \circ F$ 在区间 $[-I_2, I_2]$ 内有 Cantor 型的

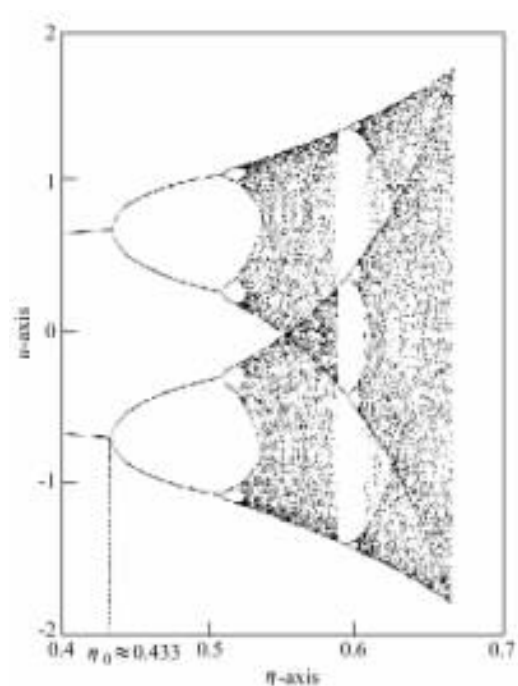


图 9.3 倍周期分岔图($\alpha=0.5, \beta=1, \eta \in [0.4, 2/3]$)

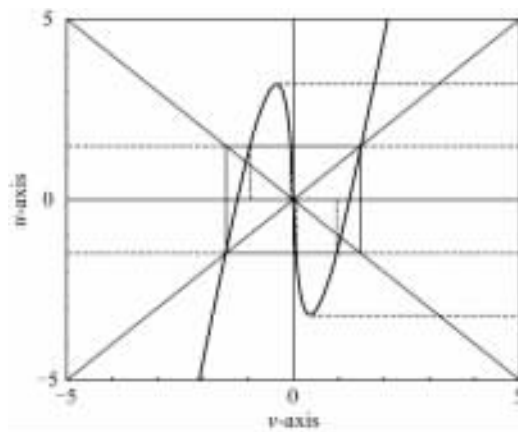


图 9.4 映射 $G \circ F, \alpha=0.5, \beta=1, \eta=0.8 (M > I_2)$

不变集:

$$\Lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G \circ F)^k([-I_2, I_2])$$

(3) 一个数值例子。

取

$$\alpha = 0.5, \beta = 1, \eta = 0.525 \approx \eta_H, w_0(x) = 0.2\sin(\pi x/2), \\ w_1(x) = 0.2\sin(\pi x), x \in [0,1],$$

则偏微分系统的行波解 (u, v) 产生混沌行为,如图 9.5 所示。

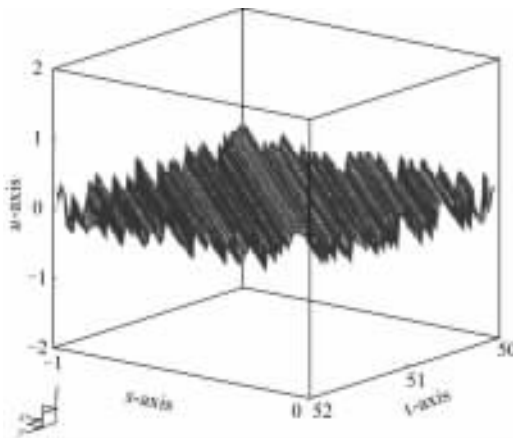


图 9.5 行波解 (u, v) 的混沌行为 $(x \in [0,1], t \in [50, 52])$

下面讨论带有滞后的解的混沌振动。

注意到,当 $\alpha > 1$ 时,映射 $u = F_{\alpha, \beta}(v)$ 不再是单值的,因而记为 $u \in F_{\alpha, \beta}(v)$,如图 9.6 所示,其中 $u = G_\eta \circ F_{\alpha, \beta}(v)$ 并且 $0 < \eta < 1$,图中 H 表示滞后。

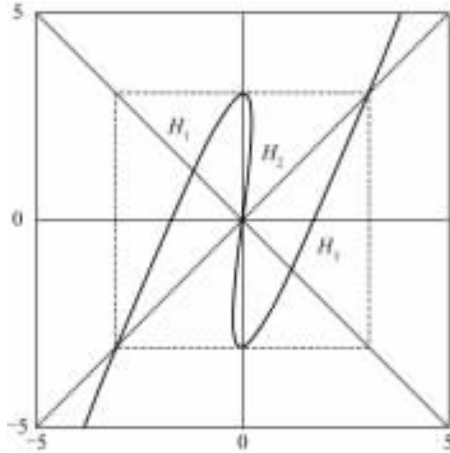


图 9.6 多值映射 $u = G_\eta \circ F_{\alpha, \beta}(v)$, $\eta = 0.5, \alpha = 2, \beta = 1$

1. 一个理论结果

定理 9.10[Chen *et al.*, 1998a] 令 $0 < \eta < 1, \alpha > 1, \beta > 0$ 满足

$$s \equiv \frac{1+\eta}{1-\eta} \frac{1+\alpha}{3} \sqrt{\frac{1+\alpha}{3\beta}} \leq \frac{1+\eta}{2\eta} \sqrt{\frac{1+\alpha\eta}{\beta\eta}}, \quad (9.26)$$

又定义

$$\theta_0 = -v^* \equiv \frac{\alpha-1}{3} \sqrt{\frac{\alpha-1}{3\beta}},$$

并令

$$\theta_{j+1} = H_3^{-1}(\theta_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

式中 H_3 如图 9.6 所示。如果对某个 $j \geq 1$, 有 $\theta_{j-1} < v^*$ 并且 $\theta_j, \theta_{j+1}, \theta_{j+2} \in [v^*, s]$, 那么映射 $u = G_\eta \circ F_{\alpha, \beta}(v)$ 在区间 $[-s, s]$ 上是混沌的。

2. 一个数值例子

取 $\eta = 0.5, \alpha = 2, \beta = 1$, 以及

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_0(0) + x[u_0(1) - u_0(0)], \\ v_0(x) &= u_0^2(x) + bu_0(x) + c, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

式中

$$u_0(0) = 0.5, u_0(1) = H(v_0(1)), b = -0.3283, c = 1.4145,$$

从而 $v_0(0) = v_0(1) = 1.5$ 。这时, 假定 u_0 和 v_0 取相容数值, 便有

$$\begin{aligned} v^* &= 0.1925, \theta_0 = -0.1925, \theta_1 = 1.6461, \theta_2 = 2.4408, \\ \theta_3 &= 2.7710, \theta_4 = 2.9065, \dots, \lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j = 3, s = 3. \end{aligned}$$

因此, 定理 9.10 的全部条件满足, 解 (u, v) 为混沌的, 如图 9.7 所示。

在上述讨论中, 一维线性波动方程(9.9)只是一种最简单最自然的选择, 其相应的边界混沌化控制器(9.11)或(9.21)也只是一种常见的形式(van der Pol 振子)。显然, 不同的偏微分系统以及不同的混沌化控制器都是可能的, 其中对于一些别的系统已有了初步的研究[Chen *et al.*, 2002a, 2003b], 但大量的系统和控制手段还有待进一步探讨。特别是高维的偏微分或偏差分系统、带时滞的常微分或偏微分系统, 或一般形式下由非线性算子描述的泛函微分系统的混沌及其混沌化问题, 其研究工作实际上还未开始。然而, 在这方向上的研究工作的重要性和挑战性都是显而易见的。

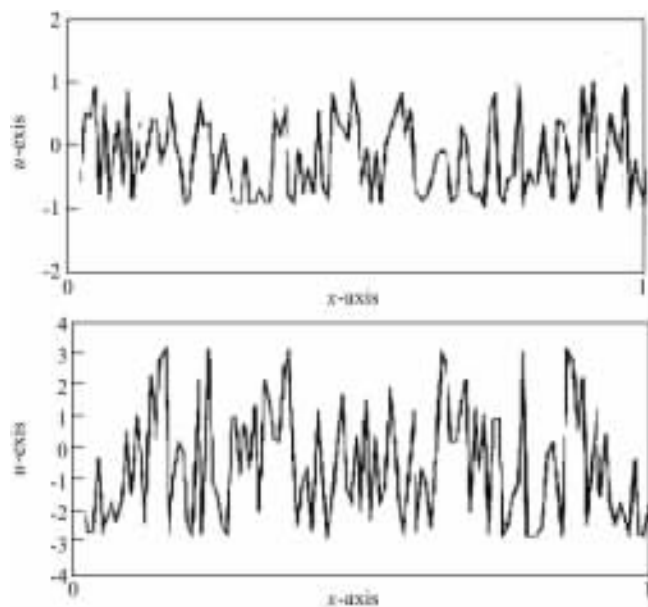


图 9.7 行波解 (u, v) 的混沌行为 $(0 < x \leq 1, t = 202)$

参考文献

- [1] Banks, J. , Brooks, J. , Cairns, G. , Davis, G. & Stacey, P. [1992], On Devaney's definition of chaos, *American Mathematical Monthly*, 99, 332—334
- [2] Chacon, R. [2001], Maintenance and suppression of chaos by weak harmonic perturbations: a unified view, *Phys. Rev. Lett.*, 86(9), 1737—1740
- [3] Chan, W. C. Y. & Tse, C. K. [1998], What form of control function can drive a discontinuous-mode boost converter to chaos via period-doubling? *Int. J. of Circ. Theory Appl.*, 26, 281—286
- [4] Chen, G. [1998], Chaos: control and anticontrol, *IEEE Circuits and Systems Society Newsletter*, March Issue, 1—5
- [5] Chen, G. ed. [1999], *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, CRC Press, USA
- [6] Chen, G. [2003], Chaotification via feedback: The discrete case, in *Chaos Control: Theory and Applications* (Chen G. & Yu X. , eds.), Springer-Verlag, Berlin, 159—178
- [7] Chen, G. & Dong, X. [1998], *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives, and Applications*, World Scientific Pub. Co. , Singapore
- [8] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [1996], Linear superposition of chaotic and orderly vibrations on two serially connected strings with a van der Pol joint, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 6, 1509—1527
- [9] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [1998a], Chaotic vibrations of the one-dimensional wave equation subject to a self-excitation boundary condition, Part I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350, 4265—4311
- [10] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [1998b], Ibid, Part II, Energy injection, period doubling and homoclinic orbits, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 8, 423—445
- [11] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [1998c], Ibid, Part III, Natural hysteresis memory effects, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 8, 447—470
- [12] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [1998d], Snapback repellers as a cause of chaotic vibration of the wave equation due to a van der Pol boundary condition and energy injection in the middle of the span, *J. Math. Phys.*, 39, 6459—6489
- [13] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [2002a], Nonisotropic spatiotemporal chaotic vibration of the wave equation due to mixing energy transport and a van der Pol boundary condition, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12, 535—559
- [14] Chen, G. , Hsu, S. B. , Zhou, J. [2002b], Analyzing the displacement terms memory

- effect to prove the chaotic vibration of the wave equation, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12, 965—981
- [15] Chen, G., Hsu, S. B., Zhou, J. [2003], Chaotic vibration of the wave equation with nonlinear feedback boundary control: Progress and open questions, in *Chaos Control: Theory and Application* (Chen, G. & Yu, X., eds.), Springer-Verlag, Berlin, 25—50
- [16] Chen, G., Huang, T. & Huang, Y. [2004], Chaotic behavior of interval maps and total variations of iterates, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 14(7), 2161—2186
- [17] Chen, G. & Lai, D. [1996], Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 6, 1341—1349
- [18] Chen, G. & Lai, D. [1997], Anticontrol of chaos via feedback, *Proc. IEEE Conf. Decision and Control, San Diego, CA, Dec. 10—12*, pp. 367—372
- [19] Chen, G. & Lai, D. [1998], Feedback anticontrol of chaos, *Int. J. of Bifurc. Chaos*, 8, 1585—1590
- [20] Chen, G., Lasiecka, I. & Zhou, J. [2001], Unbounded growth of total variations of snapshots of the 1D linear wave equation due to the chaotic behavior of iterates of composite nonlinear boundary reflection relations, in *Advances in Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems* (Chen, G., Lasiecka, I. & Zhou, J., eds.), Mareel Dekker, USA, 15—42
- [21] Chen, G. & Yang, L. [2003], Chaotifying a continuous-time system near a stable limit cycle, *Chaos, Solitons & Fractals*, 15, 245—254
- [22] Chen, G., Yang, L. & Liu, Z. R. [2002], Anti-control of chaos for continuous-time systems, *IEICE Transactions: Fundamentals*, E85—A, 1333—1335
- [23] Chen, G. & Yu, X., eds. [2003], *Chaos Control: Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin
- [24] Chen, H. K. & Lee, C. [2004], Anti-control of chaos in rigid body motion, *Chaos, Solitons and Fractals*, 21, 957—965
- [25] Chen, M., Chen, Z. & Chen, G. [1997], *Approximate Solutions of Operator Equations*, World Scientific, Singapore
- [26] Cheng, H. & Li, X. B. [2000], Partial encryption of compressed images and videos, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 48(9): 2439—2451
- [27] Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. & Zhong, G. Q. [1993], A universal circuit for studying and generating chaos, Part I + II, *IEEE Trans. on Circ. Syst. — I*, 40 (10), 732—761
- [28] Dachsel, F. & Schwarz, W. [2001], Chaos and cryptography, *IEEE Trans. on Circ. Syst. — I*, 48(12): 1498—1509
- [29] Devaney, R. L. [1987], *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York

- [30] Devaney, R. L. [2003], *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, New York
- [31] Eichhorn, R., Linz, S. J. & Hanggi, P. [1998], Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows, *Phys. Rev. E*, 58, 7151—7164
- [32] Freeman, W. J. [1995], Chaos in the brain: Possible roles in biological intelligence, *Int. J. of Intell. Syst.*, 10, 71—88
- [33] Fridrich, J. [1998], Symmetric ciphers based on two-dimensional chaotic maps, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 8(6): 1259—1284
- [34] Glendinning, P. [1994], *Stability, Instability and Chaos*, Cambridge University Press, UK
- [35] Golub, G. H. & van Loan, C. F. [1983], *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, USA
- [36] Hao, B. — L. & Zheng, W. — M. [1998], *Applied Symbolic Dynamics and Chaos*, World Scientific Pub. Co., Singapore
- [37] Huang, W. & Ye, X. [2002], Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos, *Topology and its Applications*, 117: 259—272
- [38] Hirsch, M. W. & Smale, S. [1974], *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York
- [39] Holzfuss, J. & Parlitz, U. [1991], Lyapunov exponents from time series, in *Lyapunov Exponents*, (Arnold, L., Crauel, H. & Eckmann, J.-P., eds.) Springer-Verlag, New York, 263—270
- [40] In, V., Spano, M. L. & Ding M. [1998], Maintaining chaos in high dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 80(4), 700—703
- [41] Isidori, A. [1995], *Nonlinear Control Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin
- [42] Isidori, A. [1999], *Nonlinear Control Systems II*, Springer-Verlag, Berlin
- [43] Kailath, T. [1980], *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA
- [44] Kennedy, J. & Yorke, J. A. [2001], Topological horseshoes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353: 2513—2530
- [45] Khalil, H. K. [1996], *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Macmillan, New York
- [46] Kocarev, L. & Jakimovski, G. [2001], Chaos and cryptography: From chaotic maps to encryption algorithms, *IEEE Trans. on Circ. Syst. — I*, 48(2): 163—169
- [47] Lai, D. & Chen, G. [2000], Distribution of controlled Lyapunov exponents: A statistical simulation study, *J. of Comput. Stat. Data Anal.*, 33, 69—77
- [48] Lai, D. & Chen, G. [2003], Making a discrete dynamical system chaotic: Theoretical results and numerical simulations, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 13(11), 3437—3442
- [49] Lai, D. & Chen, G. [2004], Chaotification of discrete-time dynamical systems: An

extension of the Chen-Lai algorithm, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 15(1), 109—117

- [50] Li, C. P. & Chen, G. [2003], On the Marotto-Li-Chen theorem and its application to chaotification of multi-dimensional discrete dynamical systems, *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(4), 807—817
- [51] Li, S., Chen, G. & Mou, X. [2005], On the dynamical degradation of digital piecewise linear chaotic maps: A new series of dynamical indicators and their applications
- [52] Li, S., Chen, G. & Zheng, X. [2004], Chaos-based encryption for digital images and videos, Chapter 4 in *Multimedia Encryption Handbook*, (Furht, B. & Kirovski, D., eds.), CRC Press, USA
- [53] Li, T. Y. & Yorke, J. A. [1975], Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, 82, 481—485
- [54] Li, X., Chen, Z., Yuan, Z. & Chen, G. [2001], Generating chaos by an Elman network, *IEEE Trans. on Circ. Syst.—I*, 48(9), 1126—1131
- [55] Li, X., Chen, G., Chen, Z. & Yuan, Z. [2002], Chaotifying linear Elman networks, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 13(5), 1193—1199
- [56] Li, Z., Park, J. B., Chen, G. & Joo, Y. H. [2001], Anticontrol of chaos for discrete TS fuzzy systems, *IEEE Trans. on Circ. Syst.—I*, 49(2), 249—253
- [57] Lin, W., Ruan, J. & Zhao, W. [2002], On the mathematical clarification of the snap-back-repeller in high-dimensional system and chaos in a discrete neural network model, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12(5), 1129—1139
- [58] Linz, S. J. & Sprott, J. C. [1999], Elementary chaotic flows, *Phys. Lett. A*, 259, 240—245
- [59] Lü, J., Yu, X. & Chen, G. [2003], Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction: A switching piecewise-linear control approach, *IEEE Trans. on Circ. Syst.—I*, 50(2), 198—207
- [60] Lü, J., Zhou, T. S., Chen, G. & Yang, X. S. [2002], Generating chaos with a switching piecewise-linear controller, *Chaos*, 12, 344—349, June 2002
- [61] Mao, Y. & Chen, G. [2004], Chaos-based image encryption, in *Handbook of Computational Geometry for Pattern Recognition, Computer Vision, Neural Computing and Robotics*, (Bayro-Corrochano, E., ed.), Springer, Berlin
- [62] Marotto, F. R. [1978], Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$, *J. of Math. Anal. Appl.*, 63, 199—223
- [63] Oseledec, V. I. [1968], A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19, 197—231
- [64] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1990], Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1196—1199
- [65] Rössler, O. E. [1979], Continuous chaos-four prototype equations, *Ann. (N. Y.)*

- [66] Scharinger, J. [1998], Fast encryption of image data using chaotic Kolmogorov flows. *J. Electronic Imaging* , 7(2), 318—325
- [67] Schiff, S. J. , Jerger, K. , Duong, D. H. , Chang, T. , Spano, M. L. & Ditto, W. L. [1994], Controlling chaos in the brain, *Nature* , 363, 411—417
- [68] Shannon, C. E. [1949], Communication theory of secrecy systems, *The Bell System Technical Journal* , 28(4), 656—715
- [69] Shi, Y. M. & Chen, G. [2004a], Chaos of discrete dynamical systems in complete metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* , 22, 555—571
- [70] Shi, Y. M. & Chen, G. [2005a], Discrete chaos in Banach spaces, *Science in China, Series A (中国科学 A 辑)* , 48(2), 222—238
- [71] Shi, Y. M. & Chen, G. [2005b], Chaotification of discrete dynamical systems governed by continuous maps, *Int. J. of Bifurc. Chaos.* , 15(2), 547—555
- [72] SIAM [1988], Future directions in control theory: A mathematical perspective, *Report of the Panel, Chaired by W. H. Fleming, SIAM Pub.* , 50—51
- [73] Sprott, J. C. [1994], Some simple chaotic flows, *Phys. Rev. E* , 50, R647—R650
- [74] Sprott, J. C. [1997a], Some simple chaotic jerk functions, *Amer. J. of Phys.* , 65, 537—543
- [75] Sprott, J. C. [1997b], Simplest dissipative chaotic flow, *Phys. Lett. A* , 228, 271—274
- [76] Sprott, J. C. [2000], A new class of chaotic circuit, *Phys. Lett. A* , 266, 19—23
- [77] Starkov, K. & Chen, G. [2004], Chaotification of polynomial continuous-time systems and rational normal forms, *Chaos, Solitons & Fractals* , 22, 849—856
- [78] Takens, F. [1981], Detecting strange attractors in turbulence, in *Dynamical Systems and Turbulence* , (Rand, D & Young, L. S. , eds.), *Lecture Notes in Mathematics* , 898, Springer, Berlin, 366—381
- [79] Tamasevicius, A. , Namajunas, A. & Cenys, A. [1996], Simple 4D chaotic oscillators, *Electron Lett.* , 32, 957—958
- [80] Tang, L. [1996], Methods for encrypting and decrypting MPEG video data efficiently, *Proc. ACM Multimedia* 96, 219—229
- [81] Touhey, P. [1997], Yet another definition of chaos, *Amer. Math. Monthly* , May 1997, 411—414
- [82] Tse, C. K. [1994], Flip bifurcation and chaos in three-state boost switching regulators, *IEEE Trans. on Circ. Sys.* —I, 41, 16—23
- [83] Uehara, T. , Safavi-Naini, R. & Ogunbona, P. [2000], Securing wavelet compression with random permutations, *IEEE Pacific Rim Conf. on Multimedia* , 332—335.
- [84] Vanecsek, A. & Celikovsky, S. [1996], *Control Systems: From Linear Analysis to Synthesis of Chaos* , Prentice-Hall, London

- [85] Wang, X. F. [2003], Generating chaos in continuous-time systems via feedback control, in *Chaos Control: Theory and Applications* (Chen, G. & Yu, X., eds.), Springer-Verlag, Berlin, 179—204
- [86] Wang, X. F. & Chen, G. [1999], On feedback anticontrol of chaos, *Int. J. of Bifur. Chaos* 9, 1435—1441
- [87] Wang, X. F. & Chen, G. [2000a], Yet another algorithm for chaotifying control of discrete chaos, *控制理论与应用*, 17(3):336—341
- [88] Wang, X. F. & Chen, G. [2000b], Chaotification via arbitrarily small feedback controls, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 10, 549—570
- [89] Wang, X. F. & Chen, G. [2000c], Chaotifying a stable map via smooth small-amplitude high-frequency feedback control, *Int. J. of Circ. Theory Appl.*, 28, 305—312
- [90] Wang, X. F. & Chen, G. [2000d], Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control, *IEEE Trans. on Circ. Sys.* —I, 47, 410—415
- [91] Wang, X. F. & Chen, G. [2001], Controlling bifurcation dynamics via chaotification, *Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, 692—697, Dec. 4—7, Florida, USA
- [92] Wang, X. F. & Chen, G. [2003], Generating topologically conjugate chaotic systems via feedback control, *IEEE Trans. on Circ. Syst.* —I, 50(6), 812—817
- [93] Wang, X. F., Chen, G. & Man, K. F. [2000], Global stabilization of nonchaotic systems using chaos, *Third Asian Control Conf.*, Shanghai, China
- [94] Wang, X. F., Chen, G. & Man, K. F. [2001a], Making a stable discrete-time system chaotic via small-amplitude output feedback, *Proc. of IEEE Int. Symp. on Circ. Syst.*, 3, 541—544, May 6—9, Sydney, Australia
- [95] Wang, X. F., Chen, G. & Man, K. F. [2001b], Making a continuous-time minimum-phase system chaotic by using time-delay feedback, *IEEE Trans. Circ. Syst.* — I, 48(5): 641—645
- [96] Wang, X. F., Chen, G. & Yu, X. [2000], Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback, *Chaos*, 10(4), 771—779
- [97] Wang, X. F., Zhong, G. Q., Tang, K—S, Man, K. F. & Liu, Z. F. [2001], Generating chaos in Chua's circuit via time-delay feedback, *IEEE Trans. on Circ. Syst.* — I, 48(9): 1151—1156
- [98] Wu, C. P. & Kuo C. C. J. [2000], Fast encryption methods for audiovisual data confidentiality, *Proc. SPIE*, 4209, 284—295
- [99] Yang, L., Liu, Z. R. & Chen, G. [2002], Chaotifying a continuous-time system via impulsive input, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12, 1121—1128
- [100] Yang, W., Ding, M., Mandell, A. J. & Ott, E. [1995], Preserving chaos: control strategies to preserve complex dynamics with potential relevance to biological disorders,

- Phys. Rev. E*, 51(1), 102—110
- [101] Yang, X-S. & Li, Q. [2002], Chaotic attractor in a simple switching control system, *Int. J. of Bifur. Chaos.*, 12, 2255—2256
- [102] Yang, X-S. & Tang, Y. [2004], Horseshoes in piecewise continuous maps, *Chaos, Solitons & Fractals*, 19, 841—845
- [103] Zhang, H. & Chen, G. [2004], Single-input multi-output state-feedback chaotification of general discrete systems, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 14(9), 3317—3324
- [104] Zheng, Y., Chen, G. & Liu, Z. [2003], On chaotification of discrete systems, *Int. J. of Bifur. Chaos.*, 13(11), 3443—3447
- [105] Zheng, Z., Lü, J., Zhou, T. Chen, G. & Zhang, S. [2004], Generating two simultaneously chaotic attractors with a switching piecewise-linear controller, *Chaos, Solitons & Fractals*, 20, 277—288
- [106] Zhou, T., Chen, G. & Yang, Q. [2004], A simple time-delay feedback anti-control method made rigorous, *Chaos*, 14(3), 662—668
- [107] 陈关荣[1997], 控制非线性动力系统的混沌现象, 控制理论与应用, 14(1): 1~6
- [108] 陈关荣, 吕金虎[2003], Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步, 北京: 科学出版社
- [109] 方锦清[2002], 驾驭混沌与发展高新技术, 北京: 原子能出版社
- [110] 冯登国, 吴文玲[2000], 分组密码的设计与分析, 北京: 清华大学出版社
- [111] 胡岗, 萧井华, 郑志刚[2000], 混沌控制, 上海: 上海科技教育出版社
- [112] 王光瑞, 于熙龄, 陈式刚[2001], 混沌的控制、同步与利用, 北京: 国防工业出版社
- [113] 汪小帆[1999], 陈氏吸引子——一个新的混沌吸引子, 控制理论与应用, 16: 779
- [114] 张化光, 王智良, 黄伟[2003], 混沌系统的控制理论, 沈阳: 东北大学出版社