

国家自然科学基金成果专著出版基金(50024036)专著  
国家自然科学基金(79400011、69974033、59979024)资助

# 大系统试验选优 理论和应用

——在复杂水利系统优化规划中的应用研究

程吉林 著

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书从数学模型、知识模型和试验选优理论相结合的角度出发,系统地介绍了适用于某些多维动态规划、大线性规划、复杂非线性规划和某些定性、模拟系统的试验选优方法以及在某些复杂水利系统优化规划中的应用实例。本书的理论方法和应用实例,基本上都是作者多年来的研究成果。

本书共分6章,除了第1、2章外,其他各章均有实例介绍,可供读者在研究和应用时参考。本书适合管理、水利专业的研究生和科技工作者阅读和参考。

# 前 言

大系统优化理论是系统科学领域的重要学术课题。近十年来,作者在汲取钱学森、J. S. Dyer 等人的大系统研究思想的基础上,采用数学模型、知识模型和试验选优理论相结合的方法,对某些大系统问题的优化方法进行了探索,并在某些复杂水利系统优化规划的应用中取得了较好的效果。

本书共分 6 章。第 1 章为绪论,对有关现行大系统理论和方法进行了综合评述。第 2 章介绍了大系统试验选优理论的思路并对试验选优的优良性开展了讨论。第 3 章介绍多维动态规划的广义拉氏方法和试验选优方法。对传统拉格朗日法引入松弛变量,在对松弛变量递推、检验的广义拉氏方法基础上,对拉格朗日乘子的试验选优,使多维问题转化为一维问题,从而使较多维数的某些动态规划问题的求解成为可能。这一章还给出了跨流域调水工程渠道系统优化设计的多维动态规划实例模型,及其与常规多维问题求解方法 DDDP 法的计算比较结果。第 4 章至第 6 章分别介绍了某些大线性块角结构问题、复杂非线性系统、模拟仿真、复杂定性系统的试验选优方法。对于某些耦合约束较少的大线性块角结构问题,试验选优方法同单纯形法相比将大大节省计算机(CPU)运算时间;对于某些复杂非线性问题,试验选优方法和分解聚合法相比具有同样的适用性,并且计算机运算时间大为节省。从某种意义上讲,分解聚合法为本书介绍的试验选优方法的一个特例——全面试验选优法;对于某些模拟仿真系统,试验选优方法可较好地解决某些方案组合“爆炸”问题的最优化;对于复杂定性系统,试验选优方法由于可以在选优过程中淘汰和生成方案,从而使某些复杂定性问题的优化成为可能。本书还给出了喷灌线性管网模型、地下水和地面水联合调度的复杂非线性模型、灌区优化规划模拟和定性模型的实例以及与常规方法对应的优化比较结果。

本书是作者和作者所在课题组在连续三项国家自然科学基金资助下,近十年来的研究成果的总结。在本书即将出版之际,我首先要衷心感谢我的师长武汉大学郭元裕、沈佩君、陈学敏教授和扬州大学金兆森、刘超教授,他们的指导、关心和培养使我终身难忘。我还要对我的合作伙伴扬州大学沈洁、陈平、朱春龙、吉庆丰、刘正祥和鄢碧鹏等同志多年来的工作支持和帮助表示由衷的感谢。

我衷心地欢迎读者对本书提出宝贵意见。

程吉林

2001 年 12 月于扬州大学

# 目 录

第 1 章 绪论.....	1
§ 1.1 大系统理论的研究目的和意义 .....	1
§ 1.2 多维动态规划理论与方法的研究进展 .....	2
§ 1.3 大线性问题的理论与方法概述 .....	7
§ 1.4 大型非线性问题的建模理论与方法概述.....	11
§ 1.5 模拟与定性系统的研究进展.....	17
第 2 章 大系统试验选优理论的提出与正交试验的优良性 .....	25
§ 2.1 大系统试验选优方法的提出与研究进展.....	25
§ 2.2 试验选优理论与正交试验的优良性.....	26
§ 2.3 正交表的构造.....	35
第 3 章 多维动态规划的试验选优方法及其在长距离输水工程系统优化中的应用 .....	40
§ 3.1 多维动态规划的试验选优方法.....	40
§ 3.2 长距离输水渠道工程系统优化规划设计中的应用.....	50
第 4 章 大线性块角结构试验选优方法及其在大型树状管网系统优化中的应用 .....	63
§ 4.1 大型线性块角结构问题的试验选优方法与一般算例.....	63
§ 4.2 大型树状管网线性块角结构模型及实例求解.....	69
第 5 章 大型非线性模型试验选优方法及其在地面水地下水联合优化调度中的应用 ...	73
§ 5.1 试验选优方法和一般算例.....	73
§ 5.2 地面水与地下水联合调度非线性模型的求解方法.....	75
第 6 章 大系统模拟和定性模型的试验选优方法及其在灌区优化规划中的应用 .....	80
§ 6.1 模拟系统的试验选优方法及应用.....	80
§ 6.2 大型复杂知识模型的试验选优方法及应用.....	89
附录 .....	94
一、获得的基金资助 .....	94
二、发表的与本书内容有关的论文 .....	94
参考文献 .....	96
索引.....	105

# 第 1 章 绪 论

## § 1.1 大系统理论的研究目的和意义

由于现代社会日趋系统化、信息化,在工程技术、社会经济和生物、生态等各个领域中都出现了许多复杂的大系统。另外,随着经济建设和科学技术的发展,也越来越要求提高决策的科学性和正确性,使原本复杂的大系统增添了更大的决策难度和复杂性,因而完善和发展大系统理论,对促进现代社会国民经济各个部门的科学管理和决策具有极其重要的社会经济价值和现实意义。

大系统可定义为:人们为了解决社会生产、科学技术等方面的某些问题,而必须处理的一系列复杂事物所组成的体系。它的特点是:①规模庞大,大系统通常包含有众多的小系统、部件、元件,占有的空间大,涉及的范围广;②结构复杂,大系统中各小系统、部件、元件之间的相互联系及其信息结构等都十分复杂;③功能综合,大系统常具有综合性的、多方面的功能与目标;④因素众多,大系统一般是多变量、多参数、多输入和多输出的系统,涉及的内外部因素和外部因素众多,不仅有“物”的客观因素,还有“人”的主观因素。

大系统优化理论是 20 世纪 70 年代为求解大系统优化决策而发展起来的一门新兴学科,它综合和发展了近代控制理论、数学规划和决策论等方面的成果,不仅把复杂的工程系统作为研究对象,而且已扩展到社会经济和生态环境等系统之中。

随着人类社会的发展以及工农业和科学技术的进步,需要研究的问题越来越多、越来越复杂,所研究的优化问题“维数”越来越高,并且自然科学和社会科学的内容交织在一起。为了解决“维数”障碍问题和难以定量、决策的困难,可以从两个方面来努力:一方面发展高速度、大容量的计算机,在硬件上取得突破;另一方面提高软件技术,寻求效率高、存储少的优化技术和方法。大系统优化理论研究的就是如何提高软件的效率。

目前,大系统优化理论及其应用已在国内外受到广泛的注意与重视,具体表现在以下几个方面:①在学术活动方面,大系统理论研究及应用,已成为国际学术交流中的热门课题。从 1975 年至今,国际上几乎每隔二三年都要召开一次大系统理论和应用的学术交流会;②在文献资料方面,大系统理论和应用已经是国内外运筹学、系统科学与系统工程、管理工程、自动控制、水资源研究、水电能源科学等许多学科有关刊物的重要论题;③大系统研究的内容和范围不断扩大,近年来,已推广应用于各个自然科学领域和许多社会科学领域以及经济建设的各个部门,取得了可观的成果。

我国著名的系统工程专家钱学森和涂序彦等<sup>[1-7]</sup>针对大系统的复杂性,提出了许多有待解决的难题,诸如:①大系统分析设计中如何考虑人(管理、操作人员)的主观能动性;②大系统由许多分散而又联系的子系统组成,需要发展更加完善的大系统优化技术以求适用于分散性很强的大系统;③由于大系统常有许多因素具有不确定性(随机性和模糊性等),因

而,基于确定性理论的大系统优化技术是难以适应的;④大系统往往缺乏齐全的资料,是信息不足或不确定的系统,所以要求信息完备的理论和算法遇到了困难;⑤大系统数学模型往往是多维高阶的,给系统分析带来了困难。1985年钱学森提出“大系统理论要创新”<sup>[11]</sup>,1995年他又呼吁“要开创大型复杂巨系统的研究”<sup>[21]</sup>,并强调“在解决大系统的系统工程问题时,要注意利用不能称之为‘科学’的人的知识和经验”;在大系统控制论中,要发展广义模型化方法,而不应局限于数学模型化,在难于或不适宜建立数学模型的场合,可以建立知识模型,引用人工智能、模糊识别、知识工程方法等,跳过数学模型的障碍,直接由知识模型转化为计算机模型,这样,既采用知识模型,又采用数学模型,两者相结合,形成广义模型,便于处理大系统的模型化问题”。

目前,在这一思想的启发下,国内外众多学者对大系统优化理论进行了探讨<sup>[8-58]</sup>,并且已将它广泛应用至工程技术、社会经济和生物生态等领域的各个部门<sup>[59-100]</sup>。大系统优化理论在现代社会国民经济各个部门的科学管理和优化决策中起着越来越重要的作用。

## § 1.2 多维动态规划理论与方法的研究进展

对于多维动态规划问题,由于离散型动态规划用递推方程进行择优计算时,计算机高速存储(内存)中至少须存放相邻两个阶段的各状态点的优化结果,而一个阶段的离散状态点数为

$$T_n = T_i^m$$

式中, $m$ 为问题的维数(即状态变量数); $T_i$ 为 $m$ 维空间中一个坐标(即一个状态变量)在任一阶段 $i$ 的离散状态点数,设各个坐标离散点数都是 $T_i$ ;  $T_n$ 为在任一阶段 $n$ 的状态点数。当维数 $m$ 稍大时,往往会超过现有计算机的存储能力致使无法求解,或因计算时间过长而费用昂贵。这就是动态规划在广泛应用中所遇到的主要障碍,即所谓“维数灾”问题。所以,自20世纪50年代初Bellman提出动态规划<sup>[101-104]</sup>以来,许多学者提出了各种改进方法<sup>[105-137]</sup>来求解多维问题。由于“维数灾”主要是由离散化引起的,现有的改进方法按照其解决的途径主要可以分为以下几类。

① 降低维数 $m$  如拉格朗日乘子法(Lagranges dynamic programming, LDP)<sup>[104-106]</sup>、动态规划逐次渐近法(dynamic programming successive approximation, DPSA)<sup>[103, 108-110]</sup>、聚合库偶法(a decomposition, AD)<sup>[111-114]</sup>等。

② 减少状态离散点数 $T_i$  如状态增量动态规划法(state increment dynamic programming, SIDP)<sup>[115]</sup>、离散微分动态规划法(discrete differential dyanmic programming, DDDP)<sup>[119]</sup>、双状态动态规划法(binary state dynamic programming, BSDP)<sup>[122]</sup>等。

③ 不进行离散化 如微分动态规划法(differential dyanmic programming, DDP)<sup>[123]</sup>、逐级优化算法(progressive optimality algorithm, POA)<sup>[65]</sup>等。

以下对于一些最典型的方法进行评述。

### 1.2.1 降低维数方法概述

#### 1. 拉格朗日乘子法(LDP)

##### (1) 基本方法<sup>[104, 105]</sup>

拉格朗日乘子法的基本思想是:通过引入拉格朗日乘子,将一个或若干约束方程并入目标函数,仅保留较少的约束方程,从而减少了状态变量数。

为了说明怎样利用拉格朗日乘子,考虑下述一个二维问题:

$$\max Z = \sum_{s=1}^N \Phi_s(x_s) \quad (1-1)$$

$$s. t. \quad \sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s) \leq b_1 \quad (1-2)$$

$$x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{s=1}^N h_{2s}(x_s) \leq b_2 \quad (1-3)$$

这里假设  $\Phi_s(x_s)$  为  $x_s$  的非减函数,且对约束之一如(1-2)式,存在  $\sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s) \leq$

$\sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s^*), x_s^*$  为最优解分量。

由于假设  $\Phi_s(x_s)$  是  $x_s$  的非减函数,  $x_s$  为连续变量,以及对第 1 个约束所加的条件,所以对最优解,约束(1-2)式或(1-3)式中至少有一个必须成为严格等式。现假定达到最优解时约束(1-2)式成为等式,则原问题可表述为

$$\max Z = \sum_{s=1}^N \Phi_s(x_s) - \mu \sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s) \quad (1-4)$$

$$s. t. \quad \sum_{s=1}^N h_{2s}(x_s) \leq b_2, x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N$$

式中  $\mu$  为拉格朗日乘子。对一个指定的  $\mu$  值,仅用一个状态变量,就可求解(1-4)式所表达的问题。如果把  $b_2$  看成一种资源量,  $x_s$  为决策变量,并设  $s$  为阶段变量,  $\lambda_s$  为状态变量,则可按分配问题建立状态转移方程:

$$\lambda_{s-1} = \lambda_s - h_{2s}(x_s), s = 2, \dots, N \quad (1-5)$$

于是可写出递推方程

$$\begin{cases} g_s(\lambda_s) = \max_{0 \leq x_s \leq \zeta_s} \{ \Phi_s(x_s) - \mu h_{1s}(x_s) \} + g_{s-1}[\lambda_s - h_{2s}(x_s)], s = 2, \dots, N \\ g_1(\lambda_s) = \max_{0 \leq x_1 \leq \zeta_1} \{ \Phi_1(x_1) - \mu h_{11}(x_1) \}, s = 1 \end{cases} \quad (1-6)$$

其中  $\zeta_s$  为下式的根:

$$\lambda_s - h_{2s}(\zeta_s) = 0, s = 2, \dots, N \quad (1-7)$$

因此对某些固定的  $\mu$  值,通过(1-6)式和(1-7)式,就能得到(1-4)式的最优解

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$$

可以证明,相对于某个指定的  $\mu$  值,可求得(1-5)式的最优解  $x^*(\mu)$ ,使得

$$\sum_{s=1}^N h_1(x_s^*) = b_1 \quad (1-8)$$

即(1-2)式取等式,则此特定解  $x^*$  是原问题(1-1)式—(1-3)式的最优解。

还可证明,当  $\mu$  由 0 增到  $\infty$  时,  $\sum_{s=1}^N h_s(x_s^*(\mu))$  是单调减小的<sup>[106]</sup>。

## (2) 评述

① 采用拉格朗日乘子法求解多维问题是建立在  $\Phi_s(x_s)$  为  $x_s$  的非减函数和加入至目标函数中的约束条件在最优解时等式成立这两个条件基础上的。因此,可能遗漏使  $\sum_{s=1}^N h_s(x_s^*) < b_1$  成立的最优解,并且当  $\Phi_s(x_s)$  不是非减函数时该方法无法应用。

② 对于  $m$  维动态规划问题,采用拉氏方法,必须要给出  $m-1$  个拉氏乘子的数值,并且只有当  $m-1$  个加入目标函数的约束条件均等式成立(即拉氏乘子为最优值)时,才能获得对应的最优决策变量。因此,拉氏乘子虽然在理论上能求解多维问题,但当  $m$  稍大( $m > 4 \sim 5$ )时,一般问题的求解也是非常困难的。

③ 由求解过程可知,拉氏方法是在给定拉氏乘子后把多维问题转化为一维问题求解,但一维问题求解完成后,必须对加入目标函数中的约束进行检验,反复调整拉氏乘子,直到约束满足条件,因此该方法属于非可行算法。

④ 拉氏方法获得的最优解为全局最优解。

由于拉氏方法存在上述限制,因此在解决多维实际问题时,运用拉氏方法求解优化并不多。

## 2. 动态规划逐次渐近法(DPSA)

### (1) 基本方法

动态规划逐次渐近法由 Bellman 提出,简称为 DPSA<sup>[104]</sup>,其基本思想是,把包含若干决策变量的问题变为仅仅包含一个决策变量的若干子问题,每个子问题比原来的问题具有较少的状态变量,因而可减少高速存储量。当状态变量数和决策变量数相等时,每个子问题只有一个状态变量。

其具体步骤如下:

首先,假设一个虚拟状态序列(称为虚拟轨迹)  $\{\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_N^0\}$  相应的决策序列(即策略)为  $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\}$ 。

从  $m$  个状态变量中挑选一个状态变量如  $\lambda_1^0$  ( $\lambda_1^0$  为第一个状态变量),假设所有其他状态序列  $\{\lambda_s^0\}, s \neq 1$  固定不变,则这个问题只有一个状态变量  $\lambda_1^0$ ,决策向量仍有  $m$  个分量。但由于  $(m-1)$  个状态必须保持固定不变,致使决策向量还要受到这些附加约束,所以起作用的决策变量也只有一个。这样就把原来的  $m$  维问题简化成一维问题。对这个一维问题采用动态规划法(DP)求解,得到一个新的决策序列  $\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_m^1\}$  和新的状态序列  $\{\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_N^1\}$ 。

然后,另选一状态变量如  $\lambda_2^1$ ,重复以上最优化过程,直到每个状态变量对于这个最优化过程至少被选了一次,并且当针对任一状态变量进行最优化时都得到相同的决策序列和状态序列时,便结束计算。

## (2) 评述



DPSA 是把求  $m$  维动态规划问题转化为求一系列一维问题,从而大大节省了计算机的存储量和计算时间。它是目前比较有效的一种降维方法,在水资源优化规划中也有过不少报道。如 Larson(1968 年),Yeh 和 Trott(1972 年)<sup>[108]</sup>,Gilest 和 Wunderlick(1981 年)<sup>[109]</sup> 将这一方法先后应用于多水库水资源优化调度。其中,Yeh 和 Trott 利用 DPSA 法成功地解决了 6 个水库联合调度的六维动态规划问题,有效地避免了“维数灾”。

但 DPSA 法不能保证在所有情况下都收敛到真正的最优解。Bellman(1957,1962 年)<sup>[102]</sup>对 DPSA 收敛性进行了讨论,但优化结果是否收敛到全局最优解并未得到证明。在实际应用中,也有不少结果确实收敛到全局最优解。因而,提高得到全局最优解的可能性是改进 DPSA 法的方向,为了改善解的最优性,可以设法选取更为合适的起始廊道。Nopmongcol 和 Askew(1979 年)<sup>[110]</sup>对 DPSA 进行了研究,将原始问题分解为若干子问题,每个子问题变成“一次 2 或 3 个变量”与“一次 1 个变量”的组合。

### 3. 聚合库偶法(AD)<sup>[111, 112]</sup>

#### (1) 基本方法

聚合库偶法的基本思想是把一个  $m$  维问题分解成  $m - 1$  个子问题,每个子问题是由相邻的二维约束构成。这样,就把一个  $m$  维问题转化为  $m - 1$  个二维问题。最后一个约束和第一个约束构成第二次循环迭代的二维状态,依次类推反复迭代至最优解。

#### (2) 评述

AD 是 1981 年 Turgeon<sup>[112]</sup>在串联水库优化调度中提出的减维方法,它有很强的针对性。目前除了在水库优化调度的应用外,其他领域尚不多见。

### 1.2.2 减少状态离散点数方法概述

减少状态离散点来减轻多维动态规划的“维数灾”,是目前求解动态规划实际问题中运用最多的方法,其中最典型的有状态增量动态规划(SIDP)法、离散微分动态规划法(DDDP)和双状态动态规划法(BSDP)。

#### 1. 状态增量动态规划法(SIDP)和离散微分动态规划法(DDDP)

##### (1) 基本方法

Larson(1968 年)<sup>[115]</sup>首先提出了状态增量概念。该方法用子问题的序列最优化来收敛原问题的最优解。

基于状态增量的概念,Hal(1969 年)<sup>[116]</sup>和 Trott(1971 年)<sup>[117]</sup>将 SIDP 应用于水库优化调度,Heidar(1971 年)<sup>[118]</sup>对该法进行了总结和发展,提出了 DDDP。Nopmongcol 和 Askew(1976 年)<sup>[119]</sup>研究了这两种方法,认为它们实际上是同一种方法。

SIDP 的求解步骤为:①选初始状态序列和决策序列,可根据一般经验和分析计算定出一个尽可能接近最优的决策序列,并相应得到初始状态序列;②选增量形成廊道,在该初始状态序列的上下各变动一个小范围  $\Delta$ ,形成一个带状的廊道;③利用递推方程在廊道内进行寻优,找到新的状态变量序列;④反复迭代直至收敛,得到最优解。

##### (2) 评述

为了使上述两种法有较好的收敛性,Hal(1969 年)<sup>[120]</sup>提出了两种状态增量的方法:使每次增量  $\Delta$  很小,但保持常量;在循环迭代初选用较大的增量  $\Delta$ ,若在迭代过程中发现目标值变化很小,则逐步减小增量  $\Delta$  来提高最优解的精度。通常,变增量法在实际应用中相当

有效。

这两种法所得到的解不能证明是全局最优解,但有可能收敛到某一局部最优解。Turgeon(1982年)<sup>[121]</sup>证明,如果SIDP中每时段状态增量相同,可能会使该法的结果不为最优解。对此,Turgeon提出对不同时段的增量值加以调整,以提高得到全局最优解的可能性。

## 2. 双状态动态规划法(BSDP)<sup>[122]</sup>

### (1) 基本方法

双状态动态规划由Ozden于1984年提出。它求解多维动态规划问题的思路与DDDP基本相同,也是由一个初始试验轨迹(又称虚拟轨迹)开始,以这个试验轨迹为基准建立状态子集,将它作为本次迭代的状态域,并用常规动态规划(DP)寻求最优轨迹(又称改善轨迹);然后再以本次迭代的最优轨迹作为下次迭代的试验轨迹,重新建立状态子集进行优化,通过多次迭代逐次逼近最优解。

### (2) 评述

BSDP在任一阶段每个坐标仅取2个离散值,每次迭代只包含 $2^m$ 个网点的状态子集,因而逐阶段递推计算所需要的高速存储需要量为 $2^{m+1}$ ,一次迭代的运算时间只与 $2^{2m}$ 有关。由于各次迭代的状态子集之间相互联系,使得每次迭代所得目标函数有可能得到改善;同时在状态空间移动子集以便最终获得最优轨迹。若用常规动态规划法求解,在 $m$ 维状态空间中每个坐标被分成 $T_i$ 个离散值,则一个阶段的状态网点总数为 $T_i^m$ ,其运算数据存储需要量至少为 $2T_i^m$ ,运算时间与 $T_i^{2m}$ 有关。BSDP把 $T_i$ 减少到最小值,从而大大节省了存储量和计算时间。

当阶段函数性能良好而没有尖谷时,BSDP能非常有效地寻求到最优轨迹。否则在步长减半之前,需沿着试验轨迹周围搜寻,重新定向。该算法对阶段效益函数性质无严格要求,不强求符合诸如二次型、连续性或可微性等特性,而在凸性假设下,能保证收敛到全局最优解。BSDP与DDDP的区别主要在于:对同样条件下的 $m$ 维问题,DDDP在每个阶段所需要的计算量是 $3^{2m}$ ,运算时间是 $3^{2m}$ 的函数;而BSDP在每个阶段所花费的运算时间基本上是计算量 $2^{2m}$ 的函数。这两种算法在每个阶段的运算时间之比为 $r_m = 2^{2m}/3^{2m} \approx (0.67)^m$ ( $r_2 \approx 0.20$ ,  $r_3 \approx 0.09$ ,  $r_4 \approx 0.04$ ,  $r_5 \approx 0.02$ )。虽然,BSDP法因每次迭代所取状态点数少而使迭代次数较DDDP法多,但总的运算时间的节省仍是非常显著的。

### 1.2.3 不进行离散化方法概述

对多维动态规划问题不进行离散化、直接进行求解的方法,主要有微分动态规划法(DDP)和逐级优化算法(POA)。

#### 1. 微分动态规划法(DDP)

在求解动态规划问题中,有些问题可以充分利用方程的结构来避免“维数灾”。这类问题是具有线性动态特性和二次特性的判别函数。如果目标函数是可分的和凸的(对于最小化问题),并且系统可以全部用一些线性的动态等式加以描述,那么决策值与状态变量将成线性关系。因此,当给定一个系统初始状态后,就能得到一个解析解,在求解过程中不会遇到“维数灾”问题。如果目标函数不是二次的,或者系统的动态特性不能用线性表达式描述,那么可以用泰勒级数将目标函数近似展开成二次,动态特性表达式也可在

状态变量附近近似展开,这样对于非拉格朗日乘子问题也可用上述方法求解。Jacobson(1970年)<sup>[123]</sup>将此方法称为DDP,它克服了“维数灾”,同时取得二次收敛。Murray(1979年)<sup>[64]</sup>将DDP法修改后应用到多水库系统,修改后的方法称为CDDP,Yokowitz(1982年)<sup>[124]</sup>对其作了收敛性证明。Gjelsvik(1982年)<sup>[125]</sup>提出了一阶DDP,并将其用于5座水库系统的优化计算。

## 2. 逐级优化算法(POA)

Howson(1975)<sup>[65]</sup>沿用动态规划的思想,在两个阶段的初末状态固定的情况下,对中间状态进行优化计算,直到完成整个周期的计算,反复迭代,直到收敛。这一方法命名为POA,Turgeon(1981年)<sup>[126]</sup>对此做了进一步的研究。

POA将多阶段优化问题分解成若干子问题,子问题之间由系统状态联系,每个子问题仅考虑相邻时段的子目标值,这样大大减少了计算所占用的内存空间。但POA法仅适用于初始条件和终末条件一定的最优问题。

Howson在提出POA时已证明了其收敛性,也证明了解为最优解,不过这种方法对目标函数和约束条件有特定的要求。实践证明,POA适合于如水库调度确定性入流的优化计算,它从根本上消灭了“维数灾”。

POA对目标函数有特殊要求(即为凸性目标函数),若不满足,计算很难收敛到最优点。张勇传等(1984年)<sup>[127]</sup>提出了POA算法的改进算法SEPOA法。

### 1.2.4 本节小结

动态规划在系统优化规划与管理决策中,具有很大的灵活性和适应性。在一定条件下,动态规划方法能够保证所求得解为全局最优解。动态规划在实际应用中特别应注意的问题是“维数灾”,由此出现了一些改进的动态规划方法,如前所述的LDP、DPSA、AD、SIDP、DDDP、BSDP、DDP和POA,这些方法都能在一定程度上有效地避免“维数灾”的发生,但它们都有自身的缺陷:LDP要求阶段函数为非减函数,且对多维的拉氏最优乘子的确定很困难;AD、DDP和POA对目标函数和约束条件均有特定的要求;而DPSA、SIDP、DDDP、BSDP虽在一定程度上克服了“维数灾”,但若获得全局最优解,需要一个好的初始轨迹。由于实际问题的高度复杂性,对于数十、数百乃至上千维的多维动态规划问题的求解目前尚难开展。

## § 1.3 大线性问题的理论与方法概述

设A是 $m \times n$ 矩阵,B是 $m$ 维向量,C是 $n$ 维向量,我们要求满足约束 $AX \leq B$ 的 $n$ 维向量X,使得 $C'X$ 达到最大值:

$$\begin{aligned} & \max C'X \\ & \text{s. t.} \quad \begin{aligned} AX & \leq B \\ X & \geq 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (1-9)$$

这就是线性规划问题。它的建模和求解与生产计划、最优控制、对策论、组合学、离散变量的最优化、计算复杂性理论和许多离散应用数学问题的研究有密切的关系。

长期以来,人们使用单纯形法及其变形来求线性规划的解<sup>[128]</sup>,Klee 和 Minty<sup>[129]</sup>举例说明了用单纯形法存在一些问题,要用指数次算术运算才能求出解来。

1979 年 Khachiyar<sup>[130]</sup>用椭球法来求解整系数的线性规划,证明了它是个多项式算法。由于它解决了重要的理论问题,引起了人们的关注。但实算表明椭球算法远比单纯形法差。1984 年 Karmarkar<sup>[131]</sup>提出了一种阶次比椭球法低的多项式算法,并声称这种算法在解大型问题时比单纯形算法快得多。现在,对解线性规划方法及其复杂性的研究不单是个理论问题,在实用上也极为重要,它也引起了我国运筹学工作者的兴趣。

### 1.3.1 Karmarkar 多项式算法概述

线性规划(LP)在近十年中最重要的发展应是 Karmarkar(1984)的多项式 LP 算法。Hooker(1986)<sup>[132]</sup>描述了这种进展的重要性,对这种方法的优点和弱点给出了一个直观的说明,同时为读者实现这种方法提供了足够的技术细节。Karmarkar 对 LP 提出了一个新的投影标度算法(projective scaling method)<sup>[133]</sup>,并声称对于大型问题他的方法比单纯形方法快 50 倍。Karmarkar 算法的主要优点是在最坏情形具有多项式运算时间,这在理论上显然优于单纯形方法,因为单纯形方法在最坏情形只具有指数运算时间。然而,尽管单纯形方法的运算时间的理论界限是指数的,但它在实际应用中运用得相当好。对于大多数线性规划来说,单纯形方法在解决实际问题时的情形比它在理论上的最坏情形要远远好得多。鉴于这些事实,一个更好的假设是,由于投影标度算法的理论界限要好得多,也许它对于实际问题会解决得很好。这方面的想法导致了 Khachiyar(1979)<sup>[134]</sup>提出的第一个 LP 多项式算法的广泛研究,这位前苏联数学家的成就是一个理论突破,但它要求很高的精度,对自然产生的 LP 问题,这种方法一点也不比单纯形方法要好。

Karmarkar 方法是以两个基本原理为基础:①当现行的最好已知解在由约束定义的多胞形的中心附近时,沿最速下降(对于极小化而言)的方向移动;②在每次迭代时,解空间因被变换,使得现行的最好已知解以不变的方式向多胞形的中心移动。有人<sup>[133]</sup>已提出将来投影标度算法也许还有其他用处,比如作为非线性规划的一个子程序,由于它能够极小化一个非线性函数,对于具有特殊结构的线性规划问题,诸如各种具有附加约束的网络流问题,它可能是极其有用的;它还可能导致一种优于 Dantzig-Wolfe 分解的分解技术<sup>[135]</sup>。Karmarkar 方法的出现已引起了许多领域的学者对数学规划的大量广泛研究。

文献<sup>[136]</sup>中讨论了 Karmarkar 算法的实现,认为不可能像他所说的那样好。然而,单纯形算法经过了几十年的改进并有成熟的程序可供使用,新提出的算法难免总会有不完善之处,但它至少是第一个有实用前途的、解线性规划的多项式算法。近年来出现了许多 Karmarkar 算法的变形和完善化算法<sup>[137-144]</sup>,这些方法把线性规划和非线性规划中的一些技巧和方法(如对偶变量、罚函数、牛顿法等)融合进去,使算法更趋完善,有的算法还使迭代次数的阶减少为  $O(\sqrt{m+nL})$ ( $m$  为约束个数, $n$  为变量个数, $L$  为数据长度)次。现在, Karmarkar 算法的有效性已被确认。

### 1.3.2 Dantzig-Wolfe 分解方法概述

1960 年, Dantzig 与 Wolfe 在前人的工作基础上,提出了求解大型线性规划问题的著名方法——Dantzig-Wolfe 分解方法<sup>[145]</sup>。它最适合处理具有块角结构的线性规划问题:

$$\begin{aligned}
 \min Z &= C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_N X_N \\
 \text{s. t.} \quad & A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_N X_N = b_0 \\
 & B_1 X_1 = b_1 \\
 & \vdots \\
 & B_N X_N = b_N \\
 & X_1, X_2, \dots, X_N \geq 0
 \end{aligned} \tag{1-10}$$

这个方法的基础是凸组合原理和列生成方法,它可分为二级来处理问题:第一级是子问题,第二级是主规划。Dantzig-Wolfe 分解原理是大系统优化的开拓性工作,至今仍有很强的生命力和广泛的应用,许多研究者以其基本概念为出发点,把它扩展应用于其他一些具有特殊结构的数学规划问题<sup>[146]</sup>。Dantzig-Wolfe 二级协调是通过耦合约束对应的拉氏乘子  $\mu$  来转换的。对应于(1-10)式的分解协调结构见图 1-1。

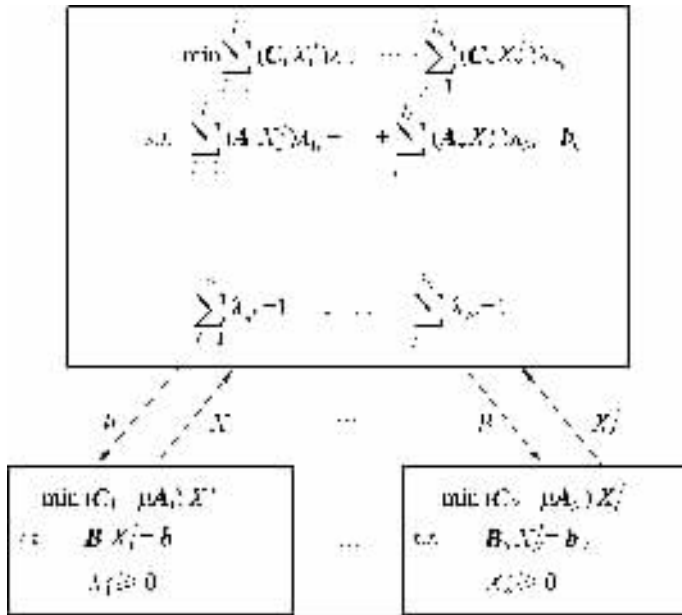


图 1-1 Dantzig-Wolfe 分解协调结构图

图中  $\lambda_{ij}$  为未知标量,根据凸多面体的性质<sup>[147]</sup>,凸多面体的任何一点为凸多面体顶点上的线性组合(称凸组合),有

$$\begin{aligned}
 X_i &= \sum_{j=1}^{l_i} \lambda_{ij} X_i^j \\
 \lambda_{ij} &\geq 0 \\
 \sum_{j=1}^{l_i} \lambda_{ij} &= 1
 \end{aligned} \tag{1-11}$$

式中  $l_i$  为第  $i$  个凸多面体所具有的顶点数目(顶点数目一般大于空间的维数)。

一个大线性规划之所以难解,主要因为存在联系的耦合约束,从具体问题看,就是总公司下属各子公司之间有联系。所以,不能直接将它作为彼此独立的许多子问题来解。Dan-

tzig-Wolfe 分解方法把原规划分解为一个主规划和许多彼此独立的子规划,子规划按主规划给定的  $\mu$  进行规划,求出子系统的决策变量可行解,把这些可行解汇报给主规划并用总目标来衡量是否最优,若不是最优,就重新给定  $\mu$  值,进行反复计算。

尽管 Dantzig-Wolfe 分解原理反映的是一种数学技巧,它却揭示了一种合乎客观规律的工作方法。为了寻求最优,上级要倾听下级的意见,并根据下级的情况作出决策;下级则要坚决执行上级的指示和决策。

Dantzig-Wolfe 分解原理的意义非常重大,其思想不仅适用于广大线性规划,更重要的是也适用于大型非线性规划,目前它已作为大型非线性规划的经典方法之一<sup>[147]</sup>。

### 1.3.3 其他大线性方法简述

Dantzig-Wolfe 分解方法在线性规划中极具重要性,Birge(1985)提出了解块角系统的基因子分解技术的一种变形<sup>[135]</sup>。他发现 Dantzig-Wolfe 分解和基因子分解从同一路径达到最优解,并对混合这两种技术提出了一种新的分解技术:保持一个受限制的主问题以接受从子问题生成的列,不保持主问题的所有极点组的非负性(像 Dantzig-Wolfe 分解方法一样),包括一组用来在主问题的迭代过程中检验的附加约束。实质上,基因子分解方法是用来处理 Dantzig-Wolfe 分解结构的主问题数据的。

对于若干特殊的线性规划问题,Wittrock(1980)<sup>[148]</sup>发表了关于阶梯形 LP 问题的对偶嵌套分解的文章。阶梯形 LP 问题的特点是:变量可以分在一组时间间隔上,而每个时间间隔上的变量只与相邻时间间隔上的变量有关。Wittrock 描述了一个解这种阶梯形 LP 问题的称作嵌套分解算法的特殊方法。对线性规划的对偶,该方法循环地应用 Dantzig-Wolfe 分解原理。它对每一时间间隔求解一个小的线性规划,每一间隔由决定它前面的间隔的约束来联系它后面的间隔,由增加约束来联系它前面的间隔。许多自然建立起来的问题如考虑资本预算和工厂计划中,包括了一系列必须在时间过程中按顺序作出的决策,因此阶梯形 LP 具有巨大的实际效用。还有另一个特殊的线性规划问题——Palekar(1987)<sup>[149,150]</sup>等人为固定费用运输问题设计了一个新的有条件的惩罚,计算实例表明,这些惩罚的应用在处理困难问题时,在计数和求解时间上有可观的减少。Erenguc(1986)<sup>[151]</sup>提出了一个解一类具有特殊结构的 LP 问题的方法。这类问题是从以下几个问题中产生的:①“公文包”选择,②广告布置的时间选择,③多阶段生产存货计划问题,④多阶段背包问题的 LP 松弛问题。他的途径包括解一系列连续的背包问题,每一个问题需要线性时间来求解,这个过程所需计算复杂性约束矩阵的非零元素的数量成正比。

分派问题是一个具有非常特殊结构的线性规划问题,Bertsekas 对古典的分派问题提出了一个大规模的并行算法<sup>[152-155]</sup>。算法的执行过程好像进行拍卖,靠未被分派的人们同时投标争买物品来提高价格,一旦所有人投标以后,物品卖给最高的投标者。这个算法也可以解释为一个求解对偶问题的某类松弛方法。对于特殊的运算,它的最坏情形的复杂性则是  $O(MA \log(NC))$ ,这里  $M$  是节点数, $A$  是弧数, $C$  是最大绝对目标值。计算结果表明,对于大型问题,这个算法甚至在不利用并行性优势的情况下,可以与现存的方法媲美。当在并行机上执行时,算法可以很高阶地加速。

我国学者在大线性问题的研究方面也取得了一定的进展。1987年,叶秉如发表了求解线性规划的一个新算法,他称之为最小减优率法<sup>[156]</sup>,其原理与1980年所提出方法<sup>[157]</sup>相

同。它是一种“以线性规划问题约束凸集的基本特性和耦合约束对解的影响的基本法则为出发点的另一计算分解问题”的方法,先不考虑耦合约束,形成子问题,利用最小减优率的概念,从子问题的解推求有耦合约束的线性规划最优解。1986年,何炳生<sup>[158]</sup>发表了求解线性规划的鞍点法,其原理是构造罚函数把线性问题转化为非线性问题来求解。

### 1.3.4 本节小结

本节主要介绍了大线性规划的各种算法。线性规划的实用算法非常重要,该问题成为各国系统工程领域的研究热点之一。近二十年来最重要的研究成果是 Karmarkar 算法,但其实用程序没有公布<sup>[159]</sup>。重要算法 Dantzig-Wolfe 提出的大线性问题分解方法在大型非线性领域取得了很大的成功,但在求解大线性问题方面并不十分理想,其他各种方法不是距实用尚有一段距离,就是算法本身有一定的限制,因此大线性问题有待于进一步研究。

## § 1.4 大型非线性问题的建模理论与方法概述

对于大型非线性问题,由于其复杂性,目前的建模理论和方法主要采用递阶、混合和广义模型。

### 1.4.1 大型非线性系统的递阶模型概述

在 Dantzig 与 Wolfe 的工作基础上,1970年 Mesarovic 在研究互联系统的优化时,首次对大系统非线性规划分解协调技术的理论基础——拉格朗日乘子理论的基本概念作了精确的描述,并明确地提出了大系统优化的分解协调算法<sup>[160]</sup>。此后 Haimes 等人又进一步完善了这一方法<sup>[161]</sup>。就国内而言,1980年叶秉如提出了求解线性或非线性的二维分解算法<sup>[157]</sup>,1985年胡振鹏提出了递阶分解聚合模型算法<sup>[162]</sup>,1989年叶秉如、董增川又在二维分解算法的基础上提出了线性规划的降维算法<sup>[14]</sup>。现在,大系统递阶模型及其优化方法已得到了长足发展和广泛应用。

#### 1. 大系统分解-协调递阶模型

大系统分解-协调递阶模型是目前最常用的大系统优化模型,建立这一模型的基本思路是:首先,将一个复杂的大系统按照具体情况和需要划分为若干规模较小、结构比较简单的子系统;其次,采用一般的优化方法对各子系统分别择优,实现各子系统的局部最优化;然后,再根据整个大系统的总任务和总目标,修改调整各子系统的输入和决策,使各子系统“相互协调配合”,实现大系统的全局最优化。

这种优化方法实际上是一种降维技术,即把一个具有多维问题的大系统分解为比较简单、维数较少的子系统。这种方法也是一种迭代技术,即各个子系统通过择优得到的结果还要进行反复协调修改,直到满足整个系统全局最优为止。协调通过迭代进行,以迭代换取降维,但这决不意味着增加计算时间,恰恰相反,它能大大减少计算时间。

一个大系统一般都可以分为若干层子系统,形成多层结构,在下一层进行分解,在上一层进行协调。分解的特征是暂时割裂各子系统之间的联系,让各子系统分别择优;协调的特征是恢复各子系统之间的联系和制约,以求得整个系统的最优。分解和协调在上下层之间

交替进行,这种交替递推可以扩大到更多的层次。

这种优化模型及方法既照顾了各个子系统的局部最优,也满足了整个系统全局最优的要求。实际上,没有各子系统的局部优化,决不会得到整个系统的全局最优。所以,为了得到全局最优,就得对各子系统进行协调修正,最小限度地牺牲某些子系统的局部利益。这种梯阶模型是各种大系统(包括工程和非工程的)普遍采用的结构模式,在日常生活中经常见到,只是过去没有给以定量描述而已。

通过二十多年来的研究与应用,关于非线性大系统的分解-协调国内外已提出了许多算法<sup>[163-169]</sup>,它们大致可以归结为目标协调法、模型协调法和混合协调法三种基本类型。下面将以一个两层递阶系统为例,论述这种优化方法。假设所研究的两层递阶系统如图 1-2 所示,可以划分成  $N$  个子系统。每一个子系统的数学模型可以以其中任一子系统  $i$  (见图 1-3) 为例予以描述。

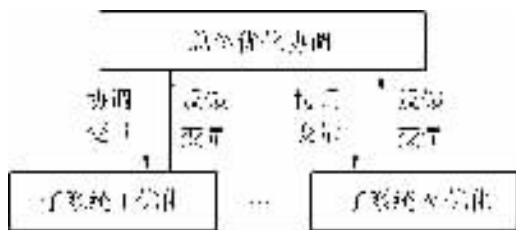


图 1-2 两层递阶结构

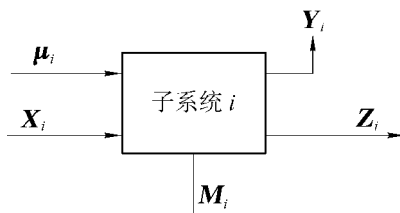


图 1-3 第  $i$  个子系统

设  $\mu_i$  既是对总系统也是对第  $i$  个子系统的输入(即来自总系统之外的扰动或其他无法影响的固定输入),维数为  $m_{\mu_i}$ ;  $X_i$  为由其他子系统提供的中间输入,维数为  $m_{x_i}$ ;  $M_i$  为对第  $i$  个子系统的控制变量,维数为  $m_{m_i}$ ;  $Y_i$  既是子系统又是总系统的输出,维数为  $m_{y_i}$ ;  $Z_i$  只是子系统  $i$  的输出,它对其他子系统起输入的作用,维数为  $m_{z_i}$ 。

子系统的描述方程为

$$\begin{cases} Z_i = T_i(M_i, X_i) \\ Y_i = S_i(M_i, X_i) \end{cases} \quad (1-12)$$

子系统之间的关联为

$$X_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} Z_j \quad (1-13)$$

式中  $C_{ij}$  为  $m_{x_i} \times m_{z_j}$  的互联矩阵。

系统的目标函数为

$$\max F = \sum_{i=1}^N f_i(M_i, X_i) \quad (1-14)$$

系统的拉氏函数为

$$L = \sum_{i=1}^N f_i(M_i, X_i) + \sum_{i=1}^N \mu'_i (T_i - Z_i) + \sum_{i=1}^N \rho'_i (X_i - \sum_{j=1}^N C_{ij} Z_j) \quad (1-15)$$

式中  $\mu_i, \rho_i$  分别为拉氏乘子向量,若假定这些等式约束是独立的,函数  $f_i$  和  $T_i$  是连续和一



阶连续可微的,则最优解应满足以下必要条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}_i} &= \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{X}_i} + \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{X}_i} \right)' \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\rho}_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{M}_i} &= \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{M}_i} + \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{M}_i} \right)' \boldsymbol{\mu}_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Z}_i} &= -\boldsymbol{\mu}_i - \sum_{j=1}^N \mathbf{C}'_{ij} \boldsymbol{\rho}_j = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} &= T_i - \mathbf{Z}_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}_i} &= \mathbf{X}_i - \sum_{j=1}^N \mathbf{C}_{ij} \mathbf{Z}_j = 0 \end{aligned} \quad (1-16)$$

这样形成的两级递阶结构的分解-协调,实际上就是在上下级之间不断交换信息的一种迭代优化过程,一般先由上级对下级发出指令(即给定协调变量值),然后各子系统经各自优化决策后向上级汇报(即送回反馈变量),从优化总系统的角度出发再向下级发出指令(即修改协调变量),如此反复迭代,最后达到整个系统的最优。在上下级(层)迭代过程中,由于所采用的协调变量不同,便得到了大系统分解-协调的三种基本算法,即目标协调法、模型协调法和混合协调法。

三种算法的分解-协调结构见图 1-4—图 1-6。

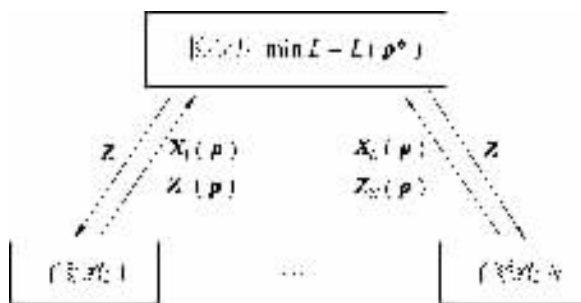


图 1-4 目标协调法递阶结构

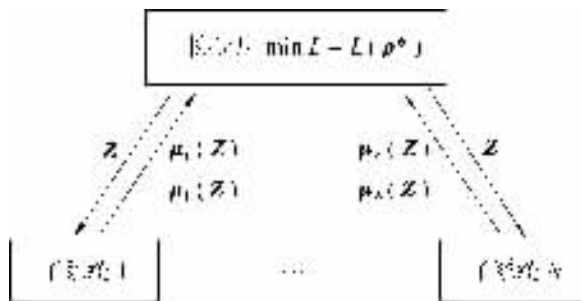


图 1-5 模型协调法递阶结构

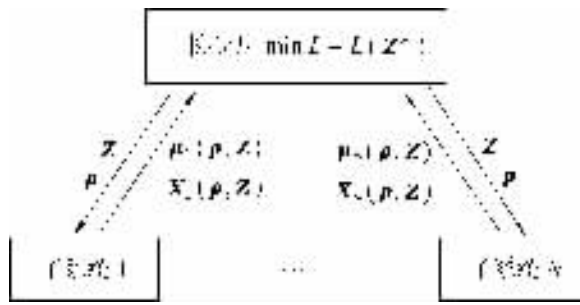


图 1-6 混合协调法递阶结构

分解-协调技术是大型非线性系统优化的一种常用技术,但是由于要考虑大系统中随机的或不确定的因素,运用该方法显得就十分困难。因此,需要进一步探索大系统优化的新途径。1986年,胡振鹏提出了大系统分解-聚合方法,发展了大系统递阶模型及其优化技术。

## 2. 大系统分解-聚合方法

设有大系统优化问题

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sum_{i=1}^N f_i(X_i, Y_i) \\ \text{s. t.} \quad G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sum_{i=1}^N g_i(X_i, Y_i) \leq b \\ X_i &\in R_{X_i}, Y_i \in R_{Y_i}, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中,  $X_i$  是与目标函数中第  $i$  项有关的变量,称独立变量;  $Y_i$  是既与目标函数中第  $i$  项有关又与其他项有关的变量,称关联变量且是不可分的关联变量。

具体步骤如下。

① 令  $g_i(X_i, Y_i) = Z_i \leq b$ , 则原问题的约束变为

$$\sum_{i=1}^N Z_i \leq b \quad (1-18)$$

② 假定关联变量  $Y_i$  和  $Z_i$  为某一已知值,原问题可分解为  $N$  个子问题,子问题  $i$  的数学模型为

$$\begin{aligned} \min f_i(X_i, Y_i) \\ \text{s. t.} \quad g_i(X_i, Y_i) &= Z_i \\ X_i &\in R_{X_i} \end{aligned} \quad (1-19)$$

通过子系统优化,得各子问题的目标函数值  $\bar{f}_i(\bar{X}_i, Y_i^0, Z_i^0)$  和独立变量最优解  $\bar{X}_i(Y_i^0, Z_i^0)$ 。

③ 反复设计不同的  $Y_i, Z_i$ , 就可得到多组  $\bar{X}_i(Y_i, Z_i)$  和  $\bar{f}_i(\bar{X}_i, Y_i, Z_i)$ , 它们都是关联变量  $Y_i, Z_i$  的函数。然后通过回归分析,拟合  $Y_i, Z_i$  与  $\bar{f}_i(\bar{X}_i, Y_i, Z_i)$  之间的相互关系为

$$\bar{f}_i(\bar{X}_i, Y_i, Z_i) = r_i(Y_i, Z_i) \quad (1-20)$$

上式为一经验公式,变量  $Y_i, Z_i$  和  $\bar{f}_i$  的关系,也可用图表示。

④ 以上只是求得了各子问题的最优目标值  $\bar{f}_i$  与  $Y_i$ 、 $Z_i$  的关系, 还未确定  $Y_i$ 、 $Z_i$ 。如何取值才能使原问题整体最优, 为此还有必要优选  $Y_i$ 、 $Z_i$ 。为了优选  $Y_i$  和  $Z_i$ , 建立聚合模型如下:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \sum_{i=1}^N r_i(Y_i, Z_i) \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^N Z_i \leq b \\ &Y_i \in R_{Y_i} \\ &0 \leq Z_i \leq b \end{aligned} \quad (1-21)$$

通过对聚合模型择优, 就可得到这一问题的全局最优解或接近全局最优解  $Y_i^*$ 、 $Z_i^*$  及相应的最优目标值  $F^*$ 。

⑤ 将  $Y_i^*$ 、 $Z_i^*$  代到式  $g_i(X_i, Y_i) = Z_i$  中, 求得  $X_i^*$ , 即原问题的最优解。

由以上分析可见, 大系统分解-聚合方法与大系统分解-协调模型相比, 有以下一些特点。

① 分解-聚合法与分解-协调法中的模型协调法类似, 即大系统在可行域中分解; 不同的是以关联变量代替独立变量达到降维的目的, 然后建立和优化聚合模型, 获得整个系统的最优解。

② 分解-聚合法中关联变量与目标函数的关系是从有限样本中回归而得, 其优化结果还是近似的全局最优解。

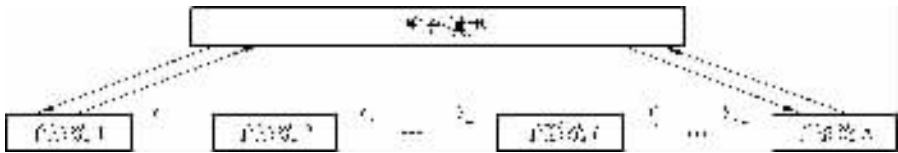


图 1-7 大系统分解-聚合模型的递阶结构图

③ 分解-聚合法适用于求解关联变量较多的大系统优化问题。

④ 分解-聚合法的递阶结构关系比较松散, 不同子系统或同一子系统不同目标可以采用不同的途径建立关联变量与目标函数的关系。例如有的采用确定性优化方法, 有的采用随机性优化方法, 也有使用数值模拟方法, 甚至采用物理模拟试验分析归纳历史资料和凭人的经验判断来建立这种关系。这种把定量计算、定性分析以至经验有机地组合在一起共同来解决大系统优化问题的模型, 可以认为是一种广义模型。

#### 1.4.2 混合模型及其优化技术概述

任何数学模型都是实际系统的抽象与简化, 但是一个单一数学模型的决策容量总是有限的, 所能研究的问题性质(如确定性或随机性)也是有局限的, 所擅长的功能是有所侧重的。所以, 单靠一个模型去详尽地描述和决策每一个复杂的大系统问题是很困难的, 即使能够做到这一点, 其求解也相当不易。要完成这样的任务, 往往需要按照大系统的思路和观点, 建立一个由一组模型(包括各种数学模型和模拟模型等)构成的混合模型。

混合模型又称组合模型、模型系统或序列模型,是求解复杂系统的一种有效方法,人们在解决复杂的实际问题时,已广泛地应用了这种方法。例如1970年, Major和Lenton<sup>[170]</sup>在研究阿根廷的科罗拉多河流域规划时,就采用了筛选模型、模拟模型和序列模型等三种组合在一起的混合模型,对一个复杂的流域进行了优化规划,较早地提出了混合模型的概念。1974年, Becker和Yeh<sup>[171]</sup>用LP-DP组合模型研究了水库群最优控制问题,以寻求库群的最优运行策略。在这一方法中, DP用以处理时段间的优化,而对每一个时段内或每一年内则用LP择优。他们成功地作出了有10个变量的优化调度规则。1982年, Karamouz和Houch<sup>[172]</sup>在研究水库的年和月的运行规则时,使用了一个动态规划与模拟技术相结合的混合模型(DP-ST),他们首先将历史径流资料输入动态规划模型,求得最优解后,利用回归分析确定水库的运行规则,然后再用一个自回归滑动模型生成人工径流系列,按上述运行规则模拟水库的运行情况,经反复修正得到水库的运行规则。1980年后,国内也有不少系统分析工作者对此进行研究,并提出或应用各种混合模型来求解水资源的各种优化问题。1982年,郭元裕等人将DP-LP和DP-ST混合模型分别运用于洞庭湖区和江汉平原四湖地区的除涝排水优化规划中。1984年,董子敖等人<sup>[173]</sup>在研究库群电站的多目标随机优化运行决策时,提出了“多目标多层次法”,这个方法中包括了多目标化为单目标的约束法、进行单一水库优化调度的动态规划逐次渐近法以及进行多库协调的大系统分解-协调法等,是一个典型的混合模型。1989年,沈佩君等人<sup>[174]</sup>在研究宁波市水资源系统优化调配时,也使用了包括动态规划、线性规划、模拟技术、大系统分解-协调和库群聚合分解等多种模型在内的混合模型,获得了满意的成果。1992年,黄苏南等<sup>[57]</sup>用泰勒级数和大系统递阶模型的结合,提出了一种修正递阶控制方法。1993年,郭元裕<sup>[165]</sup>对水资源系统混合模型的分类、建模、功能等进行了系统阐述。

#### 1.4.3 广义模型概述

“开创复杂巨系统科学与理论的研究”,这是我国著名系统工程专家钱学森于1994年在全国系统工程学术会议上提出的<sup>[2]</sup>。他强调“在解决大系统的系统工程问题时,要注意利用不能称之为科学的人的知识和经验”。他还指出:“大系统控制论作为一门技术科学,它的目的就是为了联系实际、解决实际问题,而解决实际问题,就不会限于哪一门学科,就必然出现交叉科学。”

在同一时期里,涂序彦<sup>[6]</sup>也具体地提出:“在大系统理论中,要把数学模型和知识模型相结合,发展广义模型化的方法,而不局限于数学模型化。”郭元裕在文献[16]中对广义模型的定义、功能、分类进行了详细的描述,指出了五类不同的广义模型。

第一类:首先将人的知识和经验利用专家系统等办法形成知识模型,然后与数学模型结合在一起,构成广义模型。在这类模型中,最重要的是要将知识和经验组成可以用来决策的知识模型。目前国内外已经研究提出并推广应用了一些行之有效的知识模型,例如Delphi法、回归分析法、层次分析模型以及其他专家评判模型等。如果所决策的问题或系统并不复杂,单独利用知识模型或数学模型就可解决时,那么就不必再建立广义模型;否则,就得将有关的知识模型和数学模型参照前面混合模型中所介绍的模型组合方法加以有机地联结,或把知识模型组合在大系统递阶模型中,构成广义模型。在大系统多目标决策中,有许多方法利用了人的知识、经验和知识模型。如在权重法中,常常应用Delphi等专家评判法,这样就

把知识或知识模型和数学模型结合起来,成为这类广义模型具体应用的典型例子。

第二类:将知识和经验结合在不同于一般数学模型的所谓模糊决策模型或灰色系统中的广义模型中。

第三类:运用交互(或称反馈、试误)作用和原理建立知识与数学模型相结合的广义模型。1972年,Dyer提出了交互式多目标决策,它的中心思想是决策者参与决策过程,同分析者一起确定优化方向,从而求得所需的满意解。这种直觉判断与数学模型相结合的决策模式,实质上就是广义模型。

第四类:借助专家系统或决策支持系统,将人的知识和经验在计算机上实现与数学模型的结合,形成一种“人-机”协调的广义模型。国外许多大型水资源系统和大型灌溉系统的自动控制,都是“人-机”系统,它的运行、管理和决策,既要借助数学模型进行定量分析,同时也离不开人的因素,即水资源决策部门和灌区管理机构的各级领导和工程技术人员的经验判断等。

第五类:将人(包括决策人员和分析人员等)的知识和经验直接应用于或组合在建立数学模型的过程之中。这类广义模型在过去常常作为简化真实系统的方法,属于数学模型建模的范畴,但是它使数学模型增添了许多知识和经验的因素,并在决策中发挥了重要作用。这类广义模型对简化模型、降低维数、进行定量分析等具有很大的潜力,所以它具有开发前途,是值得重视的模型。

广义模型的提出是对大系统理论的重要贡献,它使许多过去无法优化或求解十分困难的大型非线性问题的求解成为可能。

目前,广义模型受到了国内外学者的广泛重视,在大型非线性领域得到了广泛应用。如仲伟俊等人<sup>[35]</sup>1995年提出的一类分散多目标决策模型的交互决策方法;祝世京等人<sup>[36]</sup>1995年提出的一类确定大众偏好结构的方法;顾培亮等人<sup>[45]</sup>1995年提出的运用“思想库”和“案例库”决策支持方法和华中生等人<sup>[55]</sup>1994年提出的专家群体决策不一致性判断与调整方法等等。

#### 1.4.4 本节小结

本节对大型非线性问题的建模理论与方法进行了回顾,它们主要是递阶、混合和广义模型三类。一般的复杂非线性系统若可以用一个复杂非线性模型进行描述且模型结构较好,则可采用分解协调技术进行优化决策;分解协调方法求解困难时,则可以用近似的分解聚合方法结合其他优化技术来求解;系统较为复杂则可用一组模型即混合建模方法去描述求解;系统包括定性和不确定因素或更复杂,可通过广义模型的建模方法来优化求解。目前,知识模型和数学模型相结合的广义模型已成为大系统发展和完善的方向。

## § 1.5 模拟与定性系统的研究进展

### 1.5.1 计算机模拟技术概述

#### 1. 模拟模型

模拟技术是常用的系统分析方法之一,它与数学规划一样是系统工程的重要组成部分。模拟技术的基本内容包括如下几个部分:①首先针对真实系统所要求的研究目的,将客观系

统转换为数学模型,系统的内在运动规律以若干数学模型来表示,并将这些模型组成一个统一的计算机程序,即系统的模拟模型;②利用数字计算机,对上述模拟模型进行有计划有步骤的多次模拟运行或称模型试验;③通过一定的选优技术,分析每次模拟运行的特性,从而为系统提供优化决策。

模拟模型既然用于对真实系统的模仿研究,它首先必须具有足够精度的真实性。建立的数学模型应源于实际,反映客观事物的本质,否则将会产生失真现象。选用已有的数学模型必须有充分的科学依据,确实能够正确反映模拟对象的内在联系和经济规律。模拟在保证一定真实性的前提下,也可以进行适当的简化。通常人们所研究的水资源系统,甚至是最小的真实系统,都是一种相当复杂的综合体系,它包含与研究目的直接相关的各组成部分和影响因素,同时又包括更多与研究目的不相关或关系微弱的组成部分和影响因素。如果将全部组成部分和因素都组织在模型中,模型将会十分庞大,实际上几乎是不可能实现的。设计模型时必须根据研究系统的客观规律,保留主要部分和主要因素,舍弃非主要部分和因素,达到简化模型、减少模拟工作量的目的。模拟模型应该操作容易、解算简便。合理的模拟模型还应该具有灵活可靠的控制性能,通过简单的操作程序,可获得不同的建模系统运转情况。设计模型时必须考虑模型是否容易解算,在不降低精度情况下尽量采用标准模型,标准模型常常有成功的途径可供借鉴。由于实际系统的情况复杂,有时很难简单套用现有的模型,必须建立特有的模型。在新模型的运行过程中,有时会发现求解十分困难,必须暂停模拟运行,对模型进行修改简化,如减少模型的变量数目,改变变量的性质,将连续变量改为离散变量或将离散变量改为连续变量,改变变量间的函数关系,如用线性关系代替非线性关系等。

在水资源系统分析中,根据水资源系统的具体情况和不同的研究目的,可以建立某种特定的模型。

## 2. 模拟选优

模拟技术只能提供模拟对象的活动过程,而不能直接产生模拟对象的最优成果,这是它逊色于数学规划方法的一个缺点。但是模拟技术在很多情况下要承担进行最优决策的任务,达到选优的目的。

设模拟模型存在以下关系:

$$B = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

式中, $B$ 为系统的响应,即净效益; $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为系统的各变量。那么选优即是利用这一关系,设法寻求 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ ,确定最优值 $B^*$ 。

在模拟技术中要取得最优成果,目前采用的大多是抽样法。抽样法分两类,一类是系统抽样法,即根据一定的有秩序的原则对系统变量进行取值,然后进行优选;另一类是随机抽样法,它是根据随机分布规律对系统变量取值,然后进行优选。

系统抽样方法又分为多种。目前较实用的有均匀网络法、单因子法、双因子法、边际分析法以及最陡梯度法。

抽样方法的选择应适应所作试验的特征。如果在一个大的试验中,有很多设计方案需要检查,可用均匀网络法及随机抽样法;而对于少量棘手的试验,一个试验的结果可能用于确定下一个试验的特点,因此只有不多的设计方案需要检验,此时可以采用单因子抽样法、

边际分析法(双因子抽样法)。

### (1) 均匀网络法

这一方法的实质是对每一变量在规定范围内做相同数量的取值,然后进行优选。如有  $n$  个变量,每个变量取  $m$  个值,则这一抽样的规模为  $m^n$ 。如  $n = 2, m = 4$ ,则抽样规模为 16。响应曲面的网络密度取决于抽样中各变量取值的可能组合。随着变量数目的增加,对于要求具有一定网络密度的响应面来说,其组合数目按变量的指数倍增长。若有 12 个变量,每个变量取两个值,则抽样中含有  $2^{12}$  即 4096 个组合。

均匀网络法就是在均匀的网络上将整个响应曲面用地形图的形式绘制出来,从而形成比较直观的图解,但该方法仅适用于变量个数较少的情况。有了均匀网络上的地形图,可明显地看出其峰谷的位置,从而可以求得其最高点即响应最大值,或最低点即响应最小值,这就是寻求的最优成果。

### (2) 单因子抽样法

这一方法的实质是各变量中除一个变量外其他均认为是常数,逐步改变这个变量的数值,直至响应的最大值出现,这样就得出一个记录。将这一过程重复,对每一变量都作同样的处理,直到响应值不能改善为止。

单因子抽样法对各变量相互独立的情况十分适用。若变量之间有相互联系,也可假定某变量在某一范围内为独立的,并利用此方法进行优选。

### (3) 边际分析法(双因子抽样法)

与单因子抽样法不同,边际分析抽样法不是只改变一个变量的值,而是同时改变两个变量的值,并认为其余变量为常数。因而,边际分析法的原理与单因子抽样法相同,它也可称为双因子抽样法。这种方法也适用于系统变量间具有相互关系的情况。

边际分析法是经济分析计算中常用的方法之一<sup>[175]</sup>。

### (4) 最陡梯度法

这是一种迭代方法。顾名思义,这种抽样方法是使抽样在响应曲面上由低向高逐步移动,而且这一移动是沿着最陡的方向进行,即在斜坡上取最短的路径进行移动。

使用这一方法时,首先要选择好起始点,然后分别改变每一变量的取值,同时令其余变量为常数。改变变量的取值时,要注意这一改变足以能使系统净效益值发生可以见到的变化,但也不要过大,以防响应值的变化变成非线性。显然,这种变化就是净效益函数对每一变量的偏导数的近似值。计算每一变化的影响,关键在于定出这次变化的距离与方向。

最陡梯度法与单因子抽样法和边际分析法相比,最大的优点在于其每一步都度量了各变量对系统的净效益的综合影响,而且运用该方法能很快地达到最优值。其主要缺点是,在响应曲面有若干闭合高地或边缘高地的情况下有可能失掉真正的高峰。因而起始点的选择非常重要,起始点选在一个次要的陡坡上,则上述步骤只能引至该陡坡的顶部,而不能达到真正的顶峰。

### (5) 随机抽样法

随机抽样法也是优选的方法之一。随机抽样法是对每一个系统分量在它的总体范围内随机地进行取值。这个方法也是点绘出响应曲面的地形图,然后据此寻求出系统各分量的最优组合。

同均匀网络法一样,随机抽样的效果因抽样规模和响应曲面特性的不同而异。抽样

越多,信息越好。响应曲面如果是平滑的地形,则各变量随机组合落到高净效益区的概率就比起伏曲面情况大。若响应曲面中高部位的比例高,则接近最高点的随机抽样概率就大。

在运用模拟技术时,如能将上述几种主要的优选方法结合使用,将会取得更好的效果。决策时,掌握响应曲面的特性是很重要的,如果能大致了解响应曲面的主要特性,在进行抽样中尽量适应这种特性,将促使模拟运行更快接近最优运行。然而在一般情况下,这种响应曲面的特征常常是未知的,因而经常采用均匀网络法或随机抽样法。当响应曲面的有用范围已经确定,则可进一步在该范围内使用上述任何适当的一种或几种优选方法,作更仔细的寻优计算。有时为了防止丢失可能的最高效益点,可以选择几个不同的初始点,进行最优效益点的搜索,如果找到若干个高效益点,再在其中确定最优的一个方案。这些方法的具体采用要根据计算机、经费、工作期限等条件而定。

### 3. 实际应用及存在问题

计算机模拟技术目前已在国内外优化决策中被广泛应用,如1987年白宪台等人<sup>[176]</sup>的平原湖区治涝系统模拟模型;1993年费良军、施丽贞等人<sup>[177]</sup>的灌溉系统模拟;1972年Jocoby等人<sup>[178]</sup>的流域规划模拟模型。其主要存在的问题是:对方案组合“爆炸”的最优化问题选优困难,上述文献的实例优化均是对有限的几个方案进行模拟比较选优。

#### 1.5.2 定性知识模型概述

优化决策是科学也是艺术。说它是科学,因为人们进行选择 and 判断应当尽可能地符合客观实际。这就要求决策者尽可能真实地了解问题的背景、环境和发展变化规律,尽可能详细地占有资料,尽可能广泛地掌握正确的决策方法和各种决策辅助工具。说它是艺术,因为各种选择和判断终究是由人作出的,决策的正确与否、优良差劣,与决策者的素质、经验、才能有很大的关系。

数学工具在决策中起着重要的作用,在复杂的决策问题面前,人们往往需要利用数学模型对实际问题进行抽象和简化,进而对实际问题进行系统分析。在决策过程中利用数学模型的优点在于分析问题容易、目的性强、可以进行模拟计算、便于应用计算机等先进手段。由于人们的选择和判断总是在某种标准下进行的,在此标准下,为了要作出“好的”决策,就促成与决策有关的应用数学分支:线性规划、非线性规划、多目标规划、多准则决策的迅速发展,最优化技术几乎成了决策分析的代名词。到20世纪70年代末、80年代初,最优化技术发展得越来越抽象,使绝大多数工程技术人员望而生畏,数学模型的规模越来越大,对计算机的内存与运算速度要求越来越高,一项复杂的系统分析耗资巨大,以至形成了一种数学模型的“泥潭”。在这种情况下,一些有远见的运筹学家开始冷静地看待和正确地评价复杂的数学模型对决策分析的作用。问题是显而易见的,人们无法忽视或回避在决策过程中决策者的选择和判断所起的决定作用,数学模型并非万能工具,决策中总有大量因素无法定量地表示。问题的答案几乎再明白不过了:运筹学家们必须回到决策的起点和终点——人的选择和判断上来,认真地研究决策思维的规律,即人们进行选择和判断的规律。

正是在这种背景下,提出了层次分析法、特斐尔法、模糊数学选优法等定性知识模型。

#### 1. 层次分析法概述

美国著名运筹学家、匹兹堡大学教授 Saaty 于 20 世纪 70 年代中期提出了层次分析法



(the analytic hierarchy process, AHP)<sup>[179]</sup>。

尽管 AHP 的应用需要掌握简单的数学工具, 尽管 AHP 有深刻的数学原理, 但它本质上是一种决策思维方式。AHP 把复杂的问题分解为多个组成因素, 将这些因素按支配关系分组形成有序的递阶层次结构, 通过两两比较的方式确定层次中诸因素的相对重要性, 然后综合人的判断以决定决策诸因素相对重要性总的排序。AHP 体现了人们决策思维的基本特征, 即分解、判断、综合。运用 AHP 解决问题, 大体可分为四个步骤: ① 建立问题的递阶层次结构; ② 构造两两比较判断矩阵; ③ 根据判断矩阵计算被比较元素的相对权重; ④ 计算各层元素的组合权重。

AHP 作为一种有用的决策工具有如下明显的优点。

第一是它的适用性。用 AHP 进行决策, 输入的信息主要是决策者的选择与判断, 决策过程充分反映了决策者对决策问题的认识, 加之很容易掌握这种方法, 这就使以往决策者与决策分析者难于互相沟通的状况得到改变。在多数情况下, 决策者直接使用 AHP 进行决策, 大大增加了决策的有效性。

第二是它的简洁性。了解 AHP 的基本原理, 掌握它的基本步骤, 对于具有高中文化程度的人并不困难。用 AHP 进行决策分析可以不使用计算机, 用一个简单计算器足以完成全部运算, 所得的结果简单明确、一目了然。

第三是它的实用性。AHP 不仅能进行定量分析, 也可以进行定性分析。它把决策过程中定性定量因素有机地结合起来, 用一种统一方式进行处理。AHP 也是一种最优化技术, 从学科的隶属关系看, 人们往往把 AHP 归为多目标决策的一个分支。但 AHP 改变了最优化技术只能处理定量分析问题的传统观念, 使它的应用范围大大扩展。许多决策问题如资源分配、冲突分析、方案评比、计划等均可使用 AHP, 对某些预测、系统分析、规划问题, AHP 也不失为一种有效方法。

第四是它的系统性。人们的决策大体有三种方式: 第一种是因果推断方式, 在相当多的简单决策中, 因果推断是基本方式, 它形成了人们日常生活中判断与选择的思维基础。事实上, 对于简单问题的决策, 因果推断是够用的。当决策问题包含了不确定因素, 则需要第二种推断方式, 即概率方式。此时决策过程可视为一种随机过程, 人们需要根据各种影响决策的因素出现的概率, 结合因果推断进行决策。近年来发展起来的系统方式是第三种决策思维方式, 它的特点是把问题看成一个系统, 在研究系统各组成部分相互关系以及系统所处环境的基础上进行决策。对于复杂问题, 系统方式是有效的决策思维方式。相当广泛的这一类系统具有递阶层次的形式, AHP 恰恰反映了这类系统的决策特点。当然, 由递阶层次可以研究更复杂的系统, 如反馈系统, AHP 还可以加以扩展。

一般来说, 越深刻的科学理论具有越简单的表现形式, AHP 正是如此。如前所述, 很容易了解和掌握 AHP 的基本原理和方法是 AHP 的一个方面; 另一方面 AHP 有着深刻的数学背景。真正搞清 AHP 的原理需要弄懂 AHP 的公理体系、具有递阶层次结构的数学形式、排序理论以及一般系统理论, 需要涉及 Perron-Frobenius 理论、Fuzzy 数学、数据逻辑、统计推断、度量理论等多个数学分支。

Saaty 提出 AHP, 可以追溯到 20 世纪 70 年代初<sup>[179-185]</sup>。1971 年他曾为美国国防部研究所谓“应急计划”, 1972 年为美国科学基金会研究电力在工业部门分配问题, 1973 年为苏丹政府研究苏丹运输问题。由于研究工作的需要, 他感到必须考虑综合定性定量分析使

人脑决策思维过程模型化(或规范化)的方法,从而初步形成了 AHP 理论的核心,即很多复杂系统可以简化为有序的递阶层次结构,决策问题通常表现为一组方案优先顺序的排列问题,而这种排序又可以通过简单的两两比较形式导出。这些思想始见于 Saaty 分别于 1972 年和 1975 年出版的《用于排序和计划的特征根分配模型》<sup>[180]</sup>和《层次和排序——特征根分析》<sup>[182]</sup>。正式提出 AHP 的论文,一般认为是 Saaty 在 1977 年举行的第一届国际数学建模会议上发表的《无结构决策问题的建模——层次分析理论》。从那时起,AHP 开始引起人们的注意,并且应用在各个领域。1980 年 Saaty 出版了关于 AHP 的专著<sup>[183]</sup>,全面系统地论述 AHP 的原理、应用及数学基础。随后他又陆续撰写了两本侧重论述 AHP 应用的著作,即 1981 年出版的《排序的逻辑》<sup>[184]</sup>和 1982 年出版的《领导者的决策》<sup>[185]</sup>。

AHP 的应用范围十分广泛,根据对国外 1980—1985 年公开发表的 119 篇 AHP 论文的统计<sup>[179]</sup>,AHP 的应用共涉及 18 个领域,它们是:能源政策和资源分配、运筹学方法评价、企业管理与生产决策、建筑学、管理信息系统、科学技术发展、经济分析和计划、政治和冲突分析、环境、行为科学、法律、医疗卫生等。在国内,AHP 也得到了广泛的应用。如 1995 年魏世孝等人<sup>[186]</sup>对工业技术和产品结构优化;1995 年李湛和朱宽雄<sup>[187]</sup>的价值工程功能评价;1996 年朱文彬<sup>[188]</sup>的水库移民安置和经济发展协调管理模型中的应用等等。

勿庸讳言,AHP 在应用上有其局限性,这主要表现在以下三个方面:首先,AHP 的应用主要是针对那种方案大抵确定的决策问题,一般来说它只能从已知方案中选优,而不能生成方案。也就是说,应用 AHP 时,事先对决策的各种方案要有比较明确的规定。第二,AHP 得出的结果是粗略的方案排序。对于那种有较高定量要求的决策问题,仅运用 AHP 是不适合的。当然,并不排斥把 AHP 与其他决策方法结合起来。例如在运用多目标规划时,把 AHP 作为目标加权的方法已为实践证明是有效的。也可以采用 AHP 自身派生出来的一些方法,如资源分配的 AHP、成本效益分析的 AHP,使某些定量分析要求精度不很高的问题得到满意的解答。第三,在 AHP 的使用过程中,无论建立层次结构还是构造判断矩阵,人的主观判断、选择、偏好对结果的影响极大,判断失误即可能造成决策失误,这就使得用 AHP 进行决策时主观成分很多。规划论采用比较严格的数学计算,以期把人的主观判断降到最低程度,但得出的结果又往往难于被决策者所接受。AHP 的本质是试图使人的判断条理化,但所得到的结果基本上依据人的主观判断。当决策者的判断过多地受其主观偏好的影响而产生某种对客观规律的歪曲时,AHP 的结果显然就靠不住了。要使 AHP 的决策结论尽可能符合客观规律,决策者必须对所面临的问题有比较深入和全面的认识。此外,在运用 AHP 时采用群组判断方式也不失为克服主观偏见的一个好办法。

无论是理论上的不完善,还是应用中的缺陷,都不会影响 AHP 在决策中的地位和作用,目前 AHP 已被运筹学界视为简单有效的多目标决策方法。AHP 的应用范围在逐渐扩大,以它为基本方法的决策支持系统——“专家选择”已商品化,在国外市场受到欢迎,AHP 理论和方法论的研究人员日益增加。可以期待,AHP 作为一种决策思维方式,对人们各种各样的决策过程起着越来越重要的作用。

## 2. 特尔斐法概述

大多数决策者在他们作出自己的判断时,都要听取专家们的意见。由于实际情况往往是非常复杂而且了解甚少的,因而难以指望单枪匹马地作出足智多谋的决策。在这种情况下,进行决策的传统方法是召集公开的讨论会,听取专家们的意见,力图在专家之间达成一

致意见。然而,讨论会的结果有时不会令人满意,因为“大人物”的个人意见会严重影响集体的看法,或者因为多数人的意见很可能造成一种“随大流”的效果。特尔斐法<sup>[188]</sup>是在 20 世纪 40 年代末由兰德公司创立的,这种方法力图克服上述弊病,它用匿名的“背靠背”形式或通过中间人的办法,迫使介入预测工作的专家们发表自己的意见。中间人起着控制中心的作用,分析被搜集来的每一轮的意见和反应,并把这些意见反馈给参加下一轮意见征询的人。总之,特尔斐法就是通过一张接一张的意见征询表作出匿名的、逐步深入的反应及有控制地把集体的意见反馈回去的方法,是一种收集意见和组织专家预测未来的有条不紊的程序。期望通过这种程序,使各位专家对预测问题的反应趋于一致,从而对真实前景作出良好估计。

特尔斐方法有两个主要前提:第一,需要在该专业领域中具有丰富知识的人(即公认的专家)提出令人信服的预测;第二,相信几个人的知识结合在一起至少不比一个人差。

这种方法通常开始于对有待预测的问题拟出明确(毫不模棱两可)的说明书,然后把它连同有关的背景信息送给参与研究的每一个人。通常请专家小组将他们认为各自专业领域里与所研究的预测问题有关的主要方面列出清单,发出的第一轮意见征询表可能是向每个专家征询待测问题的说明书中所列的事件大约在何日发生。由于对这类问题的反应一般是不一致的,通常算出这些意见分布的四分位数,并在第二轮开始时把它交给各位专家。四分位数是指在两个极端意见(这里是事件发生的日期)之间,划分四个区,第一个区中含有 25%的意见,第一和第二区中共含有 50%的意见,依此类推。

特尔斐方法的第二轮是要求专家们结合从第一轮得到的四分位数情况,重新考虑他们的意见,参加人员有权根据全组的反应来校正自己原来对问题的估计。此时,参加人员可以要求搜集并向他们提供关于预测问题的附加信息。

如果有一个估计量大大地偏离了全组的中值,应当要求提出这个估计量的人说明他持这种意见的理由。通常鼓励和敦促组员们对别人作出的落于中心区域以外的估计量提出反对或支持的理由。这些理由以及全组对第二轮意见征询表作出的答复,又被进行分析并采用统计方法予以归纳(虽然其他定量方法也可用来表示全组意见的收敛或发散程度,但通常采用四分位数分区法)。

当有必要进行第三轮意见征询时,参加者接到第二轮反应的结果汇总,并请他们根据第二轮的全组反应重新考虑或解释他们作出的估计。他们被再一次要求重新斟酌他们早先的估计,还可能被要求解释为什么他们的估计与组内大多数人的意见不一致。

特尔斐方法使用以来所得到的结果一般是令人满意的,因为在许多情况下都达成了合理的一致意见,从而导致作出相应的计划和决策。Brown 和 Bernice 论述了关于取得这些结果的特点<sup>[189]</sup>:自应用特尔斐法以来,在大多数情况下,意见总是渐趋于一致。在少数情况下,当无法取得大体相同的一致意见时,通常可以发现对某个问题的意见按不同的学派而互相对立。发生这种情况可能是由于各种意见是从不同的数据资料推论出来的,也可能是对同一数据资料有不同解释或对同一问题有不同的认识。在这种情况下,可以设想用意见征询表的方式进行几轮匿名的争论,最终有可能消除导致分歧的基本原因,从而取得真正一致的意见。然而即使达不成一致意见或者在还没有达成一致意见前中断了征询意见的过程,特尔斐方法仍能使形成各种不同意见的推理过程具体而明朗化,从而有助于澄清问题。”

上面引文的最后一句巧妙地概括了特尔斐预测决策方法的主要能力所在,因为特尔斐

方法的本来目的就是为在模糊领域对问题求得一致判断。正由于这个原因,把这种判断当作对未来的精确描述是不合适的。特尔斐法的其他优点是:预测费用较低、用途很广、花费专家的时间最少。应用特尔斐法进行预测决策的实例很多,详见文献[189—192]。

### 3. 模糊数学优化方法概述

模糊性是事物客观存在的,是可以描述的一种属性。1965年,美国控制论专家 Zadeh<sup>[81]</sup>首先提出模糊集合的概念,给出了模糊现象的定量描述和分析运算的方法,模糊数学从而诞生。1967年, Bellman 又提出了模糊优化的概念<sup>[104]</sup>。从此,模糊数学和模糊优化逐渐引起了人们的重视和研究。我国于20世纪70年代中期也开始了这方面的研究工作,十多年来,模糊数学及其在各方面的应用,如模糊评判、模糊优化、模糊决策、模糊控制以及模糊识别和聚类分析等许多方面发展十分迅速。

目前,全世界关于模糊集及其应用方面的杂志有:在荷兰出版的《模糊集与系统》(*International Journal of Fuzzy Sets and Systems*)杂志;在中国出版的《模糊数学》杂志;还有供研究和交流的《模糊及其应用通报》(*Bulletin for Studies and Exchanges on Fuzziness and Its Application*)等。模糊评判、模糊优化、模糊决策、模糊识别、聚类分析已在水资源优化中得到了广泛的应用<sup>[193—199]</sup>。

### 1.5.3 本节小结

数学模型和知识模型相结合是大系统理论发展和完善的方向,本节对常用的知识模型进行了综合评述。这些方法均建立在严格的数学基础上,运用一整套科学合理的方法使人的主观偏见降低到最低程度,并可充分利用群体专家的知识和经验来解决数学模型很难解决和无法解决的问题。但这些方法的共同缺陷是在决策过程中不能生成和淘汰方案,只能在已有的方案中给出粗略的方案排列。

# 第 2 章 大系统试验选优理论的提出 与正交试验的优良性

## § 2.1 大系统试验选优方法的提出与研究进展

### 2.1.1 问题的提出

现行的各类大系统优化理论均存在着这样或那样的缺陷,为此,作者另辟蹊径,采用数学模型和试验选优方法相结合的方法来研究大型复杂数学规划问题,采用数学模型、试验选优方法和知识模型相结合的方法来研究复杂模拟系统和定性系统的最优化问题,并在上述领域的理论与方法上取得了一些进展,对大型输水渠道工程、输水树状管网、地下水和地面水联合调度、灌区规划的优化实例进行了应用研究。

### 2.1.2 研究进展与创新之处

近十年来,作者在三项国家自然科学基金的连续资助下,在大系统试验选优领域的理论与应用方面取得了以下成果。

#### 1. 多维动态规划领域

##### (1) 多维动态规划的广义拉氏方法

在传统多维动态规划拉格朗日方法的基础上,引入松弛变量,把加入目标函数中的不等式约束变为等式约束,并在迭代过程中进行检验递推,提出了广义拉氏方法。广义拉氏方法同传统拉氏方法有相近的优化工作量,但与传统法相比具有以下特点:①可适用于一般函数(针对传统拉氏方法要求目标函数应为非减函数等限制);②可以获得约束均非等式成立时的最优解;③广义拉氏方法为可行法,而传统动态规划拉氏方法为不可行法。

##### (2) 多维动态规划试验选优方法

在广义拉氏方法的基础上,引入试验选优思想,对拉氏乘子采用正交试验方法选优,多维动态规划模型的决策变量仍采用一维动态规划法求解,从而对某些问题可在一定程度上克服“维数灾”。

##### (3) 多维动态规划的应用

介绍了大型渠道工程系统优化设计的定性混合多维动态规划模型,模型以计算分析期内总支出费用最小为目标函数,各渠段纵坡、各渠段和渠段末附属建筑物定性方案为决策变量,考虑渠道首末水位衔接、流速不冲不淤、最小水位衔接、填挖土方和总投资约束。模型以一个数学模型解决大中型渠道工程系统优化设计的纵横断面设计参数、工程规划措施、配套建筑物(如梯级泵站的位置、个数和最优主要设计参数)的最优化。

#### 2. 大线性块角结构问题

##### (1) 大线性块角结构问题的试验优选方法

运用多维动态规划试验选优的思路来研究耦合约束相对较少的大线性块角结构问题,以子系统一个块角的变量进行递推,将 $m$ 个耦合约束中的 $m-1$ 个约束加入至目标函数中,从而把一个大线性块角问题单纯形法求解的大矩阵迭代运算,转化为主对角线上的小矩阵迭代运算,使某些耦合约束较少的块角结构大线性问题的求解比采用单纯形法更加优秀。

### (2) 树状管网线性优化模型中的应用

在总结前人的基础上,对树状管网线性优化模型进行了修改,增加了两个水头耦合约束,从而使树状管网线性模型转变为具有两个耦合约束的块角模型,对江苏苏南一实例模型进行了分析计算,得到了较为满意的结果。

## 3. 复杂非线性规划

### (1) 复杂非线性规划试验选优方法

针对复杂非线性一般模型,对模型中的独立变量和关联变量采用不同的优化技术,对独立变量采用试验选优方法,对关联变量采用常规优化技术,从而使某些现行非线性优化方法不能求解或很难求解的复杂问题的求解成为可能。

### (2) 地面水、地下水联合调度非线性模型的应用求解

在总结前人的工作基础上,对江苏一灌区优化调度原模型进行了稍微修改,增加了一个耦合约束。采用该试验选优方法,使一个复杂的非线性问题转化为多维动态规划问题,书中给出了不同方法的求解比较结果。

## 4. 复杂模拟模型和定性知识模型

### (1) 模拟模型的优化方法和应用

把模拟模型、知识模型(AHP法、模糊选优和聚类方法)和试验选优理论相结合,系统地提出了运用计算机模拟模型的多目标、单目标试验选优方法,从而使某些方案组合“爆炸”的最优化问题成为可能。书中介绍了灌区优化规划模拟试验选优的实例。

### (2) 定性知识模型的试验选优方法和应用

把知识模型(层次分析、模糊选优)和试验选优方法相结合,可以在方案选优中淘汰和生成方案,从而使某些大型定性问题的优化成为可能。书中介绍了对江苏一灌区进行优化规划的实例。

### 2.1.3 有待解决的问题

通过这几年的努力,大系统试验选优理论已基本形成,并在不少实例应用中取得了良好的成果,但尚有不少问题有待于进一步研究。

① 本书介绍的试验选优方法主要是部分试验选优方法——正交试验法,其他部分试验选优方法在最优化领域中的应用有待于进一步探讨。

② 正交试验法试验分析获得的是理论最优解,理论上,获得的理论最优解有时不一定是所需要的实际全局最优解,有可能是接近全局最优解的次优解,如何使理论最优解成为全局最优解有待于进一步探讨。

## § 2.2 试验选优理论与正交试验的优良性

### 2.2.1 优选法

为了达到一定的目标,可通过试验寻求影响该目标的一些因素最优值,优选法就是一种

用尽可能少的试验次数尽快地找到某些因素最优值的有效方法,它是现代科学试验的方法之一。通常与目标有关的因素有很多,如果安排试验时只考虑改变对目标影响最大的某一个因素,而其他因素保持不变,就是单因素问题的优选方法,否则即为多因素试验选优方法。

### 1. 单因素问题的优选方法

在有界区间 $[A, B]$ 上的函数 $f(x)$ ,若存在一点 $\bar{x} \in [A, B]$ ,当 $A \leq x_1 < x_2 \leq \bar{x}$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2) < f(\bar{x})$ ,当 $\bar{x} < x_3 \leq x_4 \leq B$ 时,有 $f(\bar{x}) > f(x_3) > f(x_4)$ ,则称 $f(x)$ 为 $[A, B]$ 上的单峰函数。反之,当 $A < x_1 \leq x_2 \leq \bar{x}$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ,当 $\bar{x} < x_3 \leq x_4 \leq B$ 时,有 $f(\bar{x}) < f(x_3) < f(x_4)$ ,则称 $f(x)$ 为 $[A, B]$ 上的单谷函数。单峰函数、单谷函数统称为单极值函数。

单因素优选方法适用于此类单极值函数。峰值点、谷值点统称为极值点,使函数得到最大峰值的自变量值称为最大值点,使函数取得最小谷值的自变量值称为最小值点,最大值点和最小值点统称为最优点,区间 $[A, B]$ 称为单极值函数的含优区间。该类寻优方法主要有均分法、对分法、0.618法、分数法等。

均分法是把含优区间均匀分成若干份,并在每一点上进行试验,同时对各分点试验结果进行比较,选出极值点。

对分法总是在含优区间的中点安排试验,根据中点的试验结果确定取舍哪一部分,而后再新含优区间的中点再进行试验,不断循环直至获得满意的结果为止,因此对分法也称为平分法。在含优区间内,如果做一次试验便可决定下次试验点的方向,此时可用对分法。

0.618法亦称黄金分割法,也就是先在 $x_1 = A + 0.618(B - A)$ 处做第一次试验,再在 $x_1$ 的对称点 $x_2 = B - 0.618(B - A)$ 处做第二次试验,如果函数 $f(x)$ 为单峰函数,可在第二次试验的基础上比较试验结果 $y_1 = f(x_1)$ 及 $y_2 = f(x_2)$ 的大小。如 $f(x_1)$ 大,就去掉 $(A, x_2)$ 部分,在剩下的范围中又形成一个新的含优区间 $(x_2, B)$ ,继续试验,直到产生所需的满意结果为止。

分数法适用于一些试验的试验点只能取整数而不是0.618的倍数,或者预先规定了试验的总次数的情况,此时应用分数法比0.618法更为方便,试验结果精度更高。任何一个小数都可以用分数或用分数近似表达,如圆周率 $\pi$ 用小数表示为3.1415926...,用分数可近似地表示为 $\frac{355}{113}$ 。0.6180339887...也可以用一批渐近分数 $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \dots$ 近似地表示。这批渐近分数的构成规律是斐波那契数列1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...相邻两数的商。斐波那契数列从第三项起每一项都是前面两项的和。它的一般表达式是

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

不难看出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\dots$$

由渐近性质可以看出,分数法和0.618法的差异不大。

试验的“精确度”是试验得到的最优点至真正的最优点的最大可能距离。设含优区间  $[A, B]$  长为  $l = B - A$ , 对于均分法来说经  $n$  次试验后精度是  $l/(n+1)$ , 也可推出 0.618 法的精确度是  $(0.618)^n l$ , 分数法的精确度是  $1/F_{n+1}$ , 对分法的精确度是  $l/2^n$ 。

把  $(n+1)$ 、 $F_{n+1}$ 、 $2^n$ 、 $1/(0.618)^n$  分别叫做均分法、分数法、对分法和 0.618 法的  $n$  次试验的“搜索范围”, 并用  $L_n$  表示。各种方法的搜索范围都可预先算出来, 知道了试验范围长度  $l$  和试验次数  $n$ , 试验的精确度可按  $l/L_n$  进行计算。当试验次数增加时, 搜索范围增加的速度称为这些方法的“搜索效率”, 可见均分法的“搜索效率”最低, 对分法最高。

根据试验次数, 可得到各种不同方法计算出试验结果的精确度。精确度数值越小, 说明该试验结果的自变量越接近最优点。

## 2. 分批试验法

上述均分法、对分法、0.618 法、分数法等都是根据前面的试验结果再安排后面的试验, 这种安排试验的方法叫做序贯试验, 它的优点是总试验次数很少, 但往往做完一个试验要经过较长的时间才能得到试验结果, 若等到此次结果出来才安排下次试验要花费较多的时间, 为加速进行试验, 常采用一批同时做几个试验的方法, 它也适用于试验结果必须在同一条件下才能得到鉴别的情况。根据不同的条件和要求, 分批试验的方法也不同。

如能预先确定总的试验个数(通过试验范围和所要求的精确度可计算出试验个数), 或预先限定了试验的批数和每批试验的个数, 可使用预给要求法。

如果只给了含优区间  $[A, B]$ , 而试验的总次数和精确度要由试验的结果决定, 这时就采用比例分割法。运用这种方法, 每批做偶数个试验时, 常使用较简便的均分含优区间方法, 每批做奇数个试验时, 才把试验点按比例安排在含优区间内, 即采用比例分割法。

### 2.2.2 正交设计方法

实际问题是错综复杂的, 影响某一项或几项系统指标的因素有很多, 有时各因素的主次一时难以分清, 有些因素单独起作用, 而有些因素相互制约, 需对多个因素选优, 以期达到预定的指标。正交设计(orthogonal design, OD)方法就是处理多因素试验选优的一种科学试验方法<sup>[200-206]</sup>, 它采用一种规格化的正交表合理安排试验。使用这种方法只要做较少次数的试验便可判断出较优的方案, 若再对试验结果进行简单的统计分析, 还可以更全面、更系统地掌握试验结果, 作出正确判断。

#### 1. 正交设计

##### 试验指标、因素和水平

明确试验指标、选好因素、恰当地定出各因素的水平变化范围, 是非常重要的, 它对得出正确的结论有着十分重要的意义, 必须慎重处理。

通过试验对试验指标进行直观分析, 回答以下三个问题:

- ① 对试验指标的影响, 哪个因素重要, 哪个因素不重要;
- ② 每个因素以哪个水平为好;
- ③ 各因素依什么样的水平搭配起来指标较好。

多因素正交设计就是要解决这类问题的一种数学方法。

#### 2. 安排试验的原则

现以三个因素, 每个因素取三个水平为例, 说明安排试验的原则。



如果每个因素各选取三个水平组成所有可能的试验方案,则有  $3 \times 3 \times 3 = 27$  种。显然,对所有 27 种可能的搭配都进行试验,再对试验结果进行分析,就可以使问题得到解决。但是能否只做其中一小部分试验,通过分析就可以使问题圆满解决呢?在比较复杂的多因素试验中这个问题就更为突出,主要反映在解决两个矛盾:一是,所有可能搭配的试验次数与实际进行的少量试验次数的矛盾;二是,实际上所做的少数试验与全面掌握内在规律之间的矛盾。

为了解决第一类问题,要求必须合理地设计和安排试验,即要遵循“均衡搭配”的原则,以便通过尽可能少的试验次数就可抓住主要矛盾。为了解决第二个矛盾,要求对试验结果进行科学的分析,即在“均衡搭配”的基础上,根据正交试验的“综合可比性”原则,认识系统的内在规律,从而为系统优化提供条件。

上述例子中,三个因素为 A、B、C,三个水平记为 1、2、3。如果按它们所有可能组合的情况,需做 27 次试验。在图 2-1 中,每个黑点代表一个试验,该图表明了各因素不同水平的组合搭配情况。如果只做 9 次试验,那么这 27 次试验中的哪 9 次才具有代表性呢?图 2-2 中的 9 次试验安排得就比较好,每一个因素的每一个水平都有三个试验。正由于它们搭配均衡,所以任一因素的任一水平与其他因素的每一水平相遇一次,且仅相遇一次。因此,才便于对试验结果进行科学分析,这就是安排试验的均衡搭配原则。

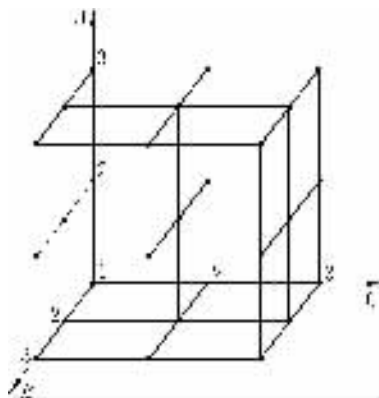


图 2-1 三因素三水平全部试验组合

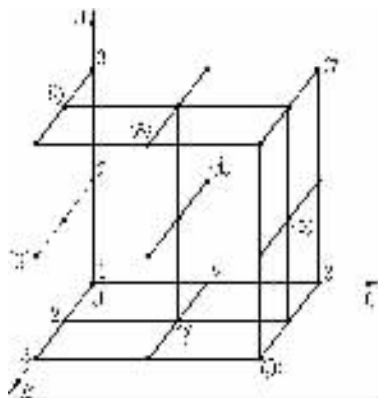


图 2-2 三因素三水平正交试验组合

对三因素三水平的情况,由几何图形可以看出如何安排试验才能均衡搭配。在因素、水平较多的情况下,可根据因素和水平的不同,选用已经编排好的表格安排试验,这种表格就是正交表。常用的正交表有:  $L_4(2^3)$ ,  $L_8(2^7)$ ,  $L_{16}(2^{15})$ ,  $L_{32}(2^{31})$ , ...,  $L_9(3^4)$ ,  $L_{27}(3^{13})$ , ...,  $L_{16}(4^5)$ ,  $L_{25}(5^6)$  等。

### 2.2.3 正交试验的优良性

早在 1977 年,北京大学数学力学系概率教研组就对正交试验的优良性作了深入系统的讨论<sup>[206]</sup>,现将主要内容摘录如下。

#### 1. 试验设计问题的数学模型

考察  $m$  个因素  $F^1$  (共  $s_1$  个水平),  $F^2$  (共  $s_2$  个水平), ...,  $F^m$  (共  $s_m$  个水平) 对某指标  $\mu$  的影响,当  $F^j$  取水平  $\lambda_j$  时 ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), 指标  $\mu$  的理论值为  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 。注意

理论值  $\{\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_1 = 1, 2, \dots, s_1, \lambda_2 = 1, 2, \dots, s_2, \dots, \lambda_m = 1, 2, \dots, s_m\}$  共有  $s_1 s_2 \dots s_m$  个, 可以观察到试验值  $y(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) + \epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 。  $\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  是试验误差, 它是一个随机变量, 具有一定的统计特性。 如何根据试验值  $\{y(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)\}$  来估计理论值  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  通过试验来回答下列问题: ① 因素  $F^{j_0}$  的水平变化对指标  $\mu$  的影响; ② 找到  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ , 使  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  在  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$  时达到最大值(或最小值), 这就是所谓寻找最优生产条件(或叫工程条件)问题。

显然, 要是把所有的水平组合(即可能的条件)都进行试验(即全面试验), 那代价太大了, 故问题的提法是: 从这  $s_1 s_2 \dots s_m$  个所有组合中合理地尽量少地挑选一部分组合作试验, 然后利用得到的试验值进行统计推断来回答上面提出的问题。 为此, 给出如下数学定义。

**定义 1.1** 设  $s_1, s_2, \dots, s_m$  都是不小于 2 的正整数。 称矩阵  $A = (\lambda_{ij})_{n \times m}$  是一个  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计,  $\lambda_{ij} \in \{1, 2, \dots, s_j\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ 。 令

$$\theta_0 = \frac{\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_m} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}{s_1 s_2 \dots s_m}$$

这里, 求和号下的  $\lambda_1$  从 1 到  $s_1, \dots, \lambda_m$  从 1 到  $s_m$ 。  $\theta_0$  乃全部理论值的总平均。 令

$$\theta_{\lambda_j} = \frac{\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \lambda_m} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m)}{s_1 \dots s_{j-1} s_{j+1} \dots s_m} - \theta_0$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \lambda_j = 1, 2, \dots, s_j$$

这里  $\theta_{\lambda_j}$  称为因素  $F^j$  在  $\lambda_j$  水平下的主效应(简称效应)。

**定义 1.2** 称因素  $F^1, F^2, \dots, F^m$  的理论值  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  符合可加模型, 若成立(对一切  $1 \leq \lambda_1 \leq s_1, \dots, 1 \leq \lambda_m \leq s_m$ )

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \theta_0 + \sum_{j=1}^m \theta_{\lambda_j} \quad (2-1)$$

根据主效应的定义易知: 对一切  $j$  成立

$$\sum_{\lambda_j} \theta_{\lambda_j} = 0 \quad (2-2)$$

显然对于可加模型来说, 要研究  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的性质, 就只需要把诸参数  $\theta_0$  和  $\theta_{\lambda_j} (j = 1, 2, \dots, m, \lambda_j = 1, 2, \dots, s_j)$  估计出来。 既然试验值是带有误差的, 因而要求这些参数的估计精度越高越好, 当然估计精度与试验次数的多少及试验方案(即试验的设计)有很大关系。 为了证明在可加模型的前提下, 采用正交设计, 参数的估计精度确实优良, 首先叙述任意  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $A$  下的参数估计。

在设计  $A = (\lambda_{ij})_{n \times m}$  之下, 得到  $n$  个试验值(观测值)  $y$  根据(2-1)式,

$$\begin{cases} y_1 = \theta_0 + \sum_{j=1}^m \theta_{\lambda_{1j}} + \varepsilon_1 \\ y_2 = \theta_0 + \sum_{j=1}^m \theta_{\lambda_{2j}} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ y_i = \theta_0 + \sum_{j=1}^m \theta_{\lambda_{ij}} + \varepsilon_i \\ \vdots \\ y_n = \theta_0 + \sum_{j=1}^m \theta_{\lambda_{nj}} + \varepsilon_n \end{cases} \quad (2-3)$$

这里  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是各次的试验误差。若用矩阵表示, 令

$$x_{ik}^{(j)} = \alpha(\lambda_{ij}, k), \mathbf{X}_j = (x_{ik}^{(j)})_{n \times s_j}, \mathbf{X} = (\mathbf{1}_n, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$$

这里,

$$\alpha(u, v) = \begin{cases} 1 & (\text{当 } u = v) \\ 0 & (\text{当 } u \neq v) \end{cases}$$

于是(2-3)式可写成

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-4)$$

这里  $\mathbf{X}$  是  $\Lambda$  的从属矩阵, 应记作  $\mathbf{X}(\Lambda)$ 。在不产生混淆的情形下, 省去  $\Lambda$ 。

对误差  $\boldsymbol{\varepsilon}$  作下列假定:

$$E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n \quad (2-5)$$

这里  $E$  为数学期望,  $D$  为协方差,  $\mathbf{I}_n$  为阶单位阵。

(2-4)式、(2-5)式为概率统计中熟知的线性模型。现在的诸参数  $\theta_{\lambda_j}$  适合约束条件(2-2)式。为了应用线性模型中的已知定理, 将参数作变换。

设  $\mathbf{T}_j$  是  $s_j$  阶的正交矩阵, 且有结构

$$\mathbf{T}_j = \left( \frac{1}{\sqrt{s_j}} \mathbf{1}_{s_j}, \mathbf{T}_j \right), j = 1, 2, \dots, m \quad (2-6)$$

令

$$\begin{aligned} \eta_j &= \mathbf{T}_j' \boldsymbol{\theta}_j, j = 1, 2, \dots, m \\ \eta_0 &= \theta_0 \end{aligned}$$

于是(2-4)式变成

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-7)$$

这里,

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{1}_n, \mathbf{X}_1 \mathbf{T}_1, \mathbf{X}_2 \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{X}_m \mathbf{T}_m), \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\eta}$  的各分量不受约束, 为保证可估, 对设计  $\lambda$  加点限制。

定义 1.3 称  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\Lambda = (\lambda_{ij})_{n \times m}$  是可行的。若  $\Lambda$  的从属矩阵

$X(\mathbf{A}) = (\mathbf{1}_n, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$  的秩等于  $\sum_{j=1}^m s_j - m + 1$ 。

引理 1.1  $R(\tilde{X}) = R(X(\mathbf{A}))$ 。

这里  $R(\mathbf{A})$  代表矩阵  $\mathbf{A}$  的秩。此引理证明略。

根据线性模型的理论可知,为了使  $\boldsymbol{\eta}$  的各个分量都可估(即存在线性无偏估计),必须且只需  $\tilde{X}$  的各列线性无关,即  $R(\tilde{X}) = 1 + \sum_{j=1}^m (s_j - 1)$ 。换言之说,要让(2-7)式中  $\boldsymbol{\eta}$  的各分量可估,必须且只需  $\mathbf{A}$  是可行设计,这就是可行设计的意义。对于可行设计  $\mathbf{A}$  来说,  $\boldsymbol{\eta}$  的最优估计量为

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\mathbf{y} \quad (2-8)$$

易知  $\boldsymbol{\theta}$  的最优估计值是

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & T_1 & & \mathbf{0} & \\ & & T_2 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & T_m \end{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (2-9)$$

顺便指出  $\hat{\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的最优估计是

$$\hat{\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \hat{\theta}_0 + \sum_{j=1}^m \hat{\theta}_{\beta_j} \quad (2-10)$$

要注意的是,这里的  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  都与设计  $\mathbf{A}$  有关,应该写成  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{A})$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{A})$ , 有时省去  $\mathbf{A}$ 。

定义 1.4 称  $\mathbf{A} = (\lambda_{ij})_{n \times m}$  是  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计,若满足

① 对任何  $j (j = 1, 2, \dots, m)$ , 有  $\lambda_{ij} \in \{1, 2, \dots, s_j\}$ 。且对任何  $k (k \in \{1, 2, \dots, s_j\})$ , 集合  $\{i : \lambda_{ij} = k\}$  的元素个数为  $n/s_j$ ;

② 对任何  $j, u, v (j \neq l, u \in \{1, 2, \dots, s_j\}, v \in \{1, 2, \dots, s_l\})$ , 集合  $\{i : \lambda_{ij} = u, \lambda_{il} = v\}$  的元素个数为  $n/s_j s_l$ 。

显然,每个  $L_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计都是  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计,对任意给定的正整数  $n, D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型的正交设计(即  $L_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交表)可能不存在。可以证明,凡正交设计都是可行设计。

定义 1.5 称可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\tilde{\mathbf{A}}$  是  $\mathbf{A}$  最优的,若对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$ , 成立

$$D[\hat{\theta}_0(\mathbf{A})] \geq D[\hat{\theta}_0(\tilde{\mathbf{A}})]$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{s_j} D[\hat{\theta}_{jk}(\mathbf{A})]}{s_j} \geq \frac{\sum_{k=1}^{s_j} D[\hat{\theta}_{jk}(\tilde{\mathbf{A}})]}{s_j}, j = 1, 2, \dots, m \quad (2-11)$$

注意条件(2-11)式等价于

$$t_j D[\hat{\theta}_j(\mathbf{A})] \geq t_j D[\hat{\theta}_j(\tilde{\mathbf{A}})], j = 1, 2, \dots, m$$

$A$  最优性的意义是 ,每个因素的各水平效应的估计量的方差平均最小。

定义 1.6 称可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\tilde{A}$  是  $E$  最优的 ,若对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $A$  ,成立

$$D[\hat{\theta}_0(A)] \geq D[\hat{\theta}_0(\tilde{A})]$$

$$\max_{\alpha_j: \alpha_j^2 = 1} \frac{D[\alpha_j' \hat{\theta}_j(A)]}{\alpha_j' \alpha_j} \geq \max_{\alpha_j: \alpha_j^2 = 1} \frac{D[\alpha_j' \hat{\theta}_j(\tilde{A})]}{\alpha_j' \alpha_j}, j = 1, 2, \dots, m$$

这里  $\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \vdots \\ \alpha_{js_j} \end{pmatrix}$  ,各分量不全为 0。

注意 :  $\alpha_j' \hat{\theta}_j(A) = \alpha_{j1} \hat{\theta}_{j1}(A) + \alpha_{j2} \hat{\theta}_{j2}(A) + \dots + \alpha_{js_j} \hat{\theta}_{js_j}(A)$  是参数间对比  $\alpha_j' \theta_j$  的最优估计量。  $E$  最优性的意义是 ,每个因素的各水平效应的各种对比估计量的最大方差达到最小。

定义 1.7 称可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\tilde{A}$  是  $D$  最优的 ,若对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $A$  ,成立

$$D[\hat{\theta}_0(A)] \geq D[\hat{\theta}_0(\tilde{A})]$$

$$|D[\hat{\eta}_j(A)]| \geq |D[\hat{\eta}_j(\tilde{A})]|, j = 1, 2, \dots, m$$

这里 ,  $\hat{\eta}_j(A) = T_j' \hat{\theta}_j(A)$  是  $\theta_j$  的正交对比向量  $T_j' \theta_j$  的最优估计 ( $T_j'$  是适合条件 (2-6) 式的任意矩阵)。“ $| \quad |$ ”是行列式记号。

当置信概率选定之后试验误差  $\varepsilon$  遵从正态分布时 ,  $\theta_j$  的对比  $\alpha_j' \theta_j = \alpha_1 \theta_{j1} + \alpha_2 \theta_{j2} + \dots + \alpha_{s_j} \theta_{js_j}$  的置信区间长度与行列式  $|D[\hat{\eta}_j(A)]|$  值的大小有关 ,这个行列式的值越小越好。这是考虑  $D$  最优性的意义。

本节讨论的主要结果是 ,如果对给定的  $n, s_1, s_2, \dots, s_m, D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型的正交设计存在 ,则  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $A$  是  $A$  最优的充要条件是  $A$  为正交设计。

对  $E$  最优性、 $D$  最优性也有同样的结果。

要特别指出的是 ,关于正交设计的优良性 ,可以从许多角度去探讨。在这里只是就各个因素的各水平的效应以及它们的对比的统计估值进行讨论。另外出于一种很自然的考虑 ,可直接研究各因素的水平搭配之下的理论值  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的统计估值。换言之 ,直接研究目标函数  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的统计估值。文献 [206] 里进行了专门论述 ,这里仅简单地介绍其主要结果。

基本的前提仍是可加模型和对误差作了假定 ,见 (2-5) 式 ,此时 (2-10) 式给出  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的最优估计  $\hat{\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  。显然 ,这个估计量与设计  $A$  有关 ,致使这个估计量的方差也与  $A$  有关。用记号  $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m : A)$  表示这个估计量  $\hat{\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  的方差 ,其结果是对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $A$  均成立

$$\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m} \cdot \sum_{\substack{1 \leq \lambda_1 \leq s_1 \\ 1 \leq \lambda_2 \leq s_2 \\ \vdots \\ 1 \leq \lambda_m \leq s_m}} V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m : A) \geq \frac{1 + \sum_{j=1}^m (s_j - 1)}{n} \sigma^2 \quad (2-12)$$

而且此式中等号成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

换言之,正交设计使得目标函数的估计量的方差平均最小。

## 2. 可行设计的性质

用表示适合条件(2-6)式的任意矩阵,即类似  $T_j$  这样的  $s_j$  行( $s_j - 1$ )列的矩阵:它的任何两列正交,而且任何一列的各元素之和为 0,任何一列各元素的平方之和为 1,容易知道

$$T_j' T_j = I_{s_j-1} \quad (2-13)$$

$$T_j T_j' = I_{s_j} - \frac{1}{s_j} \mathbf{1}_{s_j} \mathbf{1}_{s_j}' \quad (2-14)$$

这里  $I_n$  代表  $n$  阶单位矩阵。

设  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  是  $s$  阶实对称矩阵。若  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  是非负的,则称  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ 。

下面给出两个定理,它们的证明详见文献 [205]。

**定理 2.1** 设  $\mathbf{A}$  是任一可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计,则

$$\left\{ \begin{aligned} D[\hat{\theta}_0(\mathbf{A})] &\geq \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \right. \quad (2-15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D[\hat{\theta}_j(\mathbf{A})] &\geq \sigma^2 T_j (T_j' X_j' X_j T_j)^{-1} T_j', j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right. \quad (2-16)$$

而且等号都成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

**定理 2.2** 对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计及  $j = 1, 2, \dots, m$ , 均有下列结论:

$$(i) \quad |T_j' X_j' X_j T_j| \leq \left(\frac{n}{s_j}\right)^{s_j-1} \quad (2-17)$$

而且等号成立的充要条件是

$$T_j' X_j' X_j T_j = \frac{n}{s_j} I_{s_j-1} \quad (2-18)$$

$$(ii) \quad t_j (T_j' X_j' X_j T_j)^{-1} \geq \frac{s_j(s_j - 1)}{n} \quad (2-19)$$

而且等号成立的充要条件是(2-18)式成立。

$$(iii) \quad (T_j' X_j' X_j T_j)^{-1} \text{ 最大特征根 } \geq \frac{s_j}{n} \quad (2-20)$$

而且等号成立的充要条件是(2-18)式成立。

## 3. 正交设计的优良性

关于正交设计的优良性讨论,文献 [206] 证明了以下四个定理。

**定理 3.1** 对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$ , 均成立

$$(i) \quad D[\hat{\theta}_0(\mathbf{A})] \geq \frac{\sigma^2}{n} \quad (2-21)$$

$$(ii) \quad t_j D[\hat{\theta}_j(\mathbf{A})] \geq \sigma^2 \cdot \frac{s_j(s_j - 1)}{n}, j = 1, 2, \dots, m \quad (2-22)$$

而且等号都成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计。

对任意给定的正整数  $n, D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型的正交设计不一定存在, 但从定理 3.1 得到结论: 若  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计存在, 则  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  为  $\mathbf{A}$  最优的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

定理 3.2 对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  均成立

$$(i) \quad D[\hat{\theta}_0(\mathbf{A})] \geq \frac{\sigma^2}{n} \quad (2-23)$$

$$(ii) \quad \max_{\alpha_j < \Omega_j} \frac{D[\alpha_j' \hat{\theta}_j(\mathbf{A})]}{\alpha_j \alpha_j} \geq \frac{\sigma^2 s_j}{n}, j = 1, 2, \dots, m \quad (2-24)$$

这里,  $\Omega_j = \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \vdots \\ \alpha_{js_j} \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \dots + \alpha_{js_j} = 0$ , 但  $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{js_j}$  不全为 0, 而且(2-23)式、

(2-24)式中等号都成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计。

从定理 3.2 可以推论: 若  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计存在, 则  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  为  $E$  最优的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

定理 3.3 对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  均成立

$$(i) \quad D[\hat{\theta}_0(\mathbf{A})] \geq \frac{\sigma^2}{n} \quad (2-25)$$

$$(ii) \quad |D[T_j' \hat{\theta}_j(\mathbf{A})]| \geq \left(\frac{\sigma^2 s_j}{n}\right)^{s_j-1}, j = 1, 2, \dots, m \quad (2-26)$$

而且等号都成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

从定理 3.3 立即得到: 若  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型正交设计存在, 则  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  为  $D$  最优的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

定理 3.4 对一切可行的  $D_n(s_1 \times s_2 \times \dots \times s_m)$  型设计  $\mathbf{A}$  均成立

$$|D[\hat{\eta}(\mathbf{A})]| \geq \frac{\sigma^2}{n} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\sigma^2 s_j}{n}\right)^{s_j-1} \quad (2-27)$$

而且此式中等号成立的充要条件是  $\mathbf{A}$  为正交设计。

#### 2.2.4 本节小结

以上针对正交设计的优良性开展了讨论, 由上述讨论可知, 正交试验设计是多因素部分设计极为有效的寻优方法。其主要优点在于: 采用正交设计仅需要在所有的水平组合(即可能的条件)中合理地尽量少地挑选一部分组合作试验, 然后利用得到的试验值进行统计推断, 来获得使理论值  $\mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  最优的  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ 。

### § 2.3 正交表的构造

不同类型的正交表的构造方法差异很大, 甚至有些类型的正交表的存在和构造至今还

是一个未解决的数学问题。 $L_{t^v}(t^q)$ 型表是一类特殊的正交表,本书仅对该类正交表的构造进行说明。对于 $L_{t^v}(t^q)$ :

$L$  为正交表代号;

$t$  为水平数,限定为素数或素数幂;

$q$  为正交表的总列数, $q = \frac{t^v - 1}{t - 1}$ ;

$v$  为基本数列,可为任意正整数。

当 $t$ 、 $v$ 给定后,则试验次数为 $t^v$ 次,列数为 $q$ 。一般常用的正交表,如 $L_4(2^3)$ , $L_{16}(2^{15})$ , $L_9(3^4)$ , $L_{16}(4^5)$ , $L_{25}(5^6)$ 等属于此类型,其基本参数为 $(t = 2, v = 2)$ , $(t = 2, v = 4)$ , $(t = 3, v = 2)$ , $(t = 4, v = 2)$ , $(t = 5, v = 2)$ 。

### 2.3.1 二水平正交表的构造

先从最简单的情况介绍 $L_{t^v}(t^q)$ 型表的构造,然后叙述一般的构造方法。

#### 1. 二水平运算法则

用0和1表示二水平,它们的有限域加法和乘法定义见如下:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

#### 2. 二水平正交表与交互作用列表的构造

##### (1) $L_4(2^3)$ 的构造

$L_4(2^3)$ 表是二水平中最小的一个表,它的两个基本参数是 $t = 2, v = 2$ ,列数 $q = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ 。它的构造是:①第1列是将4个试验分成两半,前半是“0”水平,后半是“1”水平,称为2分列。②第2列是将第1列的两个“0”水平试验和两个“1”水平试验分别再分成一个“0”水平和一个“1”水平,称为4分列。2分列和4分列称为 $L_4(2^3)$ 的基本列,是用2分和4分的办法得到的。③第3列是将第1列与第2列的相应水平按“加法规则”相加而得,见表2-1。

表 2-1  $L_4(2^3)$ 表的构造

列号 试验号	1	2	3
1	0	0	0+0=0
2	0	1	0+1=1
3	1	0	1+0=1
4	1	1	1+1=0
列号	a	b	ab

既然第1列加第2列可以得到一个新列——第3列,容易证明第2列加第3列可以得到第1列,第1列加第3列就得到第2列。

这三列有一条重要性质:任意两列相加是另外一列,称这三列构成 $L_4(2^3)$ 的完备列。两列相加所得到的列称为这两列的交互作用列。所构造的 $L_{t^v}(t^q)$ 型表和交互作用列表需



解决的问题,就是要给出它的完备列以及其中任两列的交互作用列。

构造交互作用列表时,一般引进“列名”和“列名运算规则”来进行,如表 2-1 所示,用  $a, b$  分别作为  $L_4(2^3)$  的两个基本列,称  $a$  为第 1 列的列名, $b$  为第 2 列的列名。第 3 列是由第 1 列和第 2 列相加得到的,它的列名可用第 1 列列名与第 2 列列名相乘得到,这是对构造二水平表普遍运用的规则。

列名的运算规则是一种指数运算,指数的相加或相乘按加法表或乘法表给出的规则进行。两列交互作用列为其列名相乘。如第 1、2 两列的交互作用列为  $a \cdot b = ab$ ,即第 3 列;第 1、3 列的交互作用列为  $a \cdot ab = a^{1+1} \cdot b = a^0 \cdot b = b$  列,即第 2 列。这里需要注意的是,由二水平加法规则知  $1+1=0$ 。因此,在二水平的情况下, $a^2 = b^2 = 1$ 。如第 2、3 列的交互作用列为  $b \cdot ab = ab^2 = a$ ,即第 1 列。由此可见,当给出一组完备列的列名后,两列的交互作用列可由列名运算得到。

### (2) $L_8(2^7)$ 的构造

$L_8(2^7)$  的参数为  $t=2, v=3$ ,它有三个基本列,分别置于第 1、2、4 列(见表 2-2)。第 1 列是 2 分列,列名为  $a$ ;第 2 列的列名为  $b$ ,是一个 4 分列;第 4 列的列名为  $c$ ,是 8 分列;其他 4 列要通过列间运算才能得到,它们分别为  $ab, ac, bc$  和  $abc$ ,见表 2-2。

表 2-2  $L_8(2^7)$  表的构造

列号 试验号	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0+0=0	0	0+0=0	0+0=0	0+0=0
2	0	0	0+0=0	1	0+1=1	0+1=1	0+1=1
3	0	1	0+1=1	0	0+0=0	1+0=1	1+0=1
4	0	1	0+1=1	1	0+1=1	1+1=0	1+1=0
5	1	0	1+0=1	0	1+0=1	0+0=0	1+0=1
6	1	0	1+0=1	1	1+1=0	0+1=1	1+1=0
7	1	1	1+1=0	0	1+0=1	1+0=1	0+0=0
8	1	1	1+1=0	1	1+1=0	1+1=0	0+1=1
列号	a	b	ab	c	ac	bc	abc

可以验证  $L_8(2^7)$  中任意两列的交互作用列是七列中的某一列,并可通过列名运算得到。如第 1、7 两列的交互作用列为  $a \cdot abc = a^2bc = bc$  列,即第 6 列。因此,可根据列名运算构造交互作用表(见表 2-3)。

表 2-3  $L_8(2^7)$  交互作用表

列号	1	2	3	4	5	6	7
1	(1)	3	2	5	4	7	6
2		(2)	1	6	7	4	5
3			(3)	1	6	5	4
4				(4)	1	2	3
5					(5)	3	2
6						(6)	1
7							(7)

### (3) $L_{2^q}(2^q)$ 型正交表与交互作用列表的构造

根据上面的方法,可以类似地构造任意基本列数为  $v$  的二水平正交表  $L_{2^q}(2^q)$  和交互作用列表。

### (1) 基本列的构造

在  $L_{2^v}(2^q)$  型正交表中,有  $v$  个基本列,分别置于第 1 列,第 2 列,第 4 列, ..., 第  $2^{v-1}$  列上,基本列的列名分别用字母  $a, b, c, \dots$  来表示。第 1 列的列名  $a$ ,为 2 分列;第 2 列的列名为  $b$ ,为 4 分列;第 4 列的列名为  $c$ ,为 8 分列.....第  $2^{v-1}$  列为  $2^v$  分列,这一列是“0”水平和“1”水平相间的列,恰好将  $2^v$  个试验分割完毕。

### (2) 交互作用列表的构造

通过上述步骤,就可得到正交表的  $q = \frac{2^v - 1}{2 - 1} = 2^v - 1$  个列,即组成  $L_{2^v}(2^q)$  的完备列。

任意两列的交互作用列则是  $q$  列中的某一列,这一列可用这两列的列名相乘得到,据此可构造出交互作用列表。

### 2.3.2 三水平正交表的构造

二水平正交表的构造原理,可推广到三水平的情况,所不同的只是交互作用列和列名运算有些差别。

#### 1. 三水平运算规则如下所示:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

#### 2. 三水平正交表与交互作用列表的构造

##### (1) $L_9(3^4)$ 的构造

三水平表的最小一个表是  $L_9(3^4)$ ,它的两个基本参数是  $t = 3, v = 2$ ,从而得到其列数为  $q = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$ 。

$L_9(3^4)$  的第 1 列为 3 分列,记列名为  $a$ (见表 2-4)。第 2 列是 9 分列,列名记为  $b$ 。3 分列和 9 分列是直接由分割得到的,称为  $L_9(3^4)$  的基本列。第 3 列是由第 1 列与第 2 列按加法规则相加而得,其列名为  $ab$ 。第 4 列是将第 1 列的每个水平按乘法规则乘以 2,然后与第 2 列相加得到的,其列名为  $a^2b$ 。具体构造见表 2-4。

表 2-4  $L_9(3^4)$  表的构造

列号 试验号	1	2	3	4
1	0	0	0+0=0	2×0+0=0
2	0	1	0+1=1	2×0+1=1
3	0	2	0+2=2	2×0+2=2
4	1	0	1+0=1	2×1+0=2
5	1	1	1+1=2	2×1+1=0
6	1	2	1+2=0	2×1+2=1
7	2	0	2+0=2	2×2+0=1
8	2	1	2+2=1	2×2+1=2
9	2	2	2+2=1	2×2+2=0
列号	a	b	ab	a <sup>2</sup> b

## (2) $L_{3^v}(3^q)$ 型正交表与交互作用列表的构造

通过对  $L_9(3^4)$  表构造的讨论,可将  $L_{3^v}(3^q)$  型表和它的交互作用列表的构造法则归纳如下:

给出基本参数  $v$  后,  $L_{3^v}(3^q)$  型表的总列数  $q = \frac{3^v - 1}{3 - 1} = \frac{3^v - 1}{2}$ , 其中  $v$  列为基本列, 分别置于第 1 列, 第 2 列, 第 5 列, ..., 第  $\frac{3^v - 1}{2} + 1$  列(共  $v$  列)上, 基本列的列号分别用字母  $a, b, c, d, \dots$  来表示。第 1 列为 3 分列, 第 2 列为 9 分列, 第 5 列为 27 分列, ..., 第  $\frac{3^v - 1}{2} + 1$  列为  $3^v$  分列。在第  $v$  个基本列后(除第一个基本列外), 依次安排基本列与该列前所有列的交互作用列(共两列), 交互作用列的列名用乘法规则得到, 这样所得到的  $q = \frac{3^v - 1}{2}$  个列名就是一组标准化完备列名。

$L_{3^v}(3^q)$  正交表的交互作用列表构造, 同样可按照列名运算法则得到。

### 2.3.3 $L_{t^v}(t^q)$ 型表的一般构造方法

#### 1. $t$ 水平的运算

用  $0, 1, 2, \dots, t-1$  个水平构造  $L_{t^v}(t^q)$  型表, 必须先给出  $t$  水平的加法和乘法运算规则。一般情况下,  $t = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11$  的加法和乘法表可以查阅到。

#### 2. 正交表与交互作用列表的构造

当给定水平数  $t$  与基本列数  $v$  后,  $L_{t^v}(t^q)$  表共有  $q = \frac{t^v - 1}{t - 1}$  列。其中有  $v$  列为基本列, 分别置于表的第 1, 第 2, 第  $\frac{t^2 - 1}{t - 1} + 1$ , 第  $\frac{t^3 - 1}{t - 1} + 1, \dots$ , 第  $\frac{t^v - 1}{t - 1} + 1$  列, 基本列的列号分别以字母  $a, b, c, d, \dots$  来表示。第 1 列  $a$  为  $t$  分列, 第 2 列  $b$  为  $t^2$  分列, ..., 第  $\frac{t^v - 1}{t - 1} + 1$  列为  $t^v$  分列。

得到基本列后, 在每个基本列后紧接着安排该基本列与该列前所有列(从第 1 列开始)的交互作用列。该基本列与前面每一列的交互作用列都有  $t-1$  列, 构造方法是将该基本列前的每一列的每个水平分别乘以  $1, 2, 3, \dots, t-1$ , 然后分别与该行基本列相加即得。其列名为前一列标准的完备列名。因此, 任意两列的交互作用列(共有  $t-1$  列)的列名, 均可以按列名运算找到, 即可构造出交互作用列表。

列名运算按指数规则进行, 指数的加法和乘法必须按  $t$  水平的运算规则进行。一个非标准化列名, 可以乘适当次方化成等价的标准列名(乘多少次方, 以运算后的列名最后字母的指数为 1 为准, 这可从乘法表查出)。

### 2.3.4 本节小结

前面仅介绍了  $L_{t^v}(t^q)$  型正交表的构造方法, 其他形式的正交表构造详见参考文献 [202—205]。

# 第3章 多维动态规划的试验选优方法及其在长距离输水工程系统优化中的应用

## § 3.1 多维动态规划的试验选优方法

### 3.1.1 概述

自从1955年Bellman提出动态规划理论以来,动态规划理论得到了迅速发展,目前在最佳控制理论、工业工程、国防、生物技术、管理科学等国民经济各个领域均得到广泛的应用。但由于动态规划的“维数灾”受到计算机高速存储和计算时间的限制,在求解多维问题时,常遇到困难。四十多年来,各国学者对动态规划的计算方法进行了多方面的探索,提出了各种方法,所有这些方法虽然在不同程度上减轻了“维数灾”,但进展并不很大(见前文综述)。而这里另辟蹊径,采用试验选优方法来求解多维动态规划问题,则可在该领域获得一定的进展。

### 3.1.2 二维问题的广义拉氏方法

#### 1. 方法

对于一般二维动态规划

$$\max Z = \sum_{s=1}^N \Phi_s(x_s) \quad (3-1)$$

$$s. t. \quad \sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s) \leq b_1 \quad (3-2)$$

$$x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{s=1}^N h_{2s}(x_s) \leq b_2 \quad (3-3)$$

这里 $\Phi_s(x_s)$ 为 $s$ 项目标函数, $x_s$ 为决策变量。对(3-2)式加入松弛变量 $W(W \geq 0)$ ,则(3-2)式变为

$$\sum_{s=1}^N h_{1s}(x_s) + W = b_1 \quad (3-4)$$

上述二维问题可转化为一维问题

$$\max Z = \sum_{s=1}^N \{\Phi_s(x_s) - \mu h_{1s}(x_s)\} - W\mu + b_1\mu \quad (3-5)$$

$$s. t. \quad \sum_{s=1}^N h_{2s}(x_s) \leq b_2, x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N \quad (3-6)$$

(3-5)式、(3-6)式为一个新的一维动态规划模型 除  $s = 1$  外 其各阶段的目标值为  $\Phi_s(x_s) - \mu h_{1s}(x_s)$ ;  $s = 1$  时 目标值为  $\Phi_1(x_1) - \mu h_{11}(x_1) - W\mu + b_1\mu$ ;  $\mu$  为对应约束(3-2)式的拉氏乘子 且在(3-5)式、(3-6)式求解过程中应满足约束(3-2)式 即  $W \geq 0$ , 若拉氏乘子  $\mu$  已知, 引入状态变量  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ,  $0 \leq \lambda_s \leq b_2$ , 则可得第 1 阶段的递推方程:

$s = 1$  时,

$$g_1(\lambda_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq \xi_1} \{ \Phi_1(x_1) - \mu h_{11}(x_1) - \mu W(\lambda_1, x_1) + b_1\mu \} \quad (3-7)$$

约束条件的递推方程为

$$W(\lambda_1, x_1) = b_1 - h_{11}(x_1) \quad (3-8)$$

$$W(\lambda_1) = W(\lambda_1, x_1^*) \quad (3-9)$$

式中  $\xi_1$  为  $h_{21}(\xi_1) = \lambda_1$  的解  $0 \leq x_1 \leq \xi_1$ , 即表示满足第 2 个约束条件(3-3)式。同时在迭代过程中  $x_1^*$  应满足约束(3-2)式,  $W(\lambda_1)$  为最优决策  $x_1^*$  时的  $W(\lambda_1, x_1)$  值。

$s = 2, 3, \dots, N$  时,

$$g_s(\lambda_s) = \max_{0 \leq x_s \leq \xi_s} \{ \Phi_s(x_s) - \mu h_{1s}(x_s) - \mu W(\lambda_s, x_s) + g_{s-1}(\lambda_{s-1}) \} \quad (3-10)$$

$$W(\lambda_s, x_s) = W(\lambda_{s-1}) - h_{1s}(x_s) \geq 0 \quad (3-11)$$

系统方程为

$$\lambda_{s-1} = \lambda_s - h_{1s}(x_s) \quad (3-12)$$

式中  $\xi_s$  为  $h_{2s}(\xi_s) = \lambda_s$  的解  $0 \leq x_s \leq \xi_s$ , 同时迭代过程中  $x_1^*$  应满足约束(3-2)式 即  $W(\lambda_s, x_s) \geq 0, s = 2, 3, \dots, N$ , 这里不难看出(3-5)式中  $W = W(\lambda_N^*)$ 。

由此递推方法 求得  $Z(\mu) = \max g_N(\lambda_N)$ , 变化  $\mu$  值 得  $\max Z(\mu^*)$ , 即为原问题的解。

以上是针对模型(3-1)式、(3-2)式中耦合约束  $h_{1s}(x_s) \geq 0 (s = 1, 2, \dots, N)$  的情况, 若耦合主约束存在  $h_{1s}(x_s) \leq 0$  的情况 则各阶段  $W(\lambda_s, x_s) \geq 0$  的检验 可在阶段末进行。

## 2. 一个算例

以文献 [106] 中的算例来说明:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 \\ s. t. \quad & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 30 \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 19 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 为非负整数} \end{aligned}$$

将上述问题转化为一维问题,

$$\begin{aligned} \max Z &= (1 - 8\mu)x_1 + (5 - 6\mu)x_2 + (7 - 5\mu)x_3 + (11 - 10\mu)x_4 + \mu(30 - W) \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 19 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ 为非负整数} \end{aligned}$$

(1)  $\mu = 0$  的计算过程

阶段 1:  $s = 1$

$$g_1(\lambda_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq \lambda_1} g_1(\lambda_1, x_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq \lambda_1} \{x_1 - 8 \cdot 0x_1\}$$

$$W(\lambda_1, x_1) = 30 - 8x_1 \geq 0$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq 19$$

$$W(\lambda_1) = W(\lambda_1, x_1^*)$$

计算过程见表 3-1。

阶段 2 :  $s = 2$

$$g_2(\lambda_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{\lambda_2}{3}} g_2(\lambda_2, x_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq \frac{\lambda_2}{3}} \{5x_2 + g_1(\lambda_1)\}$$

$$W(\lambda_2, x_2) = W(\lambda_1) - 6x_2 \geq 0$$

$$W(\lambda_2) = W(\lambda_2, x_2^*)$$

系统方程为

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 3x_2$$

计算过程见表 3-2。

表 3-1  $\mu = 0, s = 1$  的计算表

$\lambda_1$	$x_1$	$W(\lambda_1, x_1)$	$g_1(\lambda_1, x_1)$	$g_1(\lambda_1)$	$x_1(\lambda_1)$	$W(\lambda_1)$
0	0	30	0	0	0	30
1	0	30	0			
	1	22	1	1	1	22
2	0	30	0			
	1	22	1			
	2	14	2	2	2	14
3	0	30	0			
	1	22	1			
	2	14	2			
	3	6	3	3	3	6
4	0	30	0			
	1	22	1			
	2	14	2			
	3	6	3	3	3	6
	4	-2				
5	0	30	0			
	1	22	1			
	2	14	2			
	3	6	3	3	3	6
	4	-2				
	5	-10				
6—19	...	...	...	3	3	6

$s = 3, s = 4$  的计算见表 3-3。

可见,  $\mu = 0$  时的解为

$$Z^*(0) = 33, x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 4, x_4^* = 0, W(19) = 4$$

和

$$Z^*(0) = 33, x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 3, W(18) = 0$$

表 3-2  $\mu = 0, s = 2$  的计算表

$\lambda_1$	$x_2$	$W(\lambda_2, x_2)$	$g_2(\lambda_2, x_2)$	$g_z(\lambda_2)$	$x_z(\lambda_2)$	$W(\lambda_2)$
0	0	30	0	0	0	30
1	0	22	1	1	0	22
2	0	14	2	2	0	14
3	0	6	3			
	1	24	5	5	1	24
4	0	6	3			
	1	24	5	5	1	24
5	0	6	3			
	1	2	7	7	1	2
6	0	6	3			
	1	0	8			
	2	18	10	10	2	18
7	0	6	3			
	1	0	8			
	2	10	11	11	2	10
8	0	6	3			
	1	0	8			
	2	2	12	12	2	2
9	0	6	3			
	1	0	8			
	2	-6				
	3	12	15	15	3	12
10	0	6	3			
	1	0	8			
	2	-6				
	3	4	16	16	3	4
11	0	6	3			
	1	0	8	8	1	0
	2	-6				
	3	-4				
12—14	...	...	...	8	1	0
15	0	6	3			
	1	0	8			
	2	-6				
	3	-12				
	4	-18				
	5	0	25	25	5	0

$\lambda_1$	$x_2$	$W(\lambda_2, x_2)$	$g_2(\lambda_2, x_2)$	$g_2(\lambda_2)$	$x_2(\lambda_2)$	$W(\lambda_2)$
16	0	6	3	8	1	0
	1	0	8			
	2	-6				
	3	-12				
	4	-18				
	5	-8				
17—19	...	...	...	8	1	0

表 3-3  $\mu = 0, s = 4$  的计算表

$\lambda_3$	$x_3$	$W(\lambda_3, x_3)$	$g_3(\lambda_3, x_3)$	$g_3(\lambda_3)$	$x_3(\lambda_3)$	$W(\lambda_3)$
0	0	0	30	0	0	0
1	1	0	22	1	1	0
2	2	0	14	2	2	0
3	5	0	24	3	5	0
4	7	1	25	4	7	0
5	8	1	17	5	8	0
6	10	0	18	6	11	1
7	12	1	19	7	12	1
8	14	2	20	8	14	0
9	15	2	12	9	16	1
10	17	1	13	10	18	1
11	19	2	14	11	19	1
12	21	3	15	12	22	2
13	22	1; 3	7	13	23	1; 2
14	24	3	8	14	25	1
15	26	3	9	15	27	2
16	28	4	10	16	29	2
17	29	2; 4	2	17	30	1
18	31	3	3	18	33	3
19	33	4	4	19	33	0

此时,  $W = W(19) = 4$ , 以及  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 3$ , 松弛变量  $W = W(18) = 0$ .

### (2) $\mu$ 为其他值时的计算

采用上述方法, 针对  $\mu$  在  $0 \sim 2$  之间的离散值(步长为 0.2)逐个计算, 可知  $\mu = 0 \sim 0.8$  时,  $Z^*(\mu) = 33$ ;  $\mu = 0.8 \sim 1.2$  时,  $Z^*(\mu) = 28$ ;  $\mu \geq 1.4$  时,  $Z^*(\mu) = 0$ , 则  $Z^*(\mu^*) = 33$ ,  $\mu^* = 0 \sim 0.8, x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 4, x_4^* = 0$ , 以及  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0, x_4^* = 3$  即为该问题的解。

### 3. 采用常规拉格朗日 DP 计算<sup>[106]</sup>

研究的问题同上,

$$\max Z = x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4$$



$$s. t. \quad 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 30$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 19$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$  为非负整数

将第一个约束纳入目标函数中,由此求解

$$\max Z = x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 - \mu(8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4)$$

$$s. t. \quad x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 19$$

$x_j$  为非负整数 ( $j = 1, 2, 3, 4$ )

求解上述问题时,选择  $\mu = 0$  通常是明智的。若解满足第一个约束,则它相对原问题来说,自动地成为最佳。对于  $\mu = 0$ ,得到表 3-4。对其余的变量求解,得到解  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 1$ ,  $x_3^* = 1$ ,  $x_4^* = 2$ 。这个解给出的  $Z$  的值为 34。然而,这个解不满足第一个约束,因为  $8(0) + 6(1) + 5(1) + 10(2) = 31 > 30$ ,由此可知, $Z^*$  不能够大于 33。

其次,选择  $\mu = 1$ ,得到表 3-5。对其余的变量求解,得到解  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 4$ ,  $x_4^* = 0$  及相应的  $Z^*$  为 28。检验第一个约束表明  $8(0) + 6(0) + 5(4) + 10(0) = 20 < 30$ ,由此可知, $\mu^*$  位于 0 和 1 之间。

表 3-4 动态规划递推表 ( $\mu = 0$ )

级 1			级 2			级 3		
$\lambda_1$	$g_1(\lambda_1)$	$x_1^*(\lambda_3)$	$\lambda_2$	$g_2(\lambda_2)$	$x_2^*(\lambda_2)$	$\lambda_3$	$g_3(\lambda_3)$	$x_3^*(\lambda_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0
2	2	2	2	2	0	2	2	0
3	3	3	3	5	1	3	5	0
4	4	4	4	6	1	4	7	1
5	5	5	5	7	1	5	8	1
6	6	6	6	10	2	6	10	0
7	7	7	7	11	2	7	12	1
8	8	8	8	12	2	8	14	2
9	9	9	9	15	3	9	15	0
10	10	10	10	16	3	10	17	1
11	11	11	11	17	3	11	19	2
12	12	12	12	20	4	12	21	3
13	13	13	13	21	4	13	22	1
14	14	14	14	22	4	14	24	2
15	15	15	15	25	5	15	26	3
16	16	16	16	26	5	16	28	4
17	17	17	17	27	5	17	29	2
18	18	18	18	30	6	18	31	3
19	19	19	19	31	6	19	33	4

注 级 4 :  $g_4(19) = 34$ ,  $x_4^*(19) = 2$ 。

表 3-5 动态规划递推表 ( $\mu = 1$ )

级 1			级 2			级 3		
$\lambda_1$	$g_1(\lambda_1)$	$x_1^*(\lambda_3)$	$\lambda_2$	$g_2(\lambda_2)$	$x_2^*(\lambda_2)$	$\lambda_3$	$g_3(\lambda_3)$	$x_3^*(\lambda_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	2	0	0	2	0	0
3	0	0	3	0	0	3	0	0
4	0	0	4	0	0	4	2	1
5	0	0	5	0	0	5	2	1
6	0	0	6	0	0	6	2	1
7	0	0	7	0	0	7	2	1
8	0	0	8	0	0	8	4	2
9	0	0	9	0	0	9	4	2
10	0	0	10	0	0	10	4	2
11	0	0	11	0	0	11	4	2
12	0	0	12	0	0	12	6	3
13	0	0	13	0	0	13	6	3
14	0	0	14	0	0	14	6	3
15	0	0	15	0	0	15	6	3
16	0	0	16	0	0	16	8	4
17	0	0	17	0	0	17	8	4
18	0	0	18	0	0	18	8	4
19	0	0	19	0	0	19	8	4

注 级 4 :  $g_4(19) = 8, x_4^*(19) = 0$ 。

表 3-6 动态规划递推表 ( $\mu = 0.5$ )

级 1			级 2			级 3		
$\lambda_1$	$g_1(\lambda_1)$	$x_1^*(\lambda_3)$	$\lambda_2$	$g_2(\lambda_2)$	$x_2^*(\lambda_2)$	$\lambda_3$	$g_3(\lambda_3)$	$x_3^*(\lambda_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	2	0	0	2	0	0
3	0	0	3	2	1	3	2	0
4	0	0	4	2	1	4	4	1
5	0	0	5	2	0	5	4	1
6	0	0	6	4	2	6	4	1
7	0	0	7	4	2	7	6	1
8	0	0	8	4	2	8	9	2
9	0	0	9	6	3	9	9	2
10	0	0	10	6	3	10	9	2
11	0	0	11	6	3	11	11	2
12	0	0	12	8	4	12	13	3
13	0	0	13	8	4	13	13	3
14	0	0	14	8	4	14	13	3
15	0	0	15	10	5	15	15	3
16	0	0	16	10	5	16	18	4
17	0	0	17	10	5	17	18	4
18	0	0	18	12	6	18	18	4
19	0	0	19	12	6	19	20	4

注 级 4 :  $g_4(19) = 20, x_4^*(19) = 0$ 。

选择  $\mu = 0.5$ , 得到表 3-6, 计算其余的变量, 得到解  $x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 4, x_4^* = 0$  及  $Z^* = 33$ 。可以观察到  $Z = 33$  为最大可能的  $Z^*$  值, 并且满足第一个约束, 即  $8(0) + 6(1) + 5(4) + 10(0) = 26 < 30$ , 我们得到了最佳解。常规拉氏 DP 法求解过程摘自文献 [106]。

#### 4. 讨论

由上述算例可见, 该方法是以拉氏函数为基础的, 它与传统的多维动态规划拉氏方法相比: ① 计算过程和表格基本相同, 但多一个  $W(\lambda_s, x_s)$  的计算储存。② 传统的拉氏方法中要求  $\Phi_s(x_s)$  为非减函数, 最优值时约束条件至少一个为等式成立; 而广义拉氏方法适用于一般性质的目标函数和约束条件。

对文献 [106] 的算例采用常规拉氏方法求解时, 在  $\mu = 0$  时, 没有获得最优解, 最优解在第 3 次  $\mu = 0.5$  时才获得。由于广义方法在计算迭代过程中就确保约束条件满足, 而不像传统拉氏方法在计算结束时对约束进行检验, 因此获得最优解的可能性在试验中加大了。

另外, 广义拉氏方法获得的最优解有  $Z^* = 33, x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 3, W(18) = 0; Z^* = 33, x_1^* = 0, x_2^* = 1, x_3^* = 4, x_4^* = 0, W(19) = 4$ 。而文献 [106] 由于求解方法的限制, 只能获得  $W^*(18) = 0$ , 即该约束等式成立时的一个解。

### 3.1.3 试验选优方法的一般算例

#### 1. 方法

##### ① 递推关系

对于一般的多维问题,

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{s=1}^N \Phi_s(x_s) \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{s=1}^N h_{js}(x_s) \leq b_j \\ &x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3-13)$$

同样, 考虑松弛变量  $W_j (j = 1, 2, \dots, m-1); W_j \geq 0$  化为一维问题,

$$\begin{aligned} \max Z &= \left\{ \sum_{s=1}^N \Phi_s(x_s) - \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \sum_{s=1}^N h_{js}(x_s) \right\} - \sum_{j=1}^{m-1} W_j \mu_j + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \mu_j \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{s=1}^N h_{ms}(x_s) \leq b_m \\ &x_s \geq 0, s = 1, 2, \dots, N, W_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (3-14)$$

若  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m-1)$  给定, 则有对应的递推关系

$$g_1(\lambda_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq \xi_1} \left\{ \Phi_1(x_1) - \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j \sum_{s=1}^N h_{j1}(x_1) - \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j W_j(\lambda_1, x_1) + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \mu_j \right\} \quad (3-15)$$

$$W_j(\lambda_1, x_1) = b_j - h_{j1}(x_1) \quad (3-16)$$

$$W_j(\lambda_1) = W_j(\lambda_1, x_1^*) \quad (3-17)$$

(3-15) 式中  $\xi_1$  为  $h_{m1}(\xi_1) = \lambda_1$  的解  $0 \leq x_1 \leq \xi_1$ , 同时在迭代过程中  $x_s$  应满足  $W_j(\lambda_s, x_s)$

$\geq 0, j = 1, 2, \dots, m-1$ 。最后  $s = N$  时 (3-14) 式中松弛变量  $W_j = W_j(\lambda_N^*)$ 。

以上是  $h_{js}(x_s)$  中系数均为正值的递推方法, 若有的  $h_{js}(x_s)$  系数为负, 则在  $N$  阶段末对  $W_j(\lambda_N, x_N)$  进行检验 (见下文线性规划算例)。

### ② $\mu_j$ 的确定

若  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m-1)$  已知, 则 (3-13) 式的  $m$  维多维动态规划可转化为 (3-14) 式的一维动态规划问题。由 (3-14) 式目标函数可知,  $\mu_j$  的物理意义为某种资源 ( $b_j$ ) 的影子价格, 数值大小取决于资源的利用情况, 影子价格的问题在经济科学、管理科学中被广泛讨论和应用<sup>[174]</sup>。因此在求解实际问题时最优值  $\mu_j^*$  的获得是困难的, 但  $\mu_j$  的数值范围是容易知道的。

已知  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m-1)$  的取值范围来确定其对应的最优值  $\mu_j^*$ , 最直接的方法是把  $\mu_j$  在其数值范围内离散, 然后将所有组合代入模型 (3-14) 式, 以获得最优解。但是这样, 工作量会太大, 是不可能的, 可以采用部分试验选优方法, 如正交表选用少量的组合来获得全部组合的试验选优理论最优解<sup>[202-206]</sup>。

### 2. 一个算例

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 \quad (3-18)$$

$$s. t. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 8x_1 - 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 14x_2 \leq 70 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \end{cases} \quad (3-19)$$

转化为一维问题

$$\begin{aligned} \max Z = 9x_1 + 6x_2 - \mu_1(2x_1 + 3x_2 + W_1 - 18) - \mu_2(3x_1 - 5x_2 + W_2 - 15) \\ - \mu_3(8x_1 - 5x_2 + W_3 - 40) - \mu_4(5x_1 + 14x_2 + W_4 - 70) \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12, x_1, x_2 \text{ 为非负整数} \quad (3-21)$$

$\mu_j (j = 1, 2, 3, 4)$  的范围为  $[0, 1]$ , 取  $\mu_j$  的 3 个离散值  $0, 0.5, 1$ , 则可选用  $L_9(3^4)$  型正交表获得 9 个不同  $\mu_j$  组合的一维动态规划问题, 模型求解的结果即为正交优化分析的指标值  $Z(\mu)$ , 见表 3-7。由表 3-7 中  $\mu_j (j = 1, 2, 3, 4)$  各水平条件下指标平均值  $K_j$ 、较差  $R_j$  和  $R'_j$  可知试验选优理论最优方案和依次的次优  $\mu_j$  组合, 正交分析的理论最优方案为  $\mu_1^* = 0.5, \mu_2^* = \mu_3^* = 0, \mu_4^* = 0$  或  $\mu_4^* = 0.5$ , 最优方案和依次的 10 多个优化方案均能使原问题获得最优解, 不难证明实际最优解  $Z(\mu^*) = 57, x_1^* = 5, x_2^* = 2$ 。

表 3-7  $L_9(3^4)$  型正交表和  $\mu_j$  优化

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$Z(\mu)$	$x_1$	$x_2$
1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0.5	0.5	0.5	18	0	3

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$Z(\mu)$	$x_1$	$x_3$
3	1	0	0	0	57	5	2
4	0.5	1	0.5	0	57	5	2
5	0.5	0.5	0	1	45	5	0
6	0.5	0	1	0.5	57	5	2
7	0	1	0	0.5	57	5	2
8	0	0.5	1	0	18	0	3
9	0	0	0.5	1	0	0	0
$k_1$	25	38	31	15			
$k_{0.5}$	53	27	27	44			
$k_0$	25	53	53	44			
$R$	28	26	26	29			
$R'$	28	15	22	0			

### 3. 关于正交表

采用正交分析在  $\mu_j (j = 1, 2, \dots, m-1)$  的取值范围内确定  $\mu_j^*$ , 其最优解、精度和计算工作量的关键在于正交表, 正交试验的优良性在第 2 章中已被讨论和确定, 精度和  $\mu_j$  在可行域内与离散步长有关, 并直接影响计算优化的工作量。在一般型正交表  $L_p(t^q)$  中,  $t$  为  $\mu_j$  在其可行域内离散的个数, 是素数或素数幂;  $q$  为该正交表最多可以安排  $\mu_j$  的个数, 即  $q \geq m-1$ ;  $p$  为对应一维动态规划的计算个数,  $p, t, q$  之间存在以下关系<sup>[203]</sup>:

$$p = t^v \quad (3-22)$$

$$q = \frac{t^v - 1}{t - 1} \geq m - 1 \quad (3-23)$$

式中,  $v$  为任意整数。通过(3-22)式和(3-23)式, 可以获得计算工作量  $p$  和  $m, t$  的关系:

$$p \geq (m-1)(t-1) + 1 \quad (3-24)$$

在选择构造正交表时完全可以使(3-24)式取等号, 若  $m = 1001$ , 取  $t = 11$  或  $101$ , 那么一个  $1001$  维动态规划问题的优化工作量相当于  $10^4 + 1$  或  $10^5 + 1$  个对应的一维动态规划问题的计算量, 这是目前一般计算机均可以接受的, 而用现行动态规划方法是很难实现的。

#### 3.1.4 本节小结

寻找多维动态规划的求解方法是系统科学领域的重要研究课题。本书介绍的动态规划的试验选优方法可以使某些更多维数的动态规划问题的求解成为可能, 而且对目标函数和约束条件的性质没有限制, 需要说明以下两点:

① 正交试验的优良性在目前已广泛讨论和确认, 但它是以方差分析为基础的, 因此分析而得的最优解为理论最优解, 有时获得的最优解不一定是实际最优解, 该解是否为全局最优解有待进一步探讨。在其他动态规划减维方法无法求解或求解困难时, 采用该试验选优方法仍不失为一个切实可行的方法。

② 以上介绍的试验选优方法采用的是正交试验方法, 其他部分试验选优方法在多维动态规划中的运用有待进一步探讨。

## § 3.2 长距离输水渠道工程系统优化规划设计中的应用

### 3.2.1 概述

本节主要介绍以各渠段纵坡和渠段定性设计方案(如渠道宽深比、断面形状、衬砌方式、配套建筑物主要设计参数和建筑物位置的选择)为系统变量,计算分析期内总支出费用最小为目标函数,考虑工程系统的总投资、渠道首末水位制约、流速不冲不淤和水位衔接等为约束的长距离输水渠道工程系统多维动态规划模型。

### 3.2.2 有关水力要素的取值

在渠道输水线路、流量、衬砌形式、断面形状、建筑物设计方案已定的情况下,渠道纵横断面的设计原则是:设计流量决定断面尺寸;加大流量决定渠顶高程(渠深),校核不冲流速;最小流量校核水位衔接、不淤流速。

#### 1. 设计流量确定断面尺寸

##### (1) 渠道断面尺寸与纵坡

渠道纵横断面设计时,普遍采用曼宁公式,如梯形断面有

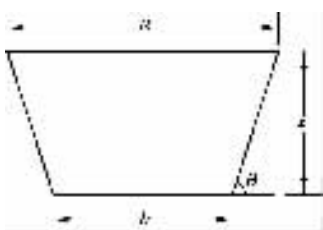


图 3-1 梯形断面

$$b = \frac{\chi(K - \cos \theta)}{K + 1 - \cos \theta} \quad (3-25)$$

$$h = \frac{\chi \sin \theta}{\chi(K + 1 - \cos \theta)} \quad (3-26)$$

其中,

$$\chi = (nQ)^{\frac{3}{8}} I^{-\frac{3}{16}} Y^{\frac{5}{8}} \quad (3-27)$$

$$Y = \frac{4(K + 1 - \cos \theta)^{\frac{5}{2}}}{\sin \theta (2K - \cos \theta)} \quad (3-28)$$

式中  $b$  为底宽(m);  $h$  为设计水深(m);  $\chi$  为湿周(m);  $n$  为糙率;  $Q$  为设计流量( $\text{m}^3/\text{s}$ );  $I$  为纵坡;  $Y$  为形参;  $\theta$  为夹角,  $\text{ctg} \theta = m$ ;  $m$  为内边坡;  $K$  为扩宽系数<sup>[207]</sup>。

由上可得  $b$ 、 $h$  与纵坡  $I$  关系为

$$h = \zeta_1 I^{\frac{3}{16}} \quad (3-29)$$

$$b = \zeta_2 I^{\frac{3}{16}} \quad (3-30)$$

其中,

$$\zeta_1 = (nQ)^{\frac{3}{8}} \frac{[\chi(K + 1 - \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{3}{8}} \theta}{(2K - \cos \theta)^{\frac{5}{8}}} \quad (3-31)$$

$$\zeta_2 = (nQ)^{\frac{3}{8}} \frac{[\chi(K + 1 - \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} (K - \cos \theta)}{(2K - \cos \theta)^{\frac{5}{8}} \sin^{\frac{5}{8}} \theta} \quad (3-32)$$

其他断面形式,如衬砌渠道较常用的抛物形、圆弧形、几何最优形,同样可获得纵坡与对

应断面的尺寸关系。

## (2) 梯形断面扩宽系数

梯形断面扩宽系数  $K = 1$  时为水力最佳断面,  $K > 1$  时为较宽浅断面。设宽深比  $\beta = b/h$ , 由(3-25)式、(3-26)式可得宽深比  $\beta$  与扩宽系数  $K$  之间的关系为

$$\beta = \frac{2K}{\sin \theta} - 2\text{ctg} \theta \quad (3-33)$$

若采用实用经济断面, 则有以下关系:

$$\beta = \frac{b}{h} = \frac{\alpha}{\left(\frac{h}{h'}\right)^2} \left( \frac{2}{\sin \theta} - \text{ctg} \theta \right) - \text{ctg} \theta$$

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^2 - 2\alpha^{\frac{5}{2}} \left(\frac{h}{h'}\right) + \alpha = 0$$

式中  $b, h$  为任意梯形断面的水深和底宽;  $h'$  为水力最佳断面水深;  $\alpha$  为断面系数。由上述两式及(3-33)式整理得

$$K = \frac{\alpha(2 - \cos \theta)}{2(\alpha^{\frac{5}{2}} - \sqrt{\alpha^5 - \alpha})^2} + \frac{\cos \theta}{2} \quad (3-34)$$

## 2. 加大流量确定渠深和不冲流速校核

### (1) 渠深与纵坡关系

$$H = h_{\text{加大}} + \Delta \quad (3-35)$$

式中,  $H$  为渠道深(m);  $h_{\text{加大}}$  为渠道加大水深(m), 即加大流量  $Q_{\text{加大}}$  对应的水深, 它可由(3-29)式获得;  $\Delta$  为渠顶超高, 若为土渠<sup>[208]</sup>, 则

$$\Delta = \frac{1}{4} h_{\text{加大}} + 0.2 \quad (3-36)$$

### (2) 流速与纵坡关系

$$V = \frac{Q}{\omega}$$

式中,  $V$  为流速(m/s),  $\omega$  为过水面积( $\text{m}^2$ ), 若梯形断面, 则有

$$V = \zeta_3 I^{\frac{3}{8}} \quad (3-37)$$

$$\zeta_3 = \left[ \frac{\sin \theta (2K - \cos \theta) \cdot Q}{4n^3 (K + 1 - \cos \theta)^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3-38)$$

### (3) 不冲流速与纵坡关系

渠道流速应满足

$$V \leq V_{\text{不冲}}$$

式中,  $V_{\text{不冲}}$  为渠道不冲流速(m/s), 设

$$I_{\text{不冲}} = \left( \frac{V_{\text{不冲}}}{\zeta_3 \text{加大}} \right)^{\frac{8}{3}} \quad (3-39)$$

因此,渠道设计时纵坡应满足

$$I \leq I_{\text{不冲}} \quad (3-40)$$

上述两式中,  $\zeta_3 \text{加大}$  即  $Q_{\text{加大}}$  流量对应的  $\zeta_3$  系数。

### 3. 最小流量校核水位衔接和不淤流速

#### (1) 最小流量校核水位衔接

当渠道通过最小流量时,上、下段渠道水位衔接应满足要求(见图 3-2),即  $\Delta Z_{m,j}$  应控制在一定范围内:

$$\Delta Z_{m,j} = Z_{j+1}^{(1)} - Z_j^{(2)} + h_{m,j} - h_{m,j+1} \quad (3-41)$$

式中  $\Delta Z_{m,j}$  为第  $j$  渠段渠末与第  $j+1$  渠段渠首的最小水位差;  $h_{m,j}$ 、 $h_{m,j+1}$  为第  $j$  渠段和第  $j+1$  渠段的最小水深;  $Z_j^{(2)}$ 、 $Z_{j+1}^{(1)}$  为第  $j$  渠段渠末和第  $j+1$  渠段渠首的挖深。在上下段渠道间有流量变化且无提水、节制建筑时,  $\Delta Z_{m,j}$  应该进行校核。  $\Delta Z_{m,j}$  应控制在

$$0.5 \text{ m} \geq \Delta Z_{m,j} \geq 0 \quad (3-42)$$

由图 3-2 可知

$$\Delta h_j^{(2)} = \Delta h_{j+1}^{(1)} + \Delta Z_j \quad (3-43)$$

$$Z_{j+1}^{(1)} + \Delta h_{j+1}^{(1)} = h_{j+1}$$

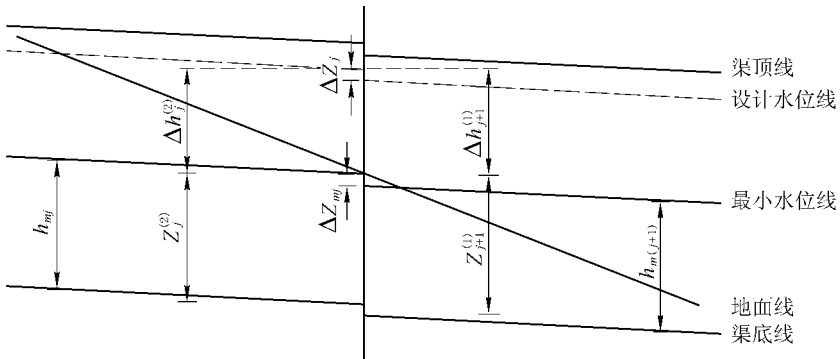


图 3-2 水位衔接图

式中  $\Delta h_j^{(2)}$  为  $j$  渠段渠末设计水位至地面的高差距 (m);  $\Delta h_{j+1}^{(1)}$  为  $j+1$  渠段渠首设计水位至地面的高差距 (m);  $Z_{j+1}^{(1)}$  为  $j+1$  渠段渠首挖深 (m);  $\Delta Z_j$  为第  $j$  渠段渠末的局部水头损失 (m)。将 (3-41) 式和 (3-39) 式代入 (3-42) 式, 整理得

$$I_j^{(2)} \geq I_j \geq I_j^{(1)} \quad (3-44)$$

其中,对于梯形断面

$$I^{(1)} = \left( \frac{\zeta_j - \zeta_{1m,j}}{B_{j+1}} \right)^{\frac{16}{3}} \quad (3-45)$$

$$I^{(2)} = \left( \frac{\zeta_{1j} - \zeta_{1m,j}}{B_{j+1} - 0.5} \right)^{\frac{16}{3}}$$



$$B_{j+1} = \Delta h_{j+1}^{(2)} + Z_{j+1}^{(2)} - h_{m,j+1} + \Delta Z_j \quad (3-46)$$

式中  $\zeta_{1m,j}$  由  $j$  渠段最小流量  $Q_{m,j}$  代入(3-31)式而得到,由(3-45)式、(3-46)式可知  $I_j^{(1)}$ ,  $I_j^{(2)}$  与  $j$  渠段的底宽、水深(纵坡)无关,仅和  $j+1$  渠段水力要素(纵坡)有关,因此  $j$  段渠道设计完成后,  $j+1$  渠段的纵坡只要满足(3-44)式,则  $j+1$  与  $j$  渠段间的最小水位衔接就满足要求。

(2) 最小流量校核不淤流速  
渠道流量应满足

$$V \geq V_{\text{不淤}}$$

式中  $V_{\text{不淤}}$  为渠道不淤流速,由(3-37)式可设

$$I_{\text{不淤}} = \left( \frac{V_{\text{不淤}}}{\zeta_{3m}} \right)^{\frac{8}{3}} \quad (3-47)$$

因此,渠道设计时的纵坡应满足

$$I \geq I_{\text{不淤}} \quad (3-48)$$

(3-47)式中的  $\zeta_{3m}$  由渠道最小流量  $Q_m$  代入(3-38)式所得。

若  $V_{\text{不淤}}$  采用以下经验公式<sup>[209]</sup>计算,则

$$V_{\text{不淤}} = C\sqrt{R} \quad (3-49)$$

式中  $C$  为不淤系数,由渠水泥沙性质确定。若为梯形断面,水力半径  $R$  由(3-29)式、(3-30)式代入(3-49)式所得:

$$R = \left[ \frac{nQ_m(2K - \cos\theta)\sin\theta}{4(K+1 - \cos\theta)} \right]^{\frac{3}{8}} I^{-\frac{3}{16}}$$

将上式代入(3-49)式,并由(3-47)式得

$$I_{\text{不淤}} = \left[ \frac{4C^{16}n^{15}(K+1 - \cos\theta)^{\frac{2}{3}}}{Q_m \sin\theta(2K - \cos\theta)} \right]^{\frac{2}{15}} \quad (3-50)$$

若黄土地区从多泥沙河流引水渠道,则不淤纵坡可采用以下公式<sup>[209]</sup>:

$$I_{\text{不淤}} = 0.275n^2 \frac{(\rho_0 u_0)^{\frac{3}{2}}}{Q_m^{\frac{1}{2}}} \quad (3-51)$$

式中  $\rho_0$  为饱和挟沙量( $\text{kg}/\text{m}^3$ );  $u_0$  为泥沙平均沉速( $\text{mm}/\text{s}$ );  $Q_m$  为渠道最小流量( $\text{m}^3/\text{s}$ )。

### 3.2.3 长距离输水渠道工程系统的二维定性混合系统动态规划模型及其求解方法

图3-3所示,整条渠道根据流量、地形、沿渠土壤地质条件或建议渠道配套建筑物位置(如泵站)分为  $N$  段。已知各渠段的设计、加大、最小流量为  $Q_i$ ,  $Q_{\text{加大}i}$ ,  $Q_{mi}$ , 地面平均坡度  $J_i$ , 渠长  $L$ , 渠道首末水位高程为  $H_{\text{首}}$ ,  $H_{\text{末}}$ , 各段渠首渠末地面高程为  $\nabla_{di}$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), 以此进行渠道工程系统优化设计。

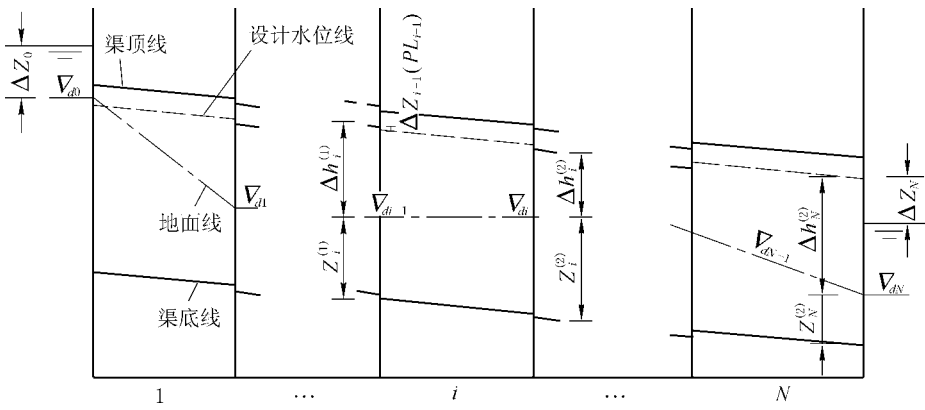


图 3-3 渠道纵断面

### 1. 目标函数

由于各渠段的衬砌方式、渠道配套工程方案不同,其对应的经济寿命各不相同,因此在工程输配水流量、线路已定(工程不同方案效益相同)的前提下,采用计算分析期内的总支出费用<sup>[175]</sup>为方案比较指标。这里计算分析期取各渠段衬砌工程、配套建筑物的最小经济寿命,超过部分以残值考虑。则工程计算分析期内总支出费用最小目标函数为

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{i=1}^N \Phi_i(I_i, PL_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \{ F_{ci}(I_i, PL_i) + F_{wi}(PL_i) - L_{ci}(I_i, PL_i) - L_{wi}(PL_i) \\ &\quad + [C_{ci}(I_i, PL_i) + C_{wi}(PL_i)] \left[ \frac{P}{A}, k\%, n_0 \right] \} \end{aligned} \quad (3-52)$$

式中,  $I_i$  为  $i$  渠段渠底比降;  $F_{ci}(I_i, PL_i)$  为  $i$  渠段渠道填挖土方和衬砌工程投资现值,基准年取施工期末,该值取决于  $i$  渠段定性变量  $PL_i$ ;  $F_{wi}(PL_i)$  为  $i$  渠段末的配套建筑物(如泵站工程)的投资;  $L_{ci}(I_i, PL_i)$ 、 $L_{wi}(PL_i)$  为  $i$  渠段土方衬砌工程和配套建筑物的残值折现:

$$L_{ci}(I_i, PL_i) = \frac{n_{ci}(PL_i) - n_0}{n_{ci}(PL_i)} F_{ci}(I_i, PL_i) \left[ \frac{P}{F}, k\%, n_0 \right], n_{ci}(PL_i) > n_0 \quad (3-53)$$

$$L_{wi}(I_i, PL_i) = \frac{n_{wi}(PL_i) - n_0}{n_{wi}(PL_i)} F_{wi}(I_i, PL_i) \left[ \frac{P}{F}, k\%, n_0 \right], n_{wi}(PL_i) > n_0 \quad (3-54)$$

以上各式中,  $n_{ci}(PL_i)$ 、 $n_{wi}(PL_i)$  为  $i$  渠段土方衬砌工程和配套建筑物的经济寿命;  $n_0$  为工程计算分析期,  $n_0 = \min[n_{ci}(PL_i), n_{wi}(PL_i), i=1, 2, \dots, N]$ ;  $\left[ \frac{P}{F}, k\%, n_0 \right]$  为一次支付现值因子<sup>[175]</sup>;  $C_{ci}(I_i, PL_i)$ 、 $C_{wi}(PL_i)$  为  $i$  段土方衬砌工程和配套建筑物的年运行管理费,可按投资估算<sup>[175]</sup>;  $\left[ \frac{P}{A}, k\%, n_0 \right]$  为等额多次支付现值因子。

若为梯形半填半挖渠段(见图 3-4),  $F_{ci}(I_i, PL_i)$  值为

$$\begin{aligned} F_{ci}(I_i, PL_i) &= C_1 V_{挖}(I_i, PL_i) + C_2 V_{填}(I_i, PL_i) + C_3 V_{衬}(I_i, PL_i) \\ &= \left\{ C_1 (b_1 + \bar{Z}_i \text{ctg } \theta_i) \bar{Z}_i + 2C_2 \eta \left[ d_i + \frac{1}{2} (H_i - \bar{Z}_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\text{ctg } \theta_i - \text{ctg } \theta_{bi}) \right] (H_i - \bar{Z}_i) + C_3 \left( b_i + \frac{2H_i}{\sin \theta_i} \right) T_{ci} \right\} l_i \end{aligned} \quad (3-55)$$

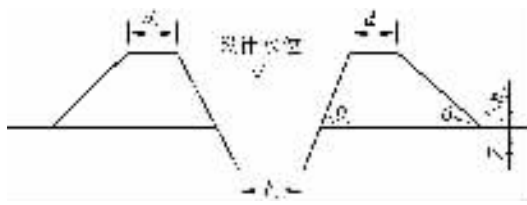


图 3-4 梯形断面半填半挖工程量图

其中  $C_1, C_2, C_3$  为挖方、填方和衬砌量单价 (元/ $m^3$ ),  $V_{挖_i}(I_i, PL_i), V_{填_i}(I_i, PL_i), V_{衬_i}(I_i, PL_i)$  分别为  $i$  段挖方、填方、衬砌工程量 ( $m^3$ );  $d_i$  为堤顶宽度 ( $m$ );  $\eta$  为填方损失系数, 其他水力要素由图 3-3 几何关系及前述公式可得:

$$\begin{aligned}
 H_i &= h_{加大,i} + \Delta_i \\
 \bar{Z}_i &= \frac{Z_i^{(1)} + Z_i^{(2)}}{2} \\
 Z_i^{(1)} + \Delta h_i^{(1)} &= Z_i^{(2)} + \Delta h_i^{(2)} = h_i = \zeta_{1i} I_i^{-3/16} \\
 b_i &= \zeta_{2i} I_i^{-3/16} \\
 \text{ctg } \theta_i &= m_i \\
 \text{ctg } \theta_{bi} &= m'_i
 \end{aligned} \tag{3-56}$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\Delta h_i^{(1)} = \begin{cases} H_{首} - \nabla_{d0} + \Delta Z_0, & i = 1 \\ \Delta h_{i-1}^{(2)} - \Delta Z_i(PL_i), & i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

式中  $Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}$  为  $i$  渠段上、下端挖深 ( $m$ ),  $\bar{Z}_i$  为其平均值;  $\Delta h_i^{(1)}, \Delta h_i^{(2)}$  为  $i$  渠段上、下端设计水位至地面的高差;  $\Delta Z_i(PL_i)$  为渠段末端局部水头 (若渠末建筑为提水泵站, 则  $\Delta Z_i(PL_i)$  为负值);  $m_i, m'_i$  为  $i$  渠段内、外边坡,  $\Delta Z_0$  为渠首 (第 1 段渠道渠首) 的局部水头损失,  $\nabla_{d0}$  为第 1 段渠道渠首地面高程。

同理可得全填、全挖情况下的梯形渠段和其他断面形状 (圆形、抛物形、几何最优形等) 情况下的  $F_{ci}(I_i, PL_i)$  值。

## 2. 约束条件

### ① 不冲不淤约束

$$I_{不淤,i} \leq I_i \leq I_{不冲,i}(PL_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{3-57}$$

### ② 最小水位衔接校核约束

$$I_j^{(2)} \geq I_j \geq I_j^{(1)} \tag{3-58}$$

这里  $j \in i; \max j \leq N-1$ ; 为渠段末有流量变化且无节制提水建筑的渠段; 若渠段末有节制提水建筑物, 则不需进行最小水位衔接校核, 仅在模型中考虑水头变化  $\Delta Z_i$  即可; 若渠段末有节制建筑, 则  $\Delta Z_i > 0$ ; 若为提水泵站, 则  $\Delta Z_i < 0$ 。

### ③ 渠道首末水头约束

$$\sum_{i=1}^N h_i(I_i, PL_i) = \sum_{i=1}^N [I_i I_i + \Delta Z_i(PL_i)] \leq H_{首} - \Delta Z_0 - H_{末} \tag{3-59}$$

#### ④ 投资约束

$$\sum_{i=1}^N h_{2i}(I_i, PL_i) = \sum_{i=1}^N [F_{ci}(I_i, PL_i) + F_{wi}(PL_i)] \leq KP \quad (3-60)$$

上述几式中,  $I_{\text{不淤 } i}, I_{\text{不冲 } i}, I_i^{(2)}, I_i^{(1)}$  由(3-39)式、(3-47)式、(3-45)式、(3-46)式计算而得,  $h_{1i}(I_i, PL_i), h_{2i}(I_i, PL_i)$  分别为  $i$  渠段的水头损失和投资。

#### 3. 求解方法

由约束(3-57)式—(3-60)式可知, 该模型实际上为二维问题, 于是可引入状态变量  $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \lambda_{2i})$  以及决策变量  $X_i = (I_i, PL_i), i = 1, 2, \dots, N$ 。由(3-57)式、(3-59)式得到对应的顺序递推状态变换的系统方程如下:

$$\begin{cases} \lambda_{1i-1} = \lambda_{1i} - h_{1i}(I_i, PL_i) \\ \lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} - h_{2i}(I_i, PL_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3-61)$$

对应的顺序递推关系为

$$\begin{cases} g_1(\lambda_{11}, \lambda_{21}) = \min \Phi(I_1, PL_1) \\ I_{\text{不淤}} \leq I \leq \min \{H_{\text{首}} - \Delta Z_0 - H_{\text{末}}; I_{\text{不淤}}\} \\ PL_1 \in U_1 \end{cases} \quad (3-62)$$

$$\begin{cases} g_i(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}) = \min \{\Phi(I_i, PL_i) + g_{i-1}[\lambda_{1i} - h_{1i}(I_i, PL_i), \lambda_{2i} - h_{2i}(I_i, PL_i)]\} \\ (I_i, PL_i) \in (V_i, U_i) \\ i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (3-63)$$

由于  $PL_i$  为定性变量, 且  $\Phi(I_i, PL_i)$  为一般函数, 因此渠段可行纵坡和定性可行方案集合  $[V_i, U_i]$  无法由常规方法<sup>[200]</sup>获得。但可以采用以下方法: 首先将  $i$  渠段所有可行的渠段衬砌方式、断面形状、渠道建筑物设计等定性方案  $PL_i = (\phi_{2i}^1, \phi_{2i}^2, \dots, \phi_{2i}^{T_i})$  代入下式:

$$\lambda_{1i} - h_{1i}(\phi_{1i}, \phi_{2i}) = 0 \quad (3-64)$$

得对应的纵坡  $(\phi_{1i}^1, \phi_{1i}^2, \dots, \phi_{1i}^{T_i})$  然后将  $(\phi_{1i}^1, \phi_{1i}^2, \dots, \phi_{1i}^{T_i})$  依次代入下式:

$$\lambda_{2i} - h_{2i}(\phi_{1i}, \phi_{2i}) \geq 0 \quad (3-65)$$

得满足(3-65)式的集合  $(\phi_{1i}^k, \phi_{2i}^k), k = 1, 2, \dots, t_i, t_i \leq T_i$ 。由此可得  $[V_i, U_i] = \{\phi_{1i}^k, \phi_{2i}^k; k = 1, 2, \dots, t_i\}$ ,  $\phi_{1i}^k$  为对应定性方案  $\phi_{2i}^k$  的纵坡。除了满足(3-64)式、(3-65)式外, 应同时满足(3-57)式、(3-58)式, 因此可得纵坡可行域  $\otimes_i^k$  为

$$\otimes_i^k = \begin{cases} \max(I_i^{(1)}, I_{\text{不淤 } i}), \min[I_i^{(2)}, I_{\text{不冲 } i}(\phi_{2i}^k), \phi_{1i}^k] \\ \text{渠段末有流量变化且无提水节制建筑} \\ \{I_{\text{不淤 } i}, \min[I_{\text{不冲 } i}(\phi_{2i}^k), \phi_{1i}^k]\} \\ \text{除以上情况(即不作最小水位衔接校核的情况)} \\ i = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, t_i \end{cases} \quad (3-66)$$

以此递推方法可得整个系统的最优解。

计算机流程框图见图 3-5。

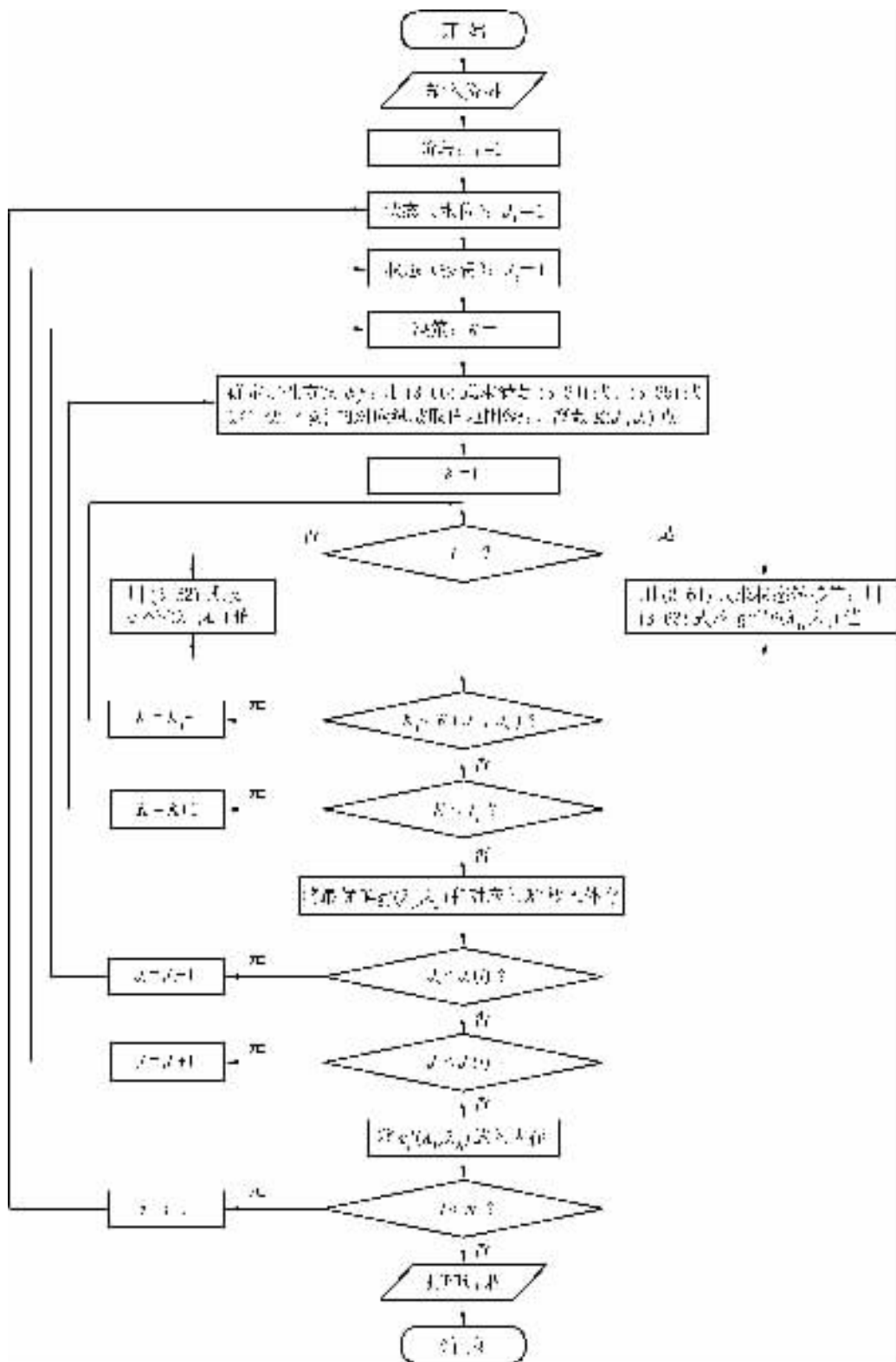


图 3-5 长距离输水渠道与梯级泵站工程的定性混合系统动态规划模型计算机流程框图

#### 4. 需要说明的几个问题

##### (1) 关于定性变量

各渠段定性方案  $PL_i$  的确定,主要取决于各渠段可行的断面形式、衬砌方式和配套建筑物设计参数、位置等。

① 断面形式 常用的断面形式主要有梯形、圆形、抛物形、几何最优形等,如梯形断面又可选择水力最佳、实用经济等不同的断面形式。断面形式不同,则渠道的过流能力、工程量也不同。

② 衬砌方式 衬砌方式不同,工程投资、过流能力、抗冲刷能力等均不相同。衬砌形式好、渠道过流能力大,维修养护和大修理费用小、经济效益好,但投资大;反之,衬砌形式差,投资小,维修养护和大修理费用高。因此规划设计时,各渠段应根据具体情况,选择使工程在一定投资范围内具有最优经济、社会效益的工程措施。

③ 渠道配套建筑物方案 不同的渠段配套建筑物方案不但影响配套工程的投资,而且影响渠道的填挖方工程量(因不配套工程方案不同、局部水头损失或水头增加不同)。在对渠道节制、提水建筑物方案设置时,可以考虑不同的可行规模与位置。如提水泵站,则可选择不同的提水扬程方案,若设置对应的 0 扬程方案(表示不建泵站),即可解决梯级泵站的站址、站数与各站设计扬程的最优化问题。

综上所述,各渠段规划方案集  $PL_i$  设置时,应根据各渠段的具体情况,考虑各方面(经济、社会等)因素,反复论证,慎重确定。对可行定性方案较多的渠道,为了节省优化工程量,要采用专家会议法<sup>[193]</sup>选择有关较优方案,输入模型优选。

##### (2) 最小水位的确定

当最小水位衔接校核不满足要求,即  $j$  渠段纵坡  $I_j$  不在  $I_j^{(2)} \geq I_j \geq I_j^{(1)}$  的范围之内时,有 2 种情况:①  $I_j \geq I_j^{(2)}$ ,即上、下渠道段按设计流量确定断面,上段渠段通过最小流量时,下段渠道得不到对应的最小流量,这时可设节制闸抬高水位  $\Delta Z_{j,m}$ ;②  $I_j \leq I_j^{(1)}$ ,即上、下渠道段设计流量确定断面,当渠道通过最小流量时, $j$  渠段与  $j+1$  渠段间水头差 0.5(m)以上,此时也可采用工程措施设分水闸降低水位  $\Delta Z_j$ 。需要说明的是最小水位不满足要求,一般仅发生在上、下渠段间有流量引出(汇入)的分水口处,工程位置和  $\Delta Z_j$  的数值大小可作为定性方案考虑。设闸后渠道流态属于非均匀流,但设计时不妨近似认为其为均匀流,如文献<sup>[209]</sup>处理。

##### (3) 输水损失的考虑

同一渠段不同衬砌情况下的输水损失是不同的,为了在模型中适当反映流量损失情况,可采用顺序递推方法,第  $i$  渠段流量  $Q_i$  为

$$Q_i = Q_{i-1} - Q_{i-1,损}(PL_{i-1})$$

式中, $Q_{i-1}$  为  $i-1$  渠段流量; $Q_{i-1,损}(PL_{i-1})$  为  $i-1$  渠段流量损失,它和  $i-1$  渠段的定性方案  $PL_{i-1}$  有关。若各定性方案情况下的流量损失不计,则变换(3-44)式后,模型即可采用习惯上的逆序递推方法。

#### 5. 实例分析

某调水工程,设计流量为  $100 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $50 \text{ m}^3/\text{s}$ ,加大、最小流量分别为设计流量的 120% 和 60%,其他主要资料见表 3-8,采用上述方法进行优化设计。

### (1) 系统分段和确定各段定性方案

根据当地社会、经济情况,输水线路的土壤、地质、地形、地貌等情况和泵站的可能位置,确定系统分 4 段,其对应的定性方案见表 3-8。

### (2) 方案优化

将上述各种定性方案及其他有关数据(略)输入计算机,并考虑总投资约束,得最优方案见表 3-9,即建两泵站地点 B、C 处,设计扬程为 2m、3m,其他成果略。最优方案比原方案工程投资节省 17.3%(泵站投资有南水北调工程 12 个泵站的投资,它们由流量、扬程所建的回归曲线获得)。

本例  $N$  较小等于 4,但也相当于定性方案  $PL_i$  被指定情况下的  $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$  个一维动态规划问题。可见其优化工作量是大大减少了,因此若采用其他方法,如文献 [207, 209—212],除增加较多的计算工作量外,同样证明模型优化结果为实际最佳方案。

表 3-8 系统定性方案选用表

内 容 项 目	渠 段			
	0 ~ 15 + 00	15 + 00 ~ 26 + 00	26 + 00 ~ 58 + 00	58 + 00 ~ 71 + 00
渠长(km)	15	11	32	21
设计流量( $m^3/s$ )	100	100	50	50
沿渠土壤	砂土	砂土	砂壤	砂壤
衬砌和断面形式	K = 2.5 梯形,壤土压实 K = 2.5 梯形,水泥土压实 K = 2.0 梯形,无衬砌		K = 2.2 梯形,壤土压实 K = 2.2 梯形,水泥土压实 K = 2.2 梯形,无衬砌	
提水设计扬程(m)	(1)0	(1)0	(1)2	
	(2)2	(2)2	(2)3	0
	(3)3	(3)3	(3)4	

表 3-9 动态规划优化成果表

内 容 项 目	渠 段			
	0 ~ 15 + 00	15 + 00 ~ 26 + 00	26 + 00 ~ 58 + 00	58 + 00 ~ 71 + 00
衬 砌	壤土压实	换土压实	无	无
断 面	K = 2.5	K = 2.3	K = 1.8	K = 1.8
设计提水扬程(m)	无	2	3	无
纵 坡	0.000 05	0.000 04	0.000 03	0.000 07
底 宽(m)	27.5	29.5	17.5	14.5
设计水深(m)	3.82	4.0	4.22	3.60

## 3.2.4 长距离输水渠道工程系统的高维定性定量动态规划模型及其求解方法

### 1. 长距离输水渠道工程的高维动态规划模型

以上交待了长距离输水渠道工程系统的定性定量混合系统动态规划模型,模型的决策变量为各渠段的纵坡  $I_i$  和各渠段的定性方案  $PL_i$ ,目标函数为工程计算分析期内的总支出费用,并考虑首末水位、不冲不淤、渠道最小水位衔接和工程总投资约束。

为了进一步提高模型决策的精度,在上述模型基础上,再考虑以下约束。

(1) 填挖土方量约束 当渠道工程的填方量大于挖方量,附近又没有土方资源时,上述模型中还应加上填挖土方量约束方程。

$$\sum_{i=1}^N h_{3i}(I_i, PL_i) = \sum_{i=1}^N [V_{is}(I_i, PL_i) - V_{ie}(I_i, PL_i)] \leq b_3 \quad (3-67)$$

式中  $V_{is}(I_i, PL_i)$  和  $V_{ie}(I_i, PL_i)$  为  $i$  渠段的填方量和挖方量。

(2) 流量损失约束 不同的衬砌方案、不同的渠道过水断面均影响渠段的流量损失和投资,而输配水渠道的设计主要在于保证下游获得一定水位时的流量,因此在可能的情况下还应进一步考虑流量损失约束:

$$\sum_{i=1}^N h_{4i}(I_i, PL_i) \leq Q_0 - Q_N = b_4 \quad (3-68)$$

式中  $h_{4i}(I_i, PL_i)$  为  $i$  渠段的流量输水损失,它取决于  $i$  渠段的定性方案  $PL_i$  (渠段衬砌方式等)、土壤性质、流量和过水断面; $Q_0, Q_N$  分别为渠道工程的渠首设计引水流量和渠末应获得的设计流量。

## 2. 求解方法

模型(3-52)式、(3-57)式—(3-60)式加上(3-67)式、(3-68)式,将高维问题转化为一维问题:

$$\begin{aligned} \min F = & \sum_{i=1}^N \Phi_i(I_i, PL_i) - \mu_2 \left[ \sum_{i=1}^N h_{2i}(I_i, PL_i) - W_2 + b_2 \right] - \mu_3 \left[ \sum_{i=1}^N h_{3i}(I_i, PL_i) \right. \\ & \left. - W_3 + b_3 \right] - \mu_4 \left[ \sum_{i=1}^N h_{4i}(I_i, PL_i) - W_4 + b_4 \right] \end{aligned} \quad (3-69)$$

$$I_{by,i} \leq I_i \leq I_{bk,i}(PL_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (3-70)$$

$$I_k^{(2)} \leq I_k \leq I_k^{(1)} \quad (3-71)$$

其中,  $k \in i, \max k \leq N-1$ , 为渠末有流量变化且无提水节制建筑渠段

$$\sum_{i=1}^N h_{1i}(I_i, PL_i) = \sum_{i=1}^N [I_i L_i + \Delta Z_i(PL_i)] \leq b_1 \quad (3-72)$$

可见决策变量  $X_i$  为  $(I_i, PL_i)$ , 状态变量  $\lambda$  为水头损失,  $0 \leq \lambda \leq b_1$ , 可得如下对应递推关系:

$$1 \text{ 阶段} : g_1(\lambda_1) = \min_{x_1 \in \zeta_1} \left[ \Phi_1(X_1) - \sum_{j=2}^4 \mu_j h_{j1}(X_1) - \sum_{j=2}^4 \mu_j W_j(\lambda_1, X_1) + \sum_{j=2}^4 \mu_j b_j \right] \quad (3-73)$$

$$W_j(\lambda_1, X_1) = b_j - h_{j1}(X_1) \quad (3-74)$$

$$W_j(\lambda_1) = W_j(\lambda_j, X_1) \quad (3-75)$$

$$X_1 \in (I_1, PL_1) \quad (3-76)$$

式中,  $\zeta_1 \in [v_1, u_1]$ , 设渠段 1 定性方案为  $PL_1 = \{u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^{T_1}\}$  并将它代入下式:

$$\lambda_1 - h_{11}(v_t^1, u_t^1) = 0, t = 1, 2, \dots, T_1 \quad (3-77)$$



得对应的  $(v_1, u_1) = \{ (\otimes_1^t, u_1^t); t = 1, 2, \dots, T_1 \}$ 。  $\otimes_1^t$  为对应定性方案  $u_1^t$  的纵坡  $I_1$  可行取值范围 结合(3-70)式、(3-71)式有

$$\otimes_1^i = \begin{cases} \{ \max(I_1^{(1)}, I_{\text{不淤},1}) \}, \min[ I_1^{(2)}, I_{\text{不冲}}(u_1^i), v_1^i ] \} \\ \text{渠段末有流量变化, 无交叉节制提水建筑} \\ \{ I_{\text{不淤},1}, \min[ I_{\text{不冲},1}(u_1^i), v_1^i ] \} \\ \text{除以上情况} \\ i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (3-78)$$

$$i \text{ 阶段} : g(\lambda_i) = \min_{x_i \in \zeta_i} [ \Phi_i(X_i) - \sum_{j=2}^4 \mu_j h_{ji}(X_i) - \sum_{j=2}^4 \mu_j W_j(\lambda_{i-1}, X_i) + g_{i-1}(\lambda_{i-1}) ] \quad (3-79)$$

$$W_j(\lambda_i, X_i) = W_j(\lambda_{i-1}) - h_{ji}(X_i) \quad (3-80)$$

$$\lambda_{i-1} = \lambda_i - h_{1i}(X_i), i = 2, \dots, N \quad (3-81)$$

$$X_i \in (I_i, PL_i) \quad (3-82)$$

式中,  $\zeta_i \in [v_i, u_i]$  设渠段  $i$  定性方案为  $PL_i = \{u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{T_i}\}$  并将它代入下式:

$$\lambda_i - h_{1i}(v_i^t, u_i^t) = 0, t = 1, 2, \dots, T_i \quad (3-83)$$

得对应的  $u_i^t$  的纵坡取值范围 结合(3-70)式、(3-71)式有

$$\otimes_i^i = \begin{cases} \{ \max(I_i^{(1)}, I_{\text{不淤},i}) \}, \min[ I_i^{(2)}, I_{\text{不冲}}(u_i^i), v_i^i ] \} \\ \text{渠段末有流量变化, 无交叉节制提水建筑} \\ \{ I_{\text{不淤},i}, \min[ I_{\text{不冲},i}(u_i^i), v_i^i ] \} \\ \text{除以上情况} \\ i = 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

以此递推得  $u_j$  获得(3-69)式—(3-72)式的解。

关于  $\mu_j (j = 2, 3, 4)$  的取值范围确定, 可根据  $I_i$  和  $PL_i$  的可行范围、沿渠地形变化的情况、各渠段的流量以及模型(3-69)式目标函数的物理意义来估计。

$\Phi_i(I_i, PL_i) - \sum_{j=2}^4 \mu_j h_{ji}(I_i, PL_i)$  的数值范围  $(A_i, B_i)$ , 即

$$A_i \leq \Phi_i(I_i, PL_i) - \sum_{j=2}^4 \mu_j h_{ji}(I_i, PL_i) \leq B_i \quad (3-84)$$

若设  $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu^i$ , 则可得

$$\frac{-A_i + \Phi_i(I_i, PL_i)}{\sum_{j=2}^4 h_{ji}(I_i, PL_i)} \geq \mu^i \geq \frac{-B_i - \Phi_i(I_i, PL_i)}{\sum_{j=2}^4 h_{ji}(I_i, PL_i)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (3-85)$$

将最不利的  $(I_i, PL_i)$  代入即可获得  $\mu_j$  的取值范围。

### 3. 实例分析

采用上述算例, 通过计算分析  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  的取值范围可取为  $[0, 2.4]$ , 选用  $L_9(3^4)$  型正交表, 对所选的 9 个  $\mu_j$  组合进行对应的一维动态规划问题求解, 其最优解和采用 DDDP

法求解的结果目标值相差 5.6%。对  $\mu_j$  进一步离散,选用  $L_{25}(5^6)$  型正交表,对所选的 25 个  $u_j$  组合进行对应的一维动态规划问题求解,其最优解和采用 DDDP 法求解的结果基本相同,它占用计算机的运算时间不到 DDDP 法的  $\frac{1}{6}$ 。

### 3.2.5 本节小结

本节所介绍的定性定量混合系统动态规划模型对长距离输水渠道工程系统优化是一种新的尝试,它可以以计算方法综合考虑各渠段断面水力要素、配套建筑物设计参数和位置、断面形式、衬砌方式等最优化规划设计问题,为跨流域调水渠道工程系统优化设计提供了一条新的途径。

对于定性变量状态的选择,可先利用专家会议方法对可行方案进行粗选,集众多专家、工程技术人员的知识、经验,以节省优化工作量。

# 第 4 章 大线性块角结构试验选优方法及其在大型树状管网系统优化中的应用

自 1947 年 Dantzig 提出单纯形法后,线性规划的理论趋向成熟,但随着实际应用日益广泛与深入,约束条件个数宏大、变量维数多的大线性问题越来越多,由于运用单纯形法计算时计算机计算容量及速度随约束个数的增加呈指数增长,因此在求解大型问题时存在一定的困难。为了弥补这一缺陷,众多学者在改进计算方法方面进行了大量的研究。本章主要介绍运用试验选优理论来求解某些耦合约束较少的大型块角结构问题的方法,该方法在管网优化实例计算中获得了良好的效果。

## § 4.1 大型线性块角结构问题的试验选优方法与一般算例

### 4.1.1 方法

运用多维动态规划试验选优方法的思路来研究大型线性块角结构问题,一般的大型块角结构问题可以写成:

$$\text{目标函数: } \max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_S X_S + C_N X_N$$

$$\text{一维主约束: } d_{01} X_1 + d_{02} X_2 + \dots + d_{0S} X_S + \dots + d_{0N} X_N \leq b$$

$$\text{耦合约束: } D_1 X_1 + D_2 X_2 + \dots + D_S X_S + \dots + D_N X_N \leq B_0 \quad (4-1)$$

$$\text{子系统约束: } \begin{cases} A_1 X_1 \leq B_1 \\ A_2 X_2 \leq B_2 \\ \dots, A_S X_S \leq B_S, \dots \\ A_N X_N \leq B_N \\ X_S \geq 0, S = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

$$\text{式中 } C_S = (C_1^S, C_2^S, \dots, C_N^S)$$

$$X_S = (X_1^S, X_2^S, \dots, X_N^S)$$

$$d_{0S} = (d_{01}^S, d_{02}^S, \dots, d_{0N}^S)$$

$$D_S = \begin{pmatrix} d_{11}^S & d_{12}^S & \dots & d_{1N}^S \\ d_{21}^S & d_{22}^S & \dots & d_{2N}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{mi1}^S & d_{mi2}^S & \dots & d_{miN}^S \end{pmatrix}$$

$$A_S = \begin{pmatrix} A_{11}^S & A_{12}^S & \dots & A_{1N}^S \\ A_{21}^S & A_{22}^S & \dots & A_{2N}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{mi1}^S & A_{mi2}^S & \dots & A_{miN}^S \end{pmatrix}$$

以上,  $S = 1, 2, \dots, N$ ,

$$B_S = (B_{1S}, B_{2S}, \dots, B_{mS}), S = 0, 1, \dots, N$$

对(4-1)式中耦合约束  $D_1 X_1 + D_2 X_2 + \dots + D_S X_S + \dots + D_N X_N \leq B_0$  加入松弛量  $W$ , 该式转化为

$$D_1 X_1 + D_2 X_2 + \dots + D_S X_S + \dots + D_N X_N \leq B_0, W \geq 0 \quad (4-2)$$

将上式代入(4-1)式目标函数, 有

$$\max Z = (C_1 - YD_1) X_1 + (C_2 - YD_2) X_2 + \dots + (C_N - YD_N) X_N - YW + YB_0$$

$$d_{01} X_1 + d_{02} X_2 + \dots + d_{0S} X_S + \dots + d_{0N} X_N \leq b$$

$$A_1 X_1 \leq B_1$$

$$A_2 X_2 \leq B_2 \quad (4-3)$$

$$\dots, A_S X_S \leq B_S, \dots$$

$$A_N X_N \leq B_N$$

$$X_S \geq 0, W \geq 0, S = 1, 2, \dots, N$$

若耦合约束对应的拉氏乘子  $Y$  已知, 则可用以下方法进行递推:

$$g_1(\lambda_1) = \max (C_1 - YD_1) X_1$$

$$d_{01} X_1 \leq \lambda_1$$

$$A_1 X_1 \leq B_1$$

$$X_1 \geq 0$$

$$(4-4)$$

式中  $\lambda_1$  为状态变量, 其取值范围根据  $X_1$  的可行域(由  $A_1 X_1 \leq B_1$  可知)和  $d_{01} X_1 \leq \lambda_1$  推算得到。将不同的  $\lambda_1$  离散值代入上式, 用单纯形法求解获得对应的最优解  $X_1^*(\lambda_1)$ , 并在迭代过程中记下  $W(\lambda_1, X_1^*) = B_0 - D_1 X_1^*$  的值。

$$g_1(\lambda_s) = \max \{ (C_s - YD_s) X_s + g_{s-1}(\lambda_{s-1}) \}$$

$$d_{0s} X_s \leq \lambda_s$$

$$A_s X_s \leq B_s$$

$$X_s \geq 0$$

$$(4-5)$$

同样, 在每次迭代过程中记下  $W(\lambda_s, X_s^*) = W(\lambda_{s-1}, X_{s-1}^*) - D_s X_s^*$  的值,  $\lambda_s$  的取值范围由  $X_s$  的可行域和  $d_{0s} X_s \leq \lambda_s$  推算得到。这里, 系统方程为

$$\lambda_{s-1} = \lambda_s - d_{0s} X_s$$

但当  $S = N$  时, 要求  $W(\lambda_N, X_N^*) \geq 0$ , 由(4-3)式、(4-4)式、(4-5)式即可获得拉氏乘子为对应数值时的最优解。对于拉氏乘子的选优可采用试验选优方法如正交表法, 将最优的  $Y^*$  代入(4-3)式、(4-4)式、(4-5)式即可获得原问题的最优解。

### 4.1.2 算例

$$\max Z = 3X_{11} + 4X_{12} + 5X_{21} + 7X_{22}$$

耦合约束 1 :  $2X_{11} - X_{12} + 2X_{21} - X_{22} \leq 8$

耦合约束 2 :  $X_{11} + 2X_{12} - X_{21} + 2X_{22} \leq 11$

耦合约束 3 :  $3X_{11} + 2X_{12} - 3X_{21} + X_{22} \leq 6$

耦合约束 4 :  $X_{11} + 3X_{12} - 4X_{21} + 5X_{22} \leq 15$

耦合约束 5 :  $4X_{11} + 3X_{12} + 3X_{21} - 4X_{22} \leq 15$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{11} - X_{12} \leq 3 \\ X_{11} + X_{12} \leq 5 \\ X_{12} \leq 3 \\ X_{11}, X_{12} \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{记作 } \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 \leq \mathbf{B}_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_{21} + X_{22} \leq 9 \\ 3X_{21} + 2X_{22} \leq 18 \\ X_{21} + 2X_{22} \leq 9 \\ X_{21} \leq 9 \\ X_{21}, X_{22} \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{记作 } \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{B}_2)$$

把耦合约束 2, 3, 4, 5 加入至目标函数中, 对应的拉氏乘子为  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , 松弛变量为  $W_1, W_2, W_3, W_4$ , 则上述问题转化为

$$\begin{aligned} \max Z = & (3 - Y_1 - 3Y_2 - Y_3 - 4Y_4)X_{11} + (4 - 2Y_1 - 2Y_2 - 3Y_3 - 3Y_4)X_{12} \\ & + (5 + Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 - 3Y_4)X_{21} + (7 - 2Y_1 - Y_2 - 5Y_3 + 4Y_4)X_{22} \\ & - Y_1W_1 - Y_2W_2 - Y_3W_3 - Y_4W_4 + 11Y_1 + 6Y_2 + 15Y_3 + 15Y_4 \end{aligned}$$

$$2X_{11} - X_{12} + 2X_{21} - X_{22} \leq 8$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 \leq \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{B}_2$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, W_1, W_2, W_3, W_4 \geq 0$$

将上式转化为对应的递推方程 :

$$g_1(\lambda_1) = \max \{ Z(3 - Y_1 - 3Y_2 - Y_3 - 4Y_4)X_{11} + (4 - 2Y_1 - 2Y_2 - 3Y_3 - 3Y_4)X_{12} \}$$

$$2X_{11} - X_{12} \leq \lambda_1$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 \leq \mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{X}_1 \geq 0$$

要求在迭代过程中记下  $W_j(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*)$  的值,  $W_j(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*)$  为

$$W_1(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) = 11 - X_{11}^* + 2X_{12}^*$$

$$W_2(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) = 6 - 3X_{11}^* + 2X_{12}^*$$

$$W_3(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) = 15 - X_{11}^* + 3X_{12}^*$$

$$W_4(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) = 15 - 4X_{11}^* + 3X_{12}^*$$

$\lambda_1$  的取值范围由  $2X_{11} - X_{12} \leq \lambda_1$  和  $X_{11}, X_{12}$  的可行域(即算例的耦合约束和子系统约束)推算得到,其值为  $-3 \sim 10$ , 离散步长取 1.0。

$$g_2(\lambda_2) = \max Z \{ (5 + Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 - 3Y_4)X_{21} + (7 - 2Y_1 - Y_2 - 5Y_3 + 4Y_4)X_{22} \}$$

$$2X_{21} - X_{22} \leq \lambda_2$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 \leq \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{X}_2 \geq 0$$

$\lambda_2$  的取值范围由  $2X_{21} - X_{22} \leq \lambda_2$  和  $X_{21}, X_{22}$  的可行域(即算例的耦合约束和子系统约束)推算得到,其值为  $-4.5 \sim 8$ 。同样要求在迭代过程中记下  $W_j(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*)$  的值,  $W_j(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*)$  为

$$W_1(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*) = W_1(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) + X_{21}^* - 2X_{22}^*$$

$$W_2(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*) = W_2(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) + 3X_{21}^* - X_{22}^*$$

$$W_3(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*) = W_3(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) + 4X_{21}^* - 5X_{22}^*$$

$$W_4(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*) = W_4(\lambda_1, \mathbf{X}_1^*) - 3X_{21}^* + 4X_{22}^*$$

又因阶段总和  $N = 2$ , 因此要求  $W_j(\lambda_2, \mathbf{X}_2^*) \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ 。该阶段的状态转移方程为

$$\lambda_1 = \lambda_2 - 2X_{21} + X_{22}$$

从上述递推方程可获得对应拉氏乘子指定情况下的最优解。

表 4-1 正交表和对应优化值

因素 试验水平	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$\mathbf{X}$	$Z$
1	0	0	0	0	2, 3, 3, 3	54
2	0	0.5	0.5	0.5	0, 3, 3, 3	48
3	0	1	1	1	0, 0, 3, 3	36
4	0.5	0	0.5	1	0, 0, 3, 3	36
5	0.5	0.5	1	0	0.5, 0, 4, 1	28.5
6	0.5	1	0	0.5	0, 0, 3, 3	36
7	1	0	1	0.5	0, 0, 4, 1	27
8	1	0.5	0	0	1, 3, 3, 3	54

试验水平		因素				X	Z
		Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>		
9		1	1	0.5	1	0, 0, 3, 3	36
指标平均值	K <sub>0</sub>	46	39	48	45.5		
	K <sub>0.5</sub>	33.5	43.5	40	37		
	K <sub>1</sub>	39	36	30.5	36		
较差	R	7	4.5	8	8.5		
	R <sub>1</sub>	12.5	7.5	17.5	9.5		

将  $Y_j (j = 1, 2, 3, 4)$  在  $[0, 1]$  内离散 3 点, 取  $0, 0.5, 1$  三个水平安排正交试验, 其  $L_9(3^4)$  型正交表和对应的 9 个试验水平组合以及代入模型获得的对应优化值见表 4-1 所示。由正交分析可知(表 4-1), 理论最优解和若干次  $Y_j$  组合  $(0, 0.5, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (1, 0.5, 0, 0)$  等都可以使原问题获得最优解:

$$X_{11}^* = 2, X_{12}^* = X_{21}^* = X_{22}^* = 3, Z^* = 54$$

$$W_1(\lambda_2, X_2^*) = W_2(\lambda_2, X_2^*) = 0, W_3(\lambda_2, X_2^*) = W_4(\lambda_2, X_2^*) = 1$$

即加入至目标函数中的耦合约束 1、2 等式成立, 3、4 不等式成立。  $Y_1^* = Y_3^* = Y_4^* = 0, Y_2^* = 0.5$  时的线性规划递推计算见表 4-2 和表 4-3。

表 4-2  $Y_1^* = Y_3^* = Y_4^* = 0, Y_2^* = 0.5, s = 1$  递推表

$\lambda_1$	$X_{11}^*, X_{12}^*$	$W_j[\lambda_1, X_1^*], [j = 1, 2, 3, 4]$				$g_1[\lambda_1]$
		-3	-3	5	0	
6	6	9	-2	0.5, 3	4.5	1.5
5.5	4	9.75	-1	1, 3	4	-3
5	2	10.5	0	1.5, 3	3.5	-4.5
4.5	0	11.25	1	2, 3	3	-6
4	-2	12	2	2, 3	3	-6
4	-2	12	3-10	2, 3	3	-6
4	-2	12				

表 4-3  $Y_1^* = Y_3^* = Y_4^* = 0, Y_2^* = 0.5, s = N = 2$  递推表

$\lambda_2$	$X_{21}^*, X_{22}^*$	$\lambda_1$	$W_j[\lambda_2, X_2^*], [j = 1, 2, 3, 4]$				$W_j[\lambda_2, X_2^*] \geq 0$	$g_2[\lambda_2]$
			$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$		
-4	-0.2, 4.4	0	-5.1	-8.3	-16.7	17	/	/
-3	-0.6, 4.2	0	-4.3	-6.9	-14.1	15	/	/
-2	1.0, 4.0	0	-3.5	-5.5	-11.5	13	/	/
-1	1.4, 3.8	0	-2.7	-4.1	-8.9	11	/	/
0	1.8, 3.6	0	-1.9	-2.7	-6.3	9	/	/
1	2.2, 3.4	0	-1.1	-1.3	-3.7	7	/	/
2	2.2, 3.6	0	0.3	0.1	-1.1	4	/	/
3	3, 3	0	0.5	1.5	1.5	3	>0	50.25
4	3, 3	1	0	0	1	1	>0	51

$\lambda_2$	$X_{21}, X_{22}$	$\lambda_1$	$W_j[\lambda_2, X_2^* \quad   \quad j = 1, 2, 3, 4]$				$W_j[\lambda_2, X_2^*] \geq 0$	$g_2[\lambda_2]$
			$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$		
5	3, 3	2	0	0	1	1	$> 0$	51
6	3, 3	3	0	0	1	1	$> 0$	51
7-8	3, 3	3	1	0	0	1	$> 0$	51

#### 4.1.3 在县级经济发展线性规划模型中的应用

县级经济发展线性模型是典型的块角结构,目标函数可为年收入最大,约束为工业、农业、轻工业等子系统的块角约束和涉及全县整个系统的供电、资金、劳力等耦合约束。作者对江苏省响水县(368个变量、246个约束、7个耦合约束、6个子系统)、盱眙县(238个变量、245个约束、8个耦合约束、6个子系统)、灌云县(211个变量、204个约束、4个耦合约束、6个子系统)的总体发展模型进行了求解,并与单纯形相比较,时间分别节省了2.57、1.62、3.05倍,取得了较为满意的结果。

#### 4.1.4 本节小结

本节在多维动态规划试验选优方法的基础上,针对耦合约束少的大型块角结构线性问题介绍了试验选优方法,使大矩阵迭代运算转化为主对角线上的小矩阵迭代运算,从而节省了计算机CPU的运算时间。

本节介绍的线性规划试验选优方法要求各子系统在对应的耦合约束拉氏乘子变化情况下均有解,最好是子系统的约束凸多边形闭合,它在实例中可通过加入决策变量的范围约束等措施加以实现。

本节所述的大线性块角结构试验选优方法实际上也是一种分解技术。协调层采用正交试验协调,给各子系统下达协调变量 $Y$ (即耦合约束拉氏乘子),各子系统是在 $Y$ 已知的情况下,采用单纯形法对子系统进行选优,得到对应目标值 $g_i(\lambda_i)$ 和决策变量 $X_i(i = 1, 2, \dots, N)$ ,然后再返回协调层进行试验分析选优,确定最优 $Y^*$ 、 $X^*$ 、 $F^*$ 值,其递阶层次结构见图4-1。

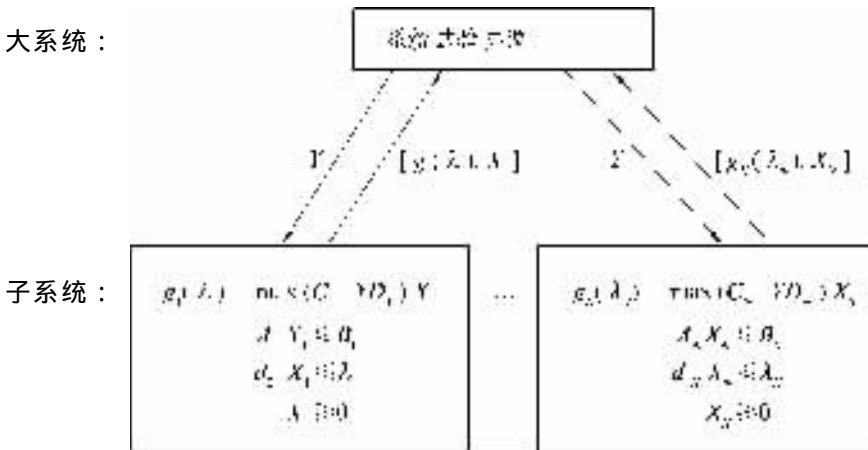


图 4-1 大线性试验选优法递阶层次结构图



与 Dantzig-wolfe 法比较 :Dantzig-wolfe 法建立在凸组合原理和列生成方法的基础上 ,它适用于一般大线性问题 ,而本节试验选优方法建立在耦合约束拉氏乘子正交试验的基础上 ,仅适用于耦合约束较少的大线性问题 ,其运算时间和耦合约束的个数有密切关系。对于耦合约束少的本节中的三个实例 ,采用 Dantzig-wolfe 法所花费的运算时间与本节所述方法相比没有优越性 ,分别是试验选优方法所占运算时间的 1.06、13.9、0.86 倍 ,但本节所述方法的程序编写却十分容易。

该方法特别适用于县(市)、省 ,乃至全国某一行业(或总体)发展规划的线性模型求解。如求解在各乡(镇)级模型基础上考虑资源耦合约束建立的县(市)级模型 ,在县(市)级模型上建立的省级 ,乃至全国某一行业(或总体)的经济发展规划模型。

## § 4.2 大型树状管网线性块角结构模型及实例求解

### 4.2.1 问题的提出

采用线性模型对树状管网进行优化设计<sup>[213-214]</sup> ,由于变量和约束个数多 ,采用单纯形法求解时计算机运算时间随维数的增加呈指数增长 ,因此对于一般较大的管网系统求解困难较大。本节在总结前人的基础上 ,以二级树状管网为例 ,把传统线性模型转化为具有两个耦合约束的块角结构问题 ,把传统单纯形法中一个大矩阵的迭代运算转化为大矩阵主对角线上的小矩阵迭代运算 ,从而节省运算时间 ,使多级树状管网的大型问题优化成为可能。

### 4.2.2 二级树状管网的线性块角结构数学模型

#### 1. 目标函数

图 4-2 中二级树状管网分为  $N$  段 ,各段干管长  $l_i$  ,支管长  $l_{bi}$  ,取总投资最小为目标函数 ,则第  $i$  段干管和所属支管的目标函数为

$$\min F_i = \sum_{j=1}^{N_m} C_{ij} X_{ij} + \sum_{j=1}^{N_b} C_{i,j+N_m} X_{i,j+N_m} , i = 1, 2, \dots, N \quad (4-6)$$

式中  $F_i$  为第  $i$  段干管和所属支管的总投资  $j$  为标准管序号 , $N_m, N_b$  为干管和所属支管标准管径的总数 , $C_{ij}, C_{i,j+N_m}$  为干、支管的单价 , $X_{ij}, X_{i,j+N_m}$  为干、支管标准管径管长 ,则整个管网的目标函数为

$$\min F = \sum_{i=1}^N F_i \quad (4-7)$$



图 4-2 二级树状管网图

#### 2. 约束条件

##### (1) 节点水头约束

干、支管交点处和支管末的水头 $(H_i, H_{ie})(i = 1, 2, \dots, N)$ 应控制在允许范围内。

$$H_{imin} \leq H_i \leq H_{imax} \quad (4-8)$$

$$H_{ie\min} \leq H_{ie} \leq H_{ie\max} \quad (4-9)$$

又因为

$$H_i = H_{i-1} - \sum_{j=1}^{N_m} S_{ij} X_{ij} + J_i L_i \quad (4-10)$$

$$H_{ie} = H_i - \sum_{j=1}^{N_b} S_{i,j+N_m} X_{i,j+N_m} + J_{bi} L_{bi} \quad (4-11)$$

式中  $S_{ij}, S_{i,j+N_m}$  为干、支管水力坡降,  $J_i, J_{bi}$  为干、支管地面坡度。将(4-10)式、(4-11)式代入(4-8)式、(4-9)式有

$$J_i L_i + H_{i-1} - H_{imin} \geq \sum_{j=1}^{N_m} S_{ij} X_{ij} \geq J_i L_i + H_{i-1} - H_{imax} \quad (4-12)$$

$$J_i L_i + J_{bi} L_{bi} + H_{i-1} - H_{ie\min} \geq \sum_{j=1}^{N_m} S_{i,j+N_m} X_{i,j+N_m} \geq J_i L_i + J_{bi} L_{bi} + H_{i-1} - H_{ie\max} \quad (4-13)$$

### (2) 管长约束

$$\sum_{j=1}^{N_m} X_{ij} = l_i \quad (4-14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^{N_b} X_{i,j+N_m} = l_{bi} \quad (4-15)$$

### (3) 非负约束

$$X_{ij}, X_{i,j+N_m} \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N_m \text{ 或 } N_b \quad (4-16)$$

### (4) 整个管网的耦合约束

因为  $H_1 = H_0 - \sum_{j=1}^{N_m} S_{1j} X_{1j}$ , 因此由(4-6)式、(4-12)式—(4-16)式组成的第  $i$  段干管和对应支管(以下称子系统)的线性模型, 可以从  $i = 1$  开始依次求解, 从而获得所有  $N$  个子系统的解。但这样对各个子系统独立求解获得的解并不是大系统的全局最优解, 因为尚未考虑各个子系统间的耦合约束, 因此还应加上耦合约束:

$$H_N - H_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_m} S_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^N l_i J_i \quad (4-17)$$

$$H_{N\min} \leq H_N \leq H_{N\max} \quad (4-18)$$

由图 4-2 可知 (4-17)式、(4-18)式即为干管首末水头允许约束。

合并(4-17)式、(4-18)式有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_m} S_{ij} X_{ij} \leq H_{N_{\max}} - \sum_{i=1}^N l_i J_i - H_0 \quad (4-19)$$

$$- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_m} S_{ij} X_{ij} \leq -H_{N_{\min}} + \sum_{i=1}^N l_i J_i + H_0 \quad (4-20)$$

(4-19)式、(4-20)式和(4-7)式、(4-12)式—(4-16)式构成了具有两个耦合约束的块角结构数学模型。

### 3. 实例分析

江苏某山丘区茶园喷灌二级管网系统见图 4-3,根据地形、支管和轮灌制度确定最不利流量组合,将系统干管分为 6 段、支管 6 条,各管段的长度、流量、节点高程如图 4-3 所示,分别采用单纯形法和本节所述方法进行求解,求解结果也见图 4-3。求解时将各管段经济管径的相邻二标准管径代入模型,且在管径选择时进行管内流速约束检验,对于两个支管的节点,除了增加对应支管的目标项、约束项外,不影响模型的运用。采用这两种方法求解的结果相同(各段管段的最优标准管径和对应的管长以及各节点最优的水头如图 4-3 中所示),但本节所述方法比传统方法快了 6 倍多。

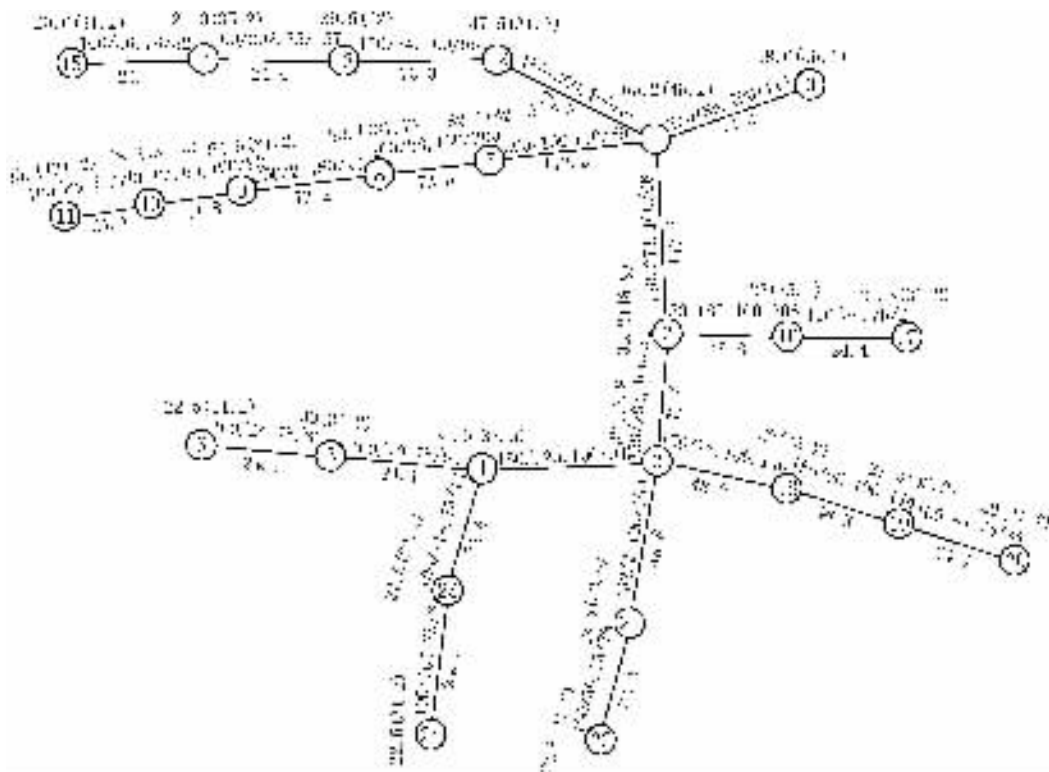


图 4-3 某山丘区茶园喷灌二级管网系统布置图

注:高程(节点最优水头) 节点○  $\frac{\text{标准管径/管长}}{\text{流量}}$

(高程单位为 m,标准管径单位为 mm,管长单位为 m,流量单位为  $\text{m}^3/\text{h}$ )

### 4. 需要说明的问题

(1) 本节针对二级管网而言,对于多级管网同样可用上述计算程序稍作修改进行计算。

如三级管网系统(分总干、干、支三级管道),对整个系统而言,某段总干管和所属干、支管构成子系统,而某一段总干管和所属支管构成了次子系统,这里的子系统数学模型即为前述具有两个耦合约束的线性块角结构模型。因此,对整个三级管网系统求解时,只需对对应的二级管网的计算程序稍作修改,增加一个总管耦合约束协调的循环。同样的处理方法可求解更多级树状管网优化问题。

(2) 本节实例的线性管网系统相对较小,仅含 2 个耦合约束、48 个变量、120 个约束条件,而本节所述方法比传统方法快了 6 倍多。由模型的性质可知,当管网系统愈大,该方法的优越性将愈突出,如对苏南另一稍大的三级树状管网系统(含有 2 个耦合约束、432 个变量、734 个约束)进行了求解,这两种方法的运算速度相差近 9 倍。

#### 4.2.3 本节小结

根据树状管网线性块角结构模型耦合约束少的特点,提出了线性问题的试验选优方法,可以在一定程度上克服传统大型问题单纯形法求解时计算速度慢的缺点,从而使某些大型树状管网问题的求解成为可能。

# 第 5 章 大型非线性模型试验选优 方法及其在地面水地下水 联合优化调度中的应用

大型非线性系统的优化技术是系统科学的重要研究课题,其递阶模型的主要方法是 Dantzig-Wolfe 的“分解协调”理论和胡振鹏、冯尚友的“分解聚合”方法。本章介绍的方法是采用同样的试验选优思路提出的大型非线性系统试验选优方法,它同“分解聚合”法具有相同的适用性,但比“分解聚合”法的优化工作量更小。在某种意义上说,“分解聚合”法为本章所述方法的一种特殊情况——全面试验选优方法。

## § 5.1 试验选优方法和一般算例

### 5.1.1 一个算例

求解以下非线性规划问题：

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min F(X) = (X_1 - 7)^2 + (X_2 - 14)^2 + (X_3 - 7)^2 + (2X_4 - 7)^2 + (2X_5 - 14)^2 \\
 \quad \quad \quad + (2X_6 - 7)^2 + X_1 X_4 + X_2 X_5 + X_3 X_6 \\
 s. t. \quad X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 2X_6 \geq 66 \\
 \quad \quad 4 \geq X_4 \geq 2 \\
 \quad \quad 4 \geq X_5 \geq 2 \\
 \quad \quad 4 \geq X_6 \geq 2 \\
 \quad \quad X_1, X_2, X_3 \text{ 为非负整数} \\
 \quad \quad X_4, X_5, X_6 \text{ 为整数}
 \end{array} \right. \quad (5-1)$$

若  $X_4, X_5, X_6$  已知,则该问题为求解最小值的一维动态规划问题。又因  $X_4, X_5, X_6$  可行取值为 2, 3, 4, 因此该问题相当于求解  $3^3 = 27$  个一维动态规划。若采用部分试验选优方法——如正交试验法,选择  $L_9(3^4)$  型正交表将  $X_4, X_5, X_6$  的 9 种组合代入模型,采用一维动态规划模型的求解结果  $[F(X)]$  值见表 5-1,并由此进行正交分析,从求得单因素对应水平的指标平均值  $K_i$  值可知  $X_4, X_5, X_6$  对应的最优值为  $X_4^* = 3, X_5^* = 4, X_6^* = 2$ , 恰好在所选的 9 个试验组合之内,此时对应的  $X_4^* = 5, X_5^* = 12, X_6^* = 19, F(X)^* = 299$ 。

采用全面试验选优方法将  $X_4, X_5, X_6$  全部 27 个组合代入模型(5-1)式,容易证明用正交试验计算分析 9 个组合而获得的理论最优解为全部 27 个组合中的实际最优解。

表 5-1  $L_9(3^4)$ 型正交表和正交分析

水平 因素 试验号	$X_1$	$X_5$	$X_6$	$F(X)$
1	2	2	2	368
2	2	3	3	328
3	2	4	4	331
4	3	2	3	349
5	3	3	4	318
6	3	4	2	299
7	4	2	4	346
8	4	3	2	320
9	4	4	3	315
$K_1$	342.3	354	329*	
$K_2$	322*	322	330	
$K_3$	327	315*	331	

注：打“\*”者为最优水平。

### 5.1.2 方法

对一般非线性问题<sup>[147]</sup>：

$$\begin{cases} \min F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + f_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) + \dots + f_n(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n g_{ij}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i) \leq \mathbf{B}_j, j = 1, 2, \dots, m, \mathbf{X}_i \in R_i, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5-2)$$

式中  $\mathbf{X}_i$  为与目标函数第  $i$  项有关的变量向量，以下称独立变量； $\mathbf{Y}_i$  为除与目标函数第  $j$  项有关外还与其他项有关的变量向量，以下称关联变量； $R_i$  为独立变量的可行域； $g_{ij}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$  为  $j$  维  $i$  项约束条件的向量函数，若独立变量  $\mathbf{X}_i$  已知，则(5-2)式转化为

$$\begin{cases} \min F(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n f'_i(\mathbf{Y}_i) \\ \sum_{i=1}^n g'_{ij}(\mathbf{Y}_i) \leq \mathbf{B}_j, j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5-3)$$

(5-3)式比(5-2)式简单得多，可以采用现行优化技术对模型(5-3)式进行求解，当独立变量  $\mathbf{X}_i$  为最优值  $\mathbf{X}_i^*$  时，代入(5-3)式可获得对应关联变量最优解  $\mathbf{Y}_i^*$ 。关于独立变量  $\mathbf{X}_i^*$  的获得，若采用现行最优化技术求解很困难，建议采用部分试验选优方法如正交试验法。

若(5-3)式仍为一个十分复杂的大系统问题，可进一步采用其他大系统优化技术，如将它分解为  $n$  个子问题：

$$\begin{cases} \min Z_i = f'_i(\mathbf{Y}_i) \\ j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \\ g'_{ij}(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{W}_{ij} \end{cases} \quad (5-4)$$

变化  $\mathbf{W}_{ij}$  获得  $Z_i(\mathbf{W}_{ij})$  关系，则(4-3)式变为

$$\begin{cases} \min \tilde{F} = \sum_{i=1}^n Z_i(W_{ij}) \\ j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n W_{ij} \leq B_i \end{cases} \quad (5-5)$$

求解(5-5)式即可获得(5-3)式的解。

### 5.1.3 本节小结

1. 以上介绍的复杂非线性试验选优方法,其核心是针对一般非线性模型(5-2)式。对独立变量和关联变量采用不同的优化技术,对独立变量采用试验选优方法,对关联变量采用现行优化技术,从而节省优化工作量,使某些复杂问题的求解成为可能。

这里应该注意到,对于模型(5-3),若将 $W_{ij}$ 所有组合代入(5-4)式获得关系式(5-5)式,该方法即为“分解聚合”法;对 $W_{ij}$ 采用同以上 $X_i$ 一样有选择地在全部组合中选取少量组合代入(5-4)式来获得关系(5-5)式,即为本书所介绍的试验选优方法基本思想。因此从该意义上来说,大系统“分解聚合”法是本节所述方法的一个特例,即全面试验选优方法。反过来也可以说,本节所述方法为“分解聚合”法的一个特例,即部分试验选优方法。

2. 本节介绍的非线性规划试验选优方法,也可以说是一种分解-协调优化技术。它运用正交表确定独立变量 $X$ 的 $P$ 个试验组合( $X^1, X^2, \dots, X^P$ )然后在第二层采用简化后的模型(5-3)式确定关联变量的对应优化值( $Y^1, Y^2, \dots, Y^P$ )和对应目标值( $F^1, F^2, \dots, F^P$ ),再至协调层运用正交分析确定系统的理论最优值 $X^*$ ,以及对应的 $Y^*$ 和 $F^*$ 值。其递阶结构见图5-1。

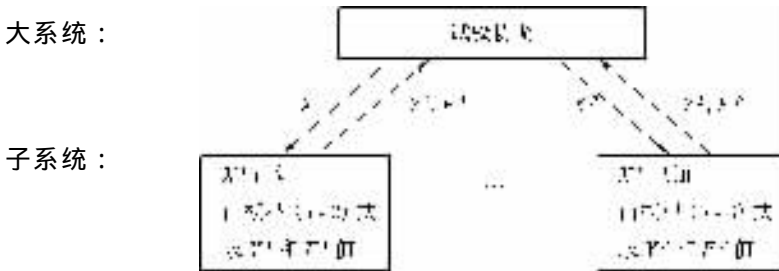


图 5-1 非线性试验选优方法递阶结构图

## § 5.2 地面水与地下水联合调度非线性模型的求解方法

在干旱与半干旱地区,由于地面水源在时间的分配上很不均匀,为了合理利用地区水资源,联合调度地面水与地下水资源已成为水利科学的重要研究课题。本节在总结前人<sup>[215—219]</sup>的基础上,针对江苏徐州一中小型灌区灌溉调度实例的地下水与地面水联合调度数学模型,采用试验选优方法进行优化,与传统近似规划法相比能较大幅度地节省计算机CPU的占用时间,为大型复杂的此类非线性系统优化提供了一个新的途径。

### 5.2.1 灌区地面水与地下水联合调度的非线性模型

江苏省徐州某灌区总耕地面积 9 万亩,该灌区有 4 种可用水资源,即当地径流、南水四湖、京杭大运河灌溉水源和地下水,地下水中还包括了灌溉回归的渗漏水量。因该地区地下水人工回灌费用相对较高,故在模型中未考虑人工回灌问题。研究的目的是通过建立地面水与地下水联合调度的非线性模型来确定灌区作物的优化组成、相对产量以及各种水资源在各时段(月)的优化供应量。

#### 1. 数学模型

##### (1) 目标函数

以灌溉净效益年值最大作为目标函数,

$$\max F(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^n \varepsilon \gamma_i (Y_i - Y_{i0}) Z_i P_i - CG - CS - CL - CN \quad (5-6)$$

式中  $\varepsilon$  为灌溉效益分摊系数;  $\gamma_i$  为考虑副产品收入的折算系数;  $Y_i, Y_{i0}$  为  $i$  作物灌溉和非灌溉的单位面积产量;  $Z_i$  为  $i$  作物种植面积;  $P_i$  为  $i$  作物单价;  $n$  为灌区作物总数;  $CG, CS, CL, CN$  分别为井灌地下水、灌溉地面水、提湖水和引运河水的年支出费用。其中,

$$CG = \sum_{j=1}^m (a_1 X_{1j}^{b_1} + c_1) \quad (5-7)$$

$$CS = \sum_{j=1}^m (a_2 X_{2j}^{b_2} + c_2) \quad (5-8)$$

$$CL = \sum_{j=1}^m (a_3 X_{3j}^{b_3} + c_3 X_{3j} + d_3) \quad (5-9)$$

$$CN = \sum_{j=1}^m (a_4 X_{4j}^{b_4} + c_4 X_{4j} + d_4) \quad (5-10)$$

式中  $X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}, X_{4j}$  分别为  $j$  时段井灌水量、渠灌水量、提湖水量、引运河水量;  $a_k, b_k, c_k (k = 1, 2, 3, 4)$  和  $d_k (k = 3, 4)$  为回归统计参数;  $m$  为一年所分的时段数。

##### (2) 约束条件

###### ① 年来用水量约束

$$\sum_{i=1}^n Z_i [E_i(Y_i) - \sigma_i P_i] - \sum_{j=1}^m [\eta_1 X_{1j} + \eta_2 (X_{2j} + X_{3j} + X_{4j})] \leq \sum_{i=1}^n WC_i \quad (5-11)$$

式中  $Z_i$  为  $i$  作物面积;  $E_i(Y_i)$  为  $i$  作物全生育期需水量,对于干旱和半干旱地区的旱作物为产量的非线性函数;  $\sigma_i$  为  $i$  作物降雨利用系数;  $P_i$  为  $i$  作物全生育期降雨量;  $\eta_1, \eta_2$  为井灌地下水和渠灌地面水的灌溉水利用系数;  $WC_i$  为  $i$  作物全生育期作物根系加深而增加的水量与可利用的地下水补给量之和。

###### ② 各时段来用水量约束

$$\sum_{i=1}^n Z_i [K_{ij} E_i(Y_i) - \sigma_i P_{ij}] - \eta_1 X_{ij} - \eta_2 [X_{2i} + X_{3i} + X_{4i}] \leq \sum_{i=1}^n WC_{ij} \quad (5-12)$$

式中  $K_{ij}$  为  $i$  作物  $j$  时段需水占全生育期需水量的百分数;  $P_{ij}$  为  $i$  作物  $j$  时段的降雨量;



$WC_{ij}$  为  $i$  作物  $j$  时段根系加深而增加的计划湿润层储水量与可利用地下水补给量之和。

③ 各时段当地地面水抽水量不能超过当地最大可能供水量

$$X_{2j} \leq WS_j + \lambda_{1g} X_{1j} + \lambda_{1s} (X_{2j} + X_{3j} + X_{4j}) \quad (5-13)$$

式中,  $WS_j$  为  $j$  时段当地地面水资源的最大可能供水量;  $\lambda_{1g}$ ,  $\lambda_{1s}$  为井灌地下水和渠灌地面水时的回归水系数。

④ 各时段引外水不能超过最大可供水量

$$X_{3j} \leq WL_j, X_{4j} \leq WN_j \quad (5-14)$$

式中,  $WL_j$  为  $j$  时段南四湖的最大可供水量;  $WN_j$  为  $j$  时段运河的最大可供水量。

⑤ 各时段地面水用水量不能超过最大可能来水量

$$X_{2j} + X_{3j} + X_{4j} - \lambda_{1g} X_{1j} - \lambda_{1s} (X_{2j} + X_{3j} + X_{4j}) \leq WS_j + WL_j + WN_j \quad (5-15)$$

⑥ 地下水含水层的年开采量不得超过可开采量

$$\sum_{j=1}^m X_{1j} + E_A + G_O - G_I - G_R - \alpha PF - \sum_{j=1}^m [\lambda_{2j} X_{1j} + \lambda_{2s} (X_{2j} + X_{3j} + X_{4j})] \leq \Delta S \quad (5-16)$$

式中,  $E_A$  为地下水的年潜水蒸发量;  $G_O$ ,  $G_I$  为地下水年出流量和年入流量;  $G_R$  为河渠沟槽的年入渗量;  $\alpha$ ,  $P$ ,  $F$  为降雨入渗补给系数、年降雨量、灌区总面积;  $\lambda_{2j}$ ,  $\lambda_{2s}$  为渠灌和井灌的入渗补给系数;  $\Delta S$  为允许超采水量, 即多年调节补偿水量。

⑦ 作物种植面积与产量关系约束, 即各种作物的总产量不低于计划总产量

$$Z_i Y_i \geq Y P_i \quad (5-17)$$

式中,  $Y P_i$  为  $i$  作物计划总产量。

⑧ 各时段地面水提水能力约束。地面水灌溉均为提水灌溉, 故各时段抽取地面水量不能超过抽水设备的能力, 即

$$X_{2j} + X_{3j} + X_{4j} \leq W P_j \quad (5-18)$$

式中,  $W P_j$  为  $j$  时段地面水抽水设备的提水能力。

⑨ 各时段地下水开采能力约束

$$X_{1j} \leq W G_j \quad (5-19)$$

式中,  $W G_j$  为  $j$  时段井灌抽水能力。

⑩ 非负约束。决策变量  $Z_i$ ,  $Y_i$ ,  $X_{1j}$ ,  $X_{2j}$ ,  $X_{3j}$ ,  $X_{4j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$ ) 均为非负值。

## 2. 求解方法

由以上数学模型可知, 目标函数和约束条件中均包括了决策变量  $Z_i$  和  $Y_i$  的乘积项, 且为不可分割的变量函数。根据这类非线性模型的特点, 常规方法是采用近似规划来解, 由初设方案向最优方案逐步逼近。即在已知方案  $X^{(k)}$  处将目标函数和约束条件中的非线性部分作一阶泰勒展开, 形成线性规划并求解, 将线性规划解进行修正检验, 得到改进方案  $X^{(k+1)}$ , 继续迭代求解直到成果满意为止。其特点是用近似的线性模型去代替非线性模型, 由于模型易失真且优化工作量大, 所以优化工作量和初始方案的选择有较大关系, 有时往往获得的

最优解仅为局部优化解。

从模型(5-6)式和(5-11)式—(5-19)式可知,若作物产量  $Y_i$  已知,模型可转化为五维耦合约束的动态规划模型(5-11)式—(5-13)式、(5-15)式、(5-16)式 5 个约束,因此采用部分试验选优方法如正交试验法对  $Y_i$  选优,采用动态规划方法对  $X_i$  和  $Z_i$  选优。这里,采用第 3 章中介绍的动态规划试验选优方法,将五维动态规划模型转化为以包括所有变量的(5-11)式为耦合约束的一维动态规划模型来求解。

### 5.2.2 实例分析

本节实例中  $Y_i$  的优化采用正交试验法,试验因素为灌区内四种旱作物的产量,各试验水平根据当地农业生产的情况确定了对应的 5 个水平产量(见表 5-2)。选用  $L_{25}(5^5)$  型正交表,根据正交表选择 25 个作物产量组合方案代入动态规划模型,通过 25 次对应动态规划模型的求解,可获得对应全部试验组合  $5^4 = 625$  个产量方案的理论最优方案  $Y_i^*$  值(见表 5-2 中打“\*”者),然后将  $Y_i^*$  代入动态规划模型即可获得对应优化的  $Z_i^*$  和  $X_i^*$ (同样见表 5-3)。

表 5-2 试验选优的产量水平及优化成果表(降雨频率 75%)

作物	小麦	玉米	棉花	大豆
优化灌溉面积(10 <sup>4</sup> 亩)	5.3	2.8	4.6	0.85
试验产量水平(kg/亩) (打“*”者为优化值)	305	285	85	150
	300	280	80*	145*
	295*	275	75	140
	290	270*	70	135
	285	265	65	130
目标值(年灌溉效益)(万元)	3 418.6			

采用常规的近似规划方法同样对该模型进行优化求解。初始解分别选择了对应决策变量的可行域上限值、下限值和中间值,其对应的计算机 CPU 占用时间、收敛情况和目标值见表 5-4 所示,从表 5-4 结果可知试验选优方法的优越性。

表 5-3 水资源量优化成果表

时段(月)	各种水源供水量(10 <sup>4</sup> m <sup>3</sup> )			
	当地径流	南四湖	运河水	地下水
1	2.1	57.3	0	90.5
2	33.8	163.2	0	32.4
3	0.6	20.4	0	47.5
4	109.4	240.5	132.3	360.8
5	61.8	150.7	131.8	480.4
6	116.5	0	0	62.3
7	134.6	0	147.8	451.6
8	215.6	67.8	141.1	327.8
9	112.2	94.7	135.2	105.4
10	23.0	0	0	5.4
11	10.4	0	0	73.2
12	13.0	56.1	0	56.5
全年合计	833.1	850.7	688.2	2 093.8

表 5-4 优化方法比较成果(1995 年,486PC 机)

项 目		CPU 占用时间	目标值(万元)	收敛性
方 法				
试 验 选 优		16 分 16 秒	3 418.6	全局最优
近似规划	初始解取上限	45 分 02 秒	3 274.8	全局最优
	初始解取下限	28 分 52 秒	2 187.7	局部最优
	初始解取中值	35 分 40 秒	3 274.8	全局最优

### 5.2.3 本节小结

针对现行的地下水与地面水联合调度数学模型,采用试验选优方法,以灌区各主要作物期望产量为独立变量,各种可利用水源为关联变量,可大幅度地节省模型的优化工作量,从而为缺水的干旱和半干旱地区众多地面水和地下水联合调度的大型复杂系统优化提供了一个新途径。

# 第 6 章 大系统模拟和定性模型的试验选优方法及其在灌区优化规划中的应用

## § 6.1 模拟系统的试验选优方法及应用

### 6.1.1 概述

现代社会日趋系统化、信息化,在工程技术、社会经济和生物生态等各个领域中出现了许多复杂的大系统。经济建设和科学技术的发展中,也越来越要求提高决策的科学性和正确性,使原本复杂的大系统增加了更大的决策难度和复杂性。由于这类问题的数学模型维数总是很高,以致常常很难应用于一般的大系统决策模型以及其优化方法难以求解,或虽能求解,但要花费很大的代价和努力。若采用系统模拟或仿真技术,虽然能较好地保持模型的仿真性,但要在庞大的方案中集中采用目前常用的方法选优(见前综述)是较为困难的。本章介绍的大系统模拟试验选优方法,即把试验统计选优的有关理论方法<sup>[220, 221]</sup>应用至大系统模拟选优中来,分析指标值的取得由计算机模拟方法获得,同时充分利用众多专家的知识经验,依靠知识模型如层次分析法和模糊综合评判(fuzzy synthetic judgment, FSJ)法筛选试验因素、水平,这样可解决目前大系统优化领域中一些方案组合“爆炸”的单目标、多目标选优问题。这种方法和其他模拟技术优化理论相比具有仿真性好、优化工作量小的优点。

### 6.1.2 大系统模拟试验选优方法

#### 1. 大系统单目标模拟试验选优方法

在系统选优目标单一的情况下,可采用大系统单目标模拟试验选优方法,该方法根据具体情况又可分为正交试验法和综合试验法。

##### (1) 正交试验法

大系统单目标正交试验法的步骤如下:

- ① 系统分层归类。运用模糊聚类方法或专家会议法将系统分层归类,确定试验因素。
- ② 层次分析水平粗选。采用层次分析法对各因素进行水平筛选,确定试验水平。
- ③ 选择构造正交表。根据试验因素及水平选择构造正交表。
- ④ 正交分析指标值。建立计算机系统模拟模型,对正交表选择的少量方案进行模拟,取得方案比较指标值。
- ⑤ 正交分析选优。采用正交分析选优方法的直观分析法或方差分析法选优。

##### (2) 综合试验法

多因素部分试验综合试验法的基本思路是:首先通过专家的知识经验,淘汰一些明显不合理的处理,然后安排试验。根据这一思路,大系统单目标综合试验法的步骤如下:

- ① 系统分层归类。
- ② 层次分析水平粗选。
- ③ 语言化模糊综合评判数学模型方案再选。在层次分析粗选的基础上,对其提交的选优方案集逐个定性评判选优。
- ④ 模拟定量选优。建立系统的计算机模拟模型,对语言化模糊综合评判提交的各个优化方案逐个模拟定量比较选优。

## 2. 大系统多目标模拟试验选优方法

### (1) 单目标优化法

该方法适用于系统目标数在两个以上,但仅有一个重要性悬殊大的主要目标的大系统优化问题,该方法的优化步骤如下:

- ① 系统分层归类。
- ② 层次分析水平粗选。
- ③ 主要目标选优。主要目标采用单目标选优的正交试验优化方法选优,使用正交试验法求得理论最优解和若干依次的优化方案。
- ④ 次要目标去劣。建立语言化和定量化相结合的模糊综合评判数学模型,对上述的优化方案集进行最终排序去劣,并考虑各目标权重的变化,进行敏感性分析。

### (2) 综合评分法

该方法适用于各目标重要性相差不大的情况。其步骤依次如下:

- ① 系统分层归类。
- ② 层次分析方案粗选。
- ③ 语言化模糊综合评判数学模型方案再选。
- ④ 采用计算机模拟模型模拟定量。
- ⑤ 语言化和定量化相结合的模糊综合评判数学模型方案终选和敏感性分析。

### (3) 综合平衡法

该方法同样适用于各目标重要性相差不大的情况,但目标的指标值必须直接可定量,其步骤如下:

- ① 对每一目标分别采用单目标正交试验选优方法选优。
- ② 对所有目标的“优秀”方案综合评审,采用综合评分法的步骤④~⑤。

接下来,以江苏一大型平原自流灌区优化规划设计为例,对以上单目标正交试验选优法和多目标综合评分法加以说明。

## 6.1.3 在灌区优化规划中的应用

江苏淮北一大型灌区总耕田面积为 31.16 万亩,由平原区、圩区两部分组成。建成 30 多年来,由于种种原因,旱灾、涝灾频繁,为此对灌区进行改建扩建优化规划。

### 1. 大系统单目标正交试验选优法

#### (1) 系统分层归类

根据规划设计灌区的具体情况,征求当地工程技术人员和专家的意见,对系统进行分层归类,该优化规划灌区的分层归类情况见图 6-1,共有 5 个主因素、10 个子因素。

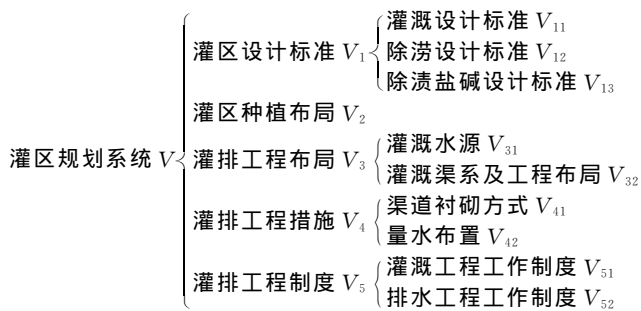


图 6-1 灌区规划系统分层归类图

表 6-1 改造灌区可行方案

因素 $V_{ij}$ 序号	灌溉设计标准 $V_1$			灌区种植布局 $V_2$	灌排工程布局 $V_3$		灌排工程措施 $V_4$		灌排工作制度 $V_5$	
	灌溉 $V_{11}$	除涝 $V_{12}$	除渍盐碱 $V_{13}$		水源 $V_{31}$	布局 $V_{32}$	渠道衬砌 $V_{41}$	量水布局 $V_{42}$	灌溉 $V_{51}$	排水 $V_{52}$
1	90%	10年一遇	标准 1	布局 1	平原区、圩区库水自流,高地回归水提水	布局 1	无	量水方式 1	见图 6-2 18 个方案	排水方式 1
2	80%	5年一遇	标准 2	布局 2	平原区库水自流,圩区、高地回归水提水	布局 2	壤土夯实	量水方式 2		排水方式 2
3	70%						混凝土预制			

(2) 层次分析水平粗选

根据规划灌区的具体情况,召开专家会议征求各方面的意见,整理提出各因素可行水平,见表 6-1,可见共有  $12 \times 2 \times 4 \times 6 \times 36 = 20\ 736$  个方案。

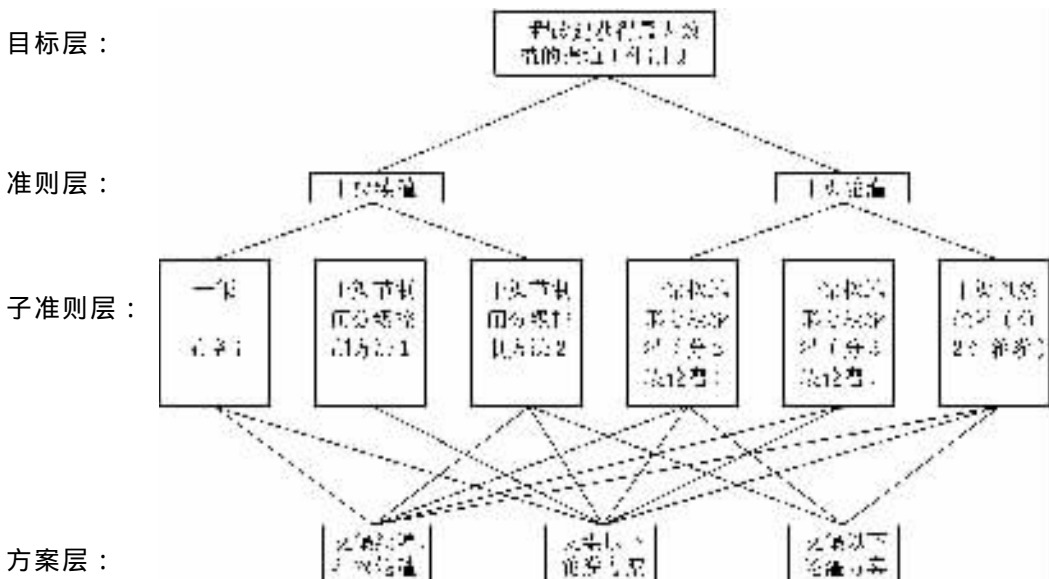


图 6-2 渠道工作制度递阶层次结构

采用层次分析方法,组织专家先对各子因素的可行水平逐个筛选去劣,如灌溉工作制度供分析选优的18种渠道工作制度,见图6-2(层次分析递阶层次结构图)。选择6名了解灌区情况的工程技术人员和专家,通过填写判断矩阵(由层次结构图可知,每人填写一组,共9个判断矩阵),对所得的6组判断矩阵分别进行一致分析,对一致性指标满足要求的判断矩阵分别求其组合权重,从而获得其全部18个方案的平均组合权重的依次排列。根据权重悬殊情况,取前4个方案加入下阶段的选优工作。

然后在此基础上,针对主因素为目标再次采用层次分析方法评判去劣。从而得到层次分析水平粗选成果,见表6-2,共 $2 \times 2 \times 4 \times 2 \times 3 = 96$ 个方案。

表6-2 层次分析粗选成果表

因素 序号 $V_{ij}$	灌溉设计标准 $V_1$	灌区种植布局 $V_2$	灌排工程布局 $V_3$	灌排工程措施 $V_4$	灌排工程制度 $V_5$
1	灌溉90%,除涝10年一遇;除渍盐碱标准1	布局1	平原区、圩区库水自流,高地回归水提水,灌排工程布局1	无衬砌,量水布局方案1	干渠续灌分级控制方案1,支渠续灌,斗、农轮灌,排水制度1
2	灌溉90%,除涝5年一遇;除渍盐碱标准2	布局2	平原区库水自流,圩区、高地回归水提水,灌排工程布局1	壤土夯实,量水布局1	干渠续灌分级控制方案2,支渠续灌,斗、农轮灌,排水制度1
3			平原区、圩区库水自流,高地回归水提水,灌排工程布局2		干渠分两段轮灌,支渠续灌,斗、农轮灌;排水方案1
4			平原区库水自流,圩区、高地回归水提水,灌排工程布局2		

### (3) 选择构造正表

由于主因素之间均相对独立,因此根据层次分析粗选成果,可选择 $L_{12}(4 \times 3 \times 2^4)$ 型正交表。

### (4) 正交分析指标值

建立灌区规划设计计算机模拟模型,见图6-3,对正交表选择的12个方案进行模拟,正交分析指标值采取还本年限。

### (5) 正交分析选优

采用正交分析的直观分析法得到理论最优及次优方案,见表6-3。

表6-3 正交分析优化成果表

水平因素 优化序号 $V_j$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	还本年限 (年)
1	1	1	1	1	1	3.6
2	1	2	1	1	3	3.7
3	1	1	2	1	1	4.2

由此仅模拟了12个方案,即获得20736个方案中理论最优方案,可见其优越性。

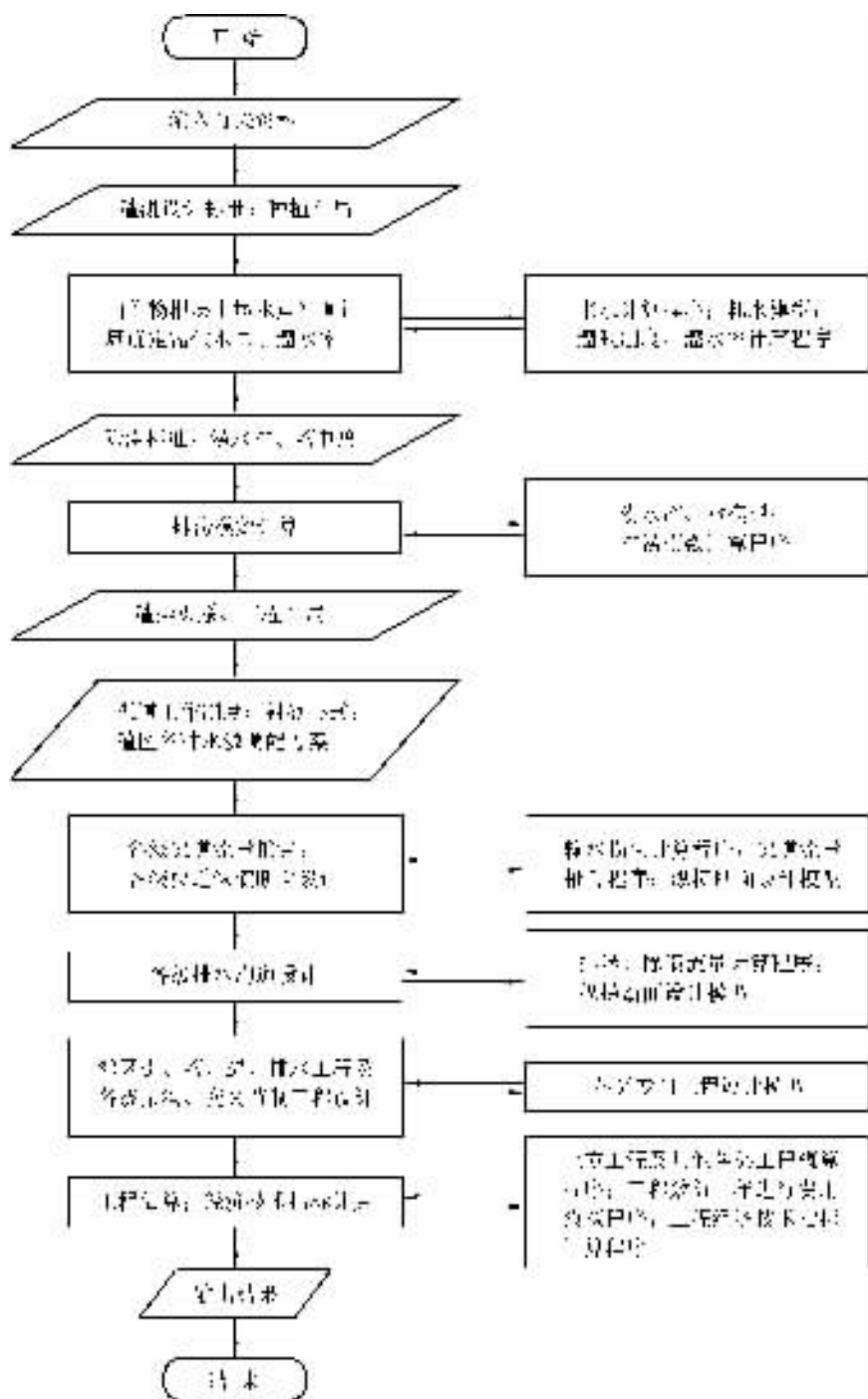


图 6-3 灌区规划设计计算机模拟模型

## 2. 大系统多目标综合评分选优法

### (1) 系统分层归类、层次分析粗选

该灌区改建优化规划设计的系统分层归类、层次分析方案粗选步骤与前正交试验方法



相同。

## (2) 语言化模糊综合评判数学模型方案再选

对上述层次分析粗选后的 96 个方案建立语言化模糊综合评判数学模型<sup>[222-225]</sup>。

### ① 灌区规划因素集( $V$ )

灌区规划因素集即可选择图 6-1 中的 5 个因素。

### ② 灌区规划评判集( $U$ )

灌区优化规划系统评判集选择四个等级,其对应评语如下:

$$\begin{aligned}
 U &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\
 &= \{\text{很合理, 合理, 较合理, 不合理}\}
 \end{aligned}$$

### ③ 评语的量化( $B$ )

对模糊性评语的量化处理,可采用百分制,如

$$\begin{aligned}
 B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \\
 &= \{95, 80, 65, 50\}
 \end{aligned}$$

### ④ 加权评审

通过组织层次分析(即确定各因素对目标的相对平均组合权重)或专家会议协商,可得主、子因素集权向量  $W$  及  $W_i$ 。

### ⑤ 模糊关系矩阵

第  $i$  个主因素  $V_i$  映射到  $V$  上的模糊关系矩阵为

$$R_i = \begin{pmatrix}
 {}_i r_{11} & {}_i r_{12} & {}_i r_{13} & {}_i r_{14} \\
 {}_i r_{21} & {}_i r_{22} & {}_i r_{23} & {}_i r_{24} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 {}_i r_{k1} & {}_i r_{k2} & {}_i r_{k3} & {}_i r_{k4}
 \end{pmatrix} = ({}_i r_{kj}) \quad (6-1)$$

其中  ${}_i r_{kj}$  表示第  $i$  个主因素内第  $k$  个子因素  $V_{ki}$  隶属于评语  $u_j$  的可能性大小(即隶属度),这里,  $i = 1, 2, \dots, 5; k = 2, 2, 4, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$ 。

为了进行灌区规划系统评价、确定模糊关系矩阵  $R_i$  的方便,设计了灌区规划模糊评判表,见表 6-4。评判者在填写表 6-4 的每一个子因素的 4 个评价等级时,只能在一个等级栏中划“ $\checkmark$ ”号  ${}_i r_{kj}$  可按以下公式计算:

$${}_i r_{kj}^{[1]} = \frac{\text{某等级栏中“}\checkmark\text{”个数}}{\text{评价人数}} \quad (6-2)$$

### ⑥ 根据模糊关系矩阵和主、子因素集权向量,进行综合评价

首先,综合评价矩阵为

$$B_{\text{综}}^{[1]} = W \cdot R^{[1]} = W(W_1 R_1^{[1]}, W_2 R_2^{[1]}, \dots, W_5 R_5^{[1]}) \quad (6-3)$$

$B_{\text{综}}^{[1]}$  为系统模糊综合评价矩阵,  $I$  为方案序号。

其次,综合评价考分  $C^{[1]}$ :

$$C^{[1]} = B_{\text{综}}^{[1]} \cdot B' \quad (6-4)$$

对每一个灌区规划方案,均可按以上步骤计算出其综合评价考分,所有要求比较评判方案的综合评价考分从大至小排列,即为语言化模型评判方案的优劣次序排列。

表 6-4 灌区规划系统模糊评价表

主因素	子因素	评判集	方 案				
			1	2	3	...	$n$
灌溉设计标准 $V_1$	灌溉标准 $V_{11}$	合 理 $u_1$		✓			✓
		较合理 $u_2$	✓			...	
		欠合理 $u_3$			✓		
不合理 $u_4$							
除涝标准 $V_{12}$	除涝标准 $V_{12}$	合 理 $u_1$		✓			✓
		较合理 $u_2$	✓		✓	...	
		欠合理 $u_3$					
不合理 $u_4$							
除渍盐碱标准 $V_{13}$	除渍盐碱标准 $V_{13}$	合 理 $u$		✓			
		较合理 $u_2$	✓			...	
		欠合理 $u_3$			✓		
不合理 $u_4$						✓	
种植布局 $V_2$		合 理 $u_1$		✓			
		较合理 $u_2$	✓			...	
		欠合理 $u_3$			✓		
		不合理 $u_4$					✓
∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴

### ⑦ 方案再选

邀请 6 名熟悉灌区情况的科技人员、专家,首先协商确定了主、子因素集权重,然后对第一阶段提出的 96 个方案分别评判,从而统计获得模糊关系矩阵  $R^I (I = 1, 2, \dots, 96)$ ,并计算得到各方案的综合评分  $C^I$ ,综合考分从大至小排列的前 6 个方案见表 6-5。

### (3) 模拟定量

为了节省优化工作量,对采用语言化模糊综合评判的优化结果的前 6 个方案进行模拟,其结果见表 6-5。

### (4) 语言化与量化相结合的模糊综合评判模型方案终选与敏感性分析

这一阶段根据模拟定量的定量指标及适当考虑少数几个对方案选优影响较为重要的定性指标(如水利矛盾),建立多层次语言化量化相结合的模糊评判数学模型,对语言化模型选优结果的前 6 个方案最终排序,并进行敏感性分析。

#### ① 因素

模型因素集主要选择上一阶段模拟定量的系统经济、财务等共 4 类 2 层 10 个因素,其中一类为定性因素,见表 6-5。

#### ② 模型

根据灌区优化的具体情况,可选择构造二级模糊评判模型。若有  $n$  类影响因素,第  $i$  类主因素为  $k_i$ ,则  $t$  个方案的二级综合评判模型为

$$B^* = WR = W(W_1R_1, W_2R_2, \dots, W_nR_n) \quad (6-5)$$

式中,  $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$  为因素间的权重分配矩阵;  $R = (W_1R_1, W_2R_2, \dots, W_nR_n)$  为总评价矩阵;  $R_i$  为第  $i$  类因素的评价矩阵,  $R_i = ({}_{i}r_{kj})$ ;  $W_i$  为第  $i$  类因素分配的权重, 应满足  $\sum W_i = 1$ ;  $W_i = (W_{i1}, W_{i2}, \dots, W_{ik_j})$  为第  $i$  类因素内子因素权重分配矩阵;  $W_{ik}$  为第  $i$  类因素中第  $k$  个因素分配的权重。以上,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, k_i$  ( $k_i$  为第  $i$  个主因素中的子因素个数);  $j = 1, 2, \dots, t$ 。

### ③ 评判因素隶属度( ${}_{i}r_{kj}$ )的确定

#### (i) 定量因素的隶属度

若第  $n$  类评价因素共有  $k_i$  个子因素, 各个子因素的指标值均可直接定量, 其中  $t$  个方案的评价因素指标值(见表 6-5)可用如下矩阵表示:

$${}_{i}X_{kj} = \begin{pmatrix} {}_{i}X_{11} & {}_{i}X_{12} & \dots & {}_{i}X_{1t} \\ {}_{i}X_{21} & {}_{i}X_{22} & \dots & {}_{i}X_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}_{i}X_{k1} & {}_{i}X_{k2} & \dots & {}_{i}X_{kt} \end{pmatrix}$$

式中,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, k_i$ ;  $j = 1, 2, \dots, t$ 。

越大越优评价因素的隶属度为

$${}_{i}r_{kj} = \left( \frac{{}_{i}X_{kj} - \inf({}_{i}X_k)}{\sup({}_{i}X_k) - \inf({}_{i}X_k)} \right)^p \quad (6-6)$$

越小越优评价因素的隶属度为

$${}_{i}r_{kj} = \left( \frac{\sup({}_{i}X_k) - {}_{i}X_{kj}}{\sup({}_{i}X_k) - \inf({}_{i}X_k)} \right)^p \quad (6-7)$$

上述两式中,  $\sup({}_{i}X_k)$ ,  $\inf({}_{i}X_k)$  分别为  ${}_{i}X_{kj}$  的上、下界,  $p$  为指数。当  $p = 1$  时 (6-6) 式和 (6-7) 式为线性函数。由此得到第  $i$  类定量因素的评价矩阵  $R_i$ 。

#### (ii) 定性因素的隶属度

定性因素的隶属度的确定也可采用层次分析法, 首先确定  $t$  个方案对该定性因素的“优”的排序, 即权向量, 然后由 (6-6) 式得到对应定性指标的隶属度。

以上是二级模型, 同理可得三级乃至更多级的综合评判模型。

### ④ 方案终选

根据灌区的具体情况选择二级评判模型, 按表 6-5 中的指数值、权重, 当  $p = 1$  时, 由 (6-6) 式和 (6-7) 式计算统计可得其总评价矩阵  $R$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0.990 & 0.935 & 0.143 & 0 & 0.348 & 0.196 \\ 0.780 & 0.500 & 0.657 & 0.523 & 0.775 & 0.407 \\ 1.00 & 0.881 & 0.156 & 0 & 0.612 & 0.283 \\ 0.278 & 1.00 & 0.024 & 0.235 & 0.731 & 0.349 \end{pmatrix}$$

又因其主因素集权向量  $W = (0.6, 0.15, 0.1, 0.15)$ , 因此评判结果为

$$B^* = W \times R = (0.846, 0.874, 0.214, 0.110, 0.487, 0.265)$$

由此可见, 其优化方案的排序为 BAEFCD, B 方案最优(即正交试验的理论次优方案),

A 方案为次优方案(即正交试验的理论最优方案)。

表 6-5 多层次语言化与定量化相结合的模糊评判模型因素、权重及其指标值

类别	主因素		子因素		方案指标值					
	名称	权重	名称	权重	A	B	C	D	E	F
1	经济效益指标	0.60	工程投资(万元)	0.10	4 860	4 800	5 320	5 390	5 235	5 300
			还本年限(年)	0.30	3.6	3.7	4.6	4.8	4.2	4.5
			益本比	0.30	2.52	2.58	2.37	2.33	2.41	2.38
			内部报酬率(%)	0.30	11.78	11.77	11.47	11.45	11.5	11.48
2	耕地占用与能耗指标	0.15	灌区改建扩建耕地占用率(%)	0.5	0.95	0.47	0.98	1.51	0.96	1.56
			年灌溉用电(kW/亩)	0.5	21.3	32.0	23.3	21.3	21.3	23.3
3	财务效益指标	0.10	财务还本年限(年)	0.6	6.2	6.4	7.5	7.8	6.9	7.4
			贷款回收年限(年)	0.4	7.1	7.3	8.7	8.9	7.8	8.3
4	其他指标	0.15	运用中可能出现不利的水利矛盾	0.6	0.258	0.061	0.258	0.181	0.061	0.181
			灌区改建规划设计的满意度	0.4	0.196	0.226	0.134	0.128	0.160	0.156

- 注:1. ABCDEF 排序为语言化模型的综合考分排序;  
 2. 主、子因素权重均由专家协调确定;  
 3. 第 4 类因素的指标值为层次分析评判的组合权重。

### ⑤ 敏感性分析

为了了解主、子因素集权向量变化对评价结果的影响,故有必要进行敏感性分析,以供决策者在决策时参考。为了节省工作量,仅对主因素集权重进行了变化分析,其结果见表 6-6,可见 B 方案为最优方案,在主因素权值  $W$  变化时较为稳定,其次才是 A 方案。

表 6-6 敏感性分析表

主因素权向量 $W$	评判结果	优化次序
(0.6, 0.15, 0.1, 0.15)	(0.846, 0.847, 0.214, 0.110, 0.487, 0.265)	BAEFC D
(0.5, 0.2, 0.2, 0.1)	(0.870, 0.844, 0.240, 0.124, 0.351, 0.278)	ABEFC D
(0.5, 0.1, 0.2, 0.2)	(0.824, 0.894, 0.175, 0.097, 0.514, 0.269)	BAEFC D
(0.4, 0.2, 0.2, 0.2)	(0.799, 0.850, 0.228, 0.147, 0.551, 0.294)	BAEFC D
(0.7, 0.1, 0.1, 0.1)	(0.895, 0.893, 0.186, 0.014, 0.450, 0.245)	ABEFC D
(0.75, 0.05, 0.1, 0.1)	(0.900, 0.914, 0.159, 0.049, 0.431, 0.232)	BAEFC D
(0.8, 0.05, 0.05, 0.1)	(0.907, 0.917, 0.158, 0.049, 0.418, 0.228)	BAEFC D
(1, 0, 0, 0)	(0.990, 0.935, 0.143, 0, 0.348, 0.196)	ABEFC D

### 6.1.4 本节小结

本节把多因素试验选优理论和层次分析、模拟技术、模糊综合评判有机地结合起来,从而为大系统模拟优化提供了一条新的途径。由以上分析可知,该方法和目前计算机模拟选优的均匀网络法、单因子抽样法、边际分析法、最陡梯度法和随机抽样法相比具有显著优点,因而可以解决一些目前大系统理论很难解决、甚至无法解决的方案组合“爆炸”问题。根据该方法的原理和实践经验,在它优化时,应注意以下几点。

① 该方法充分利用了众多专家的知识和工作经验,优化过程为一群决策过程,因此必须遵循群决策的有关原则<sup>[226]</sup>。

② 系统分层归类也应为—群决策过程,当系统内部关系清晰时采用专家会议法<sup>[227]</sup>,系统内部关系不清时可采用模糊辨识法<sup>[228—229]</sup>。

③ 各试验因素的分类、选择时,应采用因素合并、水平离散等方法尽可能使各试验因素相互独立。实在无法消除,在应用正交试验方法时,应选择构造有交互作用的正交表,应用其他方法方案筛选时一定要非常慎重,判断筛选试验水平时应考虑交互作用。

④ 本节介绍了适用于各种情况的模拟系统单目标选优的正交试验方法、综合试验法和多目标选优的单目标法、综合评分法、综合平衡法,重点介绍了单目标选优的正交试验法和多目标选优的综合评分法,这些仅为大系统模拟试验选优理论的一部分,仅作抛砖引玉。其他多因素试验选优方法和其他决策判断知识模型如何合理、科学地在大系统优化领域中开发运用,尚待进一步研究。

⑤ 本节试验分析指标值的获得采用的是模拟技术方法,由以上分析可知,其他广义模型、混合模型、仿真技术等均可运用。

## § 6.2 大型复杂知识模型的试验选优方法及应用

### 6.2.1 概述

在最优化领域中往往会遇到这样一种比较复杂的定性系统,如工程规划设计系统,整个系统规划方案有若干子系统组成,各个子系统在规划设计时又有相应不等的定性子方案,这样组成的整个系统方案集可能比较庞大。当采用目前常用的数学规划、模拟技术或其他最优化方法很难解决或无法解决这类问题时,可采用模糊综合评判、正交设计、层次分析等有机地结合起来运用的方法,得到较为满意的优化结果。

### 6.2.2 试验选优方法

采用模糊综合评判与层次分析单独对方案进行比较评优,目前在最优化领域中已开始得到广泛应用<sup>[230—237]</sup>,但仅局限于在已知的有限个方案中选优,优化过程中不能生成和淘汰方案,而且事先要对各个方案进行明确的规定。

图 6-4 所示的工程规划设计系统由  $n$  个因素组成,各个因素可供选择的对应互斥水平有  $m_i$  个( $i = 1, 2, \dots, n$ ),整个系统的规划设计方案有  $\prod_{i=1}^n m_i$  个。若某一工程规划设计系统共有 6 个因素,各因素平均有 6 个水平,则此系统共有  $6^6 \approx 4.7 \times 10^4$  个规划设计方案,显然采用目前常用的最优化方法分析选优是比较困难的。

本节介绍的试验选优法对此类系统进行优化的基本思路是:在全部组合方案中采用正交表选择少量方案进行模糊评判,求得这些方案的模糊综合考分,并以此指标值进行正交分析,得出全部方案中的理论最优方案及若干依次排列的次优方案。正交表选择、构造时,可采用模糊聚类或专家会议方法确定试验因素,采用层次分析法确定试验因素的水平,使正交表选择、构造方便且正交试验方案少。方法步骤如下:

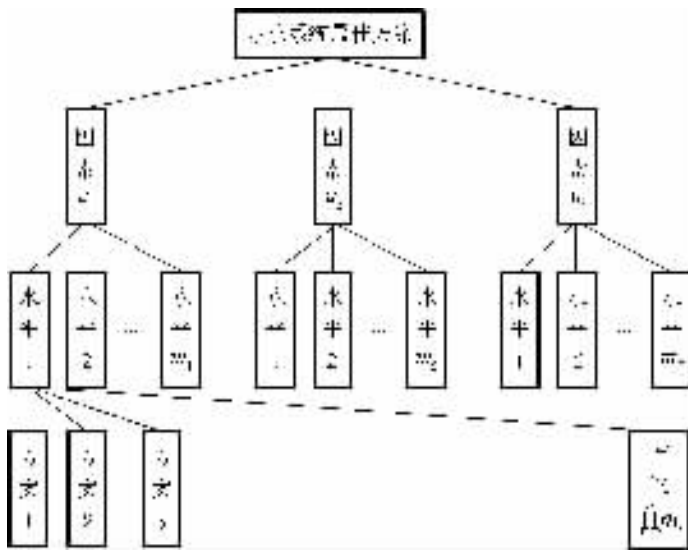


图 6-4 系统结构图

(1) 根据系统的具体情况和正交表的选择、构造方便,采用模糊聚类或专家会议确定系统因素集  $U$

因素集包括  $n$  个因素:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

(2) 确定系统评判集  $V$ , 并给予量化

系统评判集分为  $t$  个等级:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$$

对系统评判集的  $t$  个等级采用五分制或百分制进行量化处理:

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$$

(3) 确定权重  $W$

通过组织专家会议或层次分析法确定系统各因素对系统规划设计影响大小的权重  $W$ :

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$$

(4) 确定模糊综合评判方案集

针对规划设计系统的因素、水平个数,选择或构造正交表,为了构造正交表方便可作以下处理:

① 水平处理 若有的因素水平较多,可采用层次分析法对这些水平进行排序,然后选择其中若干水平参加正交试验,若有的因素水平太少,可设虚水平处理。

② 因素处理 若因素太多,正交表选择构造不便,则可将适合的因素加以合并以减少因素个数。

根据处理后的系统因素、水平个数,选择或构造适宜的等水平或不等水平正交表,由正交表可得模糊综合评判方案集。

### (5) 综合考评

组织专家对方案集中的各个方案依次评审,整理评判结果得到对应方案的模糊关系矩阵  $R^{(j)}$  ( $j$  为方案序号),并以此计算综合评价矩阵  $B_{综}^{(j)}$  ( $B_{综}^{(j)} = WR^{(j)}$ )和综合评价考分  $C^{(j)}$  ( $C^{(j)} = BB_{综}^{(j)}$ )。

### (6) 正交分析选优

把正交表选择的模糊评判方案集中的各方案的综合评价考分  $C^{(j)}$  作为正交试验指标值,并以此进行正交分析,获得系统规划设计所有方案中的最优方案和若干依次排列的次优方案。

如前所述,6 因素 6 水平的系统优化问题若采用该试验选优法选优,则首先用层次分析法筛选,使各个因素的水平数为 5,然后选择  $L_{25}(5^6)$  型正交表(假定各因素相互独立)。从理论上讲,只要对 25 个对应方案进行评审分析,就可得到全部约  $4.7 \times 10^4$  个方案中的理论最优方案及若干依次排列的理论次优方案。

采用该试验选优法优化需要说明以下几个问题。

① 本节介绍的试验选优法实质是正交试验法,正交分析的指标值获得采用模糊综合评判,在正交表选择、构造困难时,采用层次分析法对某些因素的水平进行筛选。因此,此方法的优良性取决于正交设计、模糊综合评判和层次分析方法。

② 正交设计的优良性讨论见前所述,在正交试验的因素选择时,应尽可能做到各因素的相互独立,消除其间的各种约束。比如,把各种约束尽量限制在各自的子系统内,对于那些无法限制在子系统内的某些耦合约束(如资源等约束),可在水平选择时考虑。若实在无法避免各因素的交互影响,则可选择或构造有交互作用的正交表。

③ 运用模糊综合评判和层次分析法对方案进行评比、筛选,其结果依赖人的主观判断,虽然两种方法都建立在各自较为严格的数学基础上,可以把人的主观因素降低到最低程度,但其结果只能说是粗略的优化方案排序。

采用层次分析对水平筛选时,应本着不漏掉可能产生最优方案的水平,使正交表选择、构造方便且选择评判方案少的原则进行。具体筛选时,根据层次分析结果即筛选因素各水平的平均组合权重大小悬殊情况,选择对应水平加入模糊综合评判方案集。

④ 对于本节提出的试验选优法,由以上分析可知,用此方法所得的结果仅是粗略的优化方案排序。但对图 6-4 所示的定性或定量系统来说,若采用其他优化方法很难解决甚至无法解决时,它仍不失为一种较为理想的优化方法。

## 6.2.3 实例分析

对 § 6.1 中灌区优化规划实例如下。

### 1. 因素集 $U$ 的确定

通过对本灌区自然、社会等条件进行综合考虑,商议确定其因素集  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_6\} = \{\text{水源, 灌排工程布置, 种植布局, 灌排设计标准, 渠道衬砌形成, 渠道工作制度}\}$ ,其中  $u_4 = \{u_{41}, u_{42}\} = \{\text{灌溉设计保证率, 除涝设计重现期}\}$ 。

### 2. 评判集 $V$ 和量化值 $B$ 的确定

评判集取 4 个等级:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\text{很合理, 合理, 较合理, 不合理}\}$ 。经协商确定对应的量化值  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{95, 85, 65, 50\}$ 。

### 3. 因素集权重 $W$ 的确定

组织由层次分析法确定的各因素对灌区优化规划影响大小的平均组合权重。 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_6\} = \{0.097, 0.139, 0.078, 0.431, 0.082, 0.173\}$ 。

### 4. 模糊综合评判方案集的确定

各因素可能选择的水平依次为 2, 3, 2, 6 ( $u_{41}$  有 3 个水平,  $u_{42}$  有 2 个水平, 共 6 个组合, 见图 6-5) 2, 18, 共有  $2 \times 3 \times 2 \times 6 \times 2 \times 18 = 2592$  个灌区规划设计组合方案。邀请 5 位专家和工程设计人员, 采用层次分析法对因素  $u_4$  和  $u_6$  的水平进行筛选, 因素  $u_4$  和  $u_6$  的层次分析结构图分别见图 6-5 和图 6-2。根据分析结果中其对应的平均组合权重大小, 分别选取因素  $u_4$  的 2 个水平、因素  $u_6$  的 4 个水平加入模糊综合评判方案集。

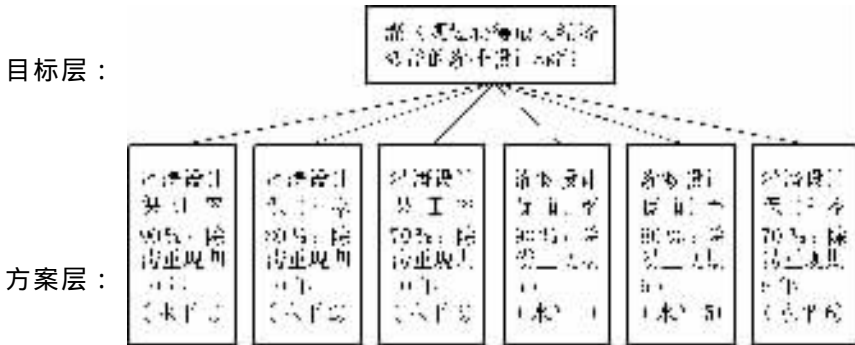


图 6-5 灌排区设计标准层次结构图

由表 6-7 可知, 筛选后的灌区规划设计方案共有  $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 192$  个, 根据因素水平个数, 可选择  $L_{24}(3 \times 4 \times 2^4)$  型正交表, 因此模糊综合评判方案集为对应  $L_{24}(3 \times 4 \times 2^4)$  型正交表中的 24 个方案。

表 6-7 因素水平表

因素 水平	水 源	灌排工程布置	种植布置	灌排标准	渠道衬砌	渠道工作制度
1	平原区、圩区库水自流； 高地回归水提水	布置 1	布局 1	灌溉标准 90%，除涝重 现期 10 年	无	干渠续灌分级控制 1， 支渠续灌，以下渠道 轮灌
2	平原区库水自流；圩区 高地回归水提水	布置 2	布局 2	灌溉标准 80%，除涝重 现期 10 年	壤土 夯实	干渠续灌分级控制 1， 支渠及以下渠道轮灌 方案 1
3		布置 3				干渠续灌分级控制 2， 支渠续灌，以下渠道 轮灌
4						干渠分二段轮灌，支渠 续灌，以下渠道轮灌

### 5. 模糊综合评判与正交分析

对正交表选择的 24 个方案组织专家逐一评判, 得到其对应的模糊关系矩阵  $R^I (I = 1, 2, \dots, 24)$ , 并求得各方案的综合考分  $C^I$ , 然后对此 24 个方案进行正交分析, 分别计算各



因素对应水平的指标(综合考分)平均值和极差,得到理论分析最优方案和若干依次排列的次优方案。正交分析所得的前6种方案见表6-8。

表6-8 优化结果

水平 试验 优化次序	项目 水源 ( $u_1$ )	工程布局 ( $u_2$ )	种植标准 ( $u_3$ )	灌排标准 ( $u_4$ )	衬砌方式 ( $u_5$ )	渠道工作 制度 ( $u_6$ )	综合考分	穷举法模 拟内部报 酬率(%)	穷举法 对应优 化次序
1	1	1	1	1	2	3	89.5	11.78	1
2	2	2	1	1	2	1	89.45	11.77	2
3	1	1	2	1	2	3	88.8	11.47	5
4	2	2	1	1	2	4	88.6	11.48	4
5	2	1	2	1	2	2	88.2	11.32	9
6	1	2	1	1	2	1	88.1	11.35	7

## 6. 与采用模拟技术穷举法比较

由于层次分析筛选后的灌区规划设计方案并不太多(见表6-7),为了验证试验选优法的优良性,采用灌区规划设计计算机模拟模型对此全部方案依次模拟定量,并以经济效益指标内部报酬率为方案比较的依据。由模拟结果可知,试验选优方法所得的前6个优化方案,分别为全部方案中排列第1,2,5,4,9,7的方案,它们均在前10位以内。

### 6.2.4 本节小结

由上分析可知,模糊综合评判、正交设计、层次分析相结合的试验选优方法,可以在选优过程中生成或淘汰方案,因此,可以解决某些目前采用其他优化方法无法解决的方案组合“爆炸”或很难解决的复杂定性系统优化问题。但必须说明的是,此方法所得的结果仅是粗略的优化方案排序,在其他优化方法很难求解或无法求解时,不妨建议使用本方法。

# 附 录

## 一、获得的基金资助

1. 本书获国家自然科学基金成果出版基金 No. 50024036 全额资助。
2. 近年来作者主持的与本书内容有关的基金项目：
  - ① 国家自然科学基金 No. 79400011 ,大系统试验选优理论和应用研究 ,1999 年 10 月国家自然科学基金委管理科学部结题等级“特优”；
  - ② 国家自然科学基金 No. 69974033 ,大系统试验选优理论完善和应用研究；
  - ③ 国家自然科学基金 No. 59979024 ,大中型渠道与梯级泵站系统优化理论和应用研究；
  - ④ 江苏省自然科学基金 No. BK95085205 ,大型渠道工程优化理论和应用研究；
  - ⑤ 江苏省青年基金 No. QB98049 ,跨流域调水技术与应用；
  - ⑥ 教育部骨干教师基金 ,大中型渠道与梯级泵站系统优化技术和应用研究。

## 二、发表的与本书内容有关的论文

1. 程吉林,郭元裕,金兆森等. 大系统数学规划试验选优方法及其应用. 中国科学 E 辑, 1998, 28(3)
2. Cheng Jilin, et al. Optimal Experimental Methods of the Large Scale Mathematical Programming and Applications. Science in China(Series E), 1998, 41(5)
3. 程吉林等. 复杂非线性试验选优方法. 系统工程学报, 1996(3)
4. 程吉林等. 高维动态规划试验选优方法及其在渠道工程中的应用. 水利学报, 1998(1)
5. 程吉林等. 喷灌系统优化设计混合数学模型及其求解. 水利学报, 1997(7)
6. 程吉林,刘胜松等. 地面水、地下水联合调度非线性模型及其求解. 水利学报, 1997(10)
7. Cheng Jilin, et al. An Optimal Experimental Method of Multidimensional Dynamic Programming. Journal of Systems Science & Systems Engineering, 1996, 5(1)
8. Cheng Jilin, et al. An Optimal Experimental Method of the Large Scale Linear System Programming. Journal of Systems Science & Systems Engineering, 1997, 6(3)
9. 沈洁,程吉林等. 大规模块角结构的线性规划试验选优方法. 管理工程学报, 1998(1)
10. 程吉林,鄢碧鹏等. 某些大线性问题的试验选优方法. 管理工程学报, 1998(2)
11. 程吉林等. 渠道纵横断面优化的动态规划法研究. 水科学进展, 1997(1)
12. Cheng Jilin, et al. Experimental Optimal Methods for A Dynamic and A Linear Model. In: 20th International Conference on Computers and Industrial Engineering,

13. 程吉林等. 高维动态规划试验选优方法. 系统工程理论与实践 ,1996( 2 )
14. 程吉林 ,金兆森. 灌区规划的大系统多因素模拟试验选优. 水利学报 ,1993( 11 )
15. 程吉林 ,孙学华. 模拟技术、正交试验、层次分析与灌区优化规划. 水利学报 ,1990( 9 )
16. 程吉林. 介绍一种复杂系统的最优方法. 系统工程理论与实践 ,1992( 4 )
17. 程吉林. 多维动态规划的广义拉氏方法. 江苏农学院学报 ,1996( 2 )
18. 杨鼎久 ,程吉林. 水闸规划设计的计算机模拟试验选优. 江苏农学院学报 ,1996( 3 )
19. 沈洁 ,程吉林. 大系统分层模糊选优法在泵站规划中的应用. 扬州师范学院学报 ,1995( 4 )
20. 鄢碧鹏 ,程吉林. 灌排泵站规划的计算机模拟试验选优. 江苏农学院学报 ,1998( 3 )
21. 程吉林等. 高维动态和大型线性问题的正交试验选优方法. 系统工程学报 ,1998( 3 )
22. 程吉林 ,郭元裕. 大系统试验选优理论的概念、提出 . 科技进步与对策( 1999 年特刊 ) ;系统工程与决策 ,1999( 4 )
23. 陈平 ,程吉林. 混凝土衬砌渠道边坡优化设计. 河海大学学报 ,2000( 3 )
24. 程吉林. 混凝土衬砌渠道优化设计. 灌溉排水 ,2000( 4 )
25. 沈洁 ,陈陵 ,程吉林. 一类线性系统求解的并行算法. 系统工程理论与实践 ,2001( 8 )
26. Shen Jie , Chen Ling , Cheng Jilin. A Parallel Algorithm for Solving Block-Diagonal Structured Large Linear System. Journal of Systems Science and Systems Engineering ,2001 ,10( 2 )

## 参 考 文 献

- [1] 钱学森. 大系统理论要创新. 系统工程理论与实践, 1986(1)
- [2] 钱学森. 开创复杂巨系统的科学与研究. 系统工程学报, 1995(1)
- [3] 许国志. 科学决策系统工程. 北京: 国防工业出版社, 1990
- [4] 陈颀. 决策分析. 北京: 科学出版社, 1987
- [5] 达庆利, 何建敏. 大系统理论和方法. 南京: 东南大学出版社, 1989
- [6] 涂序彦. 大系统控制论探讨. 系统工程理论与实践, 1986(1)
- [7] 刘豹. 再论系统工程的任务、内容和方法. 系统工程, 1984(3)
- [8] 朱道立. 大系统优化理论与应用. 上海: 上海交通大学出版社, 1987
- [9] 李人厚, 邵福庆. 大系统递阶与分散控制. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
- [10] Shin M G, Steur T. 大系统最优化的控制. 北京: 机械工业出版社, 1983
- [11] 胡振鹏, 冯尚友. 大系统多目标递阶分析的“分解-集合”方法. 系统工程学报, 1988(3): 43—51
- [12] Valdes J B, Filippis M D, Kenneth M S, Restrepo P J. Aggregation-Disaggregation Approach to Multireservoir Operation. Jour of Water Resource. Plng Mgrnt, ASCE. 1992, 118(4): 423—443
- [13] Yakowitz S J, Convergence Rate Analysis of the State Increment Dynamic Programming Methods. Automatic, 1983, 19(1): 53—60
- [14] 董增川. 大规模多目标系统决策理论、方法及应用 [ 博士论文 ] 南京: 河海大学, 1989
- [15] 李怀祖. 推理判断和直觉-判断系统工程分析讲座(4). 系统工程理论与实践, 1986, 4(4)
- [16] 郭元裕, 关洪林. 用于松涛灌区最优续建规划时广义模型. 系统工程学报, 1991(1)
- [17] 席裕庚. 动态大系统方法导论. 北京: 国防工业出版社, 1988
- [18] 谢新民. 水资源大系统分布参数谱系管理模型及其算法. 河海大学学报, 1992(4): 123—128
- [19] 王亚芬. 群决策支持机制和模式的研究. 决策与决策支持系统, 1993(1): 13—19
- [20] 陈廷, 王柏林. 一种对话式多目标决策方法. 华中工学院学报, 1983(5)
- [21] 叶秉如. 大型二次规划的分解算法. 中国系统工程学组成立交流论文, 1987
- [22] 朱道工. 大规模不可微优化问题的分解方法. 系统科学与数学, 1987(1)
- [23] 刘豹, 顾培亮. 大系统逐级优化的数学规划序列模型. 系统工程理论与实践, 1983(1)
- [24] 刘豹. 多目标线性规划的一种矩阵对策方法. 系统工程学报, 1996, 11(4): 61—69
- [25] Benayoun R, et al. Linear Programming with Multiple Objective Functions: Step Method. Mathematical Programming, 1971, 1(3): 366—375
- [26] Poh K L, Quaddus M A. A Hybrid Approach to Multi Objective Linear Optimization. Journal of the Operational Research Society, 1990, 41(11): 1037—1040
- [27] 皮明智, 雷运学, 魏修亭. 多目标线性规划的几何模型求解方法. 系统工程学报, 1991, 6(1): 1—62
- [28] 饶正富, 冯尚友. 模糊多准则评价决策分析方法. 系统工程学报, 1991, 6(1): 62—70
- [29] 刘豹. 群决策与层次分析. 系统工程学报, 1991, 6(1): 71—75
- [30] 王莲芬. 层次分析中新元素的保序性条件. 系统工程学报, 1991, 6(1): 76—83
- [31] 杨剑波, 陈成. 多目标优化的交互式逐步折衷法. 系统工程学报, 1987(2)
- [32] 程明熙. 复杂系统的群预测方法. 见: 系统工程论文集. 江苏省系统工程学会, 1989
- [33] 胡铁松, 段国圣, 万永华, 冯尚友. 多目标动态规划的摄动权重法. 见: 1993年中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳: 东北大学出版社, 1993
- [34] Goeffirin A M, et al. An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with An Application to

- [ 35 ] 仲伟俊,徐南英,沈厚才.一类分散多目标决策问题的模型及交互决策方法.系统工程学报,1995,10(4):46—54
- [ 36 ] 祝世京,王书宁.一类确定大众偏好结构的方法研究.系统工程学报,1995,10(4):25—31
- [ 37 ] Steuer R E, Choo E U. An Interactive Weighted Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programming. Mathematical Programming, 1983, 26: 326—344
- [ 38 ] Graves S B, Ringuest J L, Bard J F. Recent Developments in Screening Methods for Nondominated Solutions in Multiobjective Option. Computers Ops Res, 1992, 19(7): 683—694
- [ 39 ] Rinnooy Kan A H G, Timmer G T. Stochastic Global Optimization Methods. Mathematical Programming, 1987, 39(1): 27—78
- [ 40 ] 叶秉如,方道南.大型多目标线性规划解法研究.系统工程学报,1995,10(4)
- [ 41 ] 叶秉如.大系统分解的最小减优率法.水力发电学报,1987(3):23—32
- [ 42 ] 叶秉如,余里红.多目标二次规划非劣解集的理论生成及其应用.水电能源科学,1991(2):102—110
- [ 43 ] Ye Bingru. A New Method for the Linear Program the Decomposition Screening Method IWRA Technical Session. In: The Use of Computers in Water Management, Moscow, 1989. 123—134
- [ 44 ] 马佐群,陈剑.复杂系统图行建模方法的研究.系统工程学报,1995,10(2):15—24
- [ 45 ] 顾培亮,王孟力.运用“思想库”和“案例库”对决策进行扩展支持的研究.系统工程学报,1995,10(2):24—32
- [ 46 ] 刘毓骅,徐业鹏.大系统管理中的二层次规划模型.系统工程理论与实践,1993(2)
- [ 47 ] Sy B K. Reasoning Composite Beliefs Aqualitative Approach. Annals of Matsematics and Artificial Intelligence, 1991(4):1—24
- [ 48 ] 余磊,程明熙.一种新的多目标群决策方法.系统工程学报,1994,9(2):28—35
- [ 49 ] 施保昌,陈廷.多目标决策的广义既得梯度型新方法.系统工程学报,1994,9(2):1—10
- [ 50 ] Cheng Mingxi, Yu Lei. Group Evaluation with Multiple Objectives and Its ICM Approach. AMSE Review, 1992, 20(1): 45—52
- [ 51 ] Satty R W. The Analytic Hierarchy Process-What It Is and How It Is Used. Math Modeling, 1987(9):3—5
- [ 52 ] Lei Hong, Chen Ting. Group Decision-Making with Multiple Objectives and Its Interactive Solutions Approach, Large Scale System: Theory And Application. Istanbul: Pespagon, 1996. 535—537
- [ 53 ] Hang Chenglai, Lin Mingjing. Group Decision-Making Under Multiple Criteria: Method and Applications. Berlin: Spring-Verlag, 1987
- [ 54 ] 黄苏南,郡惠鹤.大系统递阶控制求解.系统工程学报,1994,9(1):22—30
- [ 55 ] 华中生,梁梁.专家群体决策不一致性判定与调整方法.系统工程学报,1994,9(1):118—123
- [ 56 ] 黄苏南,唐功龙. Legendry 级数在大系统递阶控制中的应用.青岛化工学院学报,1991,12(2):66—73
- [ 57 ] 黄苏南,俞铸.泰勒级数在大系统递阶控制中的应用.自动化与仪器仪表,1992(2):15—18
- [ 58 ] Watson R T, Desanctics G, Poole M S. Using a GDSS to Facilitate Group Consensus: Some Intended and Unintended Consequences. MIS Quarterly, 1988, 12(3)
- [ 59 ] 郭元裕等.湖北四湖地区排水的大系统优化规划.水利学报,1984(11)
- [ 60 ] 郭元裕.大系统多目标优化理论在洞庭湖排涝规划中的应用.水利学报,1986(2)
- [ 61 ] 陈雪青等.水火联合电力系统的优化调度.清华大学学报,1985(2)
- [ 62 ] 黄守信等.多库联合优化调度时多维随机动态规划法.水电能源科学,1988,9(2)
- [ 63 ] 张勇传等.柘溪水电站水库优化调度.见:张勇传主编.优化理论在水库调度中的应用.长沙:湖南科学技术出版社,1984

- [ 64 ] Murray D M , et al. Constrained Differential Dynamic Programming and It's Application to Multireservoir Control. *Water Resources Research* , 1979 , 15( 5 )
- [ 65 ] Howson H R , et al. A New Algorithm for the Solution of Multistage Dynamic Programming Problems. *Mathematical Programming* , 1975 , 8( 1 )
- [ 66 ] Ji Changming , Duan Guosheng , Feng Shangyou. The Hierarchical Optimization Criteria and Pareto Optimal Solution of Multiobjective Dynamic Programming. In : AMSE , 1994
- [ 67 ] 饶正富. 水资源系统规划管理多准则评价方法 [ 博士论文 ] 武汉 : 武汉水利电力大学 , 1988
- [ 68 ] 饶正富. 水资源系统规划的多目标评价方法. *水利电力科技* , 1988( 2 )
- [ 69 ] Goicochea A , Hansen D R , Duckstein L. Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Application. New York : John Wiley & Sons , 1982
- [ 70 ] Galanc T , Mihus J. The Choice of an Optimal Group of Experts. *Technology Forecasting and Social Change* , 1986. 30
- [ 71 ] 陈禹六. 大系统理论及应用. 北京 : 清华大学出版社 , 1988
- [ 72 ] Schneiderman B. Design the User Interface : Strategies for Effective Human-Compere Interaction. MA : Addition-Wesley Reading , 1987
- [ 73 ] 仲伟俊 , 徐南荣. 管网系统改造优化设计问题的模型及分层解算法. *系统工程学报* , 1994 , 9( 2 ) : 11—20
- [ 74 ] Kessler A , Shamir U. Decomposition Technique for Optimal Design of Water Supply Networks. *Engineering Optimization* , 1991 , 17( 1 ) : 1—19
- [ 75 ] Hooke R , Jeeues T A. Direct Search Solution of Numerical and Statics Problems , *J ASS Compute Mach.* 1981 , 8( 3 ) : 212—229
- [ 76 ] 王思明 , 马自立. 多队列循环移动服务系统的数学模型与分析. *系统工程学报* , 1990 , 5( 2 ) : 23—32
- [ 77 ] Ma Zili. The Waiting Time for the Cyclic Service System with the Priority. *Appl Math Modeling* , 1992 , 16( 7 ) : 320—324
- [ 78 ] 赵永胜等. 大庆油田开发规划经济数学模型的研究. *石油学报* , 1985 , 4( 3 ) : 45—56
- [ 79 ] Woo-Yong Choi , Soo-Y Chang , Chi-Hyuck Jun. Determination of Feasible Region Existence in Convex Nonlinear Programming. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'96 ) , Kyongiu , Korea , October , 1996. 469—472
- [ 80 ] Atkinson D S , Vaidya P M. A Cutting Plane Algorithm for Convex Programming That Uses Analytic Centers'. *Mathematical Programming* , 1995 , 69 : 1—43
- [ 81 ] 丛沛桐 , 陈志云 , 赵晓波. 新疆柴窝堡盆地保湖供水方案优化设计. *长春科学大学学报* , 1997 , 27( 1 ) : 58—61
- [ 82 ] 孙艳丰 , 郝江凌. 大型复杂结构优化问题的遗传算法. *北方交通大学学报* , 1997 , 12( 6 ) : 667—669
- [ 83 ] 倪勤 , 袁亚湘. SLMQN : 一个解大规模边界约束非线性规划子空间有限储存拟牛顿方法的 FORTRAN 优化软件. *数值计算与计算机应用* , 1997( 3 ) : 173—176
- [ 84 ] Ichida K , Kyoto B. Nonlinear Goal Programming Using Interval Analysis. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'96 ) , Kyongiu , Korea , October , 1996. 477—480
- [ 85 ] Saber H M , Ravindran A. Nonlinear Goal Programming Theory and Practice : A Survey. *Computers Ops Res* , 1993 , 20 : 275—291
- [ 86 ] Zheng D W , Gen M , Ida K. Evolution Programming for Nonlinear Goal Programming , Proc. In : 18th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'98 ) , Shanghai , 1995. 1426—1430
- [ 87 ] Dae-Shik Kim. Neural-based Equilibration Algorithm for a Class of Traffic Network Equilibrium Prob-

- lems. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'96 ), Kyongiu , Korea , October , 1996. 481—484
- [ 88 ] Looi C K. On Neural Networks Applied to Combinatorial Optimization Problem. *Computers Ops Res* , 1992 , 19( 2 ) : 191—208
- [ 89 ] Nagurneg A. Competitive Equilibrium Problems , Variation Inequalities and Regional Science. *J of Reg Sci* , 1987 , 27( 4 ) : 503—517
- [ 90 ] Nagurneg A , Kim D. Parallel and Serial Variational Inequality Decomposition Algorithms for Multi-commodity Market Equilibrium Problems'. *Int'l J of Supercom Appl* , 1990 , 3 : 34—58
- [ 91 ] Nagurneg A , Kim D. Parallel Computation of Large-Scale Dynamic Market Equilibrium Via Time Period Decomposition. *Math Compute Modeling* , 1991 , 15( 6 ) : 55—67
- [ 92 ] Nygard K , et al. Neural Networks for Selecting Vehicle Routing Hearistics. *ORSA J Comput* , 1990
- [ 93 ] Wei Xuan , Huan Li. On an Allocation Optimization Problem for Reduction the Watt-Loss in Electric Networks. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering( ICC & IE'96 ), Kyongiu , Korea , October , 1996. 485—488
- [ 94 ] Gill P E , Murray W. Numerical Methods for Quadratic Programming. *Mathematical Programming* , 1978 , 14( 2 ) : 152—156
- [ 95 ] Chung S W , Yang W S. Optimal Design of Step-and Constant-Stress ALTs for Acceleration Factor and Lognormal Lifetime Distributions. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'96 ), Kyongiu , Korea , October , 1996. 489—496
- [ 96 ] Okumoto K , Goel A U. Optimum Release Time for Software Systems Based on Reliability and Cost Criteria. *J Systems and Software* , 1980 , 1( 2 ) : 315—318
- [ 97 ] Musa J D , Okumoto K. Application of Basic and Logarithmic Poisson Execution Time Models in Software Reliability Measurement. In : J K Skwirzynski ed. *Software System Design Methods*. Berlin : Springer-Verlag , 1986. 275—298
- [ 98 ] Yonezawa M , Okuda S. A Directional Importance Simulation for Structural Reliability Assessment. In : *Asian-Pacific Symposium in Structural Reliability and Its Applications ( APSSRA '95 )* , Tokyo , 1995
- [ 99 ] Katsuki S , Frangopol D M. Hyperspace Division Method for Structural Reliability. *Journal of Engineering Mechanics* , ASCE , 1994 , 120( 11 ) : 2405—2426
- [ 100 ] Tae Ho Kim , Seung Houn La , et al. The Establishment of JIT Production Systems in Korea Manufacturing Circumstance. In : 20th International Conference on Computers & Industrial Engineering ( ICC & IE'96 ), Kyongiu , Korea , October , 1996. 531—538
- [ 101 ] Bellman R E. *Dynamic Programming*. Princeton : Princeton University Press , 1957
- [ 102 ] Bellman R E , Dreyfus S E. *Applied Dynamic Programming*. Princeton : Princeton University Press , 1962
- [ 103 ] Bellman R E. *Adaptive Control Process : A Guided Tour*. Princeton : Princeton University Press , 1961
- [ 104 ] Bellman R E. *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*. New York : Academic Press , 1967
- [ 105 ] Bellman R , Kalaba R , Kottin B. Polynomial Approximation—a New Computational Technique in Dynamic Programming : Allocation Process. *Math Table and Other Aids to Computation* , 1962 , 16( 2 ) : 155—161
- [ 106 ] Cooper L , Cooper M. *动态规划导论*. 张有为译. 北京 : 国防工业出版社 , 1985

- [ 107 ] 刘肇祎 郭元裕. 灌排工程系统分析. 武汉 : 武汉水利电力大学出版社 , 1984
- [ 108 ] Yeh W , et al. Optimization of Water Resource Development : Optimization of Capacity Specification for Components of Regional , Complex , Integrated , Multi-Purpose Water Resource Systems. UCLA Eng Rep UCLA-ENG-7 245 , 1972
- [ 109 ] Gilest J E , et al. Weekly Multipurpose Planning Model for TVA Reservoir System. Jour of Water Resource , Plan Manage Div ASCE , 107( WRI ) , 1981
- [ 110 ] Nopmongcol P , et al. Multi-Level Incremental Dynamic Programming. Water Resources Research , 1976 , 12( 6 )
- [ 111 ] 李爱玲. 水电站水库群系统优化调度的大系统分解协调方法研究. 水电能源科学 , 1997 , 15( 4 ) : 58—61
- [ 112 ] Turgeon A. A Decomposition Method for the Long Term Scheduling of Reservoir in Series. Water Resources Research , 1981 , 17( 6 )
- [ 113 ] 傅湘 纪昌明. 多维动态规划模型及应用. 水电能源科学 , 1997 , 15( 4 ) : 1—4
- [ 114 ] Becker L , et al. Optimization of Real Time Options of Multireservoir System. Water Resources Research 1974 , 10( 6 )
- [ 115 ] Larson R E. State Incremental Dynamic Programming. New York : Elsevier , 1968
- [ 116 ] Hall W A , et al. Optimum Firm Power Output from A Two Reservoir System by Incremental Dynamic Programming. Water Resources Cent , Contrib 130 , 1969
- [ 117 ] Trott W J , et al. Optimization of Multiple Reservoir Systems. J Hydraulics Div , ASCE , 99( HY10 ) , 1973
- [ 118 ] Heidari M , et al. Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources System Optimization. Water Resources Research , 1971 , 7( 2 )
- [ 119 ] Nopmongcol P , et al. Multi-Level Incremental Dynamic Programming. Water Resources Research , 1976 , 12( 6 )
- [ 120 ] Hall W A , et al. An Alternate Procedure for the Optimization of Operation for Planning with Multiple-River , Multiple-Purpose Systems. Water Resources Research , 1969 , 5( 6 )
- [ 121 ] Turgeon A. Incremental Dynamic Programming May Yield Nonoptimal Solutions. Water Resources Research , 1982 , 18( 6 )
- [ 122 ] Ozden M , A Binary State DP Algorithm for Operation Problem of Multireservoir System. Water Resources Research , 1984 , 20( 1 ) : 56—63
- [ 123 ] Jacobson D , et al. Differential Dynamic Programming. New York : Elsevier , 1970
- [ 124 ] Yakowitz S. Dynamic Programming Applications in Water Resources. Water Resources Research , 1982 , 18( 4 )
- [ 125 ] Gjelsvik A. Stochastic Seasonal Planning in Multireservoir Hydroelectric Power Systems by Differential Dynamic Programming. Model Identify Control Environ Syst , 1982 , 3( 3 )
- [ 126 ] Turgeon A. Optimal Short-Term Hydro Scheduling from the Principle of Progressive Optimality. Water Resources Research , 1981 , 17( 3 )
- [ 127 ] 张勇传等. 水库群优化调度理论的研究——SEPOA 方法. 水电能源科学 , 1987 , 5( 3 )
- [ 128 ] Gass S I. Linear Programming Methods and Applications. fifth edition. New York : Mc Graw-Hill , 1984
- [ 129 ] Klee V , Minty G J. How Good is the Simplex Algorithm ? In : Shisha O ed. Inequalities III. New York : Academic Press , 1972. 159—175
- [ 130 ] Khachiyan L G. A Polynomial Algorithm in Linear Programming. Soviet Mathematics Doklady ,



- [ 131 ] Karmarkar N. A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinative* , 1984 , 4 ( 3 ) : 373—395
- [ 132 ] Hooker J. Karmarkar's Linear Programming Algorithm. *Interfaces* , 1986 , 16 ( 1 ) : 75—90
- [ 133 ] 同[ 131 ]
- [ 134 ] 同[ 130 ]
- [ 135 ] Birge J. A Dantzig-Wolfe Decomposition Variant Equivalent to Basis Factorization. *Mathematical Programming Study* , 1985 , 24 ( 1 ) : 43—64
- [ 136 ] Tomlin J A. An Experimental Approach to Karmarkar's Projective Method for Linear Programming. *Mathematical Programming Study* , 1987 , 31 ( 2 ) : 175—191
- [ 137 ] Todd M J , Burrell B P. An Extension for the Karmarkar's Algorithm for Linear Programming Using Dual Variable. *Algorithmica* , 1986 , 1 ( 3 ) : 409—424
- [ 138 ] Barnes E R. A Variation on Karmarkar's Algorithm for Solving Linear Programming Problems. *Math Prog* , 1986 , 36 ( 2 ) : 174—182
- [ 139 ] Gill P E , Murry W , Saunderson M A , Tomlin J A , Wright M H. On Projected Newton Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmarkar's Projective Method. *Math Prog* , 1986 , 36 ( 2 ) : 174—182
- [ 140 ] Iri M , Imai H. A Multiplicative Barrier Function Method for Linear Programming. *Algorithmica* , 1986 , 1 ( 1 ) : 455—482
- [ 141 ] Gellinck G D , Vial J P. A Polynomial Newton Method for Linear Programming. *Algorithmica* , 1986 , 1 ( 1 ) : 56—60
- [ 142 ] Gay D M. A Variant of Karmarkar's Linear Programming Algorithm for Problem in Standard Form. *Math Prog* , 1987 , 37 ( 1 ) : 81—90
- [ 143 ] Goldfarb D , Mehrotra S. A Relaxed Version of Karmarkar's Method. *Math Prog* , 1988 , 40 ( 2 ) : 183—195
- [ 144 ] Rengar J. A Polynomial-Time Algorithm Based on Newton's Method for Linear Programming. *Math Prog* , 1988 , 40 ( 1 ) : 59—93
- [ 145 ] Dantzig G B. *Linear Programming and Extension*. Arvada : Mcmillan Publications Inc , 1963
- [ 146 ] Lasdon L S. *Optimization Theory for Large Systems*. Arvada : Mcmillan Publications Inc , 1970
- [ 147 ] 唐焕文 秦学志 , 王雪花. 大系统优化有效算法. *系统工程学报* , 1997 , 12 ( 1 ) : 1—4
- [ 148 ] Wittrock R. Dual Nested Decomposition of Staircase Linear Programs. *Mathematical Programming Study* , 1986 , 24 ( 1 ) : 65—86
- [ 149 ] Palekar U , Karwan M , Zionts S. Duality-Based Bounds for the Fixed Charge Transportation Problem : [ Working Paper ] Urbana-Champaign , Illinois , USA : Dept of Mechanical and Industrial Engineering , University of Illinois , 1987
- [ 150 ] Palekar U , Karwan M , Zionts S. A Branch and Bound Method for the Fixed Charge Transportation Problem : [ Working Paper ] Urbana-Champaign , Illinois , USA : Dept of Mechanical and Industrial Engineering , University of Illinois , 1987
- [ 151 ] Erenguc S. An Algorithm for Solving a Structured Class of Linear Programming Problems. *Operations Research Letters* , 1986 , 4 ( 2 ) : 292—299
- [ 152 ] Bertsekas D. The Auction Algorithm : A Distributed Relaxation Method for the Assignment Problem : [ Report LIDS-P-1653 ] MIT : Laboratory for Information and Decision Sciences , 1987
- [ 153 ] Bertsekas D , Eckstein J. Distributed Asynchronous Relaxation Methods for Linear Network Flow

- Problems. In : Proceedings of IFAC'87, Munich, West Germany, July, 1987. Oxford, U. K : Pergamon Press, 1987
- [ 154 ] Bertsekas D, Baz D. Distributed Asynchronous Relaxation Methods for Convex Network Flow Problems. SIAM J Control and Optimization, 1987, 25(1): 74—85
- [ 155 ] Bertsekas D, Tseng P. The Relax Codes for Linear Minimum Cost Network Flow Problems. In : Simone B ed. FORTRAN Codes for Network Optimization, in Annuals of O R, 1987
- [ 156 ] 叶秉如. 大型线性规划问题的分解算法. 水力发电学报, 1988(3)
- [ 157 ] 叶秉如. 二维分解法块角线性与非线性规划问题. 河海大学情报室, 1980
- [ 158 ] 何炳生. 求解线性问题的鞍点法. 南京大学学报(数学半年刊), 1986(2)
- [ 159 ] 郑权. 关于线性问题的复杂性. 运筹学杂志, 1988, 7(2): 1—8
- [ 160 ] Mesarovic M D, Macko D, Takahara Y. Theory of Hierarchical Multilevel System. New York : Academic Press, 1970
- [ 161 ] Haimes Y Y. Hierarchical Analysis of Water Resources Systems : Modeling and Optimization of Large Scale Systems. New York : Mc Graw-Hill, 1977
- [ 162 ] 胡振鹏. 大系统多目标分解聚合算法及应用 [ 博士论文 ] 武汉 : 武汉水利电力大学, 1985
- [ 163 ] Cohon G. Optimization by Decomposition and Coordination : A Unified Approach. IEEE A-23, 1978 : 222—232
- [ 164 ] Cohon G. Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problems. J Optimize Theory and Appl, 1980, 32(2): 277—305
- [ 165 ] 郭元裕等. 略论水资源系统的混合模型. 水科学进展, 1993(2)
- [ 166 ] 谭忠富. 一类大规模规划的分解协调过程. 系统工程, 1966(3)
- [ 167 ] 王新华. 组合式复杂大系统优化的解耦方法. 系统工程, 1996(5)
- [ 168 ] 黄志中, 周之豪. 大系统分解——协调理论在库群实时防洪调度中的应用. 系统工程理论方法应用, 1995(3)
- [ 169 ] 关洪林. 灌溉系统优化决策模型研究 [ 博士论文 ] 武汉 : 武汉水利电力大学, 1991
- [ 170 ] Major D C, Lenton R L. Applied Water Resources System Planning. New York : Prentice-Hall Inc, 1978
- [ 171 ] Becker L, Yeh W. Optimization of Real Time Operation of Multiple Reservoir System. W R R, 1974, 10(6)
- [ 172 ] Karamouz M B, Houck M H. Annual Monthly Reservoir Operating Rules Generated by Deterministic. W R E, 1982, 18(5)
- [ 173 ] 董子敖, 阎建生等. 径流时空相关时梯级水库群优化调度的多目标多层次优化方法. 水力发电学报, 1986(2)
- [ 174 ] 沈佩君, 王博等. 混合模型在滨海水网地区水资源优化调度中的应用. 水利学报, 1989(6)
- [ 175 ] 许志方, 沈佩君. 水利工程经济. 北京 : 水利电力出版社, 1991
- [ 176 ] 白宪台. 平原湖区除涝系统优化的大系统模拟模型. 水利学报, 1987(5)
- [ 177 ] 费良军, 施丽贞. 蓄、引、提、灌溉及发电水资源系统联合优化调度. 水利学报, 1993(9)
- [ 178 ] Jacoby H H, Locks D P. Combined Use of Optimization and Simulation Model in River Basin Planning. Water Resources Research, 1972, 8(6)
- [ 179 ] 许树柏. 层次分析法原理. 天津 : 天津大学出版社, 1988
- [ 180 ] Saaty T L. An Eigenvalue Allocation Model for Prioritization and Planning. Energy Management and Policy Center, University of Pennsylvania, 1972
- [ 181 ] Saaty T L. Measuring the Fuzziness of Set. Tournament of Cybernetics, 1974, 4(1): 53—61

- [ 182 ] Saaty T L. Hierarchies and Priorities-Eigenvalue Analysis. Philadelphia : University of Pennsylvania , 1975
- [ 183 ] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process. New York : McGraw-Hill Company , 1980
- [ 184 ] Saaty T L. Priorities in Systems with Feedback. International Journal of Systems , Measurement and Decisions , 1980 , 1( 1 )
- [ 185 ] Saaty T L. Decision Making for Leaders. Belmont , California : Wadsworth Inc. 291
- [ 186 ] 魏世孝等. 工业技术和产品结构优化模式初探. 系统工程理论方法应用 , 1995( 1 )
- [ 187 ] 李湛 , 朱宽雄. 价值工程功能评价的一种层次分析模型. 系统工程理论方法应用 , 1995( 3 )
- [ 188 ] 朱文彬. 两层柔性决策模型在锦屏梯级水库移民安置与经济发展协调管理中的应用. 系统工程理论与实践 , 1996( 5 )
- [ 189 ] Brown D , Bernice B. Delphi Process : A Methodology for the Elicitation of Opinion of Experts , P-3925. Santa Monica , California : RAND Corporation , 1968
- [ 190 ] Adelson M , Alkin M , Carey C , Helmer O. The Educational Innovation Study. American Behavioral Scientist , 1967 , 10( 7 )
- [ 191 ] Wikstorm W S. Manpower Planning. Evolving Systems. New York : The Conference Board Inc , 1971
- [ 192 ] 范金. 扬州市产业结构调整与对策. 江苏省第二届系统工程年会论文集 , 1991
- [ 193 ] 赵丕友. Delphi 方法的改进和延拓. 系统工程 , 1990( 4 )
- [ 194 ] 王本德 , 周惠成. 梯级水库群防洪系统的多目标洪水调度决策的模型优选. 水利学报 , 1994( 2 )
- [ 195 ] 陶传考 , 陶传雅. 模糊综合评判原理方法对众多方案优选. 水利学报 , 1994( 6 )
- [ 196 ] 陈守煜. 多目标系统模糊关系优选决策理论与应用. 水利学报 , 1994( 8 )
- [ 197 ] 熊德瑾. 水环境污染系统规划的模糊非线性模型. 水利学报 , 1994( 12 )
- [ 198 ] 王本德 , 张力. 综合利用水库模糊选优调度. 水利学报 , 1993( 1 )
- [ 199 ] 陈守煜 , 邱林. 水资源系统多目标模糊优选随机动态规划及实例. 水利学报 , 1993( 8 )
- [ 200 ] 程吉林 , 孙学华. 模拟技术、正交设计、层次分析与灌区优化. 水利学报 , 1990( 9 )
- [ 201 ] 孙来. 动态规划法原理. 南京 : 江苏科技出版社 , 1992. 201—205
- [ 202 ] 高元彦. 正交回归试验设计方法. 北京 : 冶金工业出版社 , 1988
- [ 203 ] 正交试验法编写组. 正交试验设计法. 上海 : 上海科学技术出版社 , 1978
- [ 204 ] 中科院数学研究所统计组. 正交试验法. 北京 : 人民教育出版社 , 1975. 97—104
- [ 205 ] 马希文. 正交设计的数学原理. 北京 : 人民教育出版社 , 1981
- [ 206 ] 北京大学力学概率统计组. 关于正交设计的优良性 : 应用数学学报 , 1977( 1 ) : 31—48 ; 1977( 2 ) : 71—79
- [ 207 ] 魏永曜 , 王萍. 明渠断面设计的无因次形状参数法. 水利学报 , 1996( 12 ) : 76—81
- [ 208 ] 中华人民共和国国家质量技术监督局. 灌溉排水工程设计规范 GB50288-99 , 1999
- [ 209 ] 郭元裕. 农田水利学. 北京 : 水利电力出版社 , 1997
- [ 210 ] 程吉林. 几种渠段的非线性规划模型. 江苏农学院学报 , 1992( 1 )
- [ 211 ] 程吉林. 渠道优化的一维动态规划模型. 灌溉排水 , 1991( 1 ) : 58—63
- [ 212 ] 程吉林. 输配渠道优化的多维动态规划模型及其求解方法. 江苏农学院学报水利专辑 , 1992
- [ 213 ] 白丹 , 王云寿. 自压喷灌压力区最优划分与设计. 水利学报 , 1990( 6 )
- [ 214 ] 郭元裕 , 李寿声. 灌排工程最优规划和管理. 北京 : 水利电力出版社 , 1994
- [ 215 ] Rebert B , Robin Son , et al. Cost Optimization of Rural Water System. Journal of Hydraulic Division , 1976 , 102( 8 ) : 1119—1134
- [ 216 ] 袁宏源. 地面水与地下水联合利用数学模型. 武汉水利电力大学学报 , 1984( 4 ) : 53—62

- [ 217 ] Johnson P R , Laurenson E M , Howell D T. A Design Procedure for the Conjunctive Use of Surface and Groundwater Storage : [ Tech Paper No3 ] . Canberra , Australia : Australian Water Resource Council , 1973
- [ 218 ] Yu W Y , Haimes Y. Multilevel Optimization for Conjunctive Use of Ground and Surface Water. Water Resources Research , 1974 , 11( 4 )
- [ 219 ] Loucks D P , et al. Water Resource System Planning and Analysis. New Jersey : Prentice-Hall Inc , 1981
- [ 220 ] 莫惠栋. 农业试验统计. 上海 : 上海科学技术出版社 , 1984
- [ 221 ] 茆智. 试验分析方法. 武汉 : 武汉水利电力大学 , 1986
- [ 222 ] 程吉林. 灌区管理水平定量评判模糊综合评判数学模型. 农田水利与小水电 , 1992( 3 )
- [ 223 ] 程吉林. 喷灌工程规划设计中的模糊综合评判技术. 喷灌技术 , 1991( 2 )
- [ 224 ] 程吉林. 灌区模拟设计模糊选优. 江苏农学院学报( 水利专辑 ) , 1992
- [ 225 ] 陈守煜 , 赵瑛琪. 系统层次分析模糊选优模型. 水利学报 , 1998( 10 )
- [ 226 ] 刘豹. 群决策与层次分析. 系统工程学报 , 1991( 1 )
- [ 227 ] 杨挺秀. 农业系统工程总体设计. 济南 : 山东科学技术出版社 , 1978. 79—126
- [ 228 ] 赵光荣. 多因子模糊评判法. 系统工程 , 1983( 1 )
- [ 229 ] 楼世博. 模糊数学. 北京 : 科学出版社 , 1985
- [ 230 ] 刘豹. 层次分析法——规划决策工具. 系统工程理论与实践 , 1985( 1 )
- [ 231 ] 程吉林 , 金兆森等. 大系统试验选优方法及其在灌区优化中应用. 水利学报 , 1993( 11 )
- [ 232 ] Sage A P. Object Oriented Methodologies Indecision and Information Technologies. Information and Decision Technologies , 1993 , 19( 1 ) : 31—53
- [ 233 ] 刘肇 , 袁宏源. 蓄、引、提灌溉系统模拟. 水利学报 , 1988( 3 )
- [ 234 ] 翁文斌 , 邱培佳. 地面水、地下水联合调度动态模拟分析方法和应用. 水利学报 , 1988( 2 )
- [ 235 ] 陈晓平 , 郭元裕. 防涝系统优化调度中递阶多维分解-协调模型及求解. 水利学报 , 1988( 6 )
- [ 236 ] 程明熙. 决策理论和方法. 南京 : 东南大学出版社 , 1991
- [ 237 ] 王新华 , 宋连天. 模型论方法学. 北京 : 中国建筑工业出版社 , 1988

# 索引

## B

部分试验 partial experiment 26

## C

层次分析 analytic hierarhy process 16

## D

大系统 large scale system 1

大线性 large scale linear 9

单纯形法 simplex method 8

地面水 surface water 25

地下水 ground water 25

递推方程 recurrence equation 2

定性 qualitative 15

定性系统 qualitative system 17

动态规划 dynamic programming 2

多维动态规划 multidimensional dynamic programming 2

## F

非线性 nonlinear 8

非线性规划 nonlinear programming 8

分解聚合法 disaggregation-aggregation approach 73

分解协调 disaggregation-coordination 11

复杂非线性 complex nonlinear 17

## G

管网 pipeline 63

灌区 irrigation district 17

灌区规划 irrigation district planning 25

规划 planning 1

## H

混合 mixture 11

## K

可行 feasible 10

块角结构 block-diagonal structured 8

## L

拉格朗日乘子 Lagrange coefficient 3

## M

模糊综合评判 fussy synthetical judgment 80

模拟 simulating 15

模型 model 2  
目标函数 objective function 3  
**O**  
耦合约束 coupling restraint 9  
**P**  
喷灌 sprinkler 71  
**Q**  
渠道 canal 25  
渠段 canal reach 25  
**S**  
试验选优 experimental optimization 40  
输水渠道 conveyance canal 8  
水资源 water resource 1  
**W**  
维数 dimensional number 11  
**X**  
系统 system 1  
系统工程 system engineering 1  
线性规划 linear programming 11  
**Y**  
优化 optimal 1  
约束条件 restraint condition 4  
**Z**  
正交 orthogonal 25  
正交表 orthogonal table 28  
正交设计 orthogonal design 28  
正交试验 orthogonal experiment 25  
状态变量 state variable 41