简 明 微 分 几 何

马 力 编著

清 华 大 学 出 版 社
北 京

内 容 提 要

本书在假定读者不具备拓扑学知识的前提下,介绍了微分几何的主要内容.书中主要讲解空间中的曲线论和曲面论、二维黎曼流形、微分流形、微分形式、Lie 导数、张量理论、协变导数和曲率张量.力图将古典的微分几何和现代微分几何结合在一起讲给理工科的学生.书中给出了很多例子,试图利用这些例子使学生很好地了解几何概念的含义!书中也给出了一些新的内容,比如,椭球面上的测地线、KdV 方程的推导、图形极小曲面的极小性等.以此来强调经典内容和当代热点数学问题之间的关系.同时,书中安排一定数量的习题,供读者练习.

本书可供理工科一年级以上的大学生、研究生以及对数学有兴趣的学者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

简明微分几何/ 马力编著.—北京:清华大学出版社,2004

ISBN 7-302-07761-4

Ⅰ.简… Ⅱ.马… Ⅲ.微分几何 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 112291 号

出 版 者:清华大学出版社　　地　址:北京清华大学学研大厦

http:// www.tup.com.cn　　邮　编:100084

社总机:010-62770175　　客户服务:010-62776969

责任编辑:刘　颖

封面设计:常雪影

印 刷 者:

装 订 者:

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开　本:140×203　印张:5.375　字数:135 千字

版　次:2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷

书　号:ISBN 7-302-07761-4/ O · 335

印　数:1～

定　价:.00 元

前　言

本书是这十年来我为数学、自然科学和工程科学二、三年级大学生讲授微分几何课的结晶.我力图在一个学期内(时间大约 60 学时)把经典微分几何(即曲线和曲面论)与现代微分几何统一起来而做一个简明的介绍.书中很多内容可能是在以前的大学生用的微分几何书中没有出现过的.比如,椭球面上的测地线、KdV 方程的推导、图形极小曲面的极小性等.书中强调了经典内容和目前热点数学问题之间的关系,强调几何概念并给出了很多例子.本书假定读者没有学过拓扑学,而没有拓扑学基础,理解流形的概念是个难点,所以书中给出了流形概念的比较直观的公理化定义.可以说,公理化逻辑思维在本书中起了很重要的作用.书中强调了外微分形式的作用,采用力学、物理文献中的常用写法来讲解张量分析和 Lie 导数,其主要目的是提高数学系大学生、理工科大学生和研究生在微分几何理论上、数学修养上甚至数学上的成熟性.书中安排了很多习题,也希望学生多做习题,因为通过演习大量习题对理解和掌握微分几何的概念和定理非常有好处;如果真能做到这一点,学生必能提高其自修能力.本书可作为高年级大学生、研究生和研究人员学习微分几何的入门书和参考书.

学完本书后,如想进一步了解微分几何或黎曼几何的读者可读:

陈省身.陈省身论文选集.

伍鸿熙等．黎曼几何初步．

陈省身、陈维桓．微分几何讲义．北京大学出版社出版．

而关心其应用的同学可读:

A．Isidori． Nonlinear Control Systems (2nd Edition)． Springer-Verlag, 1989．

马 力

2002 年 4 月于清华园

目　录

第 1 部分　经典微分几何

第 2 部分 现代几何

第 1 部分　经典微分几何

在中学时代我们学过平面几何,它主要描述点、线和面之间的位置关系.后来用笛卡儿的观点,我们在平面上建立了直角坐标系,从而点、线和面就用一组参数或表达式表示出来.这样很多优美的图形也就可以用优美的公式来表示,从这些公式中可以反映出它们之间的数量关系.在高等数学中,我们学习了一个强有力的科学工具,即函数的微分、积分之间的牛顿-莱布尼兹公式,下面就用这一工具来研究空间中的曲线与曲面的表示及其之间的关系.

第 1 章　曲 线 论

设空间中有一质点在运动,其轨迹为一条曲线.此曲线可表示为 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$或 $\boldsymbol{p}(t) = (x^i(t))$, $1 \leq i \leq 3$, $a \leq t \leq b$.在点 $\boldsymbol{p}(t)$或时间 t时,质点的速度为 $\boldsymbol{p}(t) = (x^i(t))$,其速率为

$$|\boldsymbol{p}(t)| = \sum_{i=1}^{3} x^i(t)^2 .$$

而加速度为 $\ddot{\boldsymbol{p}}(t) = (\ddot{x}^i(t))$.有时简记 $w(t) = |\boldsymbol{p}(t)|$.我们要求所研究的曲线满足一个条件: $w(t) \neq 0$, " $t \in (a, b)$.我们称 t为曲线 $\boldsymbol{p}(t)$的参数.一条曲线可用很多参数形式表示,但我们要求参数之间的变换非奇异,即若 $t = t(u)$, $u \in (c, d)$, $a = t(c)$, $b = t(d)$,则须有 $t'(u) \neq 0$, " u.最典型且常用的是弧长参数

$$s = \int_a^t w(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

我们也常称 s为自然参数.于是 $s(t) = w(t) = |\boldsymbol{p}(t)|$.我们常记 $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(t(s))$.

注意本书中约定所涉及的函数或映射皆光滑,即无穷次连续可微.

设 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$是一族这样的闭曲线,即 $\boldsymbol{F}: S^1 \to \mathrm{R}^3$.记 $s = s(t)$为 $\boldsymbol{F}(t)$的自然参数.一个有意思的问题是研究如下演化微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\boldsymbol{F} .$$

这个方程称为缩短曲线流问题.给定初值,利用偏微分方程的理论,我们知道这个问题在小时间里是有解的.但是这个解会在多长

时间内存在,或更一般地问这个方程的适定性如何,却是一个很难的数学问题.目前,还有很多人在进行这方面研究.

1.1 平面曲线

设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$ 为平面曲线,用自然参数 s 表示之为 $\boldsymbol{p}(s)=(x(s),y(s))$.记

$$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}'(s)=(x'(s),y'(s)),$$

于是由复合求导法和弧长参数的定义可知

$$\boldsymbol{p}'(s)=\boldsymbol{p}(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{p}(t)/|\boldsymbol{p}(t)|.$$

于是我们有 $|\boldsymbol{p}'(s)|=1$.规定 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{p}'$,则 $\boldsymbol{T}$ 为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的单位切矢.由

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(s)=(x'(s),y'(s))$$

可定义出一个单位法矢 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}(s)=(-y'(s),x'(s))$,使得 $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$ 构成右手系.以后称 $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$ 或 $\{\boldsymbol{p}(s);\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$ 为 F-标架(见图 1.1).

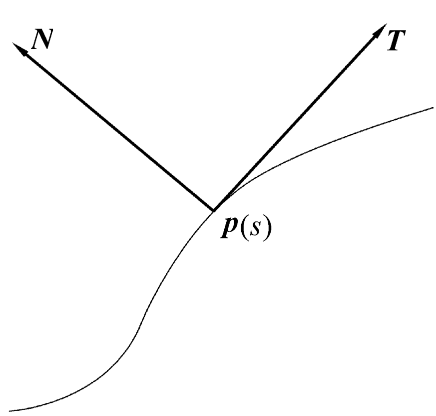

图 1.1

据 $|\boldsymbol{T}|^2=1$ 知 $\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{T}=0$,即 $\boldsymbol{T}'$ 与 $\boldsymbol{N}$ 平行.于是有某函数 $k=k(s)$ 满足 $\boldsymbol{T}'=k\boldsymbol{N}$.易知 $\boldsymbol{N}'=-k\boldsymbol{T}$.我们称 k 为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的曲率或相对曲率.以后称

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

为 Frenet 公式或 F-公式.

若 $k\equiv 0$, 则 $\boldsymbol{T}'\equiv \boldsymbol{0}\equiv \boldsymbol{N}'$, 从而存在常数 α和 β使得 $x'(s)=\alpha$, $y'(s)=\beta$, 从而有

$$x(s) = \alpha s + c_1,$$
$$y(s) = \beta s + c_2.$$

这里 c_1, c_2 为常数.

设 $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $r>0$ 为常数, 于是 $\boldsymbol{p}(t)$为平面上半径为 r 的圆. 直接计算知 $w(t)\equiv r$, 从而 $s=rt$. 这样圆可表示为

$$x(s) = r\cos(s/r),$$
$$y(s) = r\sin(s/r).$$

由 $x'(s) = -\sin(s/r)$, $y'(s) = \cos(s/r)$知

$$\boldsymbol{T}(s) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)),$$
$$\boldsymbol{N}(s) = (-\cos(s/r), \sin(s/r)).$$

由 $\boldsymbol{T}'(s) = \frac{1}{r}\boldsymbol{N}(s)$知 $k(s)\equiv\frac{1}{r}$, 因此所谓的曲率 k 描述了曲线的某种弯曲程度(见图 1.2).

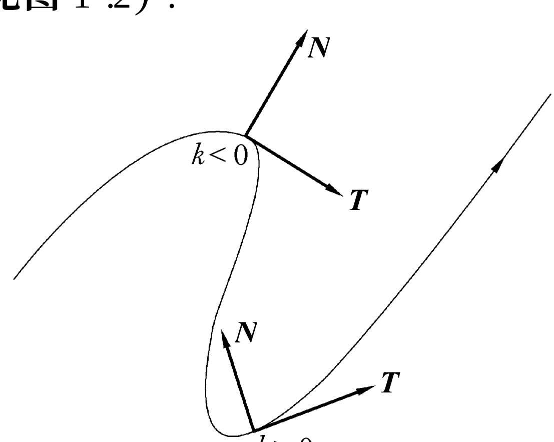

图 1.2

由于 $\boldsymbol{T}'(s) = \boldsymbol{p}''(s)$ 为加速度，所以曲率 k 可以视为作用力的大小. 我们常称 $\dfrac{1}{k}$ 为曲率半径，记为 ρ.

现在来说明曲率是欧氏运动（即旋转和平移）的不变量. 记 $O(2)$ 为 2×2 的正交矩阵集合. 设 $\boldsymbol{A}\in O(2)$，$\boldsymbol{a}\in \mathbb{R}^2$，$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}$，则 $\tilde{\boldsymbol{T}} = \tilde{\boldsymbol{p}}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\tilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$，从而得 $\tilde{k} = k$；反过来，若曲线 $\boldsymbol{p}(s)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ 曲率相同，即 $k(s) = \tilde{k}(s)$，在 s_0 处做适当的旋转与平移使得 $\tilde{\boldsymbol{T}}(s_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}(s_0)$. 令

$$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{p}}(s_0) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}(s_0),$$

即有

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(s_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}(s_0) + \boldsymbol{a}.$$

利用几何直观或利用切矢的坐标表示直接计算，得

$$\tilde{\boldsymbol{N}}(s_0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}(s_0).$$

因为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \tilde{\boldsymbol{T}}|^2 + |\boldsymbol{A}\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{N}}|^2\right)'(s) \\
&= \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \tilde{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}' - \tilde{\boldsymbol{T}}'\rangle + \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}' - \tilde{\boldsymbol{N}}'\rangle \\
&= k\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \tilde{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{N}}\rangle - k\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{N} - \tilde{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \tilde{\boldsymbol{T}}\rangle \\
&\equiv 0,
\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\tilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$，从而 $\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}$. 总结之有下面的定理.

定理 1 平面上两条曲线 $\boldsymbol{p}(s)$ 与 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ 曲率相同的充要条件是 $\boldsymbol{p}(s)$ 与 $\tilde{\boldsymbol{p}}(s)$ 只差一个欧氏运动.

例 计算椭圆 $x = a\cos t$，$y = b\sin t\ (a > b > 0)$ 的曲率.

由于 $w(t) = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$，所以不能把 s 显式表示为 t 的函数. 但由复合求导法可知

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{w(t)},$$

和

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{w(t)}(-a\sin t, b\cos t) .$$

因此

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(t) = \frac{1}{w(t)}(-b\cos t, -a\sin t) .$$

利用

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = k\boldsymbol{N}$$

得

$$k(t) = \frac{ab}{w(t)^3} .$$

让我们再做一个观察.设 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s))$为平面曲线,$s$ 为其自然参数.在小范围里,若记 $\phi = \phi(s)$为 $\boldsymbol{T}(s)$与 x 轴的夹角(见图 1.3),则我们有表示

$$\boldsymbol{T}(s) = (\cos\phi, \sin\phi), \boldsymbol{N}(s) = (-\sin\phi, \cos\phi) .$$

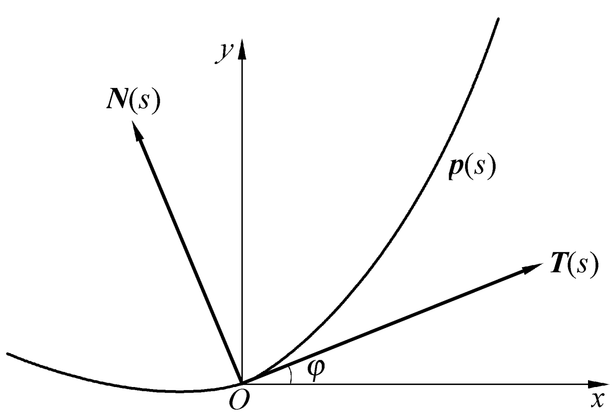

图 1.3

于是,由

$$\boldsymbol{T}'(s) = \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}s\boldsymbol{N}(s),$$

及 Frenet 公式知 $k = \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}s$.我们设 $k \neq 0$.根据

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\phi$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\phi,$$

我们有

$$x(s) = \int\cos\phi\mathrm{d}s = \int\frac{\cos\phi}{k(\phi)}\mathrm{d}\phi,$$

和

$$y(s) = \int\sin\phi\mathrm{d}s = \int\frac{\sin\phi}{k(\phi)}\mathrm{d}\phi.$$

这样,我们就在局部上给出了用曲率来表示原来曲线的公式.

我们总结一下.在这一节里,实际上我们已经学到了微分几何学中的一个常用技巧:对原始数据多次求导,然后用这些结果作代数运算找出优美的公式.但数学上主要的目的是要求所得的结果简洁、漂亮而且抓住本质.要达到这一目标,就要多做习题,掌握一些技巧,从而获得良好的感觉.

考虑一下,对前面的缩短曲线流问题,如果初始曲线是平面曲线,是不是解也是平面曲线?答案是肯定的,其证明我们不讲了.

习　　题

1. 对一般曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$,证明其曲率为

$$k(t) = \frac{x(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)y(t)}{w(t)^3}.$$

2. 在极坐标(r, θ)中,设曲线表示为 $r = F(\theta)$, $a < \theta < b$,证明:弧长为

$$\int_a^b [r^2 + (F')^2]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta,$$

曲率为

$$k = \frac{r^2 + 2(F')^2 - rF''}{[r^2 + (F')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

3．求双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的曲率．

4．对常数 $a > 0$，求曲线 $y = a\cosh\frac{x}{a}$ 的曲率．

5．设 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$ 为光滑曲线且它的曲率 $k(t)$ 不为0．设 $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}\}$ 构成F-标架，定义曲线

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{p}(t) + \frac{1}{k(t)}\boldsymbol{N}(t).$$

证明：$\boldsymbol{q}(t)$ 在 t 处的切矢就是 $\boldsymbol{p}(t)$ 的在 t 处的法矢．

6．设曲线由隐式方程

$$F(x, y) = 0$$

给出(这里我们要设 $\mathrm{d}F(x, y) \neq 0$)．试证其曲率为

$$k(x, y) = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

7．设 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$，$t \in (-\infty, +\infty)$ 为光滑曲线，且它不过原点(0,0)．假设

$$\lim_{t \to -\infty} |\boldsymbol{p}(t)| = \lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{p}(t)| = \infty.$$

证明存在 $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使得

$$|\boldsymbol{p}(t_0)| \leq |\boldsymbol{p}(t)|, t \in (-\infty, +\infty).$$

1.2　Frenet 公式的应用

定义1　设 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$（$s$ 为自然参数），称曲线 $\boldsymbol{p}$ 有伴随曲线 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(u)$，$u = s$（注意这时 $u = s$ 不是 $\boldsymbol{q}$ 的自然参数），是指

$$\boldsymbol{q}(s) = \boldsymbol{p}(s) + a_1(s)\boldsymbol{T}(s) + a_2(s)\boldsymbol{N}(s), \forall s,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{p}'(s)+a_1'\boldsymbol{T}+a_1\boldsymbol{T}'+a_2'\boldsymbol{N}+a_2\boldsymbol{N}'.$$

据 Frenet 公式知

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}s}=(a_1'-ka_2+1)\boldsymbol{T}+(ka_1+a_2')\boldsymbol{N}.$$

定义

$$\frac{\delta a_1}{\mathrm{d}s}=a_1'-ka_2+1,$$

$$\frac{\delta a_2}{\mathrm{d}s}=ka_1+a_2',$$

并称之为点 $\boldsymbol{q}(s)$处曲线 $\boldsymbol{q}$ 在 Frenet 标架$\{\boldsymbol{p}(s);\ \boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$中的绝对速度,而称$\{a_1',a_2'\}$为曲线 $\boldsymbol{q}$ 在 Frenet 标架$\{\boldsymbol{p}(s);\ \boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$中的相对速度.所谓的 Cesaro 不动条件为

$$a_1'-ka_2+1=0,$$

$$ka_1+a_2'=0.$$

它描述平面上一个固定点 $\boldsymbol{q}(s)\equiv\mathrm{const}$ 在 Frenet 标架$\{\boldsymbol{p}(s);\ \boldsymbol{T},\boldsymbol{N}\}$中相对速度应满足的方程.

定义 2　设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$为三次可微曲线.若有 $k'(s_0)=0$ 就称 $\boldsymbol{p}(s_0)$为曲线的顶点.若曲线的起点 $\boldsymbol{p}(0)$与终点 $\boldsymbol{p}(L)$相同就称 $\boldsymbol{p}$ 为闭曲线;若进一步有 $\boldsymbol{p}(s_1)\neq\boldsymbol{p}(s_2)$, $\forall\, 0\leq s_1\leq s_2<L$,就称 $\boldsymbol{p}$ 为简单闭曲线.若连结曲线 $\boldsymbol{p}$ 上任何两点的线段在内部区域中,就称 $\boldsymbol{p}$ 为卵形线(ova1 curve)或闭凸曲线.

简单闭曲线把平面分成两块区域,称其中的有界区域为 $\boldsymbol{p}$ 的内部区域.

例　若 $\gamma=\gamma(s)$(s 为自然参数)为闭凸曲线,即 γ 所围的有界区域为凸区域,对 $a>0$,定义 γ 的平行曲线

$$\gamma_a(s)=\gamma(s)-a\boldsymbol{N}(s).$$

证明:

$$L(\gamma_a) = L(\gamma) + 2\pi a,$$

$$A(\gamma_a) = A(\gamma) + aL(\gamma) + \pi a^2,$$

$$k_a(s) = \frac{k(s)}{1 + ak(s)},$$

其中 N 为 γ 的单位法矢, $A(\gamma)$ 为所围有界区域的面积, $L(\gamma)$ 为 γ 的长度, k_a 为 γ_a 的曲率 .

提示 记 t 为 γ_a 的弧长参数 .由弧长参数的定义知

$$t = \int \left| \frac{d\gamma_a}{ds} \right| ds = \int (1 + ak(s)) ds,$$

所以 $dt/ds = 1 + ak(s)$.在这里我们注意到, 对闭凸曲线总有 $k(s) \geq 0$.利用 $k(s) = d\phi/ds$ 立即可得

$$\int_\gamma k(s) ds = 2\pi .$$

这样

$$L(\gamma_a) = L(\gamma) + a\int k(s) ds = L(\gamma) + 2\pi a .$$

记$\{\gamma_a; \boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{N}_a\}$为 γ_a 的 Frenet 标架, 则有

$$\boldsymbol{T}_a = \frac{d\gamma_a}{ds} \Big/ \left| \frac{d\gamma_a}{ds} \right| = (\boldsymbol{T} - a\boldsymbol{N}')/ |(\boldsymbol{T} - a\boldsymbol{N}')| = \boldsymbol{T},$$

于是, $\boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}$ 这样我们有

$$\frac{d\boldsymbol{T}_a}{dt} = \frac{d\boldsymbol{T}_a}{ds} \Big/ \frac{dt}{ds} = k\boldsymbol{N}/(1 + ak) .$$

于是知道

$$k_a(s) = \frac{k(s)}{1 + ak(s)} .$$

回忆, 对可定向的简单闭曲线 $\alpha(t)$, $t \in [b, c]$. 它包围的区域 S 的面积为

$$A = \int_S dx dy = \int_b^c x(t) \frac{dy}{dt} dt .$$

利用这个公式我们可以证明

$$A(\gamma_a) = A(\gamma) + aL(\gamma) + \pi a^2 .$$

作为 Frenet 公式的另一个应用,我们往证历史有名的四顶点定理.

定理 1(四顶点定理) 卵形线上至少有四个顶点.

证明 由 Frenet 公式 $x'' = -ky', y'' = kx'$ 知

$$\int k' \mathrm{d}s = 0,$$

$$\int_p xk' \mathrm{d}s = -\int_p x'k \mathrm{d}s = -\int y'' \mathrm{d}s = 0,$$

$$\int_p yk' \mathrm{d}s = 0 .$$

因此,对任何实数 a, b, c 有

$$\int_p (ax + by + c) k' \mathrm{d}s = 0 . \qquad (*)$$

由 $\boldsymbol{p}$ 是有界闭集知 $k(s)$ 至少有两个顶点,即极大点与极小点.若 k 只有这两个顶点,过这两点作直线 $ax + by + c = 0$(见图 1.4),则函数 $(ax + by + c) k'$ 在 $\boldsymbol{p}$ 上(除这两点外)无零点且不变号; 而这与 $(*)$ 式矛盾!这说明 k' 至少还有另一零点.但是任意光滑函数在闭凸曲线上符号变化要么为偶数次,要么为无穷多次.也就是说,k' 在闭凸曲线 p 上至少有 4 个零点.即证.

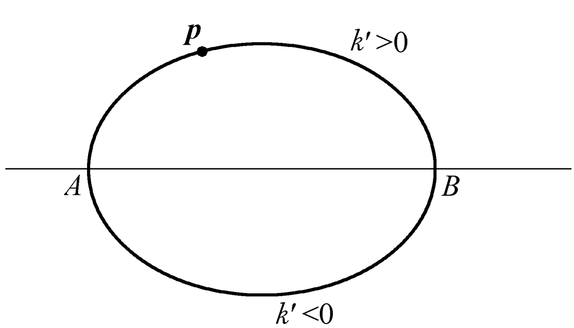

图 1.4

注 (1) 这一定理是由孟加拉国数学家发现.

(2) 在椭圆上正好有四个顶点.

(3) 这一定理对任何光滑的简单闭曲线都成立.

另一个值得提到的结果如下.

定理 2 若 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$为闭曲线,则其全曲率$\int_0^L |k(s)|\,\mathrm{d}s\geq 2\pi$,且仅当 $\boldsymbol{p}$ 为卵形线时才有等号成立.

此定理的证明我们这里不讲了.

这些应用是用来说明几何学是在发展和发现一些优美的现象;而这种过程从形式上看,常见的工作是引入一个新概念再导出一个新结果.实际上很多数学定理都是这样发挥出来的.另外大家也看到了,分析和代数的手段在研究几何问题时常起着关键性作用.

习 题

1. 试证:椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $a\neq b$, 只有 4 个顶点 $(a,0)$, $(b,0)$, $(-a,0)$, $(-b,0)$.

2. 设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$, $s\in[0,L]$为简单闭曲线.设此曲线包含在半径为 R 的圆内.试证有点 $s_0\in[0,L]$使得在这个点处曲率$\geq\dfrac{1}{R}$.

3. 设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$, $s\in[0,L]$为简单闭曲线,设它的曲率满足关系式 $0<k(s)\leq C$,这里 C 为常数.试证:

$$L\geq\frac{2\pi}{C}.$$

4. 给定一个光滑函数 $k\in C^2([0,1])$,利用积分理论来证明存在一个以弧长为参数的平面曲线 $\boldsymbol{p}(s)$以 k 为其曲率.

5. 利用常微分方程(以后简写为 ODE)基本定理来证明上面的习题 4,即证明下面的带有初值 $x(0)=y(0)=\varphi(0)=0$ 的 ODE

$$x'(s) = \cos\phi(s),$$
$$y'(s) = \sin\phi(s),$$
$$\phi(s) = k(s)$$

有解而且这个解就是要找的曲线.

6. 观察到平面曲线的 F-标架是利用 $\mathbb{R}^2$ 的内积

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{2} A^i B^i,\quad A = \sum_{i=1}^{2} A^i \boldsymbol{e}_i,\quad B = \sum_{i=1}^{2} B^i \boldsymbol{e}_i$$

来定义的.如果在 $\mathbb{R}^2$ 上我们用以下内积:

$$\langle A, B\rangle = A^1 B^1 - A^2 B^2,\quad A = \sum_{i=1}^{2} A^i \boldsymbol{e}_i,\quad B = \sum_{i=1}^{2} B^i \boldsymbol{e}_i.$$

试找出对应的平面曲线的 F-标架和 F-公式.

1.3 空 间 曲 线

设 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (x^i(s))$ 为空间曲线, $0 \leq s \leq L$ 为自然参数,则

$$\boldsymbol{T}(s) = \boldsymbol{p}'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的单位切矢,定义 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的曲率为

$$k(s) = |\boldsymbol{T}'(s)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x^{i''}(s)^2}.$$

由 $\boldsymbol{T}(s) \perp \boldsymbol{T}'(s)$,若设 $k(s) > 0$, $\forall s$,则可定义

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{\boldsymbol{T}'(s)}{k(s)}.$$

然后令

$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s).$$

称 $\{\boldsymbol{p}(s); \boldsymbol{T}; \boldsymbol{N}; \boldsymbol{B}\}$ 为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的 Frenet 标架,简称 F-标架(见图 1.5).

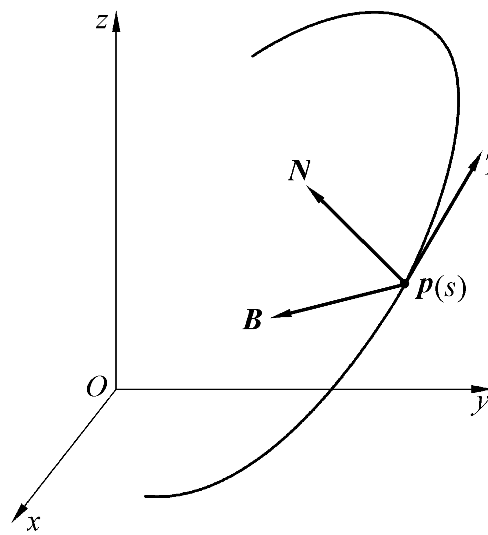

图 1.5

常记 $\boldsymbol{e}_1(s)=\boldsymbol{T}(s)$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{B}$,也称延长 $\boldsymbol{e}_2$ 而得的直线为主法线,延长 $\boldsymbol{e}_3$ 而得的直线为副法线.由于

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij},$$

对 s 求导知

$$\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j'=0.$$

取 $j=2$, $i=1,2$,得

$$0=k+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2',$$

和

$$0=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2'.$$

从而 $\boldsymbol{e}_2'$为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合,即有函数 $\tau=\tau(s)$使得

$$\boldsymbol{e}_2'=-k\boldsymbol{e}_1+\tau\boldsymbol{e}_3.$$

常称 $\tau=\tau(s)$为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$处的挠率.若取 $j=3$, $i=1,2$,则得

$$0=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3'$$

和

$$0=\tau+\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3'$$

最后取 $i=j=3$,得 $0=\boldsymbol{e}_3'\cdot\boldsymbol{e}_3$; 因此得

$$\boldsymbol{e}_3'=-\tau\boldsymbol{e}_2.$$

总结之,我们就得如下 Frenet-Serret 公式(FS):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

由以上推导可看到,若 $\boldsymbol{p}$ 包含于某个平面中,则 $\tau\equiv 0$; 反过来,若曲线 $\boldsymbol{p}$ 的挠率 $\tau = 0$, 则 $\boldsymbol{e}_3' = 0$, 即知 $\boldsymbol{e}_3$ 为常向量.由于 $(\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{p})' = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0$ 从而 $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{p} \equiv \text{const}$, 即 $\boldsymbol{p}$ 在平面 $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{p} \equiv \text{const}$ 中,这样我们就证明了下面的结论.

定理 1 若空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 的曲率 $k > 0$, 则 $\boldsymbol{p}$ 在某平面中的充要条件是 $\tau \equiv 0$.

现举例求 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 及其 k 和 τ.

例 设有正螺线 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $a > 0$, $b > 0$ 为常数(见图 1.6).

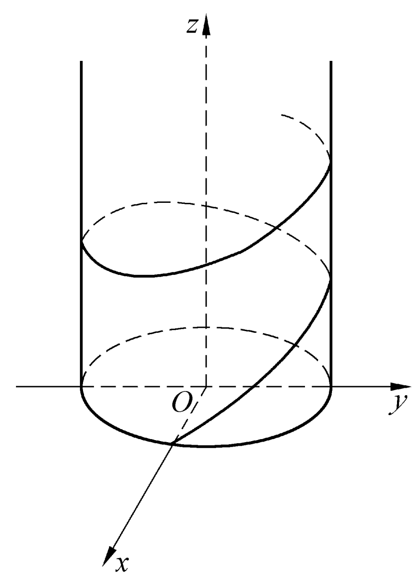

图 1.6

令 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 则 $w = c$, $s = ct$ 为弧长参数.于是正螺线方程可改写为

$$x = a\cos\frac{s}{c},\ y = a\sin\frac{s}{c},\ z = \frac{bs}{c},$$

所以

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{p}' = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right),$$

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{c^2}\left(-a\cos\frac{s}{c}, -a\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

$$k = \frac{a}{c^2},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{c}\left(b\sin\frac{s}{c}, -b\cos\frac{s}{c}, a\right).$$

据

$$\boldsymbol{e}_2' = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c},0\right) = -k\boldsymbol{e}_1 + \frac{b}{c^2}\boldsymbol{e}_3,$$

知

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

注意这时 k 与 τ 全为常数.

我们要问一个刚性问题: 若空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 的曲率 k 与挠率 τ 全为常数,其中 $k>0$,那么 $\boldsymbol{p}$ 是否一定是正螺线呢?下面的定理可立即回答了这一问题.

定理 2　若空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 的曲率与挠率对应相等,则 $\boldsymbol{p}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 只相差一个欧氏运动.

由于其证明同 1.1 节定理 1,请大家作为练习题.当然,一个重要的一般性问题是给定函数 $k>0$ 和 τ,是否存在一个空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 以 k 为其曲率,而以 τ 为其挠率呢?答案是肯定的,这只需解一个 ODE(FS),自然要先固定好初始点 $\boldsymbol{p}(0)$和初始速度

$$(\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)).$$

习　　题

1. 试证下列 Bouquet 公式

$$\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(0) + \boldsymbol{T}(0)s + k(0)\boldsymbol{N}(0)\frac{s^2}{2!} +$$

$$[-k(0)^2\boldsymbol{T}(0) + k'(0)\boldsymbol{N}(0) + k(0)\tau(0)\boldsymbol{B}(0)]\frac{s^3}{3!} + \cdots.$$

2. 对一般空间曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$,试证它的 F-标架是

$$\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{p}}/|\dot{\boldsymbol{p}}|,$$

$$\boldsymbol{B} = \dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}/|\dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}|,$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}.$$

其曲率与挠率分别为

$$k = \frac{|\boldsymbol{p}\times\ddot{\boldsymbol{p}}|}{w^2}, \tau = \frac{(\boldsymbol{p}\times\ddot{\boldsymbol{p}})\cdot\dddot{\boldsymbol{p}}}{|\boldsymbol{p}\times\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}.$$

3. 对曲线 $\boldsymbol{p}(t)=(t\cos t, t\sin t, t)$，试求它的 F-标架及其曲率与挠率.

4. 设 $\boldsymbol{p}(s)=(x^1(s),\cdots,x^n(s))$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中曲线且 $\{\boldsymbol{p}',\cdots,\boldsymbol{p}^{(n)}\}$ 线性无关，试定义它的 F-标架 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$，使得有函数

$$k_0 = k_n = 0,\quad k_j > 0,\quad j = 1,\cdots,n-1.$$

满足 $\boldsymbol{e}_j' = -k_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + k_j\boldsymbol{e}_{j+1}$.

5. 类似于平面曲线中的 Cesaro 不动条件，找出空间曲线中相应的 Cesaro 不动条件.

6. 对空间曲线 $\boldsymbol{p}(t)=(2t, t^2, t^3/3)$，

(1) 求出它的 F-标架.

(2) 对于基点 $t=0$，计算出它的弧长函数.

(3) 求出它的各种曲率.

7. 设 $\{\boldsymbol{p}(s);\ \boldsymbol{T};\ \boldsymbol{N};\ \boldsymbol{B}\}$ 为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的 Frenet 标架. 定义

$$\boldsymbol{A} = \tau\boldsymbol{T} + k\boldsymbol{B},$$

证明

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{T},$$

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{N},$$

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}.$$

8. 对曲线

$$\boldsymbol{p}(t) = (2t, t^2, 0)$$

和

$$\boldsymbol{q}(t) = (-t, t, t^2),$$

证明存在平移 B 和正交变换 A 使得变换 $F = B\ A$ 把 $\boldsymbol{p}(t)$ 变成

$\boldsymbol{q}(t)$, 就是说

$$\boldsymbol{q}(t) = F\boldsymbol{p}(t).$$

9. 找出曲线

$$\boldsymbol{p}(t) = (t + 3\sin t, 2\cos t, 3t - \sin t)$$

的曲率和挠率,由此来说明它是螺旋线.试把它写成

$$\boldsymbol{q}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

的形式.

1.4 空间曲线实例

我们先来看一个例子.

例 设有空间曲线

$$\boldsymbol{p}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3).$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t^2} = 6(-t, 1, t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t^3} = 6(-1, 0, 1).$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 18(1 + 2t^2 + t^4).$$

所以

$$w(t) = 18(1 + t^2).$$

直接计算知

$$\boldsymbol{p} \times \ddot{\boldsymbol{p}} = 18(-1 + t^2, -2t, 1 + t^2),$$

$$|\boldsymbol{p} \times \ddot{\boldsymbol{p}}| = 18\ 2(1 + t^2),$$

$$\boldsymbol{p}\times\ddot{\boldsymbol{p}}\cdot\dddot{\boldsymbol{p}} = 12\times 18 .$$

这样我们带入上节习题 2 中的公式就有

$$k = \tau = \frac{1}{3(1+t^2)^2} .$$

下面我们考虑在什么条件下一条空间曲线是柱面螺旋线 .

定义 1　空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 是柱面螺旋线是指它的单位切矢 $\boldsymbol{T}$ 和一个固定的方向有固定的夹角 .

定理 1　空间曲线 $\boldsymbol{p}$ 有曲率 $k>0$,则它是柱面螺旋线的充要条件是 τ/k 为常数 .

证明　设 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$ 以其弧长参数来表示 .先看必要性 .取使得

$$\cot \quad = \tau/k .$$

定义

$$\boldsymbol{U} = \cos \quad \boldsymbol{T} + \sin \quad \boldsymbol{B},$$

于是

$$\boldsymbol{U}' = (k\cos \quad - \tau\sin \quad)\boldsymbol{N} = 0 .$$

即 $\boldsymbol{U}$ 是我们要的一个固定的方向 .

下证充分性 .设 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^3$ 且 $|\boldsymbol{U}|=1$ 为给定的固定方向 .记　为单位切矢 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的固定的夹角 .因为

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U} = \cos \quad ,$$

所以

$$0 = (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U})' = \boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{U} = k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{U} .$$

因为 $k>0$,所以 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{U}=0$.于是

$$\boldsymbol{U} = \cos \quad \boldsymbol{T} + \sin \quad \boldsymbol{B} .$$

求导并利用 F-公式得

$$0 = (k\cos \quad - \tau\sin \quad)\boldsymbol{N},$$

所以 $\tau/k=\cot$　.证毕 .

我们令 $\boldsymbol{p}_0$ 为空间柱面螺旋线 $\boldsymbol{p}$ 上的固定点 .如果我们考虑函

数 $f(s)=\langle \boldsymbol{p}(s)-\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{U}\rangle$, 于是

$$f'(s) = \boldsymbol{p}'(s)\cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}\cdot \boldsymbol{U} = \cos\quad .$$

这样

$$f(s) = s\cos\quad .$$

在结束曲线论之前,我们要求大家对前面的缩短曲线流问题,求出解曲线的切矢量、法矢量和曲率应满足什么样的方程,也希望大家算一下正螺线的缩短曲线流问题的具体形式 .

习　　题

1 . 设空间曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(s)$以其弧长参数来表示并且有曲率 $k>0$, 则它是球面上的曲线的充要条件是

$$\frac{\tau}{k} = \left(\frac{k'}{\tau k^2}\right)' .$$

2 . 设 $\boldsymbol{p}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$为空间曲线, 试给出其弧长参数的表示式并且求出它的曲率 k .

3 . 设 $\boldsymbol{p}(t)$是常速度为 $C>0$ 的空间曲线, 且它的曲率函数为正函数 .试证它的 F-标架是

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}/C,$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}\times \ddot{\boldsymbol{p}}/(C|\ddot{\boldsymbol{p}}|),$$
$$\boldsymbol{N} = \ddot{\boldsymbol{p}}/|\ddot{\boldsymbol{p}}| .$$

其曲率与挠率分别为

$$k = \frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|}{C^2}, \quad \tau = \frac{(\boldsymbol{p}\times \ddot{\boldsymbol{p}})\cdot \dddot{p}}{C^2|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2} .$$

4 . 观察到空间曲线的 F-标架是利用$\mathbb{R}^3$ 的内积

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i=1}^{3} A^i B^i,\quad \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i \boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} B^i \boldsymbol{e}_i$$

来定义的.如果在$\mathbb{R}^3$上我们用以下内积:

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3,$$

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} B^i \boldsymbol{e}_i.$$

试找出对应的空间曲线的 F-标架和 F-公式.

第 2 章　空间中的曲面

这一章是非常重要的.曲面几何学中有三大发现: 一是 Gauss 曲率, 这后来导致了 Einstein 的相对论; 二是 Gauss-Bonnet 公式, 这后来导致了陈省身示性类; 三是切矢场的平移, 它导致了联络理论及 Yang-Mills 场.我们研究空间曲面的基本手段是 Darboux 和 E.Cartan 的活动标架法.

2.1　空间曲面的概念

定义 1　称 $\mathbb{R}^3$ 中一个集合 V 为正则曲面是指, 对任意点 $\boldsymbol{p}\in V$, 存在 $\boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^3$ 中的开邻域 W 以及 $\mathbb{R}^2$ 中的某一开集 U_α 和映射 $\boldsymbol{f}_\alpha: U_\alpha\to V\cap W$, 而且:

(1) $\boldsymbol{f}_\alpha$ 为可微映射,

(2) $\forall\, \boldsymbol{q}\in U_\alpha, (\mathrm{d}\boldsymbol{f}_\alpha)_q: \mathbb{R}^2\to \mathbb{R}^3$ 为满秩线性映射.

这时简称 V 为曲面.

通常把 $\boldsymbol{f}_\alpha$ 表示为

$$x = x(u^1, u^2), y = y(u^1, u^2),$$
$$z = z(u^1, u^2), (u^1, u^2)\in U_\alpha.$$

于是条件(2)即是说雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} x_{u^1} & y_{u^1} & z_{u^1} \\ x_{u^2} & y_{u^2} & z_{u^2} \end{pmatrix}$$

在 U_α 上的秩数总是 2.于是我们常称(u^1, u^2)为曲面 V 在 $\boldsymbol{p}$ 附近的坐标系或参数.这样在固定坐标后, 不再区分 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}_\alpha(u^1, u^2)$与$(u^1, u^2)$.有时我们也记$(u^1, u^2) = (u, v)$.

在 V 上的点 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)=\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{u}_0)$ 处有曲面的切平面 $T_{\boldsymbol{p}_0}V$(见图 2.1)为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_{u^1}(\boldsymbol{u}_0) & y_{u^1}(\boldsymbol{u}_0) & z_{u^1}(\boldsymbol{u}_0) \\ x_{u^2}(\boldsymbol{u}_0) & y_{u^2}(\boldsymbol{u}_0) & z_{u^2}(\boldsymbol{u}_0) \end{vmatrix}=0,$$

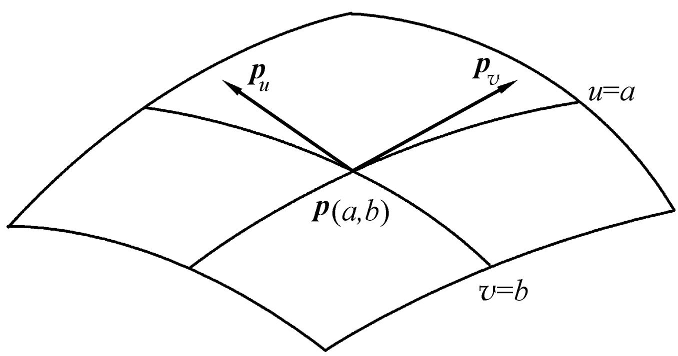

图　2.1

或简写为 $((x,y,z)-\boldsymbol{p}_0)\cdot(\boldsymbol{p}_{u^1}\times\boldsymbol{p}_{u^2})_{\boldsymbol{p}_0}=0$,这里和以后将约定 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(u^1,u^2)=\boldsymbol{f}_\alpha(u^1,u^2)$.常记

$$T_{\boldsymbol{p}}V=\mathrm{span}_{\boldsymbol{p}_0}\{\boldsymbol{p}_{u^1},\boldsymbol{p}_{u^2}\},$$

以及 $\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_{u^i}$, $i=1,2$ 等,而 $(u,v)=(u^1,u^2)$.

由隐函数定理不难证明下面的定理.

定理 1　若 $F:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}$ 为光滑函数,令 $V=\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3: F(x,y,z)=0\}$;当于 V 上 $\mathrm{d}F\neq\boldsymbol{0}$ 时,则 V 为曲面.

最不平凡的例子是球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathrm{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$,作为练习,请大家写出在 $(0,0,1)$ 处 S^2 的切平面方程.

再举几个例子.

例 1　设 $\boldsymbol{A}:(a,b)\equiv I\to\mathrm{R}^3$ 为空间曲线且 $\boldsymbol{A}''(t)\neq\boldsymbol{0}$, " $t\in I$.定义 $\boldsymbol{p}(t,v)=\boldsymbol{A}(t)+v\boldsymbol{A}'(t)$, $(t,v)\in I\times\mathrm{R}^+$,则 $\boldsymbol{p}$ 为曲面,常称 $\boldsymbol{p}$ 为曲线 A 的切曲面(见图 2.2).

可以验证 $T_{\boldsymbol{p}_0}V=\mathrm{span}_{\boldsymbol{p}_0}\{\boldsymbol{A}'(t),\boldsymbol{A}''(t)\}$.我们还可以构造 $\boldsymbol{A}$ 的

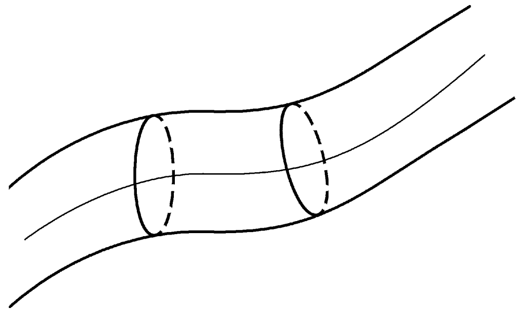

图　2.2

环形曲面,设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(s)$, s 为其自然参数,固定常数瑏> 0,定义

$$\boldsymbol{p}(s, v) = \boldsymbol{A}(s) + 瑏(\boldsymbol{N}(s)\cos v + \boldsymbol{B}(s)\sin v),$$

其中 $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的主、副法线; 也可验证此 $\boldsymbol{p}$ 为曲面 .

例 2　直纹面不见得是曲面,当然这是按数学定义来说的 .一般地,直纹面是这样构造的: 设 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ 为空间中两条曲线且 $\boldsymbol{B}(t) \neq \boldsymbol{0}$, " t, 定义

$$\boldsymbol{p}(t, v) = \boldsymbol{A}(t) + v\boldsymbol{B}(t), t \in I, v \in \mathrm{R} .$$

现在我们来看一下空间中两点的距离 .在三角几何中,两点间的距离为连结这两点的矢量长度; 引入笛卡儿坐标后,点(x_1, x_2, x_3)与(y_1, y_2, y_3)间的距离就是 $\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2\ {}^{\frac{1}{2}}$.而学习了微积分后,点(x, y, z)与$(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$间的距离就为 $\mathrm{d}s$,这里

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = |\mathrm{d}\boldsymbol{p}|^2,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} p_i \mathrm{d}u^i$.由此我们就会求一条空间曲线 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$的长度,即 $L(\boldsymbol{p}) = \int_a^b \mathrm{d}s$. 在微分几何中我们称$(\mathrm{d}s)^2$ 为度量 .当 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$为曲面 $V \quad \mathrm{R}^3$ 上的空间曲线,据 $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{p}_i u^i$ 知 $|\boldsymbol{p}(t)|^2 = \langle \boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{p}(t) \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} u^i u^j$, 这里 $g_{ij}(p) = \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_j$,显然 $g_{ij} = g_{ji}$.由历史原因常记

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 .$$

并称之为曲面 V 的第一基本形式或黎曼度量.这是一个非常基本的几何量.

例 3 环面:$\boldsymbol{p}=(r\sin u, (R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v)$,$0<r<R$.记

$$g(u)=r\sin u$$

和

$$h(u)=R+r\cos u.$$

计算知

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_1 &= \boldsymbol{p}_u = (g', h'\cos v, h'\sin v),\\
\boldsymbol{p}_2 &= \boldsymbol{p}_v = (0, -h\sin v, h\cos v),\\
E &= (r\cos u)^2+(r\sin u)^2 = r^2,\\
F &= 0,\\
G &= h^2.
\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=2$,所以矩阵 $(g_{ij})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}(\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}})$ 正定.由 $T_{\boldsymbol{p}}V=\operatorname{span}\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$,对 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{p}}V$,$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{2}\xi_i\boldsymbol{p}_i$,有

$$|\boldsymbol{A}|^2=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}\xi_i\xi_j.$$

这样我们就对 $\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{2}\eta_i\boldsymbol{p}_i$ 定义 $\mathrm{d}s^2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}\xi_i\eta_j$.显然 $\mathrm{d}s^2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 正好是 $\mathbb{R}^3$ 中的内积 $\langle\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$.另外 $\mathrm{d}s^2=|\mathrm{d}\boldsymbol{p}|^2$ 也简记为 g.

这些讨论都是在坐标 (u^1, u^2) 上进行的;再由 $\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2\neq\boldsymbol{0}$,定义 V 上(局部)单位法矢

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2|}$$

(见图 2.3)和曲面 V 上的第二基本形式:

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}.$$

据 $\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$ 知:$-\mathrm{d}\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{D}^2\boldsymbol{p}\equiv\mathrm{D}^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}$,即有 $\mathrm{II}=\mathrm{D}^2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}\equiv$

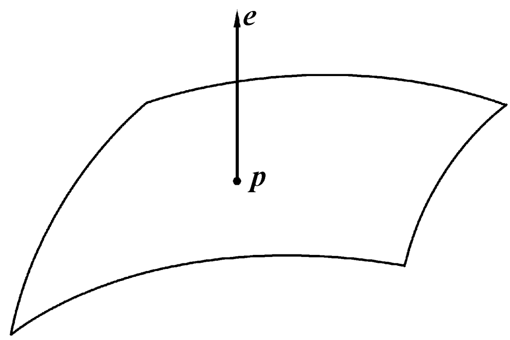

图　2.3

$\sum_{i,j=1}^{2}(\boldsymbol{p}_{ij}\cdot\boldsymbol{e})\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j\equiv\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$. 显然 $b_{ij}=b_{ji}$. 由 Ⅱ 的定义知, Ⅱ 为 Hesse 矩阵

$$\mathrm{D}^2\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j)$$

在法向 $\boldsymbol{e}$ 上的投影. 我们也常记

$$\mathrm{II}=L(\mathrm{d}u)^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N(\mathrm{d}v)^2.$$

这也是一个非常基本的几何量. 利用行列式的性质, 我们可以看出

$$|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|=\sqrt{EG-F^2}.$$

现在回到上面的环面例子, 我们来计算它的第二基本形式: 利用上面的计算结果我们有

$$EG-F^2=r^2(R+r\cos u)^2.$$

令

$$w=|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|=\sqrt{EG-F^2}=r(R+r\cos u),$$

则

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v/|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|=h(h',-g'\cos v,-g'\sin v)/w,$$

$$\boldsymbol{p}_{uu}=(-r\sin u,-r\cos u\cos v,-r\cos u\sin v),$$

$$\boldsymbol{p}_{uv}=\boldsymbol{p}_{vu}=(0,r\sin u\sin v,-r\sin u\cos v),$$

$$\boldsymbol{p}_{vv}=(0,-h\cos v,-h\sin v),$$

$$L=r,$$

$$M = 0,$$

$$N = (R + r\cos u)\cos u.$$

若 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$,为 V 上曲线;其中 s 为自然参数.定义 $k_n(s) = \boldsymbol{p}''(s)\cdot \boldsymbol{e}$ 为曲线 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{p}(s)$ 处的法曲率.

定义 2　若记 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^1(s), u^2(s))$,并定义

$$\mathrm{II}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}') = \sum_{i=1}^{2} b_{ij} u_s^i u_s^j.$$

易见,$k_n(s) = \mathrm{II}(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}')$.对一般的曲线表示:$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^1(t), u^2(t))$,$t \in I$.由于

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2} g_{ij} u^i u^j,\quad u_s^i = u^i \Big/ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

所以

$$k_n(t) = \frac{\mathrm{II}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \frac{\mathrm{II}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})}{g(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p})}.$$

因此 k_n 只与 $\boldsymbol{p}$ 的切向量的方向有关,而与切向量的长短无关,这就是下面的定理.

定理 2(Meusnier 定理)　若曲面 V 上两条曲线在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处相切,则它们在这点处的法曲率相等.

容易看出 $\boldsymbol{p}_0$ 点处的法曲率正是在平面$\{\boldsymbol{p}_0', \boldsymbol{e}\}$上过点 $\boldsymbol{p}_0$ 处以 $\boldsymbol{p}_0'$ 为速度的平面曲线的曲率.

令 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\boldsymbol{e}}{u^i}$,因 $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}_i = 0$,于是存在$(a_i^j)$使得 $\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{2} a_i^j p_j$.据 $b_{ij} = -\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{p}_j$,$g_{ij} = \boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{p}_j$,知

$$-b_{ij} = \sum_{l=1}^{2} a_i^l g_{lj},$$

即

$$d_i^j = -\sum_{l=1}^{2} g^{jl} b_{li},$$

其中$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$; 从而有

$$\boldsymbol{e}_i = -\sum_{j=1}^{2} g^{jl} b_{li} \boldsymbol{p}_j .$$

这就是 Weingarton 方程.据 $b_{ij} = \boldsymbol{p}_{ij} \cdot \boldsymbol{e}$ 和$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{e}\}$构成$\mathbb{R}^3$的基底知,存在 Γ_{ij}^k 使得

$$\boldsymbol{p}_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{p}_k + b_{ij} \boldsymbol{e} .$$

这正是 Gauss 公式.利用 $\boldsymbol{p}_{ij} = \boldsymbol{p}_{ji}$, 易见 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.常称 Γ_{ij}^k 为 Christofell 符号.总结之,我们有如下公式:

$$g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j, \quad \mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{p}_i \mathrm{d}u^i, \quad g_{ij} = \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j, \quad b_{ij} = \boldsymbol{p}_{ij} \cdot \boldsymbol{e},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i = \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{p}_{ij} \mathrm{d}u^j = \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \mathrm{d}u^j \boldsymbol{p}_k + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} \mathrm{d}u^j \boldsymbol{e},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e} = -\sum_{i,j,k=1}^{2} g^{ik} b_{ji} \mathrm{d}u^j \boldsymbol{p}_k .$$

以后我们采用 Einstein 约定求和法则,即上下重复指标求和.

现在我们指出第二基本形式的直观几何意义.对任意点 $\boldsymbol{p}_0 \in V$, 记 $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}_0)$, 并定义 $f(u, v) = \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{p}(u, v)$.因 $\mathrm{d}f|_{\boldsymbol{p}_0} = \boldsymbol{e}_0 (\mathrm{d}\boldsymbol{p})_{\boldsymbol{p}_0} = \boldsymbol{0}$, 而 Hesse 矩阵

$$\boldsymbol{H}(f)|_{\boldsymbol{p}_0} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}_0} = (b_{ij})_{\boldsymbol{p}_0} .$$

于是若$\mathrm{II}(\boldsymbol{p}_0) > 0 (< 0)$即正定(负定),则曲面 V 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_0$ 是凸(凹)(见图 2.4); 而在$\mathrm{II}(\boldsymbol{p}_0)$不定型且不退化时,曲面 V 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处呈马鞍状(见图 2.5).

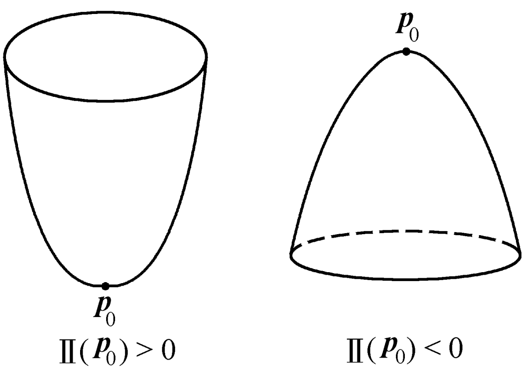

图 2.4

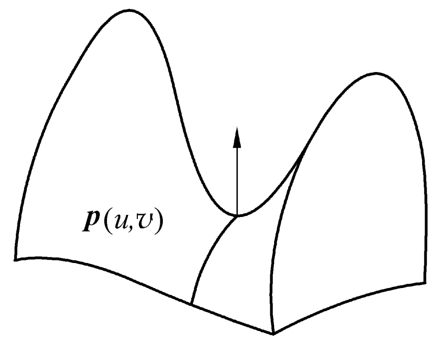

图 2.5

最后请大家做下面的习题.

习　　题

1. 说明 $x^2+y^2-z^2=1$ 为直纹面而且是曲面；另外说明 $x^2+y^2-z^2=0$ 不是曲面.

2. 给定一个平面曲线 $f(x,y)=c$，定义

$$g(x,y,z)=f(x,\sqrt{y^2+z^2}).$$

验证 M: $g(x,y,z)=c$ 是曲面，找出它的法矢并给出它的第二基本形式.

3. 设 P: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$，

$$P(u,v)=(u+v,u-v,uv).$$

验证 $M=P(\mathbb{R}^2)$ 是曲面而且就是 $z=(x^2-y^2)/4$；找出它的法矢并给出它的第二基本形式.

4. 试证

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

提示：先证明 $\Gamma_{ij}^k=g^{kl}\langle \boldsymbol{p}_{ij},\boldsymbol{p}_l\rangle$.

5. 据 $\boldsymbol{p}_{ijl}=\boldsymbol{p}_{ilj}$ 证明：

$$\frac{\Gamma^k_{ij}}{u^l} - \frac{\Gamma^k_{il}}{u^j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{ml} - \Gamma^m_{il}\Gamma^k_{mj} = b_{ij}\, g^{km} b_{ml} - b_{il}\, g^{km} b_{mj} .$$

这是 Gauss 方程 .

6 . 据 $\boldsymbol{e}_{ij} = \boldsymbol{e}_{ji}$ 证明:

$$\frac{b_{ij}}{u^l} - \frac{b_{il}}{u^j} + \Gamma^m_{ij} b_{ml} - \Gamma^m_{il} b_{mj} = 0 .$$

这是 Codazzi-Mainardi 方程 .

2.2 曲面上的曲线

设 $\gamma = \gamma(s)$ (s 为自然参数)为曲面 V 上的曲线,令 $\boldsymbol{T}(s) = \gamma'(s)$, $\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{N}(s) = \boldsymbol{B}(s)\times \boldsymbol{T}(s)$,则$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$构成曲线 γ 上的一个活动标架 .定义曲线 γ 在曲面 V 上的测地挠率为 $\tau_g(s) = \langle \boldsymbol{N}'(s), \boldsymbol{B}(s)\rangle$,即 $\boldsymbol{N}'(s)$在 $\boldsymbol{B}(s)$上的投影,则据 $k_n(s) = \langle \boldsymbol{p}''(s), \boldsymbol{e}\rangle = \langle \boldsymbol{T}'(s), \boldsymbol{B}(s)\rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\rangle = 0$ 知: $\boldsymbol{B}'(s) = -\tau_g \boldsymbol{N}(s) - k_n \boldsymbol{T}(s)$.回忆 k_n 为 γ 的法曲率,现定义曲线 $\gamma = \gamma(s)$在曲面 V 上的测地曲率为

$$k_g(s) = \langle \boldsymbol{T}'(s), \boldsymbol{N}(s)\rangle ,$$

即

$$k_g(s) = \langle \boldsymbol{p}''(s), \boldsymbol{N}(s)\rangle .$$

因此 $\boldsymbol{T}'(s) = k_g \boldsymbol{N} + k_n \boldsymbol{e}$,而

$$\boldsymbol{N}'(s) = -k_g \boldsymbol{T} + \tau_g \boldsymbol{B} .$$

总结之,我们得(如同 Frenet-Serret 公式)

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{array}{}' = \begin{array}{ccc} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{array} .$$

注意这里 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}$ 为曲面 V 之单位法矢(据我们的假定,曲面 V 的单位法矢总存在) .

我们最感兴趣的一类曲线 $\gamma = \gamma(s)$是其测地曲率 $k_g \equiv 0$,并称之为测地线 .若曲面 V 在局部上可表示为 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^1, u^2)$,而 $\gamma =$

$\boldsymbol{p}(u^1(s), u^2(s))$, 则利用

$$\gamma''(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{p}_i u_s^i) = \boldsymbol{p}_{ij} u_s^i u_s^j + \boldsymbol{p}_i u_{ss}^i$$

和

$$\boldsymbol{p}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{p}_k + b_{ij} \boldsymbol{e},$$

知

$$\boldsymbol{T}'(s) = \gamma''(s) = (u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k(s) u_s^i u_s^j) \boldsymbol{p}_k + k_n \boldsymbol{e},$$

即有

$$k_g(s) = (u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k(s) u_s^i u_s^j) \boldsymbol{p}_k \cdot \boldsymbol{N}(s).$$

因此 $\gamma = \gamma(s)$为测地线的充要条件是

$$u_{ss}^k + \Gamma_{ij}^k(s) u_s^i u_s^j = 0, \quad k = 1, 2, \ \forall s \in [0, L].$$

后者称为测地线方程.此时,因为 $\boldsymbol{T}'(s) = k_g \boldsymbol{N} + k_n \boldsymbol{e} = k_n \boldsymbol{e}$,所以 $\boldsymbol{p}_{ss}$ 总垂直于曲面 V.

若 $\gamma = \gamma(s)$为连结曲面 V 上两点 A 与 B 的长度最短曲线,则 γ 为测地线.为证这一结果我们考虑连结 A 与 B 的曲线族 $\boldsymbol{p}_\lambda(s)$,这里 $\boldsymbol{p}_0(s) = \gamma(s)$, s 为曲线 γ 的自然参数, $0 \leq s \leq L$.要求 $\boldsymbol{F}(\lambda, s) = \boldsymbol{p}_\lambda(s)$ 对 λ, s 光滑依赖, $\lambda \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$,而

$$\boldsymbol{F}(\lambda, 0) = A, \quad \boldsymbol{F}(\lambda, L) = B, \quad \forall \lambda \in (-\delta, \delta).$$

定义

$$L(\lambda) = L(\boldsymbol{p}_\lambda).$$

于是

$$L(\lambda) = \int_0^L \left| \frac{\partial \boldsymbol{F}(\lambda, s)}{\partial s} \right| \mathrm{d}s$$

和

$$L'(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s}\right)}{|\boldsymbol{F}_s|} \mathrm{d}s = \int_0^L \frac{\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \lambda \partial s}}{|\boldsymbol{F}_s|} \mathrm{d}s.$$

定义 $\frac{D}{\partial s}(\boldsymbol{F}_\lambda)$ 和 $\frac{D}{\partial s}(\boldsymbol{F}_s)$ 分别为 $\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial \lambda \partial s}$ 与 $\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial s^2}$ 在 $T_{\boldsymbol{p}_\lambda(s)} V$ 上的投影,并由

$\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_\lambda)=\frac{\mathrm{D}}{\lambda}(\boldsymbol{F}_s)$知

$$L'(\lambda)=\int_0^L \frac{\boldsymbol{F}_s\cdot\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_\lambda)}{|\boldsymbol{F}_s|}\mathrm{d}s.$$

由$\frac{\boldsymbol{F}}{s}\cdot\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_\lambda)=\frac{}{s}(\boldsymbol{F}_s\cdot\boldsymbol{F}_\lambda)-\frac{\boldsymbol{F}}{\lambda}\cdot\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_s)$和$|\boldsymbol{F}_s|_{\lambda=0}=1$知

$$\begin{aligned}L'(0)&=\int_0^L\left(\frac{}{s}(\boldsymbol{F}_s\cdot\boldsymbol{F}_\lambda)\Big|_{\lambda=0}-\boldsymbol{F}_\lambda\Big|_{\lambda=0}\cdot\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_s)\Big|_{\lambda=0}\right)\mathrm{d}s\\&=-\int_0^L\boldsymbol{F}_\lambda\Big|_{\lambda=0}\cdot\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_s)\Big|_{\lambda=0}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

以上利用了 $\boldsymbol{F}_\lambda\in T_{\boldsymbol{p}_\lambda(s)}V$ 和 $\boldsymbol{F}_\lambda\big|_{s=0,L}=0$.因 $\boldsymbol{F}_\lambda\big|_{\lambda=0}$任意和变分引理知

$$\frac{\mathrm{D}}{s}(\boldsymbol{F}_s)\Big|_{\lambda=0}=0,\quad " s\in[0,L],$$

即$\frac{\mathrm{D}}{s}(\gamma_s)=0$, " $s\in[0,L]$.但$\frac{\mathrm{D}}{s}(\gamma_s)$为 $\gamma''(s)$在 $T_{\gamma(s)}V$ 上的投影,这正好是$(u^k_{ss}+\Gamma^k_{ij}(s)u^i_s u^j_s)\boldsymbol{p}_k$.因此有

$$u^k_{ss}+\Gamma^k_{ij}(s)u^i_s u^j_s=0,\quad " s\in[0,L],$$

这是测地线方程.

注意,一般说来,测地线不见得是长度最短的曲线,但在小范围内这确实是对的.由于要用第二变分技巧,在这就不做了.

习　　题

1. 求出单位球面 $S^2=\{Q\in\mathbb{R}^3: |Q|=1\}$连结 A 与 B 的测地线.
2. 写出曲面 $F(x,y,z)=0$ 的测地线方程.
3. 求曲面$(u\cos v, u\sin v, av)$上的一般测地线的表达式.
4. 证明柱面

$$M:\ x^2+y^2=R^2,$$

上的一般测地线的表达式是

$$\gamma(t)=(R\cos(at+b), R\sin(at+b), ct+d).$$

2.3 椭球面上的测地线

设 $\boldsymbol{A}$ 为 R^3 上具有不同特征值 $0 < a_0 < a_1 < a_2$ 的正定对称矩阵. 定义椭球面

$$S_a = \{ \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^3 : \langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1 \}.$$

记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 定义

$$\boldsymbol{e} = | \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} |^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}.$$

设 $\gamma(s) = \boldsymbol{x}(s)$ (s 为自然参数) 为曲面 S_a 上的曲线. 因为

$$\langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle = 0,$$

所以 $\boldsymbol{e}$ 为 S_a 上单位外法矢. 常称 $\boldsymbol{e}: S_a \to S^2$ 为高斯映射.

我们来看 S_a 上面的测地线方程. 设 $\gamma(s) = \boldsymbol{x}(s)$ (s 为自然参数) 为曲面 S_a 上的测地线. 令 $\boldsymbol{T}(s) = \gamma'(s)$. 于是利用 $\langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle = 0$ 和 $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}' \rangle = 0$, 知

$$\boldsymbol{T}' = -\lambda \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x},$$

这里的 λ 为待定常数. 因为

$$\langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle' = \langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}' \rangle + \langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle = 0,$$

所以

$$\lambda = | \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} |^{-2} \langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle.$$

于是椭球面上的测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2} + | \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} |^{-2} \langle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

现在我们来看这个方程与其他问题之间的关系. 做变量代换 $s = d(t)$, 于是

$$\boldsymbol{x}_{tt} = -\lambda d_t^2 \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} + \frac{d_{tt}}{d_t} \boldsymbol{x}_t.$$

取 $d(t)$ 使得 $\lambda d_t^2 = 1$, 并令 $b(t) = \dfrac{d_{tt}}{d_t}$, 我们就有

$$\boldsymbol{x}_{tt} = -B\boldsymbol{x} + b(t)\boldsymbol{x}_t.$$

利用

$$\langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 1,$$

我们知道

$$b = 2\langle B\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}_t\rangle / |B\boldsymbol{x}|^2,$$

和

$$\langle B\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_t\rangle = |B\boldsymbol{x}|^2.$$

令

$$r = |B\boldsymbol{x}|,$$

直接求导可知

$$\boldsymbol{e}_t = r^{-1}B(\boldsymbol{x}_t + (\log r)_t\boldsymbol{x}),$$

这里

$$(\log r)_t = \langle B\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x}_t\rangle |B\boldsymbol{x}|^{-2}.$$

由此,我们知道 $\boldsymbol{e}(t)$满足以下方程:

$$\boldsymbol{e}_{tt} = -B\boldsymbol{e} + \nu\boldsymbol{e},$$

这里

$$\nu = \langle B\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle - |\boldsymbol{e}_t|^2.$$

这个方程被称为 C.Neumann 问题.它描述单位球面上的质点在引力 $-B\boldsymbol{e}$作用下的运动方程.人们现在常用可积系统的观点来研究这个方程的求解.

由于测地线方程是 2 阶的,利用 ODE 基本定理易见,映射$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t)\to(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_t)$是双射.这样,我们可以从 C.Neumann 问题来导出椭球面上的测地线方程(我们把这个方程的推导留为作业).

2.4 曲面的曲率

给定一曲面 V 以及 V 上一定点 $\boldsymbol{p}_0$,则 $T_{p_0}V$ 上的单位切矢 $\boldsymbol{T} = \xi_i\boldsymbol{p}_i$ 满足关系 $g_{ij}\xi_i\xi_j = 1$.考虑 $k_n(\boldsymbol{T}) = \mathrm{II}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})$在$|\boldsymbol{T}|^2 = 1$ 上

的极值. 因为 $|\boldsymbol{T}|^2 = g(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T})$, 据 Lagrange 数乘子法知, 在极值点 $\boldsymbol{T} = \xi_i \boldsymbol{p}_i$ 处, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足

$$\Delta \mathrm{II}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) = \lambda \Delta g(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}), \tag{1}$$

立即由 $\mathrm{II}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\xi_i\xi_j$ 知

$$(b_{ij} - \lambda g_{ij})\xi_j = 0, \quad i,j = 1,2. \tag{2}$$

由于 $|\boldsymbol{T}| = 1$, 所以 $(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$, 从而

$$\det(b_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0, \quad i,j = 1,2.$$

即

$$\det(g_{ij})\lambda^2 - (g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12})\lambda + \det(b_{ij}) = 0.$$

于是, 若 λ_1, λ_2 为其根, 则对应于 λ_i 的(2)式有解 $\boldsymbol{T}_i\ (i = 1,2)$. 由(2)式直接计算知 $\lambda_i = \mathrm{II}(\boldsymbol{T}_i,\boldsymbol{T}_i)$, 即知 λ_i 为过点 $\boldsymbol{p}_0$ 以 $\boldsymbol{T}_i$ 为速度的曲线的法曲率.

定义 1 曲面 V 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的 Gauss 曲率为

$$K(\boldsymbol{p}_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2;$$

而中(平均)曲率为

$$H(\boldsymbol{p}_0) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

由韦达定理知

$$K(\boldsymbol{p}_0) = \det(b_{ij}) / \det(g_{ij})$$

和

$$H(\boldsymbol{p}_0) = (g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}) / 2\det(g_{ij}).$$

常称 λ_i 为曲面 V 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的主曲率, 而对应的 $\boldsymbol{T}_i$ 为主方向. 试证, 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $g(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2) = 0$. 若在 $\boldsymbol{p}_0$ 处, $\lambda_1 = \lambda_2$, 就称 $\boldsymbol{p}_0$ 为曲面 V 的脐点; 此时 $\forall\ |\boldsymbol{T}| = 1$ 有 $\mathrm{II}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) \equiv \mathrm{const}$. 处处是脐点的曲面 V 称为迷向曲面.

定义 2 若在曲面 V 上中曲率为常数, 就称 V 为常中曲率曲面; 特别地, 若 $H(\boldsymbol{p}) \equiv 0$ 于 V 上, 称 V 为极小曲面.

例 (1) 设 V 为函数 $z = f(x, y)$ 的图.记 $(x, y) = (u^1, u^2)$, $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$, 以及 $f_i = f_{u^i}$ 等, 则

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j,$$

而 $\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2 = (-f_1, -f_2, 1)$ 为法矢.令

$$w = |\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2| = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2},$$

则

$$g^{ij} = (\delta_{ij} - f_i f_j)/w^2,$$

$$\boldsymbol{e} = (-f_1, -f_2, 1)/w,$$

$$b_{ij} = f_{ij}/w,$$

从而可求出 K 与 H.

(2) 柱面: $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = v$, 设参数 u 为曲线 $(x(u), y(u))$ 的自然参数, 即 $x'^2 + y'^2 = 1$, 则

$$g = (\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2,$$

$$\boldsymbol{e} = (y', -x', 0).$$

于是

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e} = (x''y' - x'y'')(\mathrm{d}u)^2.$$

因此 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = x''y' - x'y''$ 为曲线 (x, y) 的曲率的相反数, 而 $K = 0$, $H = \dfrac{1}{2}(x''y' - x'y'')$.

(3) 环面: $\boldsymbol{p} = (r\sin u, (R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v)$, $0 < r < R$.记

$$g(u) = r\sin u$$

和

$$h(u) = R + r\cos u.$$

计算知

$$\boldsymbol{p}_u = (g', h'\cos v, h'\sin v),$$

$$\boldsymbol{p}_v = (0, -h\sin v, h\cos v),$$

$$E = (r\cos u)^2 + (r\sin u)^2 = r^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = h^2,$$

$$EG - F^2 = r^2(R + r\cos u)^2,$$

$$w = \sqrt{EG - F^2} = r(R + r\cos u),$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v / |\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v| = (h', -g'\cos v, -g'\sin v)/r,$$

$$\boldsymbol{p}_{uu} = (-r\sin u, -r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v),$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu} = (0, r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v),$$

$$\boldsymbol{p}_{vv} = (0, -h\cos v, -h\sin v),$$

$$L = r,$$

$$M = 0,$$

$$N = (R + r\cos u)\cos u,$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos u}{R + r\cos u}\right),$$

$$K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}.$$

(见图 2 .6)

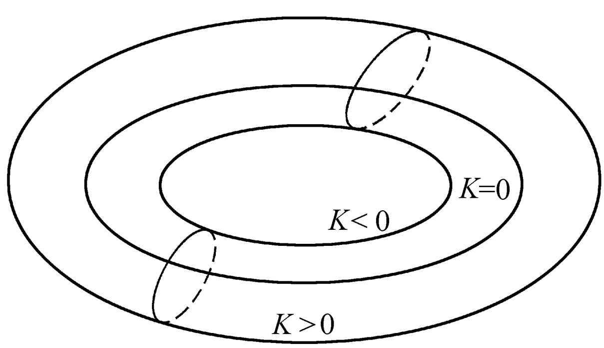

图 2 .6

习 题

1 . 验证曲面(Enneper 极小曲面)

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3,$$

$$y = -v^3 + 3v + 3u^2 v,$$

$$z = 3(u^2 - v^2)$$

为极小曲面.

2. 求马鞍面

$$z = xy$$

的高斯曲率与中曲率.

3. 求回转面

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)), \quad f(u) > 0$$

的高斯曲率与中曲率;并找出 $K \equiv -c^2$, c 为常数的曲面.

4. 设曲面 $V \subset \mathbb{R}^3$ 为 $\boldsymbol{p}: D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$ 为有界区域,设 $f: D \to \mathbb{R}$ 为光滑函数,对 $|\varepsilon|$ 很小,定义新曲面

$$\boldsymbol{q}_\varepsilon = \boldsymbol{p} + \varepsilon f \boldsymbol{e},$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为 V 的单位法矢.于是曲面 $\boldsymbol{q} := \boldsymbol{q}_\varepsilon$ 的面积为 $A(\varepsilon) = \iint_D |\boldsymbol{q}_u \times \boldsymbol{q}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 试证

$$A'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -2\iint_D fH\sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

这里 $g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ 为曲面 V 的度量, H 为 V 的中曲率.

5. 验证回转面

$$\boldsymbol{P}(u, v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u)$$

的高斯曲率是

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\boldsymbol{\gamma}' \cdot \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\delta}')^2}{W^4},$$

这里 u 为曲线 $\boldsymbol{\gamma}$ 的弧长参数, $\boldsymbol{\delta}(u)$ 为单位矢量,而

$$W = |\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\delta} + v\boldsymbol{\delta}' \times \boldsymbol{\delta}|.$$

6. 对曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$,定义

$$\mathrm{III} = \mathrm{d}\boldsymbol{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}.$$

验证

$$K\mathrm{I} - 2H\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0.$$

2.5 实例计算

为了对曲率有一定的了解.我们来看几个例子.

(1) $M = S^2(R)$为半径为 $R>0$ 的球面.$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}/R$.所以 $M = S^2(R)$为迷向曲面.$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/R$, $H = 1/R$, $K = 1/R^2$.

(2) 广义柱面: $M = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : (x, y) = C(s)\}$,这里 $C(s)$为R^2 的光滑曲线, s 为其自然参数.M 的法矢 $\boldsymbol{e}$平行于 xy 平面.所以在点$(C(s), z)$处, $(0, 0, 1)$为主特征方向,对应的 $\lambda_1 = 0$; 另一个主特征方向是$(C', 0)$,对应的 $\lambda_2 = k(s)$.

在以下的例子中,我们不特别指明参数(u, v)的取值范围.

(3) 椭球: $M = (x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.于是

$$M: \ x = a\cos u\cos v, \quad y = b\cos u\sin v, \quad z = c\sin u.$$

这样

$$\boldsymbol{p}_u = (-a\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, -c\cos u),$$

$$\boldsymbol{p}_v = (-a\cos u\sin v, b\cos u\cos v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_{uu} = -(a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u),$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu} = (-a\sin u\sin v, b\sin u\cos v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_{vv} = (a\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, 0),$$

$$w = b^2c^2\cos^2 u\cos^2 v + c^2a^2\cos^2 u\sin^2 v + a^2b^2\sin^2 u,$$

$$\boldsymbol{e} = -(bc\cos u\cos v, ca\cos u\sin v, ab\sin u)/w,$$

$$E = a^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 u,$$

$$F = (a^2 - b^2)\sin u\cos u\sin v\cos v,$$

$$G = a^2\cos^2 u\sin^2 v + b^2\cos^2 u\cos^2 v,$$

$$EG - F^2 = w^2\cos^2 u,$$

$$L = abc/w,$$

$$M = 0,$$

$$N = abc\cos^2 u / w,$$

$$H = abc(a^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)/(2w^3),$$

$$K = a^2b^2c^2/w^4 .$$

再回到(x, y, z)**的表示就有**

$$K = a^{-2}b^{-2}c^{-2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-2}$$

和

$$H = \frac{a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2)}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}} .$$

(4) **单叶双曲面** $M = \left\{(x, y, z)\in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.**于是**

$$M:\ x = a\cosh u\cos v,\ y = b\cosh u\sin v,\ z = c\sinh u .$$

令

$$Q = \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} .$$

这样,做类似的计算得

$$\boldsymbol{p}_u = (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, -c\cosh u),$$

$$\boldsymbol{p}_v = (-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_{uu} = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u),$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu} = (-a\sinh u\sin v, b\sinh u\cos v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_{vv} = (-a\cosh u\cos v, -b\cosh u\sin v, 0),$$

$$\boldsymbol{e} = (-x/a^2, -y/b^2, z/c^2)/Q,$$

$$E = a^2\sinh^2 u\cos^2 v + b^2\sinh^2 u\sin^2 v + c^2\cosh^2 u,$$

$$F = (b^2-a^2)\sinh u\cosh u\sin v\cos v,$$

$$G = a^2\cosh^2 u\sin^2 v + b^2\cosh^2 u\cos^2 v,$$

$$L = -1/Q,$$

$$M = 0,$$

$$N = \cosh^2 u / Q,$$

$$H = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2 b^2 c^2 Q^3},$$

$$K = - a^{-2} b^{-2} c^{-2} Q^{-4} .$$

(5) **螺旋面** $M = \{(u\cos v, u\sin v, bv): (u, v) \in \mathrm{R}^2\}, b \neq 0$.**记** $\boldsymbol{p} = (u\cos v, u\sin v, bv)$.**计算知**

$$\boldsymbol{p}_u = (\cos v, \sin v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_v = (-u\sin v, u\cos v, b),$$

$$E = 1,$$

$$F = 0,$$

$$G = b^2 + u^2,$$

$$EG - F^2 = b^2 + u^2,$$

$$w = b^2 + u^2,$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v / |\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v| = (b\sin v, -b\cos v, u) / w,$$

$$\boldsymbol{p}_{uu} = 0,$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0),$$

$$\boldsymbol{p}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

$$L = 0,$$

$$M = -b / w,$$

$$N = 0,$$

$$H = 0,$$

$$K = \frac{-b^2}{(b^2 + u^2)^2} .$$

(6) **直纹面** M: $\boldsymbol{p}(u, v) = \boldsymbol{C}(u) + v\boldsymbol{A}(u)$, **这里** $\boldsymbol{C}(u)$**为**R^3 **中以** u **为弧长参数的曲线**; **而** $\boldsymbol{A}(u)$**为单位矢量且**$\langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{A}' \rangle = 0, |\boldsymbol{A}'| \neq 0$.**直接计算知**

$$\boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{C}' + v\boldsymbol{A}',$$

$$\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{C}' \times \boldsymbol{A} + v\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A},$$

$$E = 1 + u^2 |\boldsymbol{A}'|^2,$$

$$F = \langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{A} \rangle,$$

$$G = 1.$$

引入函数 $\lambda = \lambda(u)$ 使得

$$\boldsymbol{C}' \times \boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{A}',$$

于是

$$\lambda = \langle \boldsymbol{C}' \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle / |\boldsymbol{A}'|^2,$$

$$EG - F^2 = |\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|^2 = |\lambda \boldsymbol{A}' + u\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A}|^2$$

$$= (\lambda^2 + v^2)|\boldsymbol{A}'|^2,$$

$$w = \sqrt{\lambda^2 + v^2}\,|\boldsymbol{A}'|,$$

$$\boldsymbol{e} = (\lambda \boldsymbol{A}' + v\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A}) / w,$$

$$\boldsymbol{p}_{uu} = \boldsymbol{C}'' + v\boldsymbol{A}'',$$

$$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{p}_{vu} = \boldsymbol{A}',$$

$$\boldsymbol{p}_{vv} = 0,$$

$$L = \langle \boldsymbol{C}'' + v\boldsymbol{A}'', \lambda \boldsymbol{A}' + v\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A} \rangle / w,$$

$$M = \langle \boldsymbol{C}' \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle / w^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + u^2},$$

$$N = 0,$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\langle \boldsymbol{C}'' + v\boldsymbol{A}'', \lambda \boldsymbol{A}' + v\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{A} \rangle / w, - 2\dfrac{\lambda}{\lambda^2 + u^2}\langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{A} \rangle}{w^2},$$

$$K = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + v^2)^2}.$$

可展面的定义: 如果直纹面 M 满足条件

$$\langle \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}', \boldsymbol{C}' \rangle = 0,$$

即 $\lambda = 0$, 我们就称它为可展面.

我们知道切曲面$(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}')$是可展面.对可展面,我们有 $K=0$.这样我们知道了很多曲面的高斯曲率恒等于零.以后我们要研究中曲率恒等于零的曲面,即极小曲面.

习　　题

1. 已知曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ 的高斯曲率 K 和中曲率 H.设 $\lambda>0$,试求曲面

$$\lambda M=\{\lambda(x,y,z):(x,y,z)\in M\}$$

的高斯曲率 K_λ 和中曲率 H_λ.

2. 设 γ 为空间曲面,而且 $0<k\leq b$.令

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\gamma(u)+\varepsilon(\cos v\boldsymbol{N}(u)+\sin v\boldsymbol{B}(u)).$$

证明:

(1) $\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v=-\varepsilon(1-k\varepsilon\cos v)(\cos v\boldsymbol{N}(u)+\sin v\boldsymbol{B}(u))$.

(2) 对小的 ε, $\boldsymbol{P}(u,v)$是曲面.

(3) $\boldsymbol{e}=\cos v\boldsymbol{N}(u)+\sin v\boldsymbol{B}(u)$为曲面的法矢.

(4) $K=\dfrac{-k(u)\cos v}{\varepsilon(1-k\varepsilon\cos v)}$.

3. 验证曲面

$$\boldsymbol{P}(u,v)=(u,v,\log\cos v-\log\cos u),\ u,v\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

的中曲率是0,而高斯曲率为

$$K=\frac{-\sec^2 u\sec^2 v}{W^4},$$

这里

$$W=\sqrt{1+\tan^2 u+\tan^2 v}.$$

4. 对 $\varepsilon=1$ 或者 $\varepsilon=-1$,计算曲面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2}$$

的高斯曲率 K 和中曲率 H .

5 . 计算马鞍面

$$z = x^3 - 3xy^2$$

的高斯曲率 K 和中曲率 H .

6 . 给定光滑函数 $f \in C^2[0, +\infty)$, 证明回转面

$$z = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

的高斯曲率为

$$K(r) = \frac{f'(r) f''(r)}{r(1 + f'(r)^2)^2},$$

试计算它的中曲率 H .

7 . 计算曲面

$$z = \mathrm{e}^{-r^2/2}$$

的高斯曲率 K, 并给出 $K < 0$ 和 $K > 0$ 的区域 .

2.6　曲面上形状算子

设 M 为可定向的曲面, $\boldsymbol{N}$ 为曲面 M 上的单位法矢 .我们引入下面的定义 .

定义 1　对 $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{A} \in T_{\boldsymbol{p}} M$, 令

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{A}) = -\Delta_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{N},$$

称 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}$ 为 M 在 $\boldsymbol{p}$ 处的形状算子(见图 2 .7) .

利用导数的定义, 我们知道 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{A}) = -\mathrm{d}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$, 从而 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}$ 为线性算子 .因为 $|\boldsymbol{N}|^2 = 1$, $\langle \boldsymbol{N}, \Delta_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{N} \rangle = 0$, 所以 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}: T_{\boldsymbol{p}} M \rightarrow T_{\boldsymbol{p}} M$ 的线性算子 .回忆一下, $\Delta_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{N}$ 为梯度 $\Delta \boldsymbol{N}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 方向上的投影 .

例　设 $M = S^2$ 为标准的单位球面 .因为 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$, 于是 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{A}) = -\mathrm{d}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}$.

对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T_{\boldsymbol{p}} M$, 易见

$$\langle \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{B}) \rangle,$$

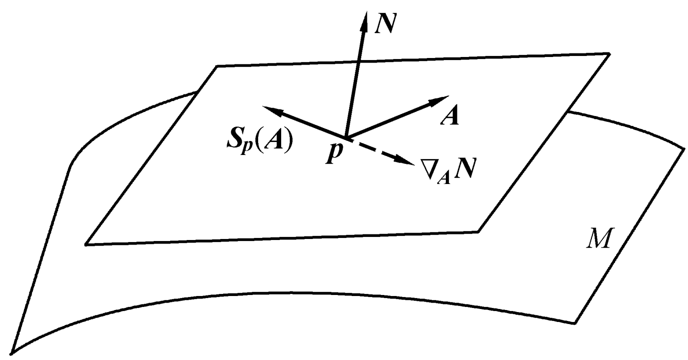

图 2.7

即 $\boldsymbol{S}_p$ 为对称线性算子.

对 $\boldsymbol{A} \in T_p M$ 为单位矢量,令 $k(\boldsymbol{A}) = \langle \boldsymbol{S}_p(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{A} \rangle$.称之为曲面在 $\boldsymbol{p}$ 处在方向 $\boldsymbol{A}$ 的曲率.特别地,对 $\boldsymbol{A}$ 为主特征方向,即

$$\boldsymbol{S}_p(\boldsymbol{A}) = k(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A},$$

称 $k(\boldsymbol{A})$为其主特征曲率.以后我们简记 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_p$.于是, $H(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\boldsymbol{S})$和 $K(\boldsymbol{p}) = \det \boldsymbol{S}$.

定理 1 对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T_p M$ 线性无关,我们有

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}) = K(\boldsymbol{p})\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

和

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}) = 2H(\boldsymbol{p})\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}.$$

其证明留作练习.

现在我们利用形状算子来计算曲面的曲率.设 $g: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ 为可微函数.空间曲面 M 由水平集 $g = 0$ 给出.令

$$\boldsymbol{Z} = \Delta g / 2,$$

于是

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Z} / |\boldsymbol{Z}|$$

为单位法矢,所以

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}) = -\Delta_A \boldsymbol{e} = -\Delta_A \boldsymbol{Z} / |\boldsymbol{Z}| + \boldsymbol{e}_A,$$

这里 $\boldsymbol{e}_A$ 为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A})$的法向部分(见图 2.8).

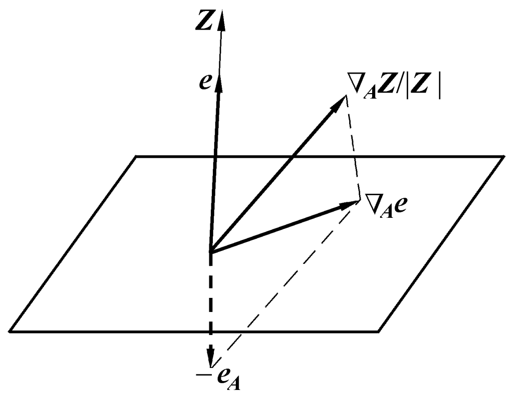

图　2.8

利用以上定理,易见:对 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in T_pM$ 使得 $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Z}$,

$$K=\boldsymbol{Z}\cdot\Delta_U\boldsymbol{Z}\times\Delta_V\boldsymbol{Z}/\ |\boldsymbol{Z}|^4$$

和

$$H=-\boldsymbol{Z}\cdot(\Delta_U\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{U}\times\Delta_V\boldsymbol{Z})/(2|\boldsymbol{Z}|^3).$$

现在我们利用这个公式来求椭球面的 Gauss 曲率.设

$$M:\ g=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

记$(a,b,c)=(a_1,a_2,a_3)$,**于是**

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{a_i^2}\boldsymbol{E}_i.$$

对 $\boldsymbol{U}=t_i\boldsymbol{E}_i\in T_pM$,**则**

$$\Delta_U\boldsymbol{Z}=\frac{t_i}{a_i^2}\boldsymbol{E}_i.$$

取 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in T_pM$ 使得 $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Z}$.令 $\boldsymbol{X}=x_i\boldsymbol{E}_i$,于是

$$\boldsymbol{Z}\cdot\Delta_U\boldsymbol{Z}\times\Delta_V\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Z}=1.$$

利用以上公式,所以有

$$K=1/\ a^2b^2c^2\ |\boldsymbol{Z}|^4.$$

习　　题

1. 设 $\gamma=\gamma(s)$为空间曲面 M 上的曲线, $\boldsymbol{e}$为空间曲面 M 的法矢在曲线 γ 上限制.证明

$$\boldsymbol{S}(\gamma')=-\boldsymbol{e}'.$$

2. 设有空间曲面 M: $z=f(x,y)$,这里设

$$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$

计算它在$(0,0,0)$处的形状算子.

3. 设有空间曲面

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right),$$

计算它在$(0,0,0)$处的形状算子.

4. 计算马鞍面

$$z=x^3-3xy^2$$

在$(0,0,0)$处的形状算子.

5. 对 $\varepsilon=1$ 或者 $\varepsilon=-1$, 计算曲面

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2},$$

在$(0,0,0)$处的形状算子.

6. 设 γ为空间曲面,而且 $0<k\leq b$, 令

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\gamma(u)+\varepsilon(\cos v\boldsymbol{N}(u)+\sin v\boldsymbol{B}(u)).$$

试利用形状算子来证明

$$K=\frac{-k(u)\cos v}{\varepsilon(1-k\varepsilon\cos v)}.$$

2.7　外微分形式

本节定义两个变元的外微分形式.设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面区域, $f: D\rightarrow\mathbb{R}$ 为光滑函数, $f=f(u^1,u^2)$.我们知道: $\mathrm{d}f=f_1\mathrm{d}u^1+$

$f_2\,\mathrm{d}u^2$，其中 $f_i = \frac{f}{u^i}$，为 f 在点 $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2)$ 处的全微分．在这里，我们把 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 看成新的变量．对 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2) \in \mathrm{R}^2$，回忆 f 在 $\boldsymbol{u}$ 点处沿 $\boldsymbol{A}$ 方向导数的定义

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{A}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{A}),$$

于是我们知道 $\mathrm{d}u^1(\boldsymbol{A}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^1 + tA_1)\bigg|_{t=0} = A_1$．同样，$\mathrm{d}u^2(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_2$．

定义 1　若 g_1, g_2 为 D 上的光滑函数，定义 $\ = g_1\,\mathrm{d}u^1 + g_2\,\mathrm{d}u^2$ 为 1-形式．定义 $(\boldsymbol{A}) = g_1A_1 + g_2A_2$．称 D 上的函数为 0-形式．

易见，在每个点处，1-形式为 R^2 的线性函数．

另外，对曲面 $V = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}\quad \mathrm{R}^3$，我们知道其面积就是

$$A(f) = {}_{D}\quad 1 + f_1^2 + f_2^2\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 .$$

常称 $\mathrm{d}D = \mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$ 为区域 D 上的面积元．若作参数变换 $(u^1, u^2) = \boldsymbol{F}(v^1, v^2) = (u^1(v^1, v^2), u^2(v^1, v^2))$，即 $(v^1, v^2) \in$ 瑜，$D = \boldsymbol{F}($瑜$)$，$\boldsymbol{F}$ 为微分同胚，则

$$\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = |\zeta|\,\mathrm{d}v^1\,\mathrm{d}v^2,\text{这里 } \zeta = \left|\frac{(u^1, u^2)}{(v^1, v^2)}\right| .$$

若在 瑜 上 $\zeta > 0$，则 $\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = \zeta\mathrm{d}v^1\,\mathrm{d}v^2$；而若在 瑜 上 $\zeta < 0$，则 $\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = -\zeta\mathrm{d}v^1\,\mathrm{d}v^2$．注意由于 $\boldsymbol{F}$ 为微分同胚，只可能有两种情况．这诱使我们引入下面的定义．

定义 2　外积 $\wedge$ 定义如下：

$$\mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}u^i = 0,\quad \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 = -\mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^1,$$

并且对 $\alpha = (a_i\,\mathrm{d}u^i)$，$\beta = (b_i\,\mathrm{d}u^i)$，令

$$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2,$$

于是 $\mathrm{d}u^1 \wedge (f\mathrm{d}u^2) = f\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2$．

定义 3 常称 $= f\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$ 为 2-形式.对 $V_1, V_2\in\mathrm{R}^2$,定义

$$(V_1, V_2) = f\det(\mathrm{d}u^i(V_j)).$$

我们现在指出同一形式可有多种表示,比如

$$f\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2 = -f\mathrm{d}u^2\wedge\mathrm{d}u^1 = \frac{1}{2}f(\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}u^2\wedge\mathrm{d}u^1).$$

0-形式,1-形式,2-形式等简称为微分形式.

不难看到,据上面外积之定义,区域 D 上的面积元正是 $\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$;不过其中约定了当 瑚上 $\zeta<0$ 时,$\mathrm{d}v^2\wedge\mathrm{d}v^1 = \mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2$ 为 瑚上的面积元.事实上,$\mathrm{d}u^i = \frac{u^i}{v^j}\mathrm{d}v^j$,所以

$$\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2 = \zeta\mathrm{d}v^1\wedge\mathrm{d}v^2 = -\zeta\mathrm{d}v^2\wedge\mathrm{d}v^1 = -\zeta\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2.$$

若在 瑚上 $\zeta>0$,称参数变换保持定向或 (u^1, u^2) 与 (v^1, v^2) 定向相同;否则称它们反向.

定义 4 对 1-形式中 $\phi = g_1\mathrm{d}u^1 + g_2\mathrm{d}u^2$,定义外微分 d 为

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}g_1\wedge\mathrm{d}u^1 + \mathrm{d}g_2\wedge\mathrm{d}u^2.$$

于是 $\mathrm{d}\phi = \left(-\frac{g_1}{u^2} + \frac{g_2}{u^1}\right)\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$;而对 2-形式 ϕ,定义 $\mathrm{d}\phi = 0$.

这样我们对平面区域上的微分形式定义了外微分运算.试证:$\mathrm{d}^2 = \mathrm{d}\ \mathrm{d} = 0$(习题).

在三维区域 Ω或 R^3 上,我们可以类似地定义 0-形式、1-形式、2-形式、3-形式、外积和外微分.比如,对光滑函数 $f, g, h: \mathrm{R}^3\to\mathrm{R}$,$X = (x, y, z)\in\mathrm{R}^3$,定义 $\omega = f(X)\mathrm{d}x + g(X)\mathrm{d}y + h(X)\mathrm{d}z$ 为 R^3 上 1-形式.其外微分为

$$\mathrm{d}\omega = (g_x - f_y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + (h_y - g_z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (f_z - h_x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$$

如果有光滑映射 $F: D\quad\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^3$,记 $F(u) = (x(u), y(u), z(u))$.定义 ω的拉回

$$F^*\omega = \sum_{i=1}^{2}(fx_i + gy_i + hz_i)\mathrm{d}u^i.$$

证明: $F^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}F^* \omega$(习题) .当然,我们可以定义 R^n 上的 k-形式 $(0 \leq k \leq n)$,外积和外微分 .

对 $\boldsymbol{p}: D \quad \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$,我们曾约定

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{p}_i \mathrm{d}u^i ,$$

其中 $\boldsymbol{p}_i: D \to \mathrm{R}^3$ 是向量 $\frac{x^j}{u^i}$.现在我们定义向量值 1-形式 ω 为

$$\omega = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{G}_i \mathrm{d}u^i ,$$

这里 $\boldsymbol{G}_i: D \to \mathrm{R}^3$ 为光滑函数,并对两个向量值 1-形式 ω_1 , ω_2 ,定义其外积为

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \boldsymbol{G}_i^1 \times \boldsymbol{G}_j^2 \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}u^j ,$$

其中 $\omega_m = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{G}_i^m \mathrm{d}u^i$, $m = 1, 2$.同样定义外微分于向量形式 .我们也可以定义矩阵值 1-形式和其外微分等 .

作为上述运算的应用,我们考虑曲面片 $\boldsymbol{p}: D \to \mathrm{R}^3$,即

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u^1, u^2), \ \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{0}, \ " (u^1, u^2) \in D .$$

定义 Gauss 映射(见图 2.9)

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2}{| \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2 |} .$$

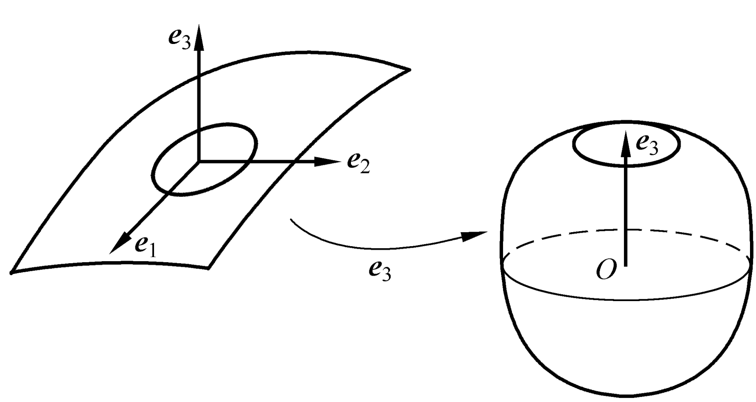

图　2.9

对 $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ 作 Schmidt 正交化可得单位正交标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, 且 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 构成 R^3 上的基底 .于是存在 1-形式 (w_{ij}) 有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} w_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad i = 1,2,3.$$

这样,我们就有 $w_{ij} = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle$.**据** $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ **知**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j = 0,$$

即有 $w_{ij} + w_{ji} = 0$; **也就是说** 1-**形式矩阵**(w_{ij})**反对称**.**这一公式下节将用到**.

定义 5 (1) 0-**形式积分的定义就是函数积分的定义**.

(2) **设** C: $u^i = u^i(t)$, $i = 1,2$, **为** D **中的曲线**(**由于** $w(t) \neq 0$, **所以曲线皆是可定向的**), **而** $\varphi = g_i \mathrm{d}u^i$ **为** D **上的** 1-**形式**, **定义积分**

$$\int_C \varphi = \int_a^b g_i(u(t)) \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

(3) **设** $A \subset D$ **为子区域**, **而** $\varphi = f\mathrm{d}u^1 \wedge f\mathrm{d}u^2$, **定义外微分形式积分为**

$$\int_A \varphi = \iint_A f\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2.$$

由数学分析中的 Green **公式知**(Stokes **定理**): **若** C **为封闭曲线**, $A = \mathrm{int}\,C$, **则对** D **上任何** 1-**形式** φ **有**

$$\int_A \mathrm{d}\varphi = \int_C \varphi.$$

请大家自己证明.

习　　题

1. **对**

$$\alpha = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y, \quad \beta = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z,$$

计算 $\alpha \wedge \beta$.

2. **令** $\theta = z\mathrm{d}y$, **计算** $\mathrm{d}\theta$ **和** $\alpha \wedge \beta \wedge \theta$.

3. **令** $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, **计算** $\alpha \wedge \omega$ **和** $\mathrm{d}\omega$.

4. 令 $\theta^i = \sum_{j=1}^{3} f_{ij}\,\mathrm{d}x^j$，证明

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = \det(f_{ij})\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

5. 对

$$\eta = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + h\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

计算 $\mathrm{d}\eta$.

6. 设 $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$，计算：

(1) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f)$，

(2) $\mathrm{d}((f - g)(\mathrm{d}f + \mathrm{d}g))$，

(3) $\mathrm{d}(f\mathrm{d}g \wedge g\mathrm{d}f)$，

(4) $\mathrm{d}(g\mathrm{d}f) + \mathrm{d}(f\mathrm{d}g)$，

(5) $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g$

的简单表达式.

2.8　活动标架法

设 $\boldsymbol{p}: D \to \mathbb{R}^3$ 为曲面片，设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 为上节定义出的活动标架，于是存在满秩矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\det A > 0$ 使得 $\boldsymbol{p}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\boldsymbol{e}_j$ 或 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{A}$，这里 $\boldsymbol{p}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u^i}$. 令 $\theta^i = a_{ij}\,\mathrm{d}u^j$，$i = 1, 2$，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{2} \theta^i \boldsymbol{e}_i$，从而曲面的第一基本形式为

$$g = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 = (\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1\\ \mathrm{d}u^2\end{pmatrix}.$$

这里利用了 $(\theta^1, \theta^2) = (\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即知 $\boldsymbol{G} = (g_{ij}) = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

对 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{2} \theta^i \boldsymbol{e}_i$ 外微分，并由 $\mathrm{d}^2 = 0$ 知

$$\mathrm{d}\theta^i \boldsymbol{e}_i - \theta^i \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}.$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{3}w_{ij}\boldsymbol{e}_j$, $w_{ij}=-w_{ji}$,所以

$$\left(\mathrm{d}\theta_i-\sum_{m=1}^{2}\theta_m\wedge w_{mi}\right)\boldsymbol{e}_i-\sum_{i=1}^{2}(\theta_i\wedge w_{i3})\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0},$$

于是

$$\mathrm{d}\theta_i=\sum_{j=1}^{2}\theta_j\wedge w_{ji},\quad i=1,2$$

称之为曲面的第一结构方程,以及

$$\sum_{i=1}^{2}\theta_i\wedge w_{i3}=0.$$

记 $w_{i3}=\sum_{k=1}^{2}h_{ik}\theta_k$,则得

$$\sum_{i,k=1}^{2}h_{ik}\theta_i\wedge\theta_k=0,$$

所以 $h_{ik}=h_{ki}$.从而曲面的第二基本形式为

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}&=-\mathrm{d}\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3=-(\theta_1\boldsymbol{e}_1+\theta_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(w_{31}\boldsymbol{e}_1+w_{32}\boldsymbol{e}_2)\\
&=\theta_1w_{13}+\theta_2w_{23}=\sum_{i,j=1}^{2}h_{ij}\theta_i\theta_j\\
&=(\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathscr{H}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u^1\\ \mathrm{d}u^2\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

这里 $\mathscr{H}=(h_{ij})$.回忆 $\mathrm{II}=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$,从而

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathscr{H}\boldsymbol{A}.$$

因此曲面的高斯曲率与中曲率分别为

$$K=\frac{\det\boldsymbol{B}}{\det\boldsymbol{G}}=\det(h_{ij}),\tag{1}$$

$$H=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathscr{H}=\frac{1}{2}(h_{11}+h_{22}).$$

再由 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}\,(i=1,2,3)$知

$$\boldsymbol{0} = \mathrm{d}\Big(\sum_{j=1}^{3} w_{ij}\,\boldsymbol{e}_j\Big)$$

$$= \mathrm{d}w_{ij}\,\boldsymbol{e}_j - w_{ij} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{e}_j$$

$$= (\mathrm{d}w_{ik} - w_{ij} \wedge w_{jk})\,\boldsymbol{e}_k\,,$$

所以

$$\mathrm{d}w_{ik} - w_{ij} \wedge w_{jk} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

直接计算知

$$\mathrm{d}w_{21} = (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\theta_1 \wedge \theta_2 = \det(h_{ij})\theta_1 \wedge \theta_2 = K\theta_1 \wedge \theta_2\,.$$

这就是曲面的 Gauss **方程或第二结构方程**.

对 $i = 1, 2$ **及** $k = 3$,**有**

$$0 = \mathrm{d}w_{i3} - \sum_{j=1}^{3} w_{ij} \wedge w_{j3} = \mathrm{d}(h_{ij}\theta_j) - h_{jk}w_{ij} \wedge \theta_k\,.$$

整理之有

$$(\mathrm{d}h_{ik} - h_{ij}w_{kj} - h_{jk}w_{ij}) \wedge \theta_k = 0\,.$$

定义 $h_{ik,m}$ **满足**

$$\mathrm{d}h_{ik} - h_{ij}w_{kj} - h_{jk}w_{ij} = \sum_{m=1}^{2} h_{ik,m}\theta_m\,, \tag{2}$$

则得

$$h_{ik,m}\theta_m \wedge \theta_k = 0\,.$$

据 $\theta_1 \wedge \theta_1 = 0 = \theta_2 \wedge \theta_2$, $\theta_1 \wedge \theta_2 = -\theta_2 \wedge \theta_1 \neq 0$,**知**

$$h_{i2,1} = h_{i1,2}, \quad i = 1, 2\,.$$

这就是曲面的 Mainardi-Codazzi **方程**,**简称** M-C **方程**.

Gauss **方程和** M-C **方程统称为曲面论的基本方程**,**其原因是下述定理**(**其证明略去**).

定理 1(**曲面论基本定理**)　**设** $D = (-a, a) \times (-b, b)$, $a, b > 0$, θ_1, θ_2 **为** D **上的** 1-**形式且** $\theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0$,**令** $g = \theta_1^2 + \theta_2^2$.**设**$(h_{ij})$**为** D **上的函数构成的矩阵且** $h_{ij} = h_{ji}$,**令** $\mathrm{II} = h_{ij}\theta_i\theta_j$,**则**$\mathbb{R}^3$ **中有以** g **和** II **分别为第一、二基本形式的曲面片的充要条件是由**(1)**式和**(2)**式分**

别定义出的函数 K 与 $h_{ik,m}$ 满足 Gauss 方程和 M-C 方程.

习　　题

1. 证明

$$g \equiv \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$$

的 Gauss 曲率 $K\equiv 1$.

2. 已知

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = \frac{v^2}{1+v^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v^2 .$$

问是否有曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式?

3. 已知

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 .$$

问是否有曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式?

4. 已知

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{1+u^2+v^2}$$

和

$$\mathrm{II} = \frac{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}{1+u^2+v^2} .$$

问是否有曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式?

5. 已知

$$\mathrm{I} = E(u,v)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$$

和

$$\mathrm{II} = f(u, v)\,\mathrm{I}\ .$$

设有曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式，试找 E, f 满足的条件.

2.9　曲面基本方程的求解

我们的问题是利用已知的两个基本形式来找曲面本身.利用曲面论基本定理来判断满足已知的两个基本形式的曲面不存在是方便的.虽然曲面论基本定理的结果很美，可用起来找存在曲面是不方便的.所以我们另求它法来用已知的两个基本形式找曲面本身.这样人们就必须求解偏微分方程组.

我们先来回忆一下曲面的两个基本形式和曲面本身是什么样的关系.设曲面有表示

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v) = \boldsymbol{X}(u, v)\ .$$

设它上的幺正标架是$\{\boldsymbol{e}_i\}$，其中 $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}$ 为单位法矢.每个 $\boldsymbol{e}_i$ 为行向量.设为$\{\omega^i\}$其对偶标架.记(ω_i^j)为它的联络形式.于是我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \omega^i \boldsymbol{e}_i$$

和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j\ .$$

这两组方程常称之为曲面的基本方程.记

$$\omega^i = a_i\,\mathrm{d}u + b_i\,\mathrm{d}v,$$

$$\omega_j^i = a_j^i\,\mathrm{d}u + b_j^i\,\mathrm{d}v,$$

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, 0),$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0),$$

$$\boldsymbol{A} = (a_j^i),$$

$$\boldsymbol{B} = (b_j^i),$$

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}},$$

这里 $\omega^3 = 0$.于是

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}.$$

这样以上基本方程可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a}\mathrm{d}u + \boldsymbol{b}\mathrm{d}v)\boldsymbol{Y},$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}\mathrm{d}u + \boldsymbol{B}\mathrm{d}v)\boldsymbol{Y}.$$

我们用偏微分方程组表示之,有

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{a},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial u}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial v}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}.$$

所以我们要先求 $\boldsymbol{Y}$ 再求出 $\boldsymbol{p}$,即得曲面 .注意我们有

$$\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i.$$

于是结构方程

$$\mathrm{d}\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k$$

就成了可积性条件 .一般地在结构方程满足的情况下,利用常微分方程的理论我们知道,这个偏微分方程组是可解的 .

下面我们用一个例子来说明这个方法的有效性 .

例 已知

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + (1 + u^2)\mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = \frac{-2}{1 + u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

我们来找曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式 .

令 $w = \sqrt{1 + u^2}$ 和 $\omega^1 = \mathrm{d}u, \omega^2 = w\mathrm{d}v$.这样我们有

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)$$

和

$$\boldsymbol{b} = (0, w, 0).$$

因为

$$\mathrm{d}\omega^1 = 0, \mathrm{d}\omega^2 = w'\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = (\log w)'\omega^1 \wedge \omega^2,$$

所以

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = -(\log w)'\omega^2 = -w'\mathrm{d}v.$$

因为 $\omega_i^3 = h_{ij}\omega^j$ 和

$$\mathrm{II} = h_{ij}\omega^i\omega^j = \frac{-2}{w^2}\omega^1\omega^2,$$

我们得

$$h_{11} = h_{22} = 0, h_{12} = h_{21} = \frac{-1}{w^2}.$$

因此

$$\omega_1^3 = \frac{-1}{w^2}\omega^2 = \frac{-1}{w}\mathrm{d}v$$

和

$$\omega_2^3 = \frac{-1}{w^2}\omega^1 = \frac{-1}{w^2}\mathrm{d}u.$$

这样

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w^2} \\ 0 & \frac{-1}{w^2} & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -w' & w^{-1} \\ w' & 0 & 0 \\ -w^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_1 \ \boldsymbol{Y}_2).$$

利用 $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{-1}=\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_1^{-1}+\boldsymbol{Y}_1(\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^{-1})\boldsymbol{Y}_1^{-1}$，设

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{Y}_1^{-1}=\boldsymbol{A}\mathrm{d}u=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{w^2}$$

和

$$\boldsymbol{Y}_1(\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^{-1})\boldsymbol{Y}_1^{-1}=\boldsymbol{B}\mathrm{d}v.$$

令 $u=\tan t$，则 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}u}{w^2}$. 而

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\sin t&\cos t\\-\sin t&0&0\\-\cos t&0&0\end{pmatrix}.$$

于是知

$$\boldsymbol{Y}_1=\exp\left(t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos t&\sin t\\0&-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&w^{-1}&u/w\\0&-u/w&w^{-1}\end{pmatrix}$$

和

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{Y}_2^{-1}=\boldsymbol{Y}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_1\mathrm{d}v=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\mathrm{d}v.$$

进而知

$$\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}\cos v&0&\sin v\\0&1&0\\-\sin v&0&\cos v\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 \boldsymbol{Y}_2 = \begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ -\frac{u}{w}\sin v & w^{-1} & \frac{u}{w}\cos v \\ -w^{-1}\sin v & -\frac{u}{w} & w^{-1}\cos v \end{pmatrix}.$$

由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} = \boldsymbol{aY} = (\cos v, 0, \sin v)$$

和

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = \boldsymbol{bY} = (-u\sin v, 1, u\cos v).$$

所以经过简单运算,我们有

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (u\cos v, v, u\sin v).$$

这里给出了具体的运算过程 .

希望大家用这个例子来体会我们的方法 .

习　　题

1 . 已知

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}v^2.$$

找曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式 .

2 . 已知

$$\mathrm{I} = v^2\mathrm{d}u^2 + (1 + v^2)\mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = \frac{v^2}{1 + v^2}\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{1 + v^2}\mathrm{d}v^2.$$

找曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式 .

3 . 已知

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \cos^2 u\mathrm{d}v^2$$

和

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}u^2 + \cos^2 u\mathrm{d}v^2 .$$

找曲面以 I 和 II 为第一和第二基本形式 .

2 .10 外微分的进一步应用

记 $M_{2\times 2}$ 为实 2×2 矩阵空间 .定义

$$SL(2,\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{X} = (a_j^i) \in M_{2\times 2} : \det\boldsymbol{X} = 1\} .$$

定义

$$\omega = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1} . \tag{1}$$

称之为 Maurer-Cartan 形式 .记为 $\omega = (\omega_j^i)$.

利用 $\det\boldsymbol{X} = 1$,我们可以知道

$$a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = 1$$

和

$$\boldsymbol{X}^{-1} = (b_j^i),$$

这里

$$b_1^1 = a_2^2 , b_2^2 = a_1^1 , b_2^1 = - a_2^1 , b_1^2 = - a_1^2 .$$

于是

$$\omega_j^i = \mathrm{d}a_k^i b_j^k .$$

所以直接验证可得

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0 .$$

对(1)式外微分之,得

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega, \tag{2}$$

即

$$\mathrm{d}\Omega_2^1 = \omega_2^2 \wedge \omega_2^1 ,$$

$$\mathrm{d}\Omega_1^2 = 2\omega_1^1 \wedge \omega_1^2 ,$$

$$\mathrm{d}\Omega_2^1 = 2\omega_2^1 \wedge \omega_1^1 .$$

设 $\boldsymbol{F}: D \quad \mathrm{R}^2 \to SL(2, \mathrm{R})$.把 $F^* \omega$ 仍记 ω .记

$$\Omega_1^1 = p\mathrm{d}x + A\mathrm{d}t,$$

$$\Omega_1^2 = q\mathrm{d}x + B\mathrm{d}t,$$

$$\Omega_2^1 = r\mathrm{d}x + C\mathrm{d}t .$$

这样(2)式可改写为

$$\begin{aligned} -p_t + A_x - qC + rB &= 0, \\ -q_t + B_x - 2pB + 2qA &= 0, \\ -r_t + C_x - 2rA + 2pC &= 0 . \end{aligned} \qquad (2)'$$

取 $p = r = 1, q = u(x, t)$,我们得

$$A = C + C_x / 2$$

和

$$B = uC - C_x - C_{xx} / 2 .$$

把这两式代入(2)′的中间式得

$$u_t = u_x C + 2uC_x + 2C_x - \frac{1}{2} C_{xxx} .$$

取 $C = 1 - \frac{1}{2} u$ 得

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} uu_x .$$

这就是著名的 KdV 方程 .

　　如果我们令

$$q = r = v(x, t), p = 1,$$

我们可以得到 MKdV 方程

$$v_t = \frac{1}{4} v_{xxx} - \frac{3}{2} v^2 v_x .$$

这里我们就不推导它了(留作习题) .易见, $-v$ 也满足 MKdV 方程 .也就是说 MKdV 方程的解是成对出现的 .

　　已知 v 满足 MKdV 方程 .令

$$U = v_x + v^2,$$

则直接可以计算知

$$U_t = \frac{1}{4}U_{xxx} - \frac{3}{2}UU_x,$$

即它满足 KdV 方程.

令

$$\hat{U} = -v_x + (v)^2,$$

则 $\hat{U}$ 也满足 KdV 方程.我们把映射 $U \to \hat{U}$ 称为 Backlund 变换.

反过来,已知 u 满足 KdV 方程.解方程

$$v_x + v^2 = u,$$

得 v.令

$$\hat{u} = -v_x + (v)^2,$$

则得 KdV 方程的新解 $\hat{u}$.

我们指出,Backlund 变换方法在可积系统理论中是十分重要的.

2.11 极小曲面

这一节我们从另一个观点来看极小曲面方程和它的性质.设 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为光滑函数,定义它在$\mathbb{R}^3$ 中的图像为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(f) = \{(x, y, f(x, y)): (x, y) \in D\}.$$

设 V 为极小曲面.V 的面积为

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_D |(1,0,f_x) \times (0,1,f_y)| \\ &= \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

即

$$A(f) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V 的单位法矢为

$$\boldsymbol{N}=(-f_x,-f_y,1)/\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}.$$

设 $\xi: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为光滑函数而且 $\xi(\partial D)=0$.于是对 $t\in\mathbb{R}$,有

$$A(t)=A(f+t\xi)=\int_D\sqrt{1+|\nabla(f+t\xi)|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$A'(0)=\int_D\frac{\langle\nabla f,\nabla\xi\rangle}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 V 的中曲率为

$$H(f)=\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0,$$

这样我们就有

$$\begin{aligned}A'(0)&=-\int_D\xi\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\int_D H(f)\xi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0.\end{aligned}$$

就是说对任意的 ξ,我们都有

$$A'(0)=0,$$

即面积泛函的一阶变分为零.

我们现在要证明在 $D\times\mathbb{R}$ 中,在和 V 的边界一样的曲面中,V 的面积是最小的.定义 $D\times\mathbb{R}$ 上的 2-形式 ω:

$$\omega(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\langle\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y},\boldsymbol{N}\rangle.$$

记

$$\boldsymbol{e}_x=(1,0,0),\quad\boldsymbol{e}_y=(0,1,0),\quad\boldsymbol{e}_z=(0,0,1).$$

直接计算知

$$\omega(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)=\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

$$\omega(\ _y,\ \ _z) = \frac{-f_x}{1+|\Delta f|^2},$$

和

$$\omega(\ _x,\ \ _z) = \frac{f_y}{1+|\Delta f|^2}.$$

因此

$$\omega = \frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - f_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - f_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{1+|\Delta f|^2}.$$

从而

$$\mathrm{d}\omega = -\operatorname{div}\frac{\Delta f}{1+|\Delta f|^2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0.$$

易见,对(x,y,z)处的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$: $|\boldsymbol{X}| = |\boldsymbol{Y}| = 1$, $\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle = 0$ 有

$$|\omega(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})| \leq 1.$$

而且等号成立的充要条件是

$$z = f(x,y);\ \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in T_{(x,y,z)}V.$$

其证明留为作业.

于是对 $\Sigma\ \ D\times\mathrm{R}$ 满足 $\Sigma=\ \ V$, 我们利用 Stokes 定理得

$$A(f) = \int_V \omega = \int_\Sigma \omega \leq Area(\Sigma).$$

Bernstein 的有名定理是说, R^2 上的极小曲面方程 $H(f)=0$ 只以仿射线性函数为其解!

习 题

1. 验证 V: $z = \cosh^{-1}\ \ x^2 + y^2$ 为极小曲面.
2. 验证 V: $\mathrm{e}^z\cos x = \cos y$ 为极小曲面并计算它的高斯曲率 K.
3. 证明极小曲面方程 $H(f) = 0$ 满足极值原理.
4. 证明在极小曲面上总有高斯曲率 K 总满足 $K\leq 0$.

第 3 章　二维黎曼几何

伟大的数学家黎曼在年轻时提倡并研究了只与第一基本形式有关的几何，从此开创了黎曼几何、黎曼几何的重要性在于它把欧氏几何、双曲几何统一在一起了 .

3 .1　黎曼度量与结构方程

在上一章中我们研究了空间中的曲面，其第一基本形式来自于空间度量 .一般地，给定 $uv(u^1 u^2)$平面 D 上一个第一基本形式

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2, \tag{1}$$

即

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

为对称正定矩阵 .一般地来看，我们并不知道它是否是某空间曲面的黎曼度量 .事实上，这里有一例子：设

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} .$$

取

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2))^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) .$$

此即 Poincaré 度量；一个深刻的结果是，$(D, \mathrm{d}s^2)$不能为空间曲面的黎曼度量 .在此声明，我们所说的空间曲面是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 .以下我们简称$(D, \mathrm{d}s^2)$为黎曼 2 -流形 .

在(1)式中令

$$\theta^1 = a_1^1\mathrm{d}u + a_2^1\mathrm{d}v, \quad \theta^2 = a_1^2\mathrm{d}u + a_2^2\mathrm{d}v, \tag{2}$$

其中

$$a_1^1 = E,\ a_1^2 = 0,\ a_2^1 = \frac{F}{E},\ a_2^2 = \frac{EG - F^2}{E},$$

则有 $ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$; 当然具有这种性质的 θ^1,θ^2 不惟一，作为习题请大家找与(2)式不同的 θ^1,θ^2.由于 $d\theta^i$ 为2-形式，所以存在惟一的函数 b_i，使得

$$d\theta^1 = -b_1\theta^1\wedge\theta^2,\ d\theta^2 = -b_2\theta^1\wedge\theta^2,$$

定义 $\omega_2^1 = b_1\theta^1 + b_2\theta^2$, $\omega_1^2 = -\omega_2^1$, $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$，于是有

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^{2}\theta^j\wedge\omega_j^i,\quad i = 1,2. \tag{3}$$

同样，据 $d\omega_2^1$ 为2-形式，存在惟一的函数 K 使得

$$d\omega_2^1 = K\theta^1\wedge\theta^2. \tag{4}$$

我们称(3)式和(4)式为黎曼2-流形(D, ds^2)的结构方程.而称$\{\theta^1,\theta^2\}$为它的余标架场，$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}$ 为 Levi-Civita 联络.

现在我们来看不同标架下，函数 K 的不变性.若$\{\tilde\theta^1,\tilde\theta^2\}$为另一个余标架场，即 $ds^2 = (\tilde\theta^1)^2 + (\tilde\theta^2)^2$.令 $\theta = \begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix}$，$\tilde\theta = \begin{pmatrix}\tilde\theta^1\\ \tilde\theta^2\end{pmatrix}$，则存在 $S\in O(2)$使得

$$\tilde\theta = S\theta. \tag{5}$$

外微分(5)式有

$$d\tilde\theta = dS\wedge\theta + S d\theta.$$

但 $d\theta = -\omega\wedge\theta$，所以

$$d\tilde\theta = (dS\cdot S^{-1} - S\omega S^{-1})\wedge\tilde\theta.$$

若记 $\tilde\omega$ 为对应于 $\tilde\theta$ 之 Levi-Civita 联络，则有

$$\tilde\omega = -dS\cdot S^{-1} + S\omega S^{-1},$$

即

$$\tilde\omega S = -dS + S\omega.$$

外微分 $d(\widetilde{\omega}S)=d(-dS+S\omega)$ 的左边为

$$d\widetilde{\omega}\cdot S-\widetilde{\omega}\wedge dS=d\widetilde{\omega}\cdot S+dS\cdot S^{-1}\wedge dS-S\omega S^{-1}\wedge dS,$$

而右边为

$$dS\wedge\omega+S\cdot d\omega.$$

两边同乘 S^{-1} 得

$$\begin{aligned}&d\widetilde{\omega}+dS\cdot S^{-1}\wedge dS\cdot S^{-1}-S\omega S^{-1}\wedge dS\cdot S^{-1}\\&=dS\cdot S^{-1}\wedge S\cdot\omega\cdot S^{-1}+Sd\omega S^{-1}.\end{aligned}\tag{6}$$

由 $S^{T}S=I,\ \omega=\begin{pmatrix}0&\omega^1\\ \omega^2&0\end{pmatrix}$ 知

$$(dS\cdot S^{-1})^{T}=S^{-1T}dS^{T}=S\cdot d(S^{-1})=-dS\cdot S^{-1},$$

且 $S\omega S^{-1}$ 为反对称矩阵,所以可记

$$dS\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix},\ S\omega S^{-1}=\begin{pmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{pmatrix},$$

其中 α 和 β 为 1-形式.直接计算知

$$\begin{aligned}dS\cdot S^{-1}\wedge dS\cdot S^{-1}&=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\alpha\wedge\alpha&0\\0&-\alpha\wedge\alpha\end{pmatrix}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&S\omega S^{-1}\wedge dS\cdot S^{-1}+dS\cdot S^{-1}\wedge S\omega S^{-1}\\&=\begin{pmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\beta\wedge\alpha&0\\0&-\beta\wedge\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\alpha\wedge\beta&0\\0&-\alpha\wedge\beta\end{pmatrix}\\&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因此(6)式变为 $d\widetilde{\omega}=Sd\omega S^{-1}$,即有

$$\begin{pmatrix}0&\widetilde{K}\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2\\-\widetilde{K}\widetilde{\omega}^1\wedge\widetilde{\omega}^2&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K\theta^1 \wedge \theta^2 \\ -K\theta^1 \wedge \theta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 \\ S_2^1 & S_2^2 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 \\ S_1^2 & S_2^2 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{S} = S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1 = 1$.于是有

$$\tilde{K}\tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 = K\theta^1 \wedge \theta^2 .$$

但是$\tilde{\theta}^1 \wedge \tilde{\theta}^2 = (S_1^1 S_2^2 - S_2^1 S_1^2)\theta^1 \wedge \theta^2 = \det \boldsymbol{S}\theta^1 \wedge \theta^2$,从而 $\tilde{K} = K$,即 K 与余标架场之特定选择无关,称此函数 K 为高斯曲率.高斯认为这个结论很好,称之为绝好定理.

下面我们举例计算高斯曲率.

设 $\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$.令 $\theta^1 = \sqrt{E}\mathrm{d}u$, $\theta^2 = \sqrt{G}\mathrm{d}v$,则

$$\mathrm{d}\theta^1 = -(\sqrt{E})_v \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = -\frac{1}{\sqrt{GE}}(\sqrt{E})_v \theta^1 \wedge \theta^2,$$

$$\mathrm{d}\theta^2 = -(\sqrt{G})_u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{GE}}(\sqrt{G})_u \theta^1 \wedge \theta^2,$$

所以

$$\omega_2^1 = \frac{1}{\sqrt{GE}}\left((\sqrt{E})_v \theta^1 - (\sqrt{G})_u \theta^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{E})_v \mathrm{d}u - \frac{1}{\sqrt{E}}(\sqrt{G})_u \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\omega_2^1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}(\sqrt{G})_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{E})_v\right)\right)\theta^1 \wedge \theta^2,$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}(\sqrt{G})_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{E})_v\right)\right).$$

当 $E = G$ 和 $F = 0$ 时,称(u, v)为 D 上的等温坐标系(一个深刻的结果是:在小邻域上,这样的等温坐标系总是存在的.因此,以后我们总假定在 D 上此坐标系存在),此时

$$K = -\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log \sqrt{E} .$$

不难计算,对 Poincaré 度量, $K\equiv -1$.

根据以前的经验,我们知道,在 D 中的点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间上可用 $\mathrm{d}s^2$ 来定义其上的内积 .但是点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间怎样定义呢 ? 很简单,就是 $\mathbb{R}^2$.设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 为余标架场 $\{\theta^1,\theta^2\}$ 之对偶,称 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 为标架场,即 $\theta^i(\boldsymbol{e}_j)=\delta^i_j$, $i, j=1,2$.则在黎曼 2-流形 $(D,\mathrm{d}s^2)$ 上,点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间为 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{x})\}$.对 $\boldsymbol{X}=\sum\xi^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{Y}=\sum\eta^i\boldsymbol{e}_i$,定义内积为

$$\mathrm{d}s^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\equiv\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle=\sum\xi^i\eta^i .$$

于是 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 为正交标架场 .若对另一余标架场 $\{\bar\theta^1,\bar\theta^2\}$ 设其对偶为 $\{\bar{\boldsymbol{e}}_1,\bar{\boldsymbol{e}}_2\}$,由 $\bar\theta=S\theta$ 知 $\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1\\ \bar{\boldsymbol{e}}_2\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$,从而内积的定义与 $\{\theta^1,\theta^2\}$ 的特定选择无关 .自然,切空间也与 $\{\theta^1,\theta^2\}$ 的特定选择无关 .

习　　题

1 . 对 Poincaré 度量求出 ω_2^1 .

2 . 设

$$\mathrm{d}s^2=(f'(u)^2+g'(u)^2)(\mathrm{d}u)^2+f(u)^2(\mathrm{d}v)^2 ,$$

其中 $f>0$, $f'^2+g'^2>0$,求其等温坐标系,即求

$$\xi=\xi(u,v),\ \eta=\eta(u,v),$$

使得

$$\mathrm{d}s^2=\lambda(\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2) .$$

3 . 对黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2=(U(u)+V(v))(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2),$$

求其结构方程和高斯曲率 .

4 . 对黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}u^2-4v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+4u\,\mathrm{d}v^2}{4(u-v^2)},\ u>v^2,$$

求其结构方程和高斯曲率.

3.2　矢量场与其协变导数

我们来看一下如何更好的理解$(D, \mathrm{d}s^2)$中的切矢量.设 D 为 uv 平面上一光滑区域,设 $f: D\to \mathbb{R}$ 光滑.设 $\boldsymbol{X}$ 为$\mathbb{R}^2$中以(a, b)为始点,$(a+\xi, b+\eta)$为终点的矢量(见图 3.1).

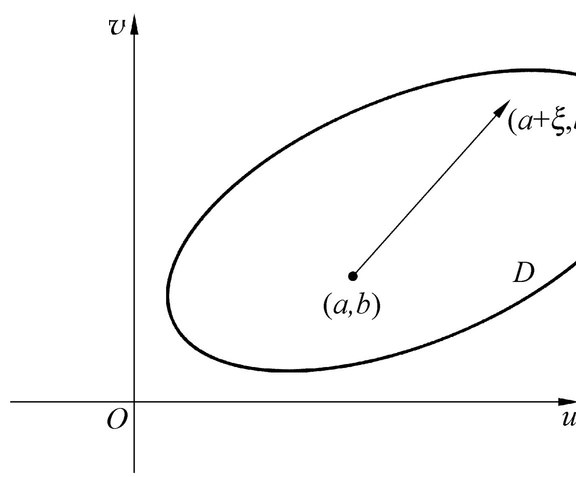

图　3.1

过去我们定义过 f 在(a, b)点处沿 $\boldsymbol{X}$ 的方向导数为

$$\boldsymbol{X}\cdot f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+t\xi, b+t\eta)\Big|_{t=0} = \xi\frac{\partial f}{\partial u} + \eta\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(a,b)}.$$

据 f 的任意性,我们定义 $\boldsymbol{X} = \xi\frac{\partial}{\partial u} + \eta\frac{\partial}{\partial v}$为$(a, b)$点的切矢.若 $\omega = f_1\,\mathrm{d}u + f_2\,\mathrm{d}v$ 为 D 上的 1-形式,定义

$$\omega(\boldsymbol{X}) = f_1\xi + f_2\eta \equiv \langle\omega, \boldsymbol{X}\rangle$$

这与 $\boldsymbol{X}f = \langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X}\rangle = \mathrm{d}f(\boldsymbol{X})$是一致的.

定义 1　称 $\boldsymbol{X}$ 为 D 上的切矢场(或向量场)是指在 D 上

$$\boldsymbol{X} = f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v},$$

其中 f 和 g 为 D 上的光滑函数.

换句话说, D 上的向量场正是满足 Leibniz 法则的从 $C^\infty(D)$ 到 $C^\infty(D)$ 中的线性映射.

设 $F: \tilde{D} \to D$ 为坐标变换: $(t^1, t^2) \to (u^1, u^2) = (u, v)$, 从 $\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial t^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial t^j}$ 和 $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{2} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, 知

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i,j=1}^{2} X^i \frac{\partial t^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial t^j}$$

而对 $\omega = \sum_{i=1}^{2} f_i \mathrm{d}u^i$, 从 $\mathrm{d}u^i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u^i}{\partial t^j} \mathrm{d}t^j$, 知

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{2} f_i \frac{\partial u^i}{\partial t^j} \mathrm{d}t^j .$$

因此据 $\omega(\boldsymbol{X}) = f_i X^j = f_k \frac{\partial u^k}{\partial t^j} X^i \frac{\partial t^j}{\partial u^i}$ 知 $\omega(\boldsymbol{X})$ 之定义与坐标系的变化无关.

定义 2 设 $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{2} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{2} Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ 为 D 上的两个向量场, 定义一个新向量场 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ 使得对任意 $f \in C^\infty(D)$ 有

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] f = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y} f) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X} f) .$$

在文献中, 常称 $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ 为 Poisson 或 Lie 括号.

现在我们在黎曼 2-流形 $(D, \mathrm{d}s^2)$ 上定义向量场的协变导数. 设 $\mathrm{d}s^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 为 $\{\theta^1, \theta^2\}$ 之对偶.

定义 3 若 $\boldsymbol{X} = \xi^1 \boldsymbol{e}_1 + \xi^2 \boldsymbol{e}_2$ 为曲线 $(u(t), v(t))$ 上的向量场, 我们定义 X 沿此曲线的协变导数为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{2} \xi^j \frac{\omega_j^i}{\mathrm{d}t} \right) \boldsymbol{e}_i ,$$

其中 ω_j^i 为 $\mathrm{d}s^2$ 的 Levi-Civita 联络.

若 $\frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{d}t} \equiv \mathbf{0}$, 就称 $\boldsymbol{X}$ 沿曲线 $(u(t), v(t))$ 平行; 当 $(u(t), v(t))$ 为

连结始点 Q 到终点 P 的曲线时，称 $\boldsymbol{X}(P)$ 为 $\boldsymbol{X}(Q)$ 沿此曲线的平移.

需要说明的是 $\frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{d}t}$ 与 $\{\theta^1, \theta^2\}$ 的特定选择无关. 记

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2),$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 \\ \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix},$$

则

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{e} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{\mathrm{d}t}\xi \right).$$

若 $\tilde{\theta} = \boldsymbol{S}\theta$, 则

$$\tilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{S}^{-1}, \quad \tilde{\xi} = \boldsymbol{S}\xi, \quad \tilde{\omega} = \boldsymbol{S}\omega\boldsymbol{S}^{-1} - \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^{-1}.$$

由直接计算知

$$\tilde{\boldsymbol{e}}\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\xi}}{\mathrm{d}t} + \frac{\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}\tilde{\xi} \right) = \boldsymbol{e}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{\mathrm{d}t}\xi \right).$$

另一个重要的性质是：若 $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{2} \eta^i \boldsymbol{e}_i$ 为曲线 $\boldsymbol{p}(t)$ 上的向量场，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{Y} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{X}, \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} \right\rangle$. 事实上，由定义 $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \eta^i$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\eta^i + \xi^i \frac{\mathrm{d}\eta^i}{\mathrm{d}t}.$$

由于 ω 为反对称矩阵，$\omega_j^k \xi^k \eta^j = -\omega_k^j \xi^k \eta^j$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \eta^i \left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega_j^i}{\mathrm{d}t}\xi^j \right) + \xi^i \left(\frac{\mathrm{d}\eta^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega_j^i}{\mathrm{d}t}\eta^j \right)$$

$$= \left\langle \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{Y} \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{X}, \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} \right\rangle.$$

由此知,若$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\equiv\boldsymbol{0}$, $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}\equiv\boldsymbol{0}$,则$\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle$沿曲线$\boldsymbol{p}(t)$保持不变.

例　在球面

$$x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = a\sin u$$

上(除去两极$u=\pm\frac{\pi}{2}$),可决定$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$如下:首先固定u改变v得$\boldsymbol{e}_1=(-\sin v,\cos v,0)$;而后固定$v$改变$u$得$\boldsymbol{e}_2=(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v,\cos u)$,令$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$,即有

$$\boldsymbol{e}_3 = (\cos v\cos u,\sin v\cos u,\sin u).$$

直接计算知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1 &= (\sin u)\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_2 - (\cos u)\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_3,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_2 &= -(\sin u)\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{d}u\boldsymbol{e}_3,\\ \mathrm{d}\boldsymbol{e}_3 &= (\cos u)\mathrm{d}v\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}u\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

从此立即知$\omega_1^2=-(\sin u)\mathrm{d}v$.令$\lambda=\sin u$,并固定$u$.于是沿纬线的平行矢量场$\boldsymbol{X}=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2$应满足方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}v} - \lambda\xi^2 &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}v} + \lambda\xi^1 &= 0.\end{aligned}$$

容易知道此方程组的通解为

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \alpha\sin(\lambda v) - \beta\cos(\lambda v),\\ \xi^2 &= \beta\sin(\lambda v) + \alpha\cos(\lambda v).\end{aligned}\tag{1}$$

由此我们可以了解沿纬线的一切平移.若在$v=0$处, $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{e}_1$(即在(1)式中$\alpha=0$, $\beta=-1$)沿纬线平移到$v=\pi$处得$\cos(\lambda\pi)\boldsymbol{e}_1-\sin(\lambda\pi)\boldsymbol{e}_2$;若$\boldsymbol{e}_1$沿纬线负方向平移至$v=-\pi$处就得$\cos(\lambda\pi)\boldsymbol{e}_1+\sin(\lambda\pi)\boldsymbol{e}_2$.由此可见在同一始点和终点沿不同方向平移所得结果可以不同.是与欧氏平面不同之处,是由于曲面弯曲的原因.

最后我们来看局部坐标下如何来引入协变导数的概念.

定义 4　对 $ds^2=\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,du^i\,du^j$，令 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$，取

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\ ,$$

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{h=1}^{2} g^{kh}\,\Gamma_{ij,h}$$

和

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial u^k}\ .$$

这里左边表示 u^i 变化而其他分量固定时向量场 $\frac{\partial}{\partial u^j}$ 沿坐标曲线 u^i 的协变导数.同空间曲面一样，我们称 Γ_{ij}^{k} 为 Christoffel 符号.这样对曲线 $\boldsymbol{p}(t)=(u^1(t),u^2(t))$，向量场 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{2}X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$，直接计算得

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=1}^{2}\frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i},\tag{2}$$

$$D_{\boldsymbol{p}(t)}\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{2}\ D_{\boldsymbol{p}(t)}X^i\frac{\partial}{\partial u^i}+X^i D_{\boldsymbol{p}(t)}\frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\ \frac{dX^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}+X^i\sum_{j=1}^{2}\frac{du^j}{dt}D_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\ \frac{dX^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{jk}^{i}X^j\frac{du^k}{dt}\ \frac{\partial}{\partial u^i}\ .$$

于是平行向量场方程为

$$\frac{dX^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{jk}^{i}X^j\frac{du^k}{dt}=0,\quad i=1,2\ .$$

另外，我们可以定义向量场 $\boldsymbol{X}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 处沿切矢 $\boldsymbol{T}$ 的协变导数 $\Delta_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$.设 $\boldsymbol{p}(t)$为曲线使得 $\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'(0)=\boldsymbol{T}$，定义

$$\Delta_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}=\frac{D\boldsymbol{X}}{dt}\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{2}\ \frac{d\xi^i}{dt}+\sum_{j=1}^{2}\xi^j\frac{\omega_j^i}{dt}\ \Big|_{t=0}\boldsymbol{e}_i\Big|_{\boldsymbol{p}},$$

其中 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{2}\xi^{i}\boldsymbol{e}_{i}$，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$为标架场，$\omega_i^j$ 为对应的 Levi-Civita 联络．若写 $\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{2}X^{i}\frac{\partial}{\partial u^{i}}$，则由(2)式计算得

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\mathrm{d}X^{i}}{\mathrm{d}t}+\sum_{j,k=1}^{2}\Gamma_{jk}^{i}X^{j}T^{k}\right)\frac{\partial}{\partial u^{i}}\bigg|_{p},$$

其中 $T^{k}=\frac{\mathrm{d}u^{k}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$，即 $\boldsymbol{T}=\sum_{k=1}^{2}T^{k}\frac{\partial}{\partial u^{k}}\Big|_{p}$．

习　　题

1．试用 X^i，Y^i 表示出$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$；

2．证明 Jacobi 恒等式

$$[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}],\boldsymbol{X}]+[[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}],\boldsymbol{Y}]=0．$$

3．在$\mathbb{R}_{+}^{2}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^{2}:\ v>0\}$上取 $\mathrm{d}s^{2}=\frac{1}{v^{2}}(\mathrm{d}u^{2}+\mathrm{d}v^{2})$，$\boldsymbol{e}_1=v\frac{\partial}{\partial u}$，$\boldsymbol{e}_2=v\frac{\partial}{\partial v}$，试沿直线 $u=t$，$v=\mathrm{const}$ 确定平行矢量场．

这两种引入协变导数的方法虽然不同，但几何上的含义是一样的．我们在这里就不细说了．

3.3　测　地　线

接着上节末讨论．设 $\mathrm{d}s^{2}=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}\,\mathrm{d}u^{i}\mathrm{d}u^{j}$．

定义 1　称曲线 $\boldsymbol{p}(t)=(u^{1}(t),u^{2}(t))$为$(D,\mathrm{d}s^{2})$上的测地线是指 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{p}'(t)}\boldsymbol{p}'(t)=\boldsymbol{0}$，$\forall\, t\in I$，即 $\boldsymbol{p}'(t)$向量场在曲线 $\boldsymbol{p}(t)$上是平行的．

据 $\boldsymbol{p}'(t)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}u^{i}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u^{i}}$和上节的讨论，我们可得测地线方程为

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk} \frac{du^k}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0, \quad i = 1,2 .$$

利用 ODE 基本定理我们得到下面的定理 .

定理 1 给定(D, ds^2)上的一个点和该点处的一外切矢,则存在惟一的一个测地线过该点且以该切矢为速度 .

设 $ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$, $\{e_1, e_2\}$ 为 $\{\theta^1, \theta^2\}$ 之对偶 . 如 $p'(t) = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$, 则测地线方程为

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \sum_{j=1}^{2} \xi^j \frac{w^i_j}{dt} = 0, \quad i = 1,2 .$$

例 在$\mathrm{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : y > 0\}$上, $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$, 令

$\theta^1 = \frac{dx}{y}$, $\theta^2 = \frac{dy}{y}$, 由 $d\theta^1 = \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{dx}{y} \wedge \theta^2$, $d\theta^2 = 0$,

知$\omega^1_2 = -\frac{dx}{y} = -\omega^2_1$.

设 $p(t) = (x(t), y(t))$为其测地线, 则由 $p = x\frac{}{x} + y\frac{}{y}$和

$e_1 = y\frac{}{x}$, $e_2 = y\frac{}{y}$, 得

$$p = \frac{x}{y} e_1 + \frac{y}{y} e_2 .$$

于是测地线方程为

$$\left(\frac{x}{y}\right)' - \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{y} = 0,$$

$$\left(\frac{y}{y}\right)' + \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = 0 .$$

令 $A = x/y$, $B = y/y$, 则有

$$A' - AB = 0,$$

$$B' + A^2 = 0 .$$

求解之得

$$\frac{A'}{A} = B = \frac{y'}{y},$$

即知 $A = cy$, **其中** c **为常数** .

设 $t = s$ **为自然参数**, **即** $A^2 + B^2 = 1$, **则有**

$$c^2 y^2 + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 1 .$$

所以

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{1 - c^2 y^2}} .$$

当 $c \neq 0$ **时**, **令** $y = \frac{1}{c}\sin\lambda$, **则有** $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sin\lambda}$, **即有** $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c}\cos\lambda\sin\lambda$,

所以

$$B = \frac{y'}{y} = \cos\lambda,$$

$$A = \frac{x'}{y} = \sin\lambda .$$

因此

$$x = \int x'\mathrm{d}s = \int x'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{c}\int \sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{c}\cos\lambda + a,$$

这里 a **为某常数** .**消去** λ **得**

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} .$$

当 $c \equiv 0$ **时**, **则** $A = 0$, **即** $x \equiv a$, a **为常数** .

由上推理知, $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{d}s^2)$ **上的测地线是中心在** x **轴上的半圆和与** x **轴垂直的直线** .**常称** $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{d}s^2)$ **为** Poincaré **上半平面** .

现在我们来看回转面

$$M: \boldsymbol{p} = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

上的测地线 .**我们知道**

$$E = f^2, F = 0, G = (f')^2 + (g')^2 .$$

于是直接计算得

$$\Gamma_{11}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{ff'}{f^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2},$$

$$\Gamma_{12}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} .$$

设 $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$为测地线.回忆它的测地线方程为

$$u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0,$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0 .$$

则我们有

$$u'' + 2\frac{ff'}{f^2}u'v' = 0,$$

$$v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}u'^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}v'^2 = 0 .$$

情形(1): 对 $u = \mathrm{const}, v = v(s), s$为弧长参数.

显然,第一个方程是成立的.注意 $v' \neq 0$,我们有

$$((f')^2 + (g')^2)v'^2 = 1,$$

所以

$$v'^2 = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2} .$$

求导之得

$$v'' = -\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}v'^2 .$$

此即为第二个方程 .所以它是测地线 .

情形(2): **对** $v = v_0 = \mathrm{const}$, $u = u(s)$, s **为弧长参数 .**

此时,**第一个方程是** $u' = \mathrm{const}$; **而第二个方程是**

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}u'^2 = 0 .$$

于是有 $f'(v_0) = 0$.**也就是当** v_0 **是** f **的极值点时**, $v = v_0 = \mathrm{const}$, $u = u(s)$**为测地线 .**

情形(3): **对** $u = u(s)$, $v = v(s)$, s **为弧长参数**,**为一般曲线 .**

由第一个方程得

$$(f^2u')' = f^2u'' + 2ff'u'v' = 0,$$

所以

$$f^2u' = \mathrm{const} .$$

称之为 Clairaut **关系 .所以** $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2 = f^4/c^2$.**这样我们可设** $v = v(s(u))$.**再利用**

$$f^2u'^2 + ((f')^2 + (g')^2)v'^2 = 1,$$

我们可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2((f')^2 + (g')^2) = -\left(\frac{c}{f}\right)^2 + 1$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2 = f^2 + ((f')^2 + (g')^2)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2 .$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{c}f\sqrt{\frac{f^2 - c^2}{(f')^2 + (g')^2}} .$$

因此

$$u = c\int \frac{1}{f}\sqrt{\frac{(f')^2+(g')^2}{f^2-c^2}} + \text{const} .$$

这就是它的测地线方程.

在黎曼 2-流形上,我们也可作弧长的一阶变分.

设 $\boldsymbol{F}(\lambda) = \boldsymbol{F}(s,\lambda)$ 为曲线 $\boldsymbol{p}(s)$ 之变分; 对 $\lambda = 0$, $\boldsymbol{F}(\lambda) = \boldsymbol{p}$.定义曲线 $\boldsymbol{F}(\lambda)$的弧长为 $L(\lambda) = \int_a^b |F_s| \mathrm{d}s$.记 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}_s$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}_\lambda$,则利用 $\omega_j^i = -\omega_i^j$ 可验证

$$\Delta_N \boldsymbol{T} = \Delta_T \boldsymbol{N} .$$

从而知 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$为测地线之充要条件是 $L(\lambda)$在 $\lambda = 0$ 处一阶变分为零.于是若 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$为连结 P 与 Q 的最短曲线,则 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$为测地线.

习 题

1. 对 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + g^2\mathrm{d}v^2$,试证 $v \equiv \text{const}$ 为测地线.

2. 设

$$\mathrm{d}s^2 = (f'(u)^2 + g'(u)^2)(\mathrm{d}u)^2 + f(u)^2(\mathrm{d}v)^2 ,$$

其中 $f > 0$, $f'^2 + g'^2 > 0$,求其测地线方程.

3. 对黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2 = (U(u) + V(v))(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2) ,$$

求其测地线方程.

4. 对黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}u^2 - 4v\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 4u\mathrm{d}v^2}{4(u - v^2)} , \quad u > v^2 ,$$

求其测地线方程.

3.4　散度和梯度算子

设$(D, \mathrm{d}s^2)$为黎曼二维流形.在局部坐标(u^i)中,记

$$\mathrm{d}s^2 = g = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\,\mathrm{d}u^j .$$

令

$$|\ g\ | = \det(g_{ij}) .$$

对向量场 $\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{2} X^j\ {}_j$,定义其长度为

$$|\ \boldsymbol{X}\ | = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} X^i X^j .$$

定义 1　定义 g 的梯度算子Δ使得:对 $f \in C^2(D)$,

$$\Delta f = g^{ij} \frac{f}{u^j} .$$

于是

$$|\ \Delta f\ |^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{f}{u^i} \frac{f}{u^j} .$$

记

$$_j = \frac{\quad}{u^j},$$

定义 g 的散度算子 div 使得:对向量场 $\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{2} X^j\ {}_j$ 有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{X} = \frac{1}{|\ g\ |} \sum_{j=1}^{2}\ {}_j(\ |\ g\ |\ X^j) .$$

对 $f \in C^2(D)$,定义

$$\Delta f = \mathrm{div}(\Delta f) .$$

于是

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right).$$

Δ_g 称之为(D, g)的 Laplace 算子.

在活动标架下,我们这样引入(D, g)的 Laplace 算子.

对

$$g = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2,$$

我们回忆结构方程

$$\mathrm{d}\theta^i = \sum_{j=1}^{2} \theta^j \wedge \theta_j^i, \mathrm{d}\theta_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2.$$

引入

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{2} u_i \theta^i.$$

外微分之有

$$0 = \mathrm{d}u_i \wedge \theta^i - \sum_{j=1}^{2} u_i \theta^j \wedge \theta_j^i.$$

定义 u_{ij} 满足

$$u_{ji}\theta^i = \mathrm{d}u_j + u_i \theta_j^i.$$

这样我们有 $u_{ji}\theta^j \wedge \theta^i = 0$.所以 $u_{ij} = u_{ji}$.

定义

$$\Delta_g u = u_{ii}.$$

显然对高维也可以这样定义 Δ_g.

在等温坐标系下,

$$g = \mathrm{e}^{2f}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

取

$$\theta^1 = \mathrm{e}^f \mathrm{d}x, \theta^2 = \mathrm{e}^f \mathrm{d}y,$$

容易验证这两种定义是一样的(习题).

在高维的情况,人们用法坐标系可以验证这两种定义是一样的.

对 $u\in C^2(D)$,定义 $\hat{g}=e^{2u}g$.记 k 为 g 的高斯曲率,而 K 为 $\hat{g}$ 的高斯曲率.于是我们有下面的定理.

定理 1　$K=e^{-2u}(-\Delta_g u+k)$.

我们用活动标架法来证明这个结论.令

$$g=(\theta^1)^2+(\theta^2)^2.$$

我们回忆结构方程

$$d\theta^i=\sum_{j=1}^{2}\theta^i_j\wedge\theta^j,\quad d\theta^1_2=-K\theta^1\wedge\theta^2.$$

令

$$\hat{\theta}^i=e^u\theta^i.$$

于是利用 $d\hat{\theta}^i=\sum\limits_{j=1}^{2}\hat{\theta}^i_j\wedge\hat{\theta}^j$,我们得

$$\hat{\theta}^i_j=\theta^i_j+u_i\theta^j-u_j\theta^i.$$

所以

$$d(\hat{\theta}^1_2)=d(\theta^1_2)+d(u_1\theta^2-u_2\theta^1).$$

利用 $d\hat{\theta}^1_2=-K\hat{\theta}^1\wedge\hat{\theta}^2$ 知

$$\begin{aligned}-Ke^{2u}\theta^1\wedge\theta^2=&-k\theta^1\wedge\theta^2+du_1\wedge\theta^2\\&-du_2\wedge\theta^1+u_1d\theta^2-u_2d\theta^1.\end{aligned}$$

注意

$$du_i=\sum_{j=1}^{2}u_{ij}\theta^j-u_j\theta^j_i,$$

我们就有

$$-Ke^{2u}\theta^1\wedge\theta^2=-k\theta^1\wedge\theta^2+\Delta_g u\theta^1\wedge\theta^2.$$

由此即得所要公式!

数学上一个有意思的问题是,在 S^2 上给定函数 $K\in C^2(S^2)$,问是否有度量 $\hat{g}$ 使得它的高斯曲率是 K.这个问题称之为预定高斯曲率问题.显然利用 Stokes 定理我们知道,一个必要的条件是 K 在一点处取值是正的.另一个条件是 Kazdan-Warner 条件.在这里我们就不推导了.我们指出,我国很多数学家在这个问题上有很大的贡献.与这个问题有关的问题有统计物理中的平均场方程问题.高维类似的问题是预定数曲率问题.

数学上另一个有意思的问题是,在闭曲面(V, g_0)或(R^2, g_0)上研究度量热流问题:

$$g_t = -K_g g$$

这里 $g=g(t)$为单参数度量族,而 K_g 为 g 的高斯曲率;我们要求 $g(0)=g_0$.与这个问题有关的问题有 **Calabi** 热流问题.这些问题目前仍有很多人研究.

习 题

找出 g 和 $\hat{g}$ 的散度和梯度算子之间的关系.

3.5 Gauss-Bonnet 公式

设$(D, \mathrm{d}s^2)$为黎曼 2-流形,设 C 为 D 中的不自交的分片光滑闭曲线,令 A 为 C 所包围的区域.

定理 1 Stokes 定理 设 ϕ为 D 上的 1-形式,则

$$\int_A \mathrm{d}\phi = \int_C \phi, \tag{1}$$

其中沿 C的积分为定向积分,而且 C的积分方向使得质点在 C 上

沿此方向前进时,区域 A 的内部总位于质点的左方 .

以下记带此方向的曲线 C 为 ∂A(见图 3 .2) .

证明　(1) 设 $A=[0,a]\times[0,b]$, $\varphi=\sum_{i=1}^{2} f_i\,\mathrm{d}u^i$.因 $\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1}-\frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)\mathrm{d}u^1\wedge\mathrm{d}u^2$,所以

$$\int_A \mathrm{d}\varphi=\int_0^b \mathrm{d}u^2\int_0^a\left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1}-\frac{\partial f_1}{\partial u^2}\right)\mathrm{d}u^1=\int_{\partial A}\varphi .$$

(2) 设 A 为与矩形微分同胚的区域,利用坐标变换公式和情形(1)知(1)式对此 A 也真 .

(3)当 A 为一般区域时,把 A 剖分成几个子区域 $A_1,\cdots,A_k$,使得每个 A_i 都与某一矩形微分同胚,则利用情形(2)知

$$\int_A \mathrm{d}\varphi=\sum_{i=1}^{k}\int_{A_i}\mathrm{d}\varphi=\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial A_i}\varphi=\int_{\partial A}\varphi.$$

最后这一等式中利用边界积分方向相反时互相抵消(见图 3 .3) .

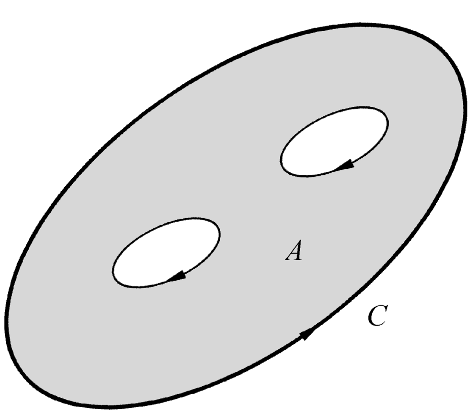

图　3 .2

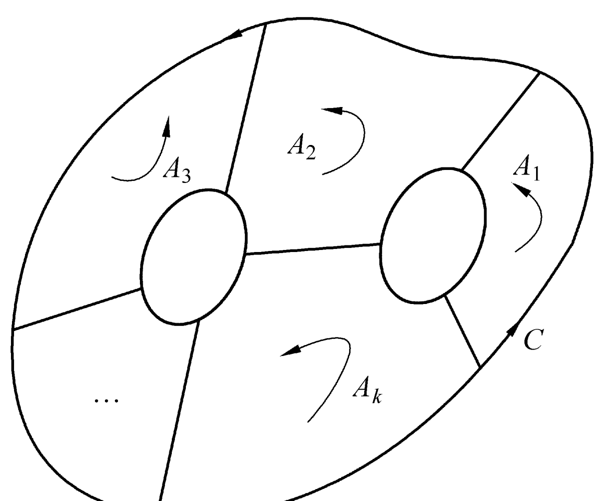

图　3 .3

这一定理常用的推论如下 .

推论

$$\int_{A} \mathrm{d}\varphi = 0,$$

其中 $\varphi \in C^2(D)$.

设 $\mathrm{d}s^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$, $\{e_1, e_2\}$为$\{\theta^1, \theta^2\}$之对偶, ω_j^i 为其 Levi-Civita 联络. 设 $\gamma = \gamma(s)$ (s 为自然参数) 为 D 中一条曲线, 写 $\gamma' = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \boldsymbol{e}_i$, $\sum_{i=1}^{2} (\xi^i)^2 = 1$, $\boldsymbol{T} = \gamma'$, 令

$$\boldsymbol{N} = -\xi^2 \boldsymbol{e}_1 + \xi^1 \boldsymbol{e}_2,$$

则 $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{T}$. 定义 $\gamma = \gamma(s)$ 的测地曲率 k_g 为

$$k_g = \langle \boldsymbol{k}_g, \boldsymbol{N} \rangle$$

其中 $\boldsymbol{k}_g \equiv \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}s} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\omega_j^i}{\mathrm{d}s} \xi^j \right) \boldsymbol{e}_i$. 据

$$\langle \boldsymbol{k}_g, \boldsymbol{T} \rangle = \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}s} \cdot \xi^i + \left(\frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} \right) \xi^1 \xi^2 = 0$$

知

$$\boldsymbol{k}_g = k_g \boldsymbol{N}.$$

令 $\xi^1 = \cos\alpha$, $\xi^2 = \sin\alpha$, 则有

$$\boldsymbol{k}_g = \left(-\xi^2 \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} \xi^2 \right) \right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\xi^1 \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \frac{\omega_1^2}{\mathrm{d}s} \xi^1 \right) \right) \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} - \frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s} \right) \boldsymbol{N}.$$

从而

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} - \frac{\omega_2^1}{\mathrm{d}s},$$

即知在 $\gamma = \gamma(s)$ 上 $\omega_2^1 = \mathrm{d}\alpha - k_g \mathrm{d}s$.

定理 2 (Gauss-Bonnet, 单连通区域情形) 设 $(D, \mathrm{d}s^2)$ 为黎曼 2-流形, 设 A 为 D 中单连通区域, 其边界分片光滑, 即 $A = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$, γ_i 为光滑曲线, 设 β_i 为从 γ_i 到 γ_{i+1} 的外角, 则

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} k_g \, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \beta_i . \qquad (2)$$

证明　首先回顾公式 $d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$，于是由 Stokes 定理知

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = \int_A d\omega_2^1 = \int_{\partial A} \omega_2^1 .$$

同上推理在每个 γ^i 上所引入 α_i，于是在 γ_i 上有

$$\omega_2^1 = d\alpha_i - k_g \, ds,$$

因此

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\alpha_i - \int_{\partial A} k_g \, ds .$$

下面分情形考虑.

(1) 设 ∂A 只由一条光滑闭曲线 $\gamma = \gamma(s)$ 构成，由于 A 可缩(即单连通)，因此可取 A 中一点 p_0 并引入极坐标 (r, α) 使得 $r = r(s)$，$\alpha = \alpha(s)$ 正好是曲线 $\gamma = \gamma(s)$. 取 D_ε 为 p_0 点处 A 中的小圆盘并令 $A_\varepsilon = A \setminus D_\varepsilon$ (见图 3.4).

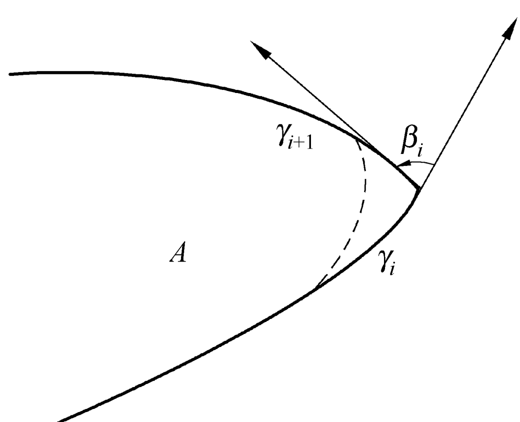

图　3.4

由 Stokes 定理知

$$0 = \int_{A_\varepsilon} d\alpha = \int_{\partial A} - \int_{\partial D_\varepsilon} d\alpha .$$

但是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon} \mathrm{d}\alpha = 2\pi,$$

从而得到

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 + \int_A k_g \mathrm{d}s = 2\pi .$$

(2) 若 $A = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, 在 D 中取一条 A 的光滑逼近闭曲线 $\beta = \beta' + \beta''$, 其中 β' A .由

$$\int_{\beta'} \mathrm{d}\alpha \to \int_A \mathrm{d}\alpha$$

和

$$\int_{\beta''} \mathrm{d}\alpha \to \sum_{i=1}^{n} \beta_i ,$$

并据情形(1)知 $2\pi = \int_A \mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. 于是得到情形(2) .即证 .

推论 设 A 由测地三角形(A 为 D 中单连通区域),而 l_1, l_2, l_3 为顶点处的内角,则由 $\beta_i = \pi - l_i$, 得

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = l_1 + l_2 + l_3 - \pi .$$

从而我们知道

$$l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} > \pi, & \text{当 } A \text{ 上 } K > 0, \\ = \pi, & \text{当 } A \text{ 上 } K \equiv 0, \\ < \pi, & \text{当 } A \text{ 上 } K < 0 . \end{cases}$$

因此在普通球面上, $l_1 + l_2 + l_3 > \pi$, 而在 Poincaré 上半平面上 $l_1 + l_2 + l_3 < \pi$.

习 题

1 . 在 $D = [0, a] \times [0, b]$ 上若给定的黎曼度量 $\mathrm{d}s^2$ 的高斯曲率 $K \leqslant 0$, 试证其上两条测地线不能交于两点(除非重合) .

2 . 在单位球面上若两条大圆相交于南北极且相交处的内角为 α, 试求其所围区域的面积 .

最后我们指出, 对 R^3 中的闭曲面 S, 作三角形剖分并定义 Euler 数 $\chi(s) = v - e + f$, 这里 v, e 和 f 分别为此剖分的顶点, 边缘和面的几何数目 .先对 S 　R^3 三角剖分再用上推论可知如下 Gauss-Bonnet 公式

$$\int_S K\theta^1 \wedge \theta^2 = 2\pi\chi(S) .$$

由此我们可以看到 $\chi(s)$ 与 S 的特定三角剖分无关 (因左边与剖分无关) .

3 . 在空间中的环面 T^2 　R^3 上证明

$$\int_{T^2} K\theta^1 \wedge \theta^2 = 0 .$$

4 . 对空间闭曲面 S, 若 S 上有一个处处不为 0 的向量场 X, 试证 S 的欧拉数为 0 .

5 . 设 V 为与 S^2 微分同胚的空间闭曲面 .设它的高斯曲率是正函数 .证明它上的任何两个闭测地线至少有一个交点 .

第 2 部分　现 代 几 何

现代微分几何发展的主要动力来自于 Einstein 的相对论 .我们感觉在大学数学中应该涉及到这一核心数学领域 .但是在此只能介绍其中很少的一部分——极为关键的部分 .这类数学虽然是属于几何的部分,但比较抽象,所以我们不得不采用公理化方法来直接给出定义 .不过一旦大家习惯了这一思维方法,那么在数学上就会获得很大进步 .

第 4 章　微分流形和外微分形式

4.1　微 分 流 形

简略地说,一个 n 维流形是一个集合且带有一个拓扑使得局部上此集合看起来是 n 维欧氏空间 .精确的定义如下 .

定义 1　我们称带有如下两条性质的集合 M 为 n 维微分流形:(1)存在$\mathbb{R}^n$中的开集 V_α 和单射 f_α: $V_\alpha\to M$ 使得 $\bigcup\limits_\alpha f_\alpha(V_\alpha)=M$,且对 $W\equiv f_\alpha(V_\alpha)\cap f_\beta(V_\beta)\neq$,集合 $f_\alpha^{-1}(W)$和 $f_\beta^{-1}(W)$在$\mathbb{R}^n$中为开集,而映射 $f_\alpha^{-1}\ f_\beta$ 和 $f_\beta^{-1}\ f_\alpha$ 可微;(2)集团 $V\equiv(V_\alpha, f_\alpha)$相对性质(1)是极大的,即与 V 中相交的任意满足(1)的集团都在 V 中(见图 4.1) .

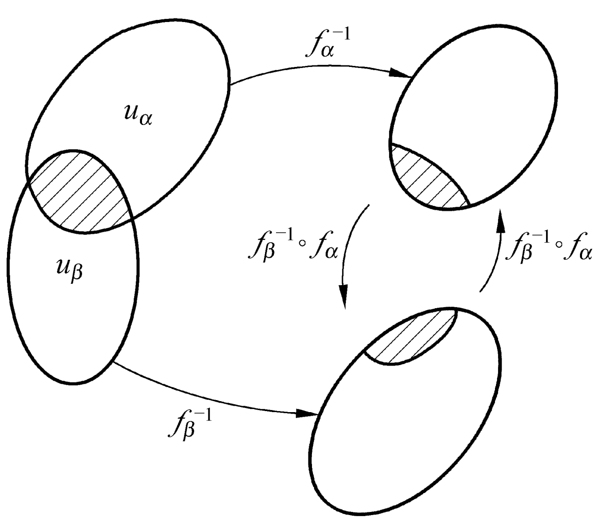

图　4.1

我们称$(V_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$为 M 在点 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{f}_\alpha(V_\alpha)$处的参数化; 令 $\varphi_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha^{-1}$, $U_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha(V_\alpha)$,称$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$为 M 在点 $\boldsymbol{p} \in U_\alpha$ 处的坐标系.称如此得到的集团$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$为 M 上的微分结构.

注 (1) 性质(2)是一个技术性条件.事实上,对满足性质(1)的集团我们都可以扩张其为极大集团使之满足(2).因此以后为方便说法,常说满足(1)的集合为 n 维微分流形.容易看到R^3中的曲面是二维微分流形.

(2) 设$(x^1, \cdots, x^n)$为R^n上的直角坐标系,设$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$为$\mathrm{R}^n$上的一个坐标系,常记 $x_\alpha^i = x^i \quad \varphi_\alpha$.

(3) n 维微分流形 M 上有一个自然的拓扑,即称集合 $U \quad M$ 为开集是指对任何$(V_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$, $\boldsymbol{f}_\alpha^{-1}(U) \quad V_\alpha$ 为R^n中的开集.以后我们要求微分流形 M 满足 Hausdorff 公理和可数公理.所谓 M 满足 Hausdorff 公理是指对 M 中不同的两点总存在各自的开邻域(即含该点的开集合),它们互不相交.有了拓扑,在这里,我们可以定义紧集的概念.称集合 K 为紧集是指对 K 的一个开覆盖(U_β): $K \quad \cup U_\beta$,我们可找到有限个 $U_{\beta_1}, \cdots, U_{\beta_k}$ 仍为 K 的覆盖.所谓 M 满足可数公理是指 M 可由可数多个坐标邻域覆盖(此时称 M 有可数基).常记 $n = \dim M$, $M = M^n$,或 $M = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

流形的例子.

例 1 R^n中的开集 Ω是 n 维微分流形.这时,取 $U = \Omega$, $\varphi = \boldsymbol{id}$.

例 2 设

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^{n+1}: x_0^2 - \cdots - x_n^2 = 1, x_0 > 0\}.$$

定义 φ: $H \to \mathrm{R}^n$为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_n),$$

此映射构成 H 的整体坐标系.于是 H 为 n 维微分流形.

例 3 设 S^n 为单位球面.记 $\boldsymbol{N} = (1, 0, \cdots, 0)$和 $S = (-1, 0, \cdots, 0)$为它的北极和南极.令

$$U_1 = S^n - \{\boldsymbol{N}\}, \quad U_2 = S^n - \{\boldsymbol{S}\}.$$

定义球极投影映射

$$\Pi_1(\boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_n)/(1 - x_0);$$

$$\Pi_2(\boldsymbol{x}) = (x_1, \cdots, x_n)/(1 + x_0).$$

于是(U_i, Π_i)构成 S^n 的坐标系.因为

$$\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n; \ \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}/|\boldsymbol{y}|^2$$

光滑,所以 S^n 为 n 维微分流形(见图 4.2).

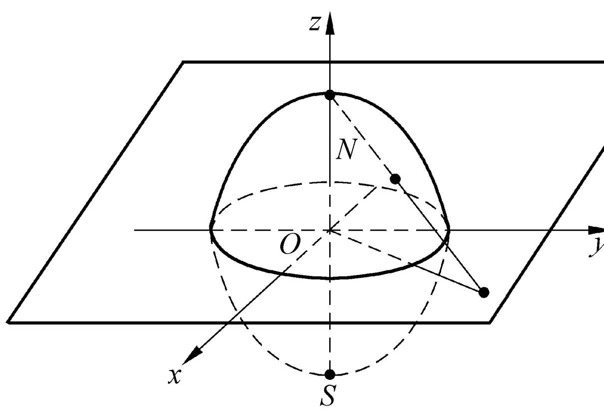

图　4.2

定义 2　设 $M_1^n = (U_\alpha^1, \varphi_\alpha^1)$和 $M_2^k = (U_\beta^2, \varphi_\beta^2)$为微分流形,称映射 $\boldsymbol{f}: M_1 \to M_2$ 在点 $\boldsymbol{p} \in M_1$ 处光滑是指存在 $\boldsymbol{p}$ 点处的坐标系$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$,使得对任何$(U_\beta, \varphi_\beta)$,映射

$$\varphi_\beta \circ \boldsymbol{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

在 $\varphi_\alpha(\boldsymbol{p})$处光滑.称映射 $\boldsymbol{f}$ 在 M_1 中的开集上光滑是指 $\boldsymbol{f}$ 在此开集中的每点处都光滑.常称 $\varphi_\beta \circ \boldsymbol{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的表示.

特别地,对 $M_2 = \mathbf{R}$ 我们有光滑函数 $f: M^n \to \mathbf{R}$ 的概念;对 $M_1 = (a, b) \subset \mathbf{R}$ 我们有光滑曲线 $\boldsymbol{\gamma}: I \subset \mathbf{R} \to M^n$ 的概念.

流形 M 的一个重要属性是,在 M 上的单位分解(ξ_α)

$$\xi_\alpha \in C^\infty(M),$$

$$0 \leq \xi_\alpha \leq 1,$$

$$\mathrm{supp}\,\xi_\alpha \subset U_\alpha.$$

每个点 $p\in M$ 有一个邻域 U 使得除去有限个 α 有 $U\cap\mathrm{supp}\xi_\alpha=\varnothing$，

$$\sum_\alpha \xi_\alpha = 1 .$$

这里 $\mathrm{supp}\xi_\alpha=\{x\in M:\ \xi_\alpha(x)\neq 0\}$ 为 ξ_α 的支集.

我们不证明这个结论了.以下都认定我们的流形 M 有单位分解 (ξ_α).

如同曲面那样，我们可以定义点 $p\in M^n$ 的切空间如下.设 $\gamma:\ I\to M$ 为光滑曲线且 $\gamma(0)=p$，记 A 为在点 p 处光滑函数全体.如同曲面情形，简称 γ 为曲线.

定义 3 曲线 γ 在 p 处的切矢为映射 $\gamma'(0):\ A\to\mathbb{R}$：

$$\gamma'(0)\phi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\circ\gamma)\Big|_{t=0},\ \phi\in A .$$

而称 $p\in M$ 处的切矢是指它是某光滑曲线 γ 在 p 处的切矢；$p\in M$ 处的切矢空间记为 T_pM，称之为 p 处的切空间(见图 4.3).

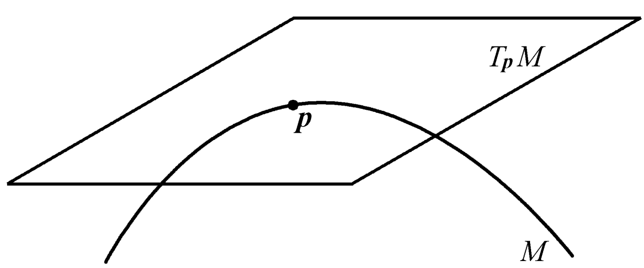

图 4.3

值得说明的是，在这里我们把光滑映射 $\gamma:\ I\subset\mathbb{R}\to M^n$ 称为光滑曲线.这一点不同于我们在平面和空间曲线论中的概念.

由定义可知切矢量在函数空间上的作用是满足 Leibniz 法则的线性映射.

设 $(x^1,\cdots,x^n)$ 为 $p\in M$ 处的坐标系，于是 $\gamma=\gamma(t)$ 有表示

$$\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t)),$$

对 $\phi\in A$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi\circ\gamma)\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} := x^i(0)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \varphi,$$

最后一步为记法.这样 $\gamma'(0) = x^i(0)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ 为在坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$中的表示.事实上,$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ 为对应于坐标曲线 $x^i\to(0,\cdots,x^i,0,\cdots,0)$在 p 处的切矢.因此我们知道 $T_pM\subset\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$.

引理 1　$T_pM=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$.

证明　设 $v\in\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$,即 $v=\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.作曲线 $\gamma: I\to M$ 使得γ在$(x^1,\cdots,x^n)$中的表示为 $x^i(t)=\lambda^i t$,则 $\gamma'(0)=v$,所以 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}\subset T_pM$.结合 $T_pM\subset\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$,我们有

$$T_pM=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}.$$

即证.

若$(y^1,\cdots,y^n)$也是 $p\in M$ 处的坐标系,利用复合求导法则知:$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$,这里和以后我们常略去下指标 p.刚才的引理告诉我们 T_pM 为 n 维线形空间.以后称 $T_p^*M=(T_pM)^*$ 为 p 处的余切空间.

定义 4　设 $\varphi: M_1^n\to M_2^k$ 为两个光滑流形间的光滑映射.对 $p\in M$,我们定义 φ在 p 点处的微分 $\mathrm{d}\varphi_p$为 T_pM_1 到 $T_{\varphi(p)}M_2$ 的线性映射

$$\mathrm{d}\varphi_p(v)=(\varphi\circ\gamma)'(0),$$

其中 $v=\gamma'(0)$,γ为过 p 点的曲线.

由 φ和 γ 的表示立即可知 $\mathrm{d}\varphi_p(v)$与曲线 γ 的特殊选择无关,于是当$(x^1,\cdots,x^n)$为 p 处的坐标系时,$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ 应为 $\mathrm{d}f_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_p$,

不过为简化记号,只记$\frac{\partial}{\partial x^i}$.

定义 5 设 $\varphi: M_1^n \to M_2^k$ 光滑, $n \leq k$.称 φ 为浸入是指

$$\forall p \in M, \mathrm{d}\varphi_p: T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$$

为单射;若进一步设 $\varphi(M_1)$ 带有 M_2 的诱导拓扑(即 $\varphi(M_1)$ 中的开集正是 M_2 中某开集与 $\varphi(M_1)$ 之交集)且 $\varphi: M_1 \to \varphi(M_1)$ 为单射而 $\varphi^{-1}: \varphi(M_1) \to M_1$ 仍连续(即开集合之逆像仍为开集,从而 φ 为 M_1 到 $\varphi(M_1)$ 之同胚),就称 φ 为嵌入.特别地,若 $M_1 \subset M_2$,且内射 $\boldsymbol{i}: M_1 \to M_2$ 为嵌入,就称 M_1 为 M_2 之嵌入子流形或简称子流形.

例 4 设

$$SO(n) = \{\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}): \det(\boldsymbol{A}) = 1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}\},$$

称之为特殊正交群.它是 $M_{n\times n}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n^2}$ 中的子流形.事实上,因为

$$GL^+(n) := \{\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}): \det(\boldsymbol{A}) > 0\}$$

为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的开集.定义 $S_{n\times n}$ 为 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 中的对称矩阵空间及映射

$$\boldsymbol{F}: GL^+(n) \to S_{n\times n}; \ F(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I},$$

于是 $SO(n) = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{0})$.如同曲面论中的证明,我们可以利用隐函数定理证明: $SO(n) = \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{0})$ 是 $M_{n\times n}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n^2}$ 中的 $n(n-1)/2$ 维的子流形.

定义 6 设 M^n 为光滑流形,定义 M 的切丛为

$$TM = \{(\boldsymbol{p}, v): \boldsymbol{p} \in M, v \in T_{\boldsymbol{p}} M\}.$$

引理 2 TM 为 $2n$ 维光滑流形.

证明 设 $M = (V_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$, $\boldsymbol{f}_\alpha: V_\alpha \to M$.令 $\varphi_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha^{-1} = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$,则 $\forall \boldsymbol{q} \in U_\alpha \equiv \boldsymbol{f}_\alpha(V_\alpha)$, $w \in T_{\boldsymbol{q}} M$,有

$$w = \sum_i y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}.$$

定义映射 $\boldsymbol{F}_\alpha: V_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ 为

$$\boldsymbol{F}_\alpha(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n; y_\alpha^1, \cdots, y_\alpha^n) = \left(\boldsymbol{f}_\alpha(x_\alpha), \sum_i y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right).$$

显然$(V_\alpha \times \mathrm{R}^n, \boldsymbol{F}_\alpha)$满足性质(1),事实上,对

$$(\boldsymbol{p}, v) \in \boldsymbol{F}_\alpha(V_\alpha \times \mathrm{R}^n) \cap F_\beta(V_\beta \times \mathrm{R}^n),$$

即

$$(\boldsymbol{p}, v) = (\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha), \mathrm{d}\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{b}_\alpha)) = (\boldsymbol{f}_\beta(\boldsymbol{q}_\beta), \mathrm{d}\boldsymbol{f}_\beta(\boldsymbol{b}_\beta)),$$

其中

$$\boldsymbol{q}_\alpha \in V_\alpha, \boldsymbol{q}_\beta \in V_\beta, \boldsymbol{b}_\alpha, \boldsymbol{b}_\beta \in \mathrm{R}^n.$$

这样我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha, \boldsymbol{b}_\alpha) &= \boldsymbol{F}_\beta^{-1}(\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha), \mathrm{d}\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{b}_\alpha)) \\ &= (\boldsymbol{f}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha), \mathrm{d}(\boldsymbol{f}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{f}_\alpha)(\boldsymbol{b}_\alpha)).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{f}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{f}_\alpha$ 光滑知 $\boldsymbol{F}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{F}_\alpha$ 光滑.即证.

以后我们常把带有这一光滑流形结构的 TM 称为切丛.值得指出的是,切丛具有局部平凡化,即乘积$(V_\alpha \times \mathrm{R}^n)$.

例 5　我们来看流形

$$H = \{\boldsymbol{p} = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n : |\boldsymbol{x}|^2 - x_0^2 = -1, \quad x_0 > 0\}$$

的切丛.设 $\boldsymbol{p} \in H$, $v \in T_{\boldsymbol{p}} H$.记 $v = (y_0, \boldsymbol{y}) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n$.于是我们有

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_0 y_0.$$

这样,我们得到

$$TH = \{(\boldsymbol{p}, v): \boldsymbol{p} \in H, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_0 y_0\}.$$

作为习题,试证 $T^* M = \{(\boldsymbol{p}, v^*): \boldsymbol{p} \in M, v^* \in T_{\boldsymbol{p}}^* M\}$为 $2n$ 维光滑流形,常称之为余切丛.

习　　题

1.证明两个流形 M 和 N 的乘积空间 $M \times N$ 是流形,并指出乘积空间的维数和切空间.定义映射

$$\Pi_1 : M \times N \to M$$

和

$$\Pi_2 : M \times N \to N .$$

证明这两个映射是光滑的 .

2 . 试求例 4 中 $SO(n)$在 $\boldsymbol{A}$ 处的切空间 .

3 . 定义 $P_n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/ \boldsymbol{R}$,这里 $\boldsymbol{R}$ 为关系如下:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R y} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$$

当且仅当有常数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y}$.我们称 $P_n(\mathbb{R})$为实射影空间 .证明这个实射影空间是流形并找出它的切丛 .

4 . 设 S^n 为单位球面,找出它的单位分解和它的切丛 .找出不同于例 3 中 S^n 的坐标系 .

5 . 设 $\boldsymbol{M}$ 是行列式为 1 的 3×3 实矩阵空间 .

(1) 构造 $\boldsymbol{M}$的一个微分结构;

(2) 证明 $\boldsymbol{M}$为某个$\mathbb{R}^n$的超平面;

(3) 求 $\boldsymbol{M}$在恒等矩阵 $\boldsymbol{I}$ 处的切空间 $T_I\boldsymbol{M}$.

4.2 $\mathbb{R}^n$中开集上的外微分形式

现在我们来系统地介绍外微分形式 .我们指出,其中最重要的部分是外微分运算 .设 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, $R_{\boldsymbol{p}}^n$ 为$\mathbb{R}^n$在 $\boldsymbol{p}$ 处的切空间; 设$(R_{\boldsymbol{p}}^n)^*$ 为 $R_{\boldsymbol{p}}^n$ 之对偶空间,即 $R_{\boldsymbol{p}}^n$ 上全体线性函数构成的空间 .周知 $R_{\boldsymbol{p}}^n$ 和 $(R_{\boldsymbol{p}}^n)^*$ 为 n 维线性空间 .易见, $R_{\boldsymbol{p}}^n = \mathbb{R}^n$.若$\mathbb{R}^n$上有直角坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$,则

$$R_{\boldsymbol{p}}^n = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\boldsymbol{p}}$$

和

$$(R_{\boldsymbol{p}}^n)^* = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left. \mathrm{d} x^i \right|_{\boldsymbol{p}} ,$$

其中

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i_j,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

以下为书写方便,记

$$E=R^n_p,\ E^*=(R^n_p)^*,\quad e_i=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

定义 1　称 φ 为 E 上的 k-线性交错函数是指

$$\varphi:\ E\times\cdots\times E\to\mathrm{R},$$

对每个变元线性且

$$\varphi(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots)=-\varphi(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots).$$

记此空间为 $\wedge^k E^*$,不难看到 $\wedge^k E^*$ 为线性空间.由交错性知对 $k>n$,$\wedge^k E^*=0$.

给出 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$,定义

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k:\ E\times\cdots\times E\to\mathrm{R},$$

$$(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)(v_1,\cdots,v_k)=\det(\varphi_i(v_j)),$$

则 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k\in\wedge^k E^*$,称符号 $\wedge$ 为外积.特别地,有 $(\mathrm{d}x^{i_1})_p\wedge\cdots(\mathrm{d}x^{i_k})_p\in\wedge^k E^*$,$i_1,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n$;简记此元素为 $\mathrm{d}x^\alpha|_p$,$\alpha=(i_1,\cdots,i_k)$.令 $I_{n,k}$ 为集合

$$(i_1,\cdots,i_k);\ i_1<\cdots<i_k,\ i_m\in 1,\cdots,n.$$

命题 1　集合 $\{\mathrm{d}x^\alpha:\ \alpha\in I_{n,k}\}$ 为 $\wedge^k E^*$ 的基底.

证明　先证明此集合中的元素线性无关.若

$$\sum_\alpha a_\alpha\mathrm{d}x^\alpha=0,$$

在 $(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})$ 上取值知

$$\sum_\alpha a_\alpha\mathrm{d}x^\alpha(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})=a_{j_1\cdots j_k}=0.$$

设 $f\in\wedge^k E^*$,令

$$p_\alpha=f(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}),\quad \alpha=(i_1,\cdots,i_k)$$

和

$$g=\sum_{\alpha\in I_{n,p}}p_\alpha\mathrm{d}x^\alpha.$$

则

$$g \in \wedge^k E^*,$$

且对 $\alpha \in I_{n,p}$ 有

$$g(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}).$$

由交替性知

$$g(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = f(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}).$$

对一切 $j_1, \cdots, j_k = 1, 2, \cdots, n$ 皆正确,即知 $g = f$.于是每个 $\in \wedge^k E^*$ 都可以用$\{\mathrm{d}x^\alpha: \alpha \in I_{n,k}\}$的线性组合表示.也就是说,集合$\{\mathrm{d}x^\alpha: \alpha \in I_{n,k}\}$为$\wedge^k E^*$ 的基底.即证.

定义 2　称 ω为$\mathbb{R}^n$中开集 W 上的外微分 k-形式是指" $\boldsymbol{p} \in W$ 有 $\omega(\boldsymbol{p}) \in \wedge^k E^*$,且有

$$w(\boldsymbol{p}) = \sum_{\alpha \in I_{n,k}} a_\alpha(\boldsymbol{p}) \mathrm{d}x^\alpha \Big|_{\boldsymbol{p}},$$

其中 $a_\alpha: W \to \mathbb{R}$ 光滑.常称 w 为 k-形式并简写为 $w = \sum_\alpha a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$.常记 W 上 k-形式空间为 $\wedge^k(W)$.

容易验证

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i, \quad i \neq j$$

和

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0.$$

一般地,我们有下面两个重要的运算.

定义 3　设 W 为$\mathbb{R}^n$中的开集,定义加法和外积分别为:

(1) 对 k-形式 $w_1 = \sum_\alpha a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$, $w_2 = \sum_\alpha b_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$ 有,

$$w_1 + w_2 = \sum_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) \mathrm{d}x^\alpha;$$

(2) 对 k-形式 $w = \sum_\alpha a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$ 和 m-形式$\phi = \sum_\beta b_\beta \mathrm{d}x^\beta$,有

$$\omega \wedge \phi = \sum_{\alpha \in I_{n,k}, \beta \in I_{n,m}} a_\alpha b_\beta \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta.$$

尽管总有 $\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$，但却不能对一切 w 有 $w \wedge w = 0$.

例如，在 R^4 上，对

$$w = x^1 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + x^2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4,$$

有

$$w \wedge w = 2x^1 x^2 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4.$$

外微分形式有重要的求导运算，即外微分.

定义 4　设 $\omega = \sum\limits_{x \in I_{n,k}} a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$ 为 W 上的 k-形式，ω 的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 定义为 $\mathrm{d}\omega = \sum\limits_{\alpha} \mathrm{d}a_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\alpha$，其中 $\mathrm{d}a_\alpha$ 为函数 a_α 的全微分.

命题 2　(1) 若 ω_1 和 ω_2 皆在 $\wedge^k(W)$ 中，则

$$\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2.$$

(2) 对 $\omega \in \wedge^k(W)$，$\phi \in \wedge^s(W)$ 有

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \phi) = \mathrm{d}\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\phi.$$

(3) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}^2\omega = 0$.

请作为习题证之.

例　设 $\omega = xy\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}y + (x + z)\mathrm{d}z \in \wedge^1(\mathrm{R}^3)$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(xy) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}(yz) \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}(x + z) \wedge \mathrm{d}z \\
&= (y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y + (\mathrm{d}x + \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}z \\
&= x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= -x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

最后我们来定义外微分形式的另一个重要属性.

设 $\boldsymbol{f}: W \quad \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ 为光滑映射，若 $\omega \in \wedge^k(\mathrm{R}^m)$，定义

$$\boldsymbol{f}^* \omega \in \wedge^k(W)$$

为

$$\boldsymbol{f}^* \omega|_{\boldsymbol{p}}(v_1, \cdots, v_k) = \omega|_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})}(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_1), \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_k)).$$

这里 $\boldsymbol{p} \in W$，$v_1, \cdots, v_k \in R^n_{\boldsymbol{p}}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}$ 为 $\boldsymbol{p}$ 点处的微分映射.约定对 R^m 上的光滑函数 h，有

$$\boldsymbol{f}^*(h) = h \quad \boldsymbol{f}.$$

命题 3 设 $\boldsymbol{f}: W\quad \mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$ 光滑, $h: \mathrm{R}^m\to\mathrm{R}$ 光滑; 设 ω和 φ为R^m上的 k-形式,则有:

(1) $\boldsymbol{f}^*(\omega+\varphi)=\boldsymbol{f}^*\omega+\boldsymbol{f}^*\varphi$;

(2) $\boldsymbol{f}^*(h\omega)=\boldsymbol{f}^*(h)\boldsymbol{f}^*(\omega)$;

(3) 若 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k\in\wedge^1(\mathrm{R}^m)$,则

$$\boldsymbol{f}^*(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)=\boldsymbol{f}^*(\varphi_1)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{f}^*(\varphi_k);$$

(4) $\mathrm{d}(\boldsymbol{f}^*\omega)=\boldsymbol{f}^*(\mathrm{d}\omega)$.

证明 设 $\boldsymbol{p}\in W$, $v_1,\cdots,v_k\in R^n_{\boldsymbol{p}}$,则有

(1)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}^*(\omega+\varphi)(\boldsymbol{p})(v_1,\cdots,v_k)\\
&=(\omega+\varphi)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}))(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_1),\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_k))\\
&=\boldsymbol{f}^*\omega(\boldsymbol{p})(v_1,\cdots,v_k)+\boldsymbol{f}^*\varphi(\boldsymbol{p})(v_1,\cdots,v_k).
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^*(h\omega)(\boldsymbol{p})(v_1,\cdots,v_k)&=(h\omega)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}))(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_1),\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}(v_k))\\
&=h\quad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{f}^*\omega(\boldsymbol{p})(v_1,\cdots,v_k).
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}^*(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)(v_1,\cdots,v_k)\\
&=(\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k)(\mathrm{d}\boldsymbol{f}(v_1),\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{f}(v_k))\\
&=\det(\varphi_i(\mathrm{d}\boldsymbol{f}(v_j)))=\det(\boldsymbol{f}^*\varphi_i(v_j))\\
&=\boldsymbol{f}^*\varphi_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{f}^*\varphi_k(v_1,\cdots,v_k).
\end{aligned}$$

(4) 若 $\omega=\mathrm{d}h$,则对R^m上的坐标系$(y^1,\cdots,y^m)$有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^*(\mathrm{d}h)&=\boldsymbol{f}^*\quad\frac{h}{y^i}\mathrm{d}y^i\\
&=\frac{h}{y^i}\ \frac{f_i}{x^j}\mathrm{d}x^j\\
&=\frac{(h\quad\boldsymbol{f})}{x^j}\mathrm{d}x^j\\
&=\mathrm{d}(h\quad\boldsymbol{f})
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{d}(f^* h),$$

对 k-形式 $\omega = \sum_\alpha a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$,则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f^*\omega) &= \mathrm{d}\left(\sum f^*(a_\alpha) f^*(\mathrm{d}x^\alpha)\right) \\
&= \sum \mathrm{d}(f^*(a_\alpha)) \wedge f^*(\mathrm{d}x^\alpha) \\
&= \sum f^*(\mathrm{d}a_\alpha) \wedge f^*(\mathrm{d}x^\alpha) \\
&= f^*\left(\sum \mathrm{d}a_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\alpha\right) \\
&= f^*(\omega).
\end{aligned}$$

即证.

这里需要指出,在命题 3(4)部分我们用到了如下习题 3 里性质.

习 题

1. 按定义 3 中的(2)仍有

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)),$$

其中 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in \wedge^1(W)$.

2. 设 ω 为 k-形式,φ 为 s-形式,θ 为 r-形式,证明:

(1) $(\omega\wedge\varphi)\wedge\theta = \omega\wedge(\varphi\wedge\theta)$,

(2) $\omega\wedge\varphi = (-1)^{ks}(\varphi\wedge\omega)$,

(3) 当 $r = s$ 时,$\omega\wedge(\varphi+\theta) = \omega\wedge\varphi + \omega\wedge\theta$.

3. 若 φ_1 和 φ_2 为 $\mathbb{R}^m$ 上的两个外微分形式,则

$$f^*(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = (f^*\varphi_1) \wedge (f^*\varphi_2).$$

4. 若 φ 为 k-形式,k 为奇数,则

$$\varphi \wedge \varphi = 0.$$

5. 在 $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上,设有 1-形式

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

设 S^2 为 $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$的单位球面,定义映射

$$\Phi: S^2 \to \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\};\ \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

计算

$$\Phi^* \omega$$

和

$$\mathrm{d}\Phi^* \omega.$$

4.3 流形上的微分形式和向量场

设 $\boldsymbol{p} \in M$,若 $\wedge^k (T_{\boldsymbol{p}} M)^*$ 为 $T_p M$ 上的 k-线性交错函数空间和 $M = (V_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$,则有下面的定义.

定义 1 称 w 为 M 上的 k-形式是指对每个 $\boldsymbol{p} \in M$ 有 $w(\boldsymbol{p}) \in \wedge^k (T_{\boldsymbol{p}} M)^*$,而且对 $\boldsymbol{p}$ 点处的参数化$(V_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$,由

$w_\alpha(v_1, \cdots, v_k) = w(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_\alpha(v_1), \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{f}_\alpha(v_k))$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$,决定出 w. (1)

在$\wedge^k (V_\alpha)$中,常记 M 上 k-形式空间为$\wedge^k (M)$.由直接验证知,由(1)决定出的$\{w_\alpha\}$满足关系

$$w_\alpha = (\boldsymbol{f}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{f}_\alpha)^* w_\beta,\ \text{当 } \boldsymbol{f}_\alpha(V_\alpha) \cap \boldsymbol{f}_\beta(V_\beta) \neq \varnothing \text{ 时}. \tag{2}$$

反过来若在每个 V_α 上有 $w_\alpha \in \wedge^k (V_\alpha)$并满足关系式(2),则由关系式(1)可定义出 $w \in \wedge^k (M)$.因此我们常把 $w \in \wedge^k (M)$写成 $w = \{w_\alpha\}$.由上节命题 3 之(4)知

$$\mathrm{d}w_\alpha = (\boldsymbol{f}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{f}_\alpha)^* \mathrm{d}w_\beta,$$

于是 $\mathrm{d}w_\alpha$ 决定出一个 $\mathrm{d}w \in \wedge^{k+1}(M)$;称之为 w 的外微分.立即知,在 M 上总有 $\mathrm{d}^2 = 0$.

由关系式(2)及上节结论,我们可以定义 M 上两个外形式的

外积$\wedge$等其他运算 .

定义 2　称 X 为 M 上的光滑向量场是指 $X\in C^\infty(M, TM)$，且 $\forall\, \boldsymbol{p}\in M$ 有 $X(\boldsymbol{p})\in T_{\boldsymbol{p}}M$，即在每个 V_α 上，X 能表示为

$$X(\boldsymbol{p}) = \sum_i a_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\bigg|_{\boldsymbol{p}},$$

其中 $\phi_\alpha = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$，而 $a_\alpha^i \in C^\infty(U_\alpha)$.

记 $\mathfrak{X}(M)$为 M 上光滑向量场空间(见图 4 .4) .

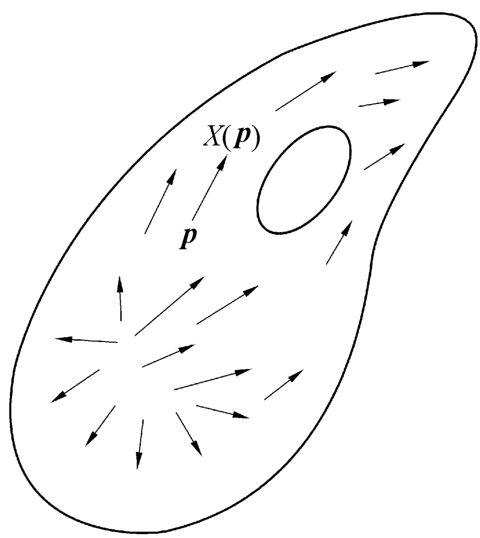

图　4 .4

同过去一样，对 $X, Y\in \mathfrak{X}(M)$，可定义 Lie 括号(也称为 Poisson 括号)$[X, Y] = XY - YX\in \mathfrak{X}(M)$.由直接计算可知，若局部的表示 $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y = b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$[X, Y] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} . \tag{3}$$

另外我们有下面的命题 .

命题 1　设 $X, Y, Z\in \mathfrak{X}(M)$，$a, b\in \mathbb{R}$，$\phi, \theta\in C^\infty(M)$，则

(1) $[X, Y] = -[Y, X]$，

(2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$，

(3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,

(4) $[\theta X, \phi Y] = \theta\phi[X, Y] + \theta\cdot X(\phi) Y - \phi\cdot Y(\theta) X$.

证明　由简单计算可证 .

外微分形式的外微分与 Lie 括号有紧密联系 .

定理 1　设 $w\in\wedge^1(M)$, $X, Y\in x(M)$, 则

$$d\omega(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]) . \qquad (4)$$

证明　由定义

$$d\omega(X, Y) = a^i b^j dw\left(\frac{}{x^i}, \frac{}{x^j}\right) .$$

不失一般性可设 $w = f dx^k$, 其中 $f\in C^\infty(M)$, 于是

$$d(f dx^k)\left(\frac{}{x^i}, \frac{}{x^j}\right) = df\wedge dx^k\left(\frac{}{x^i}, \frac{}{x^j}\right)$$

$$= \delta_{kj}\frac{f}{x^i} - \delta_{ki}\frac{f}{x^j} .$$

另一方面, 利用 $[\ x^i,\ x^j] = 0$, 可直接计算得

$$Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]) = a^i b^k\frac{f}{x^i} - a^k b^j\frac{f}{x^i} .$$

由此即证得(4)式 .

现在我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的结构方程 .

为此, 我们引入如下的定义 .

定义 3　称一个对象 g 为 n 维微分流形 M 的黎曼结构或度量是指对每一个 $p\in M$, $g(p)\equiv\langle,\rangle_p$ 为 T_pM 上的正定内积并且对任何 $X, Y\in x(M)$, 函数 $p\to\langle X, Y\rangle_p$ 光滑; 称带有黎曼度量的流形 M^n 为黎曼流形, 并记为 (M, g) .

黎曼流形的极好例子是空间曲面 .

设 (U, ϕ) 为 p 点处的坐标系, $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$, 令

$$g_{ij}(p) = \left\langle\frac{}{x^i}, \frac{}{x^j}\right\rangle_p .$$

对

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \ Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

因

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_{\boldsymbol{p}} &= X^i Y^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_{\boldsymbol{p}} \\ &= g_{ij}(\boldsymbol{p})\, \mathrm{d}x^i(X)\, \mathrm{d}x^j(Y),\end{aligned}$$

从而知 $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$.

在R^n**上定义内积** g_0 **为**

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i=1}^{n} A^i B^i,$$

其中 $\boldsymbol{A} = (A^1, \cdots, A^n)$**和** $\boldsymbol{B} = (B^1, \cdots, B^n)$**为**$\mathrm{R}^n$**中矢量 .于是**$(\mathrm{R}^n, g_0)$**是一个** n**维黎曼流形,它正是通常的欧氏空间 .若**$(x^1, \cdots, x^n)$**为**R^n**上的直角坐标系,则** $g_0 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x^i)^2$.

定理 2($\mathbf{R}^n$上的结构方程):设$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$为$\mathrm{R}^n$**上的正交活动标架,即**

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

设$\{\omega^i\}$**为**$\{e_i\}$**之对偶,则存在 1-形式**(ω_{ij})**,使**

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

且

$$\mathrm{d}\omega^i = \sum_k \omega^k \wedge \omega_{ki},$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{5}$$

证明　令

$$\delta_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, \delta_n = (0, \cdots, 1)$$

为R^n**中的典则基,设**(x^i)**为其直角坐标系,则**

$$\mathrm{d}x^i(\delta_j) = \delta_{ij}.$$

因

$$e_i = \sum_j b_{ij} \delta_j,$$

这里(b_{ij})为正交矩阵,所以

$$\omega_i = \sum_j b_{ij} \mathrm{d} x^j. \tag{6}$$

记

$$\mathrm{d} e_i = \sum_j \omega_{ij} e_j.$$

由

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

知

$$\langle \mathrm{d} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \mathrm{d} e_j \rangle = 0,$$

即有 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.由

$$\mathrm{d} e_i = \mathrm{d}(b_{ij} \delta_j) = \mathrm{d} b_{ij} \delta_j$$

和

$$\omega_{ij} e_j = \sum_k \omega_{ij} b_{jk} \delta_k,$$

可得

$$\mathrm{d} b_{ij} = \sum_k \omega_{ik} b_{kj}.$$

外微分(6)式得

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_j \mathrm{d} b_{ij} \wedge \mathrm{d} x^j = \sum_{j,k} \omega_{ik} b_{kj} \wedge \mathrm{d} x^j = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k.$$

由 $\mathrm{d}^2 = 0$ 知

$$0 = \mathrm{d}(\mathrm{d} b_{ij}) = \sum_k \mathrm{d}(\omega_{ik} b_{kj})$$

$$= \sum_k \mathrm{d}\omega_{ik} b_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \mathrm{d} b_{kj},$$

所以

$$\sum_k \mathrm{d}\omega_{ik} b_{kj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \mathrm{d} b_{kj}$$

$$= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{km} b_{mj}.$$

从而有(5)式.

在本节末我们引入可定向流形的概念.

定义 4 称 n 维微分流形 M 是可定向的,是指 M 上存在一个处处不为零的 n-形式;不然就称 M 是不可定向的.

这个概念在流形上的积分理论中是有用的.

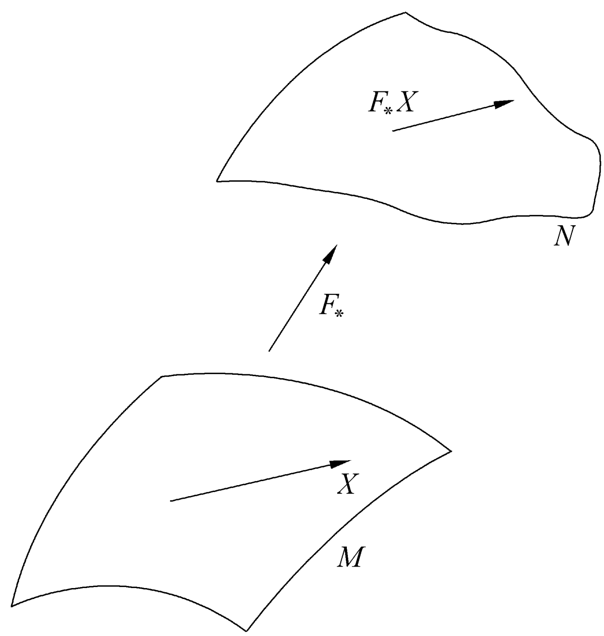

图 4.5

习 题

1. 设 $\boldsymbol{F}: M^m \to N^n$ 为光滑映射, $\boldsymbol{p} \in M$, $\boldsymbol{q} = F(\boldsymbol{p})$, 定义 $\boldsymbol{F}_*: T_{\boldsymbol{p}}M \to T_{\boldsymbol{q}}N$(常记 $\boldsymbol{F}_* = \mathrm{d}\boldsymbol{F}$)(见图 4.5),

$$\langle F_* X, w\rangle_{\boldsymbol{q}} = \langle X, F^* w\rangle_{\boldsymbol{p}},$$

其中

$$X \in T_{\boldsymbol{p}}M, \omega \in T_{\boldsymbol{q}}^* N, \langle \boldsymbol{F}_* X, \omega\rangle_{\boldsymbol{q}} \equiv w(\boldsymbol{F}_* X)_{\boldsymbol{q}}.$$

验证:若(x^i)为 $\boldsymbol{p}$ 处的坐标系,(y^α)为 $\boldsymbol{q}$ 处的坐标系,$\boldsymbol{F}^\alpha = y^\alpha \circ \boldsymbol{F}$,

则有:

(1) $\boldsymbol{F}^*(\mathrm{d}y^\alpha) = \sum\limits_i \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$;

(2) $\boldsymbol{F}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum\limits_\alpha \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$;

(3) $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}^*\mathrm{d}$.

2. Cartan 引理 对 $k\leq m$, 设

$$w_1, \cdots, w_k \in \wedge^1(\mathrm{R}^m)$$

逐点线性无关.设

$$\theta_1, \cdots, \theta_k \in \wedge^1(\mathrm{R}^m)$$

满足

$$\theta_i \wedge w_i = 0,$$

则存在光滑函数 A_{ij}, $A_{ij} = A_{ji}$,使得

$$\theta_i = A_{ij}w_j.$$

3. 回顾R^n上的第一结构方程:

设$\{e_i\}_{i=1}^n$为R^n上的正交活动标架,即

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

设$\{\omega_i\}$为$\{e_i\}$之对偶,则存在 1-形式(ω_{ij}),使得

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

且

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}.$$

定义

$$\Phi = \omega_I, \quad \boldsymbol{I} = (1, \cdots, k), \quad k < n,$$

则存在 $\varphi\in\wedge^1(\mathrm{R}^n)$使得

$$\mathrm{d}\Phi = \varphi\wedge\Phi.$$

4. 在R^3上,设有向量场

$$X = \sum_{i=1}^3 X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

试找一个 $\phi \in \wedge^1 (\mathrm{R}^3)$ **使得**

$$d\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{X^i}{x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

5 . **在** R^3 **上,设有向量场**

$$X = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2 - z^2) \frac{}{x} + (xy - z) \frac{}{y} + (xz + y) \frac{}{z},$$

$$Y = (xy + z) \frac{}{x} + \frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2 - z^2) \frac{}{y} + (yz - x) \frac{}{z},$$

$$Z = (xz - y) \frac{}{x} + (yz + x) \frac{}{y} + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2 + z^2) \frac{}{z} .$$

(1) **验证:对每个** $\boldsymbol{p} \in \mathrm{R}^3$,**向量组** $\{X, Y, Z\}$ **为** R^3 **上的正交基** .

(2) **计算** Lie **括号** $[X, Y]$, $[Y, Z]$, $[Z, X]$,**并把它们用向量组** $\{X, Y, Z\}$ **表示出来** .

(3) **定义区域** $U = \mathrm{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ **和映射**

$$\boldsymbol{F}: U \to U; \ (u, v, w) = \boldsymbol{F}(x, y, z),$$

这里

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$w = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} .$$

计算

$$\boldsymbol{F}_* X, \boldsymbol{F}_* Y, \boldsymbol{F}_* Z .$$

6 . **在** R^{2n+1} **上,定义**

$$\omega = dx^{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} x^{2i-1} dx^{2i} .$$

验证

$$\omega \wedge (d\omega)^n$$

处处不为零.这里$(d\omega)^n$是n个$d\omega$之外乘积.

7.在$\mathbb{R}^n$上,定义

$$\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n .$$

设有向量场

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

定义一个$(n-1)$-形式$i_X\Omega$:

$$i_X\Omega(Y_1, \cdots, Y_{n-1}) = \Omega(X, Y_1, \cdots, Y_{n-1}),$$

这里$(Y_1, \cdots, Y_{n-1})$为任意$n-1$个向量场.求$d(i_X\Omega)$.

4.4 Lie 导数

设$X \in \mathfrak{X}(M)$,我们先考虑其积分曲线方程$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$,其中$\gamma: I \to M$.据常微分方程基本定理有下面的命题.

命题 1 对任何$p \in M$,存在区间I_p,$0 \in I_p$和惟一一条光滑曲线$\gamma_p: I_p \to M$满足$\gamma_p(0) = p$和

$$\gamma_p'(t) = X(\gamma_p(t)), \forall t \in I_p;$$

而且γ_p光滑依赖于$p \in M$.进一步,若记$\phi_t(p) = \gamma_p(t)$,则对$t_1, t_2 \in I_p$且$t_1 + t_2 \in I_p$有$\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$.

常把满足上命题的ϕ_t称为X的局部单参数变换群(或积分曲线),而称X为局部单参数变换群ϕ_t在M上诱导的向量场.

例 1 设$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.在$\mathbb{R}^3$上,设

$$X(x) = ax^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + bx^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + cx^3 \frac{\partial}{\partial x^3},$$

则它的积分曲线为

$$\gamma_x(t) = (e^{at}x^1, e^{bt}x^2, e^{ct}x^3).$$

下面我们假定$\cap_{p\in M} I_p$为包含0的开区间$I = (-\varepsilon, \varepsilon)$.于是由于

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = Id,\ \varphi_0 = Id,$$

知 φ_t 为 M 自身的微分同胚而且 $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.另外记 $X_{\boldsymbol{p}} = X(\boldsymbol{p})$.

设 $f \in C^\infty(M)$,则由定义知

$$X_p f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_t(\boldsymbol{p}))\Big|_{t=0} .$$

若 $\boldsymbol{F}: M \to M$ 为微分同胚, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$,则由 $\boldsymbol{F}_*$ 之定义知 $\boldsymbol{F}_* X_{\boldsymbol{p}} \in T_{\boldsymbol{q}} M$.

我们约定, $L_X f = X f$,这里 $f \in C^\infty(M)$.

命题 2　若 φ_t 为 X 的局部单参数变换群, $\boldsymbol{F}: M \to M$ 为微分同胚,则 $\boldsymbol{F}_* X$ 为局部单参数变换群 $\boldsymbol{F} \circ \varphi_t \circ \boldsymbol{F}^{-1}$ 在 M 上诱导的向量场 .

证明　对任意 $f \in C^\infty(M)$,由定义

$$(\boldsymbol{F}_* X_{\boldsymbol{p}})_{\boldsymbol{q}} f = X_{\boldsymbol{p}}(f \circ \boldsymbol{F}),$$

于是我们知道

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}_* X_{\boldsymbol{p}})_{\boldsymbol{q}} f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \boldsymbol{F}(\varphi_t(\boldsymbol{p}))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{F} \circ \varphi_t \circ \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{q}))_{t=0} .\end{aligned}$$

由 f 的任意性知 $\boldsymbol{F}_* X_{\boldsymbol{p}}$ 为 $\boldsymbol{F} \circ \varphi_t \circ \boldsymbol{F}^{-1}$ 在点 $\boldsymbol{q}$ 的切矢 .另外 $\boldsymbol{F} \circ \varphi_t \circ \boldsymbol{F}^{-1}$ 为局部单参数变换群, 于是, $\boldsymbol{F}_* X$ 为 $\boldsymbol{F} \circ \varphi_t \circ \boldsymbol{F}^{-1}$ 在 M 上诱导的(切)向量场 .即证 .

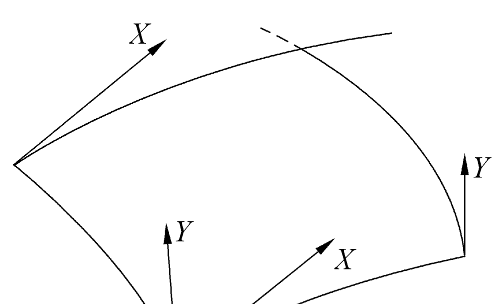

图　4.6

若 Y 为 M 上定义在 γ_p 上的向量场,则 $(\phi_t^{-1})_* Y_{\phi_t(p)}$ 为切空间 T_pM 中的光滑曲线(见图 4.6).

定义 1 称 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}((\phi_t^{-1})_* Y_{\phi_t(p)})$ 为向量场 Y 在 p 点关于 X 的 Lie 导数 $L_X Y$.

定理 1 $L_X Y = [X, Y] := \mathrm{ad}_X Y$.

证明 设 f 为定义在 p 的邻域上的光滑函数,则

$$
\begin{aligned}
(L_X Y)_p f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((\phi_t^{-1})_* Y_{\phi_t(p)}) f\Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(\phi_t^{-1})_* Y_{\phi_t(p)} f - Y_p f}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_t^{-1}) - Y_p f}{t}.
\end{aligned}
$$

据

$$
\begin{aligned}
f \circ \phi_t^{-1}(p) &= f \circ \phi_{-t}(p) \\
&= f(p) + t h_t(p),
\end{aligned}
$$

其中

$$
h_t(p) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(f \circ \phi_{-u}(p))\Big|_{u=st} \mathrm{d}s
$$

和

$$
\begin{aligned}
h_0(p) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(f \circ \phi_{-u}(p))\Big|_{u=st} \mathrm{d}s \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(f \circ \phi_{-u}(p))\Big|_{u=st} \\
&= -X_p f,
\end{aligned}
$$

知

$$
\begin{aligned}
(L_X Y)_p f &= \lim_{t\to 0} \frac{Y_{\phi_t(p)} f - Y_p f}{t} + \lim_{t\to 0} Y_{\phi_t(p)} h_t \\
&= X_p(Yf) - Y_p(Xf)
\end{aligned}
$$

$$= [X, Y]_p f,$$

即证.

定义 2　对 $\omega \in \wedge^1(M)$,定义 Lie 导数 $L_X\omega$ 为

$$(L_X\omega)(Y) = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y),$$

这里 X 和 Y 为向量场.

若有向量场 $X_1, \cdots, X_k \in x(M)$ 线性无关,现在我们来看一个问题:是否有 M 的子流形 N^k 使得 $T_p N = \mathrm{span}\{X_i|_p\}(\boldsymbol{p} \in N)$ 呢?在 $k = 1$ 时命题 1 说这是可以的;但一般说来,这是一个很难的问题.

但是若是的话,我们称向量场组 $(X_1, \cdots, X_k)$ 为可积的,则必须有 $[X_i, X_j]_p \in T_p N$.于是存在光滑函数组使得

$$[X_i, X_j] = \sum_{m=1}^{k} c_{ij}^m X_m, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

常称此式为 Frobenius 条件或可积条件.

定义 3　称任意向量场组 $(X_1, \cdots, X_k)$(不必线性无关)在 $\boldsymbol{p} \in M$ 为可积的,如果有 M 的子流形 N 使得 $T_p N = \mathrm{span}\{X_i|_p\}(\boldsymbol{p} \in N)$.

Frobenius 定理　在一个坐标邻域 U 上,若线性无关向量场 $X_1, \cdots, X_k$ 满足 F-条件,则对每个 $\boldsymbol{p} \in U$ 存在 U 中的一个 k 维子流形 N 使得,$\boldsymbol{p} \in N$ 且

$$T_q N = \mathrm{span}\{X_i|_q\}, \quad \boldsymbol{q} \in N.$$

因为此定理的证明较长,故略去.有兴趣的读者参见参考文献.

Frobenius 定理可以用微分形式来叙述如下.

Frobenius 定理(微分形式描述)　设(ω_α)为一组 1-形式.方程组

$$\omega_\alpha = 0$$

可积的充要条件是存在微分形式组$(F_{\alpha\beta})$使得

$$\mathrm{d}\omega_\alpha = \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta.$$

这里我们来看一个例子以说明 Frobenius 条件 .

例 2 在$\mathbb{R}^2$上,设

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 .$$

我们知道

$$\mathrm{d}\omega = \frac{Q}{x} - \frac{P}{y} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y .$$

所以 Frobenius 条件 $\mathrm{d}\omega = F\wedge\omega$对某 $F = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$ 成立等价于

$$\frac{Q}{x} - \frac{P}{y} = AQ - BP .$$

由于 $\omega = 0$, 根据 Frobenius 定理知,对任何点(x_0, y_0),这等价于有一条过(x_0, y_0)的光滑曲线, 它可以由隐式表示 $f(x, y) = c$ 和显式表示 $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t))$两种方式给出 .于是有 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{p}') = 0$.但是,$\omega(\boldsymbol{p}') = 0$, 即

$$Px' + Qy' = 0 .$$

所以在点(x_0, y_0)处, 有 $C(x, y)\omega = \mathrm{d}f$, 这里 $C(\cdot, \cdot)$为光滑函数 .

现在我们来看一个例子以说明 Frobenius 定理的用途 .

例 3 设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$满足以下方程组

$$\frac{u}{x} + B_1 v = C_1 ,$$

$$\frac{u}{y} + B_2 v = C_2 ,$$

$$\frac{v}{x} + A_1 u = C_3 ,$$

$$\frac{v}{y} + A_2 u = C_4 ,$$

其中 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, C_4$ 为 x, y 的已知函数 .

根据 $\mathrm{d}u = u_x\mathrm{d}x + u_y\mathrm{d}y$, 我们定义

$$B = B_1\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y,$$

$$A = A_1 \mathrm{d}x + A_2 \mathrm{d}y,$$

$$R = C_1 \mathrm{d}x + C_2 \mathrm{d}y,$$

$$W = C_3 \mathrm{d}x + C_4 \mathrm{d}y .$$

这样以上方程组可写成

$$\mathrm{d}u + Bv = R,$$

$$\mathrm{d}v + Au = W .$$

定义

$$\omega_1 = \mathrm{d}u + Bv - R,$$

$$\omega_2 = \mathrm{d}v + Au - W .$$

这样,我们的问题是看方程组

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = 0 .$$

在(x, y, u, v)**的四维空间中是否可积 .**

由 Frobenius **定理知,方程组可积的充要条件为**

$$\mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 .$$

因为 A, B, R, W **的定义域是同一个二维空间,所以**

$$A \wedge \mathrm{d}B = 0,$$

$$A \wedge \mathrm{d}R = 0,$$

$$A \wedge \mathrm{d}W = 0,$$

$$B \wedge \mathrm{d}A = 0,$$

$$B \wedge \mathrm{d}R = 0,$$

$$B \wedge \mathrm{d}W = 0,$$

$$R \wedge \mathrm{d}A = 0,$$

$$R \wedge \mathrm{d}B = 0,$$

$$R \wedge \mathrm{d}W = 0,$$

$$W \wedge \mathrm{d}A = 0,$$

$$W \wedge \mathrm{d}B = 0,$$

$$W \wedge \mathrm{d}R = 0 .$$

利用

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}Bv - B \wedge \mathrm{d}v - \mathrm{d}R,$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}Au - A \wedge \mathrm{d}u - \mathrm{d}W .$$

我们就得可积条件

$$\frac{A_2}{x} - \frac{A_1}{y} = 0,$$

$$\frac{B_2}{x} - \frac{B_1}{y} = 0,$$

$$\frac{C_2}{x} - \frac{C_1}{y} + B_1 C_4 - B_2 C_3 = 0,$$

$$\frac{C_4}{x} - \frac{C_3}{y} + A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0 .$$

最后我们指出, E .Cartan 的外微分法和 Frobenius 定理在微分几何问题,特别是在偏微分方程组的研究中有着广泛的用途 .目前仍有很多数学家在这个方向上做工作 .这个方向的发展应该是有前途的 .代表性人物有陈省身(S .S .Chern), P .Griffiths, R .Bryant .有兴趣的读者可以参考他们写的有关专著 .

习 题

1 . 在 $\mathbb{R}^3$ 上,我们有向量场

$$X = y \frac{}{x} - x \frac{}{y}$$

和

$$Y = z \frac{}{x} - y \frac{}{z},$$

求 $L_X Y$.

2 . 证明: 对 $f \in C^{\infty}(M)$, 有

$$L_X \mathrm{d} f = \mathrm{d} L_X f .$$

3. 设 $U \in \mathbf{R}^n$ 为开集, $f \in C^\infty(U)$, $X, Y \in x(U)$, 对 $x \in U$, $r \in \mathbf{N}$ 归纳证明:

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{d} L_X^m f(x), a\mathrm{d}_X^{k+r} Y(x)\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i L_X^{r-i} \langle \mathrm{d} L_X^{m+i} f(x), a\mathrm{d}_X^k Y(x)\rangle .\end{aligned}$$

这里 $m, k \in \mathbf{N}$.

4. 在$\mathbf{R}^{2n}$上,定义 2-形式

$$\omega = \sum_i \mathrm{d} x^i \wedge \mathrm{d} x^{n+i} .$$

我们称它为$\mathbf{R}^{2n}$上的辛结构 .

(1) 验证: $(\omega)^n$ 处处不为零 .这里$(\omega)^n$ 是 n 个 ω 之外乘积 .

(2) 给定$\mathbf{R}^{2n}$上的一个向量场 X,我们定义一个 1-形式 ω_X (常记为 $i_X\omega$)为

$$\omega_X(Y) = \omega(X, Y),$$

这里 Y 为$\mathbf{R}^{2n}$上的任意一个向量场 .验证: $\mathrm{d}(\omega_X) = 0$ 的充要条件是 $L_X \omega = 0$.

(3) 验证映射 $X \to \omega_X$ 是 $x(\mathbf{R}^{2n})$到$\wedge^1 \mathbf{R}^{2n}$的同构 .

(4) 对 $f \in C^2(\mathbf{R}^{2n})$,找出对应于 $\mathrm{d} f$ 的向量场 X_f 使得

$$\mathrm{d} f = \omega_{X_f} .$$

5. 在$\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$上,设

$$\omega = -y\mathrm{d} x + x\mathrm{d} y = 0 .$$

验证这个方程是可积的 .

6. 在$\mathbf{R}^3$上,设

$$\omega = P\mathrm{d} x + Q\mathrm{d} y + R\mathrm{d} z = 0 .$$

找出这个方程的可积性条件 .

7. 在$\mathbf{R}^2$上,设

$$x' = y,$$

$$y' = -x + (1 - x^2 - y^2)y.$$

证明这个方程组只有一条闭的积分曲线.

8. 在 $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ 上,设

$$x' = (x^2 + y^2)^{-3/2}(12x^2y^2 - 3x^4 - y^4),$$

$$y' = (x^2 + y^2)^{-3/2}(10xy^3 - 6x^3y).$$

找出这个方程组的积分曲线.

9. 在 $\mathbb{R}^4$ 上,设

$$\omega^1 = [x^3 - (x^1)^2]\mathrm{d}x^1 + x^1x^2\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 = 0,$$

$$\omega^2 = f\mathrm{d}x^1 + g\mathrm{d}x^2 = 0.$$

这里 $f, g \in C^2(\mathbb{R}^4)$ 待定.

(1) 对 $f = 1$,找出 g 的条件使上方程组是可积的.

(2) 对 $f = g = 2$ 找出对应的积分流形.

(3) 找 f, g 的条件使上方程组是可积的.

10. 设 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. 在 $\mathbb{R}^3$ 上,设

$$\omega = [x^3 - (x^1)^2 - x^1x^2]\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 = 0.$$

找出过曲线

$$x^1 = at, \quad x^2 = bt, \quad x^3 = ct$$

的积分流形.

第 5 章　张量和黎曼几何

过去我们接触过一些对象，如函数和其梯度(场)、向量场、外微分形式和黎曼度量等，它们的分量在坐标变换下满足适当的变换律．我们先来看一个例子：设一质点在 R^3 中运动，在坐标系 (x^1, x^2, x^3) 中，其速度向量的分量为 $\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}$，而在坐标系 (z^1, z^2, z^3) 中为 $\frac{\mathrm{d}z^1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z^3}{\mathrm{d}t}$．据

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{x^i}{z^j}\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t}, \quad i = 1, 2, 3$$

知 $T = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ 分量在坐标变换下满足适当的变换律．

把这些概念做概括总结就得到了张量的概念．在这里我们将采用物理和力学文献中常用的写法来介绍它．其好处在于计算方便．在此约定我们所讨论的对象都在一个 n 维空间(流形)中．

5.1　张量及其代数运算

让我们开门见山定义出张量这一概念．

定义 1　称一个对象是 (m, k) 型张量 T 是指它在任何坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$ 中可用一组函数 $(T^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_k})$ 表示，而且在坐标变换 $x^i = x^i(z^1, \cdots, z^n)$ 下有变换律

$$T^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_k} = \text{契}^{r_1\cdots r_m}_{s_1\cdots s_k}\frac{x^{i_1}}{z^{r_1}}\cdots\frac{x^{i_m}}{z^{r_m}}\frac{z^{s_1}}{x^{j_1}}\cdots\frac{z^{s_k}}{x^{j_k}}, \tag{1}$$

其中 $(\text{珥}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_k})$ 为此对象在坐标系 $(z^1, \cdots, z^n)$ 下的表示．这里 i, j, r, s

为取值 $1,\cdots,n$ 的指标. 所谓指标,比如说 i_1,是指它可自由地在集合 $1,\cdots,n$ 中取值. 记 $(i)_m=(i_1,\cdots,i_m)$,$(j)_k=(j_1,\cdots,j_k)$等.

注意上、下指标的写法很讲究. 事实上,由

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial z^r}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial z^r},\quad \frac{\partial}{\partial z^r}=\frac{\partial x^i}{\partial z^r}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

和

$$\mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial z^r}\mathrm{d}z^r,\quad \mathrm{d}z^r=\frac{\partial z^r}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i,$$

我们就得到了 (m,k) 型张量 $\boldsymbol{T}$ 的几何记法

$$\boldsymbol{T}=T^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_m}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_k};$$

这里和以后我们采用上、下复指标从 1 到 n 求和; 记号 $\otimes$ 代表在坐标变换下有变换律(1)式.

在坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 中我们常写

$$\boldsymbol{T}=\left(T^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_k}\right)$$

或

$$\boldsymbol{T}=\left(T^{(i)_m}_{(j)_k}\right).$$

让我们看两个例子.

例 1 函数的梯度. 设 $f:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}$ 为光滑函数,在 (x^1,x^2,x^3) 中其梯度为

$$D_x f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right),$$

在 (z^1,z^2,z^3) 中其梯度为

$$D_z f=\left(\frac{\partial f}{\partial z^1},\frac{\partial f}{\partial z^2},\frac{\partial f}{\partial z^3}\right).$$

据

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial x^i},$$

知函数 f 的梯度是 $(0,1)$ 型张量. 常称 $(0,1)$ 型张量为协向量.

例 2　1-形式: $\omega = \xi_j \mathrm{d} x^j$. 证明方法是一样的.

张量有 4 种代数运算如下.

(1) **指标的置换**　设 $\boldsymbol{T} = (T^{(i)_m}_{(j)_k})$, 若 $(q)_m$ 为 $(i)_m$ 的一个置换, 而 $(p)_k$ 为 $(j)_k$ 的一个置换, 则我们可得一个新的 (m, k) 型张量 $\tilde{\boldsymbol{T}} = (\tilde{T}^{(q)_m}_{(p)_k})$, 其中

$$\tilde{T}^{(q)_m}_{(p)_k} = T^{(i)_m}_{(j)_k}.$$

我们不允许上、下指标互换. 所谓置换就是把指标的位置互换.

(2) **缩并(迹)**　把在上、下指标对缩并是指作和式

$$\sum_{i=1}^{n} T^{i_1 \cdots i_t = i \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_s = i \cdots j_n} = \bar{T}^{(i)_{m-1}}_{(j)_{k-1}}$$

得另一个 $(m-1, k-1)$ 型张量 $\bar{\boldsymbol{T}}$. 特别地, 对 $\boldsymbol{T} = (T^i_j)$ 为 $(1, 1)$ 型张量, 记 $\bar{T} = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{T} = T^i_i$; 显然 $\mathrm{tr}\, \boldsymbol{T}$ 为函数.

(3) **张量的乘积(也称为 Kronecker 乘积)**　设 $\boldsymbol{T} = (T^{(i)_m}_{(j)_k})$ 为 (m, k) 型张量, $\boldsymbol{S} = (S^{(\alpha)_t}_{(\beta)_s})$ 为 (t, s) 型张量, 则我们定义逐点乘积

$$T^{(i)_m}_{(j)_k} S^{(\alpha)_t}_{(\beta)_s} := M^{i_1 \cdots i_m \alpha_1 \cdots \alpha_t}_{j_1 \cdots j_k \beta_1 \cdots \beta_s}$$

得一个 $(m+t, k+s)$ 型张量 $\boldsymbol{M} = (M^{(i)_m (\alpha)_t}_{(j)_k (\beta)_s})$.

(4) **指标上升或下降**　在一个(广义)黎曼空间 $(N, \boldsymbol{g})$ 中, 若 $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$, 则由分量

$$S^{(i)_{m-1}}_{i(j)_k} := g_{it} T^{t(i)_{m-1}}_{(j)_k}$$

决定出一个 $(m-1, k+1)$ 型张量 $\boldsymbol{S}$, 称这个过程为下降指标.

记 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 则由分量

$$A^{j(i)_m}_{(j)_{k-1}} := g^{jt} T^{(i)_m}_{tj_1 \cdots j_{k-1}}$$

决定出一个 $(m+1, k-1)$ 型张量 $\boldsymbol{A}$, 此即是上升指标.

习　　题

1. 试证: (1) 黎曼度量是 $(0,2)$ 型张量.

(2) 若在 (m, k) 型张量之间定义逐点定义线性组合

$$\lambda \boldsymbol{T} + \mu \boldsymbol{S} = \boldsymbol{U} = (U^{(i)}_{(j)}{}^m_k),$$

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{T} = (T^{(i)}_{(j)}{}^m_k)$, $\boldsymbol{S} = (S^{(i)}_{(j)}{}^m_k)$,而

$$U^{(i)}_{(j)}{}^m_k = \lambda T^{(i)}_{(j)}{}^m_k + \mu S^{(i)}_{(j)}{}^m_k,$$

则(m, k)型张量构成一个 $n(m+k)$维线性空间.

2. 证明 k-微分形式是$(0, k)$型张量.

3. 定义

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{当}(i_1, \cdots, i_n)\text{中有重复指标时;} \\ +1, & \text{当}(i_1, \cdots, i_n)\text{为}(1, \cdots, n)\text{的偶置换时;} \\ -1, & \text{当}(i_1, \cdots, i_n)\text{为}(1, \cdots, n)\text{的奇置换时.} \end{cases}$$

对张量 $\boldsymbol{T} = (T^i_j)$定义

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = T^i_i.$$

证明

$$T^j_{i_k} \varepsilon_{i_1 \cdots i_{k-1} j i_{k+1} \cdots i_n} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) \varepsilon_{i_1 \cdots i_n}.$$

4. 说明$\mathbb{R}^3$中的矢乘不是张量乘积.

5.2　张量的 Lie 导数

设 M 为 n 维微分流形和 $\xi \in \mathscr{X}(M)$.设 ξ 在 M 上诱导一个局部单参数变换群 $\boldsymbol{F}_t$, $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$.若在坐标系$(x^1, \cdots, x^n)$中 ξ 有分量表示(ξ^i),令 $F^i_t = x^i \circ \boldsymbol{F}_t$,则由

$$\xi^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F^i_t)\Big|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

设$(x^1_0, \cdots, x^n_0)$为点 $\boldsymbol{p} \in M$ 附近的坐标系,于是在$|t|$很小时,$\boldsymbol{F}_t$ 定义出一个单参数坐标系

$$(x^1(t, x_0), \cdots, x^n(t, x_0)),$$

即

$$\boldsymbol{F}_t: (x^1_0, \cdots, x^n_0) \to (x^1(t, x^1_0, \cdots, x^n_0), \cdots, x^n(t, x^1_0, \cdots, x^n_0)).$$

做展开式

$$x^i(t, x_0^1, \cdots, x_0^n) = x_0^i + \xi^i(x_0)t + O(t^2), \tag{1}$$

即得

$$\frac{x^i}{x_0^j} = \delta^i_j + t\frac{\xi^i}{x_0^j} + O(t^2) \tag{2}$$

和

$$\frac{x_0^i}{x^j} = \delta^i_j - t\frac{\xi^i}{x_0^j} + O(t^2). \tag{3}$$

若 $\boldsymbol{T}$ 为(m, k)型张量,它在坐标系(x^i)中记为$(T^{(t)_m}_{(r)_k})$.

定义 1

$$(F_t^* T)^{(i)_m}_{(j)_k} = T^{t_1\cdots t_m}_{r_1\cdots r_k}\frac{x^{r_1}}{x_0^{j_1}}\cdots\frac{x^{r_n}}{x_0^{j_k}}\frac{x_0^{i_1}}{x^{r_1}}\cdots\frac{x_0^{i_m}}{x^{r_m}}$$

为 $\boldsymbol{T}$ 在坐标系(x_0)中的表示.

定义 2 张量$(T^{(i)_m}_{(j)_k})$沿向量场 ξ 的 Lie 导数为

$$L_\xi T^{(i)_m}_{(j)_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}_t^* \boldsymbol{T})^{(i)_m}_{(j)_k}\bigg|_{t=0}.$$

根据(2)式和(3)式知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}_t^* \boldsymbol{T})^{(i)_m}_{(j)_k} = {} & T^{t_1\cdots t_m}_{r_1\cdots r_k}(t, \boldsymbol{x})\ \delta^{r_1}_{j_1} + t\frac{\xi^{r_1}}{x_0^{j_1}}\ \cdots\ \delta^{r_k}_{j_k} + t\frac{\xi^{r_k}}{x_0^{j_k}} \\ & \times\ \delta^{i_1}_{t_1} - t\frac{\xi^{i_1}}{x_0^{t_1}}\ \cdots\ \delta^{i_m}_{t_m} - t\frac{\xi^{i_m}}{x_0^{t_m}} + O(t^2) \\ = {} & T^{(i)_m}_{(j)_k}(t, \boldsymbol{x}) + t\ T^{(i)_m}_{rj_2\cdots j_k}\frac{\xi^r}{x_0^{j_1}} + \cdots \\ & + T^{(i)_m}_{j_1\cdots j_{k-1}r}\frac{\xi^r}{x_0^{j_k}} - T^{ri_2\cdots i_m}_{(j)_k}\frac{\xi^{i_1}}{x_1} - \cdots \\ & - T^{i_1\cdots i_{m-1}r}_{(j)_k}\frac{\xi^{i_m}}{x^r} + O(t^2),\end{aligned}$$

因此

$$L_\xi T^{(i)_m}_{(j)_k} = \xi^s\frac{T^{(i)_m}_{(j)_k}}{x^s} + T^{(i)_m}_{rj_2\cdots j_k}\frac{\xi^r}{x^{j_1}} + \cdots + T^{(i)_m}_{j_1\cdots j_{k-1}r}\frac{\xi^r}{x^{j_k}}$$

$$- \ T^{r i_2 \cdots i_m}_{(j)\ k} \frac{\xi^{i_1}}{x^r} - \cdots - T^{i_1 \cdots i_{m-1} r}_{(j)\ k} \frac{\xi^{i_m}}{x^r}, \qquad (4)$$

这里利用了当 $t = 0$ 时 $x^i = x_0^i$ (见(1)式) .

例 1　设 $T = f$ 为光滑函数,则

$$L_\xi f = \xi^i \frac{f}{x^i} = \quad {}_\xi f .$$

例 2　$\boldsymbol{T} = (T^i)$ 为向量场,则

$$L_\xi T^i = \xi^j \frac{T^i}{x^j} - T^j \frac{\xi^i}{x^j} .$$

据

$$L_T \xi^i = T^j \frac{\xi^i}{x^j} - \xi^j \frac{T^i}{x^j},$$

得 $L_T \xi^i = - L_\xi T^i$,此即 $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{T}] = - [\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\xi}]$.

例 3　设 $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ 为(0,2)型张量,则

$$L_\xi T_{ij} = \xi^s \frac{T_{ij}}{x^s} + T_{rj} \frac{\xi^r}{x^i} + T_{ir} \frac{\xi^r}{x^j} \equiv u_{ij} .$$

称 u_{ij} 为应变张量(strain tensor) .

当 $T_{ij} = \delta_{ij}$ 时,则有通常形式

$$u_{ij} = \frac{\xi^i}{x^j} + \frac{\xi^j}{x^i} .$$

现在我们给出微分形式的张量形式的定义 .

定义 3　设 $\omega = (T_{i_1 \cdots i_k})$ 为 $(0, k)$ 型张量 .如果对于指标 i_t, i_s 交换变换,有

$$T_{i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_k} = - T_{i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_k},$$

我们就称 ω 为 k 阶微分形式 .它的几何记法是

$$\omega = T_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d} x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^{i_k} .$$

例 4　设 $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ 为黎曼度量,令 $|\boldsymbol{g}| = \det(g_{ij})$,并定义 $(M, \boldsymbol{g})$ 的体积形式为

$$|\boldsymbol{g}| \mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^n = \quad |\boldsymbol{g}| \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} .$$

于是

$$L_\xi(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}) = \sqrt{|g|}\,\xi^k\frac{\partial \ln\sqrt{|g|}}{\partial x^k}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$$

$$+\sqrt{|g|}\left(\varepsilon_{k i_2\cdots i_n}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{i_1}}+\cdots+\varepsilon_{i_1\cdots i_{n-1}k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{i_n}}\right),$$

但括号中的项正是$\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$,这是因为

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}0, & 当(i_1,\cdots,i_n)中有重复指标时;\\ +1, & 当(i_1,\cdots,i_n)为(1,\cdots,n)的偶置换时;\\ -1, & 当(i_1,\cdots,i_n)为(1,\cdots,n)的奇置换时.\end{cases}$$

设 A^{im} 为(g_{jk})的代数余子式,则

$$g^{im}=A^{im}(|g|)^{-1}.$$

于是有

$$\frac{\partial|g|}{\partial x^k}=\varepsilon_{i_1\cdots i_n}\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{1i_1}\cdots g_{ni_n})$$

$$=A^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

$$=|g|\,g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

所以

$$L_\xi(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_m})=\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_m}\left(\xi^k\frac{\partial\ln\sqrt{|g|}}{\partial x^k}+\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right)$$

$$=\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_m}\left(\xi^k\frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}+\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right),$$

其中$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$,另外

$$\mathrm{tr}_g(u_{im})=g^{im}u_{im}=2\left(\xi^k\frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}+\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\right),$$

从而知

$$L_\xi(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}) = \frac{1}{2}g^{im}u_{im}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}_g(u_{im})\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_n}.$$

习　　题

1. 利用例 1 和例 2 证明:

$$L_\xi(fT^i) = fL_\xi T^i + L_\xi f\; T^i.$$

2. 对任何张量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{R}$,有

$$L_\xi(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R}) = L_\xi\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}\otimes L_\xi\boldsymbol{R}.$$

3. 对 ω_1,ω_2 为任意两个微分形式,证明:

$$L_\xi(\omega_1\wedge\omega_2) = L_\xi\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge L_\xi\omega_2.$$

5.3　对称和反对称张量,张量微分

前面介绍了一般型的张量,在实际问题中,比较常用的有两类张量,分别为对称和反对称张量.在这里我们仅考虑(0,2)型对称张量(常称为二阶对称张量)和$(0,k)$型反对称或$(k,0)$型反对称张量.

定义 1　称(0,2)型张量 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$是对称的是指总有 $T_{ij}=T_{ji}$,即指标互换不变;简称 $\boldsymbol{T}$为二阶对称张量.

定义 2　称$(0,k)$型张量 $\boldsymbol{T}=(T_{i_1\cdots i_k})$是反对称的是指在指标做奇置换下 $\boldsymbol{T}=(T_{i_1\cdots i_k})$变号,而在指标做偶置换时 $\boldsymbol{T}=(T_{i_1\cdots i_k})$不变号;同样可定义$(k,0)$型反对称张量.

黎曼度量(g_{ij})是最典型的二阶对称张量;而流形上的 k-形式是$(0,k)$型反对称张量.从定义上看,$(0,k)$型反对称张量正是 k-形式.和以前不同的地方只是记法不一样.虽然我们不给予很多

说明,但是我们指出,这一点并不是很显然的.请大家作为思考题做一下.以后,我们把 M 上 k-形式空间记为 $A^k(M)$.

对一般的$(0,2)$型张量,我们可把它分解为对称与反对称两部分.

比方说对 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$,定义其对称部 $Q_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})$为 $A_{(ij)}$,这里(ij)表示对称化 $A_{(ij)}=A_{(ji)}$,即 $Q_{ij}=Q_{ji}$.定义其反对称化为

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})=A_{[ij]},$$

其中$[ij]$表示

$$A_{[ij]}=-A_{[ji]},$$

即

$$B_{ij}=-B_{ji}.$$

显然有

$$A_{ij}=Q_{ij}+B_{ij}.$$

在一个黎曼空间中我们可定义$(1,1)$型或$(2,0)$型对称或反对称张量.这只需把指标下降成$(0,2)$型张量就可定义.

设$(M,\boldsymbol{g})$为 n 维广义黎曼空间,令

$$\boldsymbol{g}=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

记

$$|\boldsymbol{g}|=|\det(g_{ij})|,$$
$$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1},$$
$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{g})=\operatorname{sgn}(\det(g_{ij})).$$

定义 3 设

$$\boldsymbol{T}=T_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

为 M 上的 k-形式,我们定义 Hodge 算子如下:

$$(*T)_{i_{k+1}\cdots i_n} = \frac{1}{(k!)}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\cdots i_k}T^{i_1\cdots i_k},$$

其中

$$T^{i_1\cdots i_k} = g^{i_1j_1}\cdots g^{i_kj_k}T_{j_1\cdots j_k}.$$

例 1 在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上,对

$$\omega = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z,$$

有

$$*\omega = A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

和

$$**\omega = \omega.$$

例 2 在四维欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 上,设

$$g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}w^2$$

为其标准的黎曼度量.设有 2-形式

$$R = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z - \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}w,\quad T = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}w$$

和

$$S = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w,$$

则

$$*R = R,\quad *T = T,\quad *S = S.$$

例 3 在 $\mathbb{R}^2$ 上,设

$$g = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2,$$

于是 $\mathrm{sgn}(g) = -1$.

$$\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1.$$

所以有

$$*\mathrm{d}t = g^{0i}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}x$$

和

$$*\mathrm{d}x = g^{1i}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}t.$$

过去我们曾对 k-形式定义过其微分,即外微分 d.这里我们给出它的一个等价定义.

定义 4　对 T 为 k-形式

$$(\mathrm{d}T)_{i_1\cdots i_{k+1}} = \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^{m-1} \frac{\partial T_{i_1\cdots \hat{i}_m \cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_m}},$$

这里 $\hat{i}_m$ 代表删除 i_m 的意思 .

用这个定义,也容易知道: $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}T = 0$.

现在我们对 k-形式,定义余微分 δ 为

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * \mathrm{d} * .$$

于是对 k-形式 T, 我们可以得到一个 $(k-1)$-形式 δT .易见: $\delta^2 = 0$.

这样我们就可以定义著名的 Hodge-Laplace 算子

$$\Delta = \delta\circ\mathrm{d} + \mathrm{d}\circ\delta .$$

易见

$$\Delta = (\mathrm{d}+\delta)^2 .$$

定义 5　如果对 k-形式 T 有 $\Delta T = 0$, 我们就称 T 为调和 k-形式 .

例 4　在四维时空$\mathbb{R}^{3,1}$中,我们记 $t = x^0$,则其 Lorentz 度量为

$$g = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 ,$$

回忆 Maxwell 方程组

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{B} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = 4\pi\boldsymbol{j},$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0},$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} .$$

这里

$$\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3) = \text{电场},$$

$$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3) = \text{磁场},$$

$$\rho = \text{电荷密度},$$

$$\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, j_3) = \text{电流矢量}.$$

定义

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_2 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

和 2-形式

$$\Omega = \Omega_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\alpha.$$

令

$$J = \rho\,\mathrm{d}x^0 + j_1\,\mathrm{d}x^1 + j_2\,\mathrm{d}x^2 + j_3\,\mathrm{d}x^3.$$

于是,Maxwell 方程组可写为

$$\mathrm{d}\Omega = 0, \quad \delta\Omega = 4\pi J.$$

对一般的张量 $\boldsymbol{T} = (T^{(i)m}_{(j)k})$,能否定义其微分 d$\boldsymbol{T}$ 使之仍为张量呢?一般说来这是不可能的.但是,我们可以引入一个叫协变导数的概念.

我们先在 $\mathbb{R}^n$ 空间中考虑最简单的情形即 $\boldsymbol{T} = (T^i)$ 为向量场,这里 T^i 为 $\boldsymbol{T}$ 在直角坐标系$(\boldsymbol{x})$中的分量表示.设 $z^t = z^t(\boldsymbol{x})$ 为坐标变换(这里$(\boldsymbol{z})$可为弯曲坐标),设 $\boldsymbol{T}$ 在$(\boldsymbol{z})$中有表示 $\bar{T}^i$.记函数 T^i 的微分为 $T^i_{;j}$.若 $T^i_{;j}$ 为张量,则

$$T^i_{;j}\frac{\partial x^j}{\partial z^s}\frac{\partial z^t}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z^s}\frac{\partial z^t}{\partial x^i}.$$

由于 T^i 为向量场,所以

$$T^i = \bar{T}^k\frac{\partial x^i}{\partial z^k}, \quad \bar{T}^t = T^i\frac{\partial z^t}{\partial x^i},$$

于是有

$$\bar{T}^t_{;s} = \frac{\partial}{\partial z^s}\left(\bar{T}^k\frac{\partial x^i}{\partial z^k}\right)\frac{\partial z^t}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial T^t}{\partial z^s} - T^i \frac{\partial}{\partial z^s}\frac{\partial z^t}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial T^t}{\partial z^s} - T^k \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial^2 z^t}{\partial x^i \partial x_m}\frac{\partial x^m}{\partial z^s}.$$

令

$$\Gamma^t_{ks} = - \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial^2 z^t}{\partial x^i \partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial z^s},$$

则有

$$T^t_{;s} = \frac{\partial T^t}{\partial z^s} + \Gamma^t_{ks} T^k .$$

据

$$\frac{\partial z^t}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial z^s} = \delta^t_s \equiv \text{const},$$

得

$$0 = \frac{\partial}{\partial z^t}\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial z^s}\right)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\frac{\partial^2 z^t}{\partial x^i \partial x^m} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial z^s},$$

所以

$$\Gamma^t_{ks} = - \frac{\partial z^t}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial z^k \partial z^s}. \qquad (*)$$

这些计算引导出下面的定义 .

定义 6 若向量场 $\boldsymbol{T}$ 在坐标系中的分量为 (T^i), 定义 $\boldsymbol{T}$ 的协变导数 DT 为

$$T^i_{;j} = \frac{\partial T^i}{\partial z^j} + \Gamma^i_{mj} T^m,$$

其中 Γ^i_{mj} 在坐标变换 $z^i = z^i(\boldsymbol{x})$ 下有表达式 $(*)$.

由上运算知为, $T^i_{;j}$ 型 $(1,1)$ 张量 .但这种方法缺乏美感, 完全是按我们在曲面论中的经验来硬性定义的 .在下一节, 我们采用公理化思维方式来直接定义张量的协变导数 .从历史上讲, 找到张量

的协变导数运算经历了很长的时间.以上介绍的工作主要是由 Christoffel 完成的.在下一节我们将深入讨论协变导数运算.

习 题

1. 设 T 为 k-形式,证明:

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{sgn}(g)\,T.$$

2. 若向量场 $\boldsymbol{T}$ 在 $(\boldsymbol{y})$ 坐标中有表示 (ξ^i),设其协变导数在 $(\boldsymbol{y})$ 中为 $(\xi^i_{;j})$ 即

$$D_j\xi^i := \xi^i_{;j} = \frac{\xi^i}{y^j} + \Gamma^i_{mj}\cdot\xi^m.$$

试证:

(1) $$\Gamma^i_{mj} = \frac{y^i}{z^t}\,\Gamma^t_{rs}\,\frac{z^r}{y^m}\,\frac{z^s}{y^j} + \frac{{}^2 z^t}{y^m\, y^j}$$

(2) $T^i_{mj} \equiv \Gamma^i_{mj} - \Gamma^i_{jm}$ 是张量.

(3) 若 f 为函数,则

$$D_j(fT^i) = {}_j f\,T^i + fD_jT^i.$$

3. 验证

$$*\Delta = \Delta *.$$

4. 在四维欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 上,找 3 个 2-形式 P, Q 和 Ω,使得

$$*P = -P,\quad *Q = -Q,\quad *\Omega = -\Omega,$$

而且它们和例 2 中的 R, S, T 一起构成 $A^2(\mathbb{R}^4)$ 的一组基底.

5. 在 $\mathbb{C}^2$ 上我们引入以下矩阵乘法结构:

$$(z, w) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ w & -\bar{z} & 1 \end{pmatrix}$$

我们定义 Heisenberg 群

$$H^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + w + \bar{w} = 0\}.$$

(1) 验证 H^3 是带微分结构的群(从而是流形)而且这个群在变换

$$z \to z + a$$

和

$$w \to w - \bar{a}z + b$$

下不变.

(2) 于是我们可以找到不变的 1-形式 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}w + \bar{z}\mathrm{d}z$.这样我们可以定义

$$\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}z|^2 + |\mathrm{d}w + \bar{z}\mathrm{d}z|^2,$$

验证 $\mathrm{d}s^2$ 是 H^3 上的黎曼度量.

(3) 对$(z, w) \in H^3$,令

$$z = x + \sqrt{-1}y, \quad w = u + \sqrt{-1}v,$$

则有

$$x^2 + y^2 + 2u = 0.$$

微分之,可得

$$\mathrm{d}u = -x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y.$$

定义

$$\eta^1 = \mathrm{d}x, \eta^2 = \mathrm{d}y, \eta^3 = \mathrm{d}v + x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

验证

$$\mathrm{d}s^2 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2.$$

(4) 计算(η^i)的结构方程.

6. 设 M^2 为与 S^2 同胚的光滑闭曲面.设 $\mathrm{d}s^2$ 为它的光滑黎曼度量 $\mathrm{d}s^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$,这里$(\theta_1, \theta_2)$为 $\mathrm{d}s^2$ 的局部活动正交余标架.于是我们有结构方程:

$$\mathrm{d}\theta_1 = \theta_2 \wedge \theta_{21},$$

$$\mathrm{d}\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_{12},$$

$$\theta_{12} = -\theta_{21},$$

$$d\theta_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2 .$$

证明 T_1M(即 M 的单位切丛)为三维流形.在 T_1M 上定义光滑黎曼度量

$$\frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_{12}^2)$$

和它的局部活动正交余标架

$$w_1 = \frac{1}{2}\theta_1,\ w_2 = \frac{1}{2}\theta_2,\ w_3 = -\frac{1}{2}\theta_{12} .$$

计算(w_i)的结构方程.

7.如果例4中 Maxwell 方程组中的 Ω 和 J 只依赖于变量(x_1, x_2).试给出最简化的 Maxwell 方程组的形式.

5.4　协变导数和黎曼曲率

设 M 为 n 维光滑流形,记 $T^{1,1}(M)$为 M 上的(1,1)型张量空间,回顾 $x(M)$为 M 上的向量场空间.作为公理化的一般性定义,我们称满足 Leibniz 法则的线性算子 $D: x(M) \to T^{1,1}(M)$为协变导数或联络.所谓 Leibniz 法则,即是有

$$D(fX) = df \otimes X + fDX$$

对任何 $f \in C^\infty(M)$和 $X \in x(M)$都成立.

在局部坐标系(x^i)中,$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,常记 $DX = X^i_{,k} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$.

而对 $v \in T_pM$, $v = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$,令

$$D_V X \equiv \langle DX, V\rangle \Big|_p = V^k X^i_{,k} \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

并称 $D_i = D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ 为联络 D 的局部表示.另外定义 Γ^i_{jk}(称之为 Christoffel 符号)使得

$$D_i \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

于是,利用 Leibniz 法则我们得

$$D_i X = D_i X^k \frac{}{x^k} + X^k D_i \frac{}{x^k}$$

$$= \frac{X^k}{x^i} + X^j \Gamma^k_{ij} \quad \frac{}{x^k},$$

从而 DX 的分量为 $X^k_{;i} = \mathrm{d}x^k (D_i X) = \frac{X^k}{x^i} + X^j \Gamma^k_{ij}$.

定义矩阵 $\boldsymbol{A}_i = (\Gamma^j_{ik})$并约定

$$\boldsymbol{A}_i X = X^k \Gamma^j_{ik} \frac{}{x^j}$$

和

$$_i X = \frac{X^k}{x^i} \frac{}{x^k},$$

则有

$$D_i = {}_i + A_i .$$

这个记法现在在规范场论中广泛流行 .不过在规范场论中 $\boldsymbol{A}_i$ 是要求满足 Yang-Mills 场方程(它在形式上看很像 Maxwell 方程组,但远比 Maxwell 方程组复杂) .这样得到的 D 就称为 Yang-Mills 联络 .

在上节末,通过坐标变换我们定义一个重要的量(Γ^i_{jk}),然后由它定义了向量场的协变导数(简称协导) .根据过去我们对张量 Lie 导数的认识,我们可定义(m, l)型张量 $\boldsymbol{T}$ 的协导 D$\boldsymbol{T}$.协导 D$\boldsymbol{T}$ 是一个$(m, l+1)$型张量 .举例讲,设 $m = 2$, $l = 1$,即 $\boldsymbol{T} = (T^{ij}_k)$.

定义 1　定义(2,1)型张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}_k$ 的协变导数张量 D$\boldsymbol{T}$ 为

$$D_m T^{ij}_k = T^{ij}_{k,m} = \frac{T^{ij}_k}{x^m} - T^{ij}_t \Gamma^t_{km} + T^{tj}_k \Gamma^i_{tm} + T^{it}_k \Gamma^j_{tm} .$$

这正是历史上所做的绝对导数,它与 Lie 导数的区别之处在于上、下指标求和时所出现的正负号 .

在黎曼流形$(M, \boldsymbol{g})$上,$\boldsymbol{g} = (g_{ij})$, Levi-Civita 证明了,若要求

协导 D_k 满足

$$D_k g_{ij} \equiv 0$$

和

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}, \quad 1 \leq i, \quad j, \quad k \leq n,$$

则此 D_k 存在惟一.常称之为 Levi-Civita 联络.

一般地,我们有下面的定理.

定理 1　若$(M, \boldsymbol{g})$为广义黎曼流形,即 $\boldsymbol{g}$ 为流形 M 上的$(0,2)$型非退化对称张量,则在 M 上存在惟一的协导 D,即一组函数(Γ^i_{jk})满足

$$D_k g_{ij} = 0 \text{ 和 } \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \tag{1}$$

进一步的,在坐标系(x^i)中有

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{g_{lk}}{x^j} + \frac{g_{jl}}{x^k} - \frac{g_{jk}}{x^l} \right). \tag{2}$$

证明　若 D 为满足(1)式的协导,则由(1)式知

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

和

$$\frac{g_{ij}}{x^k} = \Gamma^m_{ik} g_{mj} + \Gamma^m_{jk} g_{im}.$$

定义

$$\Gamma_{j,ik} = \Gamma^m_{ik} g_{mj},$$

则有

$$\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}$$

和

$$\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = \frac{g_{ij}}{x^k}. \tag{3}$$

在(3)式中置换指标 i, j, k 得

$$\frac{g_{ki}}{x^j} = \Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj}. \tag{4}$$

$$\frac{g_{kj}}{x^i} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} \tag{5}$$

于是

$$(4) + (5) - (3) = 2\Gamma_{k,ij},$$

即得

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{g_{ki}}{x^j} + \frac{g_{kj}}{x^i} - \frac{g_{ij}}{x^k}\right) = g_{km}\Gamma^m_{ij}.$$

据 $g^{ij}g_{jm} = \delta^i_m$ 得

$$\Gamma^i_{jk} = g^{im}\Gamma_{m,jk}.$$

即得(2)式 .

反过来由满足(2)式的(Γ^i_{jk})可定义协导,直接计算知它满足(1)式 .其惟一性由(2)式给出 .

下面总设$(M, \boldsymbol{g})$为广义黎曼流形, D 为其 Levi-Civita 联络 .取 M^n 上的局部坐标系(z^i) .

若 $z^i = z^i(t)$为 M 上一条给定的曲线,令 $\xi^i = \frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}$.设 $\boldsymbol{T} = (T^k)$ 为沿曲线 $\boldsymbol{z}(t)$的向量场,则其沿 $\boldsymbol{z}(t)$的协导定义为

$$D_{\xi(t)} T^k = \xi^i(t) D_i T^k.$$

如果在曲线 $\boldsymbol{z}(t)$上总有

$$D_{\xi(t)} T^k = 0,$$

就称 $\boldsymbol{T} = (T^k)$为沿曲线 $z(t)$的平行向量场 .易知平行向量场方程为

$$\frac{\mathrm{d}T^k}{\mathrm{d}t} + \Gamma^k_{ij}T^j\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \forall t, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{6}$$

定义 2　设 $T_p \in T_p M$,设 $\boldsymbol{z}(t)$为连接两点 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 的一条曲线 .若 $\boldsymbol{T}$为曲线上的平行向量场且 $T(\boldsymbol{p}) = T_p$,称 $T(\boldsymbol{q})$为 T_p 沿曲线 $\boldsymbol{z}(t)$从 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的平移 .

平移是与一个联络即协导等价的概念,在此我们不做讨论 .

定义 3 若 $T^k=\dfrac{\mathrm{d}z^k}{\mathrm{d}t}$为曲线 $\boldsymbol{z}(t)$的速度场,且(T^k)沿 $\boldsymbol{z}(t)$平行,就称曲线 $\boldsymbol{z}(t)$为(M, g)的测地线.

直接利用(6)式可知测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 z^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{kj}(\boldsymbol{z})\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z^k}{\mathrm{d}t}=0,\quad \forall\, t,\quad 1\leq i\leq n. \tag{7}$$

同在曲面上一样,对一般的曲线 $\boldsymbol{z}(t)$,记 $\boldsymbol{\xi}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}$.定义 $\boldsymbol{k}_g(t)=\mathrm{D}_{\xi}\boldsymbol{\xi}$为曲线 $z(t)$的测地曲率矢.若 $\boldsymbol{k}_g=(k^i_g)$,则

$$k^i_g=\frac{\mathrm{d}^2 z^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z^k}{\mathrm{d}t}.$$

下面我们考虑协导运算的交换性质.现在我们计算 $D_kD_l-D_lD_k$.

设 $\boldsymbol{T}=(T^i)$为 M 上的向量场,则

$$D_l T^i=\frac{\partial T^i}{\partial z^l}+T^m\Gamma^i_{ml}$$

$$\begin{aligned}
D_kD_lT^i&=\frac{\partial}{\partial z^k}D_lT^i+\Gamma^i_{pk}D_lT^p-\Gamma^p_{lk}D_pT^i\\
&=\frac{\partial}{\partial z^k}\frac{\partial T^i}{\partial z^l}+T^m\Gamma^i_{ml}+D_lT^m\Gamma^i_{mk}-D_mT^i\Gamma^m_{lk}\\
&=\frac{\partial^2 T^i}{\partial z^k\partial z^l}+\frac{\partial T^m}{\partial z^k}\Gamma^i_{ml}+T^m\frac{\partial}{\partial z^k}(\Gamma^i_{ml})\\
&\quad+D_lT^m\Gamma^i_{mk}-D_mT^i\Gamma^m_{kl}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
D_lT^m\Gamma^i_{mk}-D_mT^i\Gamma^m_{kl}=&\frac{\partial T^m}{\partial z^l}\Gamma^i_{mk}+T^r\Gamma^m_{rl}\Gamma^i_{mk}\\
&-\frac{\partial T^i}{\partial z^m}\Gamma^m_{kl}-T^r\Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{kl},
\end{aligned}$$

因此

$$(D_kD_l-D_lD_k)T^i=T^r\ \frac{\partial}{\partial z^k}\Gamma^i_{rl}-\frac{\partial}{\partial z^l}\Gamma^i_{rk}+\Gamma^m_{rl}\Gamma^i_{mk}-\Gamma^m_{rk}\Gamma^i_{ml}$$

$$:= \; T^r R^i_{rkl},$$

其中

$$R^i_{rkl} = \frac{}{z^k}\Gamma^i_{rl} - \frac{}{z^l}\Gamma^i_{rk} + \Gamma^m_{rl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{rk}\Gamma^i_{ml}. \tag{8}$$

定义 4　把由(8)式确定的张量(R^i_{rkl})称为黎曼曲率.

令 $R_{qikl} = g_{ip} R^p_{qkl}$,则有性质

$$R_{iqkl} = - R_{qikl}, \quad R_{iqkl} = R_{kliq}. \tag{9}$$

当我们把表达式(2)代入(8)式,可直接验证下列 Bianchi 恒等式:

$$R^i_{qkl} + R^i_{lqk} + R^i_{klq} = 0.$$

具体细节留作习题; 另外还有

$$R_{qikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^2 g_{il}}{z^q \; z^k} + \frac{{}^2 g_{qk}}{z^i \; z^l} - \frac{{}^2 g_{ik}}{z^q \; z^l} - \frac{{}^2 g_{ql}}{z^i \; z^k}\right)$$

$$+ g_{ip}\left(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{ml} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{mk}\right).$$

由此可知(R_{qikl})为(0,4)型张量,具有(9)式的性质.

定义 5　若 $\boldsymbol{T}_1 = (T_1^{ij})$和 $\boldsymbol{T}_2 = (T_2^{kl})$为(2,0)型张量,定义

$$R(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2) = T_1^{ij} T_2^{kl} R_{ijkl}$$

为曲率算子,并令

$$\langle \xi \wedge \eta, \xi \wedge \eta \rangle = g(\xi, \xi) g(\eta, \eta) - g(\xi, \eta)^2.$$

由(9)式知

$$R(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2) = R(\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_1).$$

若 $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2 = \xi \wedge \eta$,其中 ξ, η为向量场,我们定义 $\xi \wedge \eta$平面上的截曲率为

$$R(\xi, \eta) = R(\xi \wedge \eta, \xi \wedge \eta) / \langle \xi \wedge \eta, \xi \wedge \eta \rangle.$$

最后,定义

$$R_{ql} = R^i_{qil}$$

为$(M, \boldsymbol{g})$的 Ricci 曲率(张量),而定义

$$R = g^{lq} R_{ql} = g^{lq} R^i_{qil}$$

为(M, g)的数(纯量)曲率,也称为 scalar 曲率.

现在我们用另一个观点来看 Bianchi 恒等式.定义

$$\omega_j^i = \Gamma_{jr}^i \mathrm{d} z^r$$

和

$$\Omega_j^i = \mathrm{d}\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i .$$

直接计算知

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\Gamma_{rl}^i - \frac{\partial}{\partial z^l}\Gamma_{rj}^i + \Gamma_{rl}^m \Gamma_{mj}^i - \Gamma_{rj}^m \Gamma_{ml}^i\right) \mathrm{d} z^r \wedge \mathrm{d} z^l ,$$

所以

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jrl}^i \mathrm{d} z^r \wedge \mathrm{d} z^l .$$

定义

$$\omega_{ij} = g_{jk}\omega_i^k ,$$

称之为联络 1-形式.而称

$$\Omega_{ij} = g_{jk}\Omega_i^k$$

为曲率 2-形式.

于是有

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijrl} \mathrm{d} z^r \wedge \mathrm{d} z^l .$$

对

$$\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega$$

外微分,我们得

$$\mathrm{d}\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega .$$

这就是 Bianchi 恒等式.

如同在二维黎曼几何中一样,我们可以利用正交活动标架(θ^i)来计算联络 1-形式(ω_j^i)和曲率 2-形式(Ω_j^i).这里我们要求(ω_j^i)满足

$$\mathrm{d}\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i .$$

而

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i .$$

最后我们来谈一下黎曼几何在广义相对论中的应用 .设$(M, \boldsymbol{g})$为广义黎曼流形 .在广义相对论中,著名的 Einstein 场方程就是

$$R_{ql} - \frac{1}{2} R g_{ql} = -\lambda T_{ql}, \quad D_j(g^{jk} T_{ki}) = 0,$$

其中张量(T_{ql})代表某物理量,而 λ 为$(M, \boldsymbol{g})$上的一个光滑函数 .

特别地,称

$$R_{ql} = 0$$

为真空 Einstein 方程 .当然,度量平坦的广义黎曼流形,即有曲率张量

$$R_{qikl} = 0,$$

满足这个方程 .

定义 6 满足真空 Einstein 方程的 Kahler 流形(即一种带黎曼几何结构的复流形)称之为 Calabi-Yau 流形 .

对紧的 Calabi-Yau 流形,目前人们还没有找到非平凡的显示例子 .求解 Einstein 场方程在数学和物理上都是非常重要的 .下面我们指出真空 Einstein 方程几个特解 .

例 1 Schwarzchild 解

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\xi^2),$$

这里(r, θ, ξ)为 $\mathbb{R}^3$ 的极坐标, $M > 0$ 为常数 .

例 2 Eguchi-Hanson 解

引入微分 1-形式

$$\theta_x = x dt - t dx + y dz - z dy,$$

$$\theta_y = y dt - t dy + z dx - x dz,$$

$$\theta_z = z dt - t dz + x dy - y dx .$$

定义

$$g = \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^4\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\theta_z^2\right),$$

这里 $a>0$ 为常数.

例 3 Robinson-Trautman 解

$$g = \frac{r^2}{x^3}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2) + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r + \frac{3}{2}x\mathrm{d}u^2,$$

这里 $r^2 = x^2 + y^2$.

例 4 Taub-NUT 解

$$g = V(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) + V^{-1}(\mathrm{d}t + \omega)^2,$$

这里 $\omega \in A^1(\mathbb{R}^3)$ 为 1-形式满足

$$\mathrm{d}\omega = * \mathrm{d}V,$$

$$V = 1 + \frac{m}{r},$$

$$m > 0 \quad \text{为常数},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

习　　题

1. 若$(M, \boldsymbol{g})$为二维黎曼流形,试证 $R/2$ 正是$(M, \boldsymbol{g})$的高斯曲率.

提示:只需在曲面 $z = f(x, y)$ 上 $\mathrm{D}f(x, y) = 0$ 的点上验证即可.

2. 设$(M^n, \boldsymbol{g})$为黎曼流形.在局部坐标系(x^i)下,记

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \ (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, \ |\boldsymbol{g}| = \det(g_{ij}),$$

和 Christoffel 符号 Γ^i_{jk}.试证

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k}\log\sqrt{|\boldsymbol{g}|},$$

并由此证明

$$\mathrm{D}\eta = 0,$$

这里

$$\eta = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n .$$

3．设 $u\in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ 为严格凸函数满足 $\det(u_{ij}) = 1$，这里 $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集．令 $g_{ij} = u_{ij}$，试求 Γ^i_{jk}，Ricci 和 scalar 曲率．

4．利用正交活动标架(θ_i)来计算例 1，例 2 和例 3 的联络 1-形式和曲率 2-形式．

5．设(M^n, g)为黎曼流形．在局部坐标系(x^i)下，设它的黎曼度量为

$$g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j ,$$

黎曼曲率为(R_{iqkl})，Ricci 曲率为(R_{ik})．记

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} .$$

设 $f\in C^\infty(M)$．在 $\mathbb{R}\times M$ 上，定义黎曼度量

$$\tilde{g} = \mathrm{e}^{2f}\mathrm{d}t^2 + g,$$

则 $\tilde{g}$ 有黎曼曲率

$$\tilde{R}_{iqkl} = R_{iqkl} ,$$

$$\tilde{R}_{0qkl} = 0,$$

$$\tilde{R}_{0i0j} = \mathrm{e}^{2f}(D_iD_jf - D_ifD_jf) .$$

和 Ricci 曲率

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2f}(\Delta f - |Df|^2) & 0 \\ 0 & R_{ij} + D_iD_jf - D_ifD_jf \end{pmatrix},$$

这里

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\,\partial_j f\right) .$$

6．设(M^n, g)为黎曼流形．在局部坐标系(x^i)下，设

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

和

$$h = |\boldsymbol{g}|^{-1/n}\boldsymbol{g}.$$

(1) 试证

$$L_X h = |\boldsymbol{g}|^{-1/n} \quad L_X\boldsymbol{g} - \frac{2}{n}D_j Y^j\boldsymbol{g} \quad .$$

(2) 定义

$$T = |\boldsymbol{g}|^{1/n} L_X h := (T_{ij}),$$

和 $\alpha = \sum_i a_i \mathrm{d}x^i$, 这里 $a_i = g_{ij}X^j$. 令 $\delta a = \sum_{i=1}^{n} \partial_i X^i$, 试证

$$T_{ij} = D_i a_j + D_j a_i + \frac{2}{n}\delta a g_{ij}.$$

7. 现在我们来看如何在 R^n 上找度量平坦的广义黎曼度量. 在 R^n 上, 设

$$u = u(x^1, \cdots, x^n)$$

为 $(x^1, \cdots, x^n)$ 齐次函数. 定义

$$g = \frac{u}{x^1}(\mathrm{d}x^1)^2 + \cdots + \frac{u}{x^n}(\mathrm{d}x^n)^2.$$

假定

$$\mathrm{d}u = \frac{u}{x^1}\mathrm{d}x^1 + \cdots + \frac{u}{x^n}\mathrm{d}x^n$$

的协变导数为 0 则称这种广义黎曼流形为 Frobenius 流形.

(1) 试证:

$$X = \frac{}{x^1} + \cdots + \frac{}{x^n}$$

的协变导数为 0.

(2) 设 $n = 3$, 引入变量 $s = (x^1 - x^2)/(x^3 - x^2)$. 设 $A = A(s)$, $B = B(s)$, $C = C(s)$ 为光滑函数. 试证: 广义黎曼度量

$$g = -A^{-2}(\mathrm{d}x^1)^2 + B^{-2}(\mathrm{d}x^2)^2 + CB^{-2}(\mathrm{d}x^3)^2$$

平坦的充要条件是 (A, B, C) 满足方程组:

$$A' = -\frac{BC}{s(1-s)}, \tag{A}$$

$$B' = -\frac{AC}{s}, \tag{B}$$

$$C' = -\frac{AB}{1-s}. \tag{C}$$

(3) 设(A, B, C)满足上方程组(A), (B), (C) .试证:

$$A^2 - B^2 - C^2 = -\frac{1}{4}.$$

8 . 设$(M^n, \boldsymbol{g})$为黎曼流形 .在局部坐标系(x^i)下,设它的黎曼度量为

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j,$$

黎曼曲率为(R_{iqkl}), Ricci 曲率为(R_{ik})和 scalar 曲率 R .记

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

设 $f \in C^\infty(M)$,在 M 上,定义黎曼度量

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \mathrm{e}^{2f}\boldsymbol{g}.$$

试利用 f 的导数以及(R_{iqkl}), (R_{ik})和 R 来计算$\tilde{\boldsymbol{g}}$的黎曼曲率$\tilde{R}_{iqkl}$, Ricci 曲率$\tilde{R}_{ij}$和 scalar 曲率$\tilde{R}$.

5.5 欧氏空间的子流形

我们先来看一般的结果 .设$(N^{n+d}, \boldsymbol{g})$为黎曼流形 .设

$$(\theta^A) = (\theta^1, \cdots, \theta^{n+d})$$

为 N 上的局部活动正交余标架 .记

$$(e_A) = (e_1, \cdots, e_{n+d})$$

为它的对偶标架 .于是 $g_{AB} = \delta_{AB}$.这里我们约定指标的取值范围如下:

$$1 \le A, B, C, D, \cdots \le n+d$$
$$1 \le \alpha, \beta, \cdots \le d$$
$$1 \le i, j, k, l, \cdots \le n.$$

我们有结构方程

$$d\theta^A = \theta^B \wedge w_B^A,$$

$$w_B^A = - w_A^B,$$

$$\Phi_B^A = d w_B^A - w_B^C \wedge w_C^A$$

$$= \frac{1}{2} K_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D,$$

$$K_{BCD}^A = - K_{BDC}^A.$$

定义

$$\theta_A = \theta^A,$$

$$w_{AB} = g_{EB} w_A^E,$$

$$\Phi_{AB} = g_{EB} \Phi_A^E,$$

$$K_{BACD} = g_{EA} K_{BCD}^E.$$

这样我们就有

$$d\theta_A = \theta_B \wedge w_{BA},$$

$$w_{BA} = - w_{AB},$$

$$\Phi_{AB} = d w_{AB} - w_{AC} \wedge w_{CB},$$

$$= \frac{1}{2} K_{ABCD} \theta_C \wedge \theta_D,$$

$$K_{ABCD} = - K_{BADC}.$$

设 M^n 为 n 维光滑流形.设有光滑侵入 $\boldsymbol{F}$: $M \to N^{n+d}$.我们称 M 为黎曼空间 N^{n+d} 的侵入子流形.设我们的标架在 M 上满足

$$\theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, d,$$

即这个方程组的积分子流形是 $F(M)$.

因为

$$d\theta^\alpha = 0,$$

即

$$w_i^\alpha \wedge \theta^i = 0,$$

所以利用 Cartan 引理有

$$w_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \theta^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha.$$

回忆 M 的结构方程

$$
\begin{aligned}
d\theta^i &= \theta^j \wedge w_j^i, \\
w_j^i &= -w_i^j, \\
\Omega_i^j &= dw_i^j - w_i^k \wedge w_k^j \\
&= \frac{1}{2} R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l, \\
R_{ikl}^j &= -R_{ilk}^j.
\end{aligned}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= g_{mj} \Omega_i^m, \\
R_{jikl} &= g_{mi} R_{jkl}^m.
\end{aligned}
$$

这样我们就有

$$
\begin{aligned}
d\theta_i &= \theta_j \wedge w_{ji}, \\
w_{ij} &= -w_{ji}, \\
\Omega_{ij} &= dw_{ij} - w_{im} \wedge w_{mj} \\
&= \frac{1}{2} K_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l, \\
K_{ijkl} &= -K_{jikl}.
\end{aligned}
$$

利用

$$
dw_j^i - w_j^k \wedge w_k^i = w_j^\alpha \wedge w_\alpha^i + \Phi_j^i,
$$

即有

$$
\frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l = -h_{jk}^\alpha h_{il}^\alpha \theta^k \wedge \theta^l + \frac{1}{2} K_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l.
$$

另写之为

$$
\frac{1}{2} R_{jikl} \theta^k \wedge \theta^l = -h_{jk}^\alpha h_{il}^\alpha \theta^k \wedge \theta^l + \frac{1}{2} K_{jikl} \theta^k \wedge \theta^l.
$$

由此,我们可得 Gauss 方程

$$
R_{jikl} = K_{jikl} + h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha.
$$

如同在曲面论中一样,我们可以进一步发展来得到 Codazzi 方程. 其证明这里省去,留作习题.

现在设 M 为欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+d}$ 的侵入子流形 .我们来看一下这种子流形的联络和其他一些性质 .由于我们可以用 M 上的坐标系来给予 $\boldsymbol{F}(M)$,这和欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+d}$ 给于 $\boldsymbol{F}(M)$ 的坐标系是等价的,所以我们不区分 M 和 $\boldsymbol{F}(M)$.设 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为侵入子流形 M 上的局部坐标系 .令 $F_j = \frac{\boldsymbol{F}}{x^j}$.向量组 (F_i) 张成子流形 M 的切空间 .以后记

$$F_{ij} = \frac{{}^2\boldsymbol{F}}{x^i \quad x^j} .$$

子流形 M 上的诱导度量是

$$g_{ij} = \langle F_i , F_j \rangle .$$

显然 (g_{ij}) 是正定的,从而它是 M 上黎曼度量 .于是它有 Levi-Civita 联络 D

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{g_{lk}}{x^j} + \frac{g_{jl}}{x^k} - \frac{g_{jk}}{x^l} \right) .$$

这里

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} .$$

对 $X = X^j \frac{}{x^j}$,我们有

$$D_i X = \frac{X^j}{x^i} \frac{}{x^j} + \Gamma^k_{ij} X^j \frac{}{x^k} .$$

这个关系也常记为

$$D_i X^j = \frac{X^j}{x^i} + \Gamma^j_{ik} X^k . \qquad (*)$$

类似的,对 1-形式 $\omega = \xi_j \mathrm{d} x^j$,我们有

$$D_i \xi_j = \frac{\xi_j}{x^i} - \Gamma^k_{ij} \xi_k . \qquad (*)'$$

现在我们来看 $D_k F_j := D_{F_k} F_j = \Gamma^i_{jk} F_i$ 在 $\mathbb{R}^{n+d}$ 的几何意义 .直接计算知

$$\frac{g_{lk}}{x^j} = \langle F_{lj} , F_k \rangle + \langle F_l , F_{kj} \rangle .$$

代入到 $D_k F_j := \Gamma^i_{jk} F_i$，我们可得

$$D_k F_j = \langle F_{kj}, F_l \rangle g^{li} F_i .$$

也就是说 $D_k F_j$ 是 F_{kj} 在 M 上的切向部分

$$D_k F_j = (F_{kj})^{\mathrm{T}} .$$

设 N_p 为 M 在 $\mathbb{R}^{n+d}$ 中在点 $\boldsymbol{p}$ 处的垂直空间．取 $\boldsymbol{\nu}_\alpha$，$\alpha = 1, \cdots, k$，为一组单位正交法矢基(见图 5.1)．

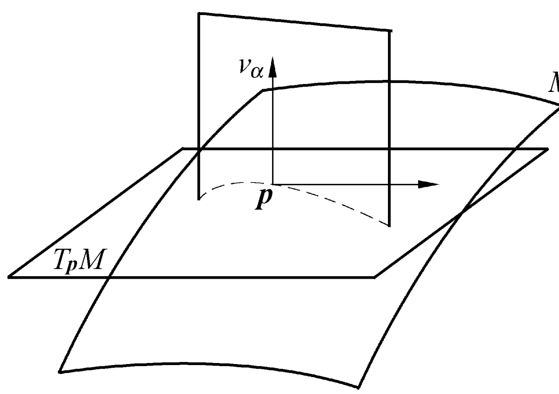

图 5.1

于是我们有 Gauss 公式：

$$F_{kj} = D_k F_j + h^\alpha_{kj} \boldsymbol{\nu}_\alpha ,$$

这里

$$h^\alpha_{kj} = \langle F_{kj}, \boldsymbol{\nu}_\alpha \rangle .$$

易见，$h^\alpha_{kj} = h^\alpha_{jk}$．

定义 如同在空间曲面中一样，我们称

$$\mathrm{II} = h^\alpha_{kj} \boldsymbol{\nu}_\alpha \mathrm{d} x^i \mathrm{d} x^j$$

为 M 的第二基本形式．我们称

瑜 $= g^{kj} h^\alpha_{kj} \boldsymbol{\nu}_\alpha$

为 M 的平均曲率矢量．

利用 Gauss 公式，我们有

$$\mathrm{II}(F_k, F_j) = F_{kj} - D_k F_j$$

和

$$珨 = g^{kj}(F_{kj} - \Gamma^i_{kj} F_i)\ .$$

或

$$珨 = g^{kj}(F_{kj} - \langle F_{kj}, F_l\rangle g^{li} F_i) = (g^{kj} F_{kj})^N\ .$$

即 珨 为向量 $g^{kj} F_{kj}$ 在 M 上的垂直部分 .

回忆

$$\Delta \boldsymbol{F} = (\Delta F^1, \cdots, \Delta F^{n+d})^{\mathrm{T}}\ .$$

于是有

$$\Delta \boldsymbol{F} = \frac{1}{|\boldsymbol{g}|}\ {}_i(\ |\boldsymbol{g}|\, g^{ij} F_j)\ .$$

由于

$${}_k g^{ij} = - g^{il} g^{jm}\ {}_k g_{lm}$$

和

$${}_i(\log\ |\boldsymbol{g}|) = \Gamma^k_{ik}\ ,$$

所以

$${}_i\, g^{ij} = - g^{il} g^{jm}\ {}_i\, g_{lm}\ .$$

展开 ΔF 表达式计算知

$$\begin{aligned}
\Delta F &= {}_i(\log\ |\boldsymbol{g}|)\, g^{ij} F_j + {}_i g^{ij} F_j + g^{ij} F_{ij} \\
&= \Gamma^k_{ik} g^{ij} F_j - g^{il} g^{jm}\ {}_i g_{lm} F_j + g^{ij} F_{ij} \\
&= g^{ij} F_{ij} + \Gamma^k_{ik} g^{ij} F_j - g^{il} g^{jm}\ {}_i g_{lm} F_j \\
&= g^{ij}(F_{ij} - \Gamma^k_{ij} F_k) \\
&= 珨\ .
\end{aligned}$$

如果 M 紧无边而且 珨 $= 0$, 对 $\Delta \boldsymbol{F}^A = 0$, $A = 1, \cdots, n + d$, 用极值原理即得这样的 F 是没有的, 除非 $\boldsymbol{F} = \mathrm{const}$.

这样我们就有下面的定理 .

定理 1　设有 $\boldsymbol{F}$: $M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+d}$ 的侵入子流形, 则有

$$珨 = \Delta F\ .$$

特别地,如果 M 紧,无边,瑜 = 0,则这样的 $\boldsymbol{F}$ 是没有的,除非 $\boldsymbol{F}$ = const .

定理 2 一般说来,对光滑的 : $M \to \mathrm{R}$,有

$$\Delta \quad = D_i (g^{ij} D_j \quad) = g^{ij} D_i D_j \quad .$$

也就是说 Δ 是 $D_i D_j$ 的迹 .

记 $D_j \quad = \quad _j$. 这样我们利用 $D_k g^{ij} = 0$ 和公式(*)得

$$D_i D_j \quad = D_i \quad _j = \frac{\quad _j}{x^i} - \Gamma^k_{ij} \quad _k .$$

如同定理 1 前面的推导,就有

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{ij} \left(\frac{\quad _j}{x^i} - \Gamma^k_{ij} \quad _k \right) \\ &= g^{ij} D_i D_j \quad . \end{aligned}$$

于是定理 2 即得证 !

需要说明的是,如果我们引入法坐标系,即: 对每个 $\boldsymbol{x} \in M$,有 M 上的局部坐标系$(x^1 , \cdots, x^n)$使得在点 $\boldsymbol{x}$ 处,有

$$g_{ij} = \delta_j , \quad \Gamma^k_{ij} = 0 .$$

那么,以上的定理是很容易证明的 .限于篇幅,我们这里就不引入它了 .

习 题

1 . 在R^n 上,设

$$u = u(x^1 , \cdots, x^n)$$

为$(x^1 , \cdots, x^n)$光滑函数 .设

$$M = \quad \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, y) \in \mathrm{R}^{n+1} : \quad y = u(\boldsymbol{x}) \quad .$$

给定R^{n+1} 的度量为 $\boldsymbol{g} = \mathrm{d} z^2$.求M 在$(\mathrm{R}^{n+1} , \boldsymbol{g})$中的平均曲率 .

2 . 如果习题 1 的 u 是凸的而且对应的M 的平均曲率 = 0,问 u 是否为线性函数 ? 为什么 ?

3. 在 $\mathbb{R}^n$ 上,设

$$u = u(x^1, \cdots, x^n)$$

为 $(x^1, \cdots, x^n)$ 光滑函数. 设

$$M = \{ \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad y = u(\boldsymbol{x}) \}.$$

给定 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的度量为 $\boldsymbol{g} = \mathrm{e}^{-2|\boldsymbol{z}|^2} \mathrm{d} z^2$. 求 M 在 $(\mathbb{R}^{n+1}, \boldsymbol{g})$ 中的平均曲率.

4. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界光滑区域,设

$$u: U \to \mathbb{R}$$

为 $(x^1, \cdots, x^n)$ 光滑函数. 设

$$M(u) = \{ \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad y = u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U \}.$$

给定 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的度量为 $\boldsymbol{g} = \mathrm{d} z^2$. 设 $M(u)$ 在 $(\mathbb{R}^{n+1}, \boldsymbol{g})$ 中的平均曲率 $= 0$. 记 $A(u)$ 为 $M(u)$ 的体积. 对光滑函数

$$f: U \to \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U.$$

记 $A(f)$ 为对应的图像 $M(f)$ 的体积. 试证

$$A(u) \le A(f).$$

5. 定义

$$S^3 = \{ (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1 \}.$$

找出它的一个局部活动正交余标架并利用它来计算 S^3 曲率张量.

6. 在定理 1 的证明中,试直接证明 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和子流形 $F(M)$ 是垂直的; 从而给出这个定理的另一个证明.

7. 设 M^n 为 n 维光滑流形. 设有光滑侵入 $\boldsymbol{F}: M \to N^{n+d}$. 我们称 M 为黎曼空间 N^{n+d} 的侵入子流形. 如同在曲面论中一样,导出它的 Codazzi 方程.

5.6 常曲率空间

我们举例来让大家对黎曼流形有一个比较好的理解. 因此我们来看一些简单的空间,即所谓的常曲率空间.

本节我们利用活动标架法来研究常曲率空间.

设(M^n, g)为黎曼流形.设$(\theta^1, \cdots, \theta^n)$为$M$上的局部活动正交标架.于是有

$$g = (\theta^1)^2 + \cdots + (\theta^n)^2$$

和结构方程

$$\mathrm{d}\theta^i = \theta^j \wedge w_j^i,$$

$$w_j^i = - w_i^j,$$

$$\Omega_j^i = \mathrm{d} w_j^i - w_j^k \wedge w_k^i$$

$$= \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l .$$

定义1　称(M^n, g)为常曲率K的黎曼流形是说,有常数K使得

$$\Omega_j^i = K\theta^i \wedge \theta^j$$

于M上成立.也就是说在每个点处,M的截面曲率是常数K.

定义2　流形M^n称为单连通的,如果对连续的$f: S^1 \to M$有连续的映射$F: S^1 \times [0,1] \to M$使得$F(\cdot, 0) = f$而$F(\cdot, 1)$为常值映射.

定义3　称黎曼流形M^n是完备的,如果每一条测地线都是可以无穷延拓的.

定义4　单连通的、完备的常曲率空间称为空间形式.

显然,欧氏空间$\mathbb{R}^n$为常曲率0的黎曼流形.

例　在$M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n: x^n > 0\}$上给定黎曼度量

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} \mid \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mid^2 .$$

取

$$\theta^i = \frac{1}{x^n} \mathrm{d} x^i,$$

于是有

$$w_i^j = \delta_{nj}\theta^i - \delta_{ni}\theta^j$$

满足

$$w_j^i = - w_i^j$$

和

$$\mathrm{d}\theta^i = \theta^j \wedge w_j^i .$$

直接计算得

$$\Omega_i^j = - \theta^i \wedge \theta^j .$$

这样我们称此(M^n, g)为常曲率 -1 的黎曼流形.这个 M 就是著名的 Poincaré 上半平面,也称之为双曲空间,记为 $H^n(-1)$.

习 题

1. 证明标准的球面 S^n 为常曲率 1 的黎曼流形.

2. 对 M^n 为常曲率 K 的黎曼流形,设$(\theta^1, \cdots, \theta^n)$为 M 上的局部活动正交标架.证明

$$R_{ijkl} = - K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

3. 设 $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$,对常数 K,定义函数

$$\rho(x) = 1 + \frac{K}{4} | x |^2$$

和度量

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{\rho^2(x)}\delta_{ij} .$$

证明,对很小的 R,(B_R, g)是常曲率 K 的黎曼流形.

4. 计算 $H^n(-1) \times S^k$ 的黎曼曲率、Ricci 曲率和 scalar 曲率.

5.7 流形上的积分简介

设 ω 为流形 M^n 上的 n-形式.利用 M 上的单位分解 (ξ_α) 可以定义 ω 在流形 M^n 上的积分.设 $(U_\alpha, \boldsymbol{f}_\alpha)$ 为 M 中的坐标邻域.令

$$\phi_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha^{-1}$$

和

$$V_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha^{-1}(U_\alpha).$$

设 $\mathrm{supp}\,\xi_\alpha \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

定义 1 定义 ω 在开集 U 上的积分

$$\int_U \omega\xi_\alpha = \int_V \phi^* \omega\xi_\alpha \quad \phi$$

和 ω 在流形 M^n 上的积分

$$\int_M \omega = \sum \int_{U_\alpha} \omega\xi_\alpha .$$

这里我们指出,ω 在流形 M^n 上的积分与单位分解的选择是无关的.

我们有著名的 Stokes 定理.

Stokes 定理 设 M^n 为紧的,可定向的带边的流形.设 ω 为流形 M^n 上的 $n-1$ 形式.我们有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

这里我们也不证这个结论了.其证明大家可以看所附的参考书.

设 $(M^n, \boldsymbol{g})$ 为紧的,可定向的带边的黎曼流形.设 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为 M 上的局部坐标系.对光滑向量场 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 定义它的散度

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{| \boldsymbol{g} |} \frac{(X^i \quad | \boldsymbol{g} |)}{x^i} .$$

在 M 上,有 M 的体积元 $\mathrm{d} v_g$ 为

$$\mathrm{d} v_g = \quad | \boldsymbol{g} | \mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^n .$$

定义 2 设 $u \in C(M)$,定义 u 在 M 上的积分为 $\int_M u \mathrm{d} v_g$.

这样利用单位分解,如同在高等数学里一样有如下的定理 .

Stokes 定理(向量场形式): 设 $(M^n , \boldsymbol{g})$ 为紧的,可定向的带边的黎曼流形,$n > 2$.设 ν 为 M 上的单位外法矢,则

$$\int_M \operatorname{div} X \mathrm{d} v_g = \int_{\ M} \langle X, \nu \rangle \mathrm{d} \sigma_g ,$$

这里 $\mathrm{d} \sigma_g$ 为流形 M 上的体积元 .

令

$$X = \Delta u = g^{ij} \frac{u}{x^j} \frac{}{x^i} ,$$

记

$$\operatorname{grad} u = \Delta u,$$

则有

$$\Delta u = \operatorname{div} X .$$

于是有下面的推论 .

推论 设$(M^n , \boldsymbol{g})$为紧的,可定向的(带边的)黎曼流形,$n > 2$.设 ν 为 M 上的单位外法矢 .对 $u \in C^2 (M)$,有

$$\int_M \Delta u \mathrm{d} v_g = \int_{\ M} \langle \Delta u, \nu \rangle \mathrm{d} \sigma_g .$$

利用这个结论我们可以给出 5 .5 节定理 1 的另一个证法如下 .

令 $f = F^i$.直接计算知

$$\Delta (| f |^2 / 2) = f \Delta f + | \operatorname{grad} f |^2 .$$

所以由 $\Delta f = 0$ 和 $M =$ 知

$$0=\int_M \Delta(|f|^2/2)=\int_M |\operatorname{grad} f|^2 .$$

于是$|\operatorname{grad} f|^2=0$,所以 $\boldsymbol{F}=\text{const}$.

习 题

1 . 设 $U \subset \mathrm{R}^n$ 为有界光滑区域,设

$$u: U \rightarrow \mathrm{R}$$

为$(x^1,\cdots,x^n)$光滑函数 .设

$$M(u)=\{\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}, y) \in \mathrm{R}^{n+1}: \quad y=u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in U\} .$$

给定R^{n+1}的度量为 $\boldsymbol{g}=\mathrm{d} z^2$.设 $M(u)$在$(\mathrm{R}^{n+1}, \boldsymbol{g})$中的平均曲率为 H .记 $A(u)$为 $M(u)$的体积 .对光滑函数

$$f: U \rightarrow \mathrm{R}, \quad f(\boldsymbol{x})=0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial U .$$

对 $t \in \mathrm{R}$,记 $A(t)=A(u+tf)$为对应的图像 $M(u+tf)$的体积 . 试证:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} A(t)\right|_{t=0}=-n \int_U H f .$$

2 . 设$(M^n, \boldsymbol{g})$为紧的,可定向的带边的黎曼流形, $n>2$.设 $\boldsymbol{\nu}$ 为 ∂M 上的单位外法矢 .

$$\int_M L_X R \,\mathrm{d} v_g=\frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} T(X, \boldsymbol{\nu}) \mathrm{d} \sigma_g$$

这里

$$T=\operatorname{Ric}-\frac{R}{n} g .$$

附　　录

本附录回忆几个常用的基本定理．

常微分方程基本定理：设 $U \subset \mathrm{R}^n$ 为开集．对 $\varepsilon > 0$，$I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ 及 $i = 1, \cdots, n$，

$$f_i(t, \boldsymbol{x}) \in C^r(I_\varepsilon \times U),\ r \geq 1 .$$

则：对每个 $\boldsymbol{x} \in U$，存在 $\delta > 0$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $V \subset U$ 使得对每个 $\boldsymbol{a} \in V$，存在惟一确定的 C^{r+1} 映射 $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{a}}: I_\delta \to U, \boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{a}}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 满足常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, \boldsymbol{x}), \quad i = 1, \cdots, n$$

和初值条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}$；进一步定义映射 $\boldsymbol{x}: I_\delta \times V \to U, \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{a}}(t)$，则它为 C^r 映射．

隐函数定理：设 $U \subset \mathrm{R}^k$ 为开集和设 $V \subset \mathrm{R}^n$ 为开集，$F: U \times V \to \mathrm{R}^n$ 为 C^r 映射，$r \geq 1$．设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$ 而且

$$\boldsymbol{F}_y(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$$

可逆．则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U_1 和在 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域 V_1 以及映射 $\boldsymbol{h} \in C^r(U_1, \mathrm{R}^n)$ 使得

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ 对每个 $\boldsymbol{x} \in U_1$．

(2) 对满足 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ 的 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U_1 \times V_1$，我们有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$．

(3) $\boldsymbol{h}_x(\boldsymbol{x}) = -[\boldsymbol{F}_y(\boldsymbol{p})]^{-1} \boldsymbol{F}_x(\boldsymbol{p})$，这里 $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{x} \in U_1$．

极值原理：设 $(M^n, \boldsymbol{g})$ 为紧，无边的黎曼流形．设 $u \in C^\infty(M)$ 为调和函数，即 $\Delta u = 0$ 于 M 上．则 u 为常数．

It requires wisdom to understand wisdom; the music is nothing if the audience to deaf .

——Walter Lippman

Music washes away from the soul the dust of everyday life .

——AuerDach

参 考 文 献

[1] 小林昭七.曲线与曲面的微分几何.王运达译.沈阳市数学会,1980

[2] Carmo Mdo . Differential geometry of Curves and Surfaces . Englewood Cliffs, New Jersey . Prentice-Hall Inc . 1980

[3] 陈省身,陈维桓.微分几何讲义.北京: 北京大学出版社,1983

[4] Dubrovin B A, Fomenko A T, Novikov S P . Modern Geometry, Part I . Springer-Verlag, 1984

[5] Boothby W . Introduction to Differential Manifold and Riemannian Geometry . Academic, 1980

[6] Hopf H . 整体微分几何.吴大任译.北京: 科学出版社,1984

[7] Spivak M . Differential Geometry . Vol Ⅱ . Publish or Perish, 1979

索 引