北京科海培训中心

► 计算机专业教学辅导丛书

离散数学——习题与解析

胡新启　胡元明　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书按教学大纲要求，通过仔细精选和解析了一些具有代表性的习题，帮助读者深化对集合论、代数系统、图论和数理逻辑内容的理解，达到提高分析和解决问题能力的目的。全书共 9 章，每章先简要介绍主要内容、重要概念和主要结论。然后给出基本题和典型习题，对疑难问题和容易混淆、甚至误解的问题进行剖析，本书独到之处在于，罗列了不同书上对同一要领的不同定义和不同的记号，在许多地方通过举反例对某些不一定成立的性质进行说明，加深读者对它的理解。

本书适用于理工科高等院校计算机及相关专业的学生作为练习辅导书，也是报考计算机专业硕士研究生的考生必读参考书，还适用于自学考试的读者和计算机等级（三级或四级）考试者研习。

书　名：离散数学——习题与解析
作　者：胡新启　胡元明
出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京耀华印刷有限公司（原门头沟胶印厂）
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：20.25　字数：492 千字
版　次：2002 年 1 月第 1 版　　2002 年 1 月第 1 次印刷
印　数：0001～8000
书　号：ISBN 7-302-05163-1/TP・3028
定　价：28.00 元

前　　言

当今科技的发展已进入以计算机技术为核心的信息时代，计算机技术的迅速发展和应用的日益广泛，极大地促进了“离散数学”的发展，已使“离散数学”成为计算机及其他相关的信息学科的重要理论和技术基础课。

本书作为对教学辅导资料编写的一次尝试，每章的内容包括内容分析、重点及难点解析，并给出了不同难度的基本题（选择、填空、判断题），精选了一些典型的习题。整个内容包含四个部分：集合论、代数系统、图论和数理逻辑。按教学大纲，从内容上共分 9 章：第 1 章“集合论”，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡尔积，基本计数原理等；第 2 章“二元关系”，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系、偏序关系等；第 3 章“函数”，讨论了函数的定义，复合函数、反函数及集合的基数；第 4 章“代数系统”，主要给出了代数系统的定义和性质，半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定；第 5 章“格”，讨论了格的两种等价定义，几种特殊的格、布尔代数等；第 6 章“图论”，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密尔顿图、二分图、图的着色等；第 7 章“树”，讨论了树的几种等价定义，根树、最小生成树、最优二元树等；第 8 章“命题逻辑”，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第 9 章“谓词逻辑”，讨论了谓词逻辑命题的符号化，谓词公式及其真值，前束式、重言蕴含式与推理规则等。

作为教学辅导资料，与一般教材不同的是：它首先简要介绍了每章的主要内容，列出了一些重要的概念和主要结论，并给出了每章的大纲要求，对疑难问题进行了剖析，并精选了一些有代表性的题目。本书概念清晰，所选题目覆盖面广，既有较容易的题，又有难度适中的题和难度较高的研究生入学考试题（带*号者即为研究生入学考试题）。

本书的独到之处在于：其一，本书罗列了不同书上对同一概念的不同定义或不同记号等，使得不同教材的使用者都可使用这本书；其二，每章还专门安排了重点及难点解析一节，对本章的疑难问题，即容易混淆、甚至理解错误的问题进行剖析；其三，在许多地方通过举反例对某些不一定成立的性质进行了说明，以使读者加深对它的理解。

本书适用于理工科高等院校计算机及相关专业的学生作为学习辅导书，对备考计算机专业的研究生也不失为一本好的复习资料，还适用于自学考试和计算机等级（三级或四级）考试的应试者研习。

本书第 1 章至第 5 章、第 9 章由胡新启编写，第 6 章至第 8 章由胡元明编写，赵迎红也参与了第 1 章至第 5 章的编写工作。

作者是在多年讲授“离散数学”课程的教学基础上编写本书的，虽竭尽全力，但由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

《编程之路系列教材》序

随着计算机技术在我国各个领域的广泛应用，以及计算机软件平台的不断提升，计算机编程不再仅限于计算机专业人员，越来越多的计算机爱好者通过专项培训或自学，已成为计算机编程的“ 行家里手 ”；特别是我国已经入世，国内 IT 企业及非 IT 企业对人才的需求将超过 40 万,其中一半是软件技术人才，这是传统学历教育远远满足不了的，它需要通过各种途径为这一行业的发展提供大批的 IT 技术人材。本丛书就是为此目的而编写的,它以计算机编程为核心，涵盖了从基础到专业应用的一些重要课目。本套丛书包括：

1. 《C++语言程序设计导学》
2. 《数据结构导学》
3. 《Visual Basic 6 程序设计导学》
4. 《PowerBuilder 7.0 程序设计导学》
5. 《Visual C++ 程序设计导学》
6. 《Delphi 程序设计导学》
7. 《C++ Builder 程序设计导学》

本丛书具有以下特点：

○ 力求通俗易懂

本丛书不仅面向计算机专业人员，更立足于计算机编程爱好者，因此，在文字叙述和内容的安排上尽量通俗易懂，力求讲出问题的来龙去脉，把编程的“ 过程 ”讲透。

○ 强化编程的概念

作为一个编程人员，必须深入领会编程的实质，这样才能做到举一反三，融会贯通，达到编制自己的应用程序的目的。所以本丛书不同于一般的软件系统使用手册，而是针对读者学习中可能遇到的问题诠释了编程思路和编程技巧，便于读者提升编程能力。

○ 编程思想与开发工具运用相结合

学习编程，不仅要在学习编程思想上有所突破，还应学会如何更好地运用编程的开发工具，只有两者的结合才是真正的理论联系实际，事半功倍的学习方法。本丛书精选了目前流行的软件开发工具（如 Visual Basic，PowerBuilder，Visual C++，Delphi，C++ Builder），这些工具中提供了许多编程技巧和功能，对编程者具有实际的应用价值。

○ 内容表述与习题、实习训练并重

本丛书提供了大量的习题和实习题，而且给出了这些习题和实习题的参考答案，便于读者练习、仿效，达到快速掌握编程方法和技巧。

由于时间仓促，本书疏漏之处在所难免。但我们相信本丛书一定会成为计算机编程爱好者的良师益友。

丛 书 序

计算机技术的迅猛发展，对现有的计算机专业的教学模式提出了新的挑战，同时也带来了前所未有的机遇。深化面向21世纪的教学改革，寻求一条行之有效的途径，培养跨世纪的高素质的科技人才，已是当务之急。

经过较长时间的研究、讨论，对教学经验进行总结之后，我们精心规划了这套“计算机专业教学·考研辅导丛书”。丛书内容针对计算机专业的主干课程，根据教学大纲要求，通过研习各类习题的解答与分析，使读者充分掌握各课程的原理和求解问题的思路和方法，深化对各课程概念的理解，提高分析与解决问题的能力。这套丛书包括:

1. 《C语言习题与解析》
2. 《C++语言习题与解析》
3. 《离散数学习题与解析》
4. 《数据结构习题与解析》(C语言篇修订版)
5. 《数据结构习题与解析》(PASCAL篇)
6. 《操作系统习题与解析》
7. 《数据库原理与应用习题解析》
8. 《编译原理习题与解析》
9. 《计算机网络习题与解析》
10. 《计算机组成原理习题与解析》
11. 《计算机系统结构习题与解析》

本套丛书由长期坚持在教学第一线的教授和副教授编写，在对丛书进行规划和评审时，我们把提高学生素质、培养学生的应用能力和创新能力作为首要的评价标准，同时注意各门课程的特色和教学的实用性。

这套教辅丛书具有以下特点:

- 语言简练，概念清晰
- 突出重点，阐述深入
- 习题丰富，启发扩展
- 由浅入深，循序渐进

如果说科学技术快速发展是21世纪的一个重要特征的话，那么，教学改革将是21世纪教育工作永恒的主题，是需要不断探索的课题。欲实现以上目标，还需要我们不断地努力实践和完善。这套教材一定有许多疏漏和不足之处需要我们不断地补充、不断地修改和完善。我们热情欢迎使用这套丛书的教师、学生和其他读者提出宝贵意见和建议，使之更加成熟。

读者联系方式：licb@publicwh.hb.cn
x_fb@163.net

目　录

第 1 章　集 合 论

集合论是现代数学的基础，它几乎与现代数学的每个分支均有联系，并且已渗透到各个科学领域。集合论的内容十分丰富，并有相应的专著论述，这里只概括介绍集合论中最基本的内容，包括：集合的基本概念；子集、全集、幂集、补集等；集合的基本运算和集合代数的一些基本公式；基本计数原理等。

§1.1　内 容 分 析

§1.1.1　集合的基本概念

集合是数学中没有给出精确定义的基本的数学概念，我们通常把所考查的对象的全体称为集合。其中的每个对象称为元素（或成员），通常用大写英文字母表示集合，如：A，B，X 等，用小写英文字母表示元素，如 a，b，x 等。

经常用到的几个集合有：

N　自然数集或正整数集（有些教材用 N 表示非负整数集，用 P 表示正整数集）

Z　整数集（有些教材用 I 表示整数集，但一般用 I 表示区间[0，1]）

Q　有理数集

R　实数集

C　复数集

给出一个集合的方法之一是列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来，例如：

$N_m=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$；$P_m=\{1,2,\cdots,m\}$（有些教材表示为：$Z_m=\{1,2,\cdots,m\}$）

不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$（或$\{\}$）表示。在所讨论的问题中，涉及到的全体对象的集合称为全集，通常用 U（或 E）表示。空集是惟一的，但全集只能是相对惟一的，而非绝对惟一的。

集合的元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者必有且只有一个成立。用 $a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A，用 $x\notin X$ 表示元素 x 不属于集合 X。

集合通常有两种表示方法：列举法和描述法。列举法是列出集合的所有元素，如：$A=\{1,2,3\}$；描述法是用谓词概括该集合中元素的属性，如：$B=\{n^2\mid n\in N\}$，$C=\{x\mid x\in R$，且 $-1<x<1\}$ 等。

集合具有几个性质：

（1）确定性。对一个具体的集合来说，其元素是确定的，一个元素或者在此集合中，或者不在此集合中，两者必居其一，这与模糊集合不同。不清晰的对象构成的集合不在本书讨论范围之内。
（2）无重复性。集合中元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同，那里因为特殊的原因允许有重复的元素。例如：$\{1,2,1\}=\{1,2\}$。
（3）集合中元素无顺序。例如：$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$。
（4）集合中元素是抽象的，甚至可以是集合。例如：$A=\{1,\alpha,\{1\}\}$。

§1.1.2 子集，集合的相等

定义 1 设有 A，B 两集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，称 B 是 A 的子集，也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记为 $B\subseteq A$。若 B 是 A 的子集，且 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 为 A 的真子集，记为 $B\subset A$。

显然有：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$

据定义有：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B\text{，有 } x\in A$$

定义 2 若两集合 A 与 B 包含的元素相同，称 A 与 B 相等，也解释为：若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，称 A 与 B 相等，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\text{且}B\subseteq A$$

定义 3 设 A 是一集合，A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集，记为 $P(A)$（或 $p(A)$、2^A）。即 $P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$。

用$|A|$记为 A 中元素的数目，也称为集合的基数（对有限集）。显然有：$|\varnothing|=0$。对于幂集，若 A 是有限集，则有：$|P(A)|=2^{|A|}$。

对于幂集，还有下面的结论：

定理 1 对任意集合 A，B，有：

（1）若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$；反之，若 $P(A)\subseteq P(B)$，则 $A\subseteq B$
（2）若 $A=B$，则 $P(A)=P(B)$；反之，若 $P(A)=P(B)$，则 $A=B$
（3）$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
（4）$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$
（5）$P(A-B)\subseteq (P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$

能举例说明（3）、（5）可以发生真包含的情形。如对（5），设 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $A-B=\{a\}$，P（$A-B$）$=\{\varnothing,\{a\}\}$，$(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$，两者不等。

§1.1.3 集合的运算及其性质

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并 $\cup$，交 $\cap$，相对补 $-$，绝对补 $\sim$，对称差 $\oplus$ 等

运算产生新的集合。

定义 4　任意两集合 A 与 B 的并是一个集合，它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成，记为 $A \cup B$。

任意两集合 A 与 B 的交是一个集合，它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成，记为 $A \cap B$。

任意两集合 A 与 B 的差是一个集合，它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成，记为 $A - B$（或 $A \backslash B$），也称为 B 相对 A 的补集。

任意两集合 A 与 B 的对称差是一个集合，它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成。记为 $A \oplus B$（有些教材记为 $A \Delta B$）。

集合 A 的补集是一个集合，它由所有不属于 A 的元素所构成，记为 $\overline{A}$（或 $\sim A$、A^c、A' 等），也称为 A 的绝对补集。

由以上定义，有：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}$$
$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$$

上面集合的并和交可以推广到 n 个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\text{；}\quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形，设 J 为一非空指标集，有：

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid \exists j_0 \in J, x \in A_{j_0}\}\text{；}\quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid \forall j \in J, x \in A_j\}$$

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（John Venn）形象描述，它有助于我们理解相关问题，有时对解题也很有帮助。

集合的运算具有下面一些基本性质：

定理 2　对于全集 U 的任意子集 A，B，C，有（下面的算律在不同教材中，可能名称、性质等都有所不同）：

幂等律	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
结合律	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
交换律	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
同一律	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$
零律	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
双补律	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$

德摩根律（De Morgen）	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
对合律	$\overline{\overline{A}}=A$	

除了上面的性质外，关于集合的差与对称差，还有下面一些性质：

定理 3　设 A，B，C 为任意集合，有：

（1）$A-B=A\cap\overline{B}$，我们通常用此式将差运算转化为其他的集合运算；

（2）$A\oplus B=B\oplus A$

（3）$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus U=\overline{A}$；$A\oplus\overline{A}=U$

（4）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

（5）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

但 $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$ 不一定成立，如：A={1,2,3}，B={1}，C={2}，则右边为空集，但左边为非空集。

§1.1.4　笛卡尔积

称＜a,b＞为由元素 a 和 b 组成的有序对（或序偶），其中 a 为第一元素，b 为第二元素，a，b 可以相同。

定义 5　设 A，B 为两集合，称 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔积（也称为直积），记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{<a,b>|\,a\in A,b\in B\}$。同样可以给出 n 维笛卡尔积的定义。

据上面定义可知：若 A 或 B 中有一个空集，则 $A\times B=\varnothing$。且一般来说：$A\times B\neq B\times A$。关于笛卡尔积，有下面几条性质：

定理 4　对任意集合 A，B，C，有：

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（5）$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

（6）$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

（7）若 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$

（8）若 A，B，C，D 非空，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充要条件是 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$

注意：上面结论（7）在条件 $C\neq\varnothing$ 不满足时，结论不一定成立。

§1.1.5　集合的覆盖与划分

定义 6　设 A 是非空集，A 的划分 Π 是 A 的非空子集的集合，即

$\Pi=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$，满足：

（1）$A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing, \alpha \neq \beta$

（2）$\bigcup_\alpha A_\alpha = A$

定义 7　非空集 A 的一个覆盖 C 是 A 的非空子集的集合，即

$C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$，满足：

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = A$$

若 $C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$ 是集合 A 的一个覆盖，且 C 中任意元素不是其他元素的子集，则称 C 是 A 的完全覆盖。

集合的覆盖与划分的区别在于前者不要求各个子集两两之交为空。

§1.1.6　基本计数原理

1．鸽巢原理（抽屉原理）

定理 5　把 n+1 个物体放入 n 个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

推广的鸽巢原理：

定理：把 n 个物体放入 m 个盒子里，则至少有一个盒子里至少有 $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ 个物体*。

2．容斥原理

最简单情形：

定理：A，B 均为有限集，则有：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

有三个集合时，容斥原理的表现形式：

定理：A，B，C 均为有限集，则有：

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

一般情形：

定理 6　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$ 均为有限集，则有：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

＊ $\lfloor x \rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数。如 $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$。

推论：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$$

$$=|U|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

§1.2 重点及难点解析

§1.2.1 基本要求

1．掌握集合、子集、全集、空集等概念，熟悉常用的表示集合的方法以及用文氏图来表示集合的方法，能判定元素与集合、集合与集合之间的关系。懂得两集合间相等关系和包含关系的定义和性质，能够利用定义证明两个集合相等。
2．掌握集合的五种基本运算：并、交、补、差和对称差的定义并熟记集合运算的基本等式，能够利用它们来证明更复杂的集合等式。
3．掌握幂集的定义及计算有限集的幂集所含元素个数，所使用的方法和思想。
4．掌握序偶和笛卡尔积的概念。
5．理解抽屉原理，熟记简单情形的容斥原理。
6．理解划分与覆盖的定义，清楚两者之间的差异。

§1.2.2 疑难点解析

1．注意两符号$\in$和$\subseteq$意义的区别。$\in$表示元素与集合之间的关系，而$\subseteq$则表示集合与集合之间的关系。但是由于集合的抽象性，集合中的元素可以是集合，故可以发生如：$A\in B$且$A\subseteq B$的情形。
2．集合中无重复元素，我们认为$\{a，a，b\}=\{a,b\}$。
3．证明集合相等是一个经常遇见的问题，对集合运算的等式的证明，可以利用集合的基本等式，也可以利用定义直接证明。
4．文氏图。在文氏图中，用矩形代表全集，用（椭）圆或其他闭曲线的内部代表 U 的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。要注意的是，文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出的一种直观而形象的示意性的表示，而不能用来证明集合等式及包含关系等。
5．差和对称差是值得关注的一点。希望大家对定理 3 和定义 4 中的一些结果如：$A-B=A\cap\overline{B}$ ；$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$有较好的记忆。
6．给定一个集合，确定其幂集，注意$\varnothing$和集合本身一定在幂集中，并且由于给定集合的不同，可能表现出来的幂集形式上有一定差别。如$A=\{a\}$和$B=\{\{a\}\}$，则它们的幂集是不同的，P（A）$=\{\varnothing,\{a\}\}$，而P（B）$=\{\varnothing,\{\{a\}\}\}$。

7．笛卡尔积是第 2 章二元关系的基础。它实际是一种集合运算，其结果是一个集合，所以笛卡尔积有集合的一般性质。但笛卡尔积不同于集合的交、并等运算，例如 A、B、$A \cap B$、$A \cup B$ 这四个集合都是同一全集 E 的子集，但集合 $A \times B$ 不是 E 的子集（是 $E \times E$ 的子集）。

8．计数原理：其中鸽巢原理主要用来证明某些问题，容斥原理通常用来计算某些集合的元素的数目，可以用类似文氏图一样的表示来帮助解题。

9．集合的划分与覆盖也是本章的一个值得注意的问题。要十分清楚划分的定义，这与下一章关系中的等价关系密切相关。

§1.3　基 本 题

§1.3.1　选择题

1．对任意集合 A、B、C，下述论断正确的是（　　）。

A．若 $A \in B$， $B \subseteq C$，则 $A \in C$

B．若 $A \in B$， $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$

C．若 $A \subseteq B$， $B \in C$，则 $A \in C$

D．若 $A \subseteq B$， $B \in C$，则 $A \subseteq C$

答案：A

说明：可以举例说明上面的选项 B，C，D 均是不正确的。如：对选项 B，取 A={1}，B={{1}}，B=C。对选项 C，取 $A = \varnothing$，B={1}，C={{1}}。对选项 D，取 A=B={1}，C={{1}}。

2．设 $A - B = \varnothing$，则有（　　）。

A．$B = \varnothing$　　B．$B \neq \varnothing$　　C．$A \subseteq B$　　D．$A \supseteq B$

答案：C

3．设 $P = \{x \mid (x+1)^2 \le 4\}$，$Q = \{x \mid x^2 + 16 \ge 5x\}$，则下列选项正确的是（　　）。

A．$P \supset Q$　　B．$P \supseteq Q$　　C．$Q \supset P$　　D．$Q = P$

答案：C

4．设 $A = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$，下列选项正确的为（　　）。

A．$1 \in A$　　B．$\{1,2,3\} \subseteq A$　　C．$\{\{4,5\}\} \subset A$　　D．$\varnothing \in A$

答案：C

5．下列各选项错误的是（　　）。

A．$\varnothing \subseteq \varnothing$　　B．$\varnothing \in \varnothing$　　C．$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$　　D．$\varnothing \in \{\varnothing\}$

答案：B

6．设 $A=\{x \mid x^3-x=0\}$， $B=\{x \mid x^2-4<0, x \in Z\}$， $C=\{x \mid y=2x-1\}$，
$D=\{x \mid x+y=5, xy=6\}$，则有（　　）。

A．A=B　　B．A=C　　C．C=D　　D．C=A

答案：A

7．在 0____$\varnothing$ 之间填上正确的符号。

A．=　　B．$\in$　　C．$\subseteq$　　D．$\notin$

答案：D

8．设 $M=\{x \mid f_1(x)=0\}, N=\{x \mid f_2(x)=0\}$，则方程 $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$ 的解为（　　）。

A．$M \cap N$　　B．$M \cup N$　　C．$M \oplus N$　　D．M–N

答案：B

9．设 $A=\{a,\{a\}\}$，下列选项错误的是（　　）。

A．$\{a\} \in P(A)$　　B．$\{a\} \subseteq P(A)$　　C．$\{\{a\}\} \in P(A)$　　D．$\{\{a\}\} \subseteq P(A)$

答案：B

10．设 $A=\{\varnothing\}$，B=P（P（A)），下列选项错误的是（　　）。

A．$\varnothing \in B$　　B．$\{\varnothing\} \in B$　　C．$\{\{\varnothing\}\} \in B$　　D．$\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in P(A)$

答案：D

11．幂集 $P(P(P(\varnothing)))$ 为（　　）。

A．$\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$　　B．$\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
C．$\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$　　D．$\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

答案：C

*12．空集 $\varnothing$ 的幂集 P（$\varnothing$）的基数是（　　）。

A．0　　B．1　　C．3　　D．4

答案：B

§1.3.2 填空题

1．设 $M=\{x\,|\,1\le x\le 12$，x 被 2 整除，$x\in Z\}$，$N=\{x\,|\,1\le x\le 12$，x 被 3 整除，$x\in Z\}$，则 $M\cup N=$____①____，$M\cap N=$____②____。

答案：① $\{2,3,4,6,8,9,10,12\}$ ② $\{6,12\}$

2．设全集 $U=\{1,2,\cdots,7\}$ 的子集为 A={偶数}，B={奇数}，C={3 的倍数}，则 $A\cap B=$____①____，$\overline{A}\cap\overline{C}=$____②____，$\overline{A\cup C}=$____③____，$B\cap C=$____④____。

答案：① $\varnothing$ ② $\{1,5,7\}$ ③ $\{1,5,7\}$ ④ $\{3\}$

3．设集合 $A=\{x\,|\,\sqrt{x}<3,x\in Z\},B=\{x\,|\,x=2k,k\in Z\}$，$C=\{1,2,3,4,5\}$。

(1) $A\oplus C=$____①____

(2) $(A\oplus B)\cap C=$____②____

(3) $B\oplus B=$____③____

(4) $A\oplus(C-B)=$____④____

答案：① $\{0,6,7,8\}$ ② $\{1,3,5\}$ ③ $\varnothing$ ④ $\{0,2,4,6,7,8\}$

4．设 I 为整数集合，$A=\{x\,|\,x^2<30,x\in I\}$，$B=\{x\,|\,x$是素数，$x<20\}$，$C=\{1,3,5\}$。

(1) $(A\cap B)\cup C=$____①____

(2) $(B-A)\cup C=$____②____

(3) $(C-A)\cap(B-A)=$____③____

(4) $(B\cap C)-A=$____④____

答案：① $\{1,2,3,5\}$ ② $\{1,3,5,7,11,13,17,19\}$ ③ $\varnothing$ ④ $\varnothing$

5．设全集 $U=\{1,2,3,\cdots,20\}$，A、B、C 是其子集，且 $A=\{x\,|\,\sqrt{x}<4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x-7=0\}$，$C=\{x\,|\,x^2<100\}$。

(1) $(A-B)\cap\overline{C}=$____①____

(2) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C=$____②____

(3) $(A\cap\overline{B})-C=$____③____

答案：① $\{10,11,12,13,14,15\}$ ② $\varnothing$ ③ $\{10,11,12,13,14,15\}$

6．设 A，B 是集合，求 A 与 B 之间的关系。

(1) 如果 $A=\{1\}$，$B=\{1,\{1,2\}\}$，则____①____。

(2) 如果 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing\}$，则____②____。

(3) 如果 $A=\{a\}$，$B=\{\varnothing,a,\{\varnothing\}\}$，则____③____。

(4) 如果 $A=\{\varnothing\}$，$B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，则____④____。

供选择项：

A．$A\in B$ 且 $A\subseteq B$ B．$A\in B$ 但 $A\not\subset B$

C．$A \notin B$ 但 $A \subseteq B$　　　　D．$A \notin B$ 且 $A \not\subset B$

答案：① C　　② A　　③ C　　④ A

*7．设 $A = \{\{x, y\}, \varnothing, x, y\}$，求下列各式的结果：

$A - \{x, y\} =$ __①__；$A - \{\varnothing\} =$ __②__；$\{\{x, y\}\} - A =$ __③__；
$\varnothing - A =$ __④__；　A 的幂集 P（A）= __⑤__。

答案：① $\{\varnothing, \{x,y\}\}$　　② $\{\{x,y\}, x, y\}$　　③ $\varnothing$　　④ $\varnothing$
⑤ $\{\varnothing$，$\{x\}$，$\{y\}$，$\{\varnothing\}$，$\{\{x,y\}\}$，$\{x,y\}$，$\{x,\{x,y\}\}$，$\{y,\{x,y\}\}$，$\{\varnothing,x\}$，$\{\varnothing,y\}$，$\{\varnothing,\{x,y\}\}$，$\{\varnothing,x,\{x,y\}\}$，$\{\varnothing,y,\{x,y\}\}$，$\{\varnothing,x,y\}$，$\{x,y,\{x,y\}\}$，$\{\varnothing,x,y,\{x,y\}\}\}$

8．集合 $A = \{\varnothing, \{a\}\}$ 的幂集 P（A）=_____。

答案：$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\}$

*9．集合 A=$\{\{1,2\},\{3\}\}$，B=$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$，试写出

$A \cup B =$ __①__，$A \cap B =$ __②__，P（A）= __③__。

答案：① $\{\{1,2\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$　② $\{3\}$　③ $\{\varnothing,\{\{1,2\}\},\{\{3\}\},\{\{1,2\},\{3\}\}\}$

10．设 $A = \{x \mid 100 < x < 200, x = 7n + 3, n \in Z, x \in Z\}$，则$|A|$=_____。

答案：15

11．若集合 A 的基数$|A|$=10，则其幂集的基数$|P$（A）$|$=_____。

答案：1024（或 2^{10}）

12．确定以下各式：

（1）$\varnothing \cap \{\varnothing\} =$ __①__
（2）$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing =$ __②__
（3）$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\} =$ __③__

答案：① $\varnothing$　　② $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$　　③ $\{\{\varnothing\}\}$

*13．某班有学生 50 人，有 26 人在第一次考试中得优，有 21 人在第二次考试中得优，有 17 人两次考试都没有得优，那么两次考试都得优的学生人数是_____。

答案：14 人

14．某校有足球队员 38 人，篮球队员 15 人，排球队员 20 人，三队队员总数为 58 人，且其中只有 3 人同时参加 3 种球队，那么仅仅参加两种球队的队员人数是_____。

答案：9 人

15．设 $A=\{a,b,c\}$，则集合 $S_1=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$，$S_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$，$S_3=\{\{a\},\{b,c\}\}$，$S_4=\{\{a,b,c\}\}$，$S_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ 和 $S_6=\{\{a\},\{a,c\}\}$ 中是 A 的完全覆盖的有__①__，是 A 的划分的有__②__。

答案：① S_1、S_3、S_4、S_5　　② S_3、S_4、S_5

§1.3.3　判断题

*1．若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$。（　）　答案：√

2．若 $P\cup Q=Q$，$P\cap Q=\varnothing$，则 $P=\varnothing$。（　）　答案：√

提示：证明 $P\subseteq P\cup Q=Q$，从而 $P\cap Q=P=\varnothing$。

*3．$\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 且 $\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。（　）　答案：√

4．设 $A=\{\varnothing\}$, $B=P(P(A))$，则有 $\{\varnothing\}\in B$，且 $\{\varnothing\}\subseteq B$。（　）　答案：√

*5．A，B 是集合，则命题 $A\subseteq B$ 和 $A\in B$ 可能同时成立。（　）　答案：√

6．设 A，B 为任意集合，则 P（$A-B$）$=P$（A）$-P$（B）。（　）　答案：×

*7．若 $A-B\subseteq B$，则 $B\subseteq A$。（　）　答案：×

提示：在 $A-B\subseteq B$ 条件下的结论应是 $A\subseteq B$。

8．对每个集合 A，有 $\{A\}\subseteq P(A)$。（　）　答案：√

9．设 A 与 B 是两个任意集合，若 $\{A\cap B, B-A\}$ 是 $A\cup B$ 的一个划分，则有 $A-B=\varnothing$。（　）　答案：√

提示：$(A\cap B)\cup(B-A)=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})=B\cap U=B$，故有 $B=A\cup B$，从而 $A\subseteq B$，证得 $A-B=\varnothing$。

10．若 $\{A-B，B-A\}$ 是集合 $A\cup B$ 的一个划分，则有 $A\cap B=\varnothing$，其中 $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$。（　）　答案：√

提示：$(A-B)\cup(B-A)=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$，从而有 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}\supseteq(A\cup B)$，得 $(A\cap B)\subseteq\overline{A\cup B}=\varnothing$。证得 $A\cap B=\varnothing$，且由划分的定义，有 $A\neq\varnothing, B\neq\varnothing$（否则 $A-B=\varnothing$ 或 $B-A=\varnothing$）。

11．设 A 与 B 是两个任意集合，若 $\{A\cap B, A-B, B-A\}$ 是 $A\cup B$ 的一个划分，则有 $A\cap B=\varnothing$，$A-B=\varnothing, B-A=\varnothing$。（　）　答案：×

提示：可以参看文氏图如图 1-1 所示。实际上，当 A，B 均为非空集时，$A\cap B$、$A-B$、$B-A$ 就一定是 $A\cup B$ 的划分，不必 $A\cap B=\varnothing$ 或者 $A-B=\varnothing, B-A=\varnothing$。

12．若 $\{A\cap B\}$ 是 $A\cup B$ 的一个划分，则有 $A-B=B-A=\varnothing$。（　）　答案：√

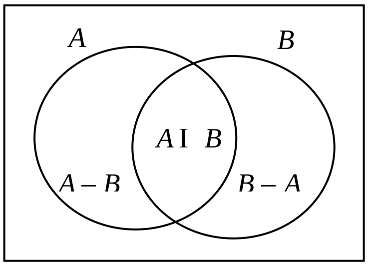


图 1-1

提示：由 $A\cap B=A\cup B$，有 $(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$，从而 $A=A\cap B=A\cup B$，同样可证明 $B=A\cap B=A\cup B$，得 A=B，证得 $A-B=B-A=\varnothing$。

§1.4 习 题 解 析

1．举出集合 A，B，C 的例子，使其满足 $A\in B,\ B\in C$，但 $A\notin C$。

解：

这样的例子很多，这里给出其中的一个可能的答案：$C=\{B\},\ B=\{A\},\ A=\{1\}$。

2．判断以下命题的真假：

（1） $a\in\{\{a\}\}$
（2） $\{a\}\in\{\{a\}\}$
（3） $x\in\{x\}-\{\{x\}\}$
（4） $\{x\}\subseteq\{x\}-\{\{x\}\}$
（5） $A-B=A\Leftrightarrow B=\varnothing$
（6） $A-B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$
（7） $A\oplus A=A$
（8） $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
（9）如果 $A\cap B=B$，则 $A=B$
（10） $A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$ 且 $x\subseteq A$

解：

（1）假	（2）真	（3）真	（4）真	（5）假
（6）假	（7）假	（8）真	（9）假	（10）真

说明：本题主要考查 $\in$，$\subseteq$ 的定义以及集合的基本运算性质。

命题（3）中的集合 $\{x\}-\{\{x\}\}$ 实际上就等于 $\{x\}$，所以命题为真。

根据集合的包含关系不难看出：如果 $x\in A$，则有 $\{x\}\subseteq A$，反之也对。所以（4）是（3）的等价的命题，也为真。

命题（5）不真，虽然当 $B=\varnothing$ 时，有 A–B=A。但只要 A 与 B 不交，就有 A–B=A，

不一定有 $B=\varnothing$。正确的命题应是：$A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$。

命题（6）同命题（5）类似，正确的命题应该是：$A-B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$。

命题（7）应改为：$A\oplus A=\varnothing$。

命题（9）应改为：如果 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$。

命题（10）说明 x 既是 A 的元素（因为 $x\in\{x\}\subseteq A$，又是 A 的子集合因为 $x\subseteq x\cup\{x\}=A$)。前者将 x 看成 A 的元素，考虑隶属关系；后者是将 x 看成集合，与 A 放在同一层次上考虑包含关系。这两个关系同时成立。

3．设 A，B，C，D 是 Z 的子集，其中：

$A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{x^2 \mid x^2<50且x\in Z\}$

$C=\{x \mid x\in Z且0\le x\le 30且x可以被3整除\}$

$D=\{x \mid x=2^k且k\in Z且0\le k\le 6\}$

用描述法表示下面集合并计算：

（1）$A\cup B\cup C\cup D$

（2）$A\cap B\cap C\cap D$

（3）$B-(A\cup C)$

（4）$(A\cap B)\cup D$

解：

用描述法表示，有：

（1）$A\cup B\cup C\cup D$={x 为整数|x 为 1,2,7,8 或者 $x=k^2$，k 为整数且 $k^2<50$ 或者 $0\le x\le 30$ 且可被 3 整除或者 $x=2^k$，其中 k 为整数且 $0\le k\le 6$}

（2）$A\cap B\cap C\cap D$={x 为整数|x 为 1,2,7,8 并且 $x=k^2$，k 为整数且 $k^2<50$ 并且 $0\le x\le 30$ 且可被 3 整除并且 $x=2^k$，其中 k 为整数且 $0\le k\le 6$}

（3）$B-(A\cup C)$={x|x 在 B 中并且 x 不在 A 和 C 中}

（4）$(A\cap B)\cup D$={x|x 在 D 中或者 x 既在 A 中也在 B 中}

由条件，有：$A=\{1,2,7,8\}$；$B=\{0,1,4,9,16,25,36,49\}$；$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$；$D=\{0,2,4,8,16,32,64\}$。从而有

（1）$A\cup B\cup C\cup D$={0,1,2,3,4,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,25,27,30,32,36,49,64}

（2）$A\cap B\cap C\cap D=\varnothing$

（3）$B-(A\cup C)$={4,16,25,36,49}

（4）$(A\cap B)\cup D$={0,1,2,4,8,16,32,64}

4．设全集 $U=\{1,2,\ldots,12\}$，$A=\{1,3,5,7,9,11\}$，$B=\{2,3,5,7,11\}$，$C=\{2,3,6,12\}$，$D=\{2,4,8\}$。确定下面的集合：

（1）$A\cup B$　　（2）$A\cap C$　　（3）$(A\cup B)\cap\overline{C}$

（4）$A-B$　　（5）$C-D$　　（6）$B\oplus D$

解：

$A \cup B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$；$A \cap C = \{3\}$；

$(A \cup B) \cap \overline{C} = \{1,5,7,9,11\}$；$A - B = \{1,9\}$；

$C - D = \{3,6,12\}$；$B \oplus D = \{3,4,5,7,8,11\}$。

5．$A = \{\{\varnothing\},\{\varnothing,1\},\{1,1,\varnothing\}\}$，$B = \{\{\varnothing,1\},\{1\}\}$。

计算 $A \cup B$，$A \cap B$，$A - B$，$P(A)$。

解：

$A \cup B = \{\{\varnothing\},\{\varnothing,1\},\{1\}\}$，$A \cap B = \{\{\varnothing,1\}\}$，

$A - B = \{\{\varnothing\}\}$，$P(A) = \{\varnothing,\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing,1\},\{\varnothing,1\}\}\}$。

提示：A 中的元素 $\{\varnothing,1\}$ 和 $\{1,1,\varnothing\}$ 是相等的集合。应先将 A 化简为 $\{\{\varnothing\},\{\varnothing,1\}\}$，然后再做计算。

6．化简 $((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$。

解：

$((A \cup (B - C)) \cap A) \cup (B - (B - A))$

$= A \cup (B - (B - A))$

$= A \cup (A \cap B)$

$= A$

提示：观察 $\cup$ 或 $\cap$ 符号两边的集合之间是否存在包含关系，如果存在，则可利用公式简化计算。$A \subseteq A \cup (B - C)$，所以 $(A \cup (B - C)) \cap A = A$。

$B = (A \cap B) \cup (B - A)$，且 $A \cap B$ 与 $B - A$ 不交，所以 $B - (B - A) = A \cap B$。

$A \cap B \subseteq A$，所以 $A \cup (A \cap B) = A$。或者直接运算：

$B - (B - A) = B \cap \overline{B \cap \overline{A}} = B \cap (\overline{B} \cup A) = B \cap A$

7．化简下列集合表达式：

(1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B)$

(2) $((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A$

(3) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

(4) $(A \cap B) - (C - (A \cup B))$

解：

(1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B) = B - (A \cup B) = \varnothing$

(2) $((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A = ((A \cup B \cup C) \cap (\overline{B \cup C})) \cup A$

$= ((A \cap (\overline{B \cup C})) \cup ((B \cup C) \cap (\overline{B \cup C}))) \cup A = (A \cap (\overline{B \cup C})) \cup A = A$

(3) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C) = (B \cap (\overline{A \cap C})) \cup (B \cap A \cap C)$

$= B \cap ((\overline{A \cap C}) \cup (A \cap C)) = B$

(4) $(A \cap B) - (C - (A \cup B)) = (A \cap B) \cap (\overline{C \cap \overline{A \cap B}})$

$= (A \cap B) \cap (\overline{C} \cup (A \cup B)) = ((A \cap B) \cap \overline{C}) \cup ((A \cap B) \cap (A \cup B))$

$= (A \cap B) \cap \overline{C}) \cup (A \cap B) = A \cap B$

8．判断下列命题是否正确？

（1）$\varnothing \subseteq \varnothing$
（2）$\varnothing \in \varnothing$
（3）$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
（4）$\varnothing \in \{\varnothing\}$

解：

和第 2 题一样，集合与集合之间是包含关系，元素与集合之间是属于关系。答案应为：

（1）正确，空集为任一集合的子集；
（2）错误，空集中不含任何元素；
（3）正确，空集为任一集合的子集；
（4）正确，集合$\{\varnothing\}$中含有元素$\varnothing$。

9．设 A，B，C 是集合。

（1）如果 $A \notin B$且$B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？
（2）如果 $A \in B$且$B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？
（3）如果 $A \subseteq B$且$B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？
（4）如果 $A \in B$且$B \subseteq C$，是否一定有 $A \in C$？
（5）如果 $A \in B$且$B \subseteq C$，是否一定有 $A \subseteq C$？
（6）如果 $A \subseteq B$且$B \in C$，是否一定有 $A \in C$？
（7）如果 $A \subseteq B$且$B \in C$，是否一定有 $A \subseteq C$？
（8）如果 $A \in B$且$B \not\subset C$，是否一定有 $A \notin C$？

解：

本题主要考查集合与元素之间的关系及集合与集合之间的关系。

（1）不一定，如：A=\{1\}，B=\{2\}，C=\{\{1\}\}；
（2）不一定，如：A=\{1\}，B=\{\{1\}\}，C=B；
（3）不一定。如：A=\{1\}，B=\{1,2\}，C=\{\{1\}\}；
（4）一定。A 是 B 中元素，而 B 中任一元素都在 C 中，故 $A \in C$；
（5）不一定。如：A=\{1\}，B=\{\{1\},2\}，C=B；
（6）不一定。如：A=\{1\}，B=\{1,2\}，C=\{B\}；
（7）不一定。如：A=\{1\}，B=\{1,2\}，C=B；
（8）不一定。如：A=\{1\}，B=\{\{1\},2\}，C=\{1\}。

10．判断下面的关系是否正确，并简要说明理由。

（1）$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$
（2）$\{a,b\} \in \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$
（3）$\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$
（4）$\{a,b\} \in \{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

解：

正确的有：(1)、(3)。

对选项（1)，因为$\{a,b\}$中每个元素（只有 a 和 b）均在集合$\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$中；

对选项（3)，因为$\{a,b\}$中每个元素（只有 a 和 b）均在集合$\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$中；

对选项（2)，集合$\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$中含有 4 个元素，分别为 $a,b,c,\{a,b,c\}$，没有$\{a,b\}$，所以不正确；

对选项(4)，集合$\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$中含有 3 个元素，分别为 $a,b,\{\{a,b\}\}$，没有$\{a,b\}$，所以不正确。

说明：注意元素与集合之间是属于或不属于关系，集合与集合之间是包含或不包含关系。

11．确定下列集合 A 的幂集：

（1）$\{a\}$　　（2）$\{\{a\}\}$　　（3）$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

（4）$\{\varnothing\}$　　（5）$\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$　　（6）$\varnothing$

解：

根据幂集的定义，有：

（1）$P(A)=\{\{a\},\ \varnothing\}$

（2）$P(A)=\{\varnothing,\{\{a\}\}\}$

（3）$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

（4）$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

（5）$P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\varnothing,\{a\}\},$
$\{\varnothing,\{b\}\},\{\{a\},\{b\}\},\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}\}$

（6）$P(A)=\{\varnothing\}$

12．设 $A=\{\varnothing\}$，$B=P(P(A))$。

（1）是否$\varnothing\in B$?是否$\varnothing\subseteq B$？

（2）是否$\{\varnothing\}\in B$?是否$\{\varnothing\}\subseteq B$？

（3）是否$\{\{\varnothing\}\}\in B$？是否$\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$？

解：

由题意有 $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,根据元素与集合的关系及集合与集合的关系，(1)、(2)、(3）均正确。

13．设 $A=\{a,\{a\}\}$。

（1）是否$\{a\}\in P(A)$？　　（2）是否$\{a\}\subseteq P(A)$？

（3）是否$\{\{a\}\}\in P(A)$？　　（4）是否$\{\{a\}\}\subseteq P(A)$？

解：

由条件有：$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$，从而（2）不正确，其余均正确。

14．证明对称差的下述性质：

（1） $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

（2） $A \oplus B = B \oplus A$

证：

（1） $A \oplus (B \oplus C) = (A \cap \overline{(B \oplus C)}) \cup ((B \oplus C) \cap \overline{A})$

$$= (A \cap \overline{(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})}) \cup (((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) \cap \overline{A})$$
$$= (A \cap ((\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B))) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{A})$$
$$= (A \cap ((\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C))) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{A})$$
$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{A})$$

这是一个关于 A，B，C 对称的式子，同样可以证明：

$$(A \oplus B) \oplus C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap \overline{C} \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{A})$$

故结论得证。

（2）由对称差的定义，$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \oplus A$

15．设 A、B、C 是集合，求下列各式成立的充分必要条件。

（1） $(A - B) \cup (A - C) = A$

（2） $(A - B) \cup (A - C) = \varnothing$

（3） $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing$

（4） $(A - B) \oplus (A - C) = \varnothing$

解：

（1）因 $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A - (B \cap C)$，故当 $A - (B \cap C) = A$，即 $B \cap C \subseteq \overline{A}$ 时，上式成立；上面推导可以反过来，故 $B \cap C \subseteq \overline{A}$ 为（1）成立的充分必要条件；

（2）要使 $(A - B) \cup (A - C) = \varnothing$ 成立，即 $A - (B \cap C) = \varnothing$，故当 $B \cap C \supseteq A$ 时（2）成立；

（3）因 $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A - (B \cup C)$，要使 $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing$ 成立，得 $A \subseteq B \cup C$ 时（3）成立；

（4）注意 $A \oplus A = \varnothing$，并由 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$，可得 $A - B = \varnothing$ 且 $B - A = \varnothing$，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，从而可得 $A = B$。即 $A \oplus B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$。对本题，有 $A - B = A - C$。

*16．说明在下列条件下集合 A 和 B 是什么关系，或者 A 与 B 是什么集合？

（1） $A \cap B = A$　　（2） $A - B = B - A$　　（3） $(A - B) \cup (B - A) = A$

解：

（1）显然 $A \subseteq B$，即 A 是 B 的子集；

（2）因为 $A-B\subseteq A$， $B-A\subseteq B$，且由条件有： $A-B=B-A$，故 $A-B=B-A\subseteq A\cap B$，结合差集的定义，有 $A-B=B-A=A\cap B=\varnothing$，即 $A=B$。

（3）因对任意的 $x\in A$，x 有两种情况 $x\in B$ 或者 $x\notin B$ 发生，而实际上 $x\in B$ 不会发生。否则 $x\notin(A-B)$ 且 $x\notin(B-A)$，从而 $x\notin(A-B)\cup(B-A)=A$，发生矛盾。故对任意的 $x\in A$，有 $x\notin B$，且若存在 $y\in B$，和上面一样的推理，可得 $y\notin A$，此时， $y\in B-A\subseteq A$ 发生矛盾。故可得结论： $B=\varnothing$。

*17．若 $A-B=B$，问 A，B 是什么集合？并说明理由。

解：

A，B 均为空集。因为若存在 $x\in B$，有 $x\in A-B=A\cap\overline{B}$，故 $x\in\overline{B}$，即 $x\notin B$ 得出矛盾，所以 B 中不含任何元素。此时有 $A-B=A-\varnothing=A=\varnothing$，从而有 $A=B=\varnothing$。

*18．证明：$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$

证：

由集合差运算的等价定义 $X-Y=X\cap\overline{Y}$，有

$$(A-B)-C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$
$$A-(B\cup C)=A\cap\overline{(B\cup C)}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$
$$(A-C)-B=(A\cap\overline{C})\cap\overline{B}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$
$$\begin{aligned}(A-C)-(B-C)&=(A\cap\overline{C})\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)\\&=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup\varnothing=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\end{aligned}$$

故有：$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$

*19．设 A，B 为集合，证明：$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$

证：

可以直接利用定义证明。对任意的 $<x,y>\in(A-B)\times(C-D)$，有 $x\in A-B$，$y\in C-D$，从而 $x\in A,x\notin B$， $y\in C,y\notin D$，即 $<x,y>\in A\times C$， $<x,y>\notin B\times D$，有 $<x,y>\in(A\times C)-(B\times D)$，证得 $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

说明：有例为证，上式可以不相等。如：$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$，$D=\{3\}$，则右边为 $\{<1,2>\}$，而左边因 $A-B$ 为空集而为空集，两者不相等。

20．证明：$A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C$。

证：

由集合运算的分配律与吸收律，有

$$\begin{aligned}B&=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)\\&=(B\cap A)\cup(B\cap C)=(C\cap A)\cup(B\cap C)\\&=C\cap(A\cup B)=C\cap(A\cup C)\\&=C\end{aligned}$$

21．设 A，B，C 是全集 U（非空）的子集。下面的结论哪些是正确的？哪些是错误的？对错误的结论给出实例。

（1）对任意的 A，B，C，有 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$

（2）对任意 A，B，有 $(A\cap\varnothing)\cup B=B$

（3）当 $A\subseteq B$，则 $(A\cap(\varnothing\cup B))=A$

（4）对任意 A，B，有 $A\cap B=\overline{A}\cup\overline{B}$

（5）对任意的 A，B，C，有 $(A\cup B\cup C)-(A\cup B)=C$

（6）对任意的 A，B，C，有 $(A\cup B)-(B\cup C)=A-C$

解：

（1）、（4）、（5）、（6）不正确。（2）、（3）正确。

对（1），如 $A=\varnothing$，$C=\{1\}$。

对（4），如 $A=B=\varnothing$。

对（5），如 $A=B=C=\{1,2,3\}$，则左边为空集，而右边非空。

对（6），如 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{1\}$，则左边为空集，而右边非空。

22．证明或否定下面的结论。

（1）若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$。

（2）若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$。

（3）若 $A\cup B\subseteq A\cap B$，则 $A=B$。

（4）若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$。

（5）若 $A\subset B$ 且 $C\subset D$，则 $A\cap C\subset B\cap D$。

（6）若 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$，则 $A-D\subseteq B-C$。

解：

（1）、（2）、（5）错误。（3）、（4）、（6）正确。

（1）如：$A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$。

（2）如：$A=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$。

（3）证：由条件有 $A\subseteq A\cup B\subseteq A\cap B\subseteq B$，同理有 $B\subseteq A$，得 $A=B$。

（4）证：由条件有 $A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$，利用对称差的结合律，
有 $(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$，因为 $A\oplus A=\varnothing$，有 $\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$，
证得 $B=C$。

（5）如：$A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{3\}$，$D=\{3,4\}$。

（6）证：$C\subseteq D\Leftrightarrow\overline{D}\subseteq\overline{C}$，又由 $A\subseteq B$ 得 $A\cap\overline{D}\subseteq B\cap\overline{C}$，即 $A-D\subseteq B-C$。

说明：（4）也可按定义证明。若 $A\oplus B=A\oplus C$，则对任意的 $x\in B$，

a．若 $x\in A$，则 $x\in A\cap B$，从而 $x\notin A\oplus B=A\oplus C$。由 $x\in A$ 和 $x\notin A\oplus C$，可得 $x\in A\cap C$，得 $x\in C$；

b．若 $x\notin A$，则 $x\in B-A$，从而 $x\in A\oplus B=A\oplus C$。由 $x\notin A$ 和 $x\in A\oplus C$，可得 $x\in C$。

即 $B \subseteq C$。同理可证：$C \subseteq B$，证得 B=C。

23．（1）举例说明，结合律不适用于集合的差运算之中。

（2）证明对任意集合 A，B，C，有 $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$。

解：

（1）如：A={1,2,3}，B=C={2}，则(A－B)－C={1,3}，A－(B－C)={1,2,3}

（2）证明：$\forall x \in (A-B)-C$，有 $x \in A-B,\ x \notin C$，即 $x \in A,\ x \notin B$，从而 $x \notin B-C$，有 $x \in A-(B-C)$，即 $(A-B)-C \subseteq A-(B-C)$。也可由相关性质证明：

$$(A-B)-C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \subseteq A \cap \overline{B} \subseteq A \cap (\overline{B} \cup C) = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A-(B-C)$$

24．公式 $A-B = A \cap \overline{B}$ 用集合的交和补运算定义了差运算。试求一公式，它用集合的交和补运算定义并运算。

解：

由 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 可得 $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$。

25．A_k 是实数集，定义如下：

$$A_0 = \{a \mid a \le 1\}$$
$$A_k = \{a \mid a < 1+1/k\}, k = 1,2,\cdots$$

求证：

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_0$$

证：

$\forall x \in A_0, x \le 1 < 1+1/k, x \in A_k, \forall k$，从而 $A_0 \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$。

另一方面，$\forall x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$，若 $x \notin A_0$，则 $x > 1$，由实数的基本知识，$\exists \varepsilon > 0$，使得 $x > 1+\varepsilon$，从而存在 $k \in N$（自然数集），$x > 1+\varepsilon > 1+1/k$（可取 $k = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$），与 $x \in A_k$ 矛盾。有 $x \in A_0$，从而 $A_0 \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$，证得 $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$。

26．对下面的集合 C，确定 $\bigcup_{S \in C}$ 和 $\bigcap_{S \in C} S$ 的结果。

（1）$C = \{\varnothing\}$　　（2）$C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

（3）$C = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$　　（4）$C = \{\{i\} \mid i \in Z\}$

解：

（1）$\bigcup_{S \in C} S = \varnothing$，$\bigcap_{S \in C} S = \varnothing$

（2）$\bigcup_{S \in C} S = \{\varnothing\}$，$\bigcap_{S \in C} S = \varnothing$

（3）$\bigcup_{S \in C} S = \{a,b\}$，$\bigcap_{S \in C} S = \varnothing$

（4） $\bigcup\limits_{S\in C} S = Z$， $\bigcap\limits_{S\in C} S = \varnothing$

27．对任意两集合 A 和 B，

（1）证明：$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

（2）证明：$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

（3）举例说明 $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$

证：

（1）$\forall X\in P(A)\cup P(B)$，$X\in P(A)$ 或 $X\in P(B)$，$\therefore X\subseteq A$ 或 $X\subseteq B$ $\therefore X\subseteq A\cup B$，$\therefore X\in P(A\cup B)$。

（2）$\forall X\in P(A)\cap P(B)$，$X\in P(A)$ 且 $X\in P(B)$，$\therefore X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$ $\therefore X\subseteq A\cap B$，$\therefore X\in P(A\cap B)$，上述过程可逆，故
$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$。

（3）例 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$A\cup B=\{1,2\}$，$P(A)\cup P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$，但
$P(A\cup B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$。

28．证明：（U 为全集）

（1） $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap\overline{B}=\varnothing$

（2） $A\subseteq B$ 当且仅当 $\overline{A}\cup B=U$

（3） $A\subseteq B$ 当且仅当 $A-B=\varnothing$

证：

（1） $A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\in B\Leftrightarrow \forall x\in A,\ x\notin\overline{B}\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing$

（2） $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow \overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A}\cup B=U$

（3） $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A-B=\varnothing$

29．设 A={1}，B={a,b}，C={2,3}，写出：

$A\times B\times C$， B^2， A^3， $B^2\times A$， $(A\times B)^2$ 的结果。

解：

$A\times B\times C=\{<1,a,2>,<1,a,3>,<1,b,2>,<1,b,3>\}$；

$B^2=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$；

$A^3=\{<1,1,1>\}$;

$B^2\times A=\{<a,a,1>,<a,b,1>,<b,a,1>,<b,b,1>\}$；

因 $A\times B=\{<1,a>,<1,b>\}$，有

$(A\times B)^2=\{<<1,a>,<1,a>>,<<1,a>,<1,b>>,<<1,b>,<1,a>>,<<1,b>,<1,b>>\}$

30．若 $A\cap B\neq\varnothing$，求证：

（1） $(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$

（2） $(A\cap B)\times(A\cup B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$

证：

（1）对任意的$<x,y>\in(A\cup B)\times(A\cap B)$，有$x\in A\cup B$，$y\in A\cap B$，故$x\in A$或$x\in B$，$y\in A$且$y\in B$，从而$<x,y>\in A\times A$或$<x,y>\in B\times B$，有$<x,y>\in(A\times A)\cup(B\times B)$。证得。

（2）同理可证。

31．下列各式哪些成立，哪些不成立，为什么？请举例说明。

（1）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

（2）$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

（3）$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

（4）$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

解：

（1）不成立。例如：A={1}，B={2}，C={3}，D={4}，则$A\cup B=\{1,2\}$，$C\cup D=\{3,4\}$，$(A\cup B)\times(C\cup D)=\{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>\}$；而$(A\times C)\cup(B\times D)=\{<1,3>,<2,4>\}$，两者不相等。

（2）不成立。例如：A={1}，B={2}，C=D={1}，则$(A-B)\times(C-D)=\varnothing$；而$(A\times C)-(B\times D)=\{<1,1>\}$，两者不相等。

（3）不成立。例如：A=B={1}，C={2}，D={3}，则$A\oplus B=\varnothing$，有$(A\oplus B)\times(C\oplus D)=\varnothing$；而$(A\times C)\oplus(B\times D)=\{<1,2>\}\oplus\{<1,3>\}=\{<1,2>,<1,3>\}$两者不相等。

（4）成立。因为：

$$(A\oplus B)\times C=[(A-B)\cup(B-A)]\times C$$
$$=[(A-B)\times C]\cup[(B-A)\times C]$$
$$=[A\times C-B\times C]\cup[(B\times C-A\times C]$$
$$=(A\times C)\oplus(B\times C)$$

32．（1）证明：任意给出四个整数，则其中至少有两个整数，它们除以 3 的余数相同（即模 3 同余）。

（2）证明：若$a_1,a_2,\cdots,a_{p+1}$是整数，则其中至少有两个数模p同余。

证：

（1）记每个整数被 3 除后的余数分别为A，B，C，D，则四个数只能取 0，1，2，因此至少有两个数相同，从而至少有两个数除以 3 的余数相同。

（2）若记每个数被p除后的余数分别为$b_1,b_2,\cdots,b_{p+1}$，则此p+1 个数只能取 0，1，…，p，故至少有两个数相同，从而$a_1,a_2,\cdots,a_{p+1}$至少有两个数模p同余。

33．（1）一背包里装有 50 个不同的小球，颜色共有四种，说明其中至少有 13 个小球的颜色相同。

（2）如果正好有 8 个小球的颜色是红的，说明至少 14 个小球有相同的颜色。

证：

（1）否则若每一种颜色至多有 12 个小球，四种颜色至多有 48 个小球，矛盾。本题可用鸽巢原理的推广形式来证明。这相当于把 50 个小球放入 4 个盒子中，则至少有一个盒子，至少有 $\left[\dfrac{50-1}{4}\right]+1=13$ 个小球颜色相同。

（2）依题意，有 42 个三种颜色的小球，同上推理，至少有 14 个小球有相同颜色。

34．令 S 是整数的 3 元素集合，证明 S 有两个不同的非空子集，它们的元素之和模 6 同余。

证：

3 元素集的非空子集共有 $2^3-1=7$ 个，其和共有 7 个，考虑被 6 除后的余数，至少有两个是相同的，从而至少有两个不同的非空子集，其和是模 6 同余的。

35．一个圆盘分成 4 个连续扇区，其编号为 1，2，3，. . .，36。

（1）证明有 4 个连续扇区，其编号之和大于 74。

（2）证明有 5 个连续扇区，其编号之和大于 94。

证：

（1）从任一个扇区开始，每连续 4 个扇区编一个号，共有 9 个编号，其和记为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$，则 $\sum a_i=1+2+\cdots+36=37\times18$，其平均数为 74，则其中有一个编号其和大于 74，或全部为 74，此时可任取定一个编号，比较此 4 个连续扇区两边相邻两数，去掉小的，换上大的，其和增加。从而大于 74。

（2）选定 1 所在扇区，从它的下一个开始，每 5 个连续扇区编一个号，共 7 个，设为 $a_1,a_2,\cdots,a_7$，其和 $\sum a_i=2+3+\cdots+36=19\times35$，其平均数为 95。故至少有一个编号其和大于 94。

36．200 人中，有 150 人喜爱游泳或慢跑或同时喜爱两者。若 85 人喜爱游泳，60 人同时喜爱游泳和慢跑，问有多少人喜爱慢跑？

解：

设 A 集合表示喜爱游泳的构成的集合，B 表示喜爱慢跑的构成的集合，则 $|A\cup B|=150$，$|A|=85$，$|A\cap B|=60$，由容斥原理，有 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$，即 $|B|=|A\cup B|-|A|+|A\cap B|=150-85+60=125$。

37．求在 1 和 1000 之间（1 和 1000 包含在内）不能被 5 或 6，也不能被 8 整除的数的个数。（提示：能被 6 整除的数集和能被 8 整除的数集之交是能被 24 整除的数集。）

解：

设 1 到 1000 的整数构成全集 U。用 A，B，C 分别表示能被 5，6，8 整除的数构成的集合。文氏图如图 1-2 所示。

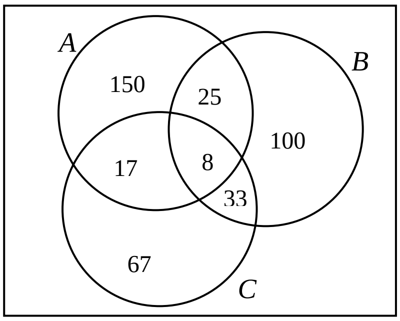


图 1-2

则

$|A|$=[1000/5]=200

$|B|$=[1000/6]=166

$|C|$=[1000/8]=125

$|A\cap B|$=[1000/30]=33

$|A\cap C|$=[1000/40]=25

$|B\cap C|$=[1000/24]=41

$|A\cap B\cap C|$=[1000/120]=8

由容斥原理，有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|U|-|A|-|B|-|C|$$
$$+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$$
$$=1000-200-166-125+33+25+41-8=600$$

38．令 $S=\{100,101,\ldots,999\}$，$|S|$=900。

（1）在 S 中有多少个数，其中至少含有数字 3 或 7？例如：300，707，736，997。

（2）在 S 中有多少个数，其中至少含有一个数字 3 和一个数字 7？例如：736，377。

解：

（1）不含有 3 和 7 的有 $7\cdot 8\cdot 8=448$，故至少含有 3 或 7 的有 900－448=452。

（2）用 A 表示含有数字 3 的集合，用 B 表示含有数字 7 的集合，则 $|\overline{A}|=8\cdot 9\cdot 9$ 为不含 3 的集合的基数，$|\overline{B}|=8\cdot 9\cdot 9$ 为不含 7 的集合的基数，$|\overline{A}\cap\overline{B}|=7\cdot 8\cdot 8=448$ 为不含 3 和 7 的集合的基数。

而 $|\overline{A}\cup\overline{B}|=|\overline{A}|+|\overline{B}|-|\overline{A}\cap\overline{B}|=648+648-448=848$，故由

$|A\cap B|=|U|-|\overline{A}\cup\overline{B}|$，有 $|A\cap B|=900-848=52$。

39．某学校学生选课的情况如下：260 名学生选法语，208 人选德语，160 人选俄语，76 人选法语和德语，48 人选法语和俄语，62 人选德语和俄语，三门课都选的有 30 人，三门都没选的有 150 人，问：

（1）共有多少学生？

（2）有多少学生选法语和德语，而没选俄语？

（3）有多少学生选法语和俄语，而没选德语？

（4）有多少学生选俄语和德语，而没选法语？

（5）有多少学生选法语，而没选德语或俄语？

（6）有多少学生选德语，而没选法语或俄语？

（7）有多少学生选俄语，而没选德语或法语？

解：

设 F、G、R 分别表示学习法语、德语、俄语的学生的集合，则依条件，有

$|F|=260$，$|G|=208$，$|R|=160$，$|F\cap G|=76$，$|F\cap R|=48$，$|G\cap R|=62$，

$|F\cap G\cap R|=30$，$|\overline{F\cup G\cup R}|$=150。由容斥原理，有

（1）学生总数为：

$$N=|F\cup G\cup R|+|\overline{F\cup G\cup R}|$$
$$=|F|+|G|+|R|-|F\cap G|-|G\cap R|-|R\cap F|+|F\cap G\cap R|+|\overline{F\cup G\cup R}|$$
$$=260+208+160-76-48-62+30+150=622$$

共有 622 个学生；

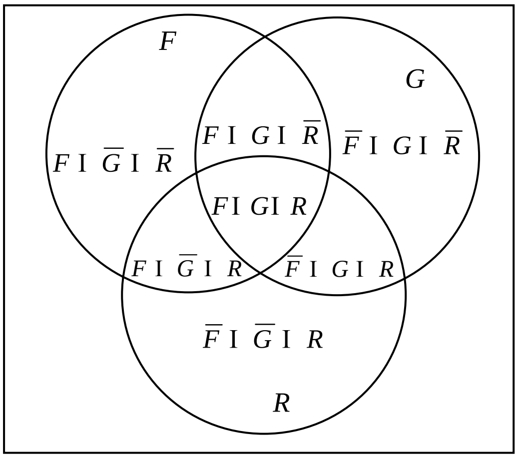


图 1-3

由图 1-3，有：

（2）$|F\cap G\cap \overline{R}|=|F\cap G|-|F\cap G\cap R|=76-30=46$

有 46 个学生选法语和德语。

（3）$|F\cap \overline{G}\cap R|=|F\cap R|-|F\cap G\cap R|=48-30=18$

有 18 个学生选法语和俄语。

（4）$|\overline{F}\cap G\cap R|=|G\cap R|-|F\cap G\cap R|=62-30=32$

有 32 个学生选德语和俄语。

（5）$|F\cap \overline{G}\cap \overline{R}|=|F|-|F\cap G\cap \overline{R}|-|F\cap \overline{G}\cap R|-|F\cap G\cap R|$

$=260-46-18-30=166$

有 166 个学生选法语。

（6）$|\overline{F}\cap G\cap \overline{R}|=|G|-|F\cap G\cap \overline{R}|-|\overline{F}\cap G\cap R|-|F\cap G\cap R|$

$=208-32-46-30=100$

有 100 个学生选德语。

（7）$|\overline{F}\cap \overline{G}\cap R|=|R|-|F\cap \overline{G}\cap R|-|\overline{F}\cap G\cap R|-|F\cap G\cap R|$

$=160-32-18-30=80$

有 80 个学生选俄语。

*40．40 个学生中有 18 人爱好音乐，22 人爱好美术，15 人爱好体育，11 人爱好音乐和美术，10 人爱好音乐和体育，8 人爱好美术和体育，但有 10 人这三种爱好都没有。试求这三种爱好都有的学生的人数。并在文氏图 1-4 上填上正确的学生数。其中的 A，B，C 分别表示爱好音乐、美术、体育的学生的集合。

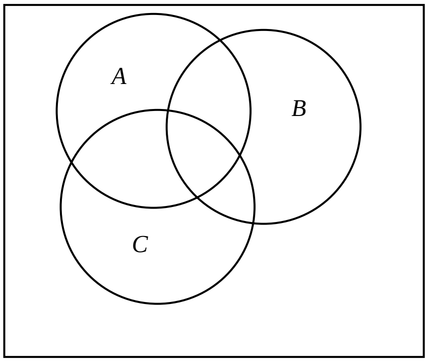


图 1-4

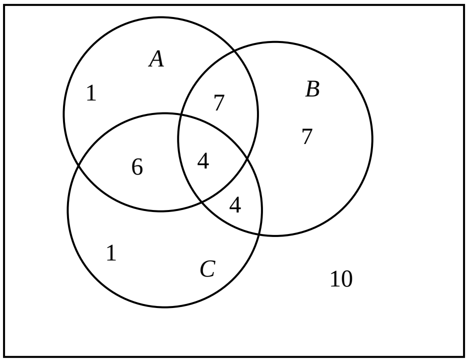


图 1-5

解：

由容斥原理，有

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

而 $|A\cup B\cup C|=|U|-|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=40-10=30$，故

$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|$
$=30-18-22-15+10+8+11=4$（爱好音乐、美术、体育的学生人数）

由此画出的图如图 1-5 所示（其中 10 指不在集合 A，B，C 中的学生数）。

41．某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言；有 3 个人这三种语言都学习，有 2 个人这三种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少？

解：

设 A，B，C 分别表示学习 PASCAL、C、COBOL 的学生的集合。因

$|A\cup B\cup C|=|U|-|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=60-2=58$

由容斥原理，有

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

故

$|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|=|A|+|B|+|C|+|A\cap B\cap C|-|A\cup B\cup C|$

$=38+16+21+3-58=20$

又因

$$|A\cap B\cap \overline{C}|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$$

从而有：

$$|A\cap B\cap \overline{C}|+|A\cap \overline{B}\cap C|+|\overline{A}\cap B\cap C|=|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-3|A\cap B\cap C|=20-3\cdot 3=11$$

仅学习两门语言的学生数是 11 人。

第 2 章　二 元 关 系

本章主要讨论二元关系。利用第 1 章笛卡尔积的定义及集合的一些基本关系讨论二元关系的定义及表示、关系的运算（并、交、差、补、复合、逆关系、闭包等)、关系的基本类型，及由此导出的等价关系，集合的划分等，并讨论两种特殊的关系：相容关系和偏序关系。下面就二元关系（简称关系）作一简单介绍。

§2.1　内 容 分 析

§2.1.1　关系的定义及表示

定义 1　若 $R \subseteq A \times B$，R 称为集合 A 到 B 的关系。若 $< a,b > \in R$，也记为 aRb。和集合一样，若有 $< a,b > \notin R$，也可写为：$a\overline{R}b$。我们特别称 A 到 A 的关系为 A 上的关系，即若 $R \subseteq A \times A$，则称 R 为 A 上的关系。

若 $R: A \to B$，R 的定义域 Dom(R)和值域 Ran(R)定义为：

$$\text{Dom}(R) = \{x \mid x \in A, \exists y \in B, < x, y > \in R\}$$
$$\text{Ran}(R) = \{y \mid y \in B, \exists x \in A, < x, y > \in R\}$$

显然：$\text{Dom}(R) \subseteq A, \text{Ran}(R) \subseteq B$

一般说来，若$|A|=m$，$|B|=n$，则 A 到 B 共有 2^{mn} 个二元关系，A 上共有 2^{m^2} 个二元关系。

几种常见的 A 上的关系有：空关系$\varnothing$，恒等关系 I_A （明确 A 时，简记为 I)，全域关系 E_A 等(不同的教材记法可能有所不同)。分别为：

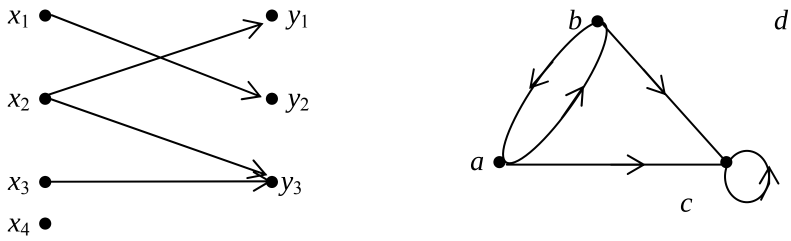
$\varnothing = \{\}$；　$I_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$；　$E_A = \{< x, y > \mid x, y \in A\}$

因为关系是一种集合，所以通常用来表示集合的方法自然可用来表示关系。此外，还可以用关系图或矩阵来表示，并且这两种表示更能体现关系的特点。(有些教材提到用表格表示关系的方法，其实质和用矩阵表示是一样的。)

1．用关系图表示

关系图是表示关系的一种直观形象的方法。限定 A，B 均为有限集，设 $A = \{a_1, a_2, \Lambda, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \Lambda, b_m\}$，$R$ 是 A 到 B 的二元关系。R 所对应的关系图的具体做法是：将 A 和 B 的元素分别作为两列，a_1, a_2, Λ, a_n 和 b_1, b_2, Λ, b_m 分别是两列的结点，用$\bullet$表示。若 $a_i \in A, b_j \in B$，且 $< a_i, b_j > \in R$，则作出从 a_i 到 b_j 的一条有向线段，用 $a_i \bullet \!\to\! \bullet\, b_j$ 表示。例如：设 $R: A \to B,\ A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ B = \{y_1, y_2, y_3\}$，$R$=$\{< x_1, y_2 >, < x_2, y_1 >,$

$< x_2, y_3 >, < x_3, y_3 >\}$，$R$ 的关系图如图 2-1 中（1）所示。



（1）　　（2）

图 2-1

对集合 A 上的关系作关系图,则通常将 A 上的元素画成一行或适当表示在一个平面上，不必和一般的 A 到 B 的关系一样画成 A 到 A 的情形。若 $< a_i, a_j > \in R$，则从 a_i 到 a_j 引一条有向线段，用 $a_i \bullet \rightarrow \bullet\ a_j$ 表示。若 $< a_i, a_i > \in R$，则从 a_i 到 a_i 用一带箭头的小圆圈表示。例如：$R: A \rightarrow A,\ A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{< a, b >, < a, c >, < b, a >, < b, c >, < c, c >\}$，$R$ 的关系图如图 2-1 中（2）所示。其中 c 到 c 的边称为环。

2．用关系矩阵来表示

关系矩阵是表示关系的另一种有效的方法，其优点是可以利用矩阵作为研究关系的手段，而且这样做便于计算机进行处理。

设 $R: A \rightarrow B$，A 和 B 都是有限集，且 $|A| = n, |B| = m$，A，B 中的元素已按一定的次序排列。若 $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$B = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，则 R 的关系矩阵是一个 n 行 m 列矩阵 $M(R) = (r_{ij})_{n \times m}$，其中元素 r_{ij} 定义为：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & < x_i, y_j > \in R \\ 0 & < x_i, y_j > \notin R \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m$$

矩阵 $M(R)$的元素取值为 0 或 1。这样的矩阵称为布尔矩阵。

显然，当有限集 A 和 B 的元素已按一定的次序排列，则从 A 到 B 的关系 R 与其对应的关系矩阵 $M(R)$是一一对应的。

§2.1.2　关系的运算

关系作为一种集合，具有集合所具有的运算如：并、交、差、补等。当然两个关系运算之后的结果仍为一个关系，即仍为某一笛卡尔积的子集，这就要求两个进行运算的关系应满足一定的前提条件，即：一般我们要求两个关系应是同一笛卡尔积的子集。

除这些基本运算外，作为一种特殊的集合，关系还具有下面的一些运算：

1．复合运算

定义 2　设 $R:A\to B,\ S:B\to C$，则 R 与 S 的复合(或合成)是一个从 A 到 C 的关系，记为 $R\circ S$，且

$R\circ S=\{<x,z>|\,x\in A,z\in C,\exists y\in B$，使得 $<x,y>\in R,<y,z>\in S\}$

定理 1　复合运算具有下面一些性质：

（1）若 $R:A\to B$，则 $R\circ I_B=R,\ I_A\circ R=R$

（2）A，B，C，D 是集合，$R_1:A\to B,\ R_2:B\to C,\ R_3:C\to D$，则有

$$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$$

即复合作为一种运算满足结合律(结合律的定义参见第 4 章)。

（3）设 A 是集合，$R:A\to A$，定义 R^n 如下：

$$R^0=I_A=\{<a,a>|\,a\in A\}$$
$$R^1=R$$
$$R^{n+1}=R^n\circ R=R\circ R^n$$

则有 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$，$(R^m)^n=R^{mn}$，这里 $m,n\in N$

（4）A，B，C，D 是集合，$R_1:A\to B,\ R_2:B\to C,\ R_3:B\to C,\ R_4:C\to D$，则有

$$R_1\circ(R_2\cup R_3)=(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$$
$$(R_2\cup R_3)\circ R_4=(R_2\circ R_4)\cup(R_3\circ R_4)$$
$$R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$$
$$(R_2\cap R_3)\circ R_4\subseteq(R_2\circ R_4)\cap(R_3\circ R_4)$$

上面定理说明，关系的复合运算对并运算分配律成立，但对交运算分配律并不成立，上面的后两个式子可以是真包含，例如：设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{x,y,z\}$，$R_1=\{<1,a>,<1,b>\}$，$R_2=\{<a,x>\}$，$R_3=\{<b,x>\}$，则 $R_2\cap R_3=\varnothing$，从而 $R_1\circ(R_2\cap R_3)=\varnothing$，而 $(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)=\{<1,x>\}\neq\varnothing$。

故 $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subset(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$，同样我们可以举出另一个真包含的例子。

2．逆运算

定义 3　设有集合 A 和 B，$R:A\to B$，则关系 $\{<y,x>|<x,y>\in R\}$ 是从 B 到 A 的关系，称为 R 的逆关系，记为 $\widetilde{R}$ (或 R^{-1})。显然有：$\widetilde{R}\subseteq B\times A$。

注意：我们用 $\overline{R}$ 表示关系 R（作为集合）的补集。而用 $\widetilde{R}$ 表示关系 R 的逆关系，两者是不同的概念。

关于复合运算的逆运算具有下面性质：

定理 2　设有集合 A，B，C，关系 $R:A\to B,\ S:B\to C$，则有：

$$\widetilde{R\circ S}=\widetilde{S}\circ\widetilde{R}$$

关于逆运算与前面关系的并、交、补运算结合在一起有下面结论：

定理 3　设 R，S 是集合 A 到 B 的二元关系，则有：

$$\overline{\overline{R}} = R$$
$$\widetilde{\widetilde{R}} = R$$
$$\widetilde{R \cup S} = \widetilde{R} \cup \widetilde{S}$$
$$\widetilde{R \cap S} = \widetilde{R} \cap \widetilde{S}$$
$$\widetilde{R - S} = \widetilde{R} - \widetilde{S}$$
$$\widetilde{(\overline{R})} = \overline{(\widetilde{R})}$$
$$\widetilde{\varnothing} = \varnothing$$
$$S \subseteq R \Leftrightarrow \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R}$$
$$S \subseteq R \Leftrightarrow \overline{S} \supseteq \overline{R}$$

既然可以用矩阵来表示关系，我们也可以用矩阵来表示关系运算(并、交、差、补、复合、逆)之后的结果。首先说明一下布尔矩阵的乘法、加法运算。

定义在 $\{0,1\}$ 上的布尔加 $\vee$ 和布尔乘 $\wedge$ 运算如下：

$$0 \vee 0 = 0,\ 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$$
$$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0,\ 1 \wedge 1 = 1$$

设 A 与 B 为两个布尔矩阵，则两矩阵的布尔加 $\vee$ 和布尔乘 $\wedge$ 运算定义如下：

$$(A \vee B)_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$$
$$(A \wedge B)_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

有下面的结论：

$$M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$$
$$M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$$

$M(\overline{R}) = M(E_A) - M(R)$，即全关系 E_A 对应的矩阵与 R 对应的矩阵进行通常的矩阵减法

$M(R - S) = (M(R) - M(S)) \vee M(0)$，与零矩阵取大

$$M(R \circ S) = M(R) * M(S) = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

§2.1.3　关系的基本类型

集合上的关系有 5 种最基本的类型，它们分别具有自反、反自反、对称、反对称、可传递特性。

定义 4　设 R 是集合 A 上的关系。

（1）若对所有的 $x \in A$，必有 $< x,x > \in R$，则称 R 是有自反特性的，或说 R 是自反的。

（2）若对所有的 $x \in A$，都有 $< x,x > \notin R$，则称 R 是有反自反特性的，或说 R 是反自反的。

（3）对任意 $x \in A,\ y \in A$，若 $< x,y > \in R$，必有 $< y,x > \in R$，则称 R 是有对称特性的，或说 R 是对称的。

（4）对任意 $x \in A,\ y \in A$，若 $< x,y > \in R$，且 $< y,x > \in R$，必有 $x = y$，则称 R 是有反对称特性的，或说 R 是反对称的。

（5）对任意 $x \in A,\ y \in A,\ z \in A$，若 $< x,y > \in R$，$< y,z > \in R$，必有 $< x,z > \in R$，则称 R 是有传递特性的，或说 R 是传递的。

注意：反对称也可定义为：若 R 满足：对任意的 $< x,y > \in R$，且 $x \neq y$，必有 $< y,x > \notin R$，则称 R 是反对称的。

基于上面对几个基本类型的描述，可以证明下面一些结论：

定理 4　设 R 是 A 上的关系，有：

（1）R 自反 $\Leftrightarrow$ $R \supseteq I_A$

（2）R 反自反 $\Leftrightarrow$ $R \cap I_A = \varnothing$

（3）R 对称 $\Leftrightarrow$ $R = \widetilde{R}$

（4）R 反对称 $\Leftrightarrow$ $R \cap \widetilde{R} \subseteq I_A$

（5）R 传递 $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$

如果用关系图来表示，则有下面结论：

（1）在关系图中，每个结点都有环，则此关系是自反的；

（2）在关系图中，每个结点都无环，则此关系是反自反的；

（3）在关系图中，任何一对不同的结点之间，或者有方向相反的两条边，或者无任何边，则此关系是对称的；

（4）在关系图中，任何一对结点之间，至多有一条边存在，则此关系是反对称的；

（5）在关系图中，任何三个结点 x，y，z 之间，若从 x 到 y 有一条边存在，从 y 到 z 有一条边存在，则从 x 到 z 一定有一条边存在，那么此关系是传递的。

如果用矩阵来表示，则有下面结论：

（1）在关系矩阵中，对角线上全为 1，则此关系是自反的；

（2）在关系矩阵中，对角线上全为 0，则此关系是反自反的；

（3）若关系矩阵是对称矩阵，则此关系是对称的；

（4）若关系矩阵是反对称矩阵，则此关系是反对称的；

（5）在关系矩阵中，对任意的 $i, j, k \in \{1,2,\cdots,n\}$，满足 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$，一定有 $r_{ik} = 1$，则此关系是传递的。

具体表现为：

设 R 所对应的关系矩阵 $M(R)$中第 i 行第 j 列的元素为 r_{ij}，则有：

定理 5　设 R 是 A 上的关系，有：

（1）R 自反 $\Leftrightarrow r_{ii}=1,\ \forall i=1,2,\cdots,n$

（2）R 反自反 $\Leftrightarrow r_{ii}=0,\ \forall i=1,2,\cdots,n$

（3）R 对称 $\Leftrightarrow r_{ij}=r_{ji}, \forall i,j=1,2,\cdots,n$

（4）R 反对称 $\Leftrightarrow r_{ij}+r_{ji}\le 1,\ \forall i\ne j, i,j=1,2,\cdots,n$。可解释为：除对角线外，对称位置上两个元素不同时为 1。

（5）R 传递 $\Leftrightarrow c_{ij}\le r_{ij}, \forall i,j=1,2,\cdots,n$。这里 c_{ij} 是 $M(R^2)$中第 i 行第 j 列的元素。

关于两个具有某些特性的关系经过运算之后特性是否保持的问题，有下面一些结论：

定理 6　设 R，S 均为 A 上的关系，有：

（1）若 R，S 是自反的，则 $\tilde{R}$, $R\cup S$, $R\cap S$, $R\circ S$ 也是自反的；

（2）若 R，S 是反自反的，则 $\tilde{R}$, $R\cup S$, $R\cap S$, $R-S$ 也是反自反的；

（3）若 R，S 是对称的，则 $\tilde{R}$, $R\cup S$, $R\cap S$, $R-S$, $\bar{R}$ 也是对称的；

（4）若 R，S 是反对称的，则 $\tilde{R}$, $R\cap S$, $R-S$ 也是反对称的；

（5）若 R，S 是传递的，则 $\tilde{R}$, $R\cap S$ 也是传递的。

从上面定理可以看出，逆运算和交运算较好地保持了原来的性质，而复合运算和并运算则相对要差一点。有些特性没有保持，如：若 R，S 是对称的，则 $R\circ S$ 不一定对称；若 R，S 反对称，则 $R\circ S$ 不一定反对称；若 R，S 传递，则 $R\cup S$ 不一定传递。希望大家能举一些没有保持特性的例子，以加深对以上结论的理解。

§2.1.4　关系的闭包

关系的闭包实际上也是关系的一种运算，但由于与通常的运算有显著的不同，我们把它单独提出来。

定义 5　设 R 是集合 A 上的关系，则 R 的自反（对称、传递）闭包是 A 上的关系 R'，它满足下面三个条件：

（1）$R\subseteq R'$；

（2）R' 是自反的(对称的，传递的)；

（3）对 A 上的任意关系 R''，若它满足条件（1），（2），则必有 $R'\subseteq R''$。

分别用 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$表示 R 的自反、对称、传递闭包。

简单来说，一个关系对应的闭包就是包含原关系的具有所求性质的一种最小的关系，有时我们也把它作为闭包的定义。

给出一个关系 R，如何确定它的闭包，这是一个重要的问题。下面的定理实质上给出了这一方法。

定理 7　设 R 是非空集合 A 上的关系，则

（1）$r(R)=R\cup I_A$

（2） $s(R)=R\cup\widetilde{R}$

(3) $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^{i}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\cdots$

上面第三个结论形式上是一个无限的过程，但我们实际上处理的几乎全部是有限集合。若对有限集 A，设$|A|=n$，R 是 A 上的关系，则有比上面简单一点的结论：

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^{i}=R\cup R^{2}\cup\cdots\cup R^{n}$$

虽然求传递闭包有 Warshall 算法，但实际用得并不多。

若给出了一个关系的关系图，如何求出它对应的闭包呢？

（1）求一个关系的自反闭包，即将图中的所有无环的结点加上环；

（2）求一个关系的对称闭包，图中任何一对不同结点之间，若仅存在一条边，则加上方向相反的另一条边即可；

（3）求一个关系的传递闭包，则在图中，对任意结点 a，b，c，若 a 到 b 有一条边，同时 b 到 c 有一条边，则从 a 到 c 增加一条边(当 a 到 c 无边时)。继续这样下去，直到不能再添加边为止。

根据上面定理 7 和关系矩阵所对应的结论，可以计算闭包所对应的矩阵。如：

$$M(r(R))=M(R)\vee M(I_{A})$$
$$M(s(R))=M(R)\vee M(\widetilde{R})$$
$$M(t(R))=\bigvee_{i=1}^{\infty}M(R^{i})$$

根据闭包的定义，容易证明下面结论：

定理 8 （1）R 是自反的$\Leftrightarrow r(R)=R$

（2）R 是对称的$\Leftrightarrow s(R)=R$

（3）R 是传递的$\Leftrightarrow t(R)=R$

定理 9 设 R，S 是集合 A 上的关系，且有 $R\supseteq S$，则有：

$$r(R)\supseteq r(S)\;；\;s(R)\supseteq s(S)\;；\;t(R)\supseteq t(S)$$

定理 10 设 R，S 是集合 A 上的关系，则有：

（1） $r(R\cup S)=r(R)\cup r(S)$

（2） $s(R\cup S)=s(R)\cup s(S)$

（3） $t(R\cup S)\supseteq t(R)\cup t(S)$

结论（3）可能发生不相等的时候，可以举出这样的例子。参见习题 38。

定理 11 设 R 是集合 A 上的关系。

（1）若 R 是自反的，则 $s(R)$和 $t(R)$也是自反的；

（2）若 R 是对称的，则 $r(R)$和 $t(R)$也是对称的；

（3）若 R 是传递的，则 $r(R)$也是传递的。

有了上述几个定理，可以给出求包含 R 的具有自反、对称、传递特性的最小的关系的定理：

定理 12　对集合上的任意关系 R，$\mathrm{tsr}(R)$是包含 R 并同时具有自反、对称、传递特性的最小关系。此处 $\mathrm{tsr}(R)$表示 $t(s(r(R)))$。

类似地，如出现 $sr(R)$，$st(R)$，$rt(R)$，$tr(R)$或 $ts(R)$等也分别理解为 $s(r(R))$，$s(t(R))$，$r(t(R))$，$t(r(R))$，$t(s(R))$。

§2.1.5　等价关系与集合的划分

等价是一种很重要、很普遍的关系，它和集合的划分有密切的联系。

定义 6　对集合 A 上关系 R，若 R 是自反、对称、传递的，称 R 为 A 上的等价关系。

定义 7　设 R 是集合 A 上的等价关系，$a \in A$，由 A 中所有与 a 具有关系 R 的全体元素组成的 A 的子集，称为 a 关于 R 的等价类，记为$[a]_R$，即：

$$[a]_R = \{x \mid x \in A, xRa\}$$

A 关于等价类全体构成的集合，称为 A 关于 R 的商集，记为 A／R，即

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

对于函数(其相关定义及结论见第 3 章) $f: X \to Y,\ X \neq \varnothing$，定义 $R \subseteq X \times X$ 如下：

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

易证 R 是 X 上的等价关系，称之为由 f 诱导的等价关系，等价类

$$[a]_f = \{x \in A \mid f(x) = f(a)\}$$

构成的划分为：$\{f^{-1}(y) \mid f^{-1}(y) \neq \varnothing\}$

可以证明：

定理 13　设 R 是集合 A 上的等价关系，则

（1）A 上关于 R 的每个等价类不是空集。

（2）对 A 中任意两个元素 a 和 b，若 aRb，则$[a]_R = [b]_R$；若 $a\overline{R}b$，则 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

（3）$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$

根据第 1 章划分的定义，等价关系确定一个集合的划分，反过来，一个划分能否确定一个等价关系呢？关于等价关系与集合的划分之间的相应关系，表示为下面的定理：

定理 14　设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则商集 A／R 是 A 的一个划分；反之，对集合 A 的任一划分∏，可确定 A 上的一个等价关系 R，且 R 所对应的商集 A／R=∏。

§2.1.6 相容关系与集合的覆盖

定义 8 设 R 是非空集合 A 上的关系，若 R 是自反、对称的，则称 R 是集合 A 上的相容关系。对相容关系，若 aRb，则称 a 与 b 相容。

设 R 是集合 A 上的相容关系，若 A 的非空子集 S 满足：

（1）S 中任意元素与 S 中所有元素相容；

（2）$A-S$ 中任意元素不与 S 中所有元素相容。

则称 S 是相容关系 R 的极大相容类。

根据第 1 章中覆盖与完全覆盖的定义，由非空集合 A 上的相容关系 R 所确定的极大相容类组成的集合也是 A 的一个覆盖，并且显然是完全覆盖，称之为由相容关系 R 确定的完全覆盖。

等价关系和划分之间是一一对应的，即由等价关系可以得到划分，由划分也可以得到等价关系，并且由此等价关系确定的划分即为原划分。不同的划分确定不同的等价关系。但对相容关系和完全覆盖，却没有相同的结论。虽然由完全覆盖可以得到相容关系，相容关系也可以得到完全覆盖，但两者之间并不是一一对应的。集合上不同的完全覆盖确定的相容关系可能是相同的。如：对集合 A={1，2，3}，完全覆盖 C={{1，2}，{2，3}，{3，1}}确定(用和由划分来确定等价关系相同的方法)的相容关系 R 为：R={<1，1>，<2，2>，<3，3>，<1，2>，<2，1>，<1，3>，<3，1>，<2，3>，<3，2>}，而由相容关系 R 所确定的完全覆盖是{{1,2,3}}而不是 C。另一方面，覆盖{{1，2，3}}也可确定相容关系 R。

§2.1.7 偏序关系

偏序关系是一种特殊的二元关系，定义如下：

定义 9 对集合 A 上的关系 R，若 R 是自反、反对称、传递的，称 R 为 A 上的偏序关系，常用记号≤表示。A 及其上的偏序关系≤合称为偏序集，记为(A，≤)。

由于偏序集本身所具备的特性，因此用图来描述偏序关系在不引起混淆时，可以将其中的一些显然的因素略去不管，其关系图可以简化。①将图中每个结点的环略去；②图中若有有向边＜a,b＞，＜b,c＞，则必有有向边＜a,c＞,将边＜a,c＞略去（或这样解释：对任意的 $a,b \in A$，$a \neq b$，若 $a \le b$，且 a 与 b 之间不存在 $c \in A$，使得 $a \le c, c \le b$，则 a 与 b 之间用一条线连接，否则不用线相连）；③如果图中有有向边＜a,b＞，我们总将 a 画在 b 的下方，从而 a 到 b 的箭头也省去。按此约定简化后的图，称为偏序集所对应的哈斯(Hasse)图。给定一个有限集合所对应的偏序关系，当集合中元素的数目不太多时(如不超过 15 个)，我们应能画出其对应的哈斯图。

与偏序相关的还有几个概念：

定义 对集合 A 上的关系 R，若 R 是反自反、反对称、传递的，称 R 为 A 上的拟序关系，称（A，R）为拟序集。

定义　对偏序集（A，≤），若对任意 $x, y \in A$，总有 $x \le y$ 或 $y \le x$，二者必居其一。则称（A，≤）为全序集（也叫线性序）。称≤为全序关系。

定义　对偏序集（A，≤），若 A 的任何非空子集都有最小元素，则“≤”称为良序关系，（A，≤）称为良序集。

显然良序一定是全序，反之不一定。每个有限的全序集一定是良序集，但对无限的全序集就不一定是良序集，如：$[0,1]$上的≤关系是全序，但不是良序。

若两个不同的元素 x, y，既没有 $x \le y$ 也没有 $y \le x$，称 x, y 是不可比的。

下面几个定义在第 5 章讨论格与布尔代数时将要用到。

定义 10　设偏序集（A，≤），$B \subseteq A$。

（1）假设 $b \in A$，若使得对所有的 $x \in B$，有 $b \le x (x \le b)$，则称 b 为 B 的一个下（上）界。

（2）b 是 B 的下界（上界），若对 B 的任意下界(上界)x，有 $x \le b (b \le x)$，称 b 为 B 的最大下界（最小上界），也称为下确界（上确界）。

（3）$b \in B$。若 B 中不存在满足 $x \pi b (b \pi x)$*的元素 x，则称 b 是 B 的极小元（极大元）；或定义为：若对任意的 $x \in B$，满足 $x \le b (b \le x)$，则有 $x=b$。则称 b 是 B 的极小元(极大元)；

（4）$b \in B$。若对 B 中任意元素 x，有 $b \le x (x \le b)$，则称 b 为 B 的最小元（最大元）。

显然，若 $B \subseteq A$ 有最大下界（最小上界），或有最小元（最大元），它们都是惟一的，且由定义可以知道，若 B 有最小元（最大元）b，则 b 也是 B 的最大下界（最小上界）。

关于上面的定义结论如下：

定理 15　设（A，≤）是一偏序集，B 是 A 的子集，则

（1）若 $b \in B$ 是 B 的最大元，则 b 是 B 的极大元、上界、上确界；

（2）若 $b \in B$ 是 B 的最小元，则 b 是 B 的极小元、下界、下确界；

（3）若 a 是 B 的上确界，且 $a \in B$，则 a 是 B 的最大元；

（4）若 a 是 B 的下确界，且 $a \in B$，则 a 是 B 的最小元；

（5）若“≤”是一个全序关系，则 $b \in B$ 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow$ $b \in B$ 是 B 的极大元；

（6）若“≤”是一个全序关系，则 $b \in B$ 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow$ $b \in B$ 是 B 的极小元。

§2.2　重点及难点解析

§2.2.1　基本要求

1．掌握二元关系的形式定义及其各种表示方法：序偶、矩阵、关系图等；能正确使用

---

*　$x \pi b$ 指 $x \le b$ 且 $x \ne b$。

集合表达式、关系矩阵、关系图等表示给定的关系，并要求能够从一种形式写出另一种形式。

2．掌握关系的运算，包括集合运算以及关系的复合和关系的逆运算。

3．掌握二元关系的各种特殊性质：自反、反自反、对称、反对称、传递等，并理解这些性质如何反映在关系图上、关系矩阵上等。

4.掌握集合中二元关系的闭包的意义和简单性质,能求出有限集上的二元关系的闭包。

5．掌握等价关系、相容关系(重点是等价关系)的概念，并掌握覆盖、划分、等价类、商集的定义和基本性质，弄清楚等价关系与划分之间的关系。

6．掌握偏序、偏序集、全序、良序等概念，以及偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最大下界、最小上界等概念。

7．能画出有限偏序集的哈斯图，并根据图讨论偏序集的某些性质。

§2.2.2 疑难点解析

1．注意从 X 到 Y 的关系与从 X 到 X 的关系的异同。它们的差别表现在它们的表示方法及运算上等。

2．给出关系的一种表示，应能够给出关系其他的表示。如：以序偶（集合）的形式给出的关系，求它所对应的关系图、关系矩阵等；或者给出关系的关系图，求关系的矩阵表示和集合表示。并借此讨论关系所具有的性质，这是基本要求。

3．对关系运算特别是复合运算和逆运算性质的掌握；希望通过图形能够直观给出两个关系复合之后的结果。

4．对关系基本类型的理解。

这里讨论的关系都是集合 A 到自身的关系，即都是笛卡尔积 $A\times A$ 的子集，不讨论从 A 到 B 的关系。对几种基本类型：自反、反自反、对称、反对称、传递等定义的理解,希望通过下面例子加深理解，并对后面的基本题（或习题解析）有深刻的认识。例如：设集合 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{<1,1>\}$不是自反的，也不是反自反的，是对称的，也是反对称的，传递的。$R_2=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>\}$是反自反的，但既不是对称的，也不是反对称的，也不传递。$R_3=\{<1,2>,<3,3>\}$是反对称、传递的，但不自反，也不是反自反的。

习题中有很多问结论是否成立的例子，一般来说，如果要说明某一事实成立，则一定要证明；如果要说明某一事实不一定成立，则可举一反例加以说明；如果要说明某一事实一定不成立(即它的反面一定成立)，则也一定要证明。希望通过反例加深对一些内容的理解。

5．分析关系的性质。有时需要判别给出的关系是否具有自反、对称、传递等性质。有多种做法，例如：可以直接考查集合中序偶出现的情况，也可以通过关系对应的有向图来判断，还可以通过关系矩阵（利用定理 5）来判定。

6．利用矩阵或关系图求关系的闭包。

利用矩阵求闭包直接利用定理 7 后面的结论就可以了，若利用关系图来求，则

① 若求自反闭包，则只需在没有环的结点处加上环就够了；

② 若求对称闭包，则若两个结点之间有单方向的弧线，加上反方向的弧线即可；

③ 若求传递闭包，则复杂一些。若存在点 a 到 b 的弧线，存在点 b 到 c 的弧线，而没有 a 到 c 的弧线，添上 a 到 c 的弧线。添上所有的这种可能的弧线，直到不能再添加为止。

7．关系的闭包之间的相互关系体现在定理 8、9、10 中。希望通过例子对没有出现的一些性质能够理解。如 $ts(R) \neq st(R)$，$t(R \cap S) \subseteq t(R) \cap t(S)$，$t(R \cup S) \supseteq t(R) \cup t(S)$ 等。

8．对两个具有一定性质的关系，其通过运算之后相关的性质是否保持，见定理 6，希望通过反例对一些式子加深理解。

9．偏序集中上界、下界，极大元、极小元，最大元、最小元，最小上界、最大下界等定义。

例如：作为最大元、最小元或极大元、极小元等要求元素本身在考查的集合中，而上界、下界则没有这一方面的要求。另一方面，极大元指在该集合中没有比它更大的，这是一种“局部”性质，并不意味着它是最大的。最大元则指比所有的都大(可以发生相等时)，这是一种“全局”性质，故最大元也必定是极大元。例如：对给定集合 $A=\{0，1，a，b，c，d\}$ 上的偏序集，其对应的哈斯图如图 2-2 所示。

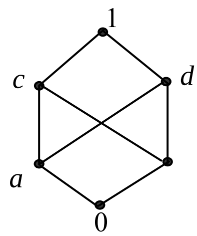


图 2-2

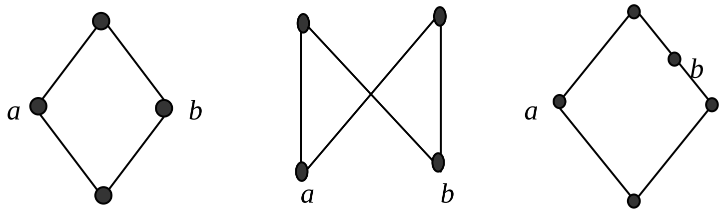
对集合 $B=\{a，b，c\}$，c 是极大元也是最大元，c、1 均是 B 的上界；0 是 B 的下界；a、b 都是极小元。

对集合 $C=\{a，b\}$，c、d、1 均是 C 的上界，没有最小上界；0 是 C 的下界也是 C 的最大下界；a、b 都是 C 的极大元也都是 C 的极小元；没有最大元也没有最小元。

通过这一例子，可以看出一个元素可以既是极大元也是极小元，也可以既是最大元也是最小元。一个集合可以没有最大元也可以没有最小元。

10．哈斯图的确定及元素之间的可比性等。给出一个由少量元素构成的有限偏序集，应能确定它所对应的哈斯图。哈斯图的确定有三条规则：(1) 自身处的环省去；(2) 小的元素画在下面，大的元素放在上面，箭头省去；(3) 只有当 $a \leq b$，且不存在 c，使得 $a \leq c \leq b$ 时，才在 a 与 b 之间连一条线。

两个元素不一定是可比的，如整除关系中，对 2 和 3 而言，因 2 不整除 3，3 也不整除 2，故没有 $2 \leq 3$，也没有 $3 \leq 2$，2 和 3 是不可比的。应能够通过哈斯图确定。对哈斯图中的两个元素 a,b，若从图形直观看，a 在 b 的下方，但没有从 a 到 b 的通路(方向始终朝上)，则 a 和 b 是不可比的。如图 2-3 所示的三个偏序集所对应的哈斯图中，a，b 都是不可比的。



（1）　　（2）　　（3）

图 2-3

§2.3　基 本 题

§2.3.1　选择题

1．集合 $A=\{1,2,\Lambda\ ,10\}$ 上的关系 $R=\{<x,y>|\ x+y=10, x\in A, y\in A\}$，则 R 的性质为（　　）。

A．自反的　　B．对称的　　C．传递的，对称的　　D．反自反的，传递的

答案：B

2．设 $A=\{a，b，c\}$上的关系如下，有传递性的有（　　）。

A．$\rho_1=\{<a,c>,<c,a>,<a,b>,<b,a>\}$

B．$\rho_2=\{<a,c>,<c,a>\}$

C．$\rho_3=\{<a,b>,<c,c>,<b,a>,<b,c>\}$

D．$\rho_4=\{<a,a>\}$

答案：D

3．设 R 和 S 是集合 A 上的任意关系，则下列命题为真的是（　　）。

A．若 R 和 S 是自反的，则 $R\circ S$ 也是自反的

B．若 R 和 S 是反自反的，则 $R\circ S$ 也是反自反的

C．若 R 和 S 是对称的，则 $R\circ S$ 也是对称的

D．若 R 和 S 是传递的，则 $R\circ S$ 也是传递的

答案：A

*4．若 R 和 S 是集合 A 上的两个关系，则下述结论正确的是（　　）。

A．若 R 和 S 是自反的，则 $R\,\mathrm{I}\ S$ 是自反的

B．若 R 和 S 是对称的，则 $R\circ S$ 是对称的

C．若 R 和 S 是反对称的，则 $R\circ S$ 是反对称的

D．若 R 和 S 是传递的，则 $R \cup S$ 是传递的

答案：A

*5．设 $S=\{1,2,3\}$，图 2-4 给出了 S 上的两个关系 R_1, R_2，则复合关系 $R_1 \circ R_2$ 是(　　)。

图 2-4

A．自反的　　B．传递的　　C．对称的　　D．等价的

答案：C

6．设 $A=\{1，2，3，4，5\}$，$\rho=\{<i,j>|\, i<j, i,j\in A\}$，则 $\tilde{\rho}$ 的性质是（　　）。

A．对称的　　B．自反的　　C．反对称的　　D．反自反、反对称、传递的

答案：D

7．设集合 $A=\{a,b,c\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<c,a>\}$，那么 R 是(　　)。

A．反自反的　　B．反对称的　　C．可传递的　　D．不可传递的

答案：D

8．设 R 和 S 是集合 A 上的等价关系，则 $R \cup S$ 的对称性（　　）。

A．一定成立　　B．一定不成立
C．不一定成立　　D．不可能成立

答案：A

9．设 R 和 S 是非空集合 A 上的等价关系，下述各式是等价关系的为（　　）。

A．$(A\times A)-R$　　B．R^2
C．$R-S$　　D．$r(R-S)$

答案：B

10．集合 A 上的关系 R 是相容关系的必要条件是（　　）。

A．自反、反对称的　　B．反自反、对称的
C．传递、自反的　　D．自反、对称的

答案：D

*11．设 R 是集合 A 上的偏序关系，$\tilde{R}$ 是 R 的逆关系，则 $R \cup \tilde{R}$ 是（　　）。

A．偏序关系　　B．等价关系　　C．相容关系　　D．都不是

答案：B

12．设集合 A 中有 4 个元素，则 A 上的不同的等价关系的个数为(　　)。

A．11 个　　B．14 个　　C．15 个　　D．17 个

答案：C

说明：由于不同的等价关系对应不同的划分，本题实质上是计算 4 个元素构成的集合有多少个不同的划分。整数 4 可分为 4，1＋3，1＋1＋2，2＋2，1＋1＋1＋1，故共有$1+C_4^1+C_4^2+\frac{1}{2}C_4^2+1=15$个不同的划分。

§2.3.2　填空题

1．设 D 为同一平面上直线的集合，并且∥表示两直线间的平行关系，⊥表示两直线间的垂直关系，则$∥^2$=__①__，$⊥^2$=__②__，$⊥^3$=__③__。

答案：① ∥　　② ∥　　③ ⊥

2．关系 R 是反自反的，当且仅当在关系矩阵中__①__，在关系图上__②__。

答案：① 对角线上的元素全为零　　② 每个结点都没有到自身的回路

3．关系 R 是对称的，当且仅当关系矩阵是__①__，在关系图上__②__。

答案：① 对称的　　② 任意两个结点间若有定向回路，则必成对出现

4．关系 R 是反对称的，当且仅当在关系矩阵中__①__，在关系图上__②__。

答案：① 与对角线对称的元素不同时为 1　② 两不同结点间的有向弧线不成对出现

5．设 A={1,2,3}上的关系 R={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>}，则关系 R 具备__①__性，不具备__②__性。

答案：① 反对称性、传递　　② 自反、反自反、对称

6．设 A={1,2,3,4}上关系 R={<1,2>，<2,4>，<3,3>，<1,3>}，则 $r(R)$=__①__，$s(R)$=__②__。

答案：① {<1,1>，<2,2>，<3,3>，<4,4>，<1,2>，<2,4>，<1,3>}

② {<1,2>，<2,1>，<2,4>，<4,2>，<3,3>，<1,3>，<3,1>}

7．设集合 A 仅含有 3 个元素，那么

（1）在 A 上可定义________种不同的二元关系。
（2）在 A 上可定义________种不同的自反关系。
（3）在 A 上可定义________种不同的反自反关系。
（4）在 A 上可定义________种不同的对称关系。

（5）在 A 上可定义__________种不同的反对称关系。

答案：（1）512　（2）64　（3）64　（4）64　（5）64

8．如果 R_1 和 R_2 是 A 上的对称关系，有下列观点：

（1）$R_1 \mathrm{Y} R_2$ 是对称的
（2）$R_1 \mathrm{I}\ R_2$ 是对称的
（3）$R_1 \mathrm{o} R_2$ 是对称的

其中________是正确的。

答案：(1)、(2)　（参见习题 28）

9．如果 R_1 和 R_2 是 A 上的反对称关系，有下列观点：

（1）$R_1 \mathrm{Y} R_2$ 是反对称的
（2）$R_1 \mathrm{I}\ R_2$ 是反对称的
（3）$R_1 \mathrm{o} R_2$ 是反对称的

其中________是正确的。

答案：(2)

说明：结论（3）不正确。例如：R_1={<a，c>,<b，c>}，R_2={<c，b>,<c，a>}，则 $R_1 \mathrm{o} R_2 = \{<a,b>,<b,a>,<a,a>,<b,b>\}$ 不是反对称的。

10．如果 R_1 和 R_2 是 A 上的传递关系，有下列观点：

（1）$R_1 \mathrm{Y} R_2$ 是传递关系
（2）$R_1 \mathrm{I}\ R_2$ 是传递关系
（3）$R_1 \mathrm{o} R_2$ 是传递关系
（4）R_1^2 是传递关系

其中________是正确的。

答案：(2)、(4)

说明：结论（3）不正确。例如：$R_1 = \{<a,d>,<b,e>\}$，$R_2 = \{<d,b>,<e,c>\}$，则 $R_1 \mathrm{o} R_2 = \{<a,b>,<b,c>\}$ 不是可传递的。

与此相关的问题参见习题 29。

11．R 是 A 的二元关系，那么有下列观点：

（1）当 R 是自反关系时，R 的传递闭包也是自反关系
（2）当 R 是反自反关系时，R 的传递闭包也是反自反关系

其中______________________是正确的。

答案：(1)

12．R 是 A 上的二元关系，那么有下列观点：

（1）当 R 是对称关系时，R 的传递闭包也是对称关系
（2）当 R 是反对称关系时，R 的传递闭包也是反对称关系

其中_____是正确的。

答案：(1)

13．集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，A 上的一个划分 $\pi=\{\{a,b\},\{c,d,e\},\{f,g\}\}$，那么 π 所对应的等价关系 R 应有_____个有序对。

答案：17

*14．设 R 是集合 $\{1,2,\Lambda\ ,10\}$ 上的模 7 同余关系，则 $[2]_R=$_______。

答案：$\{2,9\}$

15．设 R_1 和 R_2 是 A 上的相容关系，那么对于下列观点：

（1）$R_1\ \mathrm{Y}\ R_2$ 是相容关系
（2）$R_1\ \mathrm{I}\ \ R_2$ 是相容关系
（3）$R_1\ \mathrm{o} R_2$ 是相容关系

其中________是正确的。

答案：(1)、(2)

*16．整数集上的小于关系“＜”具有___①___、___②___和___③___关系。

答案：① 反自反　　② 反对称　　③ 传递

17．设 $A=\{a,b,c\}$ 上偏序集 $(P(A),\subseteq)$，则 $P(A)$的子集 $B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$ 的极大元是___①___，最大元是___②___，上界是___③___，下确界是___④___。

答案：① $\{a，b\}$，$\{b，c\}$　　② 无　　③ $\{a，b，c\}$　　④ $\varnothing$

18．$A=\{2,3,4,5,6,8,10,12,24\}$，$R$ 是 A 上的整除关系，那么 A 的极大元是___①___；极小元是___②___。

答案：① 10，24　　② 2，3，5

19．$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$，$R$ 是 A 上的整除关系。子集 $B=\{2,4,6\}$，那么 B 的最大元是___①___；B 的最小元是___②___；B 的上界是___③___；B 的下界是___④___。

答案：① 不存在　　② 2　　③ 12　　④ 2，1

20．$A=\{1,2,3,4,5,6,8,10,24,36\}$，$R$ 是 A 上的整除关系。子集 $B=\{1,2,3,4)$，那么 B 的上界是__①__；B 的下界是__②__；B 的上确界是__③__；B 的下确界是__④__。

答案：① 24，36　　② 1　　③ 不存在　　④ 1

§2.3.3　判断题

*1．若 R 是集合 A 上的传递关系，则 R^2 也是集合 A 上的传递关系。(　)　答案：√

2．若集合 A 上的关系 R 是对称的，则 $\widetilde{R}$ 也是对称的。(　)　答案：√

3．一个不是自反的关系，一定是反自反的。(　)　答案：×

4．集合 $A=\{1,2,3\}$的任何关系 R 都不可能既是对称的，又是反对称的。(　)

答案：×

5．集合 $A=\{a,b,c\}$上的关系 $R=\{<a,b>，<a,c>\}$是不可传递的。(　)　答案：×

6．若 R 和 S 是集合 A 上的任意两个自反关系，则 $R\circ S$ 也是自反的。(　)

答案：√

7．若 R 和 S 是集合 A 上的任意两个反自反关系，则 $R\circ S$ 也是反自反的。(　)

答案：×

8．若 R 和 S 是集合 A 上的任意两个对称关系，则 $R\circ S$ 也是对称的。(　)　答案：×

9．若 R 和 S 是集合 A 上的任意两个传递关系，则 $R\circ S$ 也是传递的。(　)　答案：×

10．若 R 为集合 A 上的反对称关系，则 $t(R)$一定是反对称的。(　)　答案：×

说明：设 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，则 R 反对称，但 $t(R)$是 A 上的全关系，不是反对称的。

11．设 R 和 S 是集合 A 上的关系，则有：

$r(R\cup S)=r(R)\cup r(S)$；(　　)　答案：√

$s(R\cup S)=s(R)\cup s(S)$；(　　)　答案：√

$t(R\cup S)\subseteq t(R)\cup t(S)$。(　　)　答案：√

12．设 R 和 S 是集合 A 上的等价关系，则 $R\cup S$ 一定是等价的。(　)　答案：×

说明：设集合 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{<1,1>，<2,2>，<3,3>，<1,2>，<2,1>\}$；$S=\{<1,1>，<2,2>，<3,3>，<1,3>，<3,1>\}$，则 R 和 S 都是等价的，但 $R\cup S=\{<1,1>，<2,2>，<3,3>，<1,2>，<2,1>，<1,3>，<3,1>\}$不是等价的，因为$<2,1>\in R\cup S$，$<1,3>\in R\cup S$，但$<2,3>\notin R\cup S$，$R\cup S$ 不是传递的。

13．设 R 和 S 是集合 A 上的两个相容关系，则 $R\circ S$ 与 $R\cap S$ 都是相容关系。(　)

答案：×

14．平面上直线间的平行关系是等价关系。(　)　答案：√

15．设人的集合 A 上的朋友关系为 R，则 R 是 A 上的相容关系。(　)　答案：√

§2.4 习 题 解 析

1. 设 N 表示非负整数集，$R: N \to N$。xRy 定义为 $x+2y=10$，确定 Dom(R)和 Ran(R)。
解：

由关系的定义，有 Dom(R)={0,2,4,6,8,10}，Ran(R)={5,4,3,2,1,0}。

2. 对下面集合 S={0,1,2,3}上的关系，写出它们的元素，作出相应的关系图和关系矩阵。

（1）mR_1n，定义为 $m+n=3$
（2）mR_2n，定义为 $m \equiv n (\bmod 2)$
（3）mR_3n，定义为 $m \le n$
（4）mR_4n，定义为 $m+n \le 4$
（5）mR_5n，定义为 $\max\{m,n\}=3$

解：

关系中的元素分别是：

R_1={<0,3>, <1,2>, <2,1>, <3,0>}
R_2={<0,0>, <1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,3>, <3,1>, <0,2>，<2,0>}
R_3={<0,0>, <0,1>, <0,2>, <0,3>, <1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,3>}
R_4={<0,0>, <0,1>, <0,2 >, <0,3>, <1,0>, <1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,0>, <2,1>,<2,2>, <3,0>, <3,1>}
R_5={<0,3>, <1,3>,<2,3>, <3,3>,<3,2>,<3,1>, <3,0>}

其对应的关系图分别如图 2-5 中（1）～（5）所示。

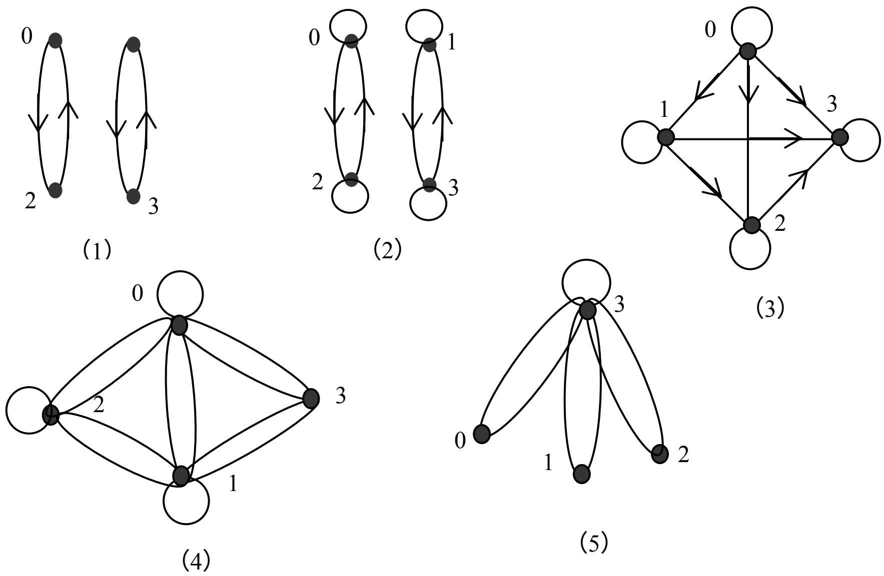


图 2-5

其对应的关系矩阵分别是：

（1） $M(R_1)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$　　（2） $M(R_2)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

（3） $M(R_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$　　（4） $M(R_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

（5） $M(R_5)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

3．$A=\{0,1,2\}$，（1）至（9）给出了 A 上关系 R 的元素 $<m,n>$ 应满足的条件。写出这些关系中的元素。

（1） $m\leq n$　　（2） $m<n$　　（3） $m=n$

（4） $mn=0$　　（5） $mn=m$　　（6） $m+n\in A$

（7） $m^2+n^2=2$　　（8） $m^2+n^2=3$　　（9） $m=\max\{n,1\}$

解：

下面直接给出答案：

（1） $\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,1>,<1,2>,<2,2>\}$

（2） $\{<0,1>,<0,2>,<1,2>\}$

（3） $\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$

（4） $\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<2,0>\}$

（5） $\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,1>，<2,1>\}$

（6） $\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<2,0>\}$

（7） $\{<1,1>\}$

（8） $\{\}$ 或写为空集 $\varnothing$

（9） $\{<1,0>,<1,1>,<2,2>\}$

4．设 R 和 S 是 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系。$R=\{<1,1>，<1,2>，<2,3>，<3,1>，<3,3>\}$；$S=\{<1,2>，<1,3>，<2,1>，<3,3>\}$。求 $R\cap S$，$R\cup S$ 和 $\overline{R}$。

解：

R，S 已用集合形式直接表示出，只要取它们通常的并与交即可。对 $\overline{R}$，利用 $A\times A$ 是 A 上全关系(全集)取补即可。

$R\cap S=\{<1,2>,<3,3>\}$

$R \cup S=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,3>,<3,1>,<3,3>\}$
$\overline{R}=\{<1,3>,<2,1>,<2,2>,<3,2>\}$

5．Z 是整数集。

（1）R_1 是 $Z\times Z$ 上的二元关系，$<<a,b>,<c,d>>\in R_1$ 定义为 $a-c=b-d$。给出 R_1 的几何解释。

(2) R_2 是 $Z\times Z$ 上的二元关系，$<<a,b>,<c,d>>\in R_2$ 定义为 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\le 10$。

给出 R_2，$R_1\cup R_2$，R_1-R_2，$R_1\oplus R_2$ 等的几何解释。

解：

（1）因 $a-c=b-d$ 可写为 $a-b=c-d$，直线 $x-y=K$（K 为整常数）上任意的两整数点具有关系 R_1，不在同一直线上的点不具有关系 R_1。

（2）平面上两整数点之间的距离若小于等于 10，则它们具有关系 R_2。

若两整数点在直线 $x-y=K$（K 为整常数）上或两整数点之间的距离小于等于 10，则两整数点具有关系 $R_1\cup R_2$。
若两整数点在直线 $x-y=K$（K 为整常数）上且两整数点之间的距离大于 10，则两整数点具有关系 R_1-R_2。
若两整数点在直线 $x-y=K$（K 为整常数）上且两整数点之间的距离大于 10，或者两整数点之间的距离小于等于 10 且两整数点不同时在任何直线 $x-y=K$ (K 为整常数)上，则两整数点具有关系 $R_1\oplus R_2$。

6．对以下整数集上的关系 R 和 S，确定 $R\circ S$：

（1）$R=\{<x,y>|y=2x-1\}$　　$S=\{<x,y>|y=x+3\}$
（2）$R=\{<x,y>|y=x-4\}$　　$S=\{<x,y>|y=x^2+3x+1\}$
（3）$R=\{<x,y>|y=2^x\}$　　$S=\{<x,y>|x=2^y\}$
（4）$R=\{<x,y>|y=2^x\}$　　$S=\{<x,y>|y=x^2\}$

解：

根据关系复合的定义，有

（1）$R\circ S=\{<x,y>|y=2x-1+3\}$
（2）$R\circ S=\{<x,y>|y=(x-4)^2+3(x-4)+1\}$
（3）$R\circ S=\{<x,y>|x=y\}$
（4）$R\circ S=\{<x,y>|\ y=(2^x)^2\}$

7．令 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{x,y,z\}$。$R:A\to B$，$S:B\to C$，且 $R=\{<1,b>,<2,a>,<2,c>\}$，$S=\{<a,y>,<b,x>,<c,y>,<c,z>\}$。

（1）求复合关系 $R\circ S$；
（2）求表示关系 R，S 和 $R\circ S$ 的矩阵 M_R、M_S 和 $M_{R\circ S}$ 并比较 $M_{R\circ S}$ 与 $M_R\cdot M_S$。

解：

（1）关系 R 和 S 的关系图如图 2-6 所示。可知，A 中元素 1 和 C 中元素 x 被“通道”$1\to b\to x$ 连结，因此 $<1,x>\in R\circ S$。类似地有 $<2,y>,<2,z>\in R\circ S$。有 $R\circ S=\{<1,x>,<2,y>,<2,z>\}$

（2）矩阵 $M_R=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$　$M_S=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c}a\\b\\c\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$　$M_{R\circ S}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$

将 M_R 与 M_S 相乘得 $M_R\cdot M_S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

可以看出，$M_{R\circ S}$ 与 $M_R\cdot M_S$ 有相同的零分量。

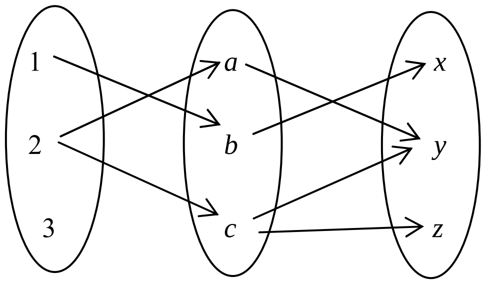


图 2-6

8．对于下面的布尔矩阵，确定对应的集合$\{1,2,3\}$上的关系 R，并确定关系 R^2 的关系矩阵。

（1）$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

解：

由关系矩阵与关系之间的联系，直接可由关系矩阵得到 R，且直接通过布尔乘法或利用类似第 7 题图解的方法，可得到 R^2。

（1）$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,3>\}$，$R^2$=全关系

（2）$R=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$　　$R^2=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$

（3）$R=\{<2,2>,<3,1>\}$　$R^2=\{<2,2>\}$

其对应的关系矩阵分别为：（1）$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$　（2）$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　（3）$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

*9．设 X={1,2,3,4}，R 是 X 上的二元关系，R={<1,1>,<3,1>,<1,3>,<3,3>,<3,2>,<4,3>,<4,1>,<4,2>,<1,2>}

（1）画出 R 的关系图；

（2）写出 R 的关系矩阵；

（3）说明 R 是否是自反、反自反、对称、传递的。

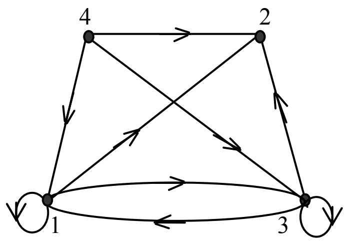


图 2-7

解：

（1）R 的关系图如图 2-7 所示。

（2）R 的关系矩阵是：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（3）由于对角线上不全为 1，R 不是自反的；由于对角线上存在非零元素，R 不是反自反的；由于矩阵不对称，R 不是对称的；

经计算可得

$$M(R^2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=M(R)$$，可知 R 是传递的。

说明：① 本题也可以通过关系图本身来说明：因结点 2 处无环，故关系 R 不是自反的；因结点 1 处有环，故 R 不是反自反的；因有结点 4 到结点 2 的边，但无 2 到 4 的边，R 不是对称的；不存在这样情形：有 a 到 b 的边，b 到 c 的边，无 a 到 c 的边，故 R 是传递的；

② 也可以直接从以集合形式给出的关系来判断：因 $<2,2>\notin R$，故 R 不自反；因 $<1,1>\in R$，故 R 不反自反；因 $<4,2>\in R, <2,4>\notin R$，故 R 不对称；因不存在这种情形：有 $<a,b>\in R,\ <b,c>\in R$，但 $<a,c>\notin R$，故 R 传递。

10．举出一个集合 A={1,2,3}上的关系 R 的例子，使它具有以下性质：

（1）R 同时是对称的和反对称的；

（2）R 既不是对称的也不是反对称的；

（3）R 是传递的，但 R Y $\widetilde{R}$ 不是传递的。

解：

有许多组例子可以作为答案，下面是一组可能的答案：

（1）R={<1,1>,<2,2>}

（2）R={<1,2>,<2,1>，<2,3>}

（3）R={<1,2>}

*11．有人说，如果非空集合 X 上的一个关系 R 是对称的、传递的则一定是自反的，从而是等价关系。其论证方法是：因 R 对称，则由 aRb 可得 $bRa(a,b \in X)$，因 R 传递，由 aRb 和 bRa 可得 aRa。这个推论正确吗？为什么？

解：

这个推论不正确。根据定义，R 对称指：如果 aRb 可得 bRa，但对每一个元素 $a \in A$ 可能不存在满足这一条件的不同的 b。上面假定是建立在每个元素都存在与它有关系 R 的其他元素的假定之上的，而当此假设不满足，则全部论证失效。

例如 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 $R=\{<a,b>,<b,a>,<a,a>,<b,b>\}$，则 R 是对称的、传递的，但不是自反的，因为 $<c,c> \notin R$。

12．设 R 和 S 是集合 A 上的关系，证明 $(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$

证：

由结论(定理 1 结论 4 的特殊情形)：若 $R \subseteq S$，则 $R \circ T \subseteq S \circ T$ 和 $T \circ R \subseteq T \circ S$ 成立，有如下推理：

因为 $R \cap S \subseteq R$，故 $(R \cap S)^2 \subseteq R \circ (R \cap S) \subseteq R \circ R = R^2$，用数学归纳法证明可知：$(R \cap S)^n \subseteq R^n$。同理可得 $(R \cap S)^n \subseteq S^n$，从而有 $(R \cap S)^n \subseteq R^n \cap S^n$。证毕。

13．设 R_1, R_2 是集合 S 到 T 的关系。证明：

（1）若 $R_1 \subseteq R_2$，则 $\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R}_2$

（2）$\widetilde{R_1 \cap R_2} = \widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$

（3）$\widetilde{R_1 \cup R_2} = \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$

证：

（1）$\forall <t,s> \in \widetilde{R}_1, <s,t> \in R_1$，由 $R_1 \subseteq R_2$，$<s,t> \in R_2$，有 $<t,s> \in \widetilde{R}_2$，从而 $\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R}_2$(事实上，两者是等价的，直接再取一次逆关系即可)。

（2）直接用定义证明。

$\forall <t,s> \in \widetilde{R_1 \cap R_2} \Leftrightarrow <s,t> \in R_1 \cap R_2$

$\Leftrightarrow <s,t> \in R_1$，$<s,t> \in R_2 \Leftrightarrow <t,s> \in \widetilde{R}_1$，$<t,s> \in \widetilde{R}_2$

$\Leftrightarrow <t,s> \in \widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$。证得 $\widetilde{R_1 \cap R_2} = \widetilde{R}_1 \cap \widetilde{R}_2$。

（3）（和（2）一样可以由定义直接证明）

由（1）的证明：$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ 及 $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$，可知

$\widetilde{R}_1 \subseteq \widetilde{R_1 \cup R_2}$ 及 $\widetilde{R}_2 \subseteq \widetilde{R_1 \cup R_2}$，有 $\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2 \subseteq \widetilde{R_1 \cup R_2}$

另一方面，由 R_1，R_2 的任意性，有 $R_1 \cup R_2 = \widetilde{\widetilde{R}}_1 \cup \widetilde{\widetilde{R}}_2 \subseteq \widetilde{\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2}$，故

$R_1 \cup R_2 \subseteq \widetilde{\widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2}$，再次由(1)，有 $\widetilde{R_1 \cup R_2} \subseteq \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$。

证得 $\widetilde{R_1 \cup R_2} = \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2$。

14．R 是集合 A 上的关系，证明 R 反对称的充分必要条件是：$R \cap \tilde{R} \subseteq I_A$ （I_A是 A 上恒等关系）。

证：

必要性：若 R 是反对称的，则 $\forall <x,y> \in R \cap \tilde{R}$，有 $<x,y> \in R, <x,y> \in \tilde{R}$，即 $<x,y> \in R, <y,x> \in R$，由反对称性，有 $x = y$，从而 $R \cap \tilde{R} \subseteq I_A$。

充分性：若 $R \cap \tilde{R} \subseteq E_A$， $\forall <x,y> \in R, <y,x> \in R$，则 $<x,y> \in R, <y,x> \in \tilde{R}$，从而 $<x,y> \in R \cap \tilde{R} \subseteq I_A$，则 $x = y$，由反对称的定义，R 是反对称的。

15．确定第 2 题中各关系的自反、反自反、对称、反对称、传递性质。

解：

由定义容易得出：

（1）反自反，对称　　（2）自反，对称，传递

（3）自反，反对称，传递　　（4）对称　　（5）对称

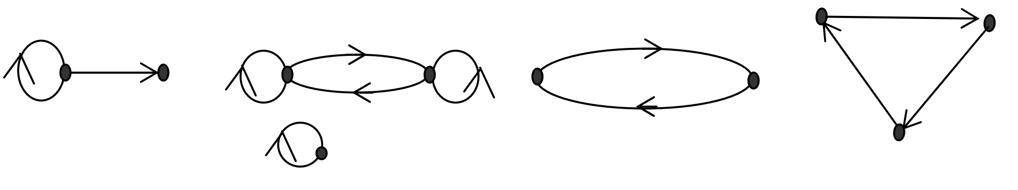
16．设 R 是 A 上的关系。证明 R 对称的充分必要条件是：$R = \tilde{R}$。

证：

必要性：若 R 对称，即 $\forall <x,y> \in R$，有 $<y,x> \in R$，即 $<x,y> \in \tilde{R}$，故 $R \subseteq \tilde{R}$，反过来 $\tilde{R} \subseteq R$ 的证明是一样的，证得 $R = \tilde{R}$。

充分性：若 $R = \tilde{R}$，则 $\forall <x,y> \in R = \tilde{R}$， $<x,y> \in \tilde{R}$，即 $<y,x> \in R$，从而 R 对称。

17．对图 2-8 表示的关系，考虑它们的反自反、自反、对称、反对称、传递性质。



（1）　（2）　（3）　（4）

图 2-8

解：

（1）反对称，传递　　（2）自反，对称，传递

（3）反自反，对称　　（4）反对称

18．设 R 是从 S={1,2,3,4}到 T={a,b,c}的关系，关系矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）证明 $R \circ \tilde{R}$ 是 S 上的对称关系；

（2）证明 $\tilde{R}\circ R$ 是 T 上的对称关系；

（3）关系 $R\circ\tilde{R}$ 和 $\tilde{R}\circ R$ 是等价关系吗？

解：

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ M(\tilde{R})=M(R)^T=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

（1）因为 $M(R\circ\tilde{R})=M(R)*M(\tilde{R})=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 对称，所以 $R\circ\tilde{R}$ 对称。

（2）因为 $M(\tilde{R}\circ R)=M(\tilde{R})*M(R)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 对称，所以 $\tilde{R}\circ R$ 对称。

（3）显然由上面关系矩阵可以判断两个关系均是自反、对称的，要判断是否等价只需判断传递性。类似第 9 题，可以根据关系矩阵是否出现这样情形：有 $r_{ij}=1$，$r_{jk}=1$，而 $r_{ik}=0$。若发生了，则不是传递的，否则是传递的。因 $M(\tilde{R}\circ R)$ 没有发生此情形，故 $\tilde{R}\circ R$ 是传递的，而对 $M(R\circ\tilde{R})$，因 $r_{21}=1$，$r_{13}=1$，而 $r_{23}=0$，故 $R\circ\tilde{R}$ 不是可传递的。

根据 $M(R^2)\le M(R)$ 是否成立来判断 R 的可传递性。$R\circ\tilde{R}$ 不可传递，$\tilde{R}\circ R$ 是传递的（对 $R\circ\tilde{R}$，$<2,1>,<1,3>\in R\circ\tilde{R}$，但 $<2,3>\notin R\circ\tilde{R}$）。

说明：a．(1)、(2) 可直接证明：因 $\widetilde{R\circ\tilde{R}}=\tilde{\tilde{R}}\circ\tilde{R}=R\circ\tilde{R}$，故 $R\circ\tilde{R}$ 对称。同理 $\tilde{R}\circ R$ 对称。

b．可以根据 $M(R^2)\le M(R)$ 是否成立来判断 R 的可传递性。只需计算对应矩阵，特别在一个关系是传递时，这可能是更好的一种方法。否则需检验排除所有可能发生的不传递的情形，才能得出传递的结论，但工作量太大。

19．若 R 是集合 S 上的对称关系，则 R^n 对任意的自然数 n 也是 S 上的对称关系。

证：

因 R 对称，$R=\tilde{R}$，由关系复合所具有的性质，$R\circ R=\tilde{R}\circ\tilde{R}$，两边取逆，得 $\widetilde{R^2}=R^2$，由数学归纳法易证，$\widetilde{R^n}=R^n$。从而说明 R^n 对称。

*20．集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 中有关系 $R=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$，$S=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$，试给出 $\left(\widetilde{R\circ S}\right)^2$ 的关系矩阵、关系图，并说明它们具有什么性质？为什么？

解：

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M(S)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M(R\circ S)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M(\widetilde{R\circ S})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M\left((\widetilde{R\circ S})^2\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由矩阵可知$\left(\widetilde{R\circ S}\right)^2$是空关系，从而可知它是反自反、反对称、对称、传递的。

*21．设 R 和 S 都是集合 A 上的自反、对称、传递关系，问 $R\cap S$ 的自反、对称、传递闭包分别是什么？为什么？

解：

若 R 和 S 都是集合 A 上的自反、对称、传递关系，则 $R\cap S$ 的自反、对称、传递闭包分别是

$r(R\cap S)=R\cap S$

$s(R\cap S)=R\cap S$

$t(R\cap S)=R\cap S$

下面给出证明。根据闭包的定义，实际上只需证明 $R\cap S$ 还是 A 上的自反、对称、传递关系即可。

因 R 和 S 均自反，$R\supseteq I_A, S\supseteq I_A$，有 $R\cap S\supseteq I_A$，$R\cap S$ 自反。
因 R 和 S 对称，$R=\tilde{R},\ S=\tilde{S}$，由定理 3($d$)，有 $\widetilde{R\cap S}=\tilde{R}\cap\tilde{S}=R\cap S$，$R\cap S$ 对称。
因 R 和 S 传递，$R^2\subseteq R$，$S^2\subseteq S$，有 $(R\cap S)^2\subseteq(R\cap S)\circ R\subseteq R\circ R=R^2$，同理有 $(R\cap S)^2\subseteq S^2$，故 $(R\cap S)^2\subseteq R\cap S$，证得 $R\cap S$ 传递。证毕。

22．给定集合 S={1,2,3,4}和 S 上的关系：R={<1,2>,<4,3>,<2,2>,<2,1>,<3,1>}。说明 R 是不可传递的，找出关系 R_1，$R_1\supseteq R$，使得 R_1 是可传递的，还能找出另一个 R_2，$R_2\supseteq R$，也是可传递的吗？

解：

因 $<4,3>\in R$，$<3,1>\in R$，但 $<4,1>\notin R$，故 R 是不可传递的。
作 R_1={<1,2>,<4,3>,<2,2>,<2,1>,<3,1>,<4,1>}，则 R_1 是可传递的，且 $R_1\supseteq R$。
作 R_2={<1,2>，<4,3>，<2,2>，<2,1>，<3,1>，<4,1>，<3,3>}，则 R_2 是可传递的，且 $R_2\supseteq R$。
实际上，S 上的全关系就是满足条件的一个传递关系。

*23．图 2-9 给出了集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 上关系 R 的关系图，试求 R 的传递闭包。

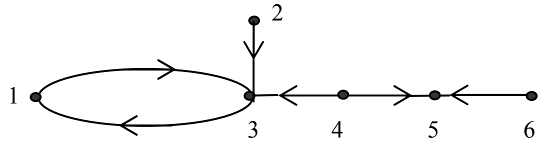


图 2-9

解：

R 的传递闭包所对应的关系图如图 2-10 所示：

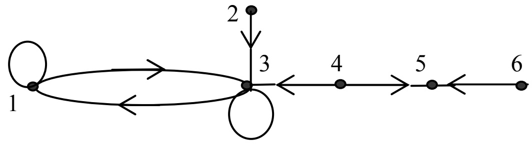


图 2-10

其对应的集合为：

$t(R)=\{<1,1>,<1,3>,<3,1>,<3,3>,<2,3>,<4,3>,<4,5>,<6,5>\}$

24．求下面集合 $\{a,b,c,d\}$ 上关系 R 的传递闭包（用序偶形式给出）：

（1）$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>\}$

（2）$R=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,d>,<d,c>,<d,d>\}$

解：

（1）$t(R)=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<b,d>,<c,a>,<c,b>,$ $<c,c>,<c,d>,<d,a>,<d,b>,<d,c>,<d,d>\}$(实际上是集合上的全关系)

（2）$t(R)=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>,<d,c>,<d,d>\}$

25．集合 $\{a,b,c,d\}$ 上关系 R 的关系图如图 2-11 所示，求 R 的传递闭包（用关系图来表示）：

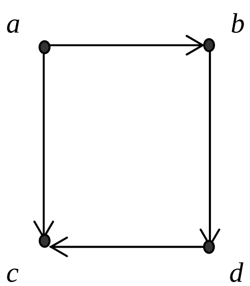


图 2-11

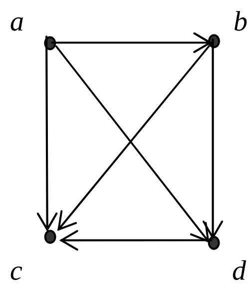


图 2-12

解：

其传递闭包如图 2-12 所示。

*26．设 R 是集合 A 上的一个具有传递和自反性质的关系，T 是 A 上的关系，使得 $<a,b>\in T \Leftrightarrow <a,b>\in R$ 且 $<b,a>\in R$，证明 T 是一个等价关系。

证：

因 R 自反，$\forall a\in A$，有 $<a,a>\in R$，$<a,a>\in R$，由 T 的定义，有 $<a,a>\in T$。T 自反。

若 $<a,b>\in T$，即 $<a,b>\in R$ 且 $<b,a>\in R$，也就是 $<b,a>\in R$ 且 $<a,b>\in R$，从而 $<b,a>\in T$。T 对称。

若 $<a,b>\in T$，$<b,c>\in T$，即 $<a,b>\in R$，$<b,a>\in R$，$<b,c>\in R$, $<c,b>\in R$，因 R 传递，由 $<a,b>\in R$ 和 $<b,c>\in R$，可得 $<a,c>\in R$；由 $<c,b>\in R$ 和 $<b,a>\in R$ 可得 $<c,a>\in R$。由 $<a,c>\in R$ 和 $<c,a>\in R$ 可得 $<a,c>\in T$。T 传递。

综上所述，T 是 A 上等价关系。

*27．S 是 X 上的二元关系，则 S 是反自反的当且仅当 $I\cap S=\varnothing$。

证：

若 S 是反自反的，则 $\forall x\in X$，$<x,x>\notin S$，从而 $I\cap S=\varnothing$。

反过来，若 $I\cap S=\varnothing$，则 $\forall <x,x>\in I$，有 $<x,x>\notin S$，从而 S 是反自反的。

*28．证明定义在实数集合 R 上的关系 $S=\{<x,y>|\ x,y\in R,\dfrac{x-y}{3}\text{是整数}\}$ 是一个等价关系。

证：

对 $\forall x,y,z\in R$，因

① $\dfrac{x-x}{3}=0$ 为整数，有 xSx，S 自反。

② 若 xSy，即 $\dfrac{x-y}{3}$ 为整数，则 $\dfrac{y-x}{3}=-\dfrac{x-y}{3}$ 为整数，从而 ySx。S 对称。

③ 若 xSy，ySz，即 $\dfrac{x-y}{3}$，$\dfrac{y-z}{3}$ 为整数，则 $\dfrac{x-z}{3}=\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{y-z}{3}$ 为整数，从而 xSz。S 传递。

综上①、②、③所述，S 是集合 R 上等价关系。

*29．若集合 A 上的关系 R，S 具有对称性，证明 $R\circ S$ 对称的充要条件是 $R\circ S=S\circ R$。

证：

若 $R\circ S$ 对称，即 $R\circ S=\widetilde{R\circ S}$，由关系复合与其逆的复合之间的关系，有 $R\circ S=\widetilde{S}\circ\widetilde{R}$，由条件 R，S 对称，有 $R=\widetilde{R}$, $S=\widetilde{S}$，从而有：$R\circ S=S\circ R$。

另一方面，若 $R\circ S=S\circ R$，则两边取逆，并利用关系的对称性及复合关系所具有的性质，有 $R\circ S=S\circ R=\widetilde{R}\circ\widetilde{S}=R\circ S$，从而 $R\circ S$ 对称。

30．设 R 和 S 是集合 A 上的关系，证明或否定下面结论：

（1）若 R，S 是传递的，则 $R\circ S$ 传递的充分必要条件是 $R\circ S=S\circ R$；

（2）若 R，S 是等价关系，则 $R\circ S$ 是等价关系的充分必要条件是 $R\circ S=S\circ R$。

证：

关系 R 传递的充要条件是：$R^2\subseteq R$

（1）充分性：若 $R\circ S=S\circ R$，由 R，S 传递，有

$(R\circ S)^2=(R\circ S)\circ(R\circ S)=R\circ(S\circ R)\circ R=R\circ(R\circ S)\circ S=R^2\circ S^2\subseteq R\circ S$

从而 $R\circ S$ 传递。

但上述条件不是必要的。如：$R=\{<a,b>\}$传递，$S=\{<b,c>\}$传递，$R\circ S=\{<a,c>\}$传递，但 $S\circ R=\varnothing$，$R\circ S\neq S\circ R$。

（2）必要性：若 R，S 均是等价的，显然 R，S 均对称，若 $R\circ S$ 等价，则 $R\circ S$ 对称，由上题知 $R\circ S=S\circ R$；

充分性：若 R，S 均是等价的，则 R，S 均自反，易证 $R\circ S$ 自反；由上题，当 R，S 对称时，由 $R\circ S=S\circ R$ 可知，$R\circ S$ 对称；由本题（1）的证明知，由 R,S 传递及 $R\circ S=S\circ R$ 可推出 $R\circ S$ 传递。由上述三点知 $R\circ S$ 是等价的。

31．用归纳法证明：若 R 是集合 A 上的自反和传递关系，则对任意的正整数 n，$R^n=R$。

证：

当 $n=1$ 时，显然成立；设 $n=k$ 时命题成立，即 $R^k=R$，则 $n=k+1$ 时，有 $R^{k+1}=R^k\circ R=R\circ R$，下面由 R 是自反及传递推导出 $R\circ R=R$ 即可。事实上，由传递知 $R^2\subseteq R$。另一方面，因为 $\forall<x,y>\in R$，由 R 自反，$<y,y>\in R$，从而由关系复合的定义知，$<x,y>\in R\circ R$，从而 $R^2\supseteq R$，证得 $R\circ R=R$。

由数学归纳法知，对任意的 n，均有：$R^n=R$。

*32．设 N 是自然数集合，定义 N 上的二元关系 R：

$$R=\{<x,y>\mid x\in N,y\in N,x+y\text{是偶数}\}$$

（1）证明 R 是一个等价关系；

（2）求关系 R 的等价类；

（3）试设计一个从 N 到 N 的函数 f，使得由 f 诱导的等价关系就是关系 R。

证：

（1）$\forall x\in N$，$x+x$ 是偶数，有 xRx。R 自反。

若 $<x,y>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，则 $y+x$ 是偶数，有 $<y,x>\in R$。R 对称。

若 $<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，$y+z$ 是偶数，则

$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$ 是偶数，有 $<x,z>\in R$。R 传递。

由以上证明，R 是等价关系。

（2）关系 R 的等价类有：$[1]_R=\{1,3,5,\Lambda\}$，$[2]_R=\{2,4,6,\Lambda\}$。

（3）设 $f:N\to N$，$f(x)=\begin{cases}0 & x\text{为偶数}\\ 1 & x\text{为奇数}\end{cases}$

则 f 所诱导的等价关系是 R。

*33．设 A 是任意集合，R 是 A 中任意二元关系，试证：

（1） $(R^+)^+ = R^+ = t(R)$

（2） $R \circ R^* = R^+ = R^* \circ R$

（3） $(R^*)^* = R^* = tr(R)$

证；

（1）因为 $(R^+)^+ = t(t(R))$ 且 $t(R)$可传递，由闭包定义：$t(t(R)) = t(R) = R^+$
证得 $(R^+)^+ = R^+ = t(R)$ 。

（2） $R \circ R^* = R \circ (tr(R)) = R \circ (rt(R)) = R \circ (t(R) \cup I_A)$

$$= R \circ t(R) \cup R \circ I_A = R \circ \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right) \cup R = \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} R^i \right) \cup R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+$$

同理可证：$R^* \circ R = R^+$

（3）因为 $r(R)$是自反的，$tr(R)$也是自反、传递的，由闭包的定义，有
$(R^*)^* = tr(tr(R)) = t(tr(R)) = tr(R) = R^*$

*34．给定集合 A={0,1,2,3}，且 A 中有关系

$R = \{< i, j >| i, j \in A, j = i + 1$ 或 $j = \frac{i}{2}\}$

$S = \{< i, j >| i, j \in A, i = j + 2\}$

试以如 R 或 S 的形式写出 $R \circ S$ 的集合表达式。

解：

$R \circ S = \{< i,k >| \exists j \in A$，使得 $j = i + 1$ 或 $j = \frac{i}{2}$，且 $j = k + 2\}$

即 $R \circ S = \{< i, j >| j + 2 = i + 1$或 $j + 2 = \frac{i}{2}\}$ 或写为：

$R \circ S = \{< i, j >| j = i - 1$ 或 $j = \frac{i}{2} - 2\}$

35．证明：

（1）若 R 是自反的，则 $s(R)$和 $t(R)$也是自反的

（2）若 R 是对称的，则 $r(R)$和 $t(R)$也是对称的

（3）若 R 是传递的，则 $r(R)$也是传递的

证：

（1）若 R 是自反的，则 $R \supseteq E_A$，由闭包的定义，$s(R) \supseteq R \supseteq E_A$，$t(R) \supseteq R \supseteq E_A$，
从而 $s(R)$及 $t(R)$均是自反的。

（2）若 R 对称，即 $R = \widetilde{R}$，则 $r(R) = R \cup E_A = \widetilde{R} \cup E_A = \widetilde{R \cup E_A} = \widetilde{r(R)}$，故 $r(R)$

对称。对 $t(R)$，由 $t(R)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n$ 知，$\widetilde{t(R)}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{R^n}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{R}^n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R^n=t(R)$，从而 $t(R)$对称。

（3）因 R 传递当且仅当 $t(R)=R$。要证 $r(R)$传递，只需证明 $tr(R)=r(R)$。

因为 $tr(R)=t(R\cup I_A)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(R\cup I_A)^i$

由归纳法可证：$(R\cup I_A)^i=\bigcup\limits_{j=0}^{i}R^j$

故 $tr(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=0}^{i}R^j=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}R^i=I_A\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=I_A\cup t(R)=I_A\cup R=r(R)$

即 $tr(R)=r(R)$。

36．考虑集合$\{1,2,3\}$上的关系 R，关系矩阵是

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求出下列关系的关系矩阵：

（1）$r(R)$　（2）$s(R)$　（3）$rs(R)$　（4）$sr(R)$　（5）$tsr(R)$

解：

根据关系矩阵与其对应关系的闭包的关系矩阵之间的联系，有

（1）$M(r(R))=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　（2）$M(s(R))=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（3）$M(rs(R))=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　（4）$M(sr(R))=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（5）$M(tsr(R))=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

37．对集合 S 上的关系 R

（1）证明：$sr(R)=rs(R)$

（2）证明：$tr(R)=rt(R)$

（3）举例说明：$ts(R)\neq st(R)$

解：

（1）$sr(R)=s(R\cup E_A)=(R\cup E_A)\cup\widetilde{(R\cup E_A)}=R\cup\widetilde{R}\cup E_A=s(R)\cup E_A=rs(R)$

（2）$tr(R)$为包含 $r(R)$的最小的传递关系，而 $rt(R)=t(R)\cup E_S\supseteq R\cup E_S=r(R)$

（3）例：$R=\{<1,2>\}$，则 $st(R)=s(R)=\{<1,2>,<2,1>\}$，而

$ts(R)=t\{<1,2>,<2,1>\}=\{<1,2>,<2,1>,<2,2>,<1,1>\}$

38．设 R_1,R_2 是 A 上的关系，证明：

（1） $r(R_1 \cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2） $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$

（3） $t(R_1 \cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$

用反例说明　$t(R_1 \cup R_2)\neq t(R_1)\cup t(R_2)$

证：

（1） $r(R_1 \cup R_2)=(R_1 \cup R_2)\cup E_A=(R_1 \cup E_A)\cup(R_2 \cup E_A)=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2） $s(R_1 \cup R_2)=(R_1 \cup R_2)\cup\widetilde{(R_1 \cup R_2)}=(R_1 \cup \widetilde{R}_1)\cup(R_2 \cup \widetilde{R}_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$

（3）由传递闭包的定义：$t(R_1 \cup R_2)\supseteq R_1 \cup R_2 \supseteq R_1$，且 $t(R_1 \cup R_2)$ 是传递的，而 $t(R_1)$ 是包含 R_1 的最小的传递关系，从而有 $t(R_1 \cup R_2)\supseteq t(R_1)$，同样可证 $t(R_1 \cup R_2)\supseteq t(R_2)$，得 $t(R_1 \cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$。

例：$R_1=\{<1,2>\},R_2=\{<2,3>\}$，则 $t(R_1)\cup t(R_2)=R_1 \cup R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$ 不传递。$t(R_1 \cup R_2)=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$

39．n 阶全体实方阵集合 $M_{n,n}$ 上的相似关系≈定义为：$A\approx B$，当存在 n 阶非奇异方阵 P，使得 $B=PAP^{-1}$。证明≈是等价关系。

证：

需证明≈是自反、对称和传递的。

（1）自反。对任意 n 阶实方阵 A，存在 n 阶实方阵 I_n（单位矩阵），使得 $A=I_nAI_n^{-1}$，故≈自反。

（2）对称。若 $A\approx B$，即存在非奇异方阵 P，使得 $B=PAP^{-1}$，则 $A=P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$，而 P^{-1} 非奇异，则 $B\approx A$，故≈对称。

（3）传递。若 $A\approx B$，$B\approx C$，即存在非奇异方阵 P 和 Q，使得 $B=PAP^{-1}$，$C=QBQ^{-1}$，则 $C=QPAP^{-1}Q^{-1}=(QP)A(QP)^{-1}$，而 QP 非奇异，则 $A\approx C$，故≈传递。

40．R 是整数集 Z 上的关系，mRn 定义为 $m^2=n^2$。

（1）证明 R 是等价关系。

（2）确定 R 的等价类。

证：

（1）因为任意整数 m，有 $m^2=m^2$，故 mRm，自反；若 mRn，即 $m^2=n^2$，则 $n^2=m^2$，即 nRm，对称；若 mRn，nRp，即 $m^2=n^2$，$n^2=p^2$，则 $m^2=p^2$，即 mRp，传递。由此证得 R 等价。

（2）$[i]_R=\{i,-i\}$，则 R 的等价类有：$\{[0]_R,[1]_R,[2]_R,\cdots\}$

41．设 R 是集合 A 上的自反关系。证明 R 是等价关系，当且仅当若 $<a,b>\in R$，$<a,c>\in R$，则 $<b,c>\in R$。

证：

当 R 等价时，容易证明结论，下面证明另一方面。需证 R 等价。

（1）R 自反（已知条件，显然）；

（2）R 对称：若 $<a,b>\in R$，因 R 自反，有 $<a,a>\in R$，从而由条件有：$<b,a>\in R$

（3）R 传递：若 $<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$，则由已证对称，$<b,a>\in R$，加上 $<b,c>\in R$，由条件有：$<a,c>\in R$

42．设 R 和 S 是非空集合 A 上的等价关系，试确定下列各式，哪些是 A 上的等价关系，对不是的式子，给出反例。

（1）$(A\times A)-R$

（2）$R-S$

（3）R^2

（4）$r(R-S)$

解：

（1）$(A\times A)-R$ 不是 A 上的等价关系，例如：A={1,2}，R={<1,1>,<2,2>}，则 $(A\times A)-R$ ={<1,2>，<2,1>}不是自反的，当然不等价。

（2）$R-S$ 不等价，例如：A={1,2}，R={<1,1>，<2,2>，<1,2>，<2,1>}，S={<1,1>，<2,2>}，则 $R-S$ ={<1,2>，<2,1>}不是传递的，不等价。

（3）是等价的(利用第 30 题（2）小题，当 R=S 时)。

（4）不是等价的，例如：A={1,2,3}，S={<1,1>，<2,2>，<3,3>，<2,3>，<3,2>}，R 为 A 上全关系，则 $r(R-S)$ ={<1,1>，<2,2>，<3,3>，<1,2>，<2,1>，<1,3>，<3,1>} 不是传递的，因为 $<2,1>\in r(R-S)$，$<1,3>\in r(R-S)$，而 $<2,3>\notin r(R-S)$。

43．$A=\{1,2,3\}\times\{1,2,3,4\}$，$A$ 中关系 R 定义为：$<x,y>R<u,v>$，当且仅当$|x-y|=|u-v|$，证明 R 是等价关系，并确定由 R 对集合 A 的划分。

证：

首先证明 R 是等价的。

① 对任意的 $<x,y>\in A$，因$|x-y|=|x-y|$，故$<x,y>R<x,y>$，R 自反。

② 对任意 $<x,y>\in A$, $<u,v>\in A$，若$<x,y>R<u,v>$，即$|x-y|=|u-v|$，则$|u-v|=|x-y|$，从而$<u,v>R<x,y>$，R 对称。

③ 若$<x,y>R<u,v>$，$<u,v>R<p,q>$，即$|x-y|=|u-v|$，$|u-v|=|p-q|$，从而$|x-y|=|u-v|$，得证$<x,y>R<p,q>$。

综上所述，R 是等价关系。

由定理知由 R 的等价类可确定对集合 A 的划分。划分中的元素分别为元素的等价

类，它们是：

$[<1,1>]_R = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$
$[<1,2>]_R = \{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>,<3,4>\}$
$[<1,3>]_R = \{<1,3>,<3,1>,<2,4>\}$
$[<1,4>]_R = \{<1,4>\}$

即划分 $\Pi = \{[<1,1>]_R,[<1,2>]_R,[<1,3>]_R,[<1,4>]_R\}$

44．集合 A={0,1,2,3}有多少个不同的划分？A 中有多少个不同的等价关系？

解：

有 15 个不同的划分，有 15 个不同的等价关系。

首先注意 X 的每个划分包含或 1、或 2、或 3、或 4 个不同的集合。具体划分是：

$A1$={{0,1,2,3}}，$A2$={{0},{1,2,3}}，$A3$={{1},{0,2,3}}，
$A4$={{2},{0,1,3}}，$A5$={{3},{0,1,2}}，$A6$={{0,1},{2,3}}，
$A7$={{0,2},{1,3}}，$A8$={{0,3},{1,2}}，$A9$={{0},{1},{2,3}}，
$A10$={{0},{2},{1,3}}，$A11$={{0},{3},{1,2}} $A12$={{1},{2},{0,3}}，
$A13$={{1},{3},{0,2}} $A14$={{2},{3},{0,1}} $A15$={{0},{1},{2},{3}})

45．X={1,2,3,4,5,6,7,8,9}，判定下面是否是 X 的划分？

（1）{{1,3,6}，{2,8}，{5,7,9}}
（2）{{1,5,7}，{2,4,8,9}，{3,5,6}}
（3）{{2,4,5,8}，{1,9}，{3,6,7}}
（4）{{1,2,7}，{3,5}，{4,6,8,9}，{3,5}}

解：

（1）否。因为 X 中元素 4 不属于任一个分块，或解释为：X 不是各分块的并。
（2）否。因为 5 属于两个不同的分块，或解释为：两个不同的分块相交。
（3）是。因为 X 中每个元素恰好属于一个块，且各分块互不相交。
（4）是。虽然出现两次{3,5}，但由于在同一个集合中，应认为是同一元素。

46．设 R 和 S 是 A 上的两个相容关系，$R \cap S$, $R \cup S$ 是否是 A 上的相容关系？

证：

由相容关系的定义，若一个关系是自反、对称的，则是相容的。

若 R 和 S 均是相容关系，则都是自反、对称的，从而 $R \cap S$, $R \cup S$ 都是自反、对称的，从而均是相容关系，所以 $R \cap S$, $R \cup S$ 均为 A 上的相容关系。

47．集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，图 2-13 是 X 上关系 R 的关系图。

（1）检验 R 是 X 上的相容关系；
（2）确定由 R 决定的 X 的完全覆盖。

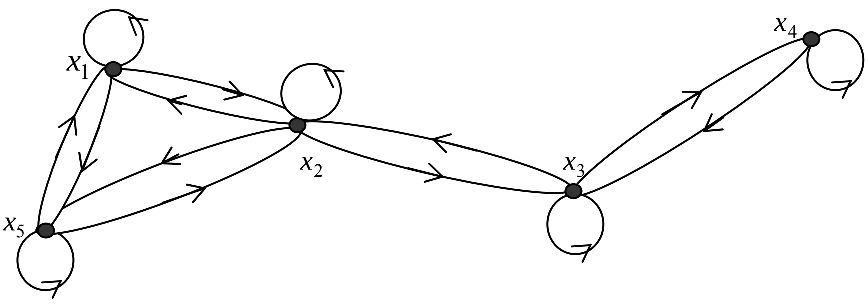


图 2-13

解：

由于 R 是自反、对称的，它是 X 上的相容关系。它的极大相容类的全体构成 X 的一个完全覆盖：$\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_3,x_4\},\{x_2,x_4\}\}$

48．在平面 $R\times R$ 上定义关系$\prec$，$\preceq$，$\leq$分别如下：

$<x,y> \prec <z,w>$　当 $x^2+y^2 < z^2+w^2$

$<x,y> \preceq <z,w>$　当$<x,y> \prec <z,w>$或$<x,y>=<z,w>$

$<x,y> \leq <z,w>$　当 $x^2+y^2 \leq z^2+w^2$

（1）说明哪些是偏序关系。

（2）说明哪些是拟序关系。

（3）在平面 $R\times R$ 上表示$\{<x,y> \mid <x,y> \preceq <3,4>\}$。

（4）在平面 $R\times R$ 上表示$\{<x,y> \mid <x,y> \leq <3,4>\}$。

解：

（1）$\preceq$，$\leq$是偏序关系。

（2）$\prec$是拟序关系。

（3）以原点为圆心，5 为半径的圆面，圆周上只含<3,4>点。

（4）以原点为圆心，5 为半径的圆面，包括圆周。

*49．设集合 $P=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 上的偏序关系如图 2-14 所示。找出 P 的最大元、最小元、极大元、极小元。找出 $\{x_2,x_3,x_4\}$、$\{x_3,x_4,x_5\}$ 和 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 的上界、下界、上确界、下确界。

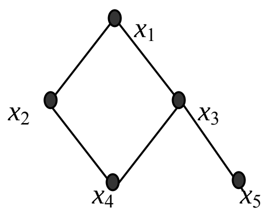


图 2-14

解：

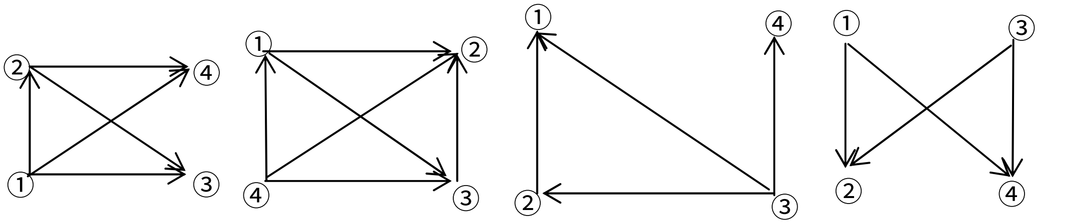
P 的最大元为 x_1，最小元不存在，极大元为 x_1，极小元为 x_4,x_5。

$\{x_2,x_3,x_4\}$ 的上界、下界、上确界、下确界分别为：x_1；x_4；x_1；x_4。

$\{x_3,x_4,x_5\}$ 的上界、下界、上确界、下确界分别为：x_3，x_1；不存在；x_3；不存在。

$\{x_1,x_2,x_3\}$ 的上界、下界、上确界、下确界分别为：x_1；x_4；x_1；x_4。

50．图 2-15 给出了集合$\{1,2,3,4\}$上的四个偏序关系图，画出它们的哈斯图，并说明哪一个是全序，哪一个是良序？

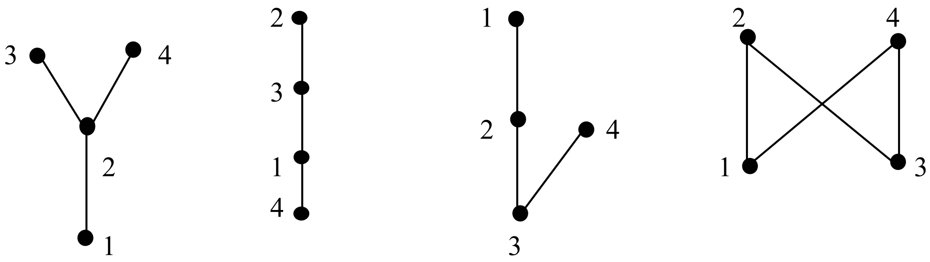


（1）　　（2）　　（3）　　（4）

图 2-15

解：

它们的哈斯图分别如图 2-16 所示。其中（2）是全序，也是良序。



（1）　　（2）　　（3）　　（4）

图 2-16

51．设$F(N)$是由集合N的全体有限子集组成的集合，则$(F(N),\subseteq)$是一个偏序集。

（1）$F(N)$是否有极大元？说明理由。

（2）$F(N)$是否有极小元？说明理由。

（3）设$A,B\in F(N)$，$\{A,B\}$是否有最小上界？若有，指出最小上界。

（4）设$A,B\in F(N)$，$\{A,B\}$是否有最大下界？若有，指出最大下界。

解：

（1）无极大元，据定义，没有比N更大的子集。

（2）有极小元为$\varnothing$，没有比它更小的子集。(若有限子集均非空，则不存在极小元。)

（3）最小上界为$A\cup B$。

（4）最大下界为$A\cap B$。

*52．设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$上的二元关系为：

$$R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>,<b,b>,<b,c>,<b,e>,<c,c>,<c,e>,<d,d>$$
$$<d,e>,<e,e>$$

验证$<A,R>$是偏序集，并画出哈斯图。

解：

R 所对应的关系矩阵为：

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由关系矩阵可知，对角线上所有元素全为 1，故 R 自反；

$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故 R 反对称；可计算出 R^2 对应的矩阵为：

$$M(R^2)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M(R)$$

由以上矩阵可知 R 传递。

所以，R 是偏序关系。所对应的哈斯图如图 2-17 所示。

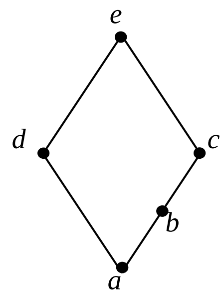


图 2-17

53．设 S 和 T 是集合 X 的划分，定义关系 R 为：

SRT 当且仅当 $\forall u\in S,\ \exists v\in T,\ u\subseteq v$。求证关系 R 在 X 的全体划分的集合上是一个偏序关系。

证：

设 X 上所有划分的集合为 F。

① 因为对任意的 $S\in F$，$\forall u\in S$，有 $u\subseteq u$，故 SRS 成立，R 自反。

② 假定 SRT，TRS，则

$\forall u\in S,\ \exists v\in T,\ u\subseteq v$，同样对 $v\in T,\ \exists u_1\in S,\ v\subseteq u_1$。因 S 为 X 的划分，故 $u\cap u_1=\varnothing$ 或 $u=u_1\ne\varnothing$。设 $a\in u$，则 $a\in v$，从而 $a\in u_1$，于是 $u\cap u_1\ne\varnothing$，得 $u=u_1$。故可得 $u=v$。所以 $S\subseteq T$。同样可证 $T\subseteq S$。得证 $S=T$。由此可知 R 是反对称的。

③ 假定 SRT，TRW，则有

$\forall u\in S,\ \exists v\in T,\ u\subseteq v$，对 $v\in T,\ \exists w\in W,\ v\subseteq w$，所以 $\forall u\in S,\ \exists w\in W,\ u\subseteq w$，即 SRW，从而 R 是传递的。

综上所述，R 是偏序关系。

54．3 个偏序集的哈斯图如图 2-18 中（1），（2），（3）所示。

（1）分别指出它们的极大元和极小元。

（2）分别指出它们中哪些有最小元？

（3）分别指出它们中哪些有最大元？

（4）找出适合 $e \leq x$ 的元素 x。

（5）确定（如果存在的话）$\text{lub}\{d,c\}$，$\text{lub}\{p,m\}$，$\text{lub}\{w,y,v\}$，$\text{glb}\{a,g\}$。

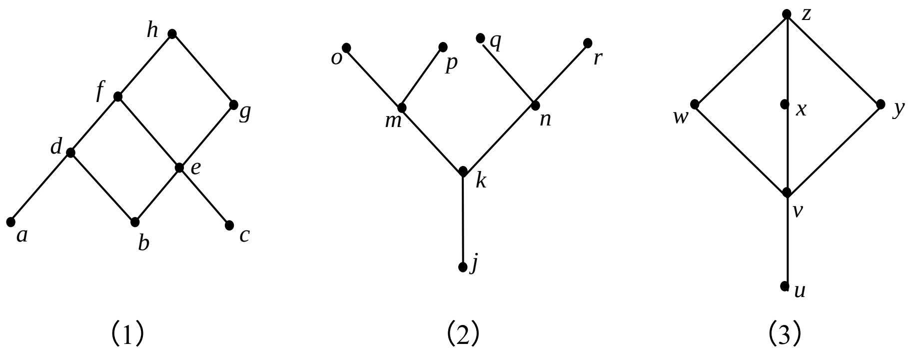


图 2-18

解：

图（1）中 h 为极大元，a,b,c 为极小元；图（2）中 o,p,q,r 为极大元，j 为极小元；图（3）中 z 为极大元，u 为极小元；图（1）、图（3）有最大元，图（2）、图（3）有最小元；满足条件的点的$\{e,f,g,h\}$；$\text{lub}\{d,c\}=f$；$\text{lub}\{p,m\}=p$；$\text{lub}\{w,y,v\}=\text{z}$；$\text{glb}\{a,g\}$不存在。

55．假设$(S,\leq_1)$和$(T,\leq_2)$是偏序集，在 $S\times T$ 上定义≤：

$<s,t>\ \leq\ <s',t'>$ 当 $s\leq_1 t$ 或 $s'\leq_2 t'$

说明≤是否是偏序。

解：

不是偏序，≤不满足反对称性。例如：$(Z,\leq)$，则<1,2>≤<2,1>，且<2,1>≤<1,2>，说明≤不具有反对称性。

56．给出含有三个元素的所有不同的偏序集的哈斯图。

解：

所有不同的偏序集的哈斯图有五个，如图 2-19 中（1）～（5）所示：

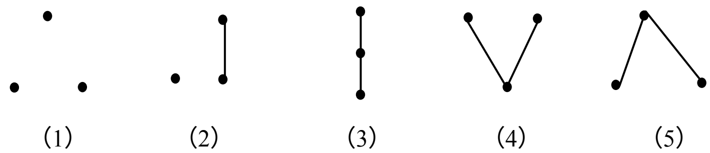


图 2-19

第 3 章　函　数

函数是数学中一个基本概念，我们这里所讨论的函数，作为一种特殊的二元关系，其定义域和值域是一般的集合。本书后面很多地方要用到本章给出的一些有关函数的基本概念和性质。这里主要讨论了函数的基本概念，函数的复合、反函数等，并给出了相关的性质。下面就此作一简单介绍。

§3.1　内 容 分 析

§3.1.1　函数的基本概念

定义 1　设 A 和 B 是集合，f 是从 A 到 B 的二元关系，若对每一个 $x \in A$，都存在惟一的一个 $y \in B$，使得 $< x, y > \in f$，则称 f 是从 A 到 B 的函数或映射，记作 $f: A \to B$。$< x, y > \in f$ 也记作 $f(x) = y$。y 称为 x 在 f 下的象（象点、函数值），x 称为 y 在 f 下的原象（自变量）。

对函数 $f: A \to B$，A 称为 f 的定义域，记为 $\mathrm{Dom}(f)$。集合 $\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}(f) \}$ 称为 f 的象或值域。有时也将 Im（f）记为 $f(A)$，它是 B 的子集（可能是真子集）。

特别需要注意，集合 A 上的恒等关系是 A 上的函数（映射），称为 A 上的恒等函数。

若 $f, g: A \to B$，使得 $\forall a \in A, f(a) = g(a)$，称函数 f 与 g 相等，记为 $f = g$。

定义 2　设函数 $f: A \to B$

（1）若对任意的 $x_1, x_2 \in A$，且 $x_1 \neq x_2$，必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是单射或一对一的映射（又叫内射或入射）。

此定义和以下说法是等价的：若对任意 $x_1, x_2 \in A$，且 $f(x_1) = f(x_2)$，必有 $x_1 = x_2$，称 f 是单射。

（2）若 $f(A) = B$，则称 f 是满射（或映上的映射、到上的映射）。

（3）若 f 是单射且是满射，则称 f 是双射或一一对应。

容易举出是单射而不是满射、是满射而不是单射、既是满射也是单射、既不是满射也不是单射的例子。

设函数 $f: A \to B$，对 $A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，称 $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$ 为 A_1 在 f 下的象，称 $f^{-1}(B_1) = \{ x \in A \mid f(x) \in B_1 \}$ 为 B_1 在 f 下的原象（或逆象）。

可以证明下面结论：

定理 1　设函数 $f:A\to B$，对 $A_1,A_2\subseteq A$， $B_1,B_2\subseteq B$，则有

（1） $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$
（2） $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$
（3） $f(A_1-A_2)\subseteq f(A_1)-f(A_2)$
（4） $f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2)$
（5） $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$， $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$
（6） $f^{-1}(\overline{B_1})=\overline{f^{-1}(B_1)}$， $f(\overline{A_1})=\overline{f(A_1)}$
（7） $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$
（8） $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

上面式子中有些不是等式，希望通过例子说明，可以发生不相等情形。详细情况见习题 16、19、20 等。

§3.1.2　函数的复合、反函数

由关系的复合知道，若有关系 $R:A\to B$，$S:B\to C$，则复合关系 $R\circ S$ 是从 A 到 C 的关系。若 R，S 都是函数，则复合关系 $R\circ S$ 是从 A 到 C 的函数，因为有下面定理：

定理 2　设有函数 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则复合关系 $f\circ g$ 是从 A 到 C 的函数，且有 $(f\circ g)(x)=g(f(x))$。

称 $f\circ g$ 是函数 f 和 g 的复合函数（或 f 与 g 的合成）。
关于函数的复合与函数的单、满、双射有下面的结论：

定理 3　设有函数 $f:A\to B$， $g:B\to C$。

（1）若 f,g 是单射，则 $f\circ g$ 也是单射；
（2）若 f,g 是满射，则 $f\circ g$ 也是满射；
（3）若 f,g 是双射，则 $f\circ g$ 也是双射。

可以举例说明上面定理的逆命题不成立，但有下面定理：

定理 4　设有函数 $f:A\to B$， $g:B\to C$。

（1）若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射；
（2）若 $f\circ g$ 是满射，则 g 是满射；
（3）若 $f\circ g$ 是双射，则 f 是单射， g 是满射。

定义 3　设有函数 $f:A\to B$，若逆关系 $\tilde{f}:B\to A$ 是从 B 到 A 的函数，则称 $\tilde{f}$ 是 f 的反函数，并记 $\tilde{f}$ 为 f^{-1}（也称为逆函数）。

由定义可知：当函数 $f:A\to B$ 的反函数 f^{-1} 存在，若 $f(x)=y$，则 $f^{-1}(y)=x$，且有下面结论成立：

$f \circ f^{-1} = I_A$；$f^{-1} \circ f = I_B$

定理 5　函数 $f: A \to B$ 存在反函数的充分必要条件是 f 是双射。

定理 6　设函数 $f: A \to B$ 的反函数 f^{-1} 存在，则 f^{-1} 也是双射，且 $(f^{-1})^{-1} = f$。

定理 7　设函数 $f: A \to B$，$g: B \to C$，f，g 的反函数都存在，则复合函数 $f \circ g$ 的反函数也存在，且 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。

§3.1.3　集合的基数

定义 4　设 A, B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 与 B 等势，记作 $A \sim B$，也称 A 和 B 有相同的基数，记作 $|A|=|B|$。否则称 A 的基数不等于 B 的基数，记作 $|A| \neq |B|$。

若从集合 A 到集合 B 存在单射，则 $|A| \leq |B|$；若从 A 到 B 存在单射，但不存在满射，则 $|A| < |B|$；

容易知道，两个有限集合只有当它们的元素的个数相等时才是等势的，因此有限集不可能与它的真子集等势。

定义 5　凡与自然数等势的集合 A 称为可数集或可列集，也可称 A 是可数的或可列的，可数集的势记为 c_0。

关于集合的势与等势及可数有下面的结论：

定理 8

（1）任何无限集必含有可数子集。
（2）可数集的任何无限子集是可数的。
（3）从可数集 A 中减去一个有限子集 M，则 $A-M$ 仍是可数集。
（4）两两不相交的有限个可数集的并是可数集。
（5）两两不相交的可数个有限集的并是可数集。
（6）两两不相交的可数个可数集的并是可数集。
（7）可数个可数集的并是可数集。
（8）有理数集的全体是可数集。
（9）任何实数区间 $[a,b]$ 上的有理数的全体是一个可数集。
（10）若 S 是一个不可数的无限集合，A 是 S 的一个有限或可数子集，则 $S-A \sim S$。
（11）凡无限集必含有一个和它自身等势的真子集。
（12）开区间（0,1）是不可数的。

集合（0,1）的基数记为 c，称为连续统的势。

§3.2　重点及难点解析

§3.2.1　基本要求

1．要求掌握函数的基本概念，弄清单射、满射、双射之间的区别。给定一个函数，要能确定它是否是单射、满射、双射等。
2．掌握复合函数和反函数的定义，弄清楚它们存在的条件。
3．理解集合的象及原象的定义及相关性质。给定一个函数，能确定一点的象，一个集合的象，一个集合的原象及两函数的复合等。
4．掌握集合的势、可数集、不可数集的概念。

§3.2.2　疑难点解析

1．要清楚函数的定义。A 到 B 上的函数与 A 到 B 上的一般关系的不同在于：(1) 函数要求 A 中一个元素只对应一个象，关系则可以是一个元素对应多个象；(2) 函数要求集合 A 中每个元素都应有象，而关系不要求这一点，A 中元素可以没有象。
还应清楚函数的定义域、值域的定义及求法。虽然函数定义域为全集 A，但为了与高等数学中普通函数的定义一致，我们可能会遇到求函数的定义域或值域之类的问题，此时我们应将其理解为通常的定义域，或理解为函数作为一般关系时的定义域。
2．对函数的几种形式：单射、满射、双射要很清楚它们的概念。
单射要求不同的点对应不同的象，通常证明某个映射是单射时，我们采取的是它的等价定义，即：若象相同，则原象相等。
满射则是每个点均存在原象。可以直接按定义来求，或者通过集合的演算得到。
有时要说明一个映射不是单射，只需找到两个不同的点有相同的象即可，而要说明映射不是满射，则需找到某个点，说明不存在原象。
3．一个子集的象及子集的原象之间的相应关系（如定理 1）应通过例子加以理解，且应能够通过集合的验算来证明，或通过举反例说明。例如：习题 16、19、20 等。
4．两个有限集合之间存在的映射的多少是个计数问题，可以通过组合数学中的方法得到，对几个简单的问题应该能清楚解答。详见习题 15。
5．对函数的复合及反函数，要能够求出指定函数的复合及反函数。
不同教材的记号可能有所不同，我们这里是这样记的：$(f\circ g)(x)=g(f(x))$。有些书上记号为 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$。
6．关于集合的势，对一些基本的结论（见定理 8）要清楚，如：有理数集是可数集，无理数集不可数等。

§3.3　基　本　题

§3.3.1　选择题

1．设 $A=\{a,b,c\}$， $B=\{1,2\}$，令 $f:A\to B$，则不同的函数的个数为（　　）。

A．2＋3 个　　B．2^3 个　　C．2×3 个　　D．3^2 个

答案：B

2．函数的复合满足（　　）。

A．交换律　　B．结合律　　C．幂等律　　D．分配律

答案：B

3．若 f , g 是满射，则复合函数 $f\circ g$ 必是（　　）。

A．映射　　B．单射　　C．满射　　D．双射

答案：C

4．若 $f\circ g$ 是满射，则（　　）。

A． f 必是满射　　B． f 必是单射　　C． g 必是满射　　D． g 必是单射

答案：C

5． $f:Z\to Z$，对任意的 $i\in Z$，有 $f(i)=i(\bmod 8)$，则 f 是（　　）。

A．不是双射　　B．单射　　C．满射　　D．双射

答案：A

6．Z 是整数集合，函数 f 定义为：$Z\to Z$, $f(x)=|x|-2x$，则 f 是（　　）。

A．单射　　B．满射　　C．双射　　D．非单射也非满射

答案：A

§3.3.2　填空题

1．设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，R，S，T 是从 A 到 B 的关系，且 $R=\{<a,1>, <b,2>, <c,2>\}$，$S=\{<a,1>, <a,2>\}$，$T=\{<a,1>, <b,1>, <c,1>\}$，则在这三个二元关系中，______可定义为 A 到 B 的函数。

答案：R 和 T

2．设 $A=\{1,2,3\}$， f,g,h 是 A 到 A 的函数，其中 $f(1)=f(2)=f(3)=1$ ；$g(1)=1$，$g(2)=3$， $g(3)=2$ ；$h(1)=3$， $h(2)=h(3)=1$，则____①____是单射；____②____是满射；____③____是双射。

答案：① g　② g　③ g

3．设 $A=\{1,2,3\}$，R，S，T 是 A 上的二元关系，且 $R=\{<1,2>, <1,3>, <1,1>\}$，$S=\{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$，$T=\{<1,1>, <2,3>, <3,2>\}$，那么这三个二元关系的逆关系中，________可定义为 A 到 A 的函数。

答案：$\tilde{R},\tilde{S},\tilde{T}$

4．设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{0,1\}$，那么可定义____①____种不同的 A 到 B 的函数；可定义____②____种不同的 A 到 B 的满射。

答案：① 32　② 30

说明：从 A 到 B 的不同的满射有 $2!S(5,2)$ 个，详见习题 15。

5．设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，那么可定义________种不同的从 A 到 B 的单射。

答案：6

6．设 N 是自然数集合， f 和 g 是 N 到 N 的函数，且 $f(n)=2n+1$， $g(n)=n^2$，那么复合函数 $f\circ f(n)=$____①____，$g\circ g(n)=$____②____，$f\circ g(n)=$____③____，$g\circ f(n)=$____④____。

答案：① n^4　② $4n+3$　③ $2n^2+1$　④ $(2n+1)^2$

7．设 f 是 A 到 B 的函数， g 是 B 到 C 的函数，复合函数 $f\circ g$ 是 A 到 C 的函数，如果 $f\circ g$ 是满射，那么____①____必是满射；如果 $f\circ g$ 是单射，那么____②____必是单射。

答案：① g　② f

8．自然数集 N 是可数的，则 $N\times N$ 是____①____，有理数集 Q 是可数的，全体实数构成的集合 R 是____②____。

答案：① 可数的　② 不可数的

§3.4　习 题 解 析

1．下面的关系哪些是函数？其中 xRy 定义为 $x^2+y^2=1$， x， y 为实数。

（1）$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$
（2）$-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 1$
（3）$-1\le x\le 1$，$0\le y\le 1$
（4） x 任意，$0\le y\le 1$

解：

（1）（3）是函数（根据函数的定义，若每一个元素存在惟一的象，则为函数）。

2．设 S＝$\{1,2,3,4,5\}$，考虑 S 到 S 的函数：$I_S(n)=n$，$f(n)=6-n$，$g(n)=\max\{3,n\}$，$h(n)=\max\{1,n-1\}$。

（1）将上述函数写成序偶的集合；

（2）将上述函数看作特殊的关系，作出关系图；

（3）哪些函数是单射，哪些函数是满射？

解：

（1）$I_S=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$

$f=\{<1,5>,<2,4>,<3,3>,<4,2>,<5,1>\}$

$g=\{<1,3>,<2,3>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$

$h=\{<1,1>,<2,1>,<3,2>,<4,3>,<5,4>\}$

（2）关系图如图 3-1 所示：

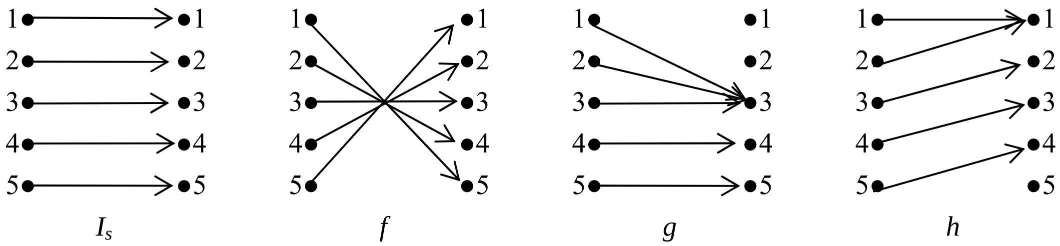


图 3-1

（3）I_S 和 f 是单射；也是满射。g，h 不是单射也不是满射。

3．对下列函数：

（1）$f:R\to R$，$f(x)=x$，$S=\{8\}$；

（2）$f:R\to R^+$（正实数集），$f(x)=2^x$，$S=\{1\}$；

（3）$f:N\to N\times N$，$f(n)=<n,n+1>$，$S=\{<2,2>\}$；

（4）$f:N\to N$，$f(n)=2n+1$，$S=\{2,3\}$；

（5）$f:Z\to N$，$f(x)=|x|$，$S=\{0,1\}$；

（6）$f:[0,1]\to[0,1]$，$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4},S=[0,\frac{1}{2}]$；

（7）$f:R\to R$，$f(x)=3$，$S=N$；

（8）$f:[0,\infty]\to R$，$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$S=\{0,\frac{1}{2}\}$；

（9）$f:(0,1)\to(0,\infty)$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$S=\{0,1\}$。

请作表回答如下问题：

（1）是单射、满射或双射？

（2）函数的象？

（3）给定集合 S 的原象？

（4）若 f 是双射，写出 f^{-1} 有表达式。

解：

	单、满、双？	函数的象	集合 S 的原象	若 f 为双射，写出 f^{-1}
（1） $f(x)=x$	单，满，双	R	$\{8\}$	f（x）$=x$
（2） $f(x)=2^x$	单，满，双	R+	$\{0\}$	$f(x)=\log_2 x$
（3） $f(n)=<n,n+1>$	单	$\{<n,n+1>\mid n\in N\}$	空集	
（4） $f(n)=2n+1$	单	全体正奇数	$\{1\}$	
（5） $f(x)=\|x\|$	满	N	$\{0,1,-1\}$	
（6） $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$	单	$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$	$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$	
（7） $f(x)=3$		$\{3\}$	R	
（8） $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$	单	$[0,1]$	$\{1,\infty\}$	
（9） $f(x)=\dfrac{1}{x}$	单	$(1,+\infty)$	空集	

4．已知 f,g,h 是 R 到 R 的函数：

$f(x)=x^3-4x$ ； $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ； $h(x)=x^4$ 。求

（1） $h\circ g\circ f$　　（2） $g\circ h\circ f$　　（3） $f\circ g\circ h$　　（4） $f\circ f$

（5） $g\circ g$　　（6） $g\circ h$　　（7） $h\circ g$

解：

（1） $(h\circ g\circ f)(x)=\left(\dfrac{1}{(x^4)^2+1}\right)^3-4\left(\dfrac{1}{(x^4)^2+1}\right)$

（2） $(g\circ h\circ f)(x)=\left(\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^4\right)^3-4\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^4$

（3） $(f\circ g\circ h)(x)=\left(\dfrac{1}{(x^3-4x)^2+1}\right)^4$

（4） $(f\circ f)(x)=(x^3-4x)^3-4(x^3-4x)$

（5） $(g\circ g)(x)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2+1}$

（6）$(g \circ h)(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^4$

（7）$(h \circ g)(x) = \dfrac{1}{(x^4)^2+1}$

*5．设$<A,\leq>$是偏序集，对$\forall a \in A,\ f(a)=\{x \mid x \in A, x \leq a\}$，证明$f: A \to P(A)$是一个单射，且当$a \leq b$时，有$f(a) \subseteq f(b)$。

证：

由f的定义，因$x \leq x$，有$x \in f(x)$。$\forall x, y \in A$，若$f(x)=f(y)$，则有$x \in f(x)=f(y)$，即$x \leq y$。同理可证$y \leq x$。由于偏序是反自反的，有$x=y$，证得f是单射。

当$a \leq b$时，$\forall x \in f(a)$，有$x \leq a$，由于偏序是传递的，有$x \leq b$，即$x \in f(b)$，证得$f(a) \subseteq f(b)$。

6．有下述$P(N) \times P(N) \to P(N)$的函数：（N是自然数集）

$UNION(<A,B>) = A \cup B$；$INTER(<A,B>) = A \cap B$；$SYM(<A,B>) = A \oplus B$。

证明（1）它们都是满射；

（2）它们都不是单射。

证：

（1）因为$\forall A \in P(N)$，有

$UNION(<A,A>) = A \cup A = A$

$INTER(<A,A>) = A \cap A = A$

$SYM(<A,\varnothing>) = A \oplus \varnothing = A$

因此它们都是满射。

（2）因为

$UNION(<N,\varnothing>) = UNION(<\varnothing,A>)$

$INTER(<N,\varnothing>) = INTER(<\varnothing,A>)$

$SYM(<N,N>) = SYM(<A,A>) = \varnothing, A \neq N$

故都不是单射。

7．两个自然数集N到N的移位函数：$f(n)=n+1$，$g(n)=\max\{0,n-1\}$。证明：

（1）f是单射而不是满射；

（2）g是满射而不是单射；

（3）$f \circ g = I_N$，但$g \circ f \neq I_N$。

证：

（1）若$f(n)=f(m)$，则n+1=m+1，从而n=m，故f为单射。但0不存在原象，故不是满射。

（2）$\forall n \in N,\ g(n+1)=n,\ n \geq 0$，故$g$是满射，但$g$(0)=$g$(1)，故不是单射。

（3）$(f\circ g)(x)=g(f(x))=\max\{0,f(x)-1\}=\max\{0,x\}=x=I_N(x)$，故 $f\circ g=I_N$。但 $(g\circ f)(0)=f(g(0))=1=f(g(1))=(g\circ f)(1)$，故 $g\circ f$ 不是单射，从而不相等。

8．f 和 g 是 N 到 N 的函数：

$$f(n)=2n\ ；\ g(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n\text{是偶数}\\ \dfrac{n-1}{2} & n\text{是奇数}\end{cases}$$

证明：$f\circ g=I_N$，而 $g\circ f\neq I_N$。

证：

$f\circ g(n)=g(f(n))=g(2n)=n=I_N(n)$，所以 $f\circ g=I_N$ ；

$$g\circ f(n)=f(g(n))=\begin{cases}f(n/2)=n & n\text{为偶数}\\ f((n-1)/2)=n-1 & n\text{为奇数}\end{cases}\neq I_N(n)$$

所以有：$g\circ f\neq I_N$

9．设 R 为实数集，令 X 为 R 到[0,1]的函数的全体。若 $f,g\in X$，定义 $<f,g>\in S$ 当且仅当 $\forall x\in[0,1]$，$f(x)-g(x)\geq 0$，证明：S 是一个偏序，并且判断 S 是全序吗？

证：

先证 S 是一个偏序关系。

（1）因为 $\forall x\in[0,1]$，对任意 $f\in X$，有 $f(x)-f(x)=0$，故 $f\ S\ f$，即 S 在 X 上是自反的。

（2）若对 $\forall x\in[0,1]$，对 $f,g\in X$，有 $<f,g>\in S$ 且 $<g,f>\in S$，则对 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)-g(x)\geq 0$ 且 $g(x)-f(x)\geq 0$，从而 $f(x)=g(x)$，即 S 在 X 上反对称。

（3）若对因 $\forall x\in[0,1]$，有 $f,g,h\in X$，使得 $<f,g>\in S$ 且 $<g,h>\in S$，即对 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)-g(x)\geq 0$ 且 $g(x)-h(x)\geq 0$，从而 $f(x)-h(x)\geq 0$，故 $<f,h>\in S$，证得 S 在 X 上是传递的。

综上可得，S 是 X 上的偏序关系。

下面说明 S 不是全序。

例如：$f(x)=x,\ g(x)=-x+1$，因 $f(0)-g(0)=-1$，$g(1)-f(1)=-1$，故 f 与 g 是不可比的，即 S 在 X 上不是全序关系。

10．设 $f:A\to B$，定义函数 $G:B\to P(A)$，对于 $b\in B$，$G(b)=\{x\in A\mid f(x)=b\}$，证明：如果 f 是从 A 到 B 的满射，则 G 是单射，并判断其逆命题是否成立。

证：

如果 f 是从 A 到 B 的满射，则对每个 $b\in B$，至少存在一个 $x\in A$，使得 $f(x)=b$，故 G 的定义域为 B。

若有 $b_1,b_2\in B$，且 $b_1\neq b_2$，则

$G(b_1)=\{x\in A\mid f(x)=b_1\}$

$G(b_2)=\{y\in A\mid f(y)=b_2\}$

因$b_1\neq b_2$，有 $f(x)\neq f(y)$，而 f 是函数，故$x\neq y$，证得$G(b_1)\neq G(b_2)$，故G是单射。但其逆命题不成立。

例如：$A=\{a,b,c\}$， $B=\{x,y,z\}$， $f:A\to B$， $f(a)=f(b)=x$， $f(c)=y$。
$G:B\to P(A)$， $G(x)=\{a,b\}$， $G(y)=\{c\}$， $G(z)=\varnothing$。

则G是单射，但f不是满射。

11．设 f,g,h是N到N的函数，

$$f(n)=n+1\ ；\ g(n)=2n\ ；\ h(n)=\begin{cases}0 & n\text{是偶数}\\ 1 & n\text{是奇数}\end{cases}$$

试确定 （1） $f\circ f$ （2） $f\circ g$ （3） $g\circ f$ （4） $g\circ h$ （5） $h\circ g$
（6） $(f\circ g)\circ h$

解：

（1） $(f\circ f)(n)=(n+1)+1$

（2） $(f\circ g)(n)=2(n+1)$

（3） $(g\circ f)(n)=2n+1$

（4） $(g\circ h)(n)=0$

（5） $(h\circ g)(n)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ 2 & n\text{为奇数}\end{cases}$

（6） $((f\circ g)\circ h)(n)=h(g(f(n)))=h(2(n+1))=0$

12．设函数 $f:R\times R\to R\times R$， f 定义为：

$$f(<x,y>)=<x+y,x-y>$$

（1）证明 f 是单射；

（2）证明 f 是满射；

（3）求反函数 f^{-1} ；

（4）求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f$ 。

证：

（1） $\forall<x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in R\times R$，若 $f(<x_1,y_1>)=f(<x_2,y_2>)$，即 $<x_1+y_1,x_1-y_1>=<x_2+y_2,x_2-y_2>$，则$\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\ x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}$，易得 $x_1=x_2,y_1=y_2$，从而 f 是单射。

（2） $\forall<p,q>\in R\times R$，由 $f(<x,y>)=<p,q>$，通过计算可得$\begin{cases}x=(p+q)/2\\ y=(p-q)/2\end{cases}$，从而$<p,q>$的原象存在， f 是满射的。

（3）由上面的证明可知， f 存在反函数，且 $f^{-1}(<x,y>)=\left\langle\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}\right\rangle$

（4） $(f^{-1}\circ f)(<x,y>)=f\left(\left\langle \dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}\right\rangle\right)=<x,y>$

$(f\circ f)(<x,y>)=f(\langle x+y,x-y\rangle)=<(x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y)>=<2x,2y>$

13． f 和 g 是集合 $\{1,2,3,4\}$ 到其自身的函数， $f(m)=\max\{2,4-m\}$ ， $g(m)=5-m$ 。

（1）将 f 和 g 作为关系 R_f,R_g ，确定其关系矩阵。

（2）给出 $R_f\circ R_g$ 和 $R_{f\circ g}$ 的关系矩阵并作比较。

（3）给出 $\widetilde{R}_f$ 和 $\widetilde{R}_g$ 的关系矩阵，判断 $\widetilde{R}_f$ 和 $\widetilde{R}_g$ 是否是函数？

解：

（1） $M(R_f)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad M(R_g)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

（2） $M(R_f\circ R_g)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad M(R_{g\circ f})=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

（3）对应矩阵的转置即为所求。 $\widetilde{R}_f$ 不是函数， $\widetilde{R}_g$ 是函数。

14．设 R 是集合 A 上的等价关系，在什么条件下从 A 到 A/R 存在双射？

解：

当 A 是有限集合时，且 $R=I_A$ 时，存在双射。因为 R 是等价关系，任一元素的等价类中至少含有元素自身，若某个元素的等价类中除自身外还含有其他元素，则商集中元素的个数必定小于集合本身的基数，不可能存在双射。

当 A 是无限集时，若 $R=I_A$，则存在双射。在 R 不是恒等映射时，根据 R 的不同可能会有不同的结果。例如：当 R 是自然数集 N 上等价关系，其确定的划分是：$\{\{1,2\}$，$\{3,4\}$，$\{5,6\}$，…$\}$，则从 A 到 A/R 存在双射。但同样是 N 上的等价关系，当 R 是全关系时，A/R 中只有一个元素，不存在从 A 到 A/R 的双射。

15．令 $X=\{x_1,x_2,\Lambda,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,\Lambda,y_n\}$ 。问

（1）有多少个不同的由 X 到 Y 的关系？

（2）有多少个不同的由 X 到 Y 的函数？

（3）当 n，m 满足什么条件时，存在单射，且有多少个不同的单射？

（4）当 n，m 满足什么条件时，存在满射，且有多少个不同的满射？

（5）当 n，m 满足什么条件时，存在双射，且有多少个不同的双射？

解：

（1）由于从 X 到 Y 的关系是 $X\times Y$ 的子集，且 $|X\times Y|=mn$ ，而 $|P(A)|=2^{|A|}$ ，故有 2^{mn} 个不同的从 X 到 Y 的关系。

（2）由于对 X 中每个元素可以取 Y 中任一元素，即每一元素都有 n 种取法，故不同的函数共有 n^m 个。

（3）显然当$|m|\le|n|$时，存在单射。由于在 Y 中任选 m 个元素的任一全排列，都形成 X 到 Y 的不同的单射，故不同的单射有 $C_n^m \cdot m! = P_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\Lambda\cdot(n-m-1)$ 个。

（4）显然当$|n|\le|m|$时，存在满射。这一问题等价于先“把 m 个有区别的球放入 n 个相同的盒子中，要求无一空盒（这一不同的方案数记为：$S(m,n)$）”，再对这 n 个盒子进行不同的排列（假定盒子有区别），其总数为所求的满射数。即所求的不同的满射有 $S(m,n)\cdot n!$个。

说明：$S(m,n)$ 称为第二类 Stirling 数，满足下面递推公式（详见组合数学教材）：

$S(m,0)=0$；$S(m,1)=1$；$S(m,n)=nS(m-1,n)+S(m-1,n-1)$。

（5）显然当$|m|=|n|$时，存在双射。此时 Y 中元素的任一不同的全排列都形成 X 到 Y 的不同的双射，故不同的双射有 $m!$个。

16．设 $f:A\to A,\ B\subseteq A$ 为 A 的子集。试判断 $f(f^{-1}(B))$，B，$f^{-1}(f(B))$ 三者之间的包含关系。

解：

三者之间的关系是：

$f(f^{-1}(B))\subseteq B\subseteq f^{-1}(f(B))$

下面给出证明：

$\forall y\in f(f^{-1}(B))$，则 $\exists x\in f^{-1}(B)$（从而 $\exists y'\in B$，使得 $f(x)=y'$），使得 $f(x)=y$，从而有 $y=y'\in B$，证得 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$。

$\forall x\in B$，$f(x)\in f(B)$，从而有 $x\in f^{-1}(f(B))$，证得 $B\subseteq f^{-1}(f(B))$。

综上所述，有 $f(f^{-1}(B))\subseteq B\subseteq f^{-1}(f(B))$

可举例说明，上面包含关系可以是真包含。例如：

设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3\}$，$f:A\to A$，$f(1)=f(2)=1$，$f(3)=2$，则有 $f(B)=\{1,2\}$，$f^{-1}(B)=\{3\}$，$f(f^{-1}(B))=\{2\}$，$B=\{2,3\}$，$f^{-1}(f(B))=\{1,2,3\}$。三者不相等。

17．假定 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$ 是两个映射，$f\circ g$ 是一个满射，若 g 是单射，求证 f 是满射。

证法 1　对任意 $y\in Y$，因为 g 是映射，故存在 $z=g(y)\in Z$。由于 $f\circ g$ 是满射，对 $z\in Z$，存在 $x\in X$，使得 $f\circ g(x)=g(f(x))=z$。由于 g 是单射，有 $f(x)=y$。所以对任意的 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，故 f 是满射。

证法 2　假定 f 不是满射，则有 $f(X)\neq Y$。即存在 $y\in Y$，$y\notin f(X)$。又由 g 是函数，则有 $g(y)=z\in Z$，因 $f\circ g$ 是满射，故对 $z\in Z$，必存在 $x\in X$，使得 $f(x)=y'$，$g(y')=z$，而 $y'\neq y$，但 $g(y')=g(y)$，故 g 不是单射。与假设矛盾。证得 f 是满射。

18．设 $f:A\to B$，且 $A'\subseteq A$， $B'\subseteq B$，证明：

（1）如果 f 是满射，则 $f(f^{-1}(B'))=B'$；

（2）如果 f 是单射，则 $f^{-1}(f(A'))=A'$。

证：

（1）由定理 1 结论 5（或由上面习题 16）可知 $f(f^{-1}(B'))\subseteq B'$。

反过来，对 $\forall y\in B'$，因为 f 是满射，故必有 $x\in f^{-1}(B')$，使得 $f(x)=y$。因为 $x\in f^{-1}(B')$，故 $y\in f(f^{-1}(B'))$，$f(f^{-1}(B'))\supseteq B'$，证得 $f(f^{-1}(B'))=B'$。

（2）对任意 $x\in A'$， $f(x)\in f(A')$，因为 $A'\subseteq A$，故 $f(A')\subseteq B$。设 $f(A')=B'$，由 $f(x)\in B'$ 得 $x\in f^{-1}(f(A'))$，所以 $f^{-1}(f(A'))\supseteq A'$。另一方面，对任意 $x\in f^{-1}(f(A'))$，则 $f(x)\in f(A')$，在 A' 中必存在 x'，使得 $f(x)=f(x')$。因为 f 是单射，故必有 $x=x'$。即 $x\in A'$，所以 $f^{-1}(f(A'))\subseteq A'$，于是 $f^{-1}(f(A'))=A'$。

19．证明 （1） $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

（2） $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

证：

（1）设 $y\in f(A\cup B)$，则存在 $x\in A\cup B$，使得 $f(x)=y$，即 $x\in A$ 或者 $x\in B$ 时，有 $y=f(x)$。故 $f(x)\in f(A)$ 或者 $f(x)\in f(B)$，因此 $y\in f(A)\cup f(B)$，于是 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$。另一方面，对任意的 $y\in f(A)\cup f(B)$，则有 $y\in f(A)$ 或者 $y\in f(B)$，从而存在 $x\in A$，使得 $f(x)=y$ 或者存在 $x\in B$，使得 $f(x)=y$。不管是怎样的情况，都存在 $x\in A\cup B$，使得 $f(x)=y$。即 $y\in f(A\cup B)$，所以 $f(A\cup B)\supseteq f(A)\cup f(B)$。综上所述，证得 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

（2）对任意 $y\in f(A\cap B)$，存在 $x\in A\cap B$，使得 $f(x)=y$。即 $x\in A$ 且 $x\in B$，从而 $f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)$，得 $y\in f(A)\cap f(B)$。证得 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

说明：有例为证，（2）可能发生真包含。例如：$X=\{1,2\}$，$Y=\{a\}$， $f:X\to Y$，$f(1)=f(2)=a$，取 $A=\{1\}$，$B=\{2\}$，则 $A\cap B=\varnothing$，从而 $f(A\cap B)=\varnothing$，但 $f(A)\cap f(B)=\{a\}\neq\varnothing$。

20．令 $f:S\to T$，对 $A\subseteq S$， $f(A)$ 表示 A 中元素的象的集合。证明或否定下面的命题：

（1） $f(A_1)\cap f(A_2)=f(A_1\cap A_2), A_1,A_2\subseteq S$

（2） $f(A_1)-f(A_2)=f(A_1-A_2), A_1,A_2\subseteq S$

（3）若 $f(A_1)=f(A_2)$，则 $A_1=A_2$

解：

三个命题均错误，例如：$S=\{1,2\}$，$T=\{a\}$， $f=\{<1,a>,<2,a>\}$，$A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$，则有

（1） $f(A_1)\cap f(A_2)=\{a\}$，而 $f(A_1\cap A_2)=f(\varnothing)=\varnothing$

（2） $f(A_1)-f(A_2)=\{a\}-\{a\}=\varnothing$，而 $f(A_1-A_2)=f(\{1\})=\{a\}$

（3） $f(A_1)=\{a\}=f(A_2)$，但 $A_1\neq A_2$

21．（1）若 $f:T\to U$， f 是单射；$g,h:S\to T$，满足 $g\circ f=h\circ f$，证明：$g=h$。

（2）给出函数 f，g，h 的实例，$f:T\to U$，$g,h:S\to T$，$g\circ f=h\circ f$，但 $g\neq h$。

（3） $f:A\to B$， $g,h:B\to C$。给出 f 的条件，使得由 $f\circ g=f\circ h$ 可得出 $g=h$。

证：

（1） $\forall s\in S$，由条件知，$(g\circ f)(s)=(h\circ f)(s)$，即 $f(g(s))=f(h(s))$，因为 f 为单射，所以有 $g(s)=h(s)$，从而 $g=h$。

（2）例如：$S=\{1\}$， $T=\{a,b\}$， $U=\{0\}$， $f(x)=0$ ；$g(1)=a$ ；$h(1)=b$。则 $g\circ f(x)=f(g(x))=0$， $h\circ f(x)=f(h(x))=0$，但 $g\neq h$。

（3） f 为满射时，结论成立。下面证明：对任意 $b\in B$，因 f 是满射，存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$，由 $f\circ g=f\circ h$，得 $g(f(a))=h(f(a))$，即 $g(b)=h(b)$，从而 $g=h$。

22．对下列每组集合 A 和 B，构造一个从 A 到 B 的双射，以说明 A 和 B 具有相同的势。

（1）A=（0,1），B=（0,2）

（2）A=N，B= $N\times N$

（3）A=R，B=$(0,\infty)$

（4）A=$[0,1)$，B=$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

解：

（1）作双射 $f:A\to B$，使得 $f(x)=2x,\ x\in A$

（2）只需将 B 中元素按如下顺序排列：<1,1>，<1,2>，<2,1>，<1,3>，<2,2>，<3,1>，…即按两分量的和从小到大的顺序排列，当和相等的时候按第一分量从小到大的顺序排列。

（3）设 $f:A\to B$，使得 $f(x)=e^x,\ x\in R$

（4）设 $f:A\to B$，使得 $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2},x\in[0,1)$

23．以自然数为自变量的函数 $A(m,n)$定义如下：

（1） $A(0,n)=n+1$　　　　$n\geq 0$

（2） $A(m,0)$ =$A(m-1,1)$　　　　$m>0$

（3） $A(m,n)=A[m-1,A(m,n-1)]$　　$m>0$　$n>0$

求 $A(2,3)$， $A(3,2)$。

解：

由条件有：

$A(0,1)=2$　　$A(1,0)=A(0,1)=2$

$$A(1,1) = A[0, A(1,0)] = A(0,2) = 2+1 = 3$$
$$A(1,2) = A[0, A(1,1)] = A(0,3) = 3+1 = 4$$

由此进一步地归纳可得：

$$A(1,n) = n+2$$
$$A(2,0) = A(1,1) = 3$$
$$A(2,1) = A[1, A(2,0)] = A(1,3) = 3+2 = 5$$
$$A(2,2) = A[1, A(2,1)] = A(1,5) = 5+2 = 7$$
$$A(2,3) = A[1, A(2,2)] = A(1,7) = 7+2 = 9$$

进一步地归纳可得：

$$A(2,n) = 2n+3$$
$$A(3,0) = A(2,1) = 2\cdot 1+3 = 5$$
$$A(3,1) = A[2, A(3,0)] = A(2,5) = 2\cdot 5+3 = 13$$
$$A(3,2) = A[2, A(2,2)] = A(2,13) = 2\cdot 13+3 = 29$$

所以有：

$$A(2,3) = 9,\ \ A(3,2) = 29$$

第 4 章　代 数 系 统

本章简述了代数系统的基本理论，并讨论了几种典型的代数系统：半群、群、环、域等（格作为一种特殊的代数系统放在下一章讲）。主要内容包括：代数运算和代数系统的基本概念，同态与同构的定义，运算的性质，半群的定义及性质，群的定义及性质，群的基本同态与拉格郎日定理，循环群、交换群、置换群、正规子群及环、域的定义和基本性质等。下面作一简要介绍。

§4.1　内 容 分 析

§4.1.1　代数运算与代数系统

定义 1　设 S 是一非空集合，函数 $f: S^n \to S$ 称为 S 上的一个 n 元运算，简称为 n 元运算。S 及其上的若干运算 f_1, f_2, Λ, f_k 一起称为一个代数系统，记作 $(S, f_1, f_2, \Lambda, f_k)$，有些教材也将其记为 $<S, f_1, f_2, \Lambda, f_k>$。

设 f 是 S 上的一个 n 元运算，T 是 S 的一个非空子集，若对 $\forall a_1, a_2, \Lambda, a_n \in T$，恒有 $f(a_1, a_2, \Lambda, a_n) \in T$，称 T 对运算 f 是封闭的（或 f 在 T 上是封闭的）。此时 f 也是 T 上的 n 元运算。

我们常常考查集合的二元或一元运算。对一个有限集合 A，A 上的一元运算和二元运算可用列表的方式给出。这种表格称为该运算的运算表或乘法表。

通常用 $\circ, *, \cdot, \Lambda$ 等符号表示二元运算，称为算符。设 f 是 S 上的二元运算，我们简记 $f(a,b)$ 为 $a*b$（或 $a \circ b$、$a \cdot b$ 等）。下面是几个常用的定义：

如果对于任意的 $a, b \in S$ 都有 $a*b = b*a$ 成立，则称二元运算*在 S 上是可交换的或称*在 S 上满足交换律。如果对于任意的 $a, b, c \in S$，都有 $(a*b)*c = a*(b*c)$ 成立，则称二元运算*在 S 上是可结合的或称*在 S 上满足结合律。

设 e_l（或 e_r）$\in S$，如果满足：对于任意的 $a \in S$，都有 $e_l * a = a$（或 $a * e_r = a$），则称 e_l（或 e_r）是 S 中关于运算*的一个左（或右）单位元。如果 S 中的元素 e 既是左单位元又是右单位元，则称 e 是 S 上关于运算*的单位元。

设 Θ_l（或 Θ_r）$\in S$，如果满足：对于任意的 $a \in S$，都有 $\Theta_l * a = \Theta_l$（或 $a * \Theta_r = \Theta_r$），则称 Θ_l（或 Θ_r）是 S 上关于运算*的左（或右）零元。如果 S 中的元素 Θ 既是左零元又是右零元，则称 Θ 是 S 上关于运算*的零元。

设 e 是 S 中关于二元运算*的单位元。对于 $a \in S$，如果 $\exists b \in S$，使得 $b*a = e$（或 $a*b = e$），则称 b 是 a 的左（或右）逆元。如果 $b \in S$ 既是 a 的左逆元，又是 a 的右逆元，则称 b 为 a 的逆元，通常记为 a^{-1}。如果元素 a 存在有逆元，称 a 是可逆的。

若对 A 中元素 a，有 $a*a=a$，则称 a 是 A 中关于运算*的等幂元（或幂等元）。

对元素 $a\in A$，若对任意的 $x,y\in A$，都有

$$a*x=a*y\Rightarrow x=y;\quad x*a=y*a\Rightarrow x=y$$

则称 a 在 A 上关于运算*是可约元（或称可消去元）。

关于上面几个定义，有下面结论：

定理 1 设 S 是非空集合，*是 S 上的二元运算。

（1）若 S 关于运算*存在有左零元 Θ_l 和右零元 Θ_r，则有 $\Theta_l=\Theta_r=\Theta$，且 Θ 是 S 上关于运算*的惟一零元。

（2）若 S 关于运算*存在有左单位元 e_l 和右单位元 e_r，则有 $e_l=e_r=e$，且 e 是 S 上关于运算*的惟一单位元。

（3）若二元运算满足结合律，e 是单位元，则若 S 中元素 a 有左逆元 b_l 和右逆元 b_r，则 $b_l=b_r=b$，且 b 是 a 关于运算*的惟一逆元。

注意：若不满足结合律，则结论（3）不一定成立。有这样的例子，如：

表 4-1

$*$	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

表 4-2

$\circ$	a	b	c
a	c	c	a
b	b	c	b
c	a	b	c

上面运算表 4-1 中，c 是单位元，a 和 b 都是 a 的逆元，但运算不满足结合律，如：

$$(a*b)*b=c*b=b\neq a*(b*b)=a*a=c$$

运算表 4-2 中，运算也不满足结合律，如：

$$(a\circ b)\circ b=c\circ b=b\neq a\circ(b\circ b)=a\circ c=a$$

但每一个元素的逆元都是惟一的。这两个例子及定理 1 中结论（3）说明结合律成立是逆元惟一的充分而不必要的条件。

§4.1.2 同态与同构

设 $U=(A,*_1,*_2,\Lambda,*_s)$，$V=(B,\bar{*}_1,\bar{*}_2,\Lambda,\bar{*}_s)$ 是两个代数系统，若 $*_i,\bar{*}_i$ 都是 k_i 元运算，$i=1,2,\Lambda,s$，称两个代数系统是同类型的。

下面给出同态和同构的定义：

定义 2 若两个代数系统 $U=(A,\times,+)$，$V=(B,\otimes,\oplus)$ 是两个同类型的代数系统，四种运算均为二元运算。若存在映射 $h:A\to B$，满足对任意的 $a,b\in A$，有

$$h(a\times b)=h(a)\otimes h(b)$$

$h(a+b)=h(a)\oplus h(b)$

则称 h 是从 U 到 V 的一个同态映射，简称同态。$h(A)$ 称为 A 的一个同态象。

若同态映射 h 是单射，则称 h 是一个单同态；若 h 是满射，则称 h 是一个满同态；若 h 是双射，则称 h 是一个同构，这时也称 U 和 V 是同构的。

上面我们只针对两个都只具有二元运算的代数系统给出了同态的定义。实际上，也可以给出针对一元运算等的同态的定义。简单地，可以认为同态映射是保持两同类型代数系统之间运算的映射。

同态映射具有较好的性质，体现在下面定理中。

定理 2　设 $U=(A,\times,+)$ 和 $V=(B,\otimes,\oplus)$ 是两个代数系统，$\times,+,\otimes\oplus$ 都是二元运算，h 是从 U 到 V 的满同态，则

（1）若×满足结合律，则 $\otimes$ 也满足结合律；

（2）若×满足交换律，则 $\otimes$ 也满足交换律；

（3）若×对＋满足分配律，则 $\otimes$ 对 $\oplus$ 也满足分配律；

（4）若 A 对×有单位元 e，则 B 对 $\otimes$ 也有单位元 $h(e)$；

（5）若 A 对＋有零元 Θ，则 B 对 $\oplus$ 也有零元 $h(\Theta)$；

（6）若 A 中元素 a 对×有逆元 b，则 B 中元素 h（a）对 $\otimes$ 也有逆元 $h(b)$。

§4.1.3　半群和生成元

定义 3　设 G 是一个非空集合，*是 G 上的二元运算，如果*是可结合的，则称（G,*）为半群。含有单位元的半群称为独异点（或含幺半群、或幺半群、或单元半群）。

设 S 是半群，$H\subseteq S$，若 H 对 S 中的运算仍构成一个半群，则称半群 H 为 S 的子半群。

设 S 是一个含幺半群，e 是单位元，$H\subseteq S$，且 $e\in H$。若 H 对 S 的运算仍构成一个含幺半群，则称含幺半群 H 为 S 的子独异点（或子含幺半群）。

注意，含幺半群的子半群可以是含幺半群，但不一定是子含幺半群，例如：

集合{e,a}上运算*定义如表 4-3 所示。容易验证*满足结合律，e 是单位元，所以（{e,a},*）是含幺半群，（{e},*）是子含幺半群，（{a},*）也是一个含幺半群，单位元是 a，但（{a},*）只是（{e,a},*）的子半群而不是子含幺半群，因为 $e\notin\{a\}$。

表 4-3

*	e	a
e	e	a
a	a	e

定理 3　S 是一个半群，A 是 S 的非空子集，A^+ 是 S 的所有形如 $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\Lambda\ a_{i_n}$ 的元素组成的集合，其中 $a_{i_1},a_{i_2},\Lambda\ ,a_{i_n}\in A,n\in N$，$a_{i_1},a_{i_2},\Lambda\ ,a_{i_n}$ 可以相同，则 A^+ 对 S 的运算构成 S 的子半群。称 A^+ 为由 A 生成的 S 的子半群，而 A 称为半群 A^+ 的生成元集。若 $A^+=S$，则说由 A 生成半群 S。

§4.1.4　群及其性质

定义 4　设 G 是一个非空集合，*是 G 上的二元运算，如果满足下面三个条件：

（1）*满足结合律：$(a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in G$

（2）存在单位元$e \in G$：$e*a = a*e = a,\ \forall a \in G$

（3）G 中的每个元素 a 都有逆元 a^{-1}：$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e,\ \forall a \in G$

则称（G，*）为群。

当不引起混淆时，我们常把群（G,*）说成群G，把半群（G,*）说成半群G。称仅含有一个元素的群为单位元群；

运算满足交换律的称为可交换群或阿贝尔（Abel）群；

若 G 是有限集，称 G 是有限群，其元素个数$|G|$称为群的阶；否则称为无限群。

下面是几个群的例子，这些例子经常在习题中出现：

（1）$M_{n,m}$ 关于矩阵加法运算是一个交换群。其中 $M_{n,m}$ 表示 n 行 m 列矩阵的全体。

（2）设 A 是一个非空集合。PERM（A）是由从 A 到 A 的全体双射函数组成的集合，PERM（A）对映射的复合运算构成一个群，称为变换群。

（3）若 A 是一个非空有限集，含有 n 个元素，则群 PERM（A）称为 n 个文字上的对称群或 n 次对称群，简称对称群，常用 S_n 表示（S_n 的子群常称为置换群）。当 n=3 时，S_3 有 6 个元素，它是一个 6 阶群。

$S_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$，其中

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

括号内下一行是上一行元素对应的象。

（4）对集合 $N_p = \{0,1,2,\Lambda\ , p-1\}$，在其上定义运算$+_p$为：$n +_p m = (n+m) \bmod p$，则$(N_p, +_p)$构成一个群。

定义 5 对群 G，$a \in G$，若存在正整数n，使得$a^n = e$，其中e是单位元，则说a的阶是有限的；使得$a^n = e$成立的最小正整数n称为a的周期（或阶）。若不存在这样的正整数，则称a的周期是无限的。

群具有下面一些基本性质：

定理 4

（1）除单位元群外，群不含零元。

（2）群除单位元外，不含其他等幂元。

（3）对群中任意元素a,b，有

$(a^{-1})^{-1} = a$；$(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

（4）对群中任意元素a和b，方程$a*x = b$和$y*a = b$的解存在且惟一。

由此有推论：群满足消去律，即对任意元素a,b,c，

若 $a*b=a*c$，则 $b=c$
若 $b*a=c*a$，则 $b=c$

（5）在群的运算表的任一行或列中，群的每个元素必出现且只出现一次。

下面两个定理给出了一个半群为群的充分条件：

定理 5　半群（A,*）是群的充分必要条件是：对任意的 $a,b\in A$，方程 $a*x=b$ 和方程 $y*a=b$ 在 A 中均有解。

定理 6　有限半群（A,*）是群的充分必要条件是：A 中每个元素都是可约元。

关于元素的周期，有以下几个结论：

（1）设群 G 中元素 a 的周期为 n，$m\in Z$，则 $a^m=e$ 当且仅当 n 整除 m。
（2）群 G 中任意元素 a 和它的逆元 a^{-1} 的周期相同。
（3）有限群中每个元素的周期都是有限的，且不大于群的阶。

§4.1.5　子群的定义与判定

定义 6　设（G，*）是一个群，$H\subseteq G$，且 $H\neq\varnothing$，若（H,*）构成一个群，则称（H,*）为 G 的子群。

群 G 可以看成它自身的子群，异于自身的子群称为群 G 的真子群；只含单位元的子群及群 G 自身称为群 G 的平凡子群。

定理 7　群 G 的任意多个子群的交仍为 G 的子群。

下面定理给出了子集形成子群的条件：

定理 8　群 G 的非空子集 H 成为子群的充分必要条件是下列条件之一：

（1）① 若 $a,b\in H$，则 $a*b\in H$
　　② 若 $a\in H$，则 $a^{-1}\in H$
（2）若 $a,b\in H$，则 $a*b^{-1}\in H$

对有限集，只需验证运算是否封闭就够了，有下面定理：

定理 9　设 H 是群 G 的非空有限子集，则 H 是 G 的子群的充分必要条件是：H 对 G 的运算是封闭的。

定理 10　设 G 是一个群，A 是 G 的非空子集，集合 $\{a^{-1}\mid a\in A\}$ 记为 A^{-1}。$\langle A\rangle$是由 G 的形如 $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\Lambda\cdot a_{i_n}$ 的元素形成的集合。其中 $a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\Lambda\cdot a_{i_n}\in A\,\mathrm{Y}\,A^{-1},\ n\in N$，则$\langle A\rangle$对 G 中运算构成 G 的子群。称此子群为由 A 生成的子群，而 A 称为$\langle A\rangle$的生成元集。若$\langle A\rangle=G$，则说由 A 生成群 G。

也可以定义为：
若 K 是 G 的包含 S 的最小的子群，即：若 K 满足：

① K 是 G 的子群

② $S \subseteq K$

③ 若 H 是 G 的子群且 $S \subseteq H$，则 $K \subseteq H$ 称 K 是 S 生成的子群。

定义 7 设 G 是群，$a \in G$，则单个元素生成的子群<{ a }>称为 G 的循环子群，简记为 G=<a>，称 a 为 G 的生成元。若(a)=G，称 G 是由 a 生成的循环群。若群 G 能由某个元素生成，也简称 G 为循环群。或定义为：若群 G 的每个元素都是 G 中某固定元素 a 的乘方，则称 G 是循环群，a 是 G 的生成元。G 的阶与 a 的阶相等。

定理 11 每个循环群都是 Abel 群；循环群的子群是循环群。

说明：Abel 群不一定都是循环群。

§4.1.6 群的同态

定义 8 设 $(G,*)$ 和 $(T,\circ)$ 是两个群，f 是 G 到 T 的映射，若 $\forall a, b \in G$，都有 $f(a*b) = f(a) \circ f(b)$，则称 f 是 G 到 T 的同态映射。G 在 f 下的象记作 $\mathrm{Im}(f)$，即 $\mathrm{Im}(f) = f(G)$。如果同态映射 f 是满射，称 f 是 G 到 T 的满同态。如果 f 是单射，则称 f 是 G 到 T 的单同态。如果 f 是双射，则称 f 是 G 和 T 之间的同构映射，如果 G 和 T 之间存在同构映射，称 G 和 T 是同构的，记为 $G \cong T$。

关于两个群之间的同态，有下面的结论：

定理 12 若 f 是 $(G,*)$ 和 $(T,\circ)$ 之间的同态映射，则同态象 $\mathrm{Im}(f)$ 是 T 的子群且

$f(e_G) = e_T$；$(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$

其中 e_G 和 e_T 分别是群 G 和群 T 的单位元，$f(a)$ 是 $f(G)$ 中任一元素。

定理 13 令 $K = \{x \mid x \in G, f(x) = e_T\}$，则 K 是 G 的子群，并称 K 为同态 f 的核，记为 $Ker(f)$。

定理 14 群同态是单同态的充分必要条件是其核是由单位元构成的单元素集。

定理 15 （卡莱（Caylay）定理）任一群与它的变换群的子群同构。

定理 16 设 $(G,\circ)$ 是群，$(H,*)$ 是代数系统，若存在从 G 到 H 的满同态，则 $(H,*)$ 是群。

§4.1.7 陪集、正规子群、基本同态

定义 9 设 H 是 G 的子群，x 是 G 中任意元素，集合 $H \circ x = \{h \circ x \mid h \in H\}$ 称为子群 H 在 G 中关于 x 的右陪集。类似地，子群 H 在 G 中关于 x 的左陪集 $x \circ H$ 定义为：$x \circ H = \{x \circ h \mid h \in H\}$

上面的陪集也可以这样定义：

在 G 上定义等价关系：$\forall a,b \in G,\ a \sim b \Leftrightarrow \exists h \in H$，使 $a = h \circ b$（或 $a = b \circ h$），这个等

价关系给出的等价类叫做 H 的右（或左）陪集。

可以证明这两个定义是等价的。

关于陪集，有下面结论：

定理 17　设 H 是 G 的子群，则

（1）$\forall a \in G$，都有 $a \in aH$ ($a \in Ha$)

（2）$eH = H$ ($He = H$)

（3）$a \in H$ 的充分必要条件是 $aH = H$ ($Ha = H$)

（4）$b \in aH$ 的充分必要条件是 $aH = bH$ （$b \in Ha$ 的充分必要条件是 $Ha = Hb$）

（5）$aH = bH$ 的充分必要条件是 $a^{-1}b \in H$ （$Ha = Hb$ 的充分必要条件是 $ab^{-1} \in H$）

（6）$\forall a,\ b \in G$ 都有 $aH = bH$ 或者 $aH \cap bH = \varnothing$

（7）aH 中无相同元素，且与 H 的势相同。

定理 18　群的一个子群的陪集构成群的一个划分。

定理 19　设 H 是 G 的子群，$x \in G$，φ 是从 H 到 $H \circ x$ 的函数，定义为：$\varphi(x) = h \circ x$，则 φ 是一个双射。

由上面定理可以得到著名的拉格朗日（拉格郎日）定理：

定理 20　（拉格朗日定理）设 H 是有限群 G 的子群，则 $|G| = |G/H| \cdot |H|$，其中的 G/H 表示 H 的全体右陪集的集合。

由上面定理可得两个有用的推论：

推论 1　有限群 G 中每一元素的阶数（周期）都是 G 的阶数的因子。

推论 2　阶数为素数的群必是循环群。

推论 3　素数阶群只有平凡子群，而无真子群。

推论 4　设 H 是有限群 G 的子群，则 H 的阶整除 G 的阶。

定义 10　设 H 是群 G 的子群，若对任意 $x \in G$，有 $x \circ H = H \circ x$，则称 H 是 G 的正规子群（或不变子群），记作 $H < G$。此时 H 的左右陪集统称为陪集。

显然，若 G 是一个阿贝尔群，则 G 的子群都是正规子群。

定理 21　设 H 是 G 的子群，则 H 是 G 的正规子群当且仅当下面三者之一成立：

（1）$\forall a \in G$ 及 $h \in H$ 有 $aha^{-1} \in H$

（2）$\forall a \in G$ 有 $aHa^{-1} = H$

（3）$\forall a \in G$ 有 $aHa^{-1} \subseteq H$

定理 22　若 f 是从群 $(G,\circ)$ 到 $(T,*)$ 的同态映射，则

（1）同态核 $Ker(f)$ 是 G 的正规子群；

（2）对任意的 $x \in G$ 和同态核 $Ker(f)$，有 $K \circ x = \{z \mid z \in G, f(z) = f(x)\}$

定理 23　设 K 是群 $(G,\circ)$ 的正规子群，则

（1）在 G 中 K 的全体陪集的构成集合 G/K 上定义运算⊙：

$$(K\circ x)\odot(K\circ y)=K\circ(x\circ y)$$

则 G/K 在运算⊙下为群，称（G/K，⊙）为 G 对 K 的商群；

（2）映射 $\gamma:G\to G/K$，定义为：$\gamma(x)=K\circ x$，它是具有核 K 的同态映射，称为从群 G 到商群 G/K 的自然同态。

由此可得：

定理 24 （基本同态定理）设 f 是从群 $(G,\circ)$ 到 $(T,*)$ 的同态映射，K 是同态核，则商群 G/K 在 f^* 下与 $f(G)$ 同构，此处 f^* 定义为：$f^*(K\circ x)=f(x)$

这一定理表明：群 G 的任何一个同态象都与 G 的某个商群同构，因而在同构意义下，G 的同态象都是 G 的商群，这对群的性质来说自然有着重要意义。

§4.1.8 环、域

定义 11 设 A 是一个非空集合，在 A 上定义二个运算＋和 ·（分别叫作加法和乘法）。如果满足

（1）（A,＋）是一个交换群（即 Abel 群）；
（2）（A,·）是一个半群；
（3）乘法 · 对加法＋的分配律成立，即 $\forall a,b,c\in A$，

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

则称（A,＋,·）是一个环。加法的单位元称为零元，记作 0；乘号常省略，即把 $a\cdot b$ 写成 $a\ b$；也常把环（A,＋,·）简称为环。

如果环 A 的乘法有单位元，则把乘法单位元简称为环 A 的单位元，常记作 1。此时称环为含单位元环。

设（A,＋,·）是一个环，若乘法 · 是可交换的，则称环（A,＋,·）是交换环。

若存在 $a,b\in A-\{0\}$，使得 $a\cdot b=0$，则称环 A 为有零因子环，并称 a，b 为环 A 的零因子，没有零因子的环称为无零因子环。

有单位元而无零因子的交换环称为整环。

定义 12 若环（A,＋,·）含非 0 元素。满足：

（1）乘法 · 运算适合交换律，即环是一个交换环；
（2）对 A 的非 0 元素集合 $A'=A-\{0\}$，（A'，·）是一个群；

则称（A,＋,·）是一个域。

整环也可以这样定义：

定义 13 若环（A,＋,·）满足：

（1）运算“·”适合交换律，即环（A,＋,·）是一个交换环；
（2）运算“·”有单位元，即（A,＋,·）是一个有单位元环；
（3）适合消去律，即对任意的 $a,b,c\in A, a\neq 0$，若 $a\cdot b=a\cdot c$（或 $b\cdot a=c\cdot a$），则必有 $b=c$；则称（A,＋,·）是一个整环。

可以证明，域一定是整环，一个有限整环也必定是一个域。

§4.2　重点及难点解析

§4.2.1　基本要求

1．掌握代数系统的概念，对几个定义：运算的封闭性、单位元、零元、逆元、等幂元及相关的结论有清晰的理解。给定集合和集合上的运算，能够判断该集合对运算是否封闭，能够通过运算表确定单位元、零元、逆元等（如果存在的话）。对交换律、结合律、分配律、吸收律等的表示要十分清楚。给定集合及二元运算表，能够判断运算是否满足交换律，是否满足结合律。
2．掌握代数系统的同态与同构的定义。能判断两个给定代数系统间的某个映射是否为同态、同构映射。
3．掌握半群及独异点等概念。
4．掌握群的概念，并能灵活运用群的一些基本性质，理解群的同态与同构。给定一个代数系统及其运算，能够判断是否为半群、、独异点、群等。
5．掌握子群的概念并清楚其判别方法。
6．掌握左陪集、右陪集及正规子群的定义，了解拉格朗日定理。
7．掌握环及整环的定义。给定集合及两个二元运算，能够判断其是否为环、域、整环等。

§4.2.2　疑难点解析

1．运算的封闭性是成为一个代数系统的前提；一般要验证或证明某个代数系统是一个半群或群，首先得说明运算是封闭的。
2．对运算满足结合律，特别是当给出的是运算表时，我们没有统一的证明方法，只能靠验证来说明。但对具体的题，可以通过对称或单位元等简化计算。例如：对表 4-4 中乘法所确定的代数系统 G，验证它是一个群。我们这里只讨论运算满足结合律问题。

表 4-4

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

根据乘法表验证结合律通常是非常麻烦的。对于 n 个元素的运算表来说，要验证 3^n 个等式。但对于本题，注意到 a 是单位元，知 $\forall x,y,z\in G$，只要其中有一个 a，则等式 $(x*y)*z=x*(y*z)$ 成立，于是还剩下 8 个（仅含 b 和 c 的）等式须验证：

① $(b*b)*b=b*(b*b)$　　② $(b*b)*c=b*(b*c)$
③ $(b*c)*b=b*(c*b)$　　④ $(c*b)*b=c*(b*b)$
⑤ $(c*c)*b=c*(c*b)$　　⑥ $(c*b)*c=c*(b*c)$
⑦ $(b*c)*c=b*(c*c)$　　⑧ $(c*c)*c=c*(c*c)$

注意乘法表关于对角线对称，可知运算是可交换的。第①、③、⑥、⑧式可直接由交换律得到。以第③式为例：$(b*c)*b=b*(b*c)=b*(c*b)$。第④式可由交换律和第②式推出：

$$
\begin{aligned}
(c*b)*b &= b*(c*b) && \text{交换律}\\
&= b*(b*c) && \text{交换律}\\
&= (b*b)*c && \text{第②式}\\
&= c*(b*b) && \text{交换律}
\end{aligned}
$$

类似地，第⑤式可由交换律和第⑦式推出。于是，只剩下第②式和第⑦式。它们可由乘法表直接验证。以第②式为例：$(b*b)*c=c*c=b$，$b*(b*c)=b*a=b$，两者相等，从而得证结合律成立。

又例：表 4-5 所确定的代数系统，要验证是群。要验证运算满足结合律，共有 $4^3=64$ 个等式 $(x*y)*z=x*(y*z)$ 需要验证。如果直接一一验证，并不困难，但却十分繁重而无味。注意到 e 是单位元，故等式中只要含有 e 的就一定成立。又注意到 $a\ b=a*b=b*a$，如果对包含 a 和 b 的等式都成立，则对包含 a、b 和 $a\ b$ 的等式也都一定成立。因此，只剩下需要验证包含 a 和 b 的等式，这样的等式只有 8 个，再注意运算是可交换的，可借助于上例进一步减少验证的工作量。

表 4-5

*	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

3．对群的定义及性质（定理 4）要很清楚，做到能够熟练应用。经常容易出现这样的题目，要证明某个代数系统是群，或论证群的某些性质，判断某些结论是否成立。

4．子群的定义及判定，一般用的是定理 6，对有限集合，只需验证对运算是否封闭就够了。

5．陪集及所确定的等价关系，拉格朗日定理及其推论，经常用来论证某些结论。

6．同态与同构的判断。这是整个代数系统的一个重要内容，若映射保持两个代数系统的所有运算，则是同态映射，若还是双射，则为同构。

7．关于环和整环、域的定义，要清楚它们之间的异同。

§4.3　基　本　题

§4.3.1　选择题

*1．设 $S=\{a,b\}$，则 S 上总共可定义的二元运算的个数是（　　）。

A．4　　B．8　　C．16　　D．32

答案：C

2．设集合 $A=\{1,2,3,\Lambda ,10\}$，下面定义的哪种运算关于集合 A 是不封闭的？（　　）

A．$x*y=\max\{x,y\}$

B．$x*y=\min\{x,y\}$

C．$x*y=\mathrm{GCD}(x,y)$，即 x,y 的最大公约数

D．$x*y=\mathrm{LCM}(x,y)$，即 x,y 的最小公倍数

答案：D

3．在自然数集 N 上，下列哪种运算是可结合的？（　　）

A．$a*b=a-b$　　B．$a*b=\max\{a,b\}$　　C．$a*b=a+2b$　　D．$a*b=|a-b|$

答案：B

4．对自然数集 N，下列哪种运算不是可结合的？（　　）

A．$a*b=a+b+3$　　B．$a*b=\min\{a,b\}$

C．$a*b=a+2b$　　D．$a*b=a\cdot b \pmod 3$

答案：C

5．下列运算中，哪种运算关于整数集不能构成半群？（　　）

A．$a\circ b=\max\{a,b\}$　　B．$a\circ b=b$

C．$a\circ b=2ab$　　D．$a\circ b=|a-b|$

答案：D

6．*运算如下表所示，哪个能使 $(\{a,b\},*)$ 成为独异点？（　　）

A．

*	a	b
a	a	b
b	a	b

B．

*	a	b
a	a	a
b	b	b

C．

*	a	b
a	a	a
b	a	a

D．

*	a	b
a	a	b
b	b	a

答案：D

7．Q 是有理集，（Q，*）（其中*为普通乘法）不能构成（　　）。

A．群　　B．独异点　　C．半群　　D．交换半群

答案：A

8．R 为实数集，运算*定义为：$a,b \in R,\ a*b=a\cdot|b|$，则代数系统 $(R,*)$ 是（　　）。

A．半群　　B．独异点　　C．群　　D．阿贝尔群

答案：A

*9．下列代数系统 $(S,*)$ 中，哪个是群？（　　）

A．S={0,1,3,5}，$*$ 是模 7 加法
B．S=Q（有理数集合），$*$ 是一般乘法
C．S=Z（整数集合），$*$ 是一般减法
D．S={1,3,4,5,9}，$*$ 是模 11 乘法

答案：D

10．具有如下定义的代数系统（G,*），哪个不构成群？（　　）

A．G={1,10}，*是模 11 乘法
B．G={1,3,4,5,9}，*是模 11 乘法
C．G=Q，*是普通加法
D．G=Q，*是普通乘法

答案：D

*11．设 x,y 是群 $(G,*)$ 的任意两个元素，n 是大于 0 的整数，x^n 表示 n 个 x 进行乘法运算，则下述等式中哪个不成立？（　　）

A．$(x*y)^n=x^n*y^n$
B．$(x*y)^{n+1}=x*(y*x)^n*y$
C．$y*(x*y)^n=(y*x)^n*y$
D．$(x*y)^n*x=x*(y*x)^n$

答案：A

*12．任何一个有限群在同构的意义下可以看作是（　　）。

A．循环群　　B．置换群　　C．变换群　　D．阿贝尔群

答案：B

13．设 H，K 是群$(G,\circ)$ 的子群，下面哪个代数系统仍是$(G,\circ)$ 的子群？（　　）

A．$(HK,\circ)$　　B．$(H \cap K,\circ)$　　C．$(K-H,\circ)$　　D．$(H-K,\circ)$

答案：B

14．任意一个具有多个等幂元的半群，它（　　　　）。

A．不能构成群　　B．不一定能构成群
C．必能构成群　　D．能构成交换群

答案：A

*15．设 Z 是整数集合，＋是一般加法，则下述函数中哪一个不是群（Z,+）的自同态?（　　）

A．$f(x)=2x$　　B．$f(x)=1000x$　　C．$f(x)=|x|$　　D．$f(x)=0$

答案：C

16．群（R,＋）与（$R-\{0\},\times$）之间的关系是（　　）。

A．同态　　B．同构　　C．后者是前者的子群　　D．B，C 均正确

答案：A

17．若（H,*）是（G,*）的真子群，且$|H|=n$，$|G|=m$，则有（　　）。

A．n 整除 m　　B．m 整除 n
C．n 整除 m 且 m 整除 n　　D．n 不整除 m 且 m 不整除 n

答案：A

*18．6 阶群的任何非平凡子群一定不是（　　）。

A．2 阶　　B．3 阶　　C．4 阶　　D．6 阶

答案：C

19．设 Z 是整数集，＋，· 分别是普通加法和乘法，则（Z，＋，·）是（　　　）。

A．域　　B．整环和域　　C．整环　　D．含零因子环

答案：C

20．下面哪个集合关于指定的运算构成环？（　　）

A．$\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in Z\}$，关于数的加法和乘法
B．{n 阶实数矩阵}，关于矩阵的加法和乘法
C．$\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Z\}$，关于数的加法和乘法
D．$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\middle| a,b\in Z\right\}$，关于矩阵的加法和乘法

答案：C

*21．+，· 为一般的加法和乘法，则下述代数系统$<S,+,\cdot>$中哪一个是整环？（　　）

A．$S=\{x\mid x=a+b\sqrt{3},a,b\in Q\}$

B．$S=\{x \mid x\in Z且\mid x\mid有非1因子\}\cup\{1\}$
C．$S=\{x \mid x=2n, n\in Z\}$
D．$S=\{x \mid x=2n+1, n\in Z\}$

答案：A

22．在代数系统中，整环和域的关系为（　　　　）。

A．整环一定是域　　　　　　B．域不一定是整环
C．域一定是整环　　　　　　D．域一定不是整环

答案：C

§4.3.2　填空题

*1．集合 $A=\{a, b, c\}$上总共可定义的二元运算的个数为_____。

答案：3^9

2．设 S 是非空有限集，代数系统$(P(A), \cup, \cap)$中，$P(S)$ 对 $\cup$ 运算的单位元是__①__，零元是__②__，$P(S)$ 对 $\cap$ 运算的单位元是__③__。

答案：① $\varnothing$　　② S　　③ S

3．设（S，*）是代数系统，其中 $S=\{a, b, c\}$，*定义如表 4-6 所示，则（S，*）__①__半群，（S，*）__②__独异点，因为__③__。

表 4-6

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

答案：① 不是　　② 不是　　③ *不可结合

4．在运算表 4-7 中空白处填入适当符号，使$(\{a,b,c\},\circ)$成为群。

答案：①c　　②b　　③b　　④a

表 4-7

$\circ$	a	b	c
a	__	a	__
b	a	b	c
c	__	c	__

5．（G,*）是群，$B\subseteq G$，且 B 是有限集，（B,*）是 G 的子群当且仅当_____。

答案：$\forall a,b\in B, a*b\in B$　　或 B 对运算封闭

6．设（G,*）是非零实数乘法群，$f:G\to G$ 是同态映射，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(G)=$__①__，$Ker(f)=$__②__。

答案：① G　　② $\{1\}$

7．设 $H=\{0,4,8\}$，$(H,+_{12})$是群$(N_{12},+_{12})$的子群，其中 $N_{12}=\{0,1,2,\ldots,11\}$，$+_{12}$是模 12 加法，则$(N_{12},+_{12})$有__①__个真子群，$H$ 的左陪集 $3H$=__②__，$4H$=__③__。

答案：① 3　　② {3,7,11}　　③ {4,8,0}

8．任意一个无限群有______个子群。

答案：无穷多

9．设 G={1,5,7,11}，（G,*）为群，其中*为模 12 乘法，则 5 的阶（周期）为__①__，（G,*）有__②__个真子群。

答案：① 2　　　② 4

§4.3.3　判断题

1. 设（N, *）是代数系统，其中 N 为自然数集，*为二元运算，定义为：对任何的 $a,b\in N$，有 $a*b=a$，则*是可结合的。（　）　答案：√

2．在一个代数系统中，若一个元素的逆元是惟一的，则运算必定是可结合的。（　）　答案：×

3．设*是 S 上的可结合运算，若 $a\in S$ 是可逆的，则 a 也是可约的。（　）　答案：√

4．设*是 S 上的可结合运算，若 $a\in S$ 是可约的，则 a 也是可逆的。（　）　答案：×

说明：参见习题 9

5．设 $(A,\circ,*)$ 是一个代数系统，对于任意的 $a,b\in A$，有 $a\circ b=a$，而*是 A 上的任意二元运算，则*对 $\circ$ 不一定是可分配的。（　）　答案：×

*6．若半群有左单位元，则左单位元惟一。（　）　答案：×

7．$(S,*)$ 是独异点，$a,b\in S$，且 a , b 均有逆元，则 $(a*b)^{-1}=a^{-1}*b^{-1}$。（　）　答案：×

8．$(S,*)$ 是可交换独异点，$T=\{x\mid x\in S, x*x=x\}$，则 T 也是独异点。（　）　答案：√

9．有单位元且适合消去律的有限半群一定是群。（　）　答案：√

10．（G,*）是独异点，e 是单位元，若对任意的 $a\in G$，有 $a*a=e$，则（G,*）是 Abel 群。（　）　答案：√

11．设 $(G,*)$ 是一个半群，若存在单位元且每个元素都有右逆元，则 $(G,*)$ 是群。（　）　答案：√

说明：只需说明每一个元素均存在逆元。$\forall a\in G$，设 b 为 a 的右逆元，即 $a*b=e$。对 $b\in G$，设 c 为其右逆元，即 $b*c=e$，因运算满足结合律，有

$$a=a*e=a*(b*c)=(a*b)*c=e*c=c$$

即 $a=c$，从而有 $a*b=b*a=e$，b 为 a 的逆元，因运算满足结合律，逆元若存在则惟一，故每一个元素的逆元均存在。

12．一个群可以有多个等幂元。（　）　答案：×

13．任何一个 Abel 群不一定是循环群。（　）　答案：√

14．设 $G=\{2^m3^n\mid m,n\in Z\}$，×是普通乘法，则 $(G,\times)$ 不一定是群。（　）　答案：×

15．设 G 是循环群，G 同构于 H，则 H 也是循环群。（　）　答案：√

*16．非循环群的每一个子群必是非循环群。（ ） 答案：×

*17．4 阶群中必有 4 阶元。（ ） 答案：×

*18．若 H，K 是群 G 的子群，则 $H \cup K$ 也是 G 的子群。（ ） 答案：×

19．设（$G,+$）是一个交换群，E 是 G 的全体自同态构成的集合，对 $f,g \in E$，令 $(f+g)(x)=f(x)+g(x), \forall x \in G$，则（$E,+$）不是一个交换群。（ ） 答案：×

20．任一群都同构于变换群。（ ） 答案：√

21．设 G 是一群，令 $f(x)=x^{-1}$，对任一 $x \in G$，f 是 G 的自同构当且仅当 G 是交换群。（ ） 答案：√

*22．f 是群 G 到群 H 的同态映射，若 G 是交换群，则 H 也是交换群。（ ）
答案：×

23．在代数系统中域一定是整环。（ ） 答案：√

24．设 $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in Z\right\}$，则 A 关于矩阵的加法和乘法构成一整环。（ ）
答案：√

§4.4 习 题 解 析

1．按下面的条件，给出尽可能简单的代数系统实例。给出的代数系统含有一个二元运算。运算可用运算表定义：

① 有单位元；
② 有零元；
③ 同时有单位元和零元，代数系统有多于 1 个元素；
④ 有单位元，但无零元；
⑤ 有零元但无单位元；
⑥ 运算不可交换；
⑦ 运算不可结合；
⑧ 有左零元，无右零元；
⑨ 有右单位元，无左单位元；
⑩ 有单位元，每个元素有逆元。

解：

给出的例子如下所示：

①，②，⑩

*	a
a	a

③

*	0	1
0	0	0
1	0	1

④

*	a	b
a	a	b
b	b	a

⑤

*	a	b
a	a	a
b	a	a

⑥，⑦$b*(a*b)\neq(b*a)*b$

*	a	b
a	a	b
b	a	a

⑧ 0,1 均为左零元

*	0	1
0	0	0
1	1	1

⑨ 1 为右单位元

*	0	1
0	1	0
1	1	1

2．设代数系统（A,*），其中 $A=\{a,b,c,d\}$，*如乘法表 4-8 定义。问*是否是可交换的；A 是否有单位元；如果有单位元，指出哪些元素是可逆的，并给出它们的逆元。

解：

一个有限代数系统的运算是可交换的充要条件是其乘法表关于对角线对称。

如果表中的最左列的某个元素所对应的行与最上一行相同，则该元素是 A 的左单位元。如果表中最上一行的某个元素所对应的列与表中最左的一列相同，则该元素是右单位元。而既是左单位元又是右单位元的元素一定是 A 的单位元。

表 4-8

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

（1）

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	d	d	c	c

（2）

对表（1），可知*是可交换的。不难看出，a 是单位元。进一步可知，a、b、c、d 均是可逆的，且 $a^{-1}=a;\ b^{-1}=d;\ c^{-1}=c;\ d^{-1}=b$。

对表（2），可知*是不可交换的。不难看出，b 是单位元。b 可逆，且 $b^{-1}=b$，a、c、d 均不可逆。

3．根据下列集合 G 及集合上的运算，问它们是否构成半群、含幺半群、群。如果是含幺半群或群，指出它们的单位元是什么？

（1）$G=N,\ x*y=\min\{x,y\}$

（2）$G=R,\ x*y=(x+y)^2$

（3）$G=\{a\sqrt{2}\mid a\in N\}$，*是普通乘法

（4）$G=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Z\}$，*是普通乘法

（5）$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| x\in Z\right\}$，*是矩阵乘法

解：

是否构成半群或群首先要判断运算是否可结合。易验证（2）是不可结合的，从而不是半群，因为：

$(x*y)*z=((x*y)+z)^2=((x+y)^2+z)^2$，而 $x*(y*z)=(x+(y+z)^2)^2$。其他运算是可结合的。

对（1），存在单位元 1，但不是每个元素均存在逆元，故是含幺半群。

对（3），不存在单位元，故是半群。

对（4），存在单位元 1，但不是每个元素均存在逆元，故是含幺半群。（可以验证）

对（5），存在单位元$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，且 $\forall\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$，有

$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

故每个元素$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$，存在逆元$\begin{pmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。是群。

4．有理数集 Q 中的*定义如下：

$a*b=a+b-ab$

（1）（Q,*）是半群吗？是可交换的吗？

（2）求单位元。

（3）Q 中是否有可逆元？若有，指出哪些是可逆元？并指出逆元是什么？

解：

（1）$\forall a,b,c\in Q$，因 $a*(b*c)=a*(b+c-bc)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$

$=a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$(a*b)*c=(a+b-ab)*c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$

$=a+b+c-ab-bc-ca+abc$

所以 $a*(b*c)=(a*b)*c$，（Q,*）是半群。因 $a*b=b*a$，$\forall a,b\in Q$，故*是可交换的。

（2）设 e 为其单位元，则应有：$\forall a\in Q$，$a*e=e*a=a$，即 $a+e-ae=a$，由 a 的任意性，有 e=0。所以单位元为 0。

（3）设 a 有逆元 b，则应有：$a*b=a+b-ab=0$，所以当 $a\neq 1$ 时，有逆元，其逆元为：$a^{-1}=\dfrac{a}{a-1}$，当 a=1 时，没有逆元。

5．设 A 是一个非空集合，定义 $\circ$：$a\circ b=a,\forall a,b\in A$

试证明 $(A,\circ)$ 是一个半群。

证：

显然$\circ$是A上二元运算。对于任意的$a,b,c\in A$，由

$$(a\circ b)\circ c=a\circ c=a$$
$$a\circ(b\circ c)=a\circ b=a$$

恒有：$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

即结合律成立，故$(A,\circ)$是一个半群。

6．设（S,*）是一个半群，$a\in S$，在S上定义$\circ$如下：$x\circ y=x*a*y,\forall x,y\in S$
证明$(S,\circ)$也是一个半群。

证：

显然$\circ$是S上二元运算。对于任意的$x,y,z\in S$，有

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z&=(x\circ y)*a*z=(x*a*y)*a*z=x*a*(y*a*z)\\&=x*a*(y\circ z)=x\circ(y\circ z)\end{aligned}$$

$\circ$是可结合的，故$(S,\circ)$也是一个半群。

7．设（S,*）是一个半群，如果对所有的$a,b\in S$，只要$a\neq b$，必有$a*b\neq b*a$，证明

（1）$\forall a\in S$，有$a*a=a$

（2）$\forall a,b\in S$，有$a*b*a=a$

（3）$\forall a,b,c\in S$，有$a*b*c=a*c$

证：

由题设，对所有的$a,b\in S$，只要$a*b=b*a$，必有$a=b$；

（1）$\forall a\in S$，$(a*a)*a=a*(a*a)\Rightarrow a*a=a$

（2）$\forall a,b\in S$，由（1）有

$$(a*b*a)*a=a*b*(a*a)=a*b*a$$
$$a*(a*b*a)=(a*a)*b*a=a*b*a$$
$$\Rightarrow\quad(a*b*a)*a=a*(a*b*a)$$
$$\Rightarrow\quad a*b*a=a$$

（3）$\forall a,b,c\in S$，由（2）有

$$(a*b*c)*(a*c)=a*b*(c*a*c)=a*b*c$$
$$(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*b*c=a*b*c$$
$$\Rightarrow\quad(a*b*c)*(a*c)=(a*c)*(a*b*c)$$
$$\Rightarrow\quad a*b*c=a*c$$

*8．设代数系统$(A,\cdot)$是一个有限的半群，证明A中必存在某个元素a，使得$a\cdot a=a$。

证：

对任意$x\in A$，$x^2,x^3,x^4,\Lambda,x^n,\Lambda$ 均在A中，由于A中有限的，存在$i<j$，使得$x^i=x^j$，则有$x^j=x^{j-i}\cdot x^i$，取$p=j-i\geqslant 1$，对任意的$q>$i，

$$x^q=x^{q-i}\cdot x^i=x^{q-i}\cdot x^j=x^{q-i}\cdot(x^p\cdot x^i)=x^p\cdot x^q$$

由于 $p \geqslant 1$，存在 k，使得 $kp \geq i$，从而

$$x^{kp} = x^p \cdot x^{kp} = x^p \cdot (x^p \cdot x^{kp}) = x^{2p} \cdot x^{kp} = x^{2p} \cdot (x^p \cdot x^{kp}) = \cdots = x^{kp} \cdot x^{kp}$$

取 $a = x^{kp}$，则有 $a \cdot a = a$。

*9．试证：设*为集合 X 中可结合的二元运算，若 $a \in X$ 对*可逆，则 a 可约，反之不成立。

证：

设存在 b，使得 $a*b = b*a = e$，若对任意的 $x, y \in X$，使得 $a*x = a*y$，等式两边同时左乘 b，有 $b*(a*x) = b*(a*y)$，由于运算是可结合的，有 $(b*a)*x = (b*a)*y$，即 $e*x=e*y$，有 $x=y$，即 a 可约。

反之，不成立，例如：对于自然数集 N 及其上的普通乘法*，显然满足：对任一元素 $a \in N$，a 是可约的，但 a 不可逆。

10．试给出（Z,+）的下列子半群。

（1）$\{1\}^+$　　（2）$\{0\}^+$　　（3）$\{-1,2\}^+$；

（4）Z^+　　（5）$\{2,3\}^+$　　（6）$\{6\}^+ \cap \{9\}^+$

解：

（1）$\{1\}^+ = N$（自然数集）

（2）$\{0\}^+ = \{0\}$

（3）$\{-1,2\}^+ = Z$

（4）$Z^+ = Z$

（5）$\{2,3\}^+ = \{2,3,4,\cdots\}$

（6）$\{6\}^+ \cap \{9\}^+ = \{18\}^+ = \{18,36,54,72,\cdots\} = 18N$（自然数集）

11．列出下面的 $(M_{3,3},\times)$ 的有限子半群的元素：

（1）$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}^+$　　（2）$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}^+$　　（3）$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}^+$

解：

直接验证可知：其中的元素为：

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

说明：由定理 3 可知，由生成半群的定义，求 A^+，只需求出集合中元素的所有可能运算的结果（包括中间结果）即可。一般这种题产生的元素并不多。

12．下列集合关于指定的运算是否构成群？

（1）给定 $a>0$，且 $a\neq 1$，集合 $G=\{a^n \mid n\in Z\}$，关于数的乘法；
（2）非负整数集 P，关于数的加法；
（3）正有理数集 Q^+，关于数的乘法；
（4）整数集 Z，关于数的减法；
（5）给定正整数 n，集合 $U_n=\{z \mid z\in C, z^n=1\}$，关于数的乘法；
（6）$U=\{z \mid z\in C, z^n=1, n\in Z^+\}$，关于数的乘法；
（7）正实数集 R^+，关于数的除法；
（8）一元实系数多项式集合，关于多项式加法；
（9）一元实系数多项式集合，关于多项式乘法；
（10）n 维线性空间，关于向量加法。

解：

（1）是。
（2）不是。因为当 $n>0$ 时，n 在 N 中无逆元。
（3）是。
（4）不是。结合律不成立。
（5）是。
（6）是。
（7）不是。结合律不成立。
（8）是。
（9）不是。除零次多项式外，均没有逆元。
（10）是。

13．设 a 是群 $(G,\circ)$ 的等幂元，则 a 一定是单位元。

证：

由条件有 $a\circ a=a$，因 G 是群，任一元素有逆元。等式两边同乘 a 的逆元，有 $a^{-1}\circ(a\circ a)=a^{-1}\circ a$。由于运算可结合，得

$$a=e\circ a=(a^{-1}\circ a)\circ a=a^{-1}\circ(a\circ a)=a^{-1}\circ a=e$$

即 a 一定是单位元。

14．有单位元且适合消去律的有限半群一定是群。

证：

设 G 是一个有单位元且适合消去律的有限半群，要证 G 是一群。为此，只需证明

G 的任一元 a 可逆。

考虑 $a,a^2\cdots a^k\cdots$ 因为只有有限个元素，故存在 $k>l$，使得 $a^l=a^k$。令 $m=k-l$，有 $a^l\circ e=a^l\circ a^m$，其中 e 是单位元。同消去律，得 $a^m=e$。

于是，当 m=1 时，$a=e$，而 e 是可逆的；当 e>1 时，$a\circ a^{m-1}=a^{m-1}\circ a=e$。从而，$a$ 是可逆的，其逆元是 a^{m-1}。总之，a 是可逆的。

*15．设 G 是一有限集合。在 G 上定义了乘法运算，对 $a,b,c\in G$，满足

（1）$a(bc)=(ab)c$

（2）$ab=ac\Rightarrow b=c$

（3）$ac=bc\Rightarrow a=b$

证明 G 在这个乘法下成一群。

证：

设 $G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。对 $a\in G$，记 $G'=\{aa_1,aa_2,\cdots,aa_n\}$，由运算的封闭性，可知 $G'\subseteq G$。由条件（2）可知，$i\neq j$ 时，$aa_i\neq aa_j$，从而 G' 中元素互不相同，含有 n 个元素，即有 $G'=G$，因此对 G 中任意元素 b，存在 G' 中惟一元素 aa_k，使得 $aa_k=b$，即 a_k 是方程 $ay=b$ 的惟一解，同理可证 $xa=b$ 有惟一解。

由定理可知，G 为群。

*16．设 G 是一代数系统，运算满足交换、结合律，并由 $a\cdot x=a\cdot y$ 可推出 $x=y$。证明若 G 有限，则 G 是一群。

证：

此题与上题差不多，只是用满足交换律代替了左右可约去律，实质上是一样的。

本题的证明略去。只补证上题中“若两个方程均有惟一解，则为群”的结论：

只需验证代数系统 G 存在单位元，每个元素有逆元即可。事实上，若方程 $ax=a$ 有惟一解设为 e，则对任意 $g\in G$，因 $xa=g$ 有惟一解。故 $ge=(xa)e=x(ae)=xa=g$，说明 e 是右单位元，同理可证 e 是左单位元。

因方程 $ax=e$ 有惟一解，故 a 存在右逆元，同理可证 a 存在左逆元。

综上所述，G 为群。

17．设 G 表示有理数集 Q 到 Q 的线性变换 $f_{a,b}(x)=ax+b,a\neq 0,a,b\in Q$ 构成的集合。试证明 G 关于变换的复合构成群。

证：

由于变换的复合是可结合的，恒等变换是单位元。这里只需证明复合运算在 G 上是封闭的，且 G 有单位元，G 中每个元素有逆元。

事实上，$\forall a,b,c,d\in Q$，且 $a,c\neq 0$，对于任意的 $x\in Q$，有

$(f_{c,d}\circ f_{a,b})(x)=f_{a,b}(cx+d)=a(cx+d)+b=acx+ad+b$

又 $ac\neq 0$，$ac,ad+b\in Q$，得 $f_{c,d}\circ f_{a,b}=f_{ac,ad+b}\in G$，故运算 $\circ$ 在 G 上是封闭的。

恒等变换 $I=f_{1,0}\in G$，从而 G 有单位元 I。

$\forall f_{a,b}\in G,a\neq 0,a,b\in Q$，取 $f_{a^{-1},-a^{-1}b}\in G$，有

$f_{a,b} \circ f_{a^{-1},-a^{-1}b} = f_{aa^{-1},-aa^{-1}b+b} = f_{1,0}$

$f_{a^{-1},-a^{-1}b} \circ f_{a,b} = f_{a^{-1}a,a^{-1}b-a^{-1}b} = f_{1,0}$

故 $f_{a,b}$ 可逆，且 $f_{a,b}^{-1} = f_{a^{-1},-a^{-1}b}$。得证（$G,\circ$）是一个群。

18．设（A,*）是一个群，对每个元素 $a \in A$，作映射 σ_a： $\sigma_a(x) = a * x, \forall x \in A$
记 $G = \{\sigma_a \mid a \in A\}$，证明 G 关于映射的复合构成一个群。

证：

因 A 非空，G 也非空。且映射的复合是满足结合律的，恒等映射是其单位元。
因 $\forall x \in A$，$(\sigma_a \circ \sigma_b)(x) = \sigma_b(\sigma_a(x)) = b*(a*x) = (b*a)*x = \sigma_{b*a}(x)$，故 $\forall a,b \in A$，
有 $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{b*a}$，因此映射复合对 G 是封闭的。
设 e 是 A 的单位元，则 $\sigma_e(x) = e*x = x$，σ_e 是恒等映射，从而是 G 的单位元。事实上，$\forall a \in A$，$\sigma_a \circ \sigma_e = \sigma_{e*a} = \sigma_a$，$\sigma_e \circ \sigma_a = \sigma_{a*e} = \sigma_a$
$\forall a \in A$，$\sigma_{a^{-1}}$ 是 σ_a 的逆元。事实上，$\sigma_a \circ \sigma_{a^{-1}} = \sigma_{a^{-1}*a} = \sigma_e$，$\sigma_{a^{-1}} \circ \sigma_a = \sigma_{a*a^{-1}} = \sigma_e$，
从而 G 是群。

19．设 G 是一群，$a,b,c \in G$。证明

$xaxba = xbc$

在 G 中有且仅有一个解。

证：

对等式两边同时左乘 x^{-1}，有 $axba = bc$，再在等式两边同时左乘 a^{-1}，右乘 $a^{-1}b^{-1}$，有

$x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$

故方程存在解。
再证惟一性。若方程存在两解，设为 x, y，即有 $axba = bc = ayba$，由于 G 是群，满足消去律，有 $xba = yba$，再次利用消去律，有 $x = y$。故解是惟一的。

20．设 G 是一群，$a,b \in G$ 且 $(ab)^2 = a^2b^2$。证明 $ab = ba$

证：

由条件，有 $(ab)(ab) = (aa)(bb)$，由于是群，运算满足结合律和消去律，有 $a(ba)b = a(ab)b$，故 $ab = ba$。

*21．设 G 是一群，求证：对于 G 中任意 u,v,w,x 和 u_1,v_1,w_1,x_1，如果 $uw = u_1w_1$，$vw = v_1w_1$，$ux = u_1x_1$，则有 $vx = v_1x_1$。

证：

由条件，有 $(uw)^{-1} = (u_1w_1)^{-1}$，即 $w^{-1}u^{-1} = w_1^{-1}u_1^{-1}$
另一方面，$vx = vww^{-1}u^{-1}ux = (vw)(w^{-1}u^{-1})(ux)$
有：$vx = (v_1w_1)(w_1^{-1}u_1^{-1})(u_1x_1) = v_1(w_1w_1^{-1})(u_1^{-1}u_1)x_1 = v_1x_1$

22．设（G,*）是一群，$x \in G$。定义：$a \circ b = a * x * b, \forall a,b \in G$
证明（G,o）也是一群。

证：

显然o*是 G 上的二元运算，要证 G 是群，需证结合律成立，同时有单位元，每个元素有逆元。

$\forall a,b,c \in G$，有

$(a \circ b) \circ c = (a * x * b) * x * c = a * x * (b * x * c) = a \circ (b \circ c)$

运算是可结合的。

其次，x^{-1}是（G,o）的单位元。事实上，$\forall a \in G$，有

$a \circ x^{-1} = a * x * x^{-1} = a$；$x^{-1} \circ a = x^{-1} * x * a = a$

最后证明，$\forall a \in G$，$x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}$是a在（G,o）中的逆元。事实上，

$a \circ (x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) = a * x * x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} = x^{-1}$
$(x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) \circ a = x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} * x * a = x^{-1}$

由以上证明，（G,o）是群。

23．在整数集 Z 上定义：$a \cdot b = a + b - 2, \forall a,b \in Z$
证明（Z，·）是一个群。

证：

显然 · 是二元运算，根据群的定义，需证运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

$\forall a,b,c \in Z$，有

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b + c - 2 = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$
$a \cdot (b \cdot c) = a + b \cdot c - 2 = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$

故$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$，结合律成立。

2 是单位元，事实上，$a \cdot 2 = a + 2 - 2 = a$；$2 \cdot a = 2 + a - 2 = a$；$\forall a \in Z$。

$\forall a \in Z$，由$a \cdot (4-a) = a + 4 - a - 2 = 2$；$(4-a) \cdot a = 4 - a + a - 2 = 2$；可知 $4-a$ 是a的逆元。

由上可知（Z，·）是群。

*24．设 R 是全体实数集，$M = \{<a,b> \mid a,b \in R, a \neq 0\}$。定义

$<a,b> \cdot <c,d> = <ac, ad+b>$。这时 M 对运算· 构成群吗？试验证之。

证：

M 对运算· 构成群，下面证明：

首先，$\forall <a,b>,<c,d> \in M$，有 $a,b,c,d \in R$，且 $a,c \neq 0$，于是 $ac, ad+b \in R$，且 $ac \neq 0$，从而$<a,b> \cdot <c,d> = <ac,ad+b> \in M$，· 是 M 上的二元运算。

其次，$\forall <a,b>,<c,d>,<e,f> \in M$，有

(<a,b> · <c,d>) · <e,f>=<ac,ad+b> · e,f>=<ace,acf+ad+b>
<a,b> · (<c,d> · <e,f>)=<a,b> · <ce,cf+d>=<ace,acf+ad+b>

故(<a,b> · <c,d>) · <e,f>=<a,b> · (<c,d> · <e,f>)，结合律成立。
<1,0>是 M 上关于·的单位元。事实上，$\forall <a,b>\in M$,有

<1,0> · <a,b>=<a 1, a 0+b>=<a,b>
<a,b> · <1,0>=<1 a,1 b+0>=<a,b>

最后，$\forall <a,b>\in M$,<a^{-1},–$a^{-1}b$>是<a,b>的逆元。事实上，

<a,b> • <a^{-1},–$a^{-1}b$>=<aa^{-1}, a （–$a^{-1}b$）+b>=<1,0>
<a^{-1},–$a^{-1}b$> • <a,b>=<$a^{-1}a$,$a^{-1}b$–$a^{-1}b$>=<1,0>

证得（M, •）是群。

25．证明有限群中阶大于 2 的元素的个数必定是偶数。

证：

x 和 x^{-1} 的阶数相同。又当 x 的阶数大于 2 时，$x\neq x^{-1}$。注意到映射 $f:x\to x^{-1}$ 是群的一个双射。从而阶数大于 2 的元素成对出现（x 和 x^{-1} 是一对）。故其个数必为偶数。

26．证明阶为偶数的有限群中必有奇数个阶为 2 的元素。

证：

和上题一样，群中阶数大于 2 的元素个数是偶数，又单位元是群中惟一的一个阶数为 1 的元素。而群中总元素个数（群的阶）为偶数，故阶为 2 的元素必有奇数个。

27．在偶阶数的有限群中必存在 $a\neq e$，使得 $a^2=e$，其中 e 是群的单位元。

证：

当 $x\neq x^{-1}$ 时，x 和 x^{-1} 在群中成对出现，其总的个数必为偶数。因此，在群中 $x=x^{-1}$，即 $x^2=e$ 的元素个数也为偶数。e 满足 $e^2=e$，故除 e 以外，至少还有一个 a，使得 $a^2=e$。

28．S_n 是 $D=\{1,2,\Lambda\ ,n\}$ 上所有置换（双射）组成的集合。S_n 对置换乘法（函数复合）运算构成群，G 是 S_n 的子群。

（1）在 S_n 上定义关系 R，$\forall s,t\in S_n, sRt\Leftrightarrow \exists g\in G, s=g^{-1}tg$，证明 R 是 S_n 上的等价关系。

（2）取 n =3，列出 S_3 的所有元素，找出 S_3 的一个二阶子群 G。求上述等价关系 R 所确定的 S_3 的一个划分。

证：

（1）需证 R 自反、对称、传递。

$\forall s\in S_n$，因 G 是子群，恒等变换 $I_n\in G$，且 $s=I_n^{-1}sI_n$，故 sRs。R 自反。

$\forall s,t\in S_n$ 若 sRt，即 $\exists g\in G,\ s=g^{-1}tg$，则 $g^{-1}\in G$，且 $t=(g^{-1})^{-1}sg^{-1}$，即

tRs，R 对称。

$\forall u,v,w \in S_n$，若 uRv，vRw，即 $\exists g_1 \in G, u = g_1^{-1}vg_1$，$\exists g_2 \in G, v = g_2^{-1}wg_2$，则 $u = g_1^{-1}g_2^{-1}wg_2g_1 = (g_2g_1)^{-1}w(g_2g_1)$，且因 G 是子群，$g_2g_1 \in G$，有 uRw，R 传递。

由以上证明，R 是 S_n 上的等价关系。

（2）S_3 中有 6 个元素，分别是

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

S_3 的一个二阶子群 G 为 $G = \{p_1, p_2\}$（或为 $G = \{p_1, p_3\}$、$G = \{p_1, p_4\}$）。

对应的划分为：$\{\{p_1, p_2\}$，$\{p_3, p_4\}$，$\{p_5, p_6\}\}$

这是因为：对 $x, y \in S_3$，xRy 指 $p_1x = yp_1$ 或者 $y = p_2^{-1}xp_2$，其中 $p_1x = yp_1$ 意味着 $x = y$，而 $y = p_2^{-1}xp_2$，使得我们可以对给定的 x，寻找对应的 y。通过这种方式找出的关系对有（自反、对称性省略）：p_1Rp_2，p_3Rp_4，p_5Rp_6，从而可得划分。

29．设（G,*）是群，对任一 $a \in G$，令 $H = \{y \mid y * a = a * y, y \in G\}$，证明：（$H$,*）是 G 的子群。

证：

显然 $H \subseteq G$。运算在 H 中满足结合性。

对于任意的 $x, y \in H$，以及任意的 $a \in G$，因为

$$(x * y) * a = x * (y * a) = x * (a * y) = (x * a) * y = (a * x) * y = a * (x * y)$$

所以，$x * y \in H$，这说明 H 对运算是封闭的。

因为 $e * a = a * e$，所以 $e \in H$。

对于任意的 $x \in H$，由于 $x * a = a * x$，有

$$x^{-1} * (x * a) * x^{-1} = x^{-1} * (a * x) * x^{-1}$$

即得 $x^{-1} * a = a * x^{-1}$

这表明 $x^{-1} \in H$

综上所述，H 为 G 的子群。

30．下面哪些是对称群 $(S_4, \circ)$ 的子群？

（1）$\{f \mid f \in S_4, f(4) = 4\}$

（2）$\{f \mid f \in S_4, f(1) = 2\}$

（3）$\{f \mid f \in S_4, f(1) \in \{1,2\}\}$

（4）$\{f \mid f \in S_4, f(1) \in \{1,2\}, f(2) \in \{1,2\}\}$

解：

因 S_4 是有限群，只需说明运算封闭就可以了。

（1），（4）是子群。可以举例说明（2），（3）均不为子群，对（2）或（3），如：

$$f = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in A,\ f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin A$$，对运算不封闭。

31．设 G 是一群，H 是 G 的子群，$x \in G$。证明 $x \cdot H \cdot x^{-1} = \{x \cdot h \cdot x^{-1} \mid h \in H\}$ 是 G 的子群。

证：

由 H 非空，知 $x \cdot H \cdot x^{-1}$ 非空。

$\forall a, b \in x \cdot H \cdot x^{-1}$，即存在 $h_1, h_2 \in H$, 使得 $a = x \cdot h_1 \cdot x^{-1}, b = x \cdot h_2 \cdot x^{-1}$，有

$a \cdot b^{-1} = (x \cdot h_1 \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot h_2 \cdot x^{-1})^{-1} = x \cdot h_1 \cdot x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} \cdot h_2^{-1} \cdot x^{-1} = x \cdot (h_1 \cdot h_2^{-1}) \cdot x^{-1}$

因 H 为子群，有 $h_1 \cdot h_2^{-1} \overset{\Delta}{=} h \in H$，从而 $a \cdot b^{-1} = x \cdot h \cdot x^{-1} \in x \cdot H \cdot x^{-1}$。所以 $x \cdot H \cdot x^{-1}$ 为子群。

32．设 G 是一群，H 是 G 的子群，令 $M = \{x \mid x \in G, xHx^{-1} = H\}$

证明 M 是 G 的子群。

证：

$\forall x, y \in M$，即 $x \cdot H \cdot x^{-1} = H$，$y \cdot H \cdot y^{-1} = H$，由此式两边同时左乘 y^{-1}，右乘 y，可推出 $y^{-1} \cdot H \cdot y = H$，则

$(x \cdot y^{-1}) \cdot H \cdot (x \cdot y^{-1})^{-1} = x \cdot (y^{-1} \cdot H \cdot y) \cdot x^{-1} = x \cdot H \cdot x^{-1} = H$，从而 $x \cdot y^{-1} \in M$，M 为子群。

*33．设 G 是群，A，B 为子群，试证明若 $A \cup B = G$，则 $A = G$ 或 $B = G$。

证：

假设 $A \neq G$，且 $B \neq G$，则 $\exists a \in A,\ a \notin B$ 且 $\exists b \in B,\ b \notin A$（否则对任意的 $a \in A,\ a \in B$，从而 $A \subseteq B$，即 $A \cup B = B$，得 B=G，矛盾）。

对元素 $a \cdot b \in G$，若 $a \cdot b \in G$，因 A 是子群，$a^{-1} \in A$，从而 $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = b \in A$，所以矛盾，故 $a \cdot b \notin A$。同理可证 $a \cdot b \notin B$，综合有 $a \cdot b \notin A \cup B = G$。

综上所述，假设不成立，得证 $A = G$ 或 $B = G$。

*34．设 $(H_1, *)$，$(H_2, *)$ 是群 G 的两个互不包含的子群，则 G 的子集 $H_1 \cup H_2$ 是否构成 G 的子群？为什么？

证：

此题和上题类似。$H_1 \cup H_2$ 不构成 G 的子群。论证如下：

因 H_1, H_2 是群 G 的两个互不包含的子群，故存在 $a \in H_1,\ a \notin H_2$，且存在 $b \in H_2,\ b \notin H_1$，则 $a, b \in H_1 \cup H_2$，但 $a \cdot b \notin H_1$，$a \cdot b \notin H_2$，（理由同上题）从而 $a \cdot b \notin H_1 \cup H_2$

35．设＜G,*＞是一群，令

$R=\{<a,b>|\ a,b\in G$，存在$\theta\in G$ 使$b=\theta*a*\theta^{-1}\}$

验证 R 是 G 上的等价关系。

证：

需证 R 具有自反、对称、传递性。

$\forall x\in G$，因为$x=e*x*e^{-1}$，其中e为G中单位元，故xRx。R 自反。

$\forall a,b\in G$，若 aRb，即$\exists\theta\in G$使$b=\theta*a*\theta^{-1}$，则

$a=\theta^{-1}*b*\theta=\theta^{-1}*b*(\theta^{-1})^{-1}$，因 G 为群，$\theta\in G$，有$\theta^{-1}\in G$，故 bRa。R 对称。

$\forall a,b,c\in G$，若 aRb，bRc，即

$\exists\theta_1\in G$使$b=\theta_1*a*\theta_1^{-1}$，$\exists\theta_2\in G$使$c=\theta_2*b*\theta_2^{-1}$，则

$c=\theta_2*\theta_1*a*\theta_1^{-1}*\theta_2^{-1}=(\theta_2*\theta_1)*a*(\theta_2*\theta_1)^{-1}$

因$\theta_1,\theta_2\in G$，有$\theta_1\theta_2\in G$，故 aRc。R 传递。

证得 R 等价。

36．设 H 是群 G 的子群，在 G 中定义二元关系 R:

$R=\{<a,b>|\ b^{-1}\cdot a\in H\}$。证明 R 是 G 上一个等价关系。

证：

需证 R 是自反、对称、传递的。

因$x^{-1}\cdot x=e\in H$，有$<x,x>\in R$，R 自反。

若$<a,b>\in R$，即$b^{-1}\cdot a\in H$，因 H 是子群，有$(b^{-1}\cdot a)^{-1}=a^{-1}\cdot b\in H$，故$<b,a>\in R$，$R$ 对称。

若$<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$，即$b^{-1}\cdot a\in H$，$c^{-1}\cdot b\in H$，由 H 是子群，满足结合律，则有$(c^{-1}\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot a)=c^{-1}\cdot a\in H$，$<a,c>\in R$，$R$ 传递。

由以上证明，R 等价。

37．设 G 是一群，~是 G 的元素之间的等价关系，并且$\forall a,x,y\in G$，有$ax\sim ay\Rightarrow x\sim y$

证明$H=\{x\mid x\in G,x\sim e\}$是 G 的子群，其中 e 是 G 的单位元。

证：

显然$e\in H$，H 非空。

$\forall x\in H,x\sim e\Rightarrow xe\sim xx^{-1}\Rightarrow e\sim x^{-1}\Rightarrow x^{-1}\sim e\Rightarrow x^{-1}\in H$

$\forall x,y\in H,x\sim e,y\sim e\Rightarrow x^{-1}\sim e,y\sim e\Rightarrow x^{-1}\sim y\Rightarrow x^{-1}e\sim x^{-1}xy\Rightarrow e\sim xy$

$\Rightarrow xy\sim e\Rightarrow xy\in H$

由子群的判定定理可知 H 为子群。

38．设 G 是群，且$g\in G$，定义$G\to G$ 的映射$\hat{g}:\hat{g}(x)=gxg^{-1}$。证明：$\hat{g}$ 是$G\to G$ 的同构映射。

证：

需证$\hat{g}$是同态映射，且是双射。

$\forall x, y \in G$，因为

$$\hat{g}(xy) = g(xy)g^{-1} = g(xg^{-1}gy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \hat{g}(x)\hat{g}(y)$$

$\hat{g}$ 是同态映射。

$\forall x, y \in G$，若 $\hat{g}(x) = \hat{g}(y)$，即 $gxg^{-1} = gyg^{-1}$，由群满足消去律，可得 x=y。$\hat{g}$ 是单射。

$\forall y \in G$，因 $\hat{g}(g^{-1}yg) = g(g^{-1}yg)g^{-1} = y$，其中 $g^{-1}yg \in G$。$\hat{g}$ 是满射。

由以上证明，$\hat{g}$ 是同构映射。

39．设 $G = \{f_{a,b} \mid a \neq 0, a, b \in Q\}$ 是有理数集 Q 上的线性变换群，其中 $f_{a,b}(x) = ax + b$，$\forall x \in Q$。$H = \{f_{1,b} \mid b \in Q\}$ 是 G 的子群。求 H 在 G 中的所有左陪集。

解：

由 $f_{a,b}H = f_{c,d}H \Leftrightarrow f_{a,b}^{-1} \circ f_{c,d} \in H$

$$\Leftrightarrow f_{a^{-1},-a^{-1}b} \circ f_{c,d} = f_{ca^{-1},d-bca^{-1}} \in H$$

$$\Leftrightarrow ca^{-1} = 1 \Leftrightarrow a = c$$

于是，对任意的 $a \in Q,\ a \neq 0$，有 $f_{a,b}H = f_{a,0}H,\ \forall b \in Q$

所以，H 在 G 中的全体左陪集为：

$$f_{a,0}H = \{f_{a,b} \mid b \in Q\},\ \forall a \in Q, a \neq 0$$

40．设 H 是 G 的子群，试证明 H 在 G 中的所有陪集中有且只有一个子群。

证：

设 G 的单位元为 e，则 eH=H 是 G 的一个子群。因 H 的左陪集的全体构成 G 的划分，即 H 的左陪集或者相同，或者不相交，故其他左陪集均不含 e。而作为子群，至少必须含有单位元，故除 H 外，其他左陪集均不是 G 的子群。

*41．一个群 G 的可以写成 $a^{-1}b^{-1}ab$ 形式的元素称为换位子，证明所有有限个换位子的乘积组成的集合 C 是 G 的一个子群。

证：

显然集合 C 对乘法运算是封闭的，因为任意两个（有限个换位子的）乘积的乘法结果仍然是一个（有限个换位子的）乘积。

单位元 $e = e^{-1}e^{-1}ee \in C$

设 $x = (a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1)(a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2)\Lambda\ (a_n^{-1}b_n^{-1}a_nb_n) \in C$

则 $x^{-1} = (b_n^{-1}a_n^{-1}(b_n^{-1})^{-1}(a_n^{-1})^{-1})\Lambda\ (b_2^{-1}a_2^{-1}(b_2^{-1})^{-1}(a_2^{-1})^{-1})(b_1^{-1}a_1^{-1}(b_1^{-1})^{-1}(a_1^{-1})^{-1})$

$$= (b_n^{-1}a_n^{-1}b_na_n)\Lambda\ (b_2^{-1}a_2^{-1}b_2a_2)(b_1^{-1}a_1^{-1}b_1a_1)$$

仍表示成为有限个换位子的乘积。

由子群的判定定理，C 为群。

42．设 H, K 是群 G 的子群，证明 HK 是 G 的子群的充要条件是：$HK = KH$

证：

充分性：假设 $HK = KH$，要证 HK 是子群。

因 $e\in H$ ， $e\in K$ ，故 $e=ee\in HK$ ，从而 HK 非空。

$\forall x=hk, y=h_1k_1\in HK$ ，这里 $h,h_1\in H,k,k_1\in K$ ，有

$xy^{-1}=(hk)(h_1k_1)^{-1}=h(kk_1^{-1})h_1^{-1}$ ，记 $k_2=kk_1^{-1}\in K$

由 HK=KH，存在 $h_3\in H$，$k_3\in K$ ，使得 $k_2h_1^{-1}=h_3k_3$ ，从而

$xy^{-1}=h(h_3k_3)=(hh_3)k_3\in HK$ 。由子群的判定定理，HK 是 G 的子群。

必要性：已知 HK 是 G 的子群，要证 HK=KH。

对任意 $x\in HK$ ，因 HK 是子群，故 $x^{-1}\in HK$ 。于是存在 $h\in H,k\in K$ ，使得 $x^{-1}=hk$ ，从而 $x=k^{-1}h^{-1}$。而 $k^{-1}\in K,h^{-1}\in H$ ，故 $x\in KH$ 。证得 $HK\subseteq KH$ 。

同理可证 $KH\subseteq KH$ ，从而有 HK=KH。

43．$(G,\circ)$ 是交换群，$(A,\circ)$ 和 $(B,\circ)$ 为其子群，设 $AB=\{a\circ b\mid a\in A,b\in B\}$，证明：$(AB,\circ)$ 也是 $(G,\circ)$ 的子群。

证：

由上题，因 G 是交换群，知 AB=BA，故 AB 是子群。

也可利用子群的判定定理直接证明：

$\forall x,y\in AB$ ，即存在 $a_1,a_2\in A,b_1,b_2\in B$ ，使得 $x=a_1b_1$ ， $y=a_2b_2$ 。则

$xy^{-1}=(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}=a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1}$ ，由 A ，B 是子群且 G 是交换群，设 $b=b_1b_2^{-1}$ ，

则 $xy^{-1}=a_1(ba_2^{-1})=a_1(a_2^{-1}b)=(a_1a_2^{-1})b\overset{\Delta}{=}ab\in AB$

其中， $a=a_1a_2^{-1}$ 。故 $(AB,\circ)$ 也是 $(G,\circ)$ 的子群。

44．设 A 是群 G 的一个有限非空子集。试证：A 是 G 的子群当且仅当 $AA\subseteq A$ 。

证：

由于子群关于运算是封闭的，故必要性成立。反之，设 $AA\subseteq A$，则运算在 A 上是封闭的。由于 A 有限，由子群的判定定理，A 为子群。

45．描述下面的（Z，+）的子群。

（1）<1>　（2）<0>　（3）<{–1,2}>

（4）<Z>　（5）<{2,3}>　（6）< 6 > I < 9 >

解：

（1）＜1＞=Z　（2）＜0＞={0}

（3）＜{–1,2}＞=Z　（4）＜Z＞=Z

（5）＜{2,3}＞=Z　（6）＜6＞I ＜9＞=18Z

46．设 H 和 K 是 G 的子群，在 G 上规定一个二元关系：

$a\sim b\Leftrightarrow \exists h\in H,\ k\in K,$ 使 $b=hak$ 。证明

（1）~是 G 上的等价关系。

（2） $a\in G$ ， a 所在的等价类 $[a]_{\sim}=\{x\mid x\in G,x\sim a\}=HaK$

（3）下述条件是等价的：

① $b\in[a]_{\sim}$　② $Hb\subseteq[a]_{\sim}$　③ $bK\subseteq[a]_{\sim}$　④ $bK\cap Ha\neq\varnothing$

证：

（1）需证~是自反、对称、传递的。

$\forall a\in G$，$a=eae$，而 $e\in H,\ e\in K$，故 $a\sim a$。~自反。

$\forall a,b\in G$，若 $a\sim b$，即 $\exists h\in H,\ k\in K,$ 使 $b=hak$，则 $a=h^{-1}bk^{-1}$，且因 H，K 是子群，$h^{-1}\in H,\ k^{-1}\in K$，有 $b\sim a$。~对称。

$\forall a,b,c\in G$，若 $a\sim b$，$b\sim c$，即 $\exists h_1\in H,\ k_1\in K,$ 使 $b=h_1ak_1$，$\exists h_2\in H,\ k_2\in K,$ 使 $c=h_2bk_2$，则 $c=h_2(h_1ak_1)k_2=(h_2h_1)a(k_1k_2)$，且 $h_2h_1\in H$，$k_1k_2\in K$，故 $a\sim c$。~传递。

（2）$\forall x\in G, x\in[a]_{\sim}\Leftrightarrow x\sim a\Leftrightarrow a\sim x\Leftrightarrow \exists h\in H,k\in K,x=hak\Leftrightarrow x\in HaK$，故 $[a]_{\sim}=HaK$

（3）证由①$\Rightarrow$②。$b\in[a]_{\sim}$，有 $b\sim a$。因为~为等价关系，故 $[b]_{\sim}=[a]_{\sim}=HbK=HaK$。而 $Hb=Hbe\subseteq HbK$，有 $Hb\subseteq[a]_{\sim}$；

由②$\Rightarrow$③。因为 $Hb\subseteq[a]_{\sim}$，$b=eb\in Hb$，有 $b\in[a]_{\sim}$，从而有 $[a]_{\sim}=[b]_{\sim}$，且 $bK=ebK\subseteq HbK=[b]_{\sim}$，有 $bK\subseteq[a]_{\sim}$；

由③$\Rightarrow$②。因 $bK\subseteq[a]_{\sim}$，和上面论述一样，有 $b\in[a]_{\sim}$，即存在 $h\in H,k\in K$，使得 $b=hak$，推出 $bk^{-1}=ha$，而 K 是子群，$k\in K\Rightarrow k^{-1}\in K$，故 $bk^{-1}=ha\subseteq bK\cap Ha$，即 $bK\cap Ha\neq\varnothing$；

由④$\Rightarrow$①。$bK\cap Ha\neq\varnothing$，则存在 $k\in K,\ h\in H$，使 $bk=ha$，可得 $b=hak^{-1}$，且 $k^{-1}\in K$，有 $b\in[a]_{\sim}$。

47．设 H 是 G 的子群，$a,b\in G$。证明下述 6 个条件是等价的：

（1）$b^{-1}a\in H$　（2）$a^{-1}b\in H$　（3）$b\in aH$

（4）$a\in bH$　（5）$aH=bH$　（6）$aH\cap bH\neq\varnothing$

证：

（1）$\Rightarrow$（2）因为 H 是子群，$b^{-1}a\in H\Rightarrow(b^{-1}a)^{-1}\in H$，即 $a^{-1}b\in H$；

（2）$\Rightarrow$（3）由 $a^{-1}b\in H$，可得 $\exists h\in H,\ a^{-1}b=h$，有 $b=ah$，即 $b\in aH$；

（3）$\Rightarrow$（4）因 $b\in aH$，可得 $\exists h\in H,\ b=ah$，有 $a=bh^{-1}$，而 H 是子群，$h^{-1}\in H$，故 $a\in bH$；

（4）$\Rightarrow$（5）因 $a\in bH$，$\exists h_0\in H$，$a=bh_0$。

$\forall x\in aH$，存在 $h\in H$，使 $x=ah=bh_0h$，而 $h_0h\in H$，故 $x\in bH$，得 $aH\subseteq bH$。

另一方面，$\forall x\in bH$，存在 $h\in H$，使 $x=bh=ah_0^{-1}h$，而 $h_0^{-1}h\in H$，故 $\forall x\in aH$，得 $bH\subseteq aH$。证得 $aH=bH$。

（5）$\Rightarrow$（6）由 $aH=bH$，且 $a\in aH$，故 $a\in aH\cap bH\neq\varnothing$

（6）$\Rightarrow$（1）由 $aH\cap bH\neq\varnothing$，存在 $h_1,h_2\in H$，使得 $ah_1=bh_2$，有 $b^{-1}a=h_2h_1^{-1}\in H$

48．设 H 是 G 的子群，令 $f(xH)=Hx,\ \forall x\in G$。问 f 是否是一个映射？是否是一个单值映射？

证：

f 不是一个映射，更不是一个单值映射。

若要求 f 是一个映射，则要求 $\forall x,\ y \in G$，$xH = yH \Rightarrow Hx = Hy$，但这不一定成立。

例如：

取 $G = S_3$， $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

有 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

但 $H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

即 $H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

49．求下面的群同态 h 的核：

（1）从$(Z,+)$到$(Z,+)$，对任意的 n， $h(n) = 73n$

（2）从$(Z,+)$到$(Z,+)$，对任意的 n， $h(n) = 0$

（3）从$(Z,+)$到 $(N_5,+_5)$，对任意的 n， $h(n) = \mathrm{Re}\,m_5(n)$

（4）从$(Z,+)$到$(Z,+)$，对任意的 n， $h(n) = n$

解：

（1） $Ker(h)=\{0\}$　　　（2） $Ker(h)=Z$

（3） $Ker(h)=5Z$　　　（4） $Ker(h)=\{0\}$

50．设 G 是非零实数乘法群，下述映射 f 是否是 G 到 G 的同态映射？对于同态映射 f，求 Imf 和 $Ker(f)$。

（1） $f(x)=|x|$　　　（2） $f(x)=2x$　　　（3） $f(x)=x^2$

（4） $f(x)=1/x$　　　（5） $f(x)=-x$　　　（6） $f(x)=x+1$

解：

（1）因$|x|\cdot|y|=|x\cdot y|$， f 是 G 到 G 的同态映射，Imf=R^+， $Ker(f)=\{1,-1\}$

（2）不是。因为 $(2x)(2y) \neq 2(xy)$

（3）是。因为 $x^2 \cdot y^2 = (x\cdot y)^2$。Imf=$R^+$， $Ker(f)=\{1,-1\}$

（4）是。因为 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x\cdot y}$。Imf=$G$， $Ker(f)=\{1\}$。 f 是 G 的自同构。

（5）不是。因为 $(-x)\cdot(-y) \neq -(x\cdot y)$

（6）不是。因为 $(x+1)\cdot(y+1) \neq (x\cdot y)+1$

51．设 f 是群 $G \to G'$ 的满同态，H' 是 G' 的正规子群，令 $H = \{x \mid x \in G, f(x) \in H'\}$ 求证：

（1）H 是 G 的正规子群。

（2）$G/H \cong G'/H'$

证：

因 f 是 $G \to G'$ 的满同态，若设 $g: G' \to G'/H'$ 为自然同态，则 $f \circ g$ 是 $G \to G'/H'$ 的满同态。商群 $(G'/H', \circ)$ 中的单位元是 H'，故 g 的同态核就是 H'。因此由 H 的组成可知 $f \circ g$ 的同态核就是 H，由此可见，H 是 G 的正规子群，且由同态基本定理，可得 $G/H \cong G'/H'$

52．设 G 是一个有限群，K 是 G 的子群，H 是 K 的子群。证明：$|G/H| = |G/K| \cdot |K/H|$

证：

K 是 G 的子群，H 是 K 的子群，则 H 是 G 的子群。由拉格朗日定理，有 $|G| = |G/K| \cdot |K|$；$|G| = |G/H| \cdot |H|$；$|K| = |K/H| \cdot |H|$。可得

$|G/K| \cdot |K/H| \cdot |H| = |G/H| \cdot |H|$

两边消去$|H|$，可得 $|G/H| = |G/K| \cdot |K/H|$

53．证明循环群的任何子群都是循环群。

证：

设循环群 G=（a），a 是生成元。H 是 G 的子群。当 H=$\{e\}$时，H 是循环群。下面设 $H \neq \{e\}$。注意到 $a^n \in H \Leftrightarrow a^{-n} \in H$，知 $\{n \mid n \in Z^+, a^n \in H\}$ 非空，故可令 $k = \min\{n \mid n \in Z^+, a^n \in H\}$

下证 $H = (a^k)$

首先，$a^k \in H$，则有 $(a^k) \subseteq H$

其次，对于任一 $a^n \in H$，设 $n = sk + l, 0 \le l < k$。于是，$a^l = a^{n-sk} = a^n (a^k)^{-s}$。而 $a^n, a^k \in H \Rightarrow a^l \in H$。根据 k 的定义，必有 $l = 0$。证得 $k \mid n \Rightarrow a^n \in (a^k)$。从而 $H \subseteq (a^k)$，故有 $H = (a^k)$

54．考虑群（Z,＋），将 Z 写成某个子群的 5 个不相交的陪集的并。

证：

取 5Z，易知是 Z 的子群，且 $Z = 5Z \cup (5Z+1) \cup (5Z+2) \cup (5Z+3) \cup (5Z+4)$，其中 5Z，5Z＋1，5Z＋2，5Z＋3，5Z＋4 分别为 5Z 的 5 个不同的陪集。

*55．证明群 G 的子群 H 是正规子群的充要条件是 $a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$，这里 $a \in G,\ h \in H$。

证：

若 H 是正规子群，则 $aH = Ha,\ \forall a \in G$。有 $aHa^{-1} = H$，则 $\forall h \in H$，$a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$

若对任意的 $a \in G,\ h \in H$，$a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$，则有 $aHa^{-1} \subseteq H$。

另一方面，对任意的 $h \in H$，有 $h = a \cdot (a^{-1} \cdot h \cdot a) \cdot a^{-1}$，其中 $a \in G$，从而 $a^{-1} \in G$，则依据条件有 $a^{-1} \cdot h \cdot a \in H$，从而 $h = a \cdot (a^{-1} \cdot h \cdot a) \cdot a^{-1} \in aHa^{-1}$，有 $H \subseteq aHa^{-1}$。证得 $aHa^{-1} = H$。H 是正规子群。

*56．设 H 是 G 的子群，H 的阶数为 n，且 G 的阶数为 n 的子群只有一个，证明：H 是 G 的正规子群。

证：

由前面习题 31，有 xHx^{-1} 是 G 的子群。令 $\varphi(h)=xhx^{-1},\ \forall h\in H$。易验证 φ 是 H 到 xHx^{-1} 的双射，从而 $|xHx^{-1}|=|H|=n$，即 xHx^{-1} 是 G 的 n 阶子群。由题设，这样的子群惟一，故 $xHx^{-1}=H$。证得 H 是 G 的正规子群。

*57．设 g 是群 $(G,*)$ 到 (H,Δ) 的一个同态，而 K 是 g 的核，证明 $(G/K,*)$ 同构于 $(g(G),\Delta)$。其中 G/K 上的二元运算*定义为：$aK*bK=(a*b)K,\ \forall a,b\in K$

证：

定义 $\varphi: G/K\to g(G)$，$\varphi(xK)=g(x),\ \forall x\in G$。下面证明这是一个同构映射。

首先 φ 是一个映射：即若 $xK=yK$，则 $\varphi(xK)=\varphi(yK)$。

事实上，由 $xK=yK$，存在 $k_1,k_2\in K$，使得 $xk_1=yk_2$，所以有

$$g(x)=g(x)\cdot e=g(x)\cdot g(k_1)=g(x\cdot k_1)=g(y\cdot k_2)=g(y)\cdot g(k_2)=g(y)$$

从而 $\varphi(xK)=\varphi(yK)$，φ 是映射。

显然 φ 是满射，下面证明 φ 是单射。即若 $\varphi(xK)=\varphi(yK)$，即 $g(x)=g(y)$，需证 $xK=yK$。因为 $\forall xk\in xK$，有 $xk=y\cdot(y^{-1}xk)$，而

$$g(y^{-1}xk)=g(y^{-1})\cdot g(x)\cdot g(k)=g(y)^{-1}\cdot g(x)\cdot g(k)=g(k)=e \text{ 故 } y^{-1}xk\in K$$

从而 $xk=y(y^{-1}xk)\in yK$，证得 $xK\subseteq yK$。

同理可证：$yK\subseteq xK$。证得 $xK=yK$。说明 φ 是单射。

故 φ 是双射。

对任意的 $aK,bK\in G/K$，因

$$\begin{aligned}\varphi(aK*bK)&=\varphi((a*b)K)=g(a*b)=g(a)\Delta g(b)\\&=\varphi(aK)\Delta\varphi(bK)\end{aligned}$$

故 φ 是同态映射。

综上所述，φ 是同构映射，证得结论。

58．设 $G=\{a,b,c,d,e\}$，G 上的运算*定义如表 4-9 所示。

表 4-9

*	a	b	c	d	e
a	e	d	b	c	a
b	a	e	c	d	b
c	b	d	a	e	c
d	c	b	d	a	e
e	a	c	d	b	e

（1）证明$\{e,a\}$在运算*下是一个群。

（2）由（1）的结果，用拉格朗日定理断定（G,*）不是群。

证：

（1）（$\{e,a\}$,*）对运算封闭，单位元为 e,a 的逆元为 a，显然运算满足结合律。故（$\{e,a\}$,*）在*下是一个群。

（2）设$\{e,a\}=M$，则 M 的所有右陪集有：M,$M*b=\{a,b\}$,$M*c=\{b,c\}$,$M*d=\{c,e\}$

若 G 为群，则应满足 $|G|=|G/M|\cdot|M|$，而实际上，$|G|=5,|M|=2,|G/M|=4$。故 G 不是群。

59．设 G={a,b,c,d,e,f}，G 上的运算*定义如表 4-10 所示。

表 4-10

*	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

（1）写出子群 $<a>$；

（2）证明：$<a>*c=c*<a>$

（3）找出所有 2 个元素的子群；

（4）求 $|G/<d>|$

（5）求 $<d>$ 的右陪集。

解：

（1）$<a>=\{b,e,a\}$（由单元素生成的群）。

（2）$<a>*c=\{b*c,e*c,a*c\}=\{f,c,d\}$；

$c*<a>=\{c*b,c*e,c*a\}=\{d,\ c,f\}$；故相等。

（3）$\{e,c\},\{e,d\}$ 和 $\{e,f\}$ 为所有有两个元素的子群。

（4）$<d>=\{e,d\}$，由拉格郎日定理，$|G/<d>|=|G|/|<d>|=6/2=3$

（5）$<d>$ 的所有右陪集有：$<d>=\{d,e\}$，$<d>*a=\{a,c\}$，$<d>*b=\{b,f\}$（这里也验证了结论（4）的正确性。）

60．设 $X=\{1,2,3\}$，$x_0=1$，$FIX=\{f\mid f\in PERM(X),\ f(x_0)=x_0\}$ 是变换群 $PERM$（X）的子群。

（1）求 $|FIX|$，给出 FIX 的每个函数；

（2）说明函数 $g:g(1)=2,g(2)=3,g(3)=1$ 不在 FIX 中，给出陪集 $FIX\circ g$；

（3）证明 $FIX\circ g\neq g\circ FIX$

（4）在 $PERM$（X）中，FIX 有多少个不同的陪集？

解：

（1）$FIX=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$ 即 $|FIX|=2$，其中有两个函数，为

$$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

（2）显然 g 不在 FIX 中，陪集

$$FIX\circ g=\{f_1\circ g,f_2\circ g\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$$

（3）$g\circ FIX=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$，故 $FIX\circ g\neq g\circ FIX$

（4）由拉格郎日定理，FIX 的陪集数为：$|PERM(X)/FIX|=|PERM(X)|/|FIX|=6/2=3$

61．设 h 是群 G 上的一个同态，$|G|=12$，$|h(G)|=3$。

（1）求$|K|$，其中 K 是 h 的核；
（2）h 将 G 中多少个元素映射到 $h(G)$的每个元素？
（3）求$|G/K|$。

解：

（1）由同态基本定理的推论，$|K|=|G|/|h(G)|=12/3=4$
（2）$|K|=4$
（3）$|G/K|=|G|/|K|=12/4=3$

62．证明 4 阶群必为循环群或四元群（定义如表 4-11）。

表 4-11

*	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

证：

由拉格朗日定理的推论，除单位元 e 之外，G 的元素的阶或为 2 或为 4。只有两种可能。

（1）G 中存在一个阶为 4 的元素 a。此时必有 $G=(a)$ 是由 a 生成的循环群；
（2）除 e 外，G 的所有元素的阶为 2。设 $G=\{e,a,b,c\}$。$a^2=b^2=c^2=e$。注意 $ab\neq a,\ ab\neq b$，必有 $ab=c$。同理，$ba=c$，$ac=ca=b$，$bc=cb=a$。乘法如上所示。

c 相当于 ab。在不计元素的符号和顺序的情况下，它们是一个群。

*63．试证：一个有限非交换群至少含有 6 个元。

证：

由拉格朗日定理的推论，1、2、3、5 阶群都是循环群，从而是可交换的。可以证明（上题已证）4 阶群或为循环群或为四元群，它们也都是可交换的。故非交换群至少有 6 个元素。

*64．设$<G,*>$是一群，$x\in G$，x^{-1}表示 x 的逆元，证明下述结论：

（1）$(x^{-1})^{-1}=x$
（2）$(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$
（3）如果函数 $f:G\to G, f(x)=x^{-1}$是自同态，则 G 是交换群。

证：

（1）由定义，因为$x^{-1}*x=x*x^{-1}=e$，有$(x^{-1})^{-1}=x$；
（2）因为$(y^{-1}*x^{-1})*(x*y)=y^{-1}*(x^{-1}*x)*y=e$

$$(x*y)*(y^{-1}*x^{-1})=x*(y*y^{-1})*x^{-1}=e$$

由逆元的定义，有$(x*y)^{-1}=y^{-1}*x^{-1}$

（3）因为 $f:G\to G,\ f(x)=x^{-1}$是自同态，$\forall x,y\in G$，由（1）和（2）有

$$x*y=(x^{-1})^{-1}*(y^{-1})^{-1}=f(x^{-1})*f(y^{-1})=f(x^{-1}*y^{-1})=f((y*x)^{-1})=y*x$$

故 G 是交换群。

65．设（G，）是一群，$a \in G$，定义函数 $f: G \to G, f(x) = a * x * a^{-1}$
证明：f 是 G 的自同构。

证：

需证 f 是双射且为同态。

若 $f(x) = f(y)$，即 $a * x * a^{-1} = a * y * a^{-1}$，由群的消去律可知 x=y。故 f 是单射。

又对 $\forall g \in G$，有 $f(a^{-1} * g * a) = a * (a^{-1} * g * a) * a^{-1} = g$，故 f 是满射。

因对任意的 $x, y \in G$，有

$$f(x * y) = a * (x * y) * a^{-1} = (a * x * a^{-1}) * (a * y * a^{-1}) = f(x) * f(y)$$

故 f 是自同态映射。

综上所述，f 是 G 的自同构。

66．设 H 是形如 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的 2×2 矩阵的集合，H 中定义通常的矩阵乘法运算。

（1）验证 H 是群，$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）验证 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H \neq H \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。这表明 H 不是由所有可逆的 2×2 矩阵作成的群 T 的正规子群。

（3）证明 H 是所有形如 $\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & 1/y \end{pmatrix}$，$y \neq 0$ 的 2×2 矩阵作成的群 T 的正规子群，T 中运算是通常的矩阵乘法运算。

（4）h 是从 T 到群 $(R - \{0\}, \times)$ 的映射，定义为：$h\left(\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & 1/y \end{pmatrix}\right) = y$，证明 h 是群同态，并求同态核。

解：

（1）因为对任意的 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$，有

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$，故 H 对运算是封闭的，且因矩阵运算是可结合的，只需说明 H 存在单位元，每个元素有逆元即可。

显然 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ 是单位元，且因

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，故

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，每个元素都存在逆元。

（2）因$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}H=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ x & 1\end{pmatrix}\middle| x\in R\right\}$，而$H\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\middle| x\in R\right\}$，有

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}H\neq H\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

（3）因对任意的$\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}\in T$，有

$$\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}H=\left\{\begin{pmatrix}y & yx+z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}\middle| y\neq 0, z\in R\right\},$$

$$H\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}y & z+x/y\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}\middle| y\neq 0, z\in R\right\}，故$$

$$\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}H=H\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}$$

由$\begin{pmatrix}y & z\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}\in T$的任意性，有$H$是正规子群。

（4）因为对任意的$\begin{pmatrix}y_1 & z_1\\ 0 & 1/y_1\end{pmatrix}\in T$，$\begin{pmatrix}y_2 & z_2\\ 0 & 1/y_2\end{pmatrix}\in T$，有

$$h\left(\begin{pmatrix}y_1 & z_1\\ 0 & 1/y_1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}y_2 & z_2\\ 0 & 1/y_2\end{pmatrix}\right)=h\left(\begin{pmatrix}y_1y_2 & y_1z_2+z_1/y_2\\ 0 & 1/(y_1y_2)\end{pmatrix}\right)=y_1y_2$$

$$=h\left(\begin{pmatrix}y_1 & z_1\\ 0 & 1/y_1\end{pmatrix}\right)*h\left(\begin{pmatrix}y_2 & z_2\\ 0 & 1/y_2\end{pmatrix}\right)$$

故h是群同态，且由h的定义可知：$Ker(f)=H$

*67. 设$G=<A,\circ>$是一个群，$H=<B,*>$是一个代数系统，其中$*$是B上的代数运算。如果存在A到B的满射$f,\forall x,y\in A, f(x\circ y)=f(x)*f(y)$，则$H$也是一个群，且$G$与$H$同构。

证：

$\forall x',y',z'\in B$，因f是满射，存在$x,y,z\in A$，使得$f(x')=x,\ f(y')=y,\ f(z')=z$，于是，由$f$是同态，有

$$(x'*y')*z'=(f(x)*f(y))*f(z)=f(x\circ y)*f(z)=f((x\circ y)\circ z)$$
$$=f(x\circ(y\circ z))=f(x)*f(y\circ z)=f(x)*(f(y)*f(z))=x'*(y'*z')$$

$*$是可结合的；

设$e\in A$是G的单位元，$e'=f(e)\in B$，则$x'*e'=f(x)*f(e)=f(x\circ e)=f(x)=x'$

同理可证，$e'*x'=x'$。故e'是B的单位元。

又对于$x'\in B$，因为$x'*f(x^{-1})=f(x)*f(x^{-1})=f(x\circ x^{-1})=f(e)=e'$；同理可证$f(x^{-1})*x'=e'$。故$f(x^{-1})\in B$是$x'$的逆元。

综上所述，证得H是一个群，且f是G到H的同构映射，从而G与H同构。

68．设 g 是从 $(G,+)$ 到 $(H,\oplus)$ 的同构，则如果 $(G,+)$ 是群，则 $(H,\oplus)$ 必是群。

证：

由上题的证明易知结论成立。

69．设 f 和 g 是群 G 到 H 的满同态，而 $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x),\forall x\in G$。试证明：$\varphi$ 是 G 到 H 的同态映射当且仅当 H 是可交换的。

证：

设 H 是可交换的，则 $\forall x,y\in G$，

$\varphi(xy)=f(xy)g(xy)=f(x)f(y)g(x)g(y)=f(x)g(x)f(y)g(y)=\varphi(x)\varphi(y)$

故 φ 是 G 到 H 的同态映射。

反之，若 φ 是 G 到 H 的同态映射，$\forall x',y'\in H$，因为 f，g 是满射，故存在 $x,y\in G$，使得 $g(x)=x'$，$f(y)=y'$。于是

$\varphi(xy)=f(xy)g(xy)=f(x)f(y)g(x)g(y)=f(x)y'x'g(y)$

而 $\varphi(x)\varphi(y)=f(x)g(x)f(y)g(y)=f(x)x'y'g(y)$

故 $f(x)y'x'g(y)=f(x)x'y'g(y)$，由消去律，有 $y'x'=x'y'$。

故 H 是可交换的。

70．设 f 是群 G 到 G' 的同态映射，kerf=K，H 是 G 的子群，证明：$f^{-1}(f(H))=HK$。

证：

设 G 和 G' 的单位元分别是 e、e'，则 $\forall x\in HK$，存在 $h\in H,\ k\in K$，使得 $x=hk$，于是 $f(x)=f(hk)=f(h)f(k)=f(h)e'=f(h)\in f(H)$。故 $x\in f^{-1}(f(H))$。得证 $HK\subseteq f^{-1}(f(H))$

另一方面，$\forall x\in f^{-1}(f(H))$，有 $f(x)\in f(H)$，即存在 $h\in H$，使得 $f(x)=f(h)$。令 $k=h^{-1}x$，则有 $f(k)=f(h^{-1}x)=f(h)^{-1}f(x)=e'$，故 $k\in K$，从而 $x=hk\in HK$。证得 $f^{-1}(f(h))\subseteq HK$。所以，$f^{-1}(f(H))=HK$。

71．设 f 是群 G 到 H 的同态映射，K =kerf。证明：对任意的 $a\in G$，$f^{-1}(f(a))=aK$。

证：

此题与上题类似。$\forall x\in f^{-1}(f(a))$，$f(x)=f(a)$，$f(a^{-1}x)=(f(a))^{-1}f(x)=e_H$，其中 e_H 为 H 的单位元。

故 $k=a^{-1}x\in K$。于是，$x=ak\in aK$。证得 $f^{-1}(f(a))\subseteq aK$

另一方面，$\forall k\in K$，$f(k)$ 是 G 的单位元，$f(ak)=f(a)f(k)=f(a)$，故 $ak\in f^{-1}(f(a))$，得 $aK\subseteq f^{-1}(f(a))$。证得 $f^{-1}(f(a))=aK$

72．设 G 是群，G_1,G_2 是 G 的子群，且

（1）$G=G_1G_2$　　（2）$G_1\cap G_2=\{e\}$　　（3）$\forall a\in G_1,b\in G_2,ab=ba$

在 $G_1\times G_2$ 上定义 $<a_1,b_1>*<a_2,b_2>=<a_1a_2,b_1b_2>$

证明：$<G_1\times G_2,*>$ 是一个群，且 $G\cong G_1\times G_2$

证：

要证 $<G_1\times G_2,*>$ 是群，需证运算满足结合律，有单位元，每个元素有逆元。

① 对任意的$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\in G_1\times G_2$，有

$(<a_1,b_1>*<a_2,b_2>)*<a_3,b_3>=<a_1a_2,b_1b_2>*<a_3,b_3>=<a_1a_2a_3,b_1b_2b_3>$

同理可证 $<a_1,b_1>*(<a_2,b_2>*<a_3,b_3>)=<a_1a_2a_3,b_1b_2b_3>$

故 $(<a_1,b_1>*<a_2,b_2>)*<a_3,b_3>=<a_1,b_1>*(<a_2,b_2>*<a_3,b_3>)$

结合律成立。

② 因 $<a,b>*<e,e>=<e,e>*<a,b>=<a,b>$ 故$<e,e>$是$<G_1\times G_2,*>$中单位元。

③ 因 $<a,b>*<a^{-1},b^{-1}>=<a^{-1},b^{-1}>*<a,b>=<e,e>$

故每一元素均有逆元。

综合可知，$<G_1\times G_2,*>$是群。

$\forall x\in G$，存在$a\in G_1,b\in G_2,x=ab$

令$\varphi(ab)=<a,b>$，$\forall a\in G_1$，$b\in G_2$。因为$\forall a_1,a_2\in G_1,b_1,b_2\in G_2$，

$a_1b_1=a_2b_2\Leftrightarrow a_2^{-1}a_1=b_2b_1^{-1}\in G_1\cap G_2$

$\Leftrightarrow a_2^{-1}a_1=b_2b_1^{-1}=e\Leftrightarrow a_1=a_2;b_1=b_2$

所以φ是G到$G_1\times G_2$是映射，且映射是单射的，又显然φ是满射。

$\forall a_1,a_2\in G_1,b_1,b_2\in G_2$，$(a_1b_1)(a_2b_2)=(a_1a_2)(b_1b_2)$，于是

$\varphi((a_1b_1)(a_2b_2))=<a_1a_2,b_1b_2>=<a_1,b_1>*<a_2,b_2>=\varphi(a_1b_1)\varphi(a_2b_2)$

故φ是G到$G_1\times G_2$的同构，即$G\cong G_1\times G_2$

*73．区间$(-\infty,+\infty)$上连续函数的全体构成的集合记为C，规定

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),(f\circ g)(x)=g(f(x))$$

试验证C是否构成环。

证：

不难验证（C,＋）是一交换群，且$(C,\circ)$是一半群。且$\circ$对＋的右分配律成立，即$(f\circ(g+h))(x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))=(f\circ g+f\circ h)(x)$，但$\circ$对＋的左分配律不成立。例如：$f(x)=x^2,g(x)=x,h(x)=1$，则$((g+h)\circ f)(x)=f(g(x)+h(x))=(x+1)^2$，但$(g\circ f+h\circ f)(x)=f(g(x))+f(h(x))$ $=x^2+1$，两者不等。

故C构成环。

*74．令$(S,+,\cdot)$是一环，1是单位元。在S上定义运算$\oplus$和$\odot$：

$$a\oplus b=a+b+1，\quad a\odot b=a+b+a\cdot b。$$

① 证明（S，$\oplus$，$\odot$）是一个环；

② 给出（S，$\oplus$，$\odot$）加法单位元，乘法单位元。

证：

① $\forall a,b,c\in S$

$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus b+c+1=a+b+c+1+1$

$a\oplus(b\oplus c)=a+b\oplus c+1=a+b+c+1+1$

有 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，即$\oplus$是可结合的。

$a\oplus b=a+b+1=b=a+1=b\oplus a$，所以$\oplus$是可交换的。

$a\oplus(-1)=a+(-1)+1=a=(-1)\oplus a$，所以（$-1$）是零元。

$a\oplus(-1-1-a)=a+(-1-1-a)+1=-1=(-1-1-a)\oplus a$，$-1-1-a$ 是 a 的负元。

以上说明（S，$\oplus$）是一个交换群；

$\odot$是可结合的，且有单位元 0。事实上，

（$a\odot b$）$\odot c=a\odot b+c+$（$a\odot b$）$\cdot c$

$=a+b+c+a\cdot b+$（$a+b+a\cdot b$）$\cdot c=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a\odot$（$b\odot c$）$=a+b\odot c+a$（$b\odot c$）

$=a+b+c+b\cdot c+a\cdot$（$b+c+b\cdot c$）$=a+b+c+a\cdot b+a\cdot b+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

有　$(a\odot b)\odot c=a\odot(b\odot c)$

$a\odot 0=a+0+a\cdot 0=a$

$0\odot a=0+a+0\cdot a=a$

因而（$S,\odot$）是有单位元的半群；

$a\odot(b\oplus c)=a+b\oplus c+a\cdot(b\oplus c)$

$=a+b+c+1+a\cdot$（$b+c+1$）$=2a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+1$

$(a\odot b)\oplus(a\odot c)=a\odot b+a\odot c+1$

$=a+b+a\cdot b+a+c+a\cdot c+1=2a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+1$

有 $a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$，即$\odot$对$\oplus$是可分配的。

从而证得（$S,\oplus,\odot$）是一个环。

② $(S,\oplus,\odot)$的加法单位元是（-1），乘法单位元是 0。

第 5 章　格

本章主要讨论了格的两种等价定义及其基本性质，给出了分配格、模格、有补格、布尔代数等。

§5.1　内 容 分 析

§5.1.1　格的定义

关于格，不同的教材在处理上可能有所不同。格有两种定义，其侧重点不同，但两者是等价的。一种侧重于偏序，另一种则侧重于代数系统。

定义 1　设（L，$\leq$）为一偏序集，如果 L 中的任意两个元素 x，y 都有最大下界 $\mathrm{glb}\{x,y\}$ 和最小上界 $\mathrm{lub}\{x,y\}$，则称此偏序集为一个偏序格（有教材也记 glb 为 inf，记 lub 为 sup）。

由于最小上界和最大下界的惟一性，可以把求$\{x,y\}$的最小上界和最大下界看成关于 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$，即$x \vee y$和$x \wedge y$分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界（有教材也称$x \vee y$为和或并或保联，称$x \wedge y$为积或交或保交）。

可以证明，如果定义：$x \vee y = \mathrm{lub}\{x, y\}$，$x \wedge y = \mathrm{glb}\{x, y\}$，则这两种运算满足交换律、结合律、吸收律和幂等律，即有

定理 1　设（L，$\leq$）为偏序格，则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、吸收律和幂等律，即：

（1）$\forall a,b \in L$，有 $a \vee b = b \vee a$ ；$a \wedge b = b \wedge a$

（2）$\forall a,b,c \in L$，有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ；$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

（3）$\forall a,b \in L$，有 $a \vee (a \wedge b) = a$ ；$a \wedge (a \vee b) = a$

（4）$\forall a \in L$，有 $a \vee a = a$ ；$a \wedge a = a$

注意：上面的幂等律可由吸收律得到。

定义 2　设$(L,\vee,\wedge)$是一个代数系统，其中$\vee,\wedge$都是二元运算，如果两种运算满足交换律、结合律、吸收律，即如果对于任意的$a,b,c \in L$，有

（1）交换律：$a \vee b = b \vee a$ ；$a \wedge b = b \wedge a$

（2）结合律：$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ；$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

（3）吸收律：$a \vee (a \wedge b) = a$ ；$a \wedge (a \vee b) = a$

则称$(L,\vee,\wedge)$为一代数格。

两个定义是等价的，因为有下面定理：

定理 2　代数系统 $(L,\vee,\wedge)$ 中，$\vee,\wedge$ 都是二元运算，如果满足交换律、结合律、吸收律。在集合 L 中定义关系 R 如下：

$xRy \Leftrightarrow x \vee y = y$　（或 $xRy \Leftrightarrow x \wedge y = x$）

则（1）R 是偏序关系，记为≤；
（2）偏序集（L，≤）是一偏序格；
（3）对格（L，≤）中任意元素 x 和 y，$\mathrm{lub}\{x, y\} = x \vee y$，$\mathrm{glb}\{x, y\} = x \wedge y$。即由这个偏序格确定的代数系统就是 $(L,\vee,\wedge)$。

由于能够证明这两种定义是等价的，我们以后给出格时，就意味着包含两方面的内容，并且不再区分代数格或偏序格。若是以偏序形式给出的格，称对应的 $(L,\vee,\wedge)$ 为由偏序格（L,≤）所诱导的代数格。若是以 $(L,\vee,\wedge)$ 这种形式给出的格，这时自然蕴含着其上有对应的偏序 $x \le y \Leftrightarrow x \vee y = y$。可以根据题目的要求及目的的不同选取其中之一，或同时使用。后面习题中有很多关于两方面性质的等价刻划。

作为格，具有下面称为保序性的基本性质：

定理 3　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，则对任意的 $a,b \in L$，均有

（1）$a \le a \vee b$；$b \le a \vee b$
（2）$a \wedge b \le a$；$a \wedge b \le b$
（3）若 $c \le a,\ c \le b$，则 $c \le a \wedge b$
（4）若 $a \le c,\ b \le c$，则 $a \vee b \le c$

实际上，上面定理 3 是下面定理 4 的一种特殊情况。

定理 4　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，则对任意的 $a,b,c,d \in L$，若 $a \le b$ 且 $c \le d$，则

（1）$a \vee c \le b \vee d$
（2）$a \wedge c \le b \wedge d$

定理 5　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，则对任意的 $a,b \in L$，均有

$a \le b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

虽然代数格没有分配律，但可以证明（见习题解析第 3 题）有下面称之为弱分配律（或次分配律）的性质：

定理 6　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，则对任意的 $a,b,c \in L$，有

$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \wedge (b \vee c) \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

作为格，有称为对偶原理的性质：

对偶原理：设 P 是对任意格均为真的命题，如果在命题 P 中把≤换成≥，把 $\wedge$ 换成 $\vee$，把 $\vee$ 换成 $\wedge$，就得到另一个命题 Q，我们把 Q 称为 P 的对偶命题，则有结论：Q 对任意格也是真的命题。

§5.1.2　子格、格同态

定义 3　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，T 是 L 的非空子集，如果 T 关于两种运算都是封闭的，则称 $(T,\vee,\wedge)$ 是 $(L,\vee,\wedge)$ 的子格。显然，子格本身是一个格。

定义 4　设 $(L,\vee,\wedge)$ 和 $(S,\vee,\wedge)$ 是两个代数格，h 是 L 到 S 的映射，若对任意 $x,y\in L$，有

$$h(x\vee y)=h(x)\vee h(y)$$
$$h(x\wedge y)=h(x)\wedge h(y)$$

则称 h 是从格 L 到格 S 的格同态。若 h 还是双射，则称 h 是格同构映射。此时称格 $(L,\vee,\wedge)$ 与格 $(S,\vee,\wedge)$ 同构。

作为偏序集的格，经同态映射仍保持次序。有下面定理：

定理 7　设 h 是格 L 到格 S 的同态。对于任意 $x,y\in L$。若 $x\le y$，则 $h(x)\le h(y)$。具有这样性质的映射称为保序映射，因此格同态映射是保序映射。

下面是几个特殊格的定义：

有界格：具有最大元和最小元的格称为有界格。

有限格：集合元素数目有限的格称为有限格。

根据定义，显然有限格一定是有界格（见习题解析第 11 题），但反之不一定。如[0,1]上通常的小于等于关系是一格，它有界，但不是有限格。

分配格：设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一格，若对于任意的 $x,y,z\in L$，有

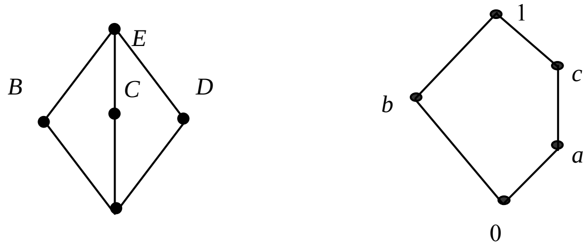
$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$
$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

称格 $(L,\vee,\wedge)$ 是分配格。

实际上，由习题解析第 6 题可以证明上面两个式子是等价的，即：若满足其中的一个式子必定满足另一个式子。由此，当我们验证一个格是不是分配格时，只需要验证 $\vee$ 对 $\wedge$ 是否可分配或 $\wedge$ 对 $\vee$ 是否可分配即可。

有界分配格：若一个格既是有界格也是分配格，称为有界分配格。

如图 5-1 所示两格不是分配格，因为：



（1）　　（2）

图 5-1

图（1）中 $B \vee (C \wedge D) = B \vee A = B$，而 $(B \vee C) \wedge (B \vee D) = E \wedge E = E$，两者不等。

图（2）中 $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$，而 $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge c = c$，两者也不等。

模格：如果对于任意的 $x, y, z \in L$，只要 $x \le z$，就有

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \qquad \text{（模律）}$$

称此格为模格。

模格的定义，不同教材，可能形式上表现出来的有所不同，但实质上是完全一样的。如有的教材这样定义：

对于任意的 $a, b, c \in L$，如果 $b \le a$，就有

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

则称格为模格。

如果是分配格，可以证明一定是模格，但模格不一定是分配格。例如，可以验证：图 5-1 中图（1）是模格，但不是分配格。注意图（2）不是模格。

有补元：设 $(L, \vee, \wedge)$ 是一个有界格，对 L 中元素 x，若存在 $y \in L$，使得

$$x \vee y = 1,\ x \wedge y = 0$$

则称 y 是 x 的补元，并称 x 是有补元。

显然上述定义中，x 与 y 是对称的，即：如果 y 是 x 的补元，则 x 也是 y 的补元，所以可称 x 与 y 互补。

注意，并非一个有界格中每个元素都是有补元，虽然 0 和 1 互为补元，但对一般的元素而言，若某个元素存在补元，其补元也不一定是惟一的，可能有多个补元。

有补格：若格中每个元素都是有补元，则称此格为有补格。

图 5-1 两个格均是有补格。通过这两个图还可以看出：一个元素若有补元，补元不一定是惟一的。如图 5-1 中，图（1）：B 有补元 C、D；C 有补元 B、D。图（2）：b 有补元 c、a；c 和 a 的补元都是 b。

那么什么时候补元是惟一的呢？有下面一个充分性的定理。

定理 8　设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一个分配格，而且是一个有界格，若元素 x 是有补元，则它的补元是惟一的。

当补元惟一时，根据运算的不同，我们通常用 x' 、 $\bar{x}$ 或 $\neg x$ 来表示 x 的补元。

模格与有补格之间没有多少联系。一个格可以是模格而不是有补格，这只需要举一个是分配格（从而是模格）而不是有补格的例子就够了（如多于 2 个元素的链，一定是分配格，从而是模格，见习题 9，但不是有补格，见习题 25)。一个格也可以是有补格而不是模格，如图 5-1 中图（2）是有补格，但不是模格。注意：需要验证。

有补格与分配格之间也没有多少联系，一个格可以是分配格而不是有补格，也可以是有补格而不是分配格。

§5.1.3　布尔代数

定义 5　一个有补分配格，称为布尔代数（或布尔格)，记为 $(L,\vee,\wedge,')$ ，其中 $'$ 是补运算。为了强调布尔代数中的最小元 0 和最大元 1，也记布尔代数为 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 。若 L 还是有限集，称相应的格为有限布尔代数或有限布尔格。

有些教材也这样定义布尔代数：

定义：设 $(B,+,*)$ 是代数系统，若＋对*运算满足： $\forall a,b,c\in B$ ，有

（1）交换律，即 $a+b=b+a$ ； $a*b=b*a$

（2）分配律，即 $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ ； $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$

（3）同一律，即存在 $0,1\in B$ 使得 $a*1=a$ ； $a+0=a$

（4）补元律，即存在 $\bar{a}\in B$ ，使得 $a*\bar{a}=0$ ； $a+\bar{a}=1$

则称 $(B,+,*)$ 是布尔代数。

可以证明这两个定义是等价的，后面定理 11 就是以此来判断一个代数系统是否是布尔代数的。

布尔代数由于是有补分配格，从而格、分配格、有补格中成立的算律在布尔代数中也成立，表现在下面定理：

定理 9　设 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 是一个布尔代数， $\forall x,y,z\in L$ ，有下述定律成立：

（1）交换律　$x\vee y=y\vee x$ ； $x\wedge y=y\wedge x$

（2）结合律　$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ ； $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$

（3）分配律　$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ ； $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

（4）幂等律　$x\wedge x=x$ ； $x\vee x=x$

（5）同一律　$x\vee 0=x$ ； $x\wedge 1=x$

（6）零一律　$x\vee 1=1$ ； $x\wedge 0=0$

（7）双补律　$(x')'=x$　　（也称为对合律）

（8）互补律　$x\vee x'=1$ ； $x\wedge x'=0$ ； $1'=0$ ； $0'=1$

（9）德摩根律　$(x\vee y)'=x'\wedge y'$ ； $(x\wedge y)'=x'\vee y'$

（10）吸收律　$x\vee(x\wedge y)=x$ ； $x\wedge(x\vee y)=x$

上面这几条算律并不是独立的，例如可由吸收律推出幂等律。事实上，有

定理 10　布尔代数 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 中的上述 10 条算律都可由交换律、分配律、同一律、互补律得到。

上面定理也成为了判断一个代数系统是否为布尔代数的一个结论，体现为下面定理：

定理 11　设 B 是一个集合，＋和*是 B 上的两个代数运算。如果存在 $0,1\in B$ 且 $\forall a,b,c\in B$，有

（1）交换律：$a+b=b+a$；$a*b=b*a$
（2）分配律：$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$；$a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$
（3）同一律：$a*1=a$；$a+0=a$
（4）补元律：存在 $\overline{a}\in B$，使得 $a*\overline{a}=0$；$a+\overline{a}=1$

则 $(B,+,*,-,0,1)$ 为一布尔代数。

和格同态的定义类似，有两布尔代数之间同态的定义：

定义 6　设（$A,\vee,\wedge,',0,1)$ 和 $(B,\cup,\cap,-,\hat{0},\hat{1})$ 是两个布尔代数，φ 是集合 A 到集合 B 的映射。如果对任意的 $a,b\in A$，都有

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\cup\varphi(b)$$
$$\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\cap\varphi(b)$$
$$\varphi(a')=\overline{\varphi(a)}$$

则称 φ 为（A，$\vee,\wedge,',0,1)$ 到 $(B,\cup,\cap,-,\hat{0},\hat{1})$ 的布尔同态映射，简称布尔同态。当 φ 是单射、满射、双射时分别称为单一布尔同态、满布尔同态、布尔同构。

和一般的代数系统一样，我们也可以定义布尔代数的子系统即子布尔代数。

定义 7　设 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 是一个布尔代数，非空集合 $T\subseteq L$。若 T 对运算 $\vee,\wedge,'$ 封闭，则称 $(T,\vee,\wedge,')$ 是 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 的子布尔代数。显然有 $0,1\in T$。

§5.1.4　有限布尔代数的表示定理

定义 8　设 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 是一个布尔代数，如果元素 $a\neq 0$，且对于每个 $x\in L$，有 $x\wedge a=a$ 或 $x\wedge a=0$，则称 a 为原子（有些教材也称之为极小元）。

也可等价地定义为：若不存在 $u\in L$，使得 $0\prec u\prec a$，则称 a 是 L 的一个原子。

引理：布尔代数中的两个原子 a,b，若 $a\wedge b\neq 0$，则 $a\wedge b=a=b$。

引理：对布尔代数，若 a 是原子，则对任意的 $x\in B$，$a\leq x$、$a\leq x'$ 两式中有且仅有一式成立。

由此说明：原子是这样的元素：它把 B 中的元素分为两类，一类是与它可比较的元素，它小于等于这一类中的任何一个元素；另一类是与它不可比较的元素。

引理：对有限布尔代数 B，$\forall x \in B$，$x \neq 0$，则至少存在一个原子 a，使得 $a \wedge x = a$ （即 $a \leq x$）。

由上面几个引理可以得到：

定理 12　设 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 是一个有限布尔代数，对于任意的 $x \in B$，$x \neq 0$，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足 $a_i \leq x$ 的全部原子，那么

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$$

且上式是将 x 表示成为原子的保联的惟一形式（这里的惟一性仅仅对原子而言，而不管原子在式中的顺序）。

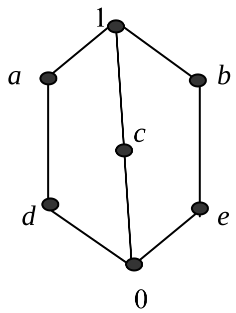


图 5-2

定理 13　（Stone 表示定理、有限布尔代数的表示定理）设 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 是个有限布尔代数，$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是它的全体原子的集合，则 $(L,\vee,\wedge,',0,1)$ 与布尔代数 $(P(S),\cup,\cap,-)$ 同构。

由上面定理可得两个推论：

推论 1　任何有限布尔代数 A，其原子个数是 n，则 $|A| = 2^n$。

推论 2　元素个数相同的布尔代数是同构的。

§5.2　重点及难点解析

§5.2.1　基本要求

1. 掌握格的两种等价定义（偏序格与代数格）。能够对偏序集所确定的哈斯图判定是否为格。
2. 熟记格运算的基本性质（交换律、结合律、吸收律、幂等律等），并会灵活运用。
3. 掌握分配格、有补格等的定义，并清楚它们之间的关系，对于具体给出的格所对应的哈斯图，应能判断是否为分配格或有补格等。
4. 掌握布尔代数的概念，熟记它们的性质，并会灵活运用。

§5.2.2　疑难点解析

1. 关于格，我们从两个侧面给出了格的等价定义，希望对格及第 2 章中涉及到的最小上界、最大下界、最小元、最大元等的定义有深刻理解。有时会碰到一些判断是否为格的题，格首先是偏序集，即满足自反、反对称、传递，通过偏序集的哈斯图表示来作判断不失为一种直观有效的方法。格的保序性等基本性质也是因为它是偏序才有的。
2. 分配格、模格、有补格等之间的关系：分配格一定是模格，但模格和有补格都不一定是分配格。并且有补格和分配格、模格之间没有直接的联系。分配格不一定是有

补格，有补格不一定是分配格；有补格不一定是模格，模格不一定是有补格。希望通过前面给出的图 5-1 的两个例子加深理解。

一直以图 5-1 的两个格作为例子说明与分配格有关的结论。这两个具有五元素的格是很重要的，有这样的结论：一个格是分配格当且仅当该格中没有任何子格与图 5-1 中的两个五元素格中的任何一个同构。因此要判断某个格不是分配格，只需找出一个这样的子格即可。即要说明不是分配格，只需找出不满足分配律的三元素即可。如图 5-2，要说明它不是分配格，实际上因$\{0,1,a,d,b\}$或者$\{0,c,d,e,1\}$、$\{0,a,b,c,1\}$等均为它的子格，因此可以找出这样的三元组如：

$$a \wedge (b \vee d) = a \wedge 1 = a \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge d) = 0 \vee d = d$$
$$d \wedge (c \vee e) = d \wedge 1 = d \neq (d \wedge c) \vee (d \wedge e) = 0$$

3. 模格或分配格的验证和在第 4 章时要验证运算满足结合律一样，是一件繁琐的事情。没有统一的方法，理论上来说，只能验证所有的可能情况，才能断定结合律是否成立。但对具体的题目可以通过哈斯图的对称性等来减少工作量。如对图 5-1 的图（1）验证是模格，需验证凡满足 $x \leq z$ 的所有的三元组 x,y,z，均有 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ 成立，但实际处理时，因为对任意相等的 x 和 z 或者 x，z 中有一个为 0 或者 1 时，一定成立。另一方面，当 y=0 或 y=1 时也当然成立，故只需验证 x 严格小于 z，且 y 不为 0 和 1 的情况。由于图例 5-1（1）没有这种情况，故图（1）是模格。
   对有补格的说明一样，若其中的每个元素均能找到补元（不要求惟一），则为有补格。而判断一个格不是有补格，则需找到某个元素不存在有补元（即任一元素均不是它的补元）。
4. 有界格、有限格之间的关系。有限格一定存在最大元和最小元，从而一定是有界格，但有界格不一定是有限格。
5. 布尔代数所具有的性质应该清楚，由于布尔代数是有补分配格，故格、分配格、有补格所具有的性质，布尔代数都具有，如满足交换律、结合律、分配律、德摩根律等，应能判断某个代数系统是否为布尔代数。
6. 布尔代数的子格，在满足最小元和最大元都在其中时才可能是子布尔代数，并且应该保持原来的运算，至少保持原来的补元等。例如努习题 33、42。
7. 格同态是保序的同态，但保序的映射不一定是同态映射。例如习题 27。

§5.3　基　本　题

§5.3.1　选择题

1．N 是自然数集，≤是小于等于关系，则（N，≤）是（　　）。

A．有界格　　B．有补格　　C．分配格　　D．有补分配格

答案：C

*2．下述偏序集（见图 5-3）中能构成格的是（　　　）。

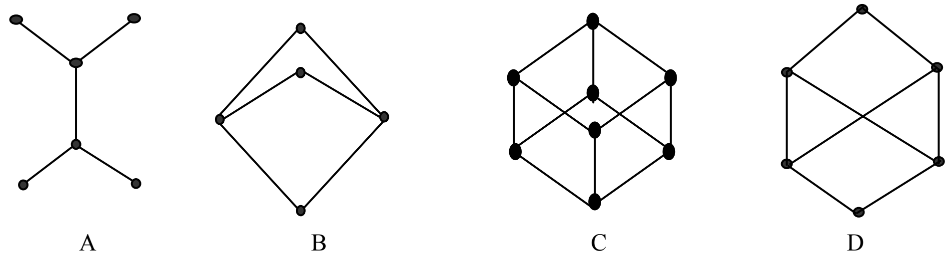


图 5-3

答案：C

*3．下述偏序集中（如图 5-4）哪一个不构成格？（　　　）

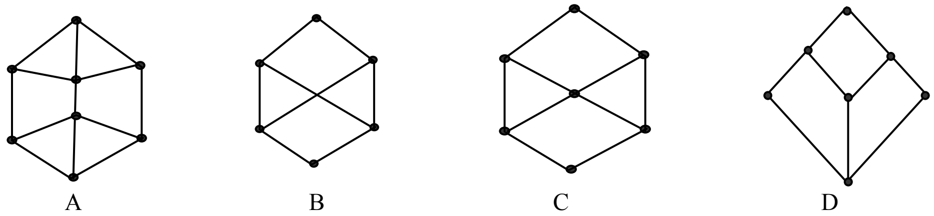


图 5-4

答案：B

4．下面哪一个偏序集（其中均略去了反映自反关系的序对）能构成格？（　　　）

A．$A=\{a,b,c,d\}$，$\leq=\{<d,c>,<c,b>,<b,a>,<d,b>,<d,a>\}$

B．$A=\{a,b,c,d,e\}$，$\leq=\{<b,a>,<c,b>,<d,b>,<e,c>,<e,d>,<e,b>\}$

C．$A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$\leq=\{<b,a>,<d,a>,<c,b>,<c,d>,<f,e>,<g,f>\}$

D．$A=\{1,2,3,4\}$，$\leq=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,4>\}$

答案：D

5．下面哪个偏序集构成有界格？（　　　）

A．$(N,\leq)$　　B．$(Z,\geq)$

C．（{2，3，4，6，12}，|）　　D．（$P(A),\subseteq$）

其中 | 为整除关系，$A=\{a,b,c\}$。

答案：D

6．设 A, B 为两集合，f 是 A 到 B 的映射，则 $S=\{f(x)\mid x\in P(A)\}$是格 $(P(B),\subseteq)$ 的（　　）。

A．核　　B．f 的值域　　C．普通子集　　D．子格

答案：D

说明：S 是以 B 的某些子集为元素组成的集合，而 f 的值域仅是 B 的某个子集；根据第 3 章中相关结论（定理 1），可知 S 为子格。

7．下面图 5-5 为四个格所对应的哈斯图，哪个是分配格？（　　　　）

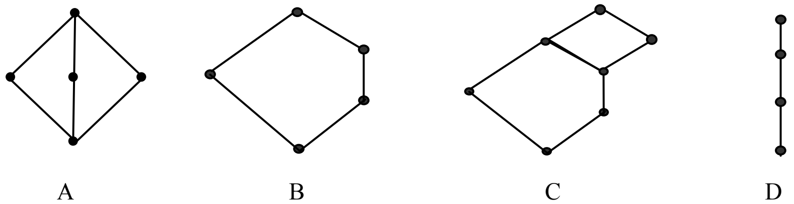


图 5-5

答案：D

8．只含有限个元素的格称为有限格，有限格必是（　　）。

A．分配格　B．有补格　C．布尔格　D．有界格

答案：D

9．下面图 5-6 表示四个格所对应的哈斯图，哪个是分配格？（　　）

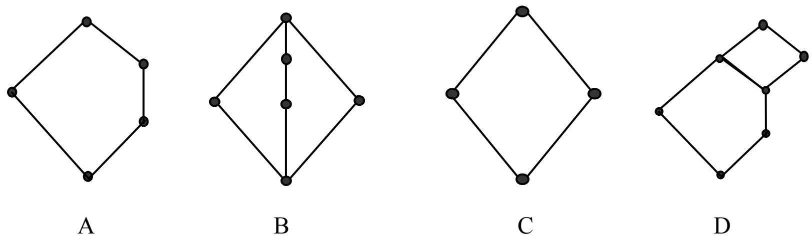


图 5-6

答案：C

10．设（L,≤）是一条链，其中$|L|\geq 3$，则（L，≤）（　　）。

A．不是格　B．是有补格　C．是分配格　D．是布尔格

答案：C

说明：由习题 9 可知，链是分配格。但在$|L|\geq 3$ 时不是有补格（习题 25）。

11．模格与分配格的关系是：模格（　　）。

A．一定是分配格　B．不是分配格　C．不一定是分配格

答案：C

12．设 A 为一集合，$(P(A),\subseteq)$ 为有补格，$P(A)$中每个元素的补元（　　）。

A．存在且惟一　B．不存在　C．存在但不惟一　D．可能存在

答案：A

13．在有界格中，若有一个元素有补元，则补元（ ）。

A．必惟一 B．不惟一 C．不一定惟一 D．可能惟一

答案：C

14．设（A，≤）是一个有界格，它也是有补格，只要满足（ ）。

A．每个元素都有一个补元 B．每个元素都至少有一个补元

C．每个元素都无补元素 D．每个元素都有多个补元素

答案：B

15．图 5-7 中哪个哈斯图表示的关系构成有补格？（ ）

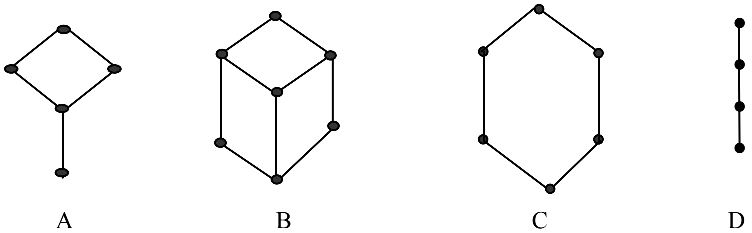


图 5-7

答案：C

16．设（S,≤）为一格，A 为（S,≤）到自身的所有格同态映射组成的集合，A 关于映射的复合运算构成一个（ ）。

A．独异点 B．群 C．环 D．循环群

答案：A

17．图 5-8 给出的哈斯图表示的格中哪个元素无补元？（ ）

A．a

B．c

C．e

D．f

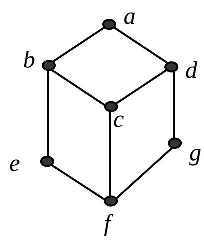


图 5-8

答案：B

18．设格 $(A,\le_1)$ 和 $(B,\le_2)$ 如图 5-9 所示，它们的运算分别为 $\vee,\wedge$ 和 $\oplus,\otimes$。令 $f(a)=x_1$，$f(b)=x_2$，$f(c)=x_4$，$f(d)=x_8$，则 f（ ）。

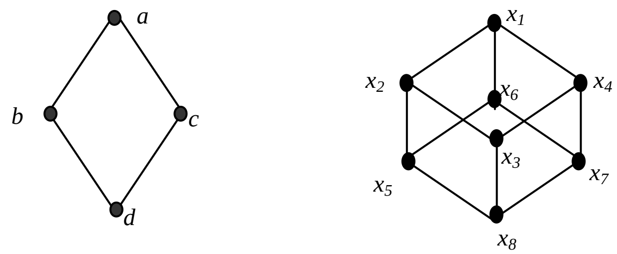


图 5-9

A．是格同态映射　　　　B．不是格同态映射

C．是格同构映射　　　　D．是自同态映射

答案：B

19．设（$L,\leq_1$）和（$S,\leq_2$）是两个格，f 是 L 到 S 的双射，则对任意的 $a,b\in L$，有 $a\leq_1 b\Leftrightarrow f(a)\leq_2 f(b)$是格同构的（　　）。

A．必要条件　　B．充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要

答案：C

20．设 Z^+为正整数集合，S 为正偶数集合，则（Z^+，|）与格（S，|）的关系为（|为整除关系）（　　）。

A．自同构　　B．同构　　C．自同态　　D．非同构

答案：B

21．设 $A=\{a,b,c\}$，下面给出的集合中，哪个不是$(P(A),\subseteq)$的子布尔代数？（　　）

A．$\{\varnothing, A\}$　　　　B．$\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},A\}$

C．$\{A,\{b\},\{a,c\}\}$　　　　D．$\{\varnothing,\{c\},\{a,b\},A\}$

答案：C

22．有限布尔代数的元素的个数必定等于（　　）。

A．$2n$　　B．n^2　　C．2^n　　D．$4n$

答案：C

§5.3.2　填空题

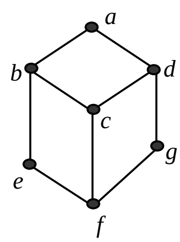


图 5-10

1．设（$L,\leq$）为一个格，其哈斯图如图 5-10 所示。
取 $S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{a,b,d,f\}$，$S_3=\{b,c,d,f\}$，
则__________是（$L,\leq$）的子格。

答案：（$S_1,\leq$）

2．设（A，≤）是分配格，若对任意的 $a,b,c \in A$，如果有 $a \wedge b = a \wedge c,\ a \vee b = a \vee c$ 成立，则_______。

答案：$b = c$

3．在有界格中，具有补元的元素集合组成一个_____格。

答案：子

4．设（A,≤）是格，其中 A={1,2,3,4,6,8,12,24}，≤为整除关系，则 3 的补元是__①__，6 的补元是__②__，8 的补元是__③__，4 的补元是__④__，1 的补元是__⑤__。

答案：① 8　② 不存在　③ 3　④ 不存在　⑤ 24

5．设 $(A,\vee,\wedge,-)$ 是一个布尔代数，如果在 A 上定义二元运算 $\oplus$ 为：
$a \oplus b = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b)$，则 $(A,\oplus)$ 是一个_____ 。

答案：交换群

说明：证明见习题 41。

6．设 12 的整因子集合为 $K = \{1,2,3,4,6,12\}$，则（K，LCM，GCD，'）________布尔代数。其中 LCM、GCD 分别表示最大公约数与最小公倍数，x' 表示 12 被 x 除后的商。

答案：不是

7．任何一个具有 2^n 个元素的有限布尔代数都是__________。

答案：同构的

§5.3.3 判断题

1．设（A,≤）是一个分配格，则对任意 $a,b,c \in A$，有 $(a \vee b) \wedge c \le a \vee (b \wedge c)$。（ ）
答案：√

2．在有界分配格中，一个元素若有补元，则补元不一定是惟一的。（ ） 答案：×

3．任何两个具有 2^n 个元素的有限布尔代数都是同构的。（ ） 答案：√

4．具有两个或多个元素的格中不存在以自身为补元的元素。（ ） 答案：√

5．图 5-11 是格 L 所对应的哈斯图，则 L 是模格。（ ） 答案：√

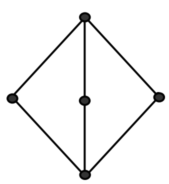


图 5-11

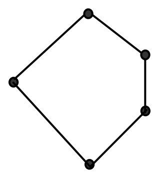


图 5-12

6．图 5-12 是格 L 所对应的哈斯图，则 L 是模格。(　)　答案：×

*7．分配格一定是模格。(　)　答案：√

8．设 A 为一集合，则 $(P(A),\subseteq)$ 是有补格。(　)　答案：√

9．设（$L,\leq$）为一链，则（$L,\leq$）为分配格。(　)　答案：√

10．设 $A=\{a,b,c\}$，S 为 30 的所有因子组成的集合，则格 $(P(A),\subseteq)$ 与（$S,|$）同构，其中｜是整除关系。(　)　答案：√

11．设（$L,\leq$）为一格，它诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$，则对任意的 $a,b,c\in L$，$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 成立。(　)　答案：×

12．设（$L,\leq$）为一分配格，对于任意的 $a,b,c\in L$，如果 $a\wedge c=b\wedge c,\ a\vee c=b\vee c$，则 b 不一定等于 a。(　)　答案：×

13．在一个布尔代数中，下面二式成立：$a\vee(\bar{a}\wedge b)=a\vee b$；$a\wedge(\bar{a}\vee b)=a\wedge b$ (　)　答案：√

14．设 $(A,\vee,\wedge,-)$ 为一布尔代数，则（A，⊙）是一个交换群，其中⊙定义为：$a\odot b=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)$ (　)　答案：√

说明：见习题 41。

§5.4　习 题 解 析

*1．为什么图 5-13 中所给的偏序不是格？

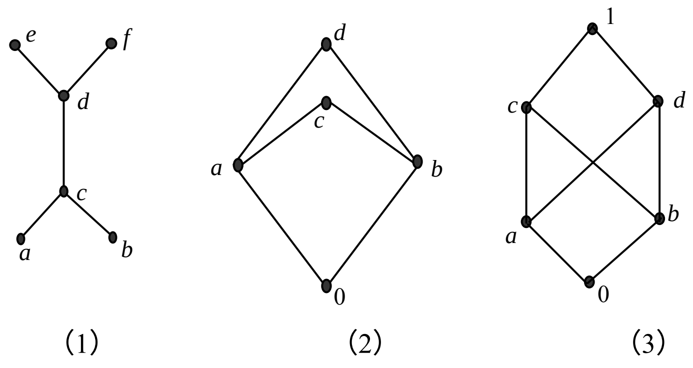


图 5-13

解：

图（1）中，a，b 没有最大下界（e，f 没有最小上界），故不是格。

图（2）中，a，b 的最小上界不存在（有两个上界 c、d，但 c，d 均不是其最小上界），故不是格。

图（3）中，a，b 的最小上界不存在（1，c，d 均是其上界，但不存在最小上界），故不是格。

2．由下列集合 L 构成的偏序集（L，≤），其中≤定义为：
对于 $x, y \in L$，$x \le y$ 当且仅当 x 是 y 的因子。问其中哪几个偏序集是格？

（1）$L=\{1,2,3,4,6,12\}$
（2）$L=\{1,2,3,48,12,14\}$
（3）$L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

解：

（1）是格。
（2）不是格，因为 12，14 没有最小上界。
（3）不是格，因为 9，10 没有最小上界。

*3．设 L 是格，试证明：$\forall a,b,c \in L$，有

（1）$a \wedge (b \vee c) \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
（2）$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

证：

（1）因为 $a \ge a \wedge b$，$a \ge a \wedge c$，有 $a \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
又因 $b \ge a \wedge b$，有 $b \vee c \ge a \wedge b$，同理 $b \vee c \ge a \wedge c$
从而有 $a \wedge (b \vee c) \ge (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

（2）和上面类似的证明，有

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a \le a \vee b \\ a \le a \vee c \end{array}\right\} \Rightarrow a \le (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ \left.\begin{array}{r} b \le a \vee b \Rightarrow b \wedge c \le a \vee b \\ c \le a \vee c \Rightarrow b \wedge c \le a \vee c \end{array}\right\} \Rightarrow b \wedge c \le (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{array}\right\} \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

4．设（L,≤）是一个格，它诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$。对于任意的 $a,b,c \in L$，试证明：若 $a \le b \le c$，则

（1）$a \vee b = b \wedge c$
（2）$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

证：

由 $a \le b \le c$，有

（1）$a \vee b = b = b \wedge c$，故原题（1）式成立。
（2）$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \vee b = b$
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge c = b$，两者相等，故原题（2）式成立。

5．设 $< L, \le >$ 为一格，证明：对于任意的 $a,b,c,d \in L$，有

（1）$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)$
（2）$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

证：

此题和第 3 题证明方法类似。

（1）由格所具有的基本性质（保序性，定理 4），有

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a \le a \vee c\\ b \le b \vee d\end{array}\right\} \Rightarrow a \wedge b \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)\\ \left.\begin{array}{l}c \le a \vee c\\ d \le b \vee d\end{array}\right\} \Rightarrow c \wedge d \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)\end{array}\right\} \Rightarrow (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \le (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

（2）由（1）的证明，有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (b \vee c)$$
$$(b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

再次由格的保序性及幂等律，有

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$$

6．设（L,≤）是一个格，它诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$。对于任意的 $a,b,c \in L$，试证明：若 a≤b，则

（1）$(a \vee (b \wedge c)) \vee c = (b \wedge (a \vee c)) \vee c$

（2）$(b \wedge (a \vee c)) \wedge c = (a \vee (b \wedge c)) \wedge c$

证：

由 a≤b，有 $a \vee b = b,\ a \wedge b = a$，因此有

（1）左边= $(a \vee (b \wedge c)) \vee c = (a \vee ((b \vee c) \vee c) = a \vee c$

对右边，因　$(b \wedge (a \vee c)) \vee c \leq (a \vee c) \vee c = a \vee c$

且　$(b \wedge (a \vee c)) \vee c \geq (a \wedge (a \vee c)) \vee c = a \vee c$

有　$(b \wedge (a \vee c)) \vee c = a \vee c$

从而原题（1）式成立。

（2）和（1）的证明类似。左边= $(b \wedge (a \vee c)) \wedge c = b \wedge ((a \wedge c) \wedge c) = b \wedge c$

对右边，因　$(a \vee (b \wedge c)) \wedge c \leq (b \vee (b \wedge c)) \wedge c = b \wedge c$

且　$(a \vee (b \wedge c)) \wedge c \geq (b \wedge c) \wedge c = b \wedge c$

证得　$(b \wedge (a \vee c)) \wedge c = (a \vee (b \wedge c)) \wedge c$

7．设 $< L,\le >$ 为一格，证明：对于任意的 $a,b,c \in L$，有
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ 成立，则
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 也成立。
反之亦然。

证：

假设对任意的 $a,b,c \in L$，有 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

则

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) && \text{把 } a \vee b \text{ 看作上式的 } a\\ &= ((a \wedge a) \vee (b \wedge a)) \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) && \text{再次利用条件}\\ &= (a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

$$= a \vee (b \wedge c) \qquad \text{吸收律}$$

反之，类似可证。

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge (a \vee b)) \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

8．证明在任何格（$L,\leq$）中，对任意的 $a,b,c \in L$，

$$\big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) = a \wedge b$$

成立。

证：

由格的基本性质，有

$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$；$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$，从而可得
$a \wedge b \leq \big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big)$

另外，由于 $a \wedge c \leq a$；$a \wedge b \leq a$，可得 $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a$
同理可证 $\big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) \leq b$
由定理 4，可得 $\big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) \leq a \wedge b$
综合可得 $\big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) = a \wedge b$。证毕。

说明：不能够由分配律，得

$$\big((a \wedge b) \vee (a \wedge c)\big) \wedge \big((a \wedge b) \vee (b \wedge c)\big) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

从而由吸收律得证。因为这不是分配格，不一定满足分配律。

9．所有链都是分配格。

证：

设$(L,\leq)$是链，因此（$L,\leq$）是格，假设它们的自然运算为 $\wedge,\vee$。任取 $a,b,c \in L$，只有以下两种情况：

（1）a 是三者中最大的，即 $b\leq a$，$c\leq a$
（2）a 不是三者中最大的，即 $a\leq b$ 或 $a\leq c$

情况（1），$b \vee c \leq a$，故 $a \wedge (b \vee c) = b \vee c$。显然 $a \wedge b = b$，$a \wedge c = c$，所以
$a \wedge (b \vee c) = b \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
情况（2），$a \leq b \vee c$，而 $a \wedge b = a$ 或 $a \wedge c = a$，从而 $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a$，所以
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a = a \wedge (b \vee c)$

由于分配律是对偶的（习题 7），故只需证一个分配律，所以（$L,\leq$）是分配格。

10．D_{90} 表示 90 的全体因子的集合，包括 1 和 90，D_{90} 与整除 | 构成格。

（1）画出格的哈斯图；

（2）计算 $6 \vee 10$，$6 \wedge 10$，$9 \vee 30$ 和 $9 \wedge 30$；

（3）求 D_{90} 的所有含 4 个元素且包含 1 和 90 的子格。

解：

（1）格 $(D_{90},|)$ 所对应的哈斯图如图 5-14 所示：

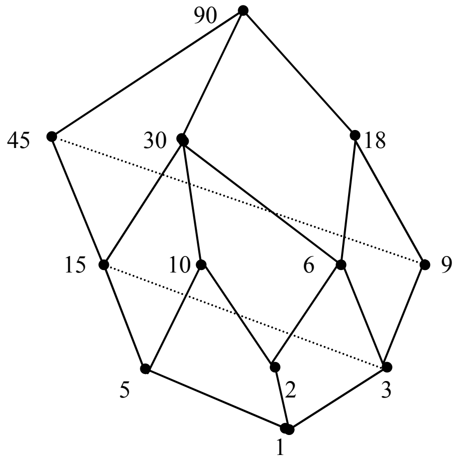


图 5-14

（2）从图中可以看出：

$6 \vee 10 = 30;\ 6 \wedge 10 = 2;\ 9 \vee 30 = 90;\ 9 \wedge 30 = 3$。

（3）通过对除去 1，90 之后的 10 个元素的二元素组合 $C_{10}^2 = 45$ 个进行验证，可求出满足条件的子格共 24 个，有：

{1，2，6，90}；{1，2，10，90}；{1，2，18，90}；{1，2，30，90}；
{1，2，45，90}；{1，3，6，90}；{1，3，9，90}；{1，3，15，90}；
{1，3，18，90}；{1，3，30，90}；{1，3，45，90}；{1，5，10，90}；
{1，5，15，90}；{1，5，18，90}；{1，5，30，90}；{1，5，45，90}；
{1，6，18，90}；{1，6，30，90}；{1，9，10，90}；{1，9，18，90}；
{1，9，45，90}；{1，10，30，90}；{1，15，30，90}；{1，15，45，90}。

说明：对于子格的求法，没有统一标准的方法，此题只需通过穷举所有的可能即可。

11．只含有限个元素的格称为有限格。试证明：有限格必是有界格。

证：

设（$L,\leq$）是一有限格，它诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$。由于 L 只有有限个元素，因而可设 $L = \{a_1, a_2, \Lambda, a_n\}$。令 $a = a_1 \vee a_2 \vee \Lambda \vee a_n$，则有 $a \in L$，且 $a_i \leq a$，$i = 1,2,\Lambda, n$，所以 a 是 L 的最大元。记 a=1。

取 $b = a_1 \wedge a_2 \wedge \Lambda \wedge a_n$，则 $b \in L$，且 $b \leq a_i$，$i = 1,2,\Lambda, n$，故 b 是 L 的最小元，记

b=0。于是对任意的 $x \in L$，均有 0≤x≤1 成立，故（L,≤）是有界格。

12．设（L，≤）为一有界分配格，L_1 是 L 中所有具有补元的元素组成的集合，试证明：（L_1，$\leq_1$）是（L，≤）的子格。

证：

设（L,≤）诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$，由于 0，1 互为补元，所以 $0,1 \in L_1$，故 L_1 非空。对于任意的 $a,b \in L_1$，存在 $a',b' \in L$ 使 a',b' 分别为 a，b 的补元。注意到（L,≤）为有界分配格，有

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a' \wedge b' \wedge a) \vee (a' \wedge b' \wedge b) = (a' \wedge a \wedge b') \vee (a' \wedge b' \wedge b) = 0 \vee 0 = 0$$
$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a' \vee b' \vee a) \wedge (a' \vee b' \vee b) = (a' \vee a \vee b') \wedge (a' \vee b' \vee b) = 1 \wedge 1 = 1$$

类似可证：

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1$$
$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = 0$$

故 $a \vee b$ 和 $a \wedge b$ 均具有补元，且 $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$，$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$，从而 $a \vee b,\ a \wedge b \in L_1$，证得（$L_1$,$\leq_1$）是（$L$,≤）的子格。

13．设（L,$\leq_1$）为一格，对于任意的 $a,b \in L$，定义 $a \leq_2 b$ 当且仅当 $b \leq_1 a$。证明：（L,$\leq_2$）也为一格。

证：

设（L，$\leq_1$）诱导的代数格为 $(L_1,\vee_1,\wedge_1)$。对于任意的 $a,b \in L$，记 $c = a \vee_1 b$，则 $c \in L$，并且 $a \leq_1 c$，$b \leq_1 c$。由 $\leq_2$ 的定义，有 $c \leq_2 a$，$c \leq_2 b$。这说明，在（L,$\leq_2$）中，c 是{a,b}的下界。另一方面，若 c' 是{a,b}在（L，$\leq_2$）中的下界，即 $c' \leq_2$a，$c' \leq_2 b$，则有 $a \leq_1 c'$，$b \leq_1 c'$，于是 $c = a \vee_1 b \leq_1 c'$，得 $c' \leq_2 c$。所以，c 是{a,b}在（L,$\leq_2$）中的最大下界。

类似可证，$a \wedge_1 b$ 是 a,b 在（L,$\leq_2$）中的最小上界。所以，（L,$\leq_2$）也是一格。

14．在图 5-15 中，试给出两个含有 6 个元素的格，使其中一个是分配格，一个不是分配格。

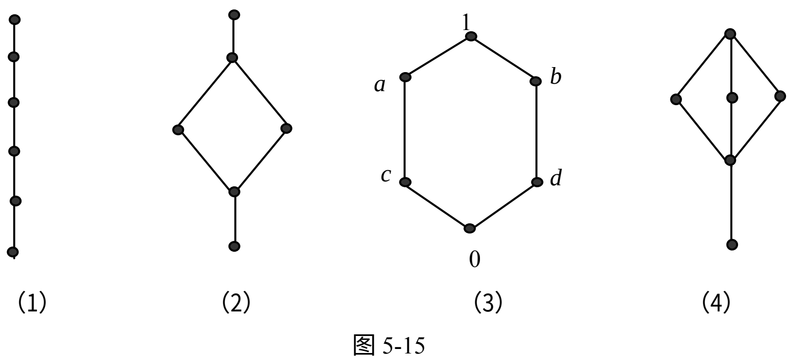


图 5-15

解：

由习题 9 可知图 5-15（1）给出的是分配格，（2）也是分配格。（3）是一格，但不是分配格，如　$a\wedge(b\vee c)=a\wedge 1=a$，$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=0\vee c=c$
两者不等，故不是分配格。（4）也不是分配格。

15．设$(L,\leq)$为一分配格，对于任意的$x,y\in L$，求证：如果$x\wedge a=y\wedge a;\ x\vee a=y\vee a$，这里$a\in L$
则　$x=y$。

证：

$$x\overset{\text{吸收}}{=\!=}x\wedge(x\vee a)\overset{\text{分配}}{=\!=}(x\wedge x)\vee(x\wedge a)\overset{\text{条件}}{=\!=}x\vee(y\wedge a)\overset{\text{分配}}{=\!=}(x\vee y)\wedge(x\vee a)$$
$$\overset{\text{条件}}{=\!=}(x\vee y)\wedge(y\vee a)\overset{\text{分配}}{=\!=}y\vee(x\wedge a)\overset{\text{条件}}{=\!=}y\vee(y\wedge a)\overset{\text{吸收}}{=\!=}y$$

16．证明：一个格（$L,\leq$）是分配格当且仅当对于任意的$a,b,c\in L$，有

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$$

证：

必要性。由（$L,\leq$）是分配格，则对任意的$a,b,c\in L$，有

$$\begin{aligned}(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)&=((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee c)\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee a) && \text{分配律}\\ &=((a\wedge b)\vee c)\wedge((b\wedge c)\vee a) && \text{交换律、吸收律}\\ &=(a\vee c)\wedge(b\vee c)\wedge(b\vee a)\wedge(c\vee a) && \text{分配律}\\ &=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a) && \text{幂等律、交换律}\end{aligned}$$

充分性。由已知条件，则对任意的$a,b,c\in L$，有

$$(((a\vee b)\wedge(a\vee c))\wedge a)\vee(a\wedge(b\vee c))\vee((b\vee c)\wedge((a\vee b)\wedge(a\vee c)))$$
$$=(((a\vee b)\wedge(a\vee c))\vee a)\wedge(a\vee(b\vee c))\wedge((b\vee c)\vee((a\vee b)\wedge(a\vee c)))$$

这里　$(a\vee b)\wedge(a\vee c),\ a,\ (b\vee c)$ 分别相当于式中的 a,b,c。

而上式左端$=a\vee(a\wedge(b\vee c))\vee((b\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(a\vee c))$　　吸收律
$=a\vee((b\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(a\vee c))$　　吸收律、交换律
$=a\vee((a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$　　已知条件
$=a\vee(b\wedge c)$

因为　$a\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$，故　$((a\vee b)\wedge(a\vee c))\vee a)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
因为　$(a\vee b)\wedge(a\vee c)\leq a\vee b\vee c$，故
$$((a\vee b)\wedge(a\vee c))\wedge(a\vee b\vee c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

将此二结果代入上式右端，再利用吸收律，得

右端$=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
得证$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
由习题 7 可知，又有$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

所以，（$L,\leq$）是分配格。

17．设$<L,\vee,\wedge,-,0,1>$为一有补分配格，证明：对于任意的$a,b\in L$，下述四个条件是等价的：

（1） $a\le b$　　（2） $a\wedge\bar{b}=0$　　（3） $\bar{a}\vee b=1$　　（4） $\bar{b}\le\bar{a}$

证：

（1） ⇒ （2）。由$a\le b$，有$a\wedge\bar{b}\le b\wedge\bar{b}=0$，由此可得 $a\wedge\bar{b}=0$

（2） ⇒ （3）。由$a\wedge\bar{b}=0$，因L是有补分配格，$\bar{a}\vee b=\overline{a\wedge\bar{b}}=\bar{0}=1$

（3） ⇒ （4）。由$\bar{a}\vee b=1$，且L是分配格，有

$\bar{b}=(\bar{a}\vee b)\wedge\bar{b}=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})=\bar{a}\wedge\bar{b}$，即 $\bar{b}\le\bar{a}$

（4） ⇒ （1）。由$\bar{b}\le\bar{a}$，因 L 是有补分配格，有$a\wedge b=\overline{\bar{a}\vee\bar{b}}$

18．设$<L,\le>$为一有补分配格。则L中任何元素的补元都是惟一的。

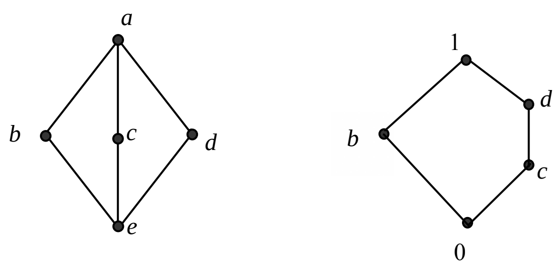
证：

设a是L中的任一元素，如果$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$都是a补元，则有

$$\bar{a}_1=\bar{a}_1\wedge(a\vee\bar{a}_2)=(\bar{a}_1\wedge a)\vee(\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2)=\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2$$
$$\bar{a}_2=\bar{a}_2\wedge(a\vee\bar{a}_1)=(\bar{a}_2\wedge a)\vee(\bar{a}_2\wedge\bar{a}_1)=\bar{a}_1\wedge\bar{a}_2$$

故有$\bar{a}_1=\bar{a}_2$

19．图 5-16 给出两个格L_1, L_2的哈斯图，试说明L_1是模格，但不是分配格，L_2不是模格。



L_1　　　　L_2

图 5-16

解：

在正文中我们已论证这两个格均不是分配格。

为验证 L_1 是模格，根据定义，要证：$\forall x,y,z\in L_1$，若 $x\le z$，就有$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$。显然，当$x$=$z$时成立，下面就$x\ne z$分情况讨论如下：

（1） z=a。(此时x=e或$x\in\{b,c,d\}$)。显然，$x\vee(y\wedge a)=x\vee y=(x\vee y)\wedge a$成立。

（2） x=e。(此时$z\in\{b,c,d\}$或z=a)。显然，$e\vee(y\wedge z)=y\vee z=(e\vee y)\wedge z$成立。

基于上面说明，L_1是模格。

对 L_2，有 $c\le d$，但$c\vee(b\wedge d)=c\vee 0=c$，$(c\vee b)\wedge d=1\wedge d=d$，两者不等，故$L_2$不是模格。

20．设（L，$\le$）为一格，试证明（L，$\le$）为分配格的充要条件是对于任意的$a,b,c \in L$，有：$(a \vee b) \wedge c \le a \vee (b \wedge c)$

证：

设（L，$\le$）是分配格。

由　$a \wedge c \le a$ 和 $(b \wedge c) \le (b \wedge c)$ 可得　$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \le a \vee (b \wedge c)$

所以　$(a \vee b) \wedge c \le a \vee (b \wedge c)$。

反之，若对任意的$a,b,c \in L$，有$(a \vee b) \wedge c \le a \vee (b \wedge c)$，则可得

$(a \vee b) \wedge c = ((b \vee a) \wedge c) \wedge c$

$\le (b \vee (a \wedge c)) \wedge c$　　由已知条件

$= ((a \wedge c) \vee b) \wedge c$

$\le (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$　　由已知条件

又由　$a \wedge c \le (a \vee b) \wedge c$ 和 $b \wedge c \le (a \vee b) \wedge c$

可得　$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$

于是就有　$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

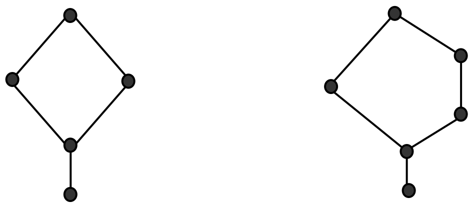
由习题 7 可知　$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ 也成立。

故（L，$\le$）是分配格。

21．举出两个含有 6 个元素的格，其中一个是模格，另一个不是模格。

解：

图 5-17 给出了两个 6 元素的格，其中（1）是模格，而（2）不是模格。



（1）　　（2）

图 5-17

22．设（L，$\le$）为一格，试证明（L，$\le$）为模格的充分必要条件是对于任意的$a,b,c \in L$，有　$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$。

证：

必要性：设 L 是模格。因为 $a \le a \vee c$，故

$a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

充分性：设$a,b \in L$，$b \le a$，则　$a \wedge (c \vee b) = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$

因为 $b \le a$，所以 $a = a \vee b$

$= b \vee (c \wedge (b \vee a))$　　已知条件

$= b \vee (c \wedge a)$

所以 L 是模格。

23．图 5-18 是格 L 所对应的哈斯图；

（1）若 $a,b,d,0$ 的补元存在，写出它们的补元。

（2）L 是否是有补格？说明理由。

（3）L 是否是分配格？说明理由。

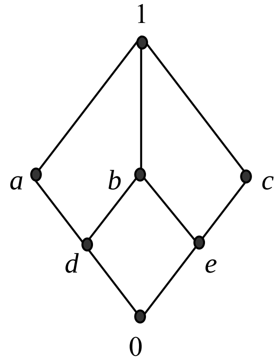


图 5-18

解：

（1）$\overline{a}=c,\ \overline{a}=e;\ \overline{d}=c;\ \overline{0}=1;\ \overline{b}$ 不存在。

（2）L_1 不是有补格，因为 b 无补元。

（3）L_1 不是分配格，因为 $(a\vee e)\wedge c=1\wedge c=c$ 而 $(a\wedge c)\vee(e\wedge c)=0\vee e=e$，两者不等。

24．（1）将格（D_{36},|）的元素填入图 5-19 哈斯图。

（2）D_{36} 是分配格吗？

（3）D_{36} 是有补格吗？

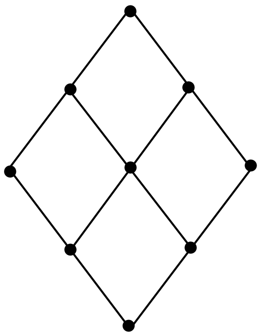


图 5-19

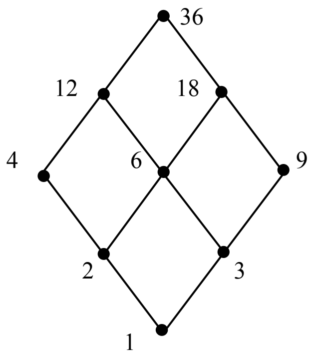


图 5-20

解：

（1）如图 5-20 所示。

（2）是分配格。（需一一验证）（直观地，没有和图 5-1 中两图同构的子格，故是分配格。）

（3）不是有补格（2，3，6，12，18 均无补元）。

说明：① 由习题 7 知，只需要验证一个分配式如 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ 即可。另一方面，当 a,b,c 任一元素为最小元 1 或最大元 36，或任两元素相等时，分配式显然成立，故只需对不为 1 和 36 且互不相等的 a,b,c 验证。

② 事实上，因为 D_{36} 的所有元素中，任两元素的最小公倍数、最大公约数都在 D_{36} 中，或说最小公倍数和最大公约数作为两种运算对 D_{36} 是封闭的。且最小公倍数和最大公约数两种运算满足分配律，故 D_{36} 是分配格。

25．试证明：具有三个或更多元素的链不是有补格。

证：

设具有三个或更多元素的链为（L,≤）。

对于任一元素 $a \in L$，且 $a \neq 0,\ a \neq 1$，如果 a 有补元 b，即有 $a \vee b = 1$，$a \wedge b = 0$。
因为 L 是链，必有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$。
若 $a \leq b$，则有 $a \wedge b = a$ 这与 $a \neq 0$ 矛盾。
若 $b \leq a$，则有 $a \vee b = a$ 这与 $a \neq 1$ 矛盾。
矛盾表明 a 的补元 b 不存在。因此，这种链不是有补格。

26．设（L,≤）为一分配格，$a, b \in L$ 且 $a \pi b$。令 $f(x) = (x \vee a) \wedge b,\ \forall x \in L$。试证明：$f$ 是（L,≤）到自身的格同态映射，并求同态象 $f(L)$。

证：

设（L,≤）诱导的代数格为 $(L, \vee, \wedge)$。对任意的 $x, y \in L$，有

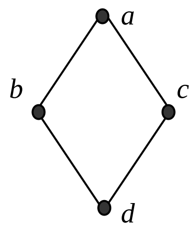
$$
\begin{aligned}
f(x \vee y) &= ((x \vee y) \vee a) \wedge b \\
&= ((x \vee a) \vee (y \vee a)) \wedge b \\
&= ((x \vee a) \wedge b) \vee ((y \vee a) \wedge b) \qquad \text{分配律} \\
&= f(x) \vee f(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x \wedge y) &= ((x \wedge y) \vee a) \wedge b \\
&= ((x \vee a) \wedge (y \vee a)) \wedge b \\
&= ((x \vee a) \wedge b) \wedge ((y \vee a) \wedge b) \qquad \text{分配律} \\
&= f(x) \wedge f(y)
\end{aligned}
$$

证得 f 是 L 到自身的同态映射。

对任意的 $x \in L$，有 $a \leq x \vee a$。注意到 $a \pi b$，故必有 $a \leq (x \vee a) \wedge b \leq b$，即 $a \leq f(x) \leq b$。另一方面，若 $a \leq x \leq b$，则 $(a \vee x) \wedge b = x \wedge b = x$，即 $f(x) = x$。
从而 $f(L) = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$

27．举例说明：保序的格映射不一定是格同态映射。



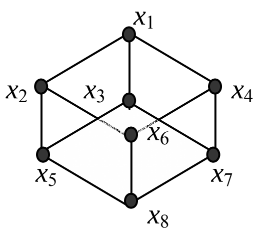


图 5-21

解：

设格（A，$\leq_1$）和（B，$\leq_2$）如图 5-21 所示，它们的运算分别为 $\vee, \wedge$ 和 $\oplus, \otimes$。令 $f(a) = x_1$，$f(b) = x_2$，$f(c) = x_4$，$f(d) = x_8$。显然 f 是 A 到 B 的映射且是保序的。但 $f(b \wedge c) = f(d) = x_8$，而 $f(b) \otimes f(c) = x_2 \otimes x_4 = x_6$，故

$f(b \wedge c) \neq f(b) \otimes f(c)$

可见，f 不是格同态映射。

28．设 f 是（$L,\vee_1,\wedge_1$）到（$S,\vee_2,\wedge_2$）的格同态映射。考虑商集 $L/f=\{[a]\mid a\in L\}$，其中 $[a]=\{x\mid x\in L且f(x)=f(a)\}$。在 L/f 上规定运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 如下：对任意的 $[a],[b]\in L/f$，定义 $[a]\vee[b]=[a\vee_1 b]$，$[a]\wedge[b]=[a\wedge_1 b]$。证明：

（1）$\vee$ 和 $\wedge$ 是 L/f 上的二元运算；

（2）（$L/f,\vee,\wedge$）是一个代数格；

（3）令 $f*:[a]\to f(a),\ \forall[a]\in L/f$，则 $f*$ 是 L/f 到 $f(L)$ 的格同构映射。

证：

（1）根据定义，显然运算是封闭的，这里只需说明定义的合理性，即若 $[a]=[a']$，$[b]=[b']$，是否有 $[a]\vee[b]=[a']\vee[b']$ 及 $[a]\wedge[b]=[a']\wedge[b']$ 成立。

事实上，由定义，有

$\forall[a],[b]\in L/f$，有 $[a]=[b]\Leftrightarrow f(a)=f(b)$

因 $[a]\vee[b]=[a\vee_1 b]$，$[a']\vee[b']=[a'\vee_1 b']$，而 $f(a)=f(a')$，$f(b)=f(b')$，且 f 是同态映射，有

$f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b)=f(a')\vee_2 f(b')=f(a'\vee_1 b')$

可得 $[a\vee_1 b]=[a']\vee_1[b']$，同理可证 $[a\wedge_1 b]=[a']\wedge_1[b']$，得证定义是合理的。

（2）根据代数格的定义，只需说明运算满足交换律、结合律、幂等律即可。这可类似上面证明运算定义合理性方法来证明。这里选交换律来说明。

因为 $[a]\vee[b]=[a\vee_1 b]=[b\vee_1 a]=[b]\vee[a]$

同理可证 $[a]\wedge[b]=[b]\wedge[a]$，运算是可交换的。

（3）首先，显然有（$f(L),\vee_2,\wedge_2$）是（$S,\vee_2,\wedge_2$）的子格，其本身也是一个格。

$\forall[a],[b]\in L/f$，有 $[a]=[b]\Leftrightarrow f(a)=f(b)$

故 f_* 是 L/f 到 $f(L)$ 的映射且是一个单射。又显然 f_* 是 L/f 到 $f(L)$ 的满射。

其次，对 $\forall[a],[b]\in L/f$，有

$$f*([a]\vee[b])=f*([a\vee_1 b])=f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b)=f*([a])\vee_2 f*([b])$$
$$f*([a]\wedge[b])=f*([a\wedge_1 b])=f(a\wedge_1 b)=f(a)\wedge_2 f(b)=f*([a])\wedge_2 f*([b])$$

证得 $f*$ 是 L/f 到 $f(L)$ 的格同构映射。

29．设 $(L,\vee,\wedge)$ 是一分配格，$a\in L$。设

$$f(x)=x\vee a,\ \forall x\in L$$
$$g(x)=x\wedge a,\ \forall x\in L$$

试证明：f 和 g 都是 $(L,\vee,\wedge)$ 到自身的格同态映射。

证：

对于任意的 $x,y\in L$，有

$$f(x)\vee f(y)=(x\vee a)\vee(y\vee a)$$

$$\begin{aligned} &= (x \vee y) \vee a && L \text{ 是分配格} \\ &= f(x \vee y) \\ f(x) \wedge f(y) &= (x \vee a) \wedge (y \vee a) \\ &= (x \wedge y) \vee a && L \text{ 是分配格} \\ &= f(x \wedge y) \end{aligned}$$

得证 f 是 $(L,\vee,\wedge)$ 到自身的格同态映射。

同理可证 g 也是 $(L,\vee,\wedge)$ 到自身的格同态映射。

30．设 f 是格（$L,\leq_1$）到格（$S,\leq_2$）是的双射。证明：f 格同构的充分必要条件是：对任意的 $a,b \in L$，有 $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$。

证：

必要性：若 f 是格同构，则对任意的 $a,b \in L$，

若 $a \leq_1 b$，由于格同态映射是保序映射，有 $f(a) \leq_2 f(b)$

另一方面，若 $f(a) \leq_2 f(b)$，由于 f 是双射，且是同态，则 f 是保序映射，有 $a \leq_1 b$

即　$a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$

充分性：若对任意的 $a,b \in L$，有 $a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$。因 $x \leq_1 x \vee y$，有 $f(x) \leq_2 f(x \vee y)$，同样有 $f(y) \leq_2 f(x \vee y)$，故 $f(x) \vee f(y) \leq_2 f(x \vee y)$

另一方面，对 $f(x) \vee f(y) \in S$，因 f 是双射，存在 $z \in L$，使得 $f(z) = f(x) \vee f(y)$，即 $f(x) \leq_2 f(z)$，$f(y) \leq_2 f(z)$，由条件，有 $x \leq_1 z$，$y \leq_1 z$，从而 $x \vee y \leq_1 z$，再次由条件，有 $f(x \vee y) \leq_2 f(z) = f(x) \vee f(y)$

综上所述，有 $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$。同理可证：$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$，即 f 是两格之间的同态映射，从而同构。

31．设（$L,\leq$）是一个分配格，它诱导的代数格为 $(L,\vee,\wedge)$，$a,b \in L$。设

$$X = \{x \in L \mid a \wedge b \leq x \leq a\}$$
$$Y = \{y \in L \mid b \leq y \leq a \vee b\}$$

令 $f(x) = x \vee b,\ \forall x \in X$；$g(y) = y \wedge a,\ \forall y \in Y$。试证明：$f$ 和 g 是 X 与 Y 之间一对互逆的格同构映射。

证：

首先，对任意的 $x \in X$，有 $a \wedge b \leq x \leq a$。于是，$b = (a \wedge b) \vee b \leq x \vee b \leq a \vee b$，即 $b \leq f(x) \leq a \vee b$，有 $f(x) \in Y$，从而 f 是 X 到 Y 的映射。同理，g 是 Y 到 X 的映射。

其次，对任意的 $x \in X$，有

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (x \vee b) \wedge a \\ &= (x \wedge a) \vee (b \wedge a) && L \text{ 是分配格} \\ &= x \vee (a \wedge b) && x \leq a\text{，交换律} \\ &= x && a \wedge b \leq x \end{aligned}$$

类似可证，对任意的 $y \in Y$，有 $f(g(y)) = y$。从而，f 和 g 都是双射且互逆。

最后，对任意的 $x, y \in X$ ，有

$$\begin{aligned} f(x) \vee f(y) &= (x \vee b) \vee (y \vee b) \\ &= (x \vee y) \vee b \\ &= f(x \vee y) \\ f(x) \wedge f(y) &= (x \vee b) \wedge (y \vee b) \\ &= (x \wedge y) \vee b \\ &= f(x \wedge y) \end{aligned}$$

所以，f 是 X 到 Y 的格同构。而 g 是 f 的逆映射，g 也是 Y 到 X 的格同构。

32．设 f 是格（$L,\leq_1$）到格（$S,\leq_2$）的满同态映射。证明：

若（$L,\leq_1$）是有界格，则格（$S,\leq_2$）也是有界格。

证：

因（$L,\leq_1$）是有界格，设最大元为 1，最小元为 0。令 $f(1)=\hat{1},\ f(0)=\hat{0}$，则 $\hat{1},\hat{0}\in S$ 。对于任意的 $\hat{x}\in S$ ，因 f 是满射，存在 $x\in L$ ，使得 $f(x)=\hat{x}$ 。又因 f 是同态映射，知 f 是保序的，故由 $0\leq_1 x\leq 1$，有 $f(0)\leq_2 f(x)\leq_2 f(1)$，即 $\hat{0}\leq_2\hat{x}\leq_2\hat{1}$。这说明 $\hat{0},\hat{1}$ 分别是（$S,\leq_2$）的最大元和最小元。得证（$S,\leq_2$）是有界的。

33．对于格（$D_{30},|$），

（1）证明格（$D_{30},|$）是布尔格；

（2）作出对应偏序集的哈斯图；

（3）找出 D_{30} 的所有原子；

（4）找出 D_{30} 的所有子布尔代数；

（5）找出一个含有 4 个元素的子格，它不是子布尔代数。

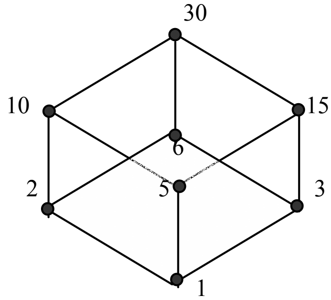


图 5-22

证：

（1）如图 5-22 所示。容易说明它是偏序集，且其中每对元素都存在最大下界和最小上界，故是格。又因为满足分配律，每个元素都有补元，故是布尔格。

（2）其哈斯图如图 5-22 所示。

（3）D_{30} 的所有原子有：2，3，5。

（4）D_{30} 的所有子布尔代数有：{1,2,15,30}，{1,3,10,30}，{1,5,6,30}，{1,30}，{1,2,3,5,6,10,15,30}。

（5）如{1,2,10,30}，{1,2,3,6}，{1,2,5,10}，{1,3,5,15}等是子格，但不是布尔代数，其中第一个子格虽然有最大最小元但 2 的补元 15 不存在，后面三个子格均不含原来的最大最小元。

34．设 L 是布尔格。证明：

（1）若 $x\leq y$，则 $y'\leq x'$

（3）若 $y\wedge z=0$，则 $y\leq z'$

（3）若 $x \le y$，$y \wedge z = 0$，则 $z \le x'$

证：

（1）若 $x \le y$，则 $x \vee y = y$，从而 $(x \vee y)' = y'$，即 $x' \wedge y' = y'$，所以 $y' \le x'$

（2）若 $y \wedge z = 0$，则 $y = y \wedge 1 = y \wedge (z \vee z') = (y \wedge z) \vee (y \wedge z') = y \wedge z'$，从而 $y \le z'$

（3）利用（1）（2），有 $x \le y \le z'$，再利用（1），$z \le x'$

35．设（B，≤）是一个布尔格，它诱导的布尔代数为 $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$。$a \ne 0$。若 $a, b_1, b_2, \Lambda, b_r$ 是原子，试证明：$a \le b_1 \vee b_2 \vee \Lambda \vee b_r$ 当且仅当 $\exists i, 1 \le i \le r, a = b_i$

证：

必要性：用反证法。设 $\forall i$，$a \ne b_i$，因 b_i 是原子，据原子定义，有 $a \wedge b_i = 0$。则因 $a \le b_1 \vee b_2 \vee \Lambda \vee b_r$，有

$$a = a \wedge (b_1 \vee b_2 \vee \Lambda \vee b_r) = (a \wedge b_1) \vee (a \wedge b_2) \vee \Lambda\ (a \wedge b_r)$$
$$= 0 \vee 0 \vee \Lambda \vee 0 = 0$$

这与 $a \ne 0$ 矛盾。故 $\exists i,\ 1 \le i \le r,\ a = b_i$

充分性：若 $\exists i,\ 1 \le i \le r,\ a = b_i$，则 $a \le b_1 \vee b_2 \vee \Lambda \vee b_r$ 显然成立。

36．设 $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$ 为有限布尔代数，$a \in B$ 且 $a \ne 0$。证明：必存在原子 b 使得 $b \le a$。

证：

若 a 是 B 的原子，取 $b=a$ 即可。

若 a 不是原子，则必存在 $b_1 \in B$，使得 $0 \pi b_1 \pi a$，若 b_1 是原子，则结论成立，否则必存在 $b_2 \in B$，使得 $0 \pi b_2 \pi b_1 \pi a$，若 b_2 是原子，则结论成立，否则继续这一过程。由于 B 是有限布尔代数，经过有限步后必找到 b_r 使得

$0 \pi b_r \pi \Lambda \pi b_2 \pi b_1 \pi a$，且 b_r 是原子。于是取 $b = b_r$，则 b 是原子且 $b \le a$。

37．设 $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$ 为有限布尔数，b_1, b_2, Λ, b_r 是 B 的全体原子。对于任意的 $y \in B$，证明：$y = 0$ 当且仅当对于每一个 i 都有 $y \wedge b_i = 0, i = 1,2,\Lambda, r$

证：

必要性是显然的。

充分性：已知对于任意的 $i(1 \le i \le n)$，$y \wedge b_i = 0$。假设 $y \ne 0$，则由习题 36，必存在某个原子 b_k，使得 $b_k \le y$。于是 $b_k \le y \wedge b_k$。这意味着 $0 \pi y \wedge b_k$，这与

$y \wedge b_i = 0, i = 1,2,\Lambda, r$

矛盾。故有 $y = 0$

38．设 $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$ 和 $(S,+,*,\neg,\hat{0},\hat{1})$ 是两个布尔代数，f 是 B 到 S 的映射。证明：如果对于任意的 $a, b \in B$，有

（1）$f(a \wedge b) = f(a) * f(b)$

（2）$f(\overline{a}) = \neg f(a)$

则 f 是一个同态映射。

证：

只需要证明，对于任意的$a,b\in B$，有 $f(a\vee b)=f(a)+f(b)$

事实上，

$$
\begin{aligned}
f(a\vee b)&=f(\overline{\overline{a\vee b}})=\neg f(\overline{a\vee b}) && \text{由条件（2）}\\
&=\neg f(\overline{a}\wedge\overline{b}) && \text{由德摩根律}\\
&=\neg(f(\overline{a})*f(\overline{b})) && \text{由条件（1）}\\
&=\neg(\neg f(a))*\neg(\neg f(b)) && \text{由条件（2）}\\
&=f(a)+f(b) && \text{由德摩根律}
\end{aligned}
$$

证毕。

39．设$(B,+,*,-,0,1)$是一布尔代数，$(S,\vee,\wedge)$是一代数系统，$f:B\to S$是一个满射。证明：若对于任意的$a,b\in B$，有

$f(a+b)=f(a)\vee f(b)$ ； $f(a*b)=f(a)\wedge f(b)$

则$(S,\vee,\wedge)$也是一个布尔代数，且 f 是这两个布尔代数间的同态映射。

证：

令$\hat{0}=f(0)$，$\hat{1}=f(1)$。对于任意的$x,y,z\in S$，由于f是满射，存在$a,b,c\in B$，使得$x=f(a)$，$y=f(b)$，$z=f(c)$。于是，有

（1）交换律

$x\vee y=f(a)\vee f(b)=f(a+b)=f(b+a)=f(b)\vee f(a)=y\vee x$

类似可证：$x\wedge y=y\wedge x$

（2）分配律

$$
\begin{aligned}
x\wedge(y\vee z)&=f(a)\wedge(f(b)\vee f(c))=f(a)\wedge f(b+c)=f(a*(b+c))\\
&=f(a*b+a*c)=f(a*b)\vee f(a*c)\\
&=(f(a)\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge f(c))=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)
\end{aligned}
$$

类似可证：$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

（3）存在最大元和最小元

$x\wedge\hat{1}=f(a)\wedge f(1)=f(a*1)=f(a)=x$

$x\vee\hat{0}=f(a)\vee f(0)=f(a+0)=f(a)=x$

故$\hat{0},\hat{1}$分别是S的最小元和最大元。

（4）令$\neg x=f(\overline{x})$，则$\neg x\in S$，且有

$x\wedge(\neg x)=f(a)\wedge f(\overline{a})=f(a*\overline{a})=f(0)=\hat{0}$

$x\vee(\neg x)=f(a)\vee f(\overline{a})=f(a+\overline{a})=f(1)=\hat{1}$

因此，$\neg x$是x的补元。

综上所述，由定理 11，得证$(S,\vee,\wedge)$是一个布尔代数，其最小元和最大元分别是$\hat{0},\hat{1}$，其补运算为$\neg$。

因为对任意的$x,y\in B$，有

$f(x+y)=f(x)\vee f(y)$ ；$f(x*y)=f(x)\wedge f(y)$

由$\neg$的定义，又有 $f(\overline{x})=\neg f(x)$。故 f 是 $(B,+,*,-,0,1)$ 到 $(S,\vee,\wedge,\neg,\hat{0},\hat{1})$ 的同态映射。

40．设 f 是两个布尔代数 $(B,\vee,\wedge,-,0,1)$ 和 $(S,+,*,\neg,\hat{0},\hat{1})$ 间的同态映射。令
$L=f^{-1}(\hat{0})=\{x\mid x\in B, f(x)=\hat{0}\}$

试证明：

（1）$0\in L$
（2）若 $b\in L$，则对任意的 $x\in B$，只要 $x\leq b$，就有 $x\in L$
（3）对于任意的 $x,y\in L$，有 $x\vee y\in L$

证：

（1）因为 $f(0)=f(0\wedge\overline{0})=f(0)*f(\overline{0})=f(0)*(\neg f(0))=\hat{0}$，故 $0\in L$
（2）因 $b\in L$，故 $f(b)=\hat{0}$。若 $x\leq b$，则有 $x\vee b=b$，于是有
$\hat{0}=f(b)=f(x\vee b)=f(x)+f(b)=f(x)+\hat{0}$。从而有 $f(x)=\hat{0}$。证得 $x\in L$
（3）因 $x,y\in L$，有 $f(x)=\hat{0},\ f(y)=\hat{0}$，于是 $f(x\vee y)=f(x)+f(y)=\hat{0}+\hat{0}=\hat{0}$，证得 $x\vee y\in L$

41．设 $(L,\vee,\wedge,-)$ 是一个布尔代数，如果在 L 上定义二元运算 $\oplus$ 为：

$a\oplus b=(a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b)$

证明：$(L,\oplus)$ 是一个阿贝尔群。

证：

由于$\vee,\wedge,-$这三个运算在 L 上都是封闭的，所以 $\oplus$ 在 L 上也是封闭的。

（1）对于任意 $a,b,c\in L$，

$$\begin{aligned}(a\oplus b)\oplus c&=((a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b))\oplus c\\&=(((a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b))\wedge\overline{c})\vee(\overline{((a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b))}\wedge c)\\&=(a\wedge\overline{b}\wedge\overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge\overline{c})\vee(((\overline{a}\vee b)\wedge(a\vee\overline{b}))\wedge c)\\&=(a\wedge\overline{b}\wedge\overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge\overline{c})\vee(((a\wedge b)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}))\wedge c)\\&=(a\wedge\overline{b}\wedge\overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge\overline{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}\wedge c)\end{aligned}$$

同理可证　$a\oplus(b\oplus c)=(a\wedge\overline{b}\wedge\overline{c})\vee(\overline{a}\wedge b\wedge\overline{c})\vee(a\wedge b\wedge c)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b}\wedge c)$
所以　$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，即运算 $\oplus$ 满足结合律。

（2）因为　$a\oplus b=(a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b)=(b\wedge\overline{a})\vee(a\wedge\overline{b})=b\oplus a$
所以运算 $\oplus$ 是可交换的。
（3）对于任意的 $a\in L$，有

$a\oplus 0=0\oplus a=(0\wedge\overline{a})\vee(\overline{0}\wedge a)=0\vee(1\wedge a)=a$

故 0 是 L 中关于运算 $\oplus$ 的单位元。
（4）对于任意的 $a\in L$，有

$a \oplus a = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$

故 L 中每个元素均以自身作为逆元。

综上所述，（L, $\oplus$ ）是一个阿贝尔群。

42．给出含有 8 个元素的布尔代数的全体子代数。

解：

令 $A=\{a,b,c\}$，由定理知，$8 = 2^3$ 个元素的布尔代数必同构于（$P(A),\subseteq$）。故只需给出（$P(A),\subseteq$）的全部子代数。

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$。注意到它的子代数必含有最小元 $\varnothing$ 和最大元 A 以及 $\{a\}$ 和 $\{b,c\}$，$\{b\}$ 和 $\{a,c\}$，$\{c\}$ 和 $\{a,b\}$ 互为补元，故全部子代数为：$\{\varnothing,A\}$；$\{\varnothing,A,\{a\},\{b,c\}\}$；$\{\varnothing,A,\{b\},\{a,c\}\}$；$\{\varnothing,A,\{c\},\{a,b\}\}$ 及 $P(A)$ 身。

*43．设 $S=\{1,2,4,6,9,12,18,36\}$，设 D 是 S 上的整除关系：$<x,y>\in D$ 当且仅当 y 是 x 的倍数；求证：

（1）D 是一个偏序关系。

（2）试画出关系 D 的哈斯图，并由此说明＜S，D＞是一个格。

（3）D 是分配格吗？为什么？

（4）求集合{2，4，6，12，18}的下界，最大下界，最小元及上界，最小上界和最大元。

（5）给出(S，D)中所有含 5 个元素的子格。

证：

（1）要证 D 为偏序关系，只需说明整除关系满足自反、反对称、传递性质。

因为对 S 上任一元素 x，都有 x 整除 x 它自身，故 D 自反；$\forall x,y \in D$，若 xDy，yDx，即 x 整除 y，y 整除 x，则 $x=y$，从而 D 反对称。$\forall x,y,z \in D$，若 xDy，yDz，即 x 整除 y，y 整除 z，则 x 整除 z，即 xDz，故 D 传递。

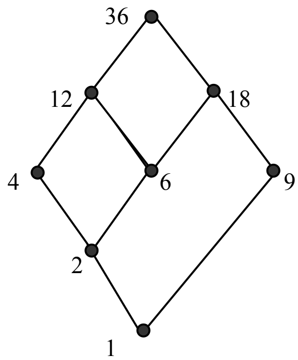


图 5-23

（2）其哈斯图如图 5-23 所示。由于任意二个元素均有最大下界和最小上界，故是格。

（3）D 不是分配格，因为 $2 \vee (9 \wedge 6) = 2 \vee 1 = 2$，而 $(2 \vee 9) \wedge (2 \vee 6) = 18 \wedge 6 = 6$，$2 \vee (9 \wedge 6) \neq (2 \vee 9) \wedge (2 \vee 6)$

（4）集合{2，4，6，12，18}的下界为 1 和 2，最大下界为 2，最小元为 2；上界有 36，最小上界为 36；最大元不存在。

（5）(S,D)中有 5 个元素的子格共有下面的 13 个（这是通过一一验证得来的）：

{2，6，12，18，36}；{2，4，6，12，36}；{1，6，12，18，36}；
{1，6，9，18，36}；{1，4，9，12，36}；{1，2，9，18，36}；
{1，2，6，18，36}；{1，2，6，12，36}；{1，2，6，9，18}；

{1，2，4，9，36}；{1，2，4，18，36}；{1，2，4，12，36}；
{1，2，4，6，12}

*44．设 S_n 是正整数 n 的所有因子构成的集合。$m \mid n$ 表示 m 整除 n。试判断 $(S_{12},|)$ 和 $(S_{30},|)$ 是否是有补格？是否是布尔代数？为什么？

解：

$(S_{30},|)$ 的相关结论已经在题 33 中给出解答。它是布尔格。这里只给出 $(S_{12},|)$ 的相关结果。其哈斯图如图 5-24 所示。

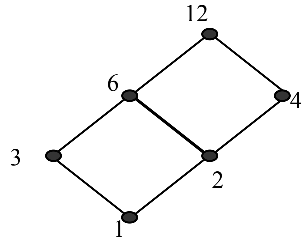


图 5-24

它不是有补格，因为元素 2 没有补元（任何一个元都不是 2 的补元），元素 6 也没有补元。从而不是布尔代数。

第 6 章　图　论

图论是一个新的、重要的数学分支，也是一门很有实用价值的学科。它的研究对象是图。图论是建立和处理离散数学模型的一个重要工具，它在自然科学和社会科学等各领域均有很多应用。在那些与计算机学科有关的领域中更显示其重要性，它已渗透到诸如语言学、逻辑学、物理学、化学、电信工程、信息论、控制论、经济管理等领域。近年来随着计算机科学的蓬勃发展，图论的发展也极其迅速，应用范围不断拓广。特别在计算机科学中，如开关理论与逻辑设计、数据结构、形式语言、操作系统、编译程序的编写、信息的组织与检索、分布式系统等方面均扮演着重要的角色。本章介绍图论的一些基本概念和基本性质，以及几种在实际应用中有着重要意义的特殊图。

§6.1　内 容 分 析

§6.1.1　图的基本概念

元素的无序对$\{x,y\}$称为无序偶，也记作(x,y)。显然$(x,y)=(y,x)$。

$\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$称为集合A与B的无序积，记作$A\&B$。

元素可以有重复的集合称为多重集合。例如$\{a,b,b\}$。

定义 1　一个无向图G是一个有序二元组，记作$G=<V,E>$；非空有限集合V称为顶点集或结点集，其元素称为顶点或结点；E是$V\&V$的多重子集，称为边集，其元素称为无向边或边。

定义 2　一个有向图D是一个有序二元组，记作$D=<V,E>$；V是无向图的顶点集，边集E是$V\times V$的多重子集，其元素称为有向边或边。若$<u,v>$为有向边，则称u为起点，v为终点。

若$(u,v)\in E$（或$<u,v>\in E$），则记作$e=(u,v)$（或$e=<u,v>$）,称u和v为边e的端点，称e与u和v相互关联；与同一条边关联的两个结点称为相邻，有公共结点的两条边也称为相邻；无边关联的结点称为孤立点；端点重合的边称为环；若关联一对结点的边多于一条，则称这些边为平行边（对有向图还要要求有向平行边的方向一致）。

$|V|=n,\ |E|=m$的图称为(n,m)图，也称为n阶图，记作$G=(n,m)$；$(n,0)$图称为零图；$(1,0)$图称为平凡图；具有平行边的图称为多重图；不含环和平行边的图称为简单图；将无向图G的每条无向边均加上一个方向所得的有向图称为G的定向图。

用平面上的点代表图的结点，用连接相应结点而不经过其他结点的线（直线或曲线）代表边，即得图在平面上的图解。点的位置、线的形状都有很大的随意性，一个图可以有

各种外形上差别很大的图解。

第 2 章中讨论的二元关系的关系图，实际上是不含平行边的有向图。

§6.1.2　结点的度

定义 3　无向图中与结点 v 关联的边数称为 v 的次数（或度数、度），记作 $\deg(v)$（若 v 有环，则它对 v 的度计为 2）。有向图中，以结点 v 为起点的边数称为 v 的出度，记作 $\deg^{+}(v)$；以 v 为终点的边数称为 v 的入度，记作 $\deg^{-}(v)$；$\deg^{+}(v)+\deg^{-}(v)$ 称为 v 的度，记作 $\deg(v)$，即 $\deg(v)=\deg^{+}(v)+\deg^{-}(v)$（若 v 有环，它对 v 的出度和入度各计 1）。

定理 1（握手定理）　设图 $G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$，$|E|=m$，则 $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$。又若 G 为有向图，则 $\sum_{i=1}^{n}\deg^{+}(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\deg^{-}(v_i)=m$

推论　在任何图中，奇度结点的个数为偶数。

度为 1 的结点所关联的边称为悬挂边，该结点称为悬挂结点。

无向图 G 中结点的最大度记作 $\Delta(G)$，最小度记作 $\delta(G)$；有向图中最大和最小出度分别记作 Δ^{+} 和 δ^{+}，最大和最小入度分别记作 Δ^{-} 和 δ^{-}。

每个结点的度为 n-1 的 n 阶无向图称为 n 阶无向完全图，记作 K_n；每个结点的出度和入度均为 n-1 的 n 阶有向图称为 n 阶有向完全图，也记作 K_n；n 阶完全无向图的定向图称为竞赛图；$\Delta(G)=\delta(G)=k$，即各结点的度均为 k 的无向图称为 k 正则图（对有向图也可定义正则图，但没有相应类型的无向图重要）。例如由正四面体、正方体、正八面体、正十二面体、正二十面体的顶点和边构成的图均为正则图，分别称为四面体图（即 K_4）、方体图、八面体图、十二面体图、二十面体图，统称为柏拉图图。其中的四面体图、方体图和十二面体图均为 3 正则图，八面体图为 4 正则图，二十四体图为 5 正则图。

n 边形的顶点和边构成的图称为 n 边形图，记作 $C_n(n\ge 3)$。显然 C_n 是 2 正则图。在 C_{n-1} 内放置一个顶点，使之与 C_{n-1} 的各顶点相邻，这样构成的简单图称为轮图，记作 W_n。

若无向图 $G=<V,E>$ 的 V 可分成两个不相交的非空子集 V_1 和 V_2，使 G 的每条边的端点，一个属于 V_1，另一个属于 V_2,则称 G 为二部图（或二分图、二元图、偶图），记作 $G=<V_1,V_2,E>$，V_1 和 V_2 称为互补结点子集。又若简单二部图 G 中 V_1 的每个结点与 V_2 的所有结点相邻，则称 G 为完全二部图，记作 $K_{n,m}$,其中 $n=|V_1|$，$m=|V_2|$。$K_{1,m}$ 称为星形图。

n 阶图中的 n 个结点组成的（单调增加）序列称为 G 的度序列，记作（d_1,d_2,Λ,d_n）。

§6.1.3　子图

定义 4　设图 $G=<V,E>$ 和 $G'=<V',E'>$，若 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，则称 G' 为 G 的子图，G 为 G' 的母图，记作 $G'\subseteq G$。

若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 为 G 的真子图；若 $V'=V$，$E'\subseteq E$，则称 G' 为 G 的生成子图或支撑子图；若 $V'\subseteq V$，E' 是关联结点都在 V' 中的 G 的边集合，则称 G' 为 G 的由 V' 导出的子图，记作 G（V'）；若 $E'\subseteq E$，V' 是 E' 中的边关联的结点集合，则称 G' 为 G

的由 E' 导出的子图，记作 $G(E')$。

由 G 的所有结点和为了使 G 成为完全图所需要添加的边组成的图，称为 G 的补图，记作 $\overline{G}$。

§6.1.4 图的同构

定义 5 设 $G_1 = <V_1, E_1>$, $G_2 = <V_2, E_2>$，若存在双射 $f: V_1 \to V_2$，使得边之间有如下关系：如果 $f(v_i) = u_i$，$f(v_j) = u_j$，且 $(v_i, v_j) \in E_1$（或 $<v_i, v_j> \in E_1$）当且仅当 $(u_i, u_j) \in E_2$（或 $<u_i, u_j> \in E_2$），而且 (v_i, v_j)（或 $<v_i, v_j>$）与 (u_i, u_j)（或 $<u_i, u_j>$）的重数相同，则称 G_1 与 G_2 是同构的，记作 $G_1 \cong G_2$。

若两个图存在同构 f，则 f 不一定惟一。同构的图要求结点与结点之间，边与边之间都存在一一对应，而且它们的关联关系也必须保持其对应关系。同构的图除了它们的结点标记可能不同外，其他的完全相同。图的同构关系是等价关系。判断两个图是否同构，一般情况下并不容易。因为若两个图都有 n 个结点，它们之间的双射有 n 个，即使 n 不大，检查这些双射是否保持结点与边的关联关系，计算量也很大。但还是有一些办法可以帮助我们缩小所要考虑问题的范围。两个图同构，首先它们要有相同的结点数和边数，且度序列也相同，因为同构的两个图中，只有度相同的点才能建立对应关系。但两个度序列相同的图不一定同构。判断两个图不同构往往可采用如下办法：将图的结点按某种对判断同构有意义的标准分类，如按度分类。两个同构的图对应结点类的导出子图也应该同构，这样就将问题局部化了。

§6.1.5 图的运算

设 $G_1 = <V_1, E_1>$，$G_2 = <V_2, E_2>$ 为无向图。若 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，则称 G_1 与 G_2 不相交；若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，则称 G_1 与 G_2 边不相交；以 $E_1 \cup E_2$ 为边集，以 $E_1 \cup E_2$ 中边关联的结点为结点集的图 G 称为 G_1 与 G_2 的并图，记作 $G = G_1 \cup G_2$；以 $E_1 \cap E_2$ 为边集，以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的结点为结点集的图 G 称为 G_1 与 G_2 的交图，记作 $G = G_1 \cap G_2$。当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时，$G_1 \cap G_2$ 为 $\varnothing$；以 $E_1 - E_2$ 为边集，以 $E_1 - E_2$ 中边关联的结点为结点集的图 G 称为 G_1 与 G_2 的差图或 G_2 相对于 G_1 的补图，记作 $G = G_1 - G_2$。当 $E_1 - E_2$ 为 $\varnothing$ 时，$G_1 - G_2$ 为 $\varnothing$；（$G_1 \cup G_2$）－（$G_1 \cup G_2$）称为 G_1 与 G_2 的环和，记作 $G_1 \oplus G_2$。当 $E_1 = E_2$ 时，$G_1 \oplus G_2$ 为 $\varnothing$。

§6.1.6 结点、边的删除、边的收缩

设图 $G = <V, E>$。设 $v \in V$，G-v 或 $G - \{v\}$ 表示从 G 中删除 v 及所关联的边；设 $V' \subset V$，$G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中各结点及所关联的边；设 $e \in E$，G-e 或 $G - \{e\}$ 表示从 G 中删除 e；设 $E' \subset E$, $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中各边；设 $e \in E$，$G - e$ 表示从 G 中删除 e，并将 $e = (u, v)$ 的端点 u 和 v 变为一个结点 w，使 w 关联除 e 外的 u 和 v 所关联的所有边；$G \cup (u, v)$ 或 $G + (u, v)$ 表示在 G 中结点 u 和 v 之间加边（u, v）。

§6.1.7　通路与回路

定义 6　设图 $G=<V,E>$，G 中结点和边的交替序列 $P=v_0e_1v_1e_2v_2\Lambda\ v_1$，其中 e_i 与 v_{i-1} 和 v_i 关联，即 $e_i=(v_{i-1},v_i)$，或 $e_i=<v_{i-1},v_i>$，$1\le i\le l$，P 称为 v_0 到 v_l 的通路。v_0 和 v_1 分别称为通路的起点和终点，边的数目称为通路长度。若 $v_0\ne v_l$，则称 P 为开（通）路；若 $v_0=v_l$，则称 P 为闭（通）路或回路；所有边均不同的通路称为简单通路或迹；所有边均不同的回路称为简单回路或闭迹；所有结点均不同（从而所有边也均不同）的通路称为基本通路（或初等通路、初级通路或路径）；除起点和终点外，所有结点和所有边均不同的回路称为基本回路（或初等回路、初级回路或圈）。

显然，基本通路必为简单通路，基本回路必为简单回路；反之，则不然。在不引起误解的情况下，可以只用边序列 $e_1,e_2,\Lambda\ ,e_l$ 表示通路或回路；在简单图中，也可只用结点序列 $v_1,v_2,\Lambda\ ,v_l$ 表示通路或回路。若 G 中存在从 u 到 v 的通路，则从 u 到 v 长度最短的通路称为 u 到 v 的短程线，其长度称为 u 和 v 之间的距离，记作 $d(u,v)$。若 G 中不存在从 u 到 v 的通路，则规定 $d(u,v)=\infty$。距离满足如下性质：$d(u,v)\ge 0$；$d(u,u)=0$；$d(u,v)+d(v,w)\ge d(u,w)$（无向图的距离还满足对称性，即 $d(u,v)=d(v,u)$）。

定理 2　图 G 为二部图的充要条件是 G 中所有基本回路长都是偶数。

定理 3　在 n 阶图 G 中，若存在从 u 到 v 的开通路，则必存在从 u 到 v 长度小于等于 $n-1$ 的基本通路。

定理 4　在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则必存在 v 到自身长度小于等于 n 的基本回路。

§6.1.8　连通性

定义 7　在无向图中，若存在从 u 到 v 的通路，则称 u 和 v 是连通的。规定任一结点到自身总是连通的；在有向图中，若存在从 u 到 v 的通路，则称 u 可达 v。规定任一结点 u 到自身总是可达的。

定义 8　若无向图 G 是平凡图，或 G 中任意两个结点都是连通的，则称 G 是连通图；否则称 G 是非连通图或分离图。

易知无向图结点之间的连通关系为等价关系，按等价关系可将结束集 V 划分成互不相交的等价类 V_1，V_2，…，V_K，则导出子图 $G(V_1)$，$G(V_2)$，…，$G(V_k)$ 都是 G 的连通子图，称为 G 的连通分支或分支。G 的分支数记作 $p(G)$。

对图的连通性需要作定量的描述。首先要确定衡量图的连通程度的标准。对无向连通图 G，若至少要删除若干个结点或若干条边才能使 G 成为不连通的，则显然需要删除的结点数和边数愈多，说明 G 的连通程度愈“好”。下面给出一些确切的定义。

定义 9　设 $G=<V,E>$ 为连通无向图，$T\subset V$，若 $G-T$ 不连通或是平凡图，则称 T 为 G 的点断集或点割集。若 $\{v\}$ 为 G 的点断集，则称 v 为 G 的断点或割点，$\kappa(G)=\min\{|T|\,\big|\,T$ 为 G 的点断集$\}$ 称为 G 的点连通度或连通度。规定非连通图和平凡图

的连通度为 0。若 $\kappa(G)\geq k$，则称 G 是 $k-$连通的。$\kappa(K_n)=n-1$。

定义 10 设 $G=<V,E>$ 为连通无向图，$S\subset E$，若 $G-S$ 不连通或是平凡图，则称 S 为 G 的边断集或边割集或割集。若 $\{e\}$ 为 G 的边断集，则称 e 为 G 的断边或割边或桥。$\lambda(G)=\min\{|S|\,\big|\,S$ 为 G 的边断集$\}$ 称为 G 的边连通度。若 $\lambda(G)\geq k$，则称 G 是 $k-$边连通的。规定非连通图和平凡图的边连通度为 0。$\lambda(K_n)=n-1$。

定理 5 对任一无向图 G，有 $\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$。

定理 6 对任一无向图 $G=(n,m)$，有 $\kappa(G)\leq\left\lfloor\dfrac{2m}{n}\right\rfloor$，$\lambda(G)\leq\left\lfloor\dfrac{2m}{n}\right\rfloor$。

定义 11 设 D 为有向图，若略去 D 中有向边的方向所得的无向图是连通图，则称 D 为连通的或弱连通的；若 D 中任意两结点间至少有一个结点可达另一个结点，则称 D 为单向连通的；若 D 中的任意一对结点都相互可达，则称 D 为强连通的。

若 D 强连通，则 D 是单向连通的；若 D 单向连通，则 D 是弱连通的。反之，则不然。

定理 7 有向图 D 是强连通的，当且仅当 D 中存在一条经过每个结点至少一次的有向回路。

定理 8 设有向图 D 是弱连通的，若 D 的每个结点的出度（或入度）均为 1，则 D 恰有一条有向回路。

在有向图中，具有强连通性质的极大子图称为强分图；具有单向连通性质的极大子图称为单向分图；具有弱连通性质的极大子图称为弱分图（此处“极大”的含义是子图具有某种性质，但若再加上任意一个其他结点，就不再具有该性质）。

定理 9 有向图的每个结点恰好位于一个强分图中。

§6.1.9 图的矩阵表示

图的图解表示对于形象直观地分析给定图的某些特性有时是有用的，但当图的结点数和边数较大时，这种办法是不实际的。图的矩阵表示是另一个方便的方法，它使图的有关信息能以矩阵的形式在计算机中储存起来并加以运算，可揭示图的许多重要性质。计算机能识别图的矩阵表示，这便于利用计算机来研究有关图的算法。但图的许多有强烈的直观背景的性质，在用矩阵表示时会遇到困难。例如关于平面性的问题就是如此。

定义 12 设 $G=<V,E>$ 为无向图，$V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\Lambda,e_m\}$。令 m_{ij} 为 v_i 和 e_j 的关联次数，则称 $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ 为 G 的关联矩阵。

图的最本质特征是边与结点的关联性质，关联矩阵表示图的边与结点的关联性质，它完整地体现了图的特征。关于关联矩阵有如下结论：M 中每列元素之和等于 2；M 的第 i 行元素之和为 $\deg(v_i)$；M 的全部元素之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$；若 M 的第 i 行元素全为 0，则 v_i 为孤立点。

定义 13 设 $G=<V,E>$ 为无向图，$V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$。令 a_{ij} 为以 v_i 和 v_j 为两个端点

的边数，则称 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为 G 的邻接矩阵。

邻接矩阵体现图中结点之间的邻接关系，它是一个对称矩阵。

定义 14　设 $D=<V,E>$ 为无环有向图，$V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\Lambda,e_m\}$。令

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ -1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\end{cases}$$

，则称 $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵。

有向图的关联矩阵有如下结论：M 中每列元素中 1 和–1 各有一个；M 的第 i 行元素绝对值之和为 $\deg(v_i)$，其中 1 的个数为 $\deg^+(v_i)$，–1 的个数为 $\deg^-(v_i)$；M 的全部元素之和为 0。

定义 15　设 $D=<V,E>$ 为有向图，$V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$。令 a_{ij} 是以 v_i 为起点，v_j 为终点的边数，则称 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵。

任一图的关联矩阵和邻接矩阵都与其图解一一对应。显然，若两个图的邻接矩阵相同，或可通过交换某些行和相应的列而相同，则这两个图同构。邻接矩阵最大的作用在于判定图的连通性。通过幂运算可得 A^l，A^l 中每个元素的图论意义见定理 10。

定理 10　若图有结点集 $\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$ 和邻接矩阵 A，则 A^l 中（i,j）元素 $a_{ij}^{(l)}$ 是从 v_i 到 v_j 的长度为 l 的通路数目。若 $i=j$，则 $a_{ii}^{(l)}$ 是 v_i 到自身的长度为 l 的回路数目。

推论 1　d（v_i,v_j）是使 A^l 的（i,j）元素 $a_{ij}^{(l)}$ 非零的最小整数 $l\ (i\neq j)$。

推论 2　令 $B_r=A+A^2+\Lambda+A^r$，则 B_r 的（i,j）元素是从 v_i 到 v_j 的长度小于等于 r 的通路数目。若 B_n 的（i,j）元素为 0，则不存在从 v_i 到 v_j 的通路，v_i 和 v_j 属于不同的分支。所以，图是连通的或强连通的 $\Leftrightarrow$ B_n 除主对角线外全是非零元素。

§6.1.10　最短路径问题

定义 16　给图的边（v_i,v_j）或$<v_i,v_j>$赋予一个实数 w_{ij}，称 w_{ij} 为该边的权，每条边附加有权的图称为带权图或赋权图。一条通路的权是指这条通路上各边的权之和。

最短路径问题，是寻找从 u 到 v（$u\neq v$）的具有最小权的通路，实际上它一定是路径。现已有若干求最短路径的算法。Dijkstra 于 1959 年提出的标号法是公认的好算法，能求出图的某个结点到其他任一结点的最短路径。首先给 n 阶带权图的每个结点记一个数，称为标号。标号有两种：临时标号（T 标号）和固定标号（P 标号）。结点 T 标号表示从始点到终点的最短通路的权的上界；P 标号表示从始点到该结点的最短通路的权。算法的每一步把某个结点的 T 标号改变为 P 标号，并改变其他结点的 T 标号。一旦终点得到 P 标号，算法就结束。若要求得从始点到其他任一结点的最短路径，则最多经 $n-1$ 步算法停止，该算法的具体步骤如下。

Dijkstra 算法

第 1 步　给始点 v_1 标上 P 标号 $d(v_1)=\infty$,给其他结点标上 T 标号 $d(v_j)=w_{1j}$，$2\le j\le n$（设 w_{ij} 是连接结点 v_i 和 v_j 的边的权，若 v_i 和 v_j 没有边相连，则令 $w_{ij}=\infty$。利用计算机计算时，可根据具体问题的要求，取一个足够大的数代替 ∞）。

第 2 步　在所有的 T 标号中取最小者，设结点 v_k 的 T 标号 $d(v_k)$最小，则将 v_k 的 T 标号改为 P 标号，并重新计算具有 T 标号的其他各个结点 v_j 的 T 标号：

新的 $d(v_j)$=min{旧有的 $d(v_j)$，$d(v_k)+w_{kj}$}。

第 3 步　若终点已具有 P 标号，则此标号即为所求最短路径的权，算法停止；否则转至第 2 步。

若要求始点到其他每一结点的最短路径，则第 3 步修改为所有结点都已具有 P 标号时算法停止。

有向图的最短路径问题的处理方法与此相同。若带权图的权是代表某种效益、利润等等，则要求的不是“最短”路径而是“最长”路径，这时只要将权改变正负标号，原来的问题就转化为最短路径问题。Dijkstra 算法只能找出图中某个结点到任一其他结点的最短路径，如果要用该算法找出图中任意两个结点之间的最短路径，则算法要执行 n 次。下面介绍 Warshall 给出并经 Floyed 改进的算法，该算法能方便地求出图中任两结点之间的最短路径。

Warshall 算法

第 1 步　令 $W^{(0)}=W=[w_{ij}]=[w_{ij}^{(0)}]$

第 2 步　从 $W^{(0)}$ 出发，依次构造 n 阶矩阵 $W^{(1)},W^{(2)},\Lambda,W^{(n)}$。各个 $W^{(k)}=[w_{ij}^{(k)}]$ 的定义为：$w_{ij}^{(k)}=\min\left\{w_{ij}^{(k-1)},w_{ik}^{(k-1)}+w_{kj}^{(k-1)}\right\}$，$w_{ij}^{(k)}$ 是从 v_i 到 v_j 中间结点仅属于 $\{v_1,v_2,\Lambda,v_k\}$ 的通路中权最小的通路之权。

最后得到的 $W^{(n)}$ 的元素 $w_{ij}^{(n)}$ 就是结点 v_i 到 v_j 的最短路径的权。

§6.1.11　欧拉图与哈密尔顿图

定义 17　通过图（无向图或有向图）中每条边正好一次的通路称为欧拉通路，存在欧拉通路的图称为半欧拉图；通过图中每条边正好一次的回路称为欧拉回路，存在欧拉回路的图称为欧拉图。

显然，欧拉通路是简单通路，欧拉回路是简单回路。欧拉图必定是半欧拉图，反之，则不然。

判断一个图是否为欧拉图或半欧拉图，有很简单的充要条件。

定理 11　不含孤立点的无向图 G 是半欧拉图，当且仅当 G 连通，且奇度结点为零个或两个。

定理 12　不含孤立点的无向图 G 是欧拉图,当且仅当 G 连通,且所有结点的度为偶数。

定理 13　不含孤立点的无向图 G 是欧拉图，当且仅当 G 连通，且 G 是边不相交的基本回路的并。

定理 14　不含孤立点的有向图 D 是半欧拉图，当且仅当 D 弱连通，且其中一个结点的入度比出度大 1，另一个结点的出度比入度大 1，其余结点的入度均等于出度。

定理 15　不含孤立点的有向图 D 是欧拉图，当且仅当 D 弱连通，且所有结点的入度等于出度。

设 G 为无向欧拉图，求 G 中一条欧拉回路的算法如下。

Fleury 算法

第 1 步　任取 G 中一结点 v_0，令 $P_0 = v_0$。

第 2 步　假设 $P=v_0e_1e_2\cdots e_iv_i$ 已选好，按下面方法从 $E-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选 e_{i+1}

（1）e_{i+1} 与 e_i 相关联；

（2）除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应该是 $G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots, e_i\}$ 的断边。

第 3 步　当第 2 步不能执行时，算法停止。

有向欧拉图的欧拉回路可类似求出。

作为欧拉图的应用及其推广的例子是邮路问题。设一个邮递员从邮局出发沿着他所管辖的街道送信，然后返回到邮局，他应选择怎样的路线，才能使得所走的实际路程最短呢？我们知道，如果他管辖的街道恰好成为欧拉图，就不存在最短路程的问题，因为不论他怎样安排行走路线，所走路程总是一定的。但实际问题中一般不会恰巧就是欧拉图，必然某些街道要重复经过，因此邮路问题是一个既与欧拉图又与最小权通路有关的问题。邮路问题可用图论的概念描述如下：在一个带权图 G 中，怎样找到一条回路 C，使得 C 包含 G 中的每条边至少一次，而且回路 C 具有最小权。C 分三种情况：

（1）如果 G 是欧拉图，必定有欧拉回路，C 即找到。

（2）如果 G 是具有从 v_i 到 v_j 的欧拉通路的半欧拉图，C 的构造如下：找从 v_i 到 v_j 的欧拉通路及 v_i 到 v_j 的最小权通路（即最短路径）。这两条通路合并在一起就是最小权回路。

（3）如果 G 不是半欧拉图，一般说来，G 中包括各条边之回路，其重复的边数与奇结点数目有关，若奇结点多于 2，则回路中会出现更多的重复的边，问题是怎样使重复边的权总和最小。在理论上已证明：一条包括 G 的所有边的回路 C 具有最小权当且仅当：

① 每条边最多重复一次；

② 在 G 的每个回路上，有重复边的权之和小于回路权的一半。

定义 18　通过图中每个结点正好一次的通路称为哈密尔顿通路，存在哈密尔顿通路的图称为半哈密尔顿图；通过图中每个结点正好一次的回路称为哈密尔顿回路，存在哈密尔顿回路的图称为哈密尔顿图。

哈密尔顿图也是半哈密尔顿图，反之，则不然。哈密尔顿图或半哈密尔顿图必连通。

判断一个图是否为欧拉图或半欧拉图有一种简单的方法，但至今未找到判别一个图是否为哈密尔顿图或半哈密尔顿图的简明的充要条件，只能给出若干必要条件或充分条件。

定理 16 若无向图 $G=<V,E>$ 是哈密尔顿图，W 是 V 的任意非空子集，则 $p(G-W)\le|W|$

定理 16 的实用价值在于利用其逆否命题来判定一个图不是哈密尔顿图。

定理 17 设 G 为 n 阶无向简单图，若对 G 的任意两个不相邻的结点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\ge n\text{-}1$，则 G 为半哈密尔顿图。

定理 18 设 G 为 n 阶无向简单图，且 $n\ge3$，若对 G 的任意两个不相邻的结点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\ge n$，则 G 为哈密尔顿图。

定理 19 设 G 为 n 阶无向简单图，若对 G 的任一结点 v 有 $\deg(v)\geqslant\frac{n}{2}$，则 G 为哈密尔顿图。

定理 20 设 D 为 n 阶有向简单图，若略去 D 的方向后所得无向图中含生成子图 K_n，则 D 为半哈密尔顿图。

推论 竞赛图是半哈密尔顿图。

作为哈密尔顿回路的一个推广是推销员问题，亦称流动售货员问题或货郎担问题。设有一个推销员从公司出发走销附近所有城镇，然后返回公司，其旅行路线怎样安排，才能使总距离最小？用图论观点来说，就是要找一条权最小的哈密尔顿回路，即所谓最小权哈密尔顿回路。研究这类问题很有实用价值，但至今还未找到好的解决方法。下面给出一种“近邻法”或“最邻近法”，按此方法求得的哈密尔顿回路未必是最小权哈密尔顿回路，但很接近最小权哈密尔顿回路。

近邻法

设图为带权无向完全图。

第 1 步 任取一个结点为始点，找一个最靠近始点的结点，形成一条边的初始路径。

第 2 步 设 x 表示刚加入这条路径的结点，从所有不在该路径上的结点中选一个最靠近 x 的结点，将连接 x 和这一结点的边加入该路径。重复这一步，直到图中所有结点包含在路径上。

第 3 步 将连接始点和最后加入的结点的边加入路径，便得一条哈密尔顿回路。

§6.1.12 平面图

所谓图的平面性问题，就是一个图是否存在除结点处之外无边相交的平面图解。研究图的平面性问题很有实用价值，例如考虑印刷电路的布线时就会遇到这样的问题。

定义 19　若无向图 G 能画在平面上，除结点处之外无边相交，则称 G 为可平面图或平面图。画出的无边相交的图称为 G 的一个平面嵌入或平图。无平面嵌入的图称为非平面图。

显然，若 G 为平面图，则其子图也是平面图；若 G 为非平面图，则其母图也是非平面图；若 G 为平面图，则其每个分支也为平面图，因此，只需研究连通平面图。

定义 20　平图 G 的边所围成的区域，若其内部不含 G 的结点和边，则称该区域为 G 的面。每个平图恰有一个面为无界区域，称为无限面或外部面，其余的面称为有限面或内部面。包围一个面的边构成的回路称为该面的边界，回路的长称为边界的长。

定义 21　若平面图 G 中任意两个不相邻的结点之间加一条边，所得图为非平面图，则称 G 为极大平面图。若非平面图 G 中任意删除一条边，所得图为可平面图，则称 G 为极小非平面图。

定理 21（欧拉公式）设 $G=(n,m)$ 是有 r 个面的连通平面图，则 $n-m+r=2$。

推论　设 $G=(n,m)$ 是有 r 个面和 k 个分支的平面图，则 $n-m+r=k+1$。

定理 22　不少于 3 个结点的极大平面图 $G=(n,m)$ 有 r 个面，它的所有面的边界是 K_3，且有 $m=3n-6$，$r=2n-4$。

定理 23　不少于 4 个结点的极大平面图 G，有 $\delta(G)\geq 3$。

定理 24　设连通平面图 $G=(n,m)$，若 G 的每个面的边界长度均为 $l(l\geq 3)$，则 $m=\dfrac{l}{l-2}(n-2)$；若 G 的每个面的边界长度至少为 $l(l\geq 3)$，则 $m\leq\dfrac{l}{l-2}(n-2)$。

定理 25　设 $G=(n,m)$ 为连通平面图，若 G 的每个面的边界长度至少为 3，则 $m\leq 3n-6$；若 G 的每个面的边界长度至少为 4，则 $m\leq 2n-4$；若 G 的每个面的边界长度至少为 5，则 $m\leq\dfrac{5}{3}n-\dfrac{10}{3}$；若 G 的每个面的边界长度至少为 6，则 $m\leq\dfrac{3}{2}n-3$。

推论　K_5 和 $K_{3,3}$ 为非平面图。

定理 26　设 G 为连通的简单平面图，则 G 中至少有一个结点 v，$\deg(v)\leq 5$。

上述定理都是判别平面图的必要条件，而非充分条件，但这些定理的逆否命题是判别非平面图的充分条件，可用来判别一个图为非平面图。凡是平面图一定满足相应的不等式，但满足某一个不等式的未必都是平面图，而不满足相应不等式的肯定不是平面图。如 K_5 和 $K_{3,3}$。凡是不超过 4 个结点的图必为平面图，5 个结点和 6 个结点的非平面图就是 K_5 和 $K_{3,3}$，它们是非平面图的两个最小模型，非常重要，是定理 27、28 的基础。定理 27、28 给出了平面图的一个十分简洁的特征，但要用这个充要条件来具体判别一个图是否是平面图，仍属不易。

若在图的一条边上插入一个新的 2 度结点，使一条边变成两条边，或对于两条关联于一个 2 度结点的边，去掉这个结点，使两条边合成一条边，图的平面性都保持不变。

定义 22 若G_1和G_2同构，反复插入或除去 2 度结点后仍同构，则称G_1和G_2同胚。

定理 27 一个图是平面图当且仅当它不含与K_5和$K_{3,3}$同胚的子图。

定理 28 一个图是平面图当且仅当它不含经过边的收缩能成为K_5和$K_{3,3}$的子图。

平面图 G 的对偶图 G^*构造如下：在 G 的每个面中取一点为 G^*的结点，对 G 中的每条边e，都取 G^*的一条边e^*，使e^*只穿过e一次（不穿过 G 的其他边）并连接以e为公共边的两个面中 G^*的结点（两个面可能是一个面），若e为 G 的断边，则 e 对应的边e^*为G^*的环；若 e 为 G 的环，则e对应的边e^*为 G^*的断边。显然，G^*是连通平面图。

若平面图 G 的对偶图 G^*与 G 同构，则称 G 为自对偶图。

定理 29 若 G^*为连通平面图 G 的对偶图，则$n^*=r$，$m^*=m$，$r^*=n$。其中n,m,r分别为 G 的结点数、边数和面数，n^*、m^*、r^*分别为G^*的结点数、边数和面数。

§6.1.13 覆盖集、独立集和匹配

定义 23 设$G=<V,E>$为无向简单图，$V^*\subseteq V$，若 G 的每条边至少有一个端点属于V^*，则称V^*为 G 的一个结点对边的覆盖集（或点覆盖集或点覆盖）。若点覆盖V^*的任一真子集都不是点覆盖，则称V^*为极小点覆盖。结点数最少的极小点覆盖称为最小点覆盖，其结点数称为点覆盖数，记作α_0。

定义 24 设$G=<V,E>$为无向简单图，$E^*\subseteq E$，若G的每个结点是E^*中至少一条边的端点，则称E^*为 G 的一个边对结点的覆盖集（或边覆盖集或边覆盖）。若边覆盖E^*的任一真子集都不是边覆盖，则称E^*为极小边覆盖。边数最少的极小边覆盖称为最小边覆盖，其边数称为边覆盖数，记作α_1。

定义 25 设$G=<V,E>$为无向图，$V^*\subseteq V$，若V^*中任意两结点不相邻，则称V^*为G 的点独立集。若在点独立集V^*中再加入任一结点v，则$V^*\cup\{v\}$不是点独立集，则称V^*为极大点独立集。结点数最多的极大点独立集称为最大点独立集，其结点数称为点独立数，记作β_0。

定义 26 设$G=<V,E>$为无向图，$E^*\subseteq E$，若E^*中任意两条边不相邻，则称E^*为G中一个边独立集或匹配。若在匹配E^*中再加入任一边e，则$E^*\cup\{e\}$不是边独立集，则称为E^*为极大匹配或极大边独立集。边数最多的极大匹配称为最大匹配或最大边独立集，其边数称为匹配数或边独立数，记作β_1。又常记匹配为 M。

定理 30 设$G=(n,m)$为非平凡无向简单图，则$\alpha_0+\beta_0=n$。

定理 31 设$G=(n,m)$为无孤立点的无向简单图，则$\alpha_1+\beta_1=n$；$\beta_1\le\alpha_0$；$\beta_0\le\alpha_1$。

定义 27 设M是 G 中一匹配，若 G 的结点v与M中某条边关联，则称v为M—饱和点或饱和点；否则，称v为M—非饱和点或非饱和点。若 G 中所有结点都是M—饱和点，则称M为 G 的一个完美匹配。

匹配问题与二部图密切相关，有不少实际问题可化为在一个二部图中求匹配问题。例

如，有 m 个人和 n 项工作，每个人都只熟悉这 n 件工作中的某几件，每一件工作需要一个人干，能否将这 n 件工作都安排给熟悉它的人干？用一个二部图来表示该问题，V_1 中的结点代表工作，V_2 中的结点代表人，当且仅当 $u \in V_2$ 熟悉工作 $v \in V_1$，图中有边（u,v）。因此，我们的问题就是能否在此二部图中确定一个匹配 M，使 V_1 中所有结点都是 M——饱和点。

定义 28 设 $G=<V_1,V_2,E>$ 为二部图，若 M 为 G 中一最大匹配，且 $|M| = \min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称 M 为 G 中一完备匹配。若 $|V_1| \le |V_2|$，则称 M 为 V_1 到 V_2 的完备匹配或 V_1 对 V_2 的完备匹配。若 $|V_1| = |V_2|$，则 G 中的完备匹配就是完美匹配。

并不是所有二部图都有完备匹配，判定一个二部图是否存在完备匹配自然是一个重要问题。

定理 32 设 $G=<V_1,V_2,E>$ 为二部图，$|V_1| \le |V_2|$，G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配，当且仅当 V_1 中任意 k 个结点（k =1，2，⋯，$|V_1|$）至少与 V_2 中 k 个结点相连接（该条件称为相异性条件）。

用相异性条件判定一个二部图是否存在完备匹配，常常不很方便，下面给出一个充分条件，较便于实际使用。

定理 33 设 $G=<V_1,V_2,E>$ 为二部图，$|V_1| \le |V_2|$，G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配的充分条件是：存在正整数 t，使 V_1 中每个结点的度 $\ge t$，V_2 中每个结点的度 $\le t$（该条件称为 t 条件）。

定义 29 设 M 为 $G=<V,E>$ 中一匹配，边在 M 和 $E-M$ 中交替出现的路径称为 M 的交错路径。起点和终点都是 M-非饱和点的交错路径称为 M 的可增广路径。

定理 34 图 $G=<V,E>$ 中匹配 M 是最大匹配，当且仅当 G 不含 M 的可增广路径。

若 M 不是 G 的最大匹配，则存在 M 的可增广路径 $e_1e_2e_3 \Lambda\ e_{2k}e_{2k+1}$，其中 $e_2e_4 \Lambda\ ,e_{2k} \in M$，$e_1,e_3,\Lambda\ ,e_{2k+1} \in E-M$。令 $M' = (M - \{e_2,e_4,\Lambda\ ,e_{2k}\}) \mathrm{Y} \{e_1,e_3,\Lambda\ ,e_{2k+1}\}$，则 M' 是比 M 多一条边的匹配。如此重复，最终可得到 G 的一个最大匹配。

§6.1.14 图的着色

许多实际问题都可归结为图的着色问题。所谓图的着色问题，是指给图的每个结点（或边，或平面图的面）着色，要求相邻的结点（边或面）具有不同颜色，且总的颜色数尽可能少。我们只讨论连通简单无向图的着色问题。

定义 30 对图 G 的结点着色，是指对 G 的每个结点指定一种颜色，使得相邻结点有不同的颜色；若用 k 种颜色给 G 的结点着色，则称 G 是 k-可着色的；若 G 是 k-可着色的，但不是 $(k-1)-$可着色的，则称 G 是 k-色的或 k-色图，称 k 为 G 的色数，记作 $\chi(G)$。$\chi(G)$ 是使 G 是 k-可着色的最小的 k。

定理 35 对任一无环图 G，有 $\chi(G) \le \Delta(G)+1$。

定理 36 设 G 为连通简单图，且 G 不是奇数长的基本回路，也不是完全图，则

$\chi(G) \le \Delta(G)$。

定理 37 图 G 是 2-可着色的当且仅当 G 为二部图。

没有一个简单的方法来确定图的色数以及用尽可能少的颜色给图的结点着色。Welch-Powell 算法在实际使用中比较有效，但它只是能给出一个使颜色数尽可能少（而不一定是最少）的结点着色方法。

Welch-Powell 算法

第 1 步 将图的结点按度数的递减顺序排序。

第 2 步 用一种颜色给序列的第一个结点着色，然后将该颜色依次着在序列的不相邻的后继结点上。

第 3 步 余下未着色的结点构成一个子序列，换一种颜色按第 2 步在该子序列上着色。如此进行，直到所有结点都已着色为止。

定义 31 对图 G 的边着色，是指对 G 的每条边指定一种颜色，使得相邻的边有不同颜色；若用 k 种颜色给 G 的边着色，则称 G 是边 k-可着色的；若 G 是边 k-可着色的，但不是边 $(k-1)-$可着色的，则称 G 是边 k-色的或边 k-色图，称 k 为 G 的边色数，记作 $\chi'(G)$。

定理 38 对任一简单图 G，有 $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$。

定义 32 对平面图 G 的面着色，是指对 G 的每个面指定一种颜色，使得相邻的面（即有公共边的面）有不同颜色；若用 k 种颜色给 G 的面着色，则称 G 是面 k-可着色的；若 G 是面 k-可着色的，但不是面 $(k-1)-$可着色的，则称 G 是面 k-色的或面 k-色图，称 k 为 G 的面色数。

定理 39 任一连通平面图是面 5-可着色的。

但后来在平面图上经多次试验，没有找到一种平面图一定要用 5 种颜色给面着色。在一百多年前，有人猜测只要用 4 种颜色就够了，这就是著名的 4 色猜想，但谁都无法用数学的方法证明它。直到 1976 年，Appel 和 Haken 用大型电子计算机分析了 2000 多种图包括几百万种情况，花了大量的机器时间，终于证明了这个问题。

定理 40 任一连通平面图是面 4-可着色的。

定理 41 连通平面图 G 是面 4-可着色的，当且仅当 G^* 是 4-可着色的。

定理 41 说明给连通平面图的结点着色，也只要 4 种颜色就够了。

§6.2 重点及难点解析

§6.2.1 基本要求

1．掌握图、无向图、有向图、关联、邻接、结点度数、一些特殊图、子图、同构、通

路、回路、通路长度、结点之间的连通性与可达性、图的连通性、点割集、割点、边割集、割边、点连通度、边连通度等概念及有关性质并能够判定或证明图的有关结论。

2．掌握图的邻接矩阵和关联矩阵的概念及有关性质，能够利用邻接矩阵计算图中各种长度的通路和回路的数目。

3．掌握求图中某个结点到其他任一结点的最短路径的 Dijkstra 算法，以及求图中任意两个结点之间的最短路径的 Warshall 算法。

4．掌握欧拉图和哈密尔顿图的概念及其判别方法，能够利用 Fleury 算法求欧拉回路，了解邮路问题，能够用近邻法求哈密尔顿回路。

5．掌握平面图、面、边界、极大平面图、同胚等概念及有关性质，能够判定一个图是否为平面图。

6．掌握最小点覆盖、最小边覆盖、最大点独立集、最大边独立集（匹配）、最大匹配、完美匹配、完备匹配、可增广路径等概念，能够利用相异性条件和 t 条件判定二部图中是否存在完备匹配，了解利用可增广路径求完备匹配的方法和思想。

7．掌握结点着色、边着色、面着色等概念及有关性质，能够用 Welch-Powell 算法确定一个使图的颜色数尽可能少的结点着色。

§6.2.2　疑难点解析

1．当图的结点有环时，应特别注意该结点的度的计数。

2．两个图同构不仅须结点之间、边之间一一对应，结点与边的关联关系也必须保持对应，而后者往往容易被忽视，导致同构判断的错误。

3．利用图的邻接矩阵 A 构造 $B_n=\sum_{k=1}^{n}A^k$ ，若 B_n 主对角线外的元素均不为零，则图连通或强连通。否则图不连通或不强连通。这是判定图的连通性非常有效的方法。

4．Dijkstra 算法适合于求图中某个结点到另一结点或其他所有结点的最短路径。而 Warshall 算法适合于求图中任意两个结点之间的最短路径。利用 Dijkstra 算法也可求任意两结点间的最短路径，但计算量比 Warshall 算法的大。

5．我们给出的判定一个图是半哈密尔顿图或哈密尔顿图的条件，只是必要条件或充分条件，而非充要条件，在使用时须适当选择。

6．近邻法是近似算法，用它求得的哈密尔顿回路不一定是最小权哈密尔顿回路，一般只是权接近最小权的一条哈密尔顿回路，偶尔求得的也是最小权哈密尔顿回路。

7．我们给出的判别平面图的条件都是必要条件，而非充分条件，即满足这些条件的图未必是平面图。因此，不容易判定一个图是平面图。但利用这些定理的逆否命题判定一个图不是平面图却很有效，即不满足这些条件的图必为非平面图。

8．判别一个二部图中存在完备匹配的相异性条件和 t 条件分别是充要条件和充分条件，但 t 条件对任一二部图能极容易地进行检验，因而在考虑用较为复杂的相异性条件之前，可首先用 t 条件判断，如果 t 条件不成立，再用相异性条件判断。

9．图是点（边或面）k-可着色的，是指能用 k 种颜色给图的结点（边或面）着色，

但 k 不一定是最少的颜色数。图是点（边或面）k-色的，是指最少要用 k 种颜色给图的结点（边或面）着色。平面图的面着色问题一般化为其对偶图的点着色问题。Welch-Powell 算法是近似算法，它给出的结点着色的颜色数不一定是最少的，而是较少的。

§6.3　基　本　题

§6.3.1　选择题

1．设 $D=<V,E>$ 为有向图，则有（　　）。

A． $E\subseteq V\times V$　　B． $E\not\subseteq V\times V$
C． $V\times V\subset E$　　D． $V\times V=E$

答案：A

2．设 $G=<V,E>$ 为无环的无向图，$|V|=6$，$|E|=16$，则 G 是（　　）。

A．完全图　　B．零图　　C．简单图　　D．多重图

答案：D

3．含 5 个结点、3 条边的不同构的简单图有（　　）。

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

答案：C

4．设 G 为有 n 个结点的简单图，则有（　　）。

A． $\Delta(G)<n$　　B． $\Delta(G)\le n$　　C． $\Delta(G)>n$　　D． $\Delta(G)\ge n$

答案：A

5．设 $G=(n,m)$，且 G 中每个结点的度数不是 k 就是 k+1，则 G 中度为 k 的结点的个数是（　　）。

A． $n/2$　　B． $n(n+1)$　　C． nk　　D． $n(k+1)-2m$

答案：D

6．给定下列序列，可构成无向简单图的结点度数序列的是（　　）。

A．（1，1，2，2，3）　　B．（1，1，2，2，2）
C．（0，1，3，3，3）　　D．（1，3，4，4，5）

答案：B

7．图 G 和 G' 的结点和边分别存在一一对应关系是 G 和 G' 同构的（　　）。

A．充分条件　　B．必要条件
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

答案：B

8．n 个结点可构造的简单无向图（含同构图）的个数是（　　）。

A．2^n　　B．2^{n^2}　　C．n^2　　D．$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

答案：D

9．K_4 中含 3 条边的不同构生成子图有（　　）。

A．1 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．2 个

答案：B

10．若简单图 G 与其补图 $\overline{G}$ 同构，称 G 为自补图。则含 5 个结点不同构的无向自补图的个数为（　　）。

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

答案：C

11．设 $G=<V,E>$ 为无向图，$u,v\in V$，若 u,v 连通，则（　　）。

A．$d(u,v)>0$　　B．$d(u,v)=0$
C．$d(u,v)<0$　　D．$d(u,v)\geq 0$

答案：D

12．任何无向图中结点间的连通关系是（　　）。

A．偏序关系　　B．等价关系　　C．相容关系　　D．拟序关系

答案：B

13．设 $\mathrm{D}=<\mathrm{V},\mathrm{E}>$ 为有向图，$V=\{a,b,c,d,e,f\}$，$E=\{<a,b>,<b,c>$，$<a,d>,<d,e>,<f,e>\}$ 是（　　）。

A．强连通图　　B．单向连通图　　C．弱连通图　　D．不连通图

答案：C

14．设 $|V|>1$，$D=<V,E>$ 是强连通图，当且仅当（　　）。

A．D 中至少有一条通路
B．D 中至少有一条回路
C．D 中有通过每个结点至少一次的通路
D．D 中有通过每个结点至少一次的回路

答案：D

15．设$V=\{a,b,c,d\}$，则与V构成强连通图的边集为（　　）。

A．$E_1=\{<a,d>,<b,a>,<b,d>,<c,b>,<d,c>\}$
B．$E_2=\{<a,d>,<b,a>,<b,c>,<b,d>,<d,c>\}$
C．$E_3=\{<a,c>,<b,a>,<b,c>,<d,a>,<d,c>\}$
D．$E_4=\{<a,b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>,<c,d>\}$

答案：A

16．无向图G中的边e是G的割边的充要条件为（　　）。

A．e是重边　　B．e不是重边
C．e不包含在G的任一简单回路中　　D．e不包含在G的某一回路中

答案：C

17．在有n个结点的连通图中，其边数（　　）。

A．最多有$n-1$条　　B．至少有$n-1$条
C．最多有n条　　D．至少有n条

答案：B

18．设$G=(n,m)$为无向简单图，可构成邻接矩阵的数目为（　　）。

A．$n!$　　B．$m!$　　C．C_n^m　　D．C_m^n

答案：A

19．欧拉回路是（　　）。

A．路径　　B．简单回路
C．既是基本回路也是简单回路　　D．既非基本回路也非简单回路

答案：B

20．哈密尔顿回路是（　　）。

A．路径　　B．简单回路
C．既是基本回路也是简单回路　　D．既非基本回路也非简单回路

答案：C

21．设$G=(n,m)$是欧拉图，则n,m有关系（　　）。

A．$n=m$　　B．n,m的奇偶性必相同
C．n,m的奇偶性必相反　　D．n,m的奇偶性既可相同也可相反

答案：D

§6.3.2　填空题

1．设无向图 G 有 12 条边，有 6 个 3 度结点，其余结点度数均小于 3，则 G 中至少有_____个结点。

答案：9

2．设 G=（n, m）是简单图，V 是 G 中度数为 k 的结点，e 是 G 中一条边，则 $G-v$ 中有__①__个结点，__②__条边。$G-e$ 中有__③__个结点，__④__条边。

答案：① $n-1$　② $m-k$　③ n　④ $m-1$

3．3 个结点可构成__①__个不同构的简单无向图，可构成__②__个不同构的简单有向图。

答案：① 4　② 16

4．设 $G=(100,100)$ 为无向连通图，则从 G 中能找到_____条回路。

答案：1

5．设 D 是有向图，当且仅当 D 中有一条通过每个结点的通路时，D 为____连通的。

答案：单向

6．设有向图 $D=<V,E>$，$V=\{a,b,c,d\}$，$E=\{<a,b>,<a,d>,<d,c>,<b,d>,<c,d>\}$，则 D 是__①__连通的，c 的可达集为__②__，$d(c, a)$=__③__。

答案：① 单向　② $\{c, d\}$　③ ∞

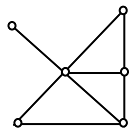


图 6-1

7．图 6-1 的点连通度为__①__，边连通度为__②__。

答案：① 1　② 1

8．K_5 的点连通度为__①__，边连通度为__②__。

答案：① 4　②4

9．设图 $D=<V,E>$；V=｛v_1, v_2, v_3, v_4｝，若 D 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\deg^-(v_1)$=__①__，$\deg^+$（v_4）＝__②__，从 v_2 到 v_4 长度为 2 的通路有__③__条。

答案：① 3　② 1　③ 1

10．无向图 G 有一条欧拉通路，当且仅当____。

答案：G 连通且有零个或两个奇度结点

11．当 n 为______数时，K_n 必为欧拉图。

答案：奇

12． $K_{n,m}$ 为哈密尔顿图，当且仅当 ______ 。

答案：$n=m\geq 2$

13．若连通平面图 G 有 4 个结点，3 个面，则 G 有_____条边。

答案：5

14．仅当 n______时，K_n 为平面图。

答案：≤ 4

15．设 G=（7，15）为简单平面图，则 G 一定是__①__，且每个面均为__②__。

答案：① 连通的　　② K_3

16．如图 6-2 所示的图 G 的色数 $\chi(G)$= ______。

答案：3

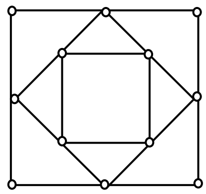


图 6-2

§6.3.3 判断题

1．任一图 G 的 $\Delta(G)$ 必小于其结点数。（ ） 答案：×

2．在 n 个结点的简单图 G 中，若 n 为奇数，则 G 与 $\overline{G}$ 的度为奇数的结点数相同。（ ） 答案：√

3．K_4 有 10 个生成子图。（ ） 答案：×

4．图 G 和 G' 同构当且仅当 G 和 G' 的结点和边分别存在一一对应关系。（ ） 答案：×

5．具有 3 个结点的有向完全图，含 4 条边的不同构的子图有 4 个。（ ） 答案：√

6．3 个（4，2）无向简单图中，至少有两个同构。（ ） 答案：√

7．若无向图中恰有两个度为奇数的结点，则这两个结点必连通。（ ） 答案：√

8．在有向图中，结点间的可达关系是等价关系。（ ） 答案：×

9．若有向图中有两个奇度结点，则它们一个可达另一个或相互可达。（ ）答案：×

10．若图 G 不连通，则 $\overline{G}$ 必连通。（ ） 答案：√

11．有向图的每个结点恰位于一个单向分图中。（ ） 答案：×

12．图 6-3 为无强分图。（ ） 答案：×

13．若图 G 的边 e 不包含在 G 的某简单回路中，则 e 是 G 的割边。（ ） 答案：×

14．若无向连通图中无回路，则其每条边均为割边。（ ） 答案：√

15．若有向图 D 强连通，则 D 必为欧拉图。（ ） 答案：×

16．若有向图 D 是欧拉图，则 D 必为强连通图。（ ） 答案：√

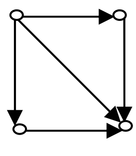


图 6-3

17．K_n 是哈密尔顿图。（　）　答案：×
18．$K_{5,3}$ 不是哈密尔顿图。（　）　答案：√
19．任一（n, m）平面图，若 $n \geq 3$，则 $m \leq 3n-6$。（　）　答案：×
20．设 $\mathrm{G} = <\mathrm{V}, \mathrm{E}>$，$|V| \geq 11$，则 G 或 $\overline{G}$ 是非平面图。（　）　答案：√
21．极大平面图必连通。（　）　答案：√
22．设 $G = <V, E>$ 为连通的简单平面图，若 $|V| \geq 3$，则所有结点 v，有 $\deg(v) \leqslant 5$。（　）　答案：×

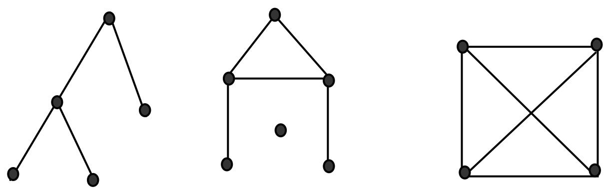
§6.4　习 题 解 析

1．设 $d = (d_1, d_2, \Lambda, d_n)$，其中 d_i 为正整数，$i = 1,2,\Lambda, n$。若存在 n 个结点的简单图，使得结点 v_i 的度为 d_i，则称 d 是可图解的。下面给出的各序列中哪些是可图解的？哪些不是，为什么？

（1）（1，1，1，2，3）
（2）（0，1，1，2，3，3）
（3）（3，3，3，3）
（4）（2，3，3，4，4，5）
（5）（2，3，4，4，5）
（6）（1，3，3，3）
（7）（2，3，3，4，5，6）
（8）（1，3，3，4，5，6，6）
（9）（2，2，4）
（10）（1，2，2，3，4，5）

解：

（1），（2），（3）全是可图解的，它们对应的图可分别由图 6-4 中图（1），图（2），图（3）给出。



（1）　（2）　（3）

图 6-4

其余的各序列都不是可图解的。在（4），（7），（10）中均有奇数个奇度结点，根据握手定理的推论，它们自然都不是可图解的。n 阶简单图中，每个结点的度至多为 n–1，因而（5）和（9）均不可图解。若（6）是可图解的，设 $d(v_1) = 1$，

$d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=3$，因为v_2,v_3,v_4的度都是3，因而要求v_1与v_2,v_3,v_4之间有边关联，但因v_1的度为1，这是不可能的，所以（6）也是不可图解的。在（8）中，n=7，因而每个结点至多6度。若（8）是可图解的，设$d(v_1)=1$，$d(v_6)=d(v_7)=6$，因而v_6,v_7均应与v_1相邻，这也是不可能的，因而（8）也不可图解。

*2．设图G中有9个结点，每个结点的度不是5就是6。试证明G中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点。

证：

由握手定理的推论可知，G中5度结点数只能是0，2，4，6，8五种情况（此时6度结点分别为9，7，5，3，1个）。以上五种情况都满足至少5个6度结点或至少6个5度结点的情况。

3．（1）$n(n\geq 1)$阶无向完全图与有向完全图各有多少条边？

（2）完全二部图$K_{n,m}$中共有多少条边？

（3）n阶k正则图中共有多少条边？

解：

（1）n阶无向完全图K_n中任二个不同的结点之间均有且仅有一条边，因而边数m为C_n^2，即$m=C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$。显然$n$阶有向完全图的边数为$n$阶无向完全图边数的2倍，即为$n(n-1)$。

（2）完全二部图$K_{n,m}$的互补结点子集V_1中每个元素与V_2中的m个元素都相邻，即对应m条边，因而V_1中n个结点应对应mn条边。

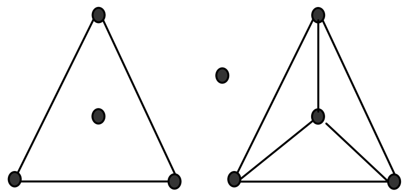
（3）由握手定理可知，$2m=n\cdot k$，因而边数$m=\dfrac{1}{2}nk$

4．寻找一个$n(n\geq 2)$阶简单图G，使得它的边数m为$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$。

解：

此题答案不惟一。下面介绍一种较为简便的求解法：

已知$n-1$阶完全图K_{n-1}的边数为$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$；再并上一个平凡图，得n个结点的无向图G，它有n个结点，$m=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$条边。



（1）　　（2）

图 6-5

例如，n=4时，图G如图6-5中（1）图所示，n=5时，G如图6-5中（2）图所示。

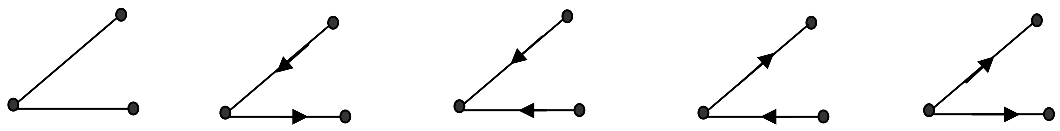
5．（1）m条边的n阶无向简单图G可产生多少个定向图？

（2）画出星形图$K_{1,2}$的全部的定向图。

解：

（1）设 $e=(u,v)$ 为 G 中任意一条边，在产生 G 的定向图时，e 有两种定向法，即 e 可变为 $\langle u,v\rangle$，也可变为 $\langle v,u\rangle$，G 中共有 m 条边，因而共有 2^m 种定向法，产生 2^m 个定向图。

（2）答案如图 6-6 所示，其中图（1）为星形图 $K_{1,2}$，图（2）~图（5）为它的不同的定向图。



（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

图 6-6

6．有 n 个药箱，若每两个药箱里有一种相同的药，而每种药恰好放在两个箱中，问共有多少种药品？

解：

依题意，若用 n 个结点表示 n 个药箱，放相同药的两个箱子对应的点间连一条边，则得到一个无向完全图。该题转化为求无向完全图的边数问题。知无向完全图 K_n 的边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}$。故共有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 种药品。

7．某一次聚会的成员到会后相互握手。试用图论的知识说明与奇数个人握手的人数一定是一个偶数。

解：

依题意，用结点表示到会的成员，握手两人对应的结点间用边相连，则得一个无向图。本题可归结为说明一个图中有偶数个奇度结点。根据握手定理结论成立。

*8．证明 3 正则图必有偶数个结点。

证：

设图 G 为任一 3 正则图，有 n 个结点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，则所有结点度数之和 $\sum\deg(v_i)=3n$。若 n 为奇数，则 $3n$ 也为奇数，与定理 1 矛盾。故 n 为偶数。

9．若有 n 个人，每个人恰恰有三个朋友，则 n 必为偶数。

证：

用 n 个结点代表 n 个人，两个朋友对应的结点间连边，则得一个 3 正则图 G，该题可转为 3 正则图必有偶数个结点。由题 8 知结论正确。

10．在 $n(n\geq 2)$ 阶简单图 G 中，n 为奇数，问 $\overline{G}$ 与 G 的奇度结点的个数有何关系？

解：

$G\cup\overline{G}$ 为完全图 K_n，因为 n 为奇数，所以 K_n 中每个结点的度 $n-1$ 为偶数。若在 G 中有一个奇度结点 v，此结点 v 在 $\overline{G}$ 中也必为奇度结点，因而 $\overline{G}$ 与 G 的的奇度

结点个数相同。

*11．设 G 为至少有两个结点的简单图，证明：G 中至少有两个结点度数相同。

证：

若 G 中孤立结点的个数大于等于 2，结论自然成立。若 G 中有一个孤立结点，则 G 中至少有 3 个结点，因而不考虑孤立结点，就是说 G 中每个结点的度数都大于等于 1。又因为 G 为简单图，所以每个结点的度都小于等于 $n-1$。因而 G 中结点的度的取值只能是 1，2，…，$n-1$ 这 $n-1$ 个数。由鸽巢原理可知，取 $n-1$ 个值的 n 个结点的度至少有两个是相同的。

12．证明：在至少有 2 个人的人群中，至少有 2 个人，他们有相同的朋友数。

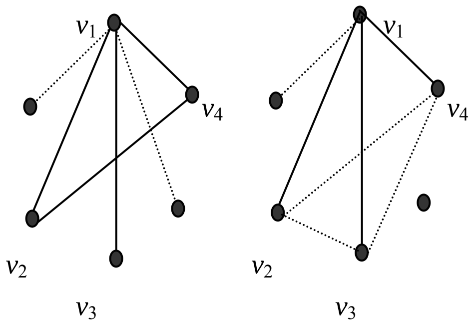
证：

用 n 个结点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 表示 n 个人，构成结点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。设 $E=\{(u,v)|u,v\in V$，且 u 与 v 是朋友 $(u\neq v)\}$，以 V 为结点集，E 为边集，构成无向图 G=<V, E>。我们的问题就变成了证明 G 中至少存在 2 个结点，它们的度数相同，其证明过程见题 11。

*13．将无向完全图 K_6 的边随意地涂上红色或绿色，证明：无论如何涂法，总存在红色的 K_3 或绿色的 K_3。

证：

设 K_6 的结点为 $v_1,v_2,\cdots,v_6$。给 K_6 的边随意用红、绿色涂上。由鸽巢原理可知，由 v_1 引出的 5 条边中存在 3 条涂同种颜色的边。不妨设存在着 3 条红色的边，又不妨设这 3 条边的另一个端点分别是 v_2,v_3,v_4（否则可重新给结点排序）。红色边用实线表示，绿色边用虚线表示。由 v_1 引出的另外两条边的颜色可红可绿。



（1）　　（2）

若 v_2,v_3,v_4 构成的 K_3 中的边再有一条红色边。比如（v_2,v_4）着的是红色，则 v_1,v_2,v_4 构成的三角形为红色的 K_3，见图 6-7 中图（1），若 v_2,v_3,v_4 构成的 K_3 的边全是绿色的边，则存在绿色边的 K_3，见图 6-7 中图（2）。这就证明了我们的结论。

14．设 G 是 6 个结点的无向简单图，证明 G 或 $\overline{G}$ 中存在 3 个结点彼此相邻。

证：

由补图的定义可知，$G\cup\overline{G}$ 为完全图 K_6。于是这个 K_6 中的边或来自 G（给这样的边涂上红色），或来自 $\overline{G}$（给这样的边涂上绿色）。给一个 6 个结点的无向简单图，就等价于给 K_6 的边的一种涂色方案，由题 13 可知，K_6 中存在红色 K_3 或绿色 K_3。若存在红色 K_3，相当于在 G 中存在彼此相邻的 3 个结点。若存在绿色 K_3 就等价于 $\overline{G}$ 中存在 3 个结点彼此相邻。

15．证明：任何 6 个人中，要么有 3 人彼此认识，要么有 3 人彼此不认识。

证：

用结点v_1,v_2,Λ,v_6分别表示 6 个人。若v_i与v_j彼此相识（$i \neq j$），就在v_i,v_j之间连边（v_i,v_j），于是构成无向简单图 G=<V, E>。在$\overline{G}$中，若v_i与v_j之间有边（v_i,v_j），说明v_i,v_j所代表的人彼此不认识。由题 14 可知，在 G 或$\overline{G}$中存在 3 个结点彼此相邻，若在 G 中存在 3 个结点彼此相邻，则这 3 个结点代表的人彼此认识。若在$\overline{G}$中存在 3 个彼此相邻的结点，则说明存在 3 个人彼此不认识。

请读者注意，此题也可以用题 13 的结果来证明，或者既不用题 13，也不用题 14，独立证明此题。

16．给无向完全图$K_n(n \geq 7)$的各边随意地涂上红色或绿色，若已知从某结点v_0引出的$n-1$条边中至少有 6 条边涂红色，则存在红色的K_4或绿色的K_3。

证：

取与v_0关联的 6 条红色的边，它们的另外端点分别为v_1,v_2,Λ,v_6。这 6 个结点导出的K_n的导出子图为K_6。由题 13 可知，K_6中存在红K_3或绿K_3。若存在红 K_3，不妨设其结点为v_1,v_2,v_3，则由v_0,v_1,v_2,v_3导出的导出子图为红K_4，见图 6-8。若K_6中存在绿K_3，它当然也是K_n中的绿色K_3。

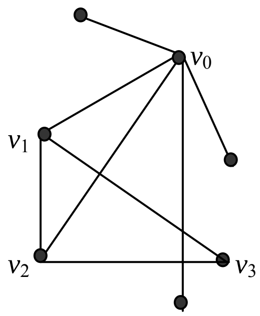


图 6-8

17．有 17 位学者，每 2 位讨论过 3 篇论文中的一篇且仅一篇。证明：至少有 3 位学者他们相互讨论的是同一篇论文。

证：

用v_1,v_2,Λ,v_{17}分别表示 17 位学者。若v_i,v_j讨论过论文 I，则v_i,v_j之间连红色边，若讨论过论文Ⅱ，v_i,v_j之间连绿色边，若讨论过论文Ⅲ，v_i,v_j之间连蓝色边。于是，由红、绿、蓝边构成一个完全图 K_{17}。由鸽巢原理可知，从结点v_i引出的 16 条边中存在着 6 条同色的边，不妨设存在着 6 条红色边。这 6 条边的另外端点分别为$v_{i_1},v_{i_2},\Lambda,v_{i_6}$。若这 6 个结点中再有两个结点，比如说$v_{i_1},v_{i_2}$之间也连红色边，则由$v_i,v_{i_1},v_{i_2}$导出的$K_{17}$的导出子图为红$K_3$，说明存在 3 位学者，他们彼此讨论的是论文 I。若$v_{i_1},v_{i_2},\Lambda,v_{i_6}$导出的$K_6$中无红色边，于是此$K_6$由绿色边和蓝色边组成，由题 13 可知，存在绿$K_3$，说明有 3 人彼此讨论过论文Ⅱ，或存在蓝$K_3$，说明有 3 人彼此讨论过论文Ⅲ。

*18．无向图 G 的各个结点的度数都是 3，且结点数 n 与边数 m 有关系$m = 2n - 3$。在同构的意义下 G 是惟一的吗？为什么？

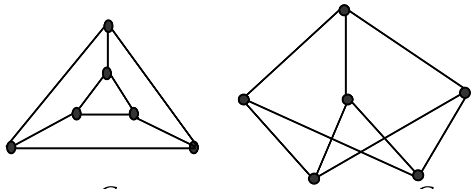
解：

不惟一。因为 G 为 3 正则图，由定理 1 及定义知 G 中所有结点的度数之和有关系：

$$2m=3n \tag{1}$$

将$m=2n-3$代入（1）得 n=6，于是 m=9。即 G 为有 6 个结点，9 条边的图，在同

构意义下不是惟一的。如图 6-9 中图 G_1 和图 G_2 都是 6 个结点，9 条边，但不同构。



G_1　　G_2

图 6-9

19．在图 6-10 中，图 G_1 与图 G_2 同构吗？图 G_3 与图 G_4 同构吗？若两图同构，写出结点之间的对应关系。若不同构则说明理由。

解：

图 6-10 中，$G_1 \cong G_2$。结点之间的对应关系如下：

$g \leftrightarrow 1$，$a \leftrightarrow 8$，$h \leftrightarrow 2$，$b \leftrightarrow 3$，$i \leftrightarrow 7$，$c \leftrightarrow 9$，$j \leftrightarrow 5$，$d \leftrightarrow 4$，$f \leftrightarrow 6$，$e \leftrightarrow 10$

G_3 与 G_4 不同构。在 G_4 中 4 个 3 度结点中的每一个均与另外两个 3 度结点相邻，而在 G_3 中每个 3 度的结点只与另外一个 3 度结点相邻，因而，G_3 不会与 G_4 同构（图 6-10 中 G_1 称为彼德森图）。

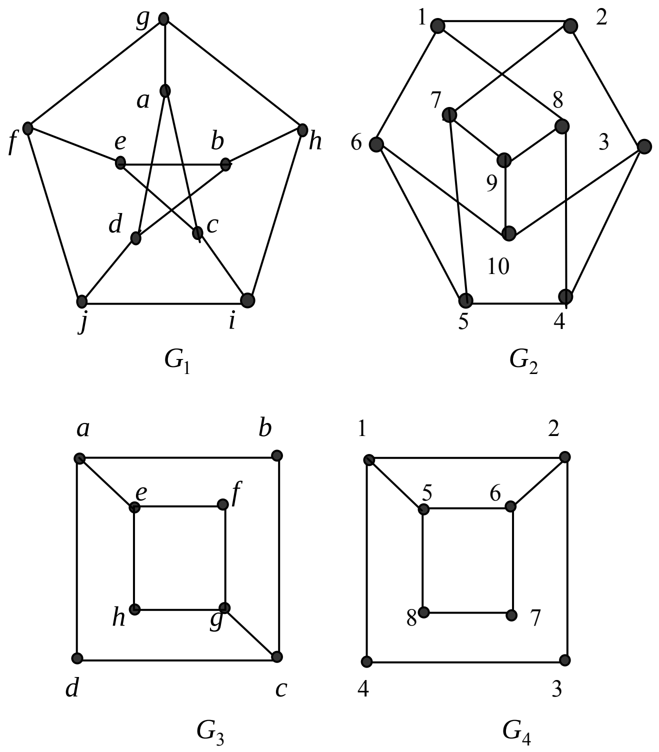


图 6-10

*20．在图 6-11 中，图 G_1 和 G_2 同构吗？为什么？

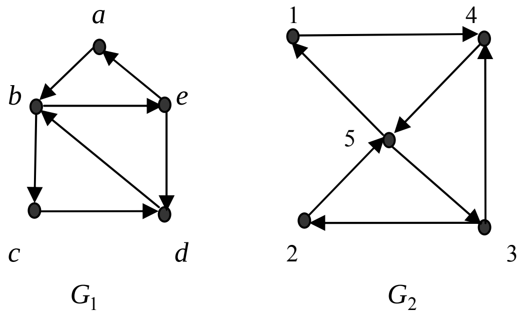


图 6-11

解：

$G_1 \cong G_2$。因 G_1 与 G_2 的结点间存在一一对应关系且保持关联关系，边的方向一致，其对应关系中：

f：$a \leftrightarrow 2$　$<a,b> \leftrightarrow <2,5>, <b,c> \leftrightarrow <5,1>$

$b \leftrightarrow 5$　$<c,d> \leftrightarrow <1,4>, <d,b> \leftrightarrow <4,5>$

$c \leftrightarrow 1$　$<b,e> \leftrightarrow <5,3>, <e,a> \leftrightarrow <3,2>$

$d \leftrightarrow 4$　$<e,d> \leftrightarrow <3,4>$

$e \leftrightarrow 3$

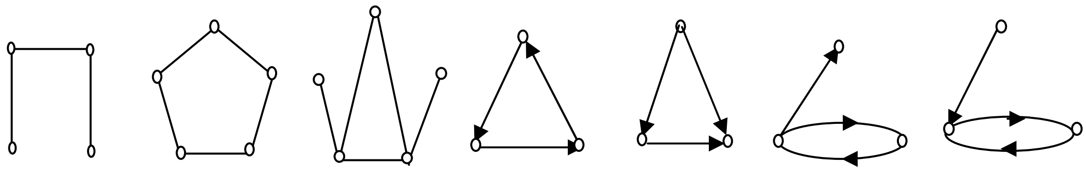
21．如果一个简单图 G 与它的补图 $\overline{G}$ 同构，则称 G 是自补图。

（1）给出所有的非同构的无向的 4 阶自补图；
（2）给出所有的非同构的无向 5 阶自补图；
（3）证明：若 n 阶无向简单图是自补图，则 n=0,1（mod 4），即 $n = 4k$ 或 $n = 4k + 1$（k 为正整数）；
（4）给出所有的非同构有向 3 阶自补图；
（5）若 n 阶有向简单图是自补图，对 n 有什么限制？

解：

（1）图 6-12 中（1）图与它的补图同构，所以图（1）为 4 个结点的自补图，再没有与它非同构的 4 个结点的自补图了。

（2）5 个结点的非同构的自补图有两个，它们分别为图 6-12 中的图（2）和图（3）。



（1）　（2）　（3）　（4）　（5）　（6）　（7）

图 6-12

（3）若 n 阶无向简单图 G 是自补图，则因 $G \cong \overline{G}$，因而 G 与 $\overline{G}$ 的边数相同，设

它们的边数为 m。又因为 G 与 $\overline{G}$ 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{n(n-1)}{2}$，所以 $\frac{n(n-1)}{2}=2m$，即 $n(n-1)=4m$，因而 n 为 4 的倍数，即 $n=4k$，或 n–1 为 4 的倍数，即 $n=4k+1$（k 为正整数），即 n=0,1(mod4)。

（4）非同构的有向 3 阶自补图有 4 个，它们分别为图 6-12 中图（4），图（5），图（6），图（7）所示。

（5）对 n 没什么限制。

*22．画出 4 阶无向完全图 K_4 的所有非同构的生成子图，并指出自补图来。

解：

图 6-13 中的 11 个图是 K_4 的全部的非同构的生成子图，其中图（7）为自补图。

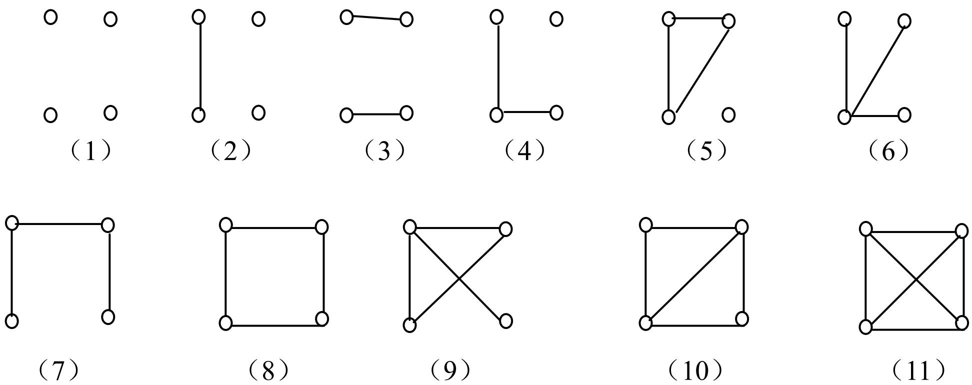


图 6-13

23．若无向图 G 是欧拉图，G 中是否存在割边？为什么？

解：

不存在。因为 G 为欧拉图，因而 G 是连通图。若 G 中存在割边 e=（u,v），则 u,v 分别属于 $G-e$ 的两个连通分支 G_1 与 G_2。设 w 为 G_1 中的一个结点，可从 w 出发走一条欧拉回路 C：从 w 开始，一旦行到 u，沿割边到达 v，则在 G_2 中行遍后无法回到 G_1 达到 w，这与 G 是欧拉图矛盾。故欧拉图中无割边。

24．画出 3 阶有向完全图所有非同构的含 4 条边的子图以及它们的补图。

解：

3 阶有向完全图非同构的 4 条边的子图有 4 个，图 6-14 中图（1），图（2），图（3），图（4）所示。它们的补图分别为图（5），图（6），图（7），图（8）。

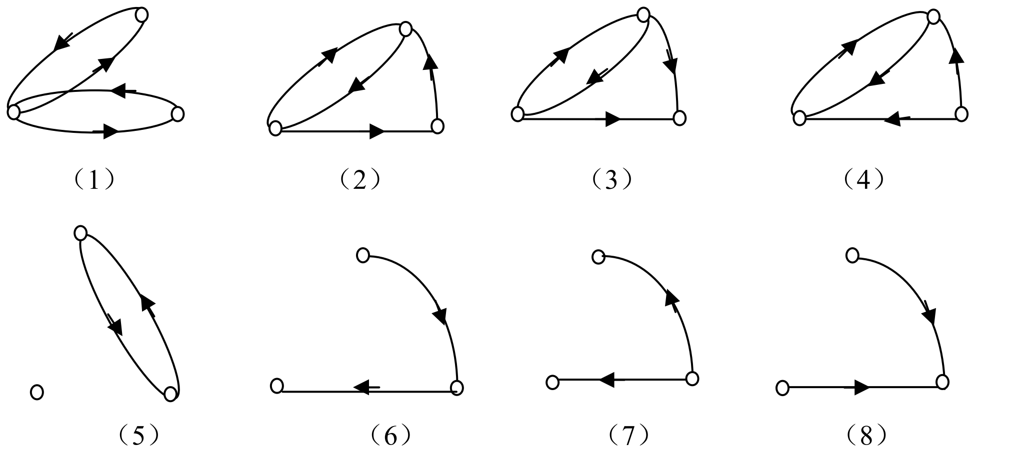


图 6-14

25．在无向图 G 中，从结点 u 到 v 有一条长为偶数的通路，并有一条长为奇数的通路，则 G 中必有一条长为奇数的回路。

证：

设从 u 到 v 长为偶数的通路为 $ue_1u_1e_2\Lambda\ e_{2k}v$，长为奇数的通路为 $ue_1'u_1'e_2'\Lambda\ e_{2n+1}'v$，由于 G 为无向图，那么 $ue_1u_1e_2\Lambda\ e_{2k}ve_{2n+1}'\Lambda\ e_1'u$ 就是一条长为奇数的回路。

26．证明当且仅当图 G 的一条边 e 不含在 G 的简单回路中时，e 才是 G 的割边。

证：

充分性：设图 G 的边 e=(u, v)不包含在 G 的任一条简单回路中，则 u, v 之间除 e 外无任何通路，否则，若 u, v 间存在另一条通路，那么加上边 e 就形成一条回路，与题矛盾，因此去掉边 e，则 G 不连通，故边 e 为 G 的割边。

必要性：设边 e 是 G 的割边，假设 e 包含在某一条简单回路中，删去 e 则不影响 G 的连通性，这与 e 是割边矛盾。所以 e 不包含在 G 的任何简单回路中。

27．<V，E>是简单无向连通图，但不是完全图，证明 G 中必存在三个结点 $u,v,w\in V$，使得 $(u,v),(v,w)\in E$，但 $(u,w)\notin E$。

证：

因为 G 不是完全图，故存在 $u,w\in V$，使 $(u,w)\notin E$，由 G 是连通图，在 u, w 间有基本通路 L，设为 $uv_1v_2\Lambda\ v_nw, n\geq 1$。

若 n=1 时，$v_2=w$，则 u,v_1,w 即为所求。

若 n>1 时，显然 $(u,v_2)\notin E$，否则与 L 为基本通路矛盾。令 $v_1=v,\ v_2=w$，则 u, v, w 即为所求。

*28．设 G 为有 n 个结点的简单图，且 $|E|>(n-1)(n-2)/2$，则 G 是连通图。

证：

假设 G=<V，E>不连通，不妨设 G 可分为两个连通分支 G_1,G_2，设 G_1,G_2 分别有 n_1,n_2 个结点，有 $n_1+n_2=n$

由于 $n_i \ge 1, i=1,2$，则

$$|E| \le \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \le \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以 G 是连通图。

29.（1）在图 6-15 所示的各图中哪几个是强连通的？

（2）哪几个是单向连通的？

（3）哪几个是连通的（弱连通的）？

（4）在图（3）中，写出 a 和 b 可达的结点，a 到 b 和 a 到 c 的距离；

（5）在图（4）中，给出最长的基本回路。

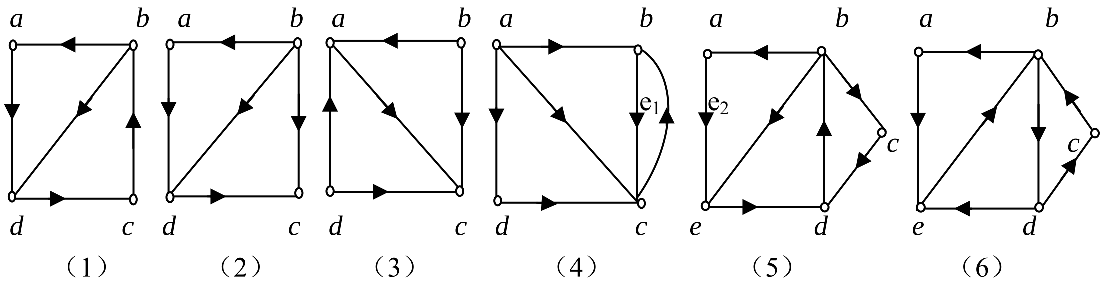


图 6-15

解：

（1）图（1），图（5），图（6）是强连通图。

（2）图（1），图（2），图（4），图（5），图（6）都是单向连通图。

（3）图 6-15 中所示的 6 个图都是弱连通图。

（4）a 可达 a 和 c；b 可达 a，b 和 c；d（a b）$=\infty$，$d(a\ c)=1$。

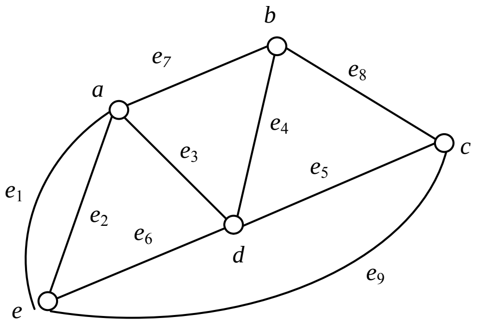
（5）设$<b, c>=e_1$,$<c, b>=e_2$，图（4）中最长的基本回路为 e_1e_2，其长为 2。

30.（1）求图 6-16 图（1）中 3 条边和 4 条边的边割集各一个；

（2）求图 6-16 图（2）中的一个最小的边割集，一个最大的边割集；

（3）在图 6-16 图（1）中求一个最小的点割集，在图（2）中求含 1 个结点和 2 个结点的点割集各一个；

（4）求图 6-16 中图（1），图（2）和 K_5 的点连通度，边连通度；它们都是几连通图？



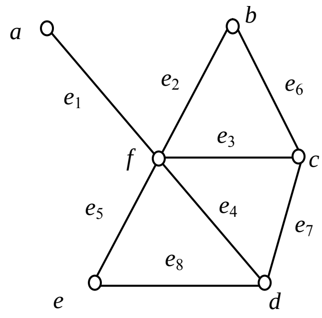


图 6-16

解：

（1）$\{e_7, e_4, e_8\}$ 为图（1）中三条边的边割集，$\{e_6, e_3, e_4, e_5\}$ 为四条边的边割集。

（2）图（2）中最小的边割集为$\{e_1\}$，最大的边割集为$\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$；

（3）$\{a, d, c\}$为图（1）中的最小点割集。在图（2）中$\{f\}$是含 1 个结点的点割集。图（2）中无含 2 个结点的点割集。

（4）图（1）的点连通度κ_1 =3，图（1）是 1-连通的，2-连通的，3-连通的。边连通度$\lambda_1 = 3$，图（1）是 1-边连通的，2-边连通的，3-边连通的。

图（2）的点连通度κ_2 =1，边连通度$\lambda_2 = 1$，图（2）是 1-连通的，又是 1-边连通的。

K_5 的点连通度κ_3 =4，边连通度$\lambda_3 = 4$，κ_5 是 r-连通的,也是 r-边连通的，r=1，2，3，4。

31．（1）证明：若图 G 中恰有两个奇度数结点，则这两个结点是连通的。

（2）若有向图 D 中只有两个奇度数结点，它们中的一个可达另一个，或相互可达吗？

解：

（1）证：设 G 中的两个奇度结点分别为 u 和 v，若 u 与 v 不连通，即它们之间无任何通路，则 G 至少有两个连通分支G_1，G_2，u 与 v 分别属于G_1和G_2，于是G_1与G_2中各含 1 个奇度结点，这与握手定理的推论相矛盾，因而 u 与 v 必须是连通的。

（2）若 D 是有向图，D 中有两个奇度数结点 u 与 v，u 与 v 不一定相互可达，也不一定一个可达另一个。例如，设 $D=\langle V, E\rangle$，$V=\{u, v, w\}$，$E=\{\langle v, u\rangle,\langle v, w\rangle\}$。$D$ 中，$d(u) = d(w) = 1$，但 u 不可达 w，w 也不可达 u。

32．证明在 n 个结点的连通图 G 中，至少有 n–1 条边。

证：

不妨设 G 是无向连通图（若 G 为有向图，可略去边的方向讨论对应的无向图）。

设 G 中的结点为v_1, v_2, Λ, v_n。由连通性，必存在与 v_1 相邻的结点，不妨设它为 v_2

（否则可重新编号），连接 v_1,v_2，得边 e_1，还是由连通性，在 $v_3,v_4,\ldots,v_n$ 中必存在与 v_1 或 v_2 相邻的结点，不妨设为 v_3，连接 v_2,v_3，又得边 e_2，继续这个过程，在 v_{n-1},v_n 中存在与 $v_1,v_2,\ldots,v_{n-2}$ 相邻的结点，设为 v_{n-1}，得边 e_{n-2}，最后，v_n 必与 $v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}$ 中的某个结点相邻，得新边 e_{n-1}。由此可见，G 中至少有 $n-1$ 条边。

33．设 e 为图 $G=<V,E>$ 中的一条边，$p(G)$ 为 G 的连通分支数。试证明

$$p(G)\le p(G-e)\le p(G)+1$$

证：

设 e 属于 G 的第 i 个连通分支 G_i（若 G 为连通图，则 G_i 为 G）。若 e 不是 G_i 的割边，则 G_i-e（G_i 删除 e）仍然连通，因而 G 的连通分支数无变化，即

$$p(G)=p(G-e) \qquad （1）$$

若 e 为 G_i 的割边，则 G_i-e 有且仅有两个连通分支，因而 $G-e$ 比 G 多一个连通分支，即

$$p(G-e)=p(G)+1 \qquad （2）$$

由（1），（2）可知

$$p(G)\le p(G-e)\le p(G)+1$$

*34．设 u，v 为图 G 中的任意两个结点，试证明：从 u 到 v 存在简单通路当且仅当从 u 到 v 存在基本通路（路径）。

证：

因为基本通路也为简单通路，因而充分性可证。下面只需证必要性。

设 $P=uv_1v_2\cdots v_kv$ 为 u 到 v 之间的一条简单通路，若 P 上无结点重复出现，则 P 就是 u 到 v 的基本通路。若在通路中有重复出现的结点，如 $v_i=v_j(1\le i<j\le k)$，则去掉通路上 v_i 到 v_j 之间的一段 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$ 得 $P'=uv_1\cdots v_iv_{j+1}\cdots v_kv$，若还有重复出现的结点，就再将复重结点之间的一段通路去掉，继续这一过程，直到无重复出现的结点为止，最后得到 u 与 v 之间的一条基本通路。

35．设无向连通图 $G=<V,E>$ 中无回路，证明 G 中每条边都是割边（桥）。

证：

设 $e=(u,v)$ 为 G 中一条边，若 e 不是割边，则 $p(G-e)=p$（G），即 $G-e$ 仍为连通图，因而 u,v 还是连通的，故存在 u 到 v 的基本通路 P，P 并边 e 构造 G 中含 u，v 二结点的基本回路，这与 G 中无回路是矛盾的，所以 G 中任何一条边都是桥。

*36．设 n 阶无向连通图 $G=<V,E>$，证明：G 中无桥当且仅当 G 中任何二结点均在同一个简单回路中。

证：

先证必要性。设 u，v 为 G 中任意两个结点。由 G 的连通性可知，存在从 u 到 v 的路径 P_1，若还存在从 u 到 v 的与 P_1 边不重的路径 P_2，设 $C=P_1\cup P_2$，则 C 为含 u，v 的基本或简单回路。若从 u 到 v 的任何另外路径和 P_1 都有一条（或几条）公

共边，也就是存在边 e 在从 u 到 v 的任何路径中，则从 G 中删除 e，G 就不连通了，于是 e 成了 G 中一桥，这与 G 中无桥矛盾。

下面证明充分性。用反证法。若 G 中有桥，设 $e=(u,v)$为 G 中一桥。由已知条件可知，u 与 v 处于同一简单回路 C 中，于是 e 处于 C 中，因而从 G 中删除 e 后 G 仍然是连通的，这与 e 为 G 中桥矛盾。

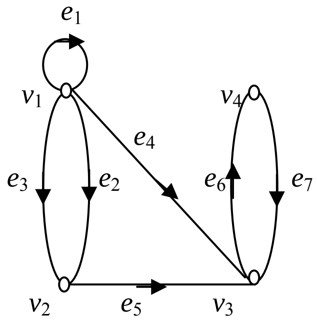


图 6-17

*37．有向图 D 如图 6-17 所示：

（1）求 D 的邻接矩阵 A；

（2）D 中 v_1 到 v_4 长度为 4 的通路数为多少？

（3）D 中 v_1 到自身长度为 3 的回路数为多少？

（4）D 中长度为 4 的通路总数为多少？其中有几条回路？

（5）D 中长度小于等于 4 的通路有多少条？其中有多少条是回路？

（6）D 是哪类连通图？

解：

（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$　　$A^2=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

$A^3=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$　　$A^4=\begin{pmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

（2）由 A^4 中 $a_{14}^{(4)}=4$ 可知，v_1 到 v_4 长度为 4 的通路有 4 条。为明确起见，我们可以将它们写出来：$e_1e_1e_4e_6, e_4e_6e_7e_6$，$e_1e_2e_5e_6, e_1e_3e_5e_6$，其中的第三条为简单通路，其余的全为复杂通路。

（3）由 A^3 中 $a_{11}^{(3)}=1$ 可知，v_1 到自身长度为 1 的通路有 1 条，这是一条复杂通路 $e_1e_1e_1$。

（4）D 中长为 4 的通路总数为 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}a_{ij}^{(4)}=16$，其中对角元素之和为 3，说明 D 中长度为 4 的回路为 3 条。

（5）D 中长度小于等于 4 的通路总数为 A，A^2，A^3，A^4 中全体元素之和：7+10+13+16=46，其中回路数为：1+3+1+3=8。

（6）设 $B_4 = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，由 B_4 可知 D 是单向连通图。

*38．对图 6-18 给出的赋权图 G，求出结点 v_1 到其余各个结点的最短路径。

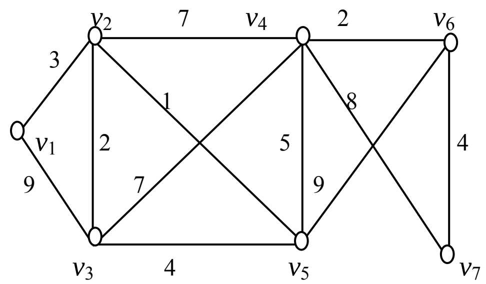


图 6-18

解：

计算过程见表 6-1。表中有记号*的数表示相应的结点已具有 P 标号，该数即是对应结点的 P 标号。

表中第 1 行是初始状态，此时只有始点 v_1 具有 P 标号 ∞，其余结点都具有 T 标号，其中 v_2 的 T 标号 3 最小。第 2 行将 v_2 的 T 标号改为 P 标号，并修改其余结点的 T 标号，例如对 v_3，$\min\{d(v_3), d(v_2)+w_{23}\}$=min{9,2+3}=5，故 v_3 的 T 标号改为 5。在 5 的右方记上 v_2 表明是因为结点 v_2 的标号成为 P 标号而引起 v_3 的 T 标号的改变。此 v_3 必定是与 v_2 相邻的结点。对结点 v_4,v_5 的 T 标号也作相应的修改。因为 $w_{26}=\infty$，$w_{27}=\infty$，故 v_6,v_7 的 T 标号不会改变。此过程继续进行，每将一个结点的 T 标号改为 P 标号，都要考虑对剩下的具有 T 标号的结点作修改。当所有的结点都具有 P 标号，算法终止，此时各结点的标号就是 v_1 到它们的最短路径的权。因为在各个标号的右方记下使它们发生变化的具有 P 标号的结点，因此，最短路径本身也是不难确定的。例如确定 v_1 到 v_7 的最短路径，由表第 7 列，得最短路径的权为 15 及与 v_7 相邻的结点 v_6，又由第 6 列得与 v_6 相邻的结点 v_4，由第 4 列得与 v_4 相邻的结点 v_5，由第 5 列得与 v_5 相邻的结点 v_2，最后得 v_1，所以最短路径是 $v_1v_2v_5v_4v_6v_7$。

表 6-1

$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$	$d(v_6)$	$d(v_7)$
∞^*	3	9	∞	∞	∞	∞
∞^*	$3^*/v_1$	$5/v_2$	$10/v_2$	$4/v_2$	∞	∞
∞^*	$3^*/v_1$	$5/v_2$	$9/v_5$	$4^*/v_2$	$13/v_5$	∞
∞^*	$3^*/v_1$	$5^*/v_2$	$9/v_5$	$4^*/v_2$	$13/v_5$	∞
∞^*	$3^*/v_1$	$5^*/v_2$	$9^*/v_5$	$4^*/v_2$	$11/v_4$	$17/v_4$

（续表）

$d(v_1)$	$d(v_2)$	$d(v_3)$	$d(v_4)$	$d(v_5)$	$d(v_6)$	$d(v_7)$
∞^*	$3^*/v_1$	$5^*/v_2$	$9^*/v_5$	$4^*/v_2$	$11^*/v_4$	$15/v_5$
∞^*	$3^*/v_1$	$5^*/v_2$	$9^*/v_5$	$4^*/v_2$	$11^*/v_4$	$15^*/v_6$

*39．对图 6-19 给出的有向图，用 Warshall 算法求任两结点之间的最短路径的权。

解：

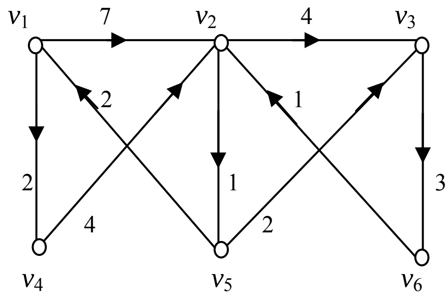


图 6-19

$$W=W^{(0)}=\begin{pmatrix}\infty&7&\infty&2&\infty&\infty\\ \infty&\infty&4&\infty&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ \infty&4&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 2&\infty&2&\infty&\infty&\infty\\ \infty&1&\infty&\infty&\infty&\infty\end{pmatrix}\qquad W^{(1)}=\begin{pmatrix}\infty&7&\infty&2&\infty&\infty\\ \infty&\infty&4&\infty&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ \infty&4&\infty&\infty&\infty&\infty\\ 2&9&2&4&\infty&\infty\\ \infty&1&\infty&\infty&\infty&\infty\end{pmatrix}$$

$$W^{(2)}=\begin{pmatrix}\infty&7&11&2&8&\infty\\ \infty&\infty&4&\infty&1&\infty\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ \infty&4&8&\infty&5&\infty\\ 2&9&2&4&10&\infty\\ 0&1&5&\infty&2&\infty\end{pmatrix}\qquad W^{(3)}=\begin{pmatrix}\infty&7&11&2&8&14\\ \infty&\infty&4&\infty&1&7\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ \infty&4&8&\infty&5&11\\ 2&9&2&4&10&5\\ \infty&1&5&\infty&2&8\end{pmatrix}$$

$$W^{(4)}=\begin{pmatrix}\infty&6&10&2&7&13\\ \infty&\infty&4&\infty&1&7\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ \infty&4&8&\infty&5&11\\ 2&8&2&4&9&5\\ \infty&1&5&\infty&2&8\end{pmatrix}\qquad W^{(5)}=\begin{pmatrix}9&6&9&2&7&12\\ 3&9&3&5&1&6\\ \infty&\infty&\infty&\infty&\infty&3\\ 7&4&7&9&5&10\\ 2&8&2&4&9&5\\ 4&1&4&6&2&7\end{pmatrix}$$

$$W^{(6)}=\begin{pmatrix}9&6&9&2&7&12\\3&7&3&5&1&6\\7&4&7&9&5&3\\7&4&7&9&5&10\\2&6&2&4&7&5\\4&1&4&6&2&7\end{pmatrix}$$

所给的图是强连通的，所以$W^{(6)}$中不出现∞。

我们举例说明本例$W^{(k)}$中的元素是怎样计算得来的。$w_{52}^{(0)}=\infty$，而$w_{52}^{(1)}=9$，那是因为$w_{52}^{(1)}=\min\{w_{52}^{(0)},w_{51}^{(0)}+w_{12}^{(0)}\}=\min\{\infty,2+7\}=9$，这对应图中有通路$v_5v_1v_2$，通路中间的结点属于$\{v_1\}$。再如$w_{52}^{(4)}=\min\{w_{52}^{(3)},w_{54}^{(3)}+w_{42}^{(3)}\}=\min\{9,4+4\}=8$，这对应图中有通路$v_5v_1v_4v_2$，该通路中间的结点属于$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$。

40．设 G 是 n 阶无向简单图，有 m 条边，p 个连通分支，证明

$$n-p\le m\le\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$$

证：

（1）首先证$m\ge n-p$。对边数 m 做归纳法。$m=0$时，G 为零图，$p=n$，$n-p=0$，此时结论显然成立。

设$m<k(k\ge 1)$时结论成立，要证$m=k$时结论成立。在 G 中找一个边割集，不妨设这个割集中的边$e_1,e_2,\Lambda,e_l(l\ge 1)$，设$G_1=G-\{e_1,e_2,\Lambda,e_l\}$，则$G_1$的连通分支数为$p+1$，边数$m_1=m-l(l\ge 1)$，由归纳假设得

$n-(p+1)\le m-l\le m-1\Rightarrow n-p\le m$

（2）证$m\le\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$。为证明此不等式，不妨设 G 的各连通分支都是完全图，因为在这种情况下边数最多。而在 p 个连通分支都是完全图的情况下，又以$p-1$个为K_1（平凡图），一个 n-p+1 阶完全图 K_{n-p+1} 时边数最多，此时的边数为$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$。为此只需证明下面事实：设K_{n_i}和K_{n_j}是 G 的两个连通分支$(n_i\ge n_j\ge 1)$。用K_{n_i+1}和K_{n_j-1}分别代替K_{n_i}和K_{n_j}，所得图的结点和连通分支数没变，但边数增加了。证明如下：

$$(\frac{1}{2}n_i(n_i+1)+\frac{1}{2}(n_j-1)(n_j-2))-(\frac{1}{2}n_i(n_i-1)+\frac{1}{2}n_j(n_j-1))=n_i-n_j+1>0$$

综上所述就证明了我们的结论。

41．（1）n 为何值时，无向完全图 K_n 是欧拉图？n 为何值时 K_n 为半欧拉图？

（2）什么样的完全二部图是欧拉图？

（3）n 为何值时，轮图W_n为欧拉图？

解：

（1）一般情况下，我们不考虑平凡图 K_1。$n(n \ge 2)$ 为奇数时，完全图 K_n 是欧拉图。K_n 各结点的度均为 $n-1$，若使 K_n 为欧拉图，$n-1$ 必为偶数，因而 n 必为奇数。除了 n 为奇数的 K_n 外，K_2 也是半欧拉图。

（2）设 $K_{r,s}$ 为完全二部图，当 r, s 均为偶数时，$K_{r,s}$ 为欧拉图。

（3）设 $W_n(n \ge 4)$ 为轮图，在 W_n 中，有 n–1 个结点的度为 3，因而对于任何取值的 $n(n \ge 4)$，轮图 W_n 都不是欧拉图。

42．$n(n \ge 2)$ 个结点的有向完全图中，哪些是有向欧拉图？为什么？

解：

$n(n \ge 2)$ 个结点的有向完全图是欧拉图。对于 n 个结点的有向完全图来说，每个结点的度均相等，都是偶数 2（n–1），并且每个结点的入度等于出度，所以有向完全图都是有向欧拉图。

43．证明：若无向图 G 是欧拉图，则 G 中无桥。

证：

因为 G 为欧拉图，因而 G 是连通的。下面用反证法证明 G 中无桥。

若不然，设 $e=(u,v)$ 为 G 中一桥。u,v 分别属于 $G-e$ 的两个连通分支 G_1与G_2。设 w 为 G_1 中的一个结点，从 w 开始走一条 G 中的欧拉回路：从 w 开始，一旦行遍到 u，沿桥 e 到达 v，在 G_2 中行遍后，就无法再行遍到 G_1 以达到始点 w，这与 G 为欧拉图矛盾。

*44．若一个有向图 G 是欧拉图，它是否一定是强连通的？若一个有向图 G 是强连通的，它是否一定是欧拉图？说明理由。

解：

（1）一个有向欧拉图一定是强连通图。因为 G 是欧拉图，存在欧拉回路 C，G 中的每个结点至少在 C 中出现一次。因而 G 中任意两点 u, v 都在 C 中，相互可达，故 G 是强连通的。

（2）一个强连通图不一定是有向欧拉图。因为强连通图中每个结点的入度不一定等于其出度。

*45．设 G 是具有 $k(k>0)$ 个奇度结点的无向连通图，证明 G 中边不重合的简单通路（迹）的最小数目是 $\frac{k}{2}$，它们含 G 中的全部边。

证：

由握手定理的推论可知，k 为偶数。对 k 作归纳法。

（1）当 k=2 时，由定理 11 可知 G 为半欧拉图，因而 G 中存在欧拉通路，结论得证。

（2）设 $k \le 2r(r \ge 2)$ 时结论成立，要证明 k 为 $2r$+2 时结论也成立。

设 v_1, v_2 为 G 中任意二奇度结点，由 G 的连通性可知，从 v_1到v_2 存在路径 P_0，删

除 P_0 上的全部边，得连通分支 $G_1,G_2,\Lambda\ ,G_s$。这些连通分支共含 $2r$ 个奇度结点，设 G_i 中含 $2r_i$ 个奇度结点，则 $2r_i \le 2r(1 \le r \le s)$，且 $\sum_{i=1}^{s} 2r_i = 2r$。由归纳假设可知。G_i 中存在 r_i 条边不重合的简单通路，它们含 G_i 中的所有边。于是 G 中共含 $1+r_1+r_2+\Lambda\ +r_s = 1+r = \frac{k}{2}$ 条边不重合的简单通路，它们含 G 中的全部边。

*46．画出图 6-20 中的两个图，各需要几笔画出（笔不离纸，每条边均不能重复画）？

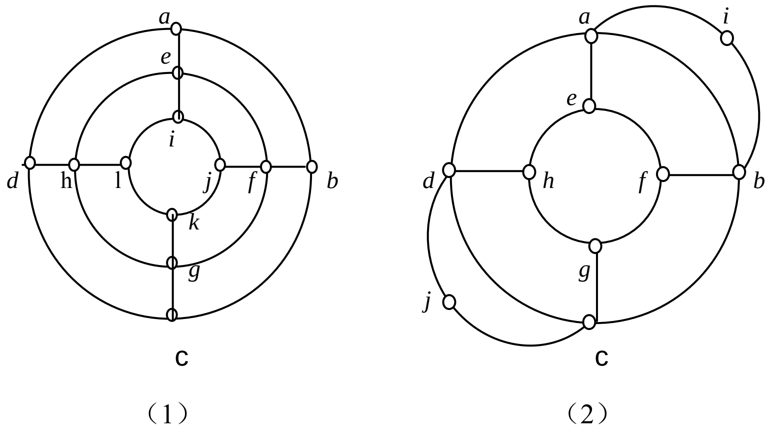


图 6-20

解：

在图（1）中有 8 个奇度结点，由题 45 可知图（1）中存在 4 条边不重合的简单通路，它们含图中全部边，因而（1）图可 4 笔画出，如 *aei, kgc, badcbfjilkj, dhefghl*4 条迹含了（1）图中的全部边。图（2）中有 4 个奇度结点，因而图（2）中存在两条边不重合的迹（简单通路），它们含（2）图中的全部边。如 *eabiadhg* 和 *fgcjdcbfeh* 两条边不重合的迹含（2）图中全部边，因而（2）图可两笔画出。

*47．求图 6-21 所示的带权图中最优投递路线，邮局在 *D* 点。

解：

首先观察图中的奇度结点，此图中只有两个奇度结点 *E* 和 *F*。用标号法求 *E* 到 *F* 的最短路径，容易算出 *E* 到 *F* 的最短路径为 *EGF*，其权为 28。然后将最短路径上的边均重复一次（见图中虚线边所示）。于是得欧拉图 *G**。求从 *D* 出发的一条欧拉回路，如 *DEGFGEBACBDCFD*，其权为 281。

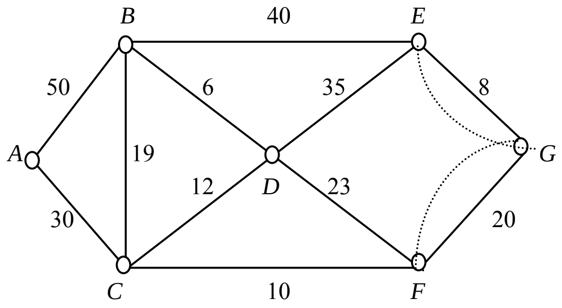


图 6-21

48．由 8 个二进制数码（4 个 0，4 个 1）如何产生一个圆形排列，组成 8 个 3 位长的各不相同的二进制数？

解：

设结点 $v_0=00,\ v_1=01,\ v_2=10,\ v_3=11$ 组成的集合 V 为结点集。v_0 引出两条有向边 $e_0=000,\ e_1=001$ 分别邻接到结点 v_0 和 v_1。v_1 引出两条有向边 $e_2=010,\ e_3=011$ 分别邻接到 v_2 和 v_3。v_2 引出两条有向边 $e_4=100,\ e_5=101$ 分别邻接到 v_0 和 v_1。类似地，v_3 引出两条有向边 $e_6=110,\ e_7=111$ 分别邻接到 v_2 和 v_3，由以上的诸边组成边集 E，得有向图 $D=<V,E>$，其图形为图 6-22 所示。D 为连通图，并且每个结点的入度之和等于出度之和，因而 D 为欧拉图。在 D 中任求一条欧拉回路。如 $e_0e_1e_2e_5e_3e_7e_6e_4$ 就是一条欧拉回路，按顺序取每条边的最后一个数码得

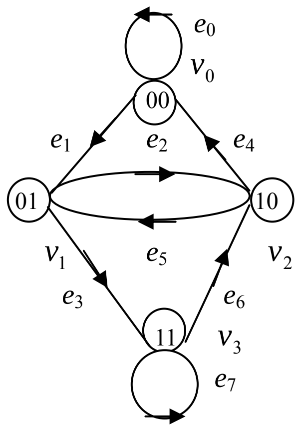


图 6-22

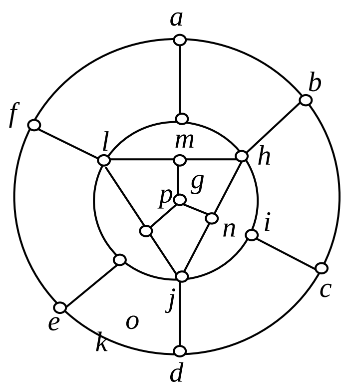


图 6-23

01011100，将　　　　　这八个数码首尾相接排成圆形就可以产生各不相同的八个三位的二进制数。

*49．证明图 6-23 所示的图不是哈密尔顿图。

证：

方法一　图 6-23 中有 16 个结点，27 条边，若图中存在哈密尔顿回路，在回路上需要且只需要 16 条边，但图中提供的可行遍的边数不足 16 条。在结点 $h,\ j,\ l$ 处

各只能有两条边可供行遍，于是各有三条边不能用来行遍。在 a, c, e 三结点处也至少各有一条边不能用来行遍。在 p 处也至多用上两条边，这样一来可供行遍的边数小于等于 27–(9+3+1)=14，故图中不可能存在哈密尔顿回路，因而它不是哈密尔顿图。

方法二　设 $V_1=\{a,c,e,h,j,l,p\}$，有　$p(G-V_1)=9>7=|V_1|$

由定理 16 可知图 6-23 不是哈密尔顿图。

50．完全图 K_n 是几笔画图？说明理由。

解：

当 n=1 时，K_n 为平凡图。

当 $n\neq1$ 且为奇数时，对任一结点 u，deg（u）=n–1 为偶数。所以 K_n 为欧拉图，可一笔画出。

当 $n\neq1$ 且为偶数时，K_n 中每个结点均为奇度结点，故 K_n 中有 n/2 对奇度结点，因此可 n/2 笔画出。

51．在图 6-24 所示的图中，哪些是哈密尔顿图？哪些是半哈密尔顿图？是哈密尔顿图的，请各在图中画出一条哈密尔顿回路。是半哈密尔顿图的，请画出一条哈密尔顿通路。

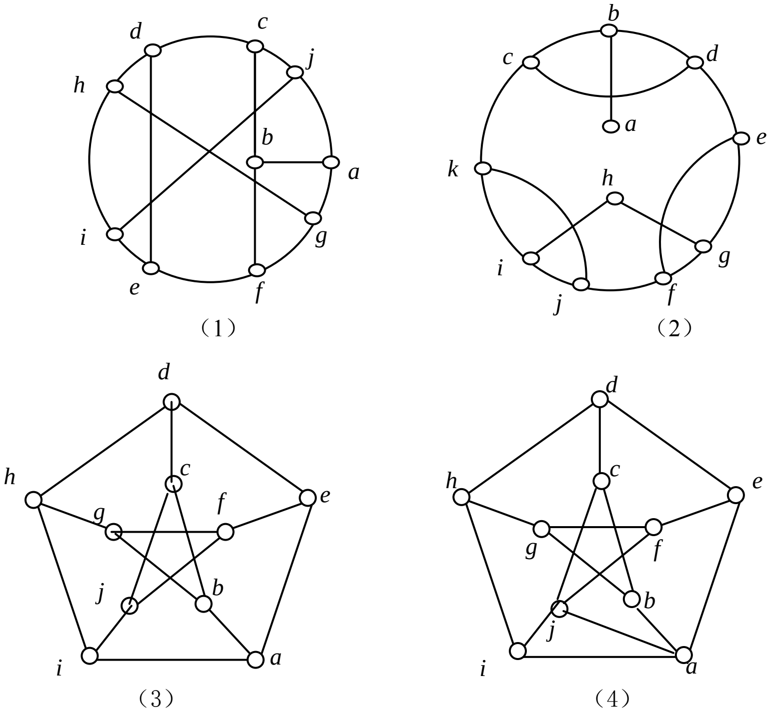


图 6-24

解：

图 6-24 中图（1），图（4）两图为哈密尔顿图，图（2），图（3）为半哈密尔顿图。在图（1）中，*abcdefghija* 为一条哈密尔顿回路（图中粗边所示，下同）。在图（4）中 *abcdefghija* 为一条哈密尔顿回路。在图（3）中，*adcdefghij* 为一条哈密尔顿通路。在图（2）中，*abcdefghijk* 为一条哈密尔顿通路。如图 6-25 所示。

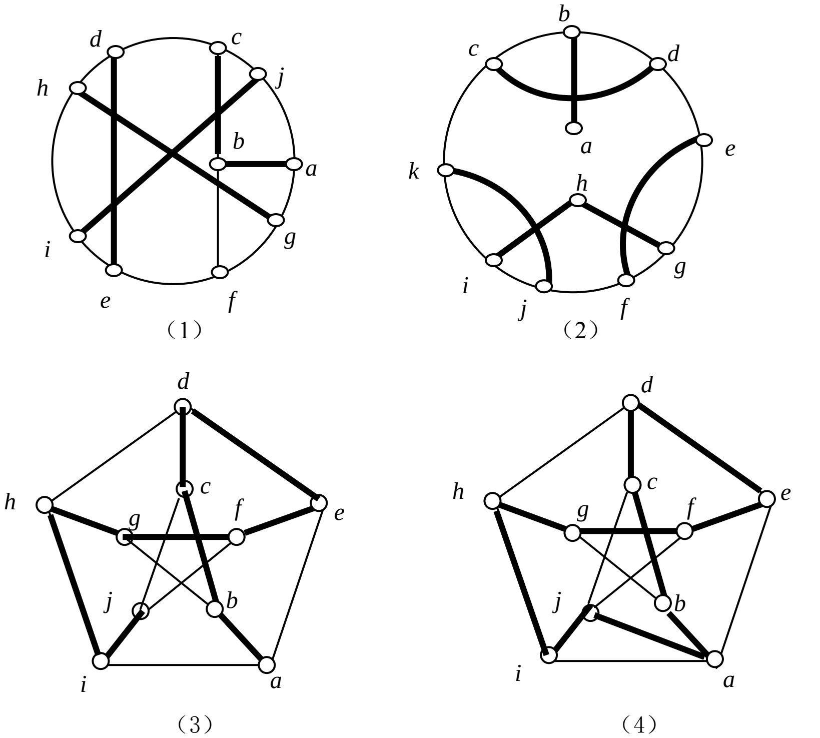


图 6-25

52．有割点的连通图是否能是哈密尔顿图？为什么？

解：

不能。因为若 G 是连通图且有割点 v，则 $G-v$ 中至少有两个连通分支，即 $p(G-v)\geq|\{v\}|$，与定理 16 矛盾。故有割点的连通图不可能是哈密尔顿图。

*53．图 6-26 所示的图 G 为哈密尔顿图。试证明：若图中的哈密尔顿回路中含边 e_1，则它一定同时也含 e_2。

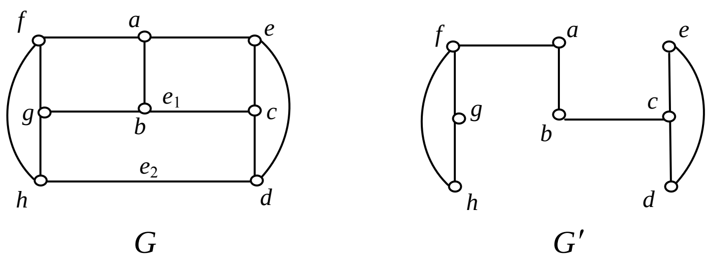


图 6-26

证：

设 C 为图中一条哈密尔顿回路，e_1 在 C 中，假设 e_2 不在 C 中，我们要推出矛盾。图中除 e_1 外，与 a, b 关联的边各有两条，而只能各有一条边在 C 中，由对称性设（f, a），（b, c）在 C 中（不可能（f, a），（g, b）或（a, e），（b, c）同时在 C 中）。这就相当于在图 6-26 所示的图 G' 中求一条哈密尔顿回路，可是这时，a, b 均为图 G' 中割点，由题 52 可知，这是不可能的，因而 e_2 必在 C 中。

54．证明：对于每个竞赛图 D，至多改变一条边的方向后就可以变成哈密尔顿图。

证：

由定理 20 的推论可知，D 为半哈密尔顿图，因而 D 中存在哈密尔顿通路，设 D 为 $n(n \geq 3)$ 阶竞赛图，$v_1 v_2 \Lambda\ v_n$ 为 D 中的一条哈密尔顿通路，若边 $< v_n, v_1 > \in E(D)$，则 $v_1 v_2 \Lambda\ v_n v_1$ 为 D 中一条哈密尔顿回路，故 D 为哈密尔顿图。否则 $< v_1, v_n >$ 在 D 中，将 $< v_1, v_n >$ 改变方向得边 $< v_n, v_1 >$，于是 D 就变成了哈密尔顿图了。

55．证明： 若 G 是含奇数个结点的二部图，则 G 不是哈密尔顿图。用此结论证明图 6-27 所示的图不是哈密尔顿图。

证：

设 V_1 和 V_2 为二部图 G 的互补结点子集。因为 G 有奇数个结点，所以 $|V_1| \neq |V_2|$，不妨设 $|V_1| < |V_2|$，并设 $|V_1| = r$，$|V_2| = s$。考虑 $G - V_1$，则 $G - V_1$ 有 s 个连通分支，因为 $r < s$，所以，$s = p(G - V_1) > |V_1| = r$，由定理 16 可知 G 不是哈密尔顿图。

图 6-27 所示的图中无奇数长的回路，因而此图是二部图（见定理 2）。这个图中有 13 个结点，因此它不是哈密尔顿图。

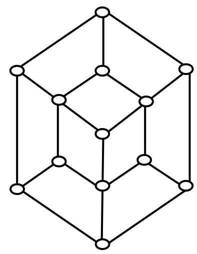


图 6-27

56．证明：完全图 K_9 中至少存在彼此无公共边的两条哈密尔顿回路和一条哈密尔顿通路。

证：

设 C_1 为 K_9 中一条哈密尔顿回路。令 G_1 为 K_9 中删除 C_1 中全部边之后的图，则 G_1 中每个结点的度均为 6，由定理 18 可知 G_1 仍为哈密尔顿图，因而存在 G_1 中的哈密尔顿回路 C_2（显然 C_2 也是 K_9 中的哈密尔顿回路，并且 C_1 与 C_2 无公共边）。再设 G_2 为 G_1 中删除 C_2 中的全部边后所得图，G_2 为 4 正则图。由定理 17 可知 G_2 为半哈密尔顿图。因而 G_2 中存在哈密尔顿通路。设 L 为 G_2 中的一条哈密尔顿通路，显然 C_1，C_2，L 无公共边。

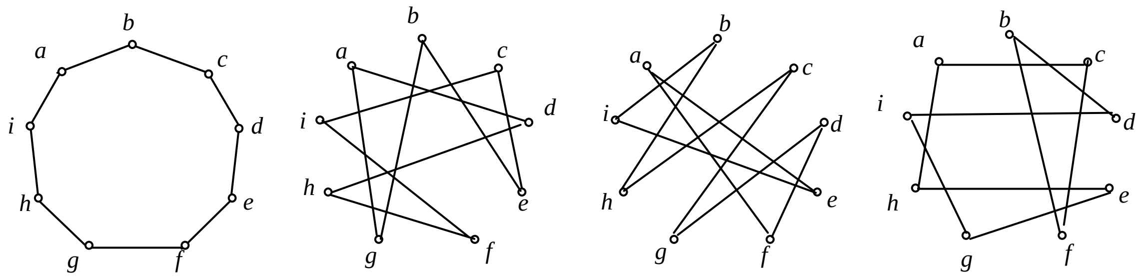


图 6-28

事实上，可以证明在 K_9 中存在 4 条边不重合的哈密尔顿回路，在图 6-28 中给出了 4 条边不重合的哈密尔顿回路。

可以证明：在 K_3 中存在一条边不重合的哈密尔顿回路，K_5 中存在两条边不重合的哈密尔顿回路，K_7 中可存在 3 条边不重合的哈密尔顿回路，一般情况下，K_{2k+1}（$k \ge 1$）中最多可存在 k 条边不重合的哈密尔顿回路，读者不妨试着证明一下。

*57．无向完全图 $K_n\,(n \ge 3)$ 中共有多少条不同的哈密尔顿回路？K_3，K_4，K_5 中各有多少条不同的哈密尔顿回路？

解：

设 v_1 为 K_n 中任一结点，构成哈密尔顿回路时，选与 v_1 相邻的结点（不妨设为 v_2）共有 $n-1$ 种选择方法。再选与 v_2 相邻的结点 v_3 时，共有 $n-2$ 种方法，…，选与 v_{n-1} 相邻的结点 v_n 时，共有两种方法，当然选择与 v_n 相邻的结点（v_1）只有一种方法。由乘法原理可知从 v_1 出发又回到 v_1 的哈密尔顿回路共有（$n-1$）！条。于是从 K_n 中任一结点出发的哈密尔顿回路共有 n！条。但回路 $v_1v_2\Lambda\, v_{n-1}v_nv_1$ 中任何一结点均可做为始点（终点），就是说在 $v_1v_2\Lambda\, v_{n-1}v_nv_1$ 中任何一结点做为始点（终点）均看成是一条，因而 K_n 中应有 $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ 条不同的哈密尔顿回路。又将 $v_1v_2\Lambda\, v_{n-1}v_nv_1$ 和 $v_1v_nv_{n-1}\Lambda\, v_2v_1$ 看成是同一条回路，于是 K_n 中应有 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 条不同的哈密尔顿回路。在这 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 条哈密尔顿回路中，对于其中的任意两条 C_1 和 C_2，一定存在边 e_1 只属于 C_1 而不属于 C_2，同样也一定存在 e_2 只属于 C_2 而不属于 C_1。显然 K_3 中只有一条哈密尔顿回路，K_4 中有 3 条不同的哈密尔顿回路，K_5 中有 12 条不同的哈密尔顿回路。

58．设 G 是 n 阶无向简单图，其边数 $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，试证明 G 为哈密尔顿图。再给出一个图 G，使它具有 n 个结点，$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边，而 G 不是哈密尔顿图。

证：

首先证明 G 中任何两个不相邻的结点的度数之和均大于等于 n。否则存在 v_i, v_j 不相邻，且 $d(v_i)+d(v_j)\le n-1$。令 $V_1=\{v_i, v_j\}$，$G_1=G-V_1$，则 G_1 是 $n-2$ 阶简单图，它的边数 $m'\ge\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)$，可得 $m'\ge\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$，这与 G_1 为 $n-2$ 阶简单图矛盾，因而 G 中任何二不相邻的结点的度数之和均大于等于 n，由定理 18 可知 G 是哈密尔顿图。

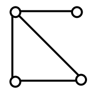


图 6-29

如图 6-29 所示，有 4 个结点，4 条边，不是哈密尔顿图。

59. 证明图 6-30 中所示的图为哈密尔顿图，但图中不存在过边 e_1 和 e_2 的哈密尔顿回路。

证：

图中 $abcdejihgfa$ 为一哈密尔顿回路，所以该图为哈密尔顿图（见图 6-30（2）中粗边所示）。

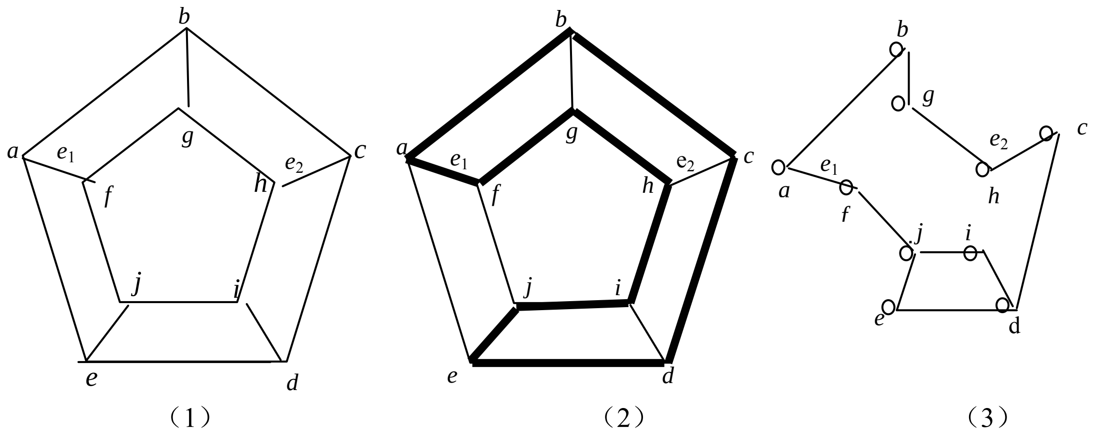


图 6-30

用反证法证明图（1）中不存在同时含 e_1 和 e_2 的哈密尔顿回路。若存在这样的回路 C，则与 a, f, h, c 关联的边除 e_1, e_2 外均有一条不在 C 中。考虑到图的连通性，不能产生割点及对称性，设 $(f,g),(b,c),(a,e),(h,i)$ 均不在 C 中（见图 6-30（3）所示的图）。在图（3）中，j 和 d 为 3 度结点，因而与 j,d 关联的边应各有一条不在 C 中，又因为 j,d 不相邻，于是能在 C 中出现的边只能有 9 条，但 C 中含 10 条边，于是得出矛盾，因而图中不存在同时含 e_1, e_2 的哈密尔顿回路。

60. 设 G 为一无向连通图，C 为 G 中一条基本回路，若删除 C 中任何一条边后，C 中剩下的边构成的路径都是 G 中最长的路径。证明：C 为 G 中的一条哈密尔顿回路，从而 G 为哈密尔顿图。

证：

若 C 不是 G 中的哈密尔顿回路，则 G 中必存在结点 u 不在回路 C 上。但由于 G 是连通图，因而必存在回路 C 上的结点 v_1, v_1 与 u 相邻。设 $C = v_1v_2\Lambda\ v_lv_1$，在 C 上删除边 (v_1, v_2)，C 上剩下的边构成的路径为 $v_2v_3\Lambda\ v_lv_1$，其长度为 $l-1$。可是 $v_2v_3\Lambda\ v_lv_1u$ 是 G 中一条长度为 l 的路径（见图 6-31 所示），这与已知的条件矛盾，所以 G 中所有的结点均在 C 上，于是 C 是哈密尔顿回路，从而 G 为哈密尔顿图。

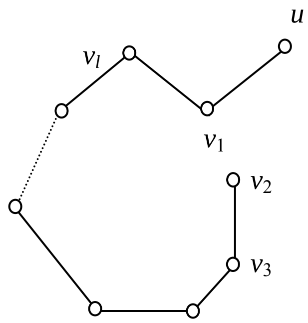


图 6-31

*61．某次会议有 20 人参加，其中每个人都至少有 10 个朋友，这 20 人围一圆桌入席，要想使与每个人相邻的两位都是朋友是否可能？根据什么？

解：

可能。依题意，若用结点代表人，两人是朋友时相应结点间连一条边，则得到一个无向图 $G = <V, E>$,该题转化为求哈密尔顿回路问题。

由于对任 $u, v \in V$，有 $\deg(u) \geq 10,\ \deg(v) \geq 10$，因而 $\deg(u) + \deg(v) \geq 20$

根据定理 18，G 为哈密尔顿图，G 中存在哈密尔顿回路，按此回路各点位置入席即为所求。

62．有 11 位同学想同桌玩游戏，为增进友谊，希望每次玩时，每人两边相邻的人都不相同，这样他们最多能玩几次？若是 n 个同学呢？

解：

依题意，若以结点代表同学，可得有 11 个结点的无向完全图 K_{11}，则该问题是求 K_{11} 中最多有几条无公共边的哈密尔顿回路。

由于 K_{11} 的边数 $m = \dfrac{11(11-1)}{2} = 55$，而每一条哈密尔顿回路有 11 条边，但要求任两条无公共边（两边的人都不同），故最多有 5 条。即他们最多能这样玩 5 次，具体排法如下：

设 11 人记为 1，2，3，…，10，11。

（1）1234567891011

（2）1426385107119

（3）1648210311597

（4）1861041129375

（5）1108116947253

若是 n 个同学时，则 K_n 的边数为 $n(n-1)/2$。每条哈密尔顿回路的边数为 n，所以最多有$(n-1)/2$ 条，即 n 个同学最多这样玩$(n-1)/2$ 次。

63．今要将 6 人分成 3 组（每组 2 个人）去完成 3 项任务。已知每个人至少与其余 5 个人中的 3 个人能相互合作。

（1）能否使得每组的 2 个人都能相互合作？

（2）你能给出几种不同的分组方案？

解：

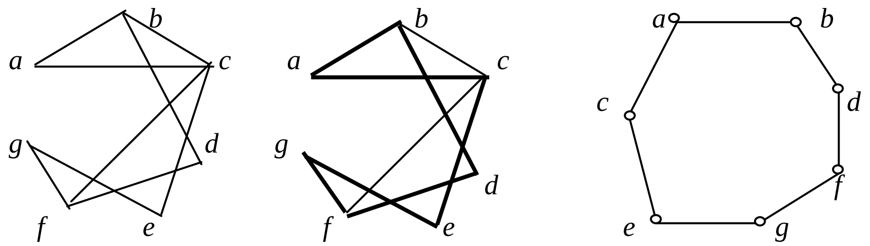
（1）用 $v_1,v_2,\cdots,v_6$ 代表 6 个人，若 v_i, v_j 能相互合作，就在 v_i 与 v_j 之间连无向边，得无向图 $G=<V,E>$。由已知条件可知，对于任意的 $v_i \in V$，$d(v_i) \geq \dfrac{n}{2}$，由定理 19 可知，G 为哈密尔顿图，因而存在哈密尔顿回路，设 $C = v_{i_1} v_{i_2} \Lambda\ v_{i_6} v_{i_1}$ 为 G 中一条哈密尔顿回路，于是在 C 中，相邻的两结点代表的二人是能相互合作的。

（2）我们可以将 v_{i_1}, v_{i_2} 分在一组，v_{i_3}, v_{i_4} 分在一组，v_{i_5}, v_{i_6} 分在一组。也可以将 v_{i_6}, v_{i_1}；v_{i_2}, v_{i_3}；v_{i_4}, v_{i_5} 各分在一组，这是两种不同的分组方案。

*64．已知 a, b, c, d, e, f, g 7 个人中，a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲汉语和日语；e 会讲意大利语和德语；f 会讲俄语、日语和法语；g 会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

解：

用 a, b, c, d, e, f, g 7 个结点代表 7 个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的结点之间连无向边，所得无向图为图 6-32 中（1）所示，此图中存在哈密尔顿回路：$abdfgeca$（如图 6-32 中（2）粗边所示），于是按图 6-32 中（3）所示的顺序安排座位即可。



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 6-32

65．今有 n 个人，已知他们中的任何 2 人合起来认识其余的 $n-2$ 个人。试证明：

（1）当 $n \geq 3$ 时，这 n 个人能排成一列，使得中间任何人都认识两旁的人，而两头的人认识左边（或右边）的人。

（2）当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人。

证：

设 n 个人为 v_1, v_2, Λ, v_n，以 $V = \{v_1, v_2, \Lambda, v_n\}$ 为结点集，若 v_i 与 v_j 认识，就在代表他们的结点之间连无向边，得边集 E。于是得无向图 $G =< V, E >$，G 为简单图，

并且对于任意的 $v_i, v_j \in V$，$d(v_i)+d(v_j) \ge n-2$

（1）设 v_i 与 v_j 不相邻（即 v_i, v_j 代表的人不认识），则对任意的 $v_k (k \ne i, k \ne j)$ 必与 v_i 或 v_j 相邻，否则与已知条件矛盾。又因 v_j 与 v_i 不相邻，因而 v_j 与 v_k 必相邻，于是 $d(v_i)+d(v_j) \ge n-2+1 = n-1$，根据定理 17，$G$ 中存在哈密尔顿通路，于是（1）得证。

（2）同在（1）中的证明类似，对于任意的 $v_k \in V$，只要 $k \ne i$ 且 $k \ne j$，v_i 与 v_j 都与 v_k 相邻，于是 $d(v_i)+d(v_j) \ge 2(n-2) = 2n-4 \ge n(当 n \ge 4)$，根据定理 18，$G$ 中存在哈密尔顿回路，于是（2）得证。

*66．求图 6-33 所示的完全带权图中的最小权的哈密尔顿回路。

解：

由题 57 可知，图中存在 3 条不同的哈密尔顿回路，我们将它们都求出来，计算每一条的权，求出权最小的一条就可以了。这 3 条不同的哈密尔顿回路分别为：*abdca*，其权为 48；*acbda*，其权为 49；*adcba*，其权为 47。由此可见，第三条是图中含最小权的哈密尔顿回路，它的权为 47。

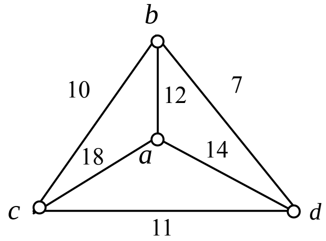


图 6-33

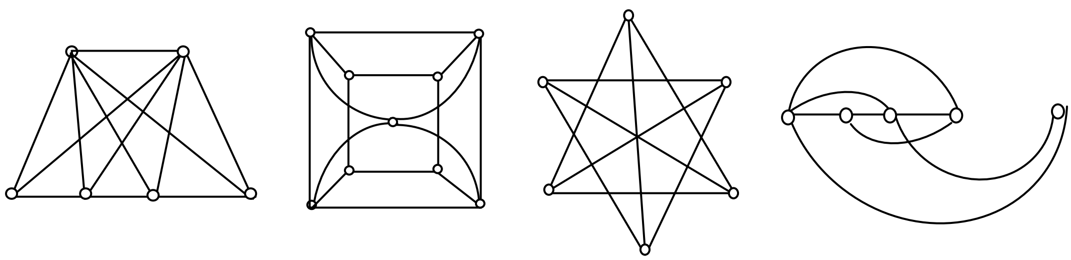
当结点增多时，再求最小权哈密尔顿回路，就不是件容易的事情了。到目前为止，还没有找到最小权哈密尔顿回路的好的算法。用近邻法可求得哈密尔顿回路 *abdca*，其权为 48。

*67．证明：极大平面图 G 一定是连通图。

证：

若 G 为非连通图，设 G 有 $k(k \ge 2)$ 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，在 G_1 中取 v_{11}，在 G_2 中取 v_{21}，在 G 上加边 (v_{11}, v_{21})，所得新图 $G \cup (v_{11}, v_{21})$ 还是平面图，这与 G 为极大平面图矛盾。故证明成立，极大平面图 G 一定是连通图。

68．证明图 6-34 中所示的 4 个图均为可平面图。

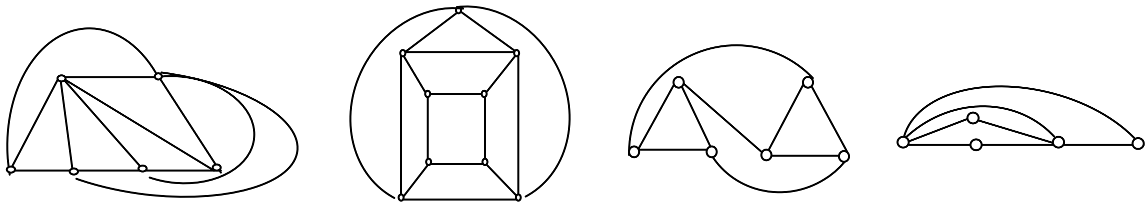


（1）　　（2）　　（3）　　（4）

图 6-34

证：

只要找出它们各自的一个平面图即可。图 6-35 中分别给出了它们的平面图。



（1）　（2）　（3）　（4）

图 6-35

69．设 G 为有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图，G 的平面图的每个面至少由 $l(l \geq 3)$ 条边围成，则 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-k-1)$

证：

设 G 的各面的边界的长度和为 T。G 的每条边在计算 T 时，均提供 2，又因为 G 的平面图 G' 的每个面至少由 l 条边围成，所以

$$l \cdot r \leq T = 2m \quad (1)$$

由欧拉公式的推广得

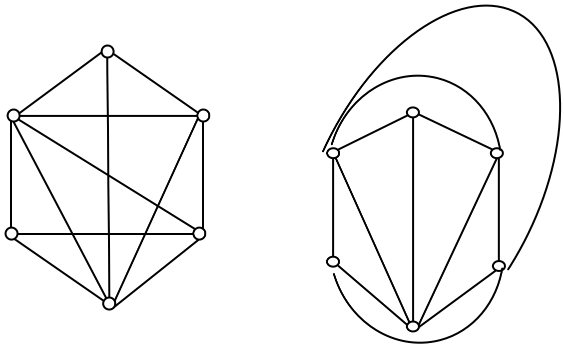
$$r = k + 1 + m - n \quad (2)$$

将（2）中 r 代入（1），得

$$l \cdot (k + 1 + m - n) \leq 2m \quad (3)$$

（3）经过整理后得　$m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-k-1)$

*70．图 6-36（1）中所示的图是否为平面图？是否为极大平面图？为什么？



（1） （2）

图 6-36

解：

图 6-36（1）中所示的图为平面图，它的一个平面图如图 6-36（2）所示，它也是一个极大平面图。图中边数 m 为 12，结点数为 6，若不相邻的结点之间再加一条边，m 应为 13，所得图为连通的简单平面图，由定理 25 可知 $13 = m \le 3\times 6 - 6 = 12$ 这显然是矛盾的，因而图 6-36（1）所示的图是平面图，并且是极大平面图。

71．设 G 是边数 m 小于 30 的简单平面图，试证明 G 中存在结点 $v, d(v) \le 4$

证：

不妨设 G 是连通的，否则因为它的每个连通分支的边数都应小于 30，因此可对它的每个连通分支进行讨论，所以可设 G 是连通的。

若 G 中无回路，则 G 必为树，结论显然成立。若 G 中有回路，由于 G 为简单图，因而 G 中每个面至少由 3 条边围成，由定理 25 可知

$$m \le 3n - 6 \qquad （1）$$

下面用反证法证明我们的结论。若不然，G 中所有结点的度数均大于等于 5，由握手定理可知

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 5n \Rightarrow n \le \frac{2}{5}m \qquad （2）$$

将（2）式中的 n 代入（1）式：

$$m \le \frac{6}{5}m - 6 \Rightarrow m \ge 30$$

这矛盾于 m<30，所以一定存在 $v, d(v) \le 4$

72．设简单平面图 G 中结点数 n=7，边数 m=15，证明 G 是连通的。

证：

用反证法。设 G 为非连通的，具有 $k \ge 2$ 个连通分支 G_1, G_2, Λ, G_k。设 G_i 的结点数为 n_i，边数为 m_i，i=1,2，…，k。

若存在$n_j=1$，则k必为2，因为只有此时G为一个平凡图并上一个K_6才能使其边数为15，可是K_6不是平面图（它的子图K_5已不是平面图），这矛盾于G为平面图这个事实，所以不存在$n_j=1$。

若存在$n_j=2$，G_j中至多有一条边（因为G为简单图），另外5个结点构成K_5时边数最多，但充其量为10条边，这与G有15条边矛盾。

综上所述，n_i必大于等于3，i=1,2,⋯,k。由定理25可知

$$m_i \le 3(n_i-2)=3n_i-6,\quad i=1,2,\Lambda\ ,k$$

求和得

$$m \le 3n-6k \tag{1}$$

将n=7，m=15代入（1）得

$$15 \le 21-6k \Rightarrow k \le 1$$

这与$k \ge 2$矛盾。

至此证明了G必为连通图。

73．n取何值时，无向完全图K_n是哈密尔顿图？

解：

当$n \ge 3$时，K_n是哈密尔顿图。

因为K_1，K_2无回路，当$n \ge 3$时，任两点的度数之和都大于等于n。

*74．图6-37中所示（1），（2）两图为什么是非平面图？

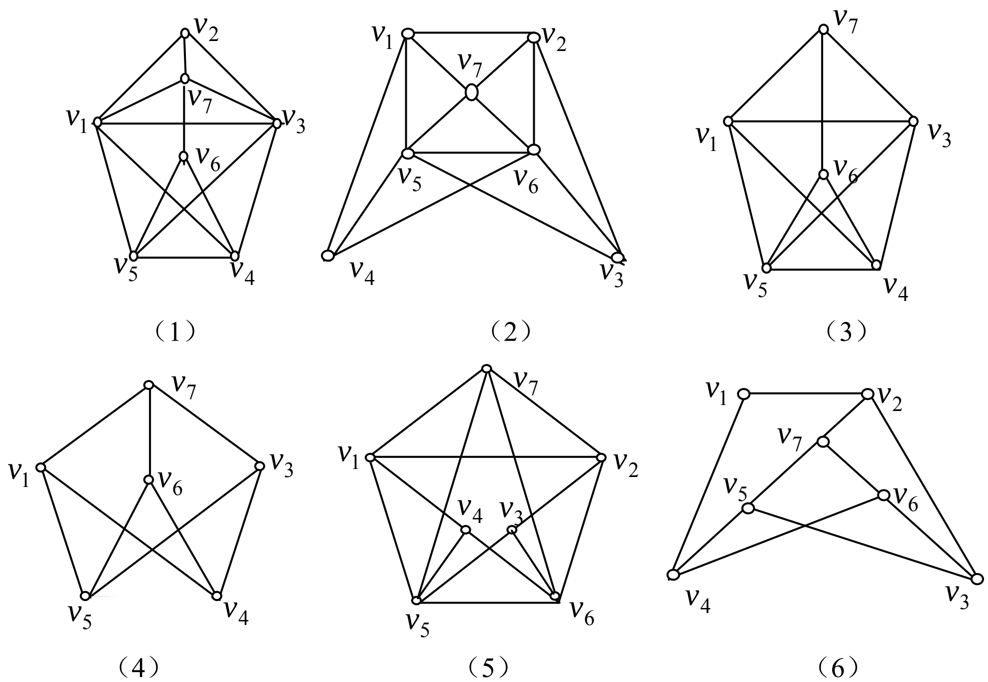


图 6-37

解：

图 6-37 中（3）所示的图为（1）所示图的子图，将v_6收缩到v_7得K_5。（4）所示的图也是（1）所示的图的子图，它是$K_{3,3}$，根据定理 27 可知（1）所示图为非平面图。

（5），（6）所示的图均为（2）的子图，（5）含与K_5同胚子图，（6）与$K_{3,3}$是同胚的，所以（2）也不是平面图。

75．设 G 是面数 r 小于 12 的简单平面图，G 中每个结点的度数至少为 3。

（1）证明 G 中存在至多由 4 条边围成的面；

（2）给出一个例子说明，若 G 中的面数为 12，且每个结点的度至少为 3，则（1）的结论不成立。

证：

（1）不妨设 G 是连通的，否则可以对它的每个连通分支进行讨论（因为每个连通分支均满足条件）。因而由欧拉公式有

$$2 = n - m + r \tag{1}$$

又由已知条件知道

$$r < 12 \quad 且 \quad n \le \frac{2}{3}m \tag{2}$$

将式（2）的结果代入式（1）得

$$2 < \frac{2}{3}m - m + 12 \Rightarrow m < 30 \qquad (3)$$

若所有的面均至少由 5 条边围成，则

$$5r \le 2m \Rightarrow r \le \frac{2}{5}m \qquad (4)$$

将式（2），式（4）代入式（1）得

$$2 \le \frac{2}{3}m - m + \frac{2}{5}m \Rightarrow m \ge 30 \qquad (5)$$

式（3）与式（5）是矛盾的，因而必存在至多由 4 条边围成的面。

（2）十二面体图有 12 个面，每个结点均为 3 度，每个面由 5 条边围成，并没有 4 条边围成的面。

76. 设结点数 $n \ge 3$ 的连通的简单的平面图 G 每个面的边界长均为 3，证明 G 是极大平面图。

证：

设 G 的边数为 m，面数为 r。由于 G 的每个面的边界都是 3，所以

$$3r = 2m \Rightarrow r = \frac{2}{3}m \qquad (1)$$

由欧拉公式及（1）得

$$n = m - r + 2 = m - \frac{2}{3}m + 2 = \frac{m}{3} + 2 \qquad (2)$$

若 G 不是极大平面图，必存在二结点 u, v 不相邻，$G \cup (u,v) = G'$ 仍为平面图，G' 的边数、结点数、面数分别为 $m' = m + 1$、$n' = n = \frac{m}{3} + 2$、$r' = r + 1$。G' 仍然是连通的简单的平面图，且 $n' \ge 3$，由定理 25 可知

$$m' \le 3n' - 6 \Rightarrow m + 1 = m' \le 3 \cdot (\frac{m}{3} + 2) - 6 = m$$

这是一个矛盾，所以 G 必为极大平面图。

*77. 在由 6 个结点，12 条边构成的连通平面图 G 中，每个面由几条边围成？为什么？

解：

每个面由 3 条边围成。因图中结点数和边数分别为 n=6，m=12，根据欧拉公式 n–m+r=2，得 r=8。

又 $\sum \deg(v_i) = 2m = 24$，而简单连通平面图的每个面至少由 3 条边围成，所以 G 中每个面由 3 条边围成。

*78. 证明当每个结点的度数大于等于 3 时，不存在有 7 条边的简单连通平面图。

证：

设（n, m）图为简单连通平面图，有 r 个面。

若 m=7，由欧拉公式知 $n + r = m + 2 = 9$ （1）

而每个面至少由 3 条边围成，有 $3r \le 2m$，则 $r \le \frac{2}{3}m$

又对任结点 $v \in V,\ \deg(v) \ge 3$，有 $3n \le 2m$，故 $n \le \frac{2}{3}m$

所以 $n + r \le \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}m = \frac{4}{3}m = \frac{28}{3}$ 与（1）矛盾，所以结论正确。

79．证明：若 G 是自对偶的平面图，则 G 中的边数 m 与结点数 n 有如下关系 $m = 2n - 2$

证：

设 G^*是 G 的对偶图，因为 $G \cong G^*$，所以 G 必为连通的平面图。由定理 29 可知：$n^*=r, m^*=m, r^*=n$，于是，$n=n^*=r$，由欧拉公式可知

$n-m+r=2=n-m+n \Rightarrow m=2n-2$

80．证明：一个平图 G 的对偶图 G^*是欧拉图当且仅当 G 中每个面均由偶数条边围成。

证：

显然 G^*是连通图。设 v^*为 G^*中任意一结点，v^*处于 G 的面 R 中，由于 R 由偶数条边围成，所以 d（v^*）为偶数，由于 v^*的任意性可知，G^*为欧拉图。

81．设 G^*是平图 G 的对偶图，证明：

$n^*=r, m^*=m, r^*=n-k+1$　　　　其中 $k(k \ge 1)$ 为 G 的连通分支数。

证：

由欧拉公式的推论可知

$n-m+r=k+1 \Rightarrow m-r=n-k-1$　　　　（1）

G^*是连通图，由欧拉公式可知

$n^*-m^*+r^*=2 \Rightarrow r^*=2+m^*-n^*$　　　　（2）

$n^*=r$，$m^*=m$ 是显然的，由（2）得

$r^*=2+m-r$　　　　（3）

将式（1）代入式（3）得

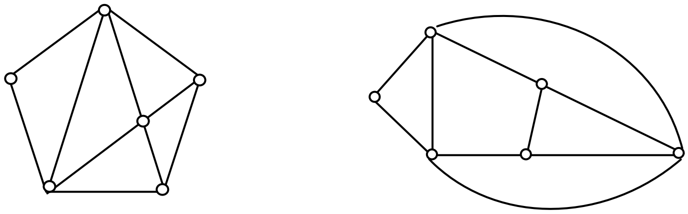
$r^*=2+n-k-1=n-k+1$

82．证明：不存在具有 5 个面，每两个面都共享一条公共边的平图 G。

证：

反证法。若存在这样的平图 G，设 G 的对偶图为 G^*，则 G^*也是平图。由于 G 有 5 个面，所以 G^*具有 5 个结点。设 v^*为 G^*的任一结点，设它位于 G 的面 R 中。由于 R 与其余 4 个面均有公共边，所以 v^*与其余面中的结点均相邻，于是 d（v^*）$=4$，而且 G^*为简单图，于是 G^*必为 K_5，可是 K_5 为非平面图，这与 G^*为平图矛盾。

83．图 6-38 中给出的图 $G_1 \cong G_2$，试画出它们的对偶图 G_1，G_2*，并说明是否有 $G_1^* \cong G_2^*$

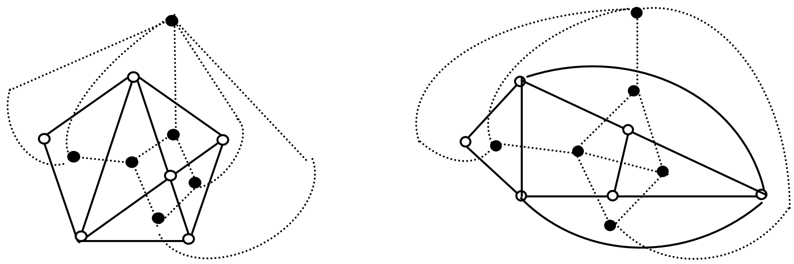


G_1　　　　　　G_2

图 6-38

解：

图 6-39 中虚线部分分别表示 G_1 和 G_2 的对偶图 G_1^* 和 G_2*。由图知 $\Delta(G_1^*) = 5$，而 $\Delta(G_2^*) = 4$，所以 $G_1^* \cong G_2^*$



G_1　　　　　　G_2

图 6-39

84．设 G 是连通的平图，证明：G 为二部图当且仅当 G 的对偶图为欧拉图。

证：

必要性：设 G*为 G 的对偶图，则 G*是连通的，只要证明 G*中每个结点的度数均为偶数。因为 G 为二部图，由定理 2 可知 G 中无奇数长度的基本回路，因而 G*中所有结点的度数为偶数，所以 G*为欧拉图。

充分性：因为 G*为欧拉图，所以 G*中每个结点的度数都为偶数。所以 G 中无奇数长的基本回路，因而 G 必为二部图。

85．求下列各类图的色数：

（1）n 阶零图 N_n；

（2）完全图 K_n；

（3）n 阶轮图 W_n；

（4）二部图；

（5）彼德森图。

解：

（1）N_n 中无边，因而 N_n 中各结点可用同一种颜色着色，也就是说 N_n 是 1-可着色的，当然 N_n 不是 0-可着色的，所以 $\chi(N_n)=1$。

（2）K_n 中所有的结点之间都彼此相邻，因而至少用 n 种颜色给 K_n 的结点着色，才能无相邻结点着同种颜色，所以 K_n 是 n-可着色的，但不是（n–1）-可着色的，于是 $\chi(K_n)=n$。

（3）① n 为奇数时，W_n 中有一个长为偶数 n–1 的基本回路 C_{n-1}，由定理可知，C_{n-1} 上的 n–1 个结点可用 2 种颜色着色，另外的结点 v_n 不在 C_{n-1} 上，它与 C_{n-1} 上的所有结点相邻，因而最少用 3 种颜色给 W_n 着色，所以 $\chi(W_n)=3$。

② 当 n 为偶数时，W_n 中有一个长为奇数的基本回路 C_{n-1}，至少用 3 种颜色给 C_{n-1} 上的结点着色，C_{n-1} 外结点 v_n 与 C_{n-1} 上的所有结点相邻，因而至少用 4 种颜色给 W_n 的结点着色，所以 $\chi(W_n)=4$。

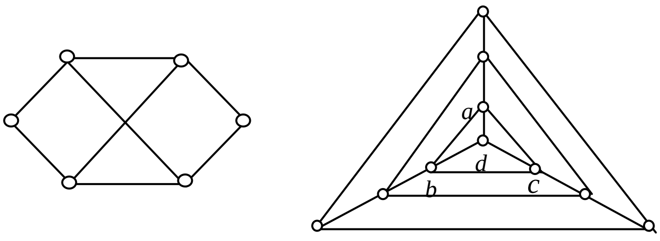
（4）设 $G=<V_1,V_2,E>$ 为任意一二部图，若 $E=\varnothing$，则 G 为零图，此时 $\chi(G)=1$。若 $E\neq\varnothing$，则 G 为非零的二部图，G 中至少有一条边，因而 $\chi(G)\geq 2$，可是 V_1 中的结点互不相邻，V_2 中的结点互不相邻，因而可给 V_1 中所有的结点着颜色 α，给 V_2 中的结点着色 β，保证相邻结点着不同颜色，所以 $\chi(G)\leq 2$，故 $\chi(G)=2$。

（5）在彼德森图 G 中，存在奇数长的基本回路，因而 $\chi(G)\geq 3$。又彼德森图既不是完全图，也不是长为奇数的基本回路，$\Delta(G)=3$，由定理 36 可知 $\chi(G)\leq 3$，所以 $\chi(G)=3$。

*86．求图 6-40 所示二图的色数。

解：

（1）图 6-40 中（1）所示的图 G 中无奇数长的基本回路，由定理 36 可知 $\chi(G)=2$。



（1）　　　　　　　　（2）

图 6-40

（2）图 6-40 中（2）所示的图 G 含子图 W_4，事实上，由结点 a,b,c,d 导出的子图就是轮图 W_4。由题 85 中（3）可知 $\chi(W_4)=4$，所以应有 $\chi(G)\ge 4$，又此图中最大度 $\Delta(G)=4$，G 不是完全图，也不是奇数长的基本回路，由定理 36 可知 $\chi(G)\le\Delta(G)=4$，所以 $\chi(G)=4$。

87．设 G 是 n 阶 k 正则图，证明　$\chi(G)\ge\dfrac{n}{n-k}$

证：

设 v 为 G 中任意一结点，因为 $d(v)=k$，因而至多有 $n-k$ 个结点可以与 v 涂相同的颜色，于是至少需要 $\left\lceil\dfrac{n}{n-k}\right\rceil$ 种颜色给 G 的结点着色，所以

$$\chi(G)\ge\left\lceil\frac{n}{n-k}\right\rceil\ge\frac{n}{n-k}$$

88．设 G 是一个简单图，若 G 的结点表示期末考试的科目，边表示关联的两结点对应的科目不能同一时间考。那么 G 的一个适当的点着色的意义是什么？最小色数的意义是什么？

解：

由于图的结点表示考试科目，相邻两点颜色不同表示对应的两门课不能同时考。因此，图的一个适当的着色就是一张考试安排表。结点上颜色的种数表示不同考试时间的次数，同一种颜色的结点表示可在同一时间考的对应科目，最小色数则表示安排考试时间的最少次数。

*89．某年级学生共选修 9 门课程。期末考试时，必须提前将这 9 门课程先考完，每天每人只在下午考一门课程，问至少需要几天考完这 9 门选修课程？

解：

设课程集合为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_9\}$，令 $S(i)=\{x|x$ 是该年级的学生且 x 学习 $v_i\}$，若 $S(i)\cap S(j)\ne\varnothing$，取边 $(i,j)\in E(G)$，于是做出无向图 G。显然 $\chi(G)$ 是所需要的最少的考试天数。

例如，当 $E(G)$={（1，2），（1，4），（1，6），（1，7），（2，3），（2，6），（3，4），（3，7），（3，9），（4，7），（4，8），（5，9），（5，6），（5，8）}时，G 如图 6-41 所示，此图的色数 $\chi(G)=3$，所以可在三天内考完全部课程。

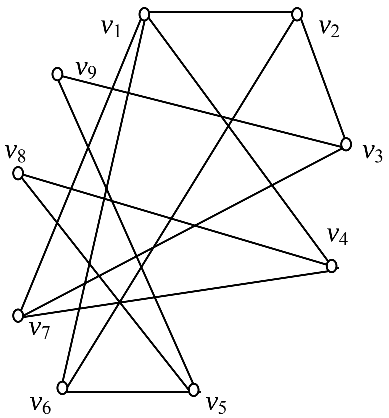


图 6-41

*90．某校某年级共有 s 个班，由 r 名教员上课。设 $V_1=\{v_1,v_2,\Lambda,v_r\}$ 为教员集合，$V_2=\{x_1,x_2,\Lambda,x_s\}$ 为班级集合。令 m_{ij} 表示教员 v_i 在一天内给 x_j 班上课的节数，i=1,2,⋯,r, j=1,2,⋯,s。

（1）问本年级每天至少要安排多少节课？又至少需要多少个教室？

（2）设 r=4，s=5，m_{ij} 由表 6-2 给出，回答（1）中提出的问题。

表 6-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
v_1	1	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	1	1	1
v_4	0	0	0	1	2

解：

（1）以 V_1,V_2 为结点集做二部图 G，使得结点 v_i 与 x_j 之间连接 m_{ij} 条无向边。所得二部图为 $G=<V_1,V_2,E>$。用尽量少的颜色给 G 的边着色，使得相邻的边着不同的颜色，每种边着色方案就给出一种课时安排表，当然每天所用最少节数由 $\chi'(G)$ 给出。给出课时表后，根据课时表求出所用教室的最小数目。

（2）根据所给的数据做二部图 G（见图 6-42）。

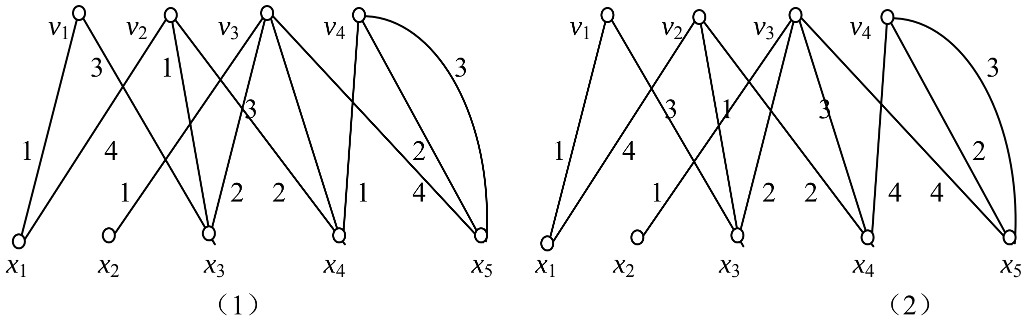


图 6-42

所做二部图的边色数为 4，所以每天要安排 4 节课，在图 6-42（1）中给出了 1 种边的着色方案，按此方案安排的课表为表 6-3 表示，此方案中第一节课要用 4 个教室，因而本年级需要 4 个教室。

表 6-3

	1	2	3	4
v_1	x_1	—	x_3	—
v_2	x_2	x_4	—	x_1
v_3	x_3	x_3	x_4	x_5
v_4	x_4	x_5	x_5	—

表 6-4

	1	2	3	4
v_1	x_1	—	x_3	—
v_2	x_3	x_4	—	x_1
v_3	x_2	x_3	x_4	x_5
v_4	—	x_5	x_5	x_4

将边的着色方案改变一下，将 v_4 关联的边的着色方案改成图 6-42（2）中所示的图着色方案，其他边的着色方案不变，按此方案安排课表为表 6-4 所示，在此方案下，只要给本年级准备 3 个教室就可以了。

91．设 $G=<V,E>$ 为非平凡的无向简单图，则 $V^*\subseteq V$ 是 G 的点覆盖集当且仅当 $V-V^*$ 为 G 的点独立集。

证：

必要性：设 V^* 为 G 的一个点覆盖集，则 G 中任何一条边的两个端点至少有一个在 V^* 中，因而不存在两个端点均在 $V-V^*$ 中的边，于是 $V-V^*$ 中所有结点均不相邻，故 $V-V^*$ 为点独立集。

充分性：$V-V^*$ 为 G 的点独立集，因而 G 中任何一条边的两个端点不同在 $V-V^*$ 中，就是说，任何一条边的两个端点至少有一个在 V^* 中，所以 V^* 为 G 的点覆盖集。

92．设 $G=<V,E>$ 是一个无孤立点的无向简单图，M 为 G 中一匹配，N 为 G 中一点覆盖，Y 为 G 中一点独立集，W 为 G 中一边覆盖集，证明：

（1）$|M|\le|N|$

（2）$|Y|\le|W|$

等号成立时，M，N，Y，W 分别为最大匹配，最小点覆盖，最大点独立集，最小边覆盖。

证：

（1）因为匹配 M 中的边均不相邻，因而覆盖住 M 中的边至少用 N 中 $|M|$ 个结点，因而 $|M| \le |N|$ 成立。当等号成立时，说明 $|M|$ 达到了最大值，$|N|$ 达到了最小值，因而 M 为最大匹配，N 为最小点覆盖。

（2）独立点集 Y 中的结点均不相邻，W 中至少要有 $|Y|$ 条边才能覆盖住 Y 中所有结点，所以必有 $|Y| \le |W|$（等号成立时讨论情况类似于 1）。

93．（1）设 K_n 是 $n \ge 3$ 的无向完全图，试证明：$\beta_1 < \alpha_0$ 且 $\beta_0 < \alpha_1$

（2）设 $K_{r,s}$ 是完全二部图，试证明：$\beta_1 = \alpha_0$ 且 $\beta_0 = \alpha_1$

证：

（1）对于 $n \ge 3$ 的无向完全图 K_n 来说，至少用 $n-1$ 个结点才能覆盖住所有边，所以 $\alpha_0 = n-1$，当 n 为偶数时，K_n 中存在最多为 $\dfrac{n}{2}$ 条边的边独立集（匹配），当 n 为奇数时，存在最多为 $\dfrac{n-1}{2}$ 条边的匹配，因而 $\beta_1 = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$。显然 $\beta_0 = 1$，$\alpha_1 = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$。当 $n \ge 3$ 时，$n-1 > \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$，$\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor > 1$，所以 $\beta_1 < \alpha_0$，$\beta_0 < \alpha_1$

（2）在完全二部图 $K_{r,s}$ 中，$\alpha_0 = \min\{r,s\} = \beta_1$，$\beta_0 = \max\{r,s\} = \alpha_1$，所以 $\beta_1 = \alpha_0$ 且 $\beta_0 = \alpha_1$

94．在彼德森图中找一个最小点覆盖集 N，最大点独立集 Y，最小边覆盖集 W 和一个最大边独立集 M。然后计算出图的点覆盖数 α_0，点独立数 β_0，边覆盖数 α_1 和边独立数（匹配数）β_1。

解：

（1）在图 6-43 中所示的彼德森图中，实心点组成的集合 $N = \{f,b,c,i,j,e\}$ 为一最小点覆盖集，由题 91 可知空心点组成的集合 $Y = \{g,h,a,d\}$ 为最大点独立集，因而 $\alpha_0 = 6, \beta_0 = 4$

（2）图中粗边组成的集合 $W = \{(a,f),(b,g),(c,h),(d,i),(e,j)\}$ 为最小边覆盖集，也是一最大匹配，因而图中 $\alpha_1 = \beta_1 = 5$

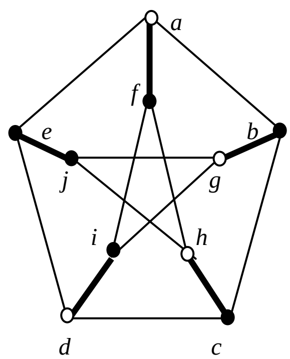


图 6-43

*95．设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$，$V_1$ 中每个结点的度都不小于 V_2 中每个结点的度，证明存在 V_1 到 V_2 的完备匹配。

证：

设V_1中各结点的最小度为δ，则V_1中任意$k(k=1,2,\Lambda,|V_1|)$个结点至少关联$k\delta$条边，这$k\delta$条边至少关联V_2中k个结点，于是V_1中任k个结点至少邻接到V_2中的k个结点，因而G满足“相异性条件”，故存在V_1到V_2的完备匹配。其实，本题也满足$t=\delta$的t条件。

96．设$G=<V_1,V_2,E>$为r正则二部图，证明G中存在完美匹配。其中$r\geq 1$。

证：

因为G为r正则图，因而V_1中每个结点关联r条边，V_2中每个结点也关联r条边。取t=r，则G中结点满足“t条件”，由定理33可知G中存在从V_1到V_2的完备匹配M_1，因而$|V_1|\leq|V_2|$。也存在V_2到V_1的完备匹配M_2，因而$|V_2|\leq|V_1|$，于是$|V_1|=|V_2|$。所以M_1，M_2都是G中完美匹配。

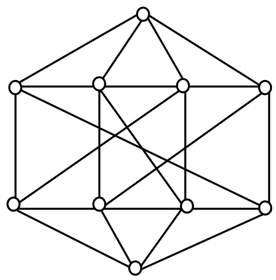
*97．求无向完全图K_n和完全二部图$K_{r,s}$中边不重合的完美匹配的个数。

解：

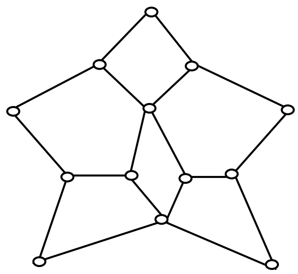
（1）n为奇数时，K_n中不存在完美匹配。当n为偶数时，K_n中存在完美匹配，其边不重合的完美匹配的个数等于K_n的边色数$\chi'(K_n)$。此个数等于$\Delta(K_n)=n-1$

（2）完全二部图$K_{r,s}$中存在完美匹配，当且仅当r=s。由于$\chi'(K_{r,r})=\Delta(K_{r,r})=r$，所以$K_{r,r}$中存在$r$个边不重合的完美匹配。

*98．求图6-44中所示的两图α_0，β_0，α_1，β_1。



（1）



（2）

图6-44

解：

（1）在图6-44（1）中，易求出最大点独立数$\beta_0=3$，图中结点数n=10，由定理30可知，最小点覆盖数$\alpha_0=10-3=7$。

易知图中匹配数$\beta_1=5$，由定理31可知$\alpha_1=10-\beta_1=10-5=5$。

（2）在图（2）中，n=13。容易看出$\alpha_0=6$，所以$\beta_0=13-6=7$。容易看出$\beta_1=6$，所以$\alpha_1=7$。

99．现有 4 名教师：张、王、李、赵，要求他们去教 4 门课程：数学、物理、电工和计算机科学。已知张能教数学和计算机科学；王能教物理和电工；李能教数学、物理和电工；而赵只能教电工。如何安排才能使 4 位教师都能教课，并且每门课都有人教？共有几种方案？

解：

设 V_1={张、王、李、赵}，V_2={物理、数学、计算机、电工}。某人能教某课程就在相应的结点之间连边，做二部图如图 6-45 所示。

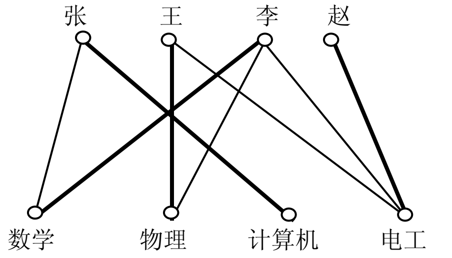


图 6-45

此二部图 G 满足"相异性条件"，因而存在V_1到V_2的完备匹配（此匹配也是完美的）。但因赵只能教电工，因而王只能教物理，李就只能教数学，张也就只能教计算机科学了。即方案只有一种。

100．设$G=<V,E>$为一无向简单图，证明：$\alpha_0 \ge \delta$。其中α_0为 G 中点覆盖数，δ为 G 中最小度。

证：

用反证法。若不然，必有$\alpha_0 < \delta$

设N_0为 G 中任一最小点覆盖集，则$|N_0| = \alpha_0 < \delta$，又因为 G 为简单图，所以$\delta \le n-1$，n 为 G 中结点数，因而$\alpha_0 < n-1$。于是存在$v_0 \in V - N_0$（即$v_0 \notin N_0$），$d(v_0) \ge \delta \ge \alpha_0 + 1$，可是$N_0$中的$\alpha_0$个结点覆盖不住$v_0$关联的$d(v_0)$条边，这与$N_0$为点覆盖矛盾。所以假设$\alpha_0 < \delta$错误，证明成立。

*101．某杂志发表了 7 个征求答案的题目，当从读者寄来的解答中挑选每题的两个解答时，编者发现所有 14 个选出来的解答恰好是 7 个读者提出来的，而且每个人正好提出了两个答案。试证明：编辑可以这样发表每道题的一个解答，使得在发表的解答中，这 7 个读者每人都恰有一个解答。

证：

设 7 个读者为 v_1,v_2,Λ,v_7，$V_1=\{v_1,v_2,\Lambda,v_7\}$，7 个题目为 u_1,u_2,Λ,u_7，$V_2=\{u_1,u_2,\Lambda,u_7\}$。若$v_i$为$u_j$做解答，令$(v_i,u_j)\in E$。所做图$G=<V_1,V_2,E>$，则 G 为二部图。由已知条件可知V_1中每个结点关联两条边，V_2中每个结点也关联两条边，即 G 满足 t=2 的"t 条件"，因而存在V_1到V_2的完备匹配，可是此时$|V_1|=|V_2|$，因而对于任意的V_1到V_2的完备匹配 M，不存在 M—非饱和点，故 M 也是完美的。即使得 7 个题目的 7 个解答分别由 7 个读者给出是可以办到的。

102．写出连通平面图的欧拉公式，并求出当平面图的每个面至少有 5 条边围成时，边数与结点数所满足的关系式。

解：

设平面图 G 有 n 个结点，m 条边和 r 个面，则欧拉公式为：$n-m+r=2$。

因图中每个面至少有 5 条边围成，所以有 $2m \geq 5r$，即 $r \leq \frac{2}{5}m$，代入欧拉公式化简后得

$$m \leq \frac{5n-10}{3}$$

即为所求。

第 7 章　树

树是图论中最重要的概念之一，它是基尔霍夫在解决电路理论中求解联立方程时首先提出的。它又是图论中结构最简单，用途最广泛的一种连通平面图，在计算机科学的算法分析、数据结构等方面有着广泛的应用。本章主要介绍树的基本概念、性质和若干应用。

§7.1　内 容 分 析

§7.1.1　树

定义 1　连通而不含回路的无向图称为无向树，简称为树，常用 T 表示树。平凡图称为平凡树。在一棵树中，度为 1 的结点称为树叶，度大于 1 的结点称为分支点。

定义 1 中“不含回路”的确切表述应该是“不含简单回路或基本回路”，因为任一非零图均有回路。为表述简单，本章内所谈回路均指简单回路或基本回路。

定义 2　若无向图 G 的 $k(k \geq 2)$ 个连通分支都是树，则称 G 为森林。

显然，树是简单图。树有若干等价定义，我们将它们表述成下面的一些定理。

定理 1　无向图 G 为树当且仅当 G 中任意两个结点有惟一的一条基本通路连接。

定理 2　无向图 G 为树当且仅当 G 无回路，但在 G 中任意两个结点 v_i 和 v_j 之间加一条边（v_i, v_j）就构成惟一的一条基本回路。

定理 3　无向图 $G=(n,m)$ 是树当且仅当 G 中无回路，且 $m=n-1$

定理 4　无向图 $G=(n,m)$ 是树当且仅当 G 是连通的，且 $m=n-1$

推论 1　设 $G=(n,m)$ 是有 k 个分支的森林，则 $m=n-k$

推论 2　非平凡树至少有两片树叶。

§7.1.2　生成树

定义 3　设无向连通图 $G=<V,E>$，T 是 G 的生成子图并且 T 是树，则称 T 是 G 的生成树。设 $e \in E$，若 e 在 T 中，则称 e 为 T 的树枝；若 e 不在 T 中，则称 e 为 T 的弦。

生成树在基于图的许多计算机算法中有着很重要的应用。注意：一棵树的生成树就是它自身。

定理 5　无向图 G 具有生成树当且仅当 G 连通。

推论　若无向图 $G=(n,m)$ 是连通的，则 $m \geq n-1$。

定理 6　设 T 是连通图 $G=<V,E>$ 的一棵生成树，则在 T 上添加任意一条弦 e 就产生惟一的一个 G 中只含弦 e 其余都是树枝的圈（基本回路）。

求连通图 G 的生成树的破圈法：找出 G 的一个回路，删除回路上一条边，此过程一直进行到图中不再含有回路为止，最后得到的不含回路的连通图就是 G 的生成树。

定义 4　设 G 是无向带权连通图，T 是 G 的一棵生成树，T 的每个树枝所带权之和称为 T 的权，记作 $W(T)$，G 中带权最小的生成树称为 G 的最小生成树。

求最小生成树的算法较多，下面介绍两种。

1．Kruskal 算法

设无向连通带权图 $G=<V,E>$，G 中的边 e_1,e_2,Λ,e_m 已按权的递增次序排列，即 $w(e_1)\leq w(e_2)\leq\Lambda\leq w(e_m)$

第 1 步　置 $E\neq\varnothing$; $j=1$
第 2 步　若 $E\,\mathrm{Y}\,\{e_i\}$ 不含回路，则用 $E\,\mathrm{Y}\,\{e_i\}$ 替代 E，转第 3 步；否则直接转第 3 步。
第 3 步　$j=j+1$。若 $j\leq m$，转第 2 步；否则转第 4 步。
第 4 步　结束。

Kruskal 算法也可用于求一般无向连通图的生成树，只要将各条边的权当作 1。Kruskal 算法也称为避圈法。

2．Prim 算法

第 1 步　置 $E=\varnothing$
第 2 步　在 V 中任选一个结点 t，令 $M=\{t\}$
第 3 步　在 E 中选取权尽可能小的边 (u,v)，其中 $u\in M$，$v\in V-M$。将 (u,v) 放进 E，v 放进 M。
第 4 步　若 $M\neq V$，转第 3 步；否则转第 5 步。
第 5 步　结束。

Prim 算法不需要事先对边排序，它每次选取权尽可能小的边，且每次生成的图不含回路，同时保持连通。
下面给出几个关于树在枚举方面的重要定理。

定理 7　n 个结点 $(n\geq 2)$ 的标号树共有 n^{n-2} 棵。

定理 8　无向完全图 K_n 共有 n^{n-2} 棵生成树。

定理 8 是定理 7 的推论。此处 K_n 是结点与边均标定了的无向图，它的两棵生成树不同当且仅当它们至少有一条边不同。

定理 9　设 G 是 n 阶无向连通简单图，结点集 $V=\{v_1,v_2,\Lambda,v_n\}$，设 $B=[b_{ij}]_{n\times n}$，其中 $b_{ij}=\begin{cases} d(v_i) & i=j \\ -1 & v_i\text{与}v_j\text{相邻} \\ 0 & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$，则 G 的生成树的数目等于 B 中任何元素的代数余子式。

§7.1.3　根树

在计算机科学及其他应用领域中，许多问题都可用有向树特别是根树描述。

定义 5　一个有向图 D，若不考虑有向边的方向所得的无向图是一棵无向树，则称 D 为有向树。

定义 6　一棵有向树 T，若仅有一个结点的入度为 0，其余结点的入度均为 1，则称 T 为根树。根树中入度为 0 的结点称为树根或根；入度为 1、出度为 0 的结点称为树叶；入度为 1、出度大于 0 的结点称为内点；树根和内点统称为分支点。

一棵根树的根是惟一的。根树的根可达根树的任意其他结点，且从根到任一其他结点仅有一条通路。从树根到某个结点的通路长度称为该结点的级或层数。根树中结点的最大层数，称为树高。根树中所有树叶的层数之和称为外部路径长度，记作 E；所有内点的层数之和称为内部路径长度，记作 I。

通常我们在画根树时，总是将树根画在最上方，树叶画在下方。在此约定下，所有边的方向总是指向下方，所以省去方向也不会引起含义不明确。

为方便起见，通常将家族关系中的一些术语引入到根树中来。设 T 是根树，若 $<u,v>\in T$，则称 u 是 v 的父亲，v 是 u 的儿子。若 v_1,v_2 都是 u 的儿子，则称 v_1 与 v_2 是兄弟。若 u 可达 w，则称 u 是 w 的祖先，w 是 u 是后代。

定义 7　设 v 为根树 T 中任一结点，且 v 不是树根，由 v 及其全部后代导出的子图称为以 v 为根的根子树或子树。

显然，根子树还是根树，根子树还可以有根子树。

许多情况下，需要对根树中同一父亲的儿子规定某种次序。

定义 8　若对根树 T 中每个父亲的儿子规定了次序（通常是指从左到右的次序），则称 T 为有序树。

定义 9　（1）设 T 为一棵根树，$\forall v\in T$，若 $\deg^+(v)\le m$，则称 T 为 m 元树；若 T 为有序树，则称 T 为 m 元有序树。

（2）设 T 为 m 元树，$\forall v\in T$，若 $\deg^+(v)=m$，则称 T 为 m 元正则树；若 T 为有序树，则称 T 为 m 元有序正则树。

（3）设 T 为 m 元正则树，若 T 中所有树叶的层数相同，则称 T 为 m 元完全树或满 m 元树；若 T 为有序树，则称 T 为 m 元有序完全树。

不难证明，一棵高为 k 的满二元树，其结点数是 $2^{k+1}-1$，树叶总数是 2^k，分支点总数是 2^k-1。

定理 10　设非平凡完全二元树 T 有 r 个分支点，内部路径长度为 I，外部路径长度为 E，则 $E=I+2r$。

定理 11　设二元树 T 有 n_0 片树叶，n_2 个出度为 2 的结点，则 $n_2=n_0-1$。

定理 12　设完全二元树 T 有 n 个结点，n_0 片树叶，则 $n=2n_0-1$。

定理 13　设完全 m 元树 T 有 n_0 片树叶，t 个分支点，则 $(m-1)t=n_0-1$。

在计算机科学中，二元有序树有着重要应用。在二元有序树中，每个分支点至多有两个儿子，分别称为左儿子和右儿子。在只有一个儿子的情况下，必须根据实际情况确定它是左儿子或右儿子。因此，我们这里所说的二元有序树，不仅规定了儿子的次序，还规定了位置，称为定位二元树或二叉树。在二叉树中，以某个分支点的左（右）儿子为根的根子树，称为该分支点的左（右）子树。

一棵二叉树中除根外的各个结点可以很方便的用二进制数标记，方法如下：根的左儿子标记为 0，右儿子标记为 1；所有其余分支点的左儿子的标记是在分支点的标记后面加一个 0，对右儿子则是加一个 1。

由于二叉树的这种结构处理比较简单，因此我们经常把一般有序树转换成二叉树来处理。用二叉树惟一地表示每一棵有序树。这样，当用计算机来表示有序树时，只要考察相应的二叉树表示就可以了。转换方法如下：设 T 是有序树，v_1 是根，则 v_1 也是转换后的二叉树的根。对 T 中任一结点 v_i，若 $v_{i_1},v_{i_2},\Lambda,v_{i_k}$ 从左到右依次是它的儿子，则以 v_{i_1} 作为 v_i 的左儿子。若 v_i 右面第一个结点是 v_j，则以 v_j 作为 v_i 的右儿子。

注意到用二叉树表示任一有序树时，根总是没有右子树，于是将这种表示方法稍加推广可将任一有序森林也表示成二叉树。转换方法如下：先将具有 k 个分支的有序森林中第一棵有序树转换成二叉树 T'，再将第二棵有序树的根作为 T' 的根的右儿子添加到 T' 中，将第三棵有序树的根作为第二棵有序树的根的右儿子添加到 T' 中，如此重复。然后分别将第二棵有序树、第三棵有序树、…、第 k 棵有序树转换成二叉树，最后得到二叉树 T''。

在计算机应用中，对于二叉树，一个十分重要的问题是：按一定的规律和次序，使二叉树中每个结点恰好访问一次。通常有如下三种遍历方法（所有的方法均是递归的）。

（1）中序遍历法（中根次序遍历法或中根通过法）　其访问次序为左子树，树根，右子树，对左、右子树也采用此种访问次序。

（2）前序遍历法（前根次序遍历法或前根通过法）　其访问次序为树根，左子树，右子树，对左、右子树也采用此种访问次序。

（3）后序遍历法（后根次序遍历法或后根通过法）　其访问次序为左子树，右子树，树根，对左、右子树也采用此种访问次序。

§7.1.4　带权树

定义 10　设二元树 T 有 t 片树叶，它们在 T 中的层数分别为 l_1,l_2,Λ,l_t，并分别带权

为 $w_1, w_2, \Lambda\ , w_t$，则称 T 为带权二元树。称 $W(T)=\sum\limits_{i=1}^{t} w_i l_i$ 为 T 的权。

定义 11　具有 t 片树叶，带权为 $w_1, w_2, \Lambda\ , w_t$ 的 r 元树中，带权最小的 r 元树，称为最优 r 元树。

定理 14　设 T 是关于权 $w_1 \le w_2 \le \Lambda\ \le w_t$ 的最优二元树，$l_1, l_2, \Lambda\ , l_t$ 是对应的树叶的层数。若 $w_j < w_k$，则 $l_i \ge l_k$，即权较小的树叶离根较远。

定理 15　设 T 是关于权 $w_1 \le w_2 \le \Lambda\ \le w_t$ 的最优二元树，则与 w_1 和 w_2 对应的树叶具有最大层数。

定理 16　设 $0 \le w_1 \le w_2 \le \Lambda\ \le w_t$，$T'$ 是关于权 $w_1+w_2, w_3, \Lambda\ , w_t$ 的最优二元树，若在 T' 中用含有 2 片权为 w_1 和 w_2 的树叶的子树替换权为 w_1+w_2 的树叶，所得的带权树为 T，则 T 是关于权 $w_1, w_2, \Lambda\ , w_t$ 的最优二元树。

对给定的实数序列 $w_1 \le w_2 \le \Lambda\ \le w_t$，下面给出构造最优 r 元树的递归算法。

（1）求最优二元树的 Huffman 算法

第 1 步　连接以 w_1，w_2 为权的两片树叶，得一个分支点及其所带的权 w_1+w_2。

第 2 步　在 w_1+w_2，w_3，…，w_t 中选出两个最小的权，连接它们对应的结点（不一定都是树叶）又得分支点及其所带的权。

重复第 2 步，直到形成 $t-1$ 个分支点，t 片树叶时为止。

（2）求最优 $r(r \ge 3)$ 元树的 Huffman 算法。

① 若 $\dfrac{t-1}{r-1}$ 为整数，求最优 r 元树的算法与求最优二元树的算法类似，只是每次取 r 个最小的权。

② 若 $r-1$ 除 $t-1$ 余数 s 不为 0，$1 \le s < r-1$，将 $s+1$ 个较小的权对应的树叶为兄弟放在最长的通路上，然后的算法同①。

§7.1.5　前缀码

定义 12　设 $\beta=\alpha_1\alpha_2\Lambda\ \alpha_{n-1}\alpha_n$ 为长是 n 的符号串，则称其子串 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2$，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \Lambda$，$\alpha_1\alpha_2\Lambda\ \alpha_{n-1}$ 分别为 β 的长度为 1，2，3，…，$n-1$ 的前缀。

定义 13　设 $B=\{\beta_1, \beta_2, \Lambda\ , \beta_m\}$ 为一符号串集合，若对于任意的 β_i，$\beta_j \in B$，$i \ne j$，β_i 与 β_j 互不为前缀，则称 B 为前缀码。若 B 中诸元素中只出现了两个符号（如 0 和 1），则称 B 为二元前缀码。

用二进制数对符号集合中的符号编码，是计算机及通信技术中经常使用的。对编码的基本要求是没有歧义性和码长尽可能短。二叉树的树叶的二进制数标记所组成的集合必是一个二元前缀码。反之，对于任意给定的一个二元前缀码必存在一棵二叉树，使得这棵二叉树的所有树叶的二进制标记组成这个二元前缀码。若用二叉树的树叶的二进制数标记作

为符号集合中的符号的编码，则不会产生歧义，否则就不能保证无歧义性。当给定符号集合中各个符号在符号串中出现的频率后，要确定二元前缀码，使一定长度的符号串的编码长度尽可能短，这实际上就是一个求最优二元树的问题。

§7.2　重点及难点解析

§7.2.1　基本要求

1．掌握（无向）树、生成树、有向树、根树、树根、树叶、分支点、有序树、（有序）正则树、（有序）完全树、二叉树、带权树、最优 $r(r \geq 2)$ 元树、前缀码等概念及有关性质。
2．掌握树的若干等价定义，并能够利用它们判断或证明树的有关结论。
3．掌握求连通图的生成树的破圈法，以及求带权连通图的最小生成树的 Kruskal 算法和 Prim 算法。
4．了解关于（标号）树的枚举的几条结论。
5．掌握一般有序树（森林）的二叉树表示法。
6．掌握二叉树的结点的三种遍历法。
7．掌握求最优 $r(r \geq 2)$ 元树的 Huffman 算法，特别是构造最优二元树的 Huffman 递归算法。
8．掌握编最佳前缀码的方法（实际就是求最优 r 元树）。

§7.2.2　疑难点解析

1．当结点数较多时，构造出所有非同构的树相当复杂，没有有效的方法。
2．按不同的次序遍历二叉树的结点时，结点的遍历次序易出错，应特别谨慎。
3．通过构造最优 r 元树来实现最佳编码具有重要意义，应深刻领会并熟练掌握。

§7.3　基　本　题

§7.3.1　选择题

1．下面哪一种图不一定是树?（　　　）

A．无回路的连通图
B．有 n 个结点 $n-1$ 条边的连通图
C．每对结点间都有通路的图
D．连通但删去一条边则不连通的图

答案：C

2．连通图 G 是一棵树当且仅当 G 中（　　）。

A．有些边不是割边　　B．每条边都是割边
C．无割边集　　D．每条边都不是割边

答案：B

3．具有 4 个结点的非同构的无向树的数目为（　　）。

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

答案：A

4．具有 6 个结点的非同构的无向树的数目为（　　）。

A．4　　B．5　　C．7　　D．8

答案：C

5．一棵树有 2 个 2 度结点，1 个 3 度结点，3 个 4 度结点，则其 1 度结点数为（　　）。

A．5　　B．7　　C．8　　D．9

答案：D

6．完全 m 元树 T 中有 t 片树叶，i 个分支点，则有关系式（　　）。

A．$i=t-1$　　B．$(m-1)\,i+1=t$
C．$(m-1)\,i=t$　　D．$(m-1)\,t=i-1$

答案：B

7．T 为完全二元树，有 t 片树叶，e 条边，则有（　　）。

A．$e>2\,(t-1)$　　B．$e<2\,(t-1)$
C．$e=2\,(t-1)$　　D．$e=2\,(t+1)$

答案：C

8．具有 4 个结点非同构的根树的棵数为（　　）。

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

答案： B

9．5 个结点可构成的根树中，其元数 m 最多为（　　）。

A．2　　B．3　　C．5　　D．4

答案：D

10．在一棵完全 t 元树中，有 k 个分支点，若内部路径长度为 I，外部路径长度为 E，则满足关系式（　　）。

A．$E = I + tk$　　B．$(t-1)I = E + tk$

C．$E = (t-1)I + k$　　D．$E = (t-1)I + tk$

答案：D

11．设有 33 盏灯，拟公用一个电源，则至少需有五插头的接线板数（　　）。

A．7　　B．8　　C．9　　D．14

答案：B

12．下面给出的符号串集合中，哪一个是前缀码（　　）。

A．{1，01，001，000}

B．{1，11，101，001，0011}

C．{b，c，aa，bc，aba}

D．{b，c，a，aa，ac，abb}

答案：A

13．下面给出的符号串集合中，哪一个不是前缀码（　　）。

A．{0，10，110，1111}；

B．{01，001，000，1}；

C．{b，c，aa，ac，aba，abc}；

D．{0011，001，101，11，1}。

答案：D

§7.3.2　填空题

1．连通图 G 是一个树，当且仅当每条边_____。

答案：均为割边

2．无向图 G 具有生成树，当且仅当__①__，若 G 为（n, m）连通图，要确定 G 的一棵生成树必删去 G 的__②__条边（称 $m-n+1$ 为 G 的环秩）。

答案：① G 是连通的　　② $m-n+1$

3．无向图 G 是由 $k(k \geq 2)$ 棵树组成的森林，至少要添加________条边才能使 G 成为一棵树。

答案：$k-1$

4．一棵树有 2 个 2 度分支点，1 个 3 度分支点，3 个 4 度分支点，则有________片树叶。

答案：9

5．一棵树有 n_i 个 i 度分支点，i =2，3，…，k，则它有____片树叶。

答案：$n_3+2n_4+\Lambda+(k-2)n_k+2$

6．设 $G=<V,E>$ 是无向连通图，$e\in E$，若 e 在 G 的任何生成树中，则 e 为 G 的 ① ，若 e 不在 G 的任何生成树中，则 e 为 G 的 ② 。

答案：① 一条割边 ② 一个环

7．设 T 为高为 k 的二元树，则 T 的最大结点数为 _____。

答案：$2^{k+1}-1$

8．5 个结点可以构成 ① 棵非同构的无向树，又可构成 ② 棵非同构的根树。

答案：① 3 ② 9

9．一个简单有向图是根树，它的邻接矩阵必满足 ① ， ② 。

答案：① 主对角线上元素全为 0
② 矩阵中有一列元素全为 0，其他各列中都恰有一个 1

10．一个简单有向图是根树，它的邻接矩阵中 ① 为树根， ② 为树叶。

答案：① 全零列所对应的结点 ② 全零行所对应的结点

§7.3.3 判断题

1．设图 G 是有 n 个结点，$n-1$ 条边的无向图，则 G 为一棵树。（ ） 答案：×
2．任何树 T 都至少有两片树叶。（ ） 答案：×
3．图 G 中的每条边都是割边，则 G 必是树。（ ） 答案：×
4．任何图 $G=<V,E>$ 都至少有一棵生成树。（ ） 答案：×
5．设图 G 是无向连通图，G 的生成子图 T，称为 G 的生成树。（ ） 答案：×
6．图 G 是（n, m）连通图，要求 G 的一棵生成树，则要删去 G 中 $m-n$ 条边。（ ） 答案：×
7．设 $G=<V,E>$ 是连通图，$e\in E$ 是 G 的割边，则 e 在 G 的每棵生成树中。（ ） 答案：√
8．一个有向图 G 若仅有一个结点的入度为 0，其余结点的入度全为 1，则 G 一定是有向树。（ ） 答案：×
9．根树中最长路径的端点都是树叶。（ ） 答案：×
10．若完全二元树有 i 个分支点，且内部路径长度为 I，外部路径长度为 E，则 $I=E+2i$。（ ） 答案：×
11．若完全 k 元树有 i 个分支点，且内部路径长度为 I，外部路径长度为 E，则 $E=(k-1)I+ki$。 答案：√
12．T 为完全 m 元树，有 t 片树叶，i 个分支点，则有关系式：$(m-1)i=t-1$。（ ） 答案：√

13．在完全二元树中，若有 t 片树叶，则其边的总数 $e=2t-1$。（　）　答案：×

14．在完全二元树中，若有 t 片树叶，则其分支点数 $i=t-1$。（　）　答案：√

15．设有 9 盏灯，拟公用一个电源，则共需 3 块具有三个插头的接线板。（　）

答案：×

16．{0000，0010，010，011，111，01，10}是一个前缀码。（　）　答案：×

17．{000，001，01，10，11}是一个前缀码。（　）　答案：√

§7.4　习 题 解 析

1．证明具有 n 个结点的树，必有

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2n-2$$

证：

设 T 为有 n 个结点的树，依等价定义，边数 $m=n-1$。又根据定理，有

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m=2(n-1)$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2n-2$$

2．非平凡的无向连通图 G 是树当且仅当 G 的每条边都是割边。

证：

必要性：若 G 中存在边 $e=(v_i,v_j)$ 不是割边，则 $G-e$ 仍连通，因而 v_i,v_j 之间必另有一条（不通过 e）通路。

设此通路为 $v_i=v_{i_1}e_{j_1}v_{i_2}e_{j_2}\Lambda\ e_{j_{k-1}}v_{i_k}=v_j$，于是 G 中有回路 $v_ie_{j_1}v_{i_2}e_{j_2}\Lambda\ v_jev_i$，则与 G 是树矛盾。

充分性：只要证明 G 中无回路。若 G 中有回路 C，则 C 中任何边都不是割边，与题设中每条边都是割边矛盾。

3．证明恰有两个结点的度数为 1 的树必为一条通路。

证：

设 T 是一棵具有两个 1 度结点的（n,m）树，则 $m=n-1$ 且有 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m=2(n-1)$。又 T 连通且除两个 1 度结点外，其他结点度数均大于等于 2，而 $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2+\sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i)$，有 $2(n-1)=2+\sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i)$，故 $\sum_{i=1}^{n-2}\deg(v_i)=2(n-2)$。因此 $n-2$ 个分支点的度数都恰为 2，即 T 为一条通路。

4．证明非平凡的无向树最长路径的端点都是树叶。

证：

设T为一棵非平凡的无向树，$L = v_1, v_2, \Lambda\ , v_k$为$T$中最长的路径，若端点$v_1$和$v_k$中至少有一个不是树叶，不妨设$v_k$不是树叶，即有$\deg(v_k) \geq 2$，则$v_k$除与$L$上的结点$v_{k-1}$相邻外，还存在$v_{k+1}$与$v_k$相邻，而$v_{k+1}$不在$L$上，否则将产生回路，于是$v_1 \Lambda\ v_k v_{k+1}$仍为$T$的一条路径，可它比$L$长 1，这与$L$为最长路径矛盾。故$v_k$必为树叶。

类似地，v_k也是树叶。

5．若无向图G中有n个结点，$n-1$条边，则G为树。这个命题正确吗？为什么？

解：

命题不正确。K_3与平凡图构成的非连通图中有四个结点三条边，显然它不是树。

6．设无向图G中有n个结点，$n-1$条边，则G为连通图当且仅当G中无回路。

证：

必要性。因为G中有n个结点，边数$m = n-1$，又因为G是连通的，由定理 4 可知G为树，因而G中无回路。

再证充分性。因为G中无回路，又因为边数$m = n-1$，应用定理 3，可知G为树，所以G是连通的。

*7．设无向图G中有n个结点，m条边，已知$m \geq n$，证明G中必有回路。

证：

设G中有$k(k \geq 1)$个连通分支$G_1, G_2, \Lambda\ , G_k$，若G中不含回路，则$G_i (1 \leq i \leq k)$中也无回路，因而G_i均为树。设G_i中有n_i个结点，m_i条边，则$m_i = n_i - 1$。于是

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k \quad (k \geq 1)$$

这说明$m < n$与$m \geq n$矛盾，于是G中必有回路。

*8．已知一棵无向树T有三个 3 度结点，一个 2 度结点，其余的都是 1 度结点。

（1）T中有几个 1 度结点？

（2）试画出两棵满足上述度数要求的非同构的无向树。

解：

（1）设T中有x个 1 度结点，则T中结点数$n = 3+1+x$，由定理 4 可知，T中边数$m = 3+1+x-1 = 3+x$。T中各结点的度数之和

$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 3 \times 3 + 2 \times 1 + 1 \times x = 11 + x$。由握手定理可知

$11 + x = 2m = 6 + 2x \Rightarrow x = 5$

所以T中有五个 1 度结点。

（2）图 7-1 中所示的两棵树均满足要求，但它们是非同构的。

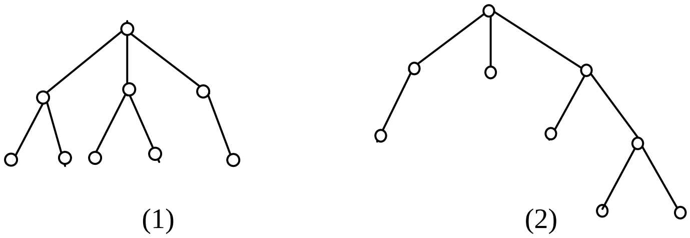

(1)　(2)

图 7-1

9．设 T 是一棵非平凡树，$\Delta(T) \ge k$，试证明：T 中至少有 k 片树叶。

证：

设 T 中有 n 个结点。若 T 中至多有 s 片树叶（$s < k$），则 T 中有 $n-s$ 个结点的度数大于等于 2。又至少有一个结点的度大于等于 k，由握手定理可得

$$2m = 2n-2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 2(n-s-1)+k+s \Rightarrow s \ge k$$

这与 $s < k$ 矛盾，所以 T 至少有 k 片树叶。

10．设无向图 G 是由 $k(k \ge 2)$ 棵树构成的森林，至少在 G 中添加多少条边才能使 G 成为一棵树？

解：

设 G 中的 k 个连通分支为 T_1, T_2, Λ, T_k，设结点 v_i 属于 T_i，i=1，2,⋯,k。在 G 中添加边 (v_i, v_{i+1})，$i = 1,2,\Lambda, k-1$，设所得新图为 T，则 T 连通且无回路，因而 T 为树。所加边的条数 k 是使得 G 为树的最小数目。

11．画出具有七个结点的所有非同构的树。

解：

所画出的树具有 6 条边，因而七个结点的度数之和应为 12。由于每个结点的度数均大于等于 1，因而可产生以下七种度数序列（d_1, d_2, Λ, d_7）：

（1）1 1 1 1 1 1 6　　（2）1 1 1 1 1 2 5
（3）1 1 1 1 1 3 4　　（4）1 1 1 1 2 2 4
（5）1 1 1 1 2 3 3　　（6）1 1 1 2 2 2 3
（7）1 1 2 2 2 2 2

在（1）中只有一个星形图，因而只能产生 1 棵树 T_1。

在（2)，(3）中有两个星形图，因而也只能各产生 1 棵非同构的树，分别设为 T_2，T_3。

在（4)，(5）中，各有三个星形图，但三个星形图中各有两个是同构的，因而各可产生两棵非同构的树，分别设为 T_4，T_5 和 T_6，T_7。

在（6）中，有四个星形图，有三个是同构的，考虑到不同的排列情况，共可产生三棵非同构的树，设为 T_8，T_9，T_{10}。

在（7）中，有五个星形图，都是同构的，因而可产生 1 棵树，设为T_{11}。T_1-T_{11}的图形见图 7-2 所示。

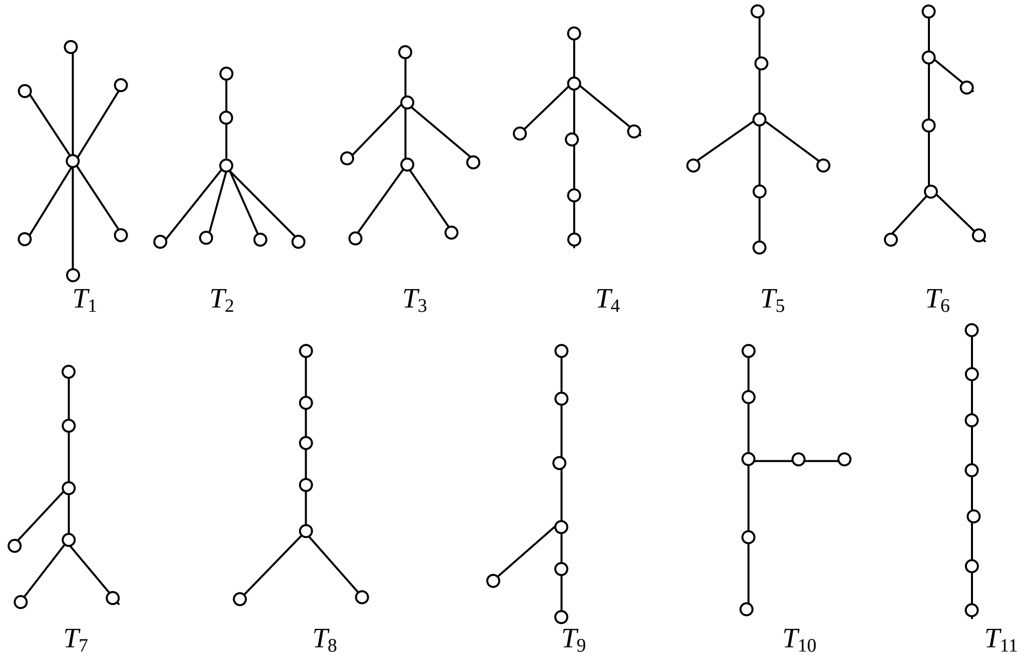


图 7-2

*12．（1）一棵无向树有n_i个度数为i的结点，$i=1,2,\Lambda,k$。n_2,n_3,Λ,n_k均为已知数，问n_1应为多少？

（2）在（1）中，若$n_r(3\le r\le k)$未知，$n_j(j\ne r)$均为已知数，问n_r应为多少？

解：

（1）设此无向树为T，T中共有n个结点，m条边，则$n=\sum\limits_{i=1}^{k}n_i$，$m=n-1$。

$\sum\limits_{j=1}^{n}d(v_j)=\sum\limits_{i=1}^{k}in_i$，由握手定理可知

$$\sum_{i=1}^{k}in_i=2m=2n-2=2\sum_{i=1}^{k}n_i-2 \qquad (1)$$

由式（1）可知

$$n_1=\sum_{i=2}^{k}in_i-\sum_{i=2}^{k}2n_i+2=\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2$$

（2）对于$r\ge 3$，由式（1）可知

$$n_r=\frac{1}{r-2}\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\ne r}}^{k}(2-i)n_i-2\right]$$

13．直接证明以下二结论，并用定理 7 验证之。

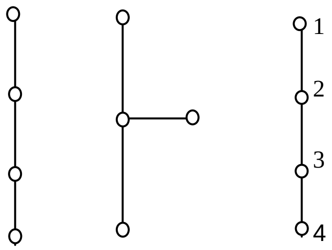
（1）4 个结点的标号树共有 16 棵；

（2）5 个结点的标号树共有 125 棵。

证：

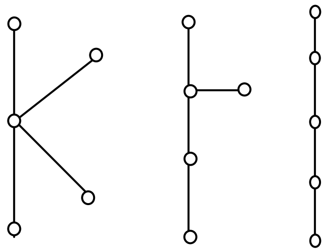
（1）4 个结点共有两棵非同构的非标号树（如图 7-3 中（1），（2）所示）。对于图（1），用 1,2,3,4 标定它的 4 个结点时，注意到像图（3），图（4）两棵树是相同的事实，因而共有 $\frac{1}{2}\times 4! = 12$ 棵。对于图（2），它有一个 3 度结点，其余的都是 1 度结点。3 度结点有 4 种标法（分别用 1，2，3，4 去标定），因而共有 4 棵不同的树。共有 12+4=16 棵标号树。

（2）5 个结点的所有可能的非同构无标号树共有 3 棵（如图 7-4 中（1），（2），（3）所示）。



（1）　（2）　（3）　（4）

图 7-3



（1）　（2）　（3）

图 7-4

对于图（1），4 度结点有 5 种标号，因而可产生 5 棵标号树。

对于图（2），3 度和 2 度结点标定后，其余 3 个结点还有 $\frac{1}{2}\times 3!$ 种标法。因而有 $C_5^2\times 2!\times\frac{1}{2}\times 3! = 60$ 种标法。

对于图（3），显然有 $\frac{1}{2}\times 5!$ =60 种标号，于是共有 5+60+60=125 棵标号树。

按定理 7，$n = 4$ 的情况，应有 $4^{4-2} = 16$ 棵标号树，与（1）的结果一致。

$n = 5$，应有 $5^{5-2} = 5^3 = 125$ 棵标号树，也与（2）的结果一致。

14．在一个树叶的标号已给定的条件下，n 个结点的标号树共有多少棵？

解：

不妨设已标号的树叶的标号为 n。于是还剩下正整数 $1, 2, \cdots, n-1$ 给余下的 $n-1$ 个结点标号。由定理 7 可知，余下的 $n-1$ 个结点的可标号树共有 $(n-1)^{(n-1)-2} = (n-1)^{n-3}$ 棵，设 T 为其中的一棵，标号为 n 的结点与 T 中任何结点相连均形成一棵 n 个结点的标号树，而且它们全不相同，因而共有 $(n-1)(n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$ 棵有 n 个结点的标号树。

15．结点已标定的 K_4，K_5 和 $K_{2,3}$ 各有多少棵生成树？

解：

由定理 8 可知 K_4 有 $4^{4-2} = 4^2 = 16$ 棵生成树，K_5 有 $5^{5-2} = 5^3 = 125$ 棵生成树。它们正是 4 个结点与 5 个结点的可标号树的数目。

对于$K_{2,3}$可用定理 9 来计算它的生成树数。$K_{2,3}$如图 7-5 所示。

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

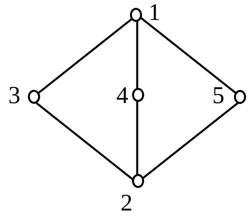


图 7-5

根据定理，只要计算B中任何元素的代数余子式。取第一行第一列元素 3 的代数余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=12$$

所以$K_{2,3}$应有 12 棵生成树。

16．设G是连通图，满足下面条件之一的边应具有什么性质？

（1）在G的任何生成树中；

（2）不在G的任何生成树中。

解：

（1）在G的任何生成树中的边应为G中的桥。

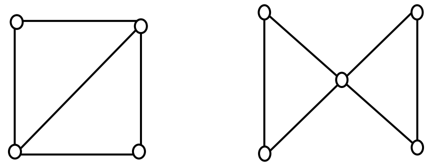
（2）不在G的任何生成树中的边应为G中的环。

17．设$G=<V,E>$是连通图且$e\in E$，试证明：当且仅当e是G的割边时，e包含在G的每棵生成树中。

证：

必要性：假设边e包含在G的每棵生成树中但不是割边，从G中删去e得到G'仍是连通的且是G的生成子图，G'必有一棵生成树T，而T也是G的生成树但不包含e，这与假设矛盾。故e必是割边。

充分性：设e是G的割边，若删去e，则得到两个连通分支G_1,G_2，而G的任一棵生成树T必是连通的，故连结G_1和G_2的惟一边e必在T中。



（1）　　（2）

图 7-6

18．在图 7-6 中，（1），（2）所示的连通图 G_1,G_2 中各有几棵非同构的生成树？

解：

在图 7-6（1）中共有两棵非同构的生成树（如图 7-7 中（1），（2）所示的树）。

在图 7-6（2）中共有三棵非同构的生成树（如图 7-7 中（3），（4），（5）所示）。

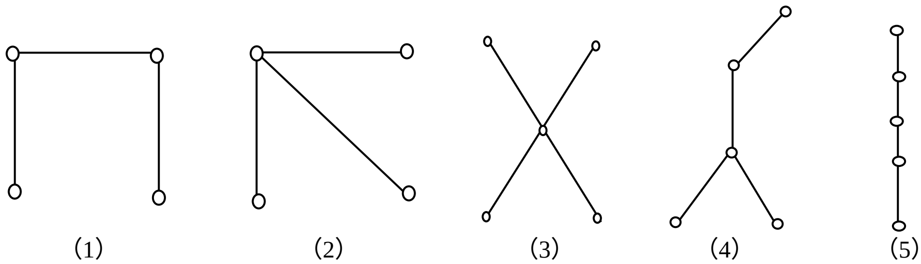


图 7-7

19．在图 7-8 所示的带权图 G 中共有多少棵生成树，它们的权各为多少？其中哪些是图中的最小生成树？

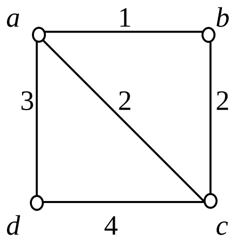


图 7-8

解：

G 中共有 8 棵生成树，如图 7-9（1）~（8）图所示，（i）表示生成树 T_i，i=1,2,…,8。

$W(T_1)=8$，$W(T_2)=6$，$W(T_3)=7$，$W(T_4)=9$，$W(T_5)=6$，$W(T_6)=8$，$W(T_7)=7$，$W(T_8)=7$。

其中 T_2 和 T_5 是 G 中的最小生成树，它们的权 $W(T_2)=W(T_5)=6$

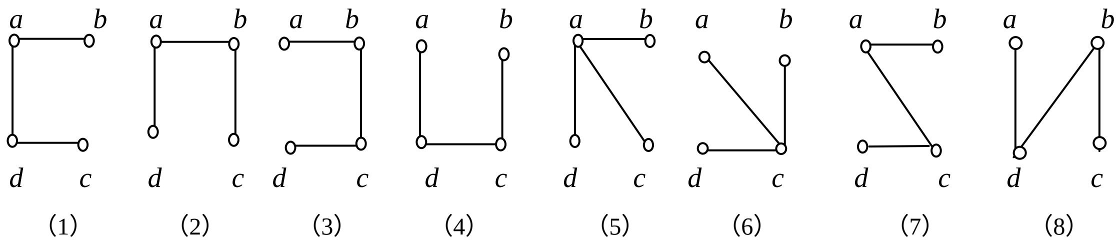


图 7-9

20．在图 7-10（1）、（2）所示的两图中各求一棵最小生成树，将生成树用粗边给出并计算它们的权。

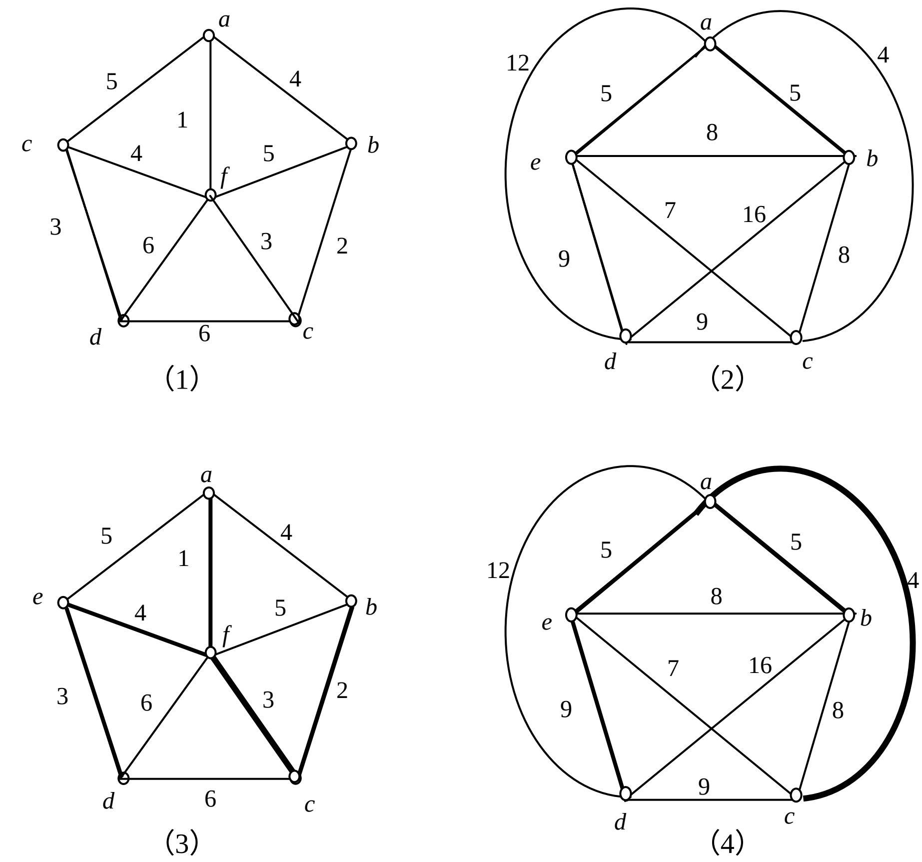


图 7-10

解：

用 Kruskal 算法（避圈法）求图（1）中的一棵最小生成树，记为T_1（图 7-10（3）中粗边所示），$W(T_1)=13$。

用 Prim 算法求图（2）中的一棵最小生成树，记作T_2（图 7-10（4）中粗边所示），$W(T_2)=23$。

21．设T是连通图G中的一棵生成树，试证明T的补$\overline{T}=G-T$中不含G中任何割集。

证：

用反证法。若$\overline{T}=G-T$中含G中一割集S，即$S\subseteq E(T)$，于是$T\subseteq G-S$，可是$G-S$非连通，这与T是连通的矛盾，因而$\overline{T}$中不可能含G的任何割集，从而G的任何割集中必含T中的树枝。

22．图 7-11 给出的赋权图表示七个城市 a，b，c，d，e，f，g 及架起城市间直接通信线路的预测造价，试给出一个设计方案使得各城市间能够通信且总造价最小，要求计算出最小总造价。

解：

该题就是求图的最小生成树问题。因此，图的最小生成树即为所求的通信线路图，如图 7-12 所示。其权即是最小总造价，其权为： $w(T)=1+3+4+8+9+23=48$。

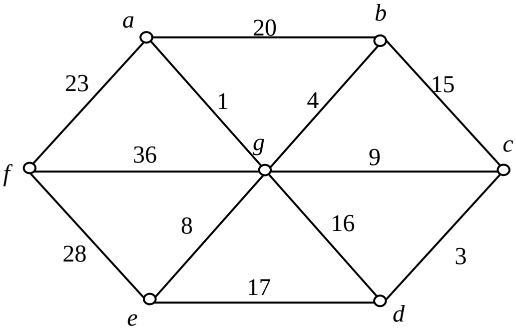


图 7-11

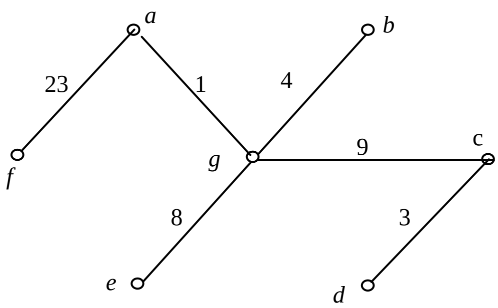
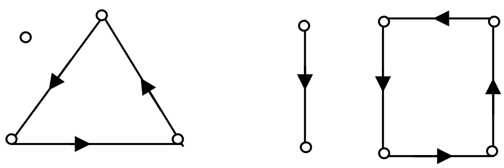


图 7-12

23．一个有向图 D，仅有一个结点入度为 0，其余结点的入度均为 1，D 一定是有向树吗？

解：

仅一个结点的入度为 0，其余结点的入度均为 1 的有向图不一定为有向树。图 7-13 中所示的两个有向图都满足条件，但它们都不是有向树。



（1）　　（2）

图 7-13

*24．5 个结点可以形成多少棵非同构的无向树？5 个结点又可以形成多少棵根树？指出这些根树都是几元树。

解：

按照题 11 的作法，可知 5 个结点可形成 3 棵非同构的树（如图 7-14 中（1），（2），（3）所示）。由图（1）可生成两棵非同构的根树，如图 7-14 中（4），（5）所示。图（4）为 3 元树，图（5）为 4 元树。由图（2）可生成 4 棵非同构的根树，如图中（6），（7），（8），（9）所示。图（6）为 2 元树，图（7）为 2 元树，图（8）为 3 元树，图（9）为 2 元树。由图（3）可生成 3 棵非同构的根树，如图中（10），（11），（12）所示。图（10）为 1 元树，图（11），图（12）为 2 元树。

5 个结点共形成 9 棵非同构的根树。

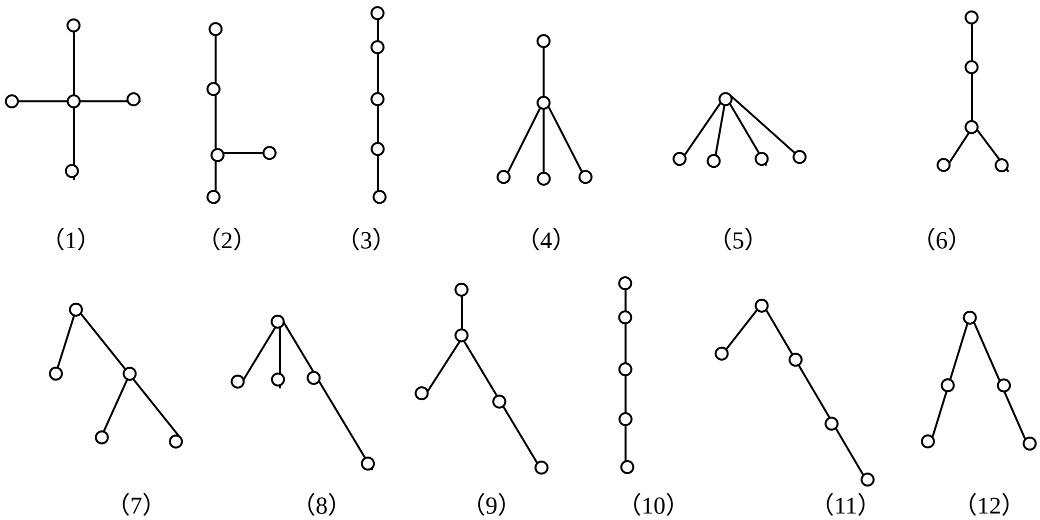


图 7-14

25．设 G 为简单有向图，如何从其邻接矩阵 $A(G)$ 判定它是否是根树，若是根树，如何定出它的树根和树叶。

解：

因为有向图邻接矩阵中每列中非零元素对应该结点的入度，每行中非零元素对应该结点的出度。若图 G 为根树，$A(G)$ 中主对角线上元素均为零且有一列元素全为零，其他各列中均恰有一个 1。

若一个邻接矩阵对应的有向图是根树，那么，全 0 列对应有的结点为树根，全 0 行对应的结点为树叶。

26．根树中最长路径的端点都是树叶吗？为什么？

解：

根树中最长路径的端点，一个是树根，另一个是树叶，因为根树的高等于最长路径的长度，应从树根开始。

27．证明：若 T 是有 n 个结点的完全二元树，则 T 有 $(n+1)/2$ 片树叶。

证：

由 T 为完全二元树，有 $i=t-1$，其中 i 为分支点数，t 为树叶数。

又结点数 $n=i+t$，所以 $t=(n+1)/2$ 为 T 的树叶数。

28．证明在完全二元树中，边的总数 $e=2(t-1)$，其中 t 为树叶数。

证：

设 T 为完全二元树，有 n 个结点，i 为分支点，依定理 11 有 $\quad i=t-1$

又 $\quad n=i+t=2t-1$

由于 T 是树，所以 $\quad e=n-1=2(t-1)$

29．证明一棵完全二元树必有奇数个结点。

证：

方法一：设完全二元树 T 有 n 个结点，m 条边。依定义，T 中每个分支点都关联二条边，所以 m 必为偶数。

又由 T 是树，有 $n=m+1$，故 n 为奇数。

因此，完全二元树必有奇数个结点。

方法二 设完全二元树 T 有 n 个结点，t 片树叶，i 个分支点，则有 $n=i+t$ 及 $i=t-1$，所以　$n=t+i=t+t-1=2t-1$

即　n 为奇数。

30．画出所有不同构的高为 2 的二元树，其中有多少棵正则二元树？有多少棵满二元树？

解：

高为 2 的所有不同构的二元树有 7 棵，如图 7-15 所示。其中有 2 棵正则二元树，如图 7-15 中（5）和（7）所示，有 1 棵满二元树，如图 7-15 中（7）所示。

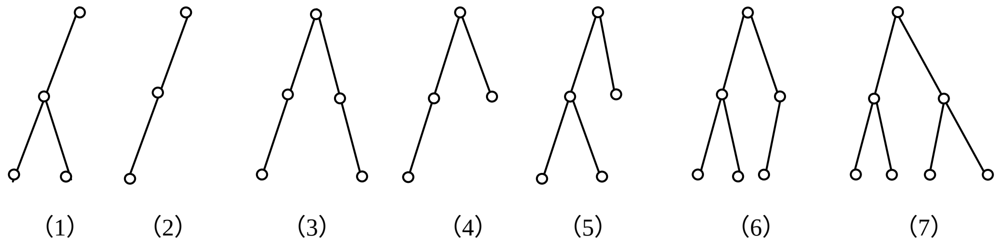


图 7-15

31．画出所有高为 3 的正则二元树。

解：

高为 3 的所有正则二元树有 6 棵，如图 7-16 所示。

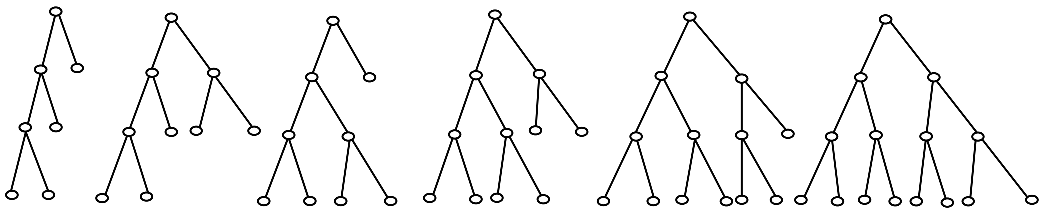


图 7-16

32．设 T 为任意一棵二元正则树，m 为边数，t 为树叶数，试证明 $m=2t-2$。其中 $t\geq 2$。

证：

本题看来很简单，但在证明过程中经常会出现错误，因此在这里给出多种证明方法。

方法一　设 T 中结点数为 n，分支点数为 i。根据二元正则树的定义，知下面等式均成立：

$n = i + t$　　(1)

$m = 2i$　　(2)

$m = n - 1$　　(3)

由式（1），（2），（3）知 $m = 2t - 2$

方法二　在二元正则树中，除树叶外，每个结点的出度为 2。除树根外，每个结点的入度都为 1。由握手定理可知

$$
\begin{aligned}
2m &= \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) + \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) \\
&= 2(n-t) + n - 1 \\
&= 3n - 2t - 1 \\
&= 3(m+1) - 2t - 1 \\
\Rightarrow \quad & m = 2t - 2
\end{aligned}
$$

方法三　对分支点数 i 用归纳法。

（1）当 i=1 时，边数 m =2，树叶数 t =2，显然 $m = 2t - 2$ 成立。

（2）设 i=k（k≥1）时，结论成立，要证明 i=k+1 时，结论也成立。

在 T 中，一定存在两个儿子都是树叶的分支点，设 v_a 为这样的一个分支点，设它的两个儿子为 v_i，v_j。在 T 中删除 v_i，v_j，得树 T'，T' 仍为二元正则树，分支点数 $i' = i - 1 = k + 1 - 1 = k$，由归纳假设在 T' 中边数 m' 与树叶数 t' 有如下关系：

$$m' = 2t' - 2$$

而 $m' = m - 2$，$t' = t - 2 + 1 = t - 1$，将 m', t' 的值代入上式，得

$$
\begin{aligned}
& m - 2 = 2(t-1) - 2 \\
\Rightarrow \quad & m = 2t - 2
\end{aligned}
$$

方法四　对树叶数 t 用归纳法。

请读者自己证。

33．设 T 为高为 h 的 r 元正则树，证明 T 的树叶数 t 满足：$r + (r-1)(h-1) \le t \le r^h$

证：

高为 h 的 r 元正则树 T 中，完全正则树的树叶最多，此时 $t = r^h$。而当高只在 r 片树叶的通路上达到时，树叶数最少，此时 $t = r + (r-1)(h-1)$

一般情况下，一棵高为 h 的 r 元正则数的树叶数处在以上两种情况之间（如图 7-17 所示的是 h=3，r=2 的特殊情况），所以　$r + (r-1)(h-1) \le t \le r^h$

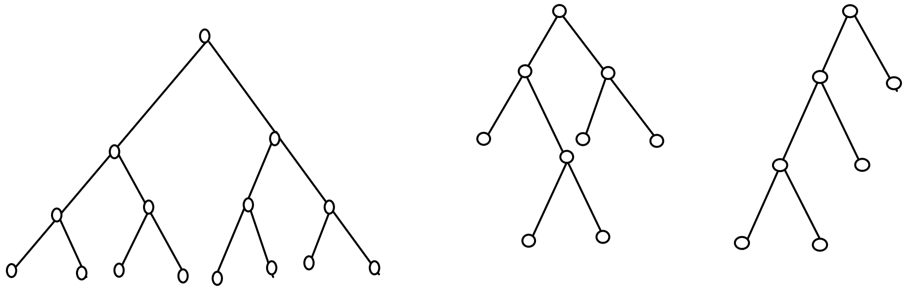

（1）　　（2）　　（3）

图 7-17

34．将图 7-18 所示的有序树表示成二叉树并求出相应的前缀码。

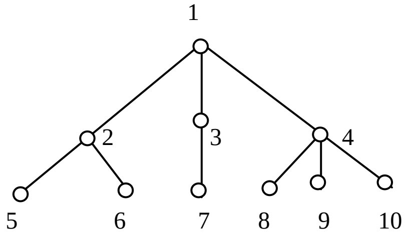


图 7-18

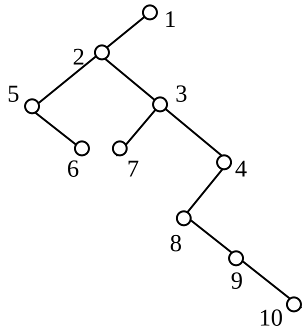


图 7-19

解：

相应的二叉树如图 7-19 所示。

前缀码为{001，010，011011}。

35．设 T 为 r 元正则树，则 r 与分支点数 i，树叶数 t 有关系：　$(r-1)i = t-1$

证：

本题也可用多种方法证明。这里只给出一种证明方法。

设 n 为 T 中结点数，则

$$n = i + t \qquad (1)$$

ri 为总边数，即边数 m 满足

$$ri = m = n-1 \qquad (2)$$

由（1）式和（2）式可知

$$(r-1)i = t-1$$

36．将图 7-20 所示的有序森林表示成二叉树并求出相应的前缀码。

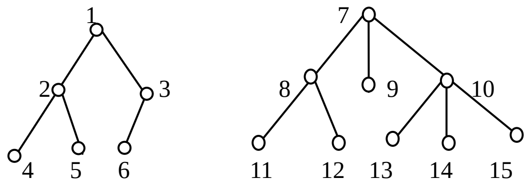


图 7-20

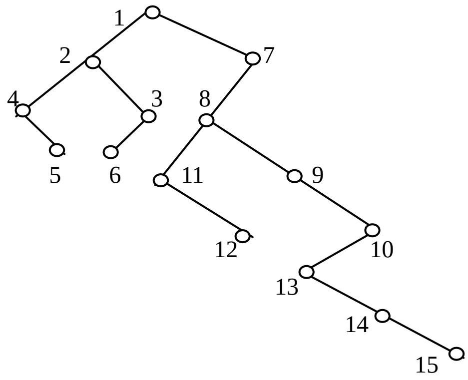


图 7-21

解：

相应的二叉树如图 7-21 所示。

其前缀码为{001,010,1001,1011011}。

37．分别用先根、中根和后根的次序通过如图 7-22 所示的二叉树。

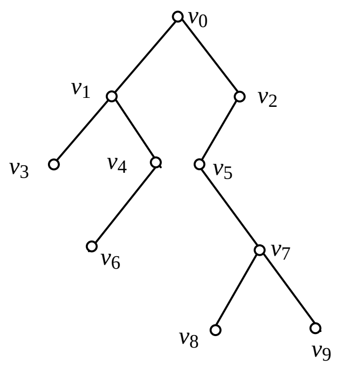


图 7-22

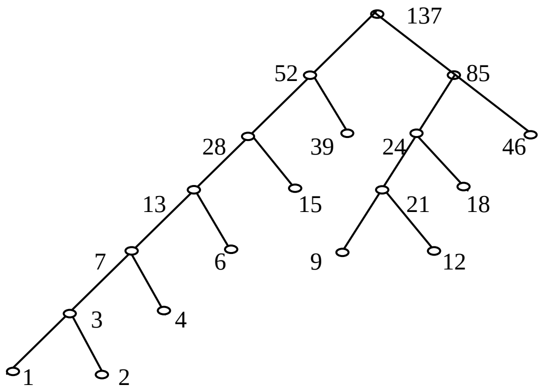


图 7-23

解：

对图 7-22 所示的二叉树，三种遍历方法的结果如下：

前序遍历法 $v_0v_1v_3v_4v_6v_2v_5v_7v_8v_9$

中序遍历法 $v_3v_1v_6v_4v_0v_5v_8v_7v_9v_2$

后序遍历法 $v_3v_6v_4v_1v_8v_9v_7v_5v_2v_0$

38．给定权 1，2，4，6，9，12，15，18，24，46，构造一棵最优二元树。

解：

由给定权按 Huffman 算法构成如下的最优树，如图 7-23 所示。

1	2	4	6	9	12	15	18	24	46
	3	4	6	9	12	15	18	24	46
		6	7	9	12	15	18	24	46
			9	12	13	15	18	24	46
				13	15	18	21	24	46
					18	21	24	28	46
						24	28	39	46
							39	46	52
								52	85
									137

*39．（1）求带权为 2，3，5，7，8 的最优二元树 T 。

（2）求 T 对应的二元前缀码。

解：

（1）第一步，取最小的两个权 2 和 3，它们对应的树叶的父亲带权为 5（见图 7-24（1））。

第二步，在 5，5，7，8 中取两个最小的权 5 和 5，它们对应的结点的父亲带权为 10（见图 7-24（2））。

第三步，在 10，7，8 中取两个最小的权 7 和 8，它们对应的树叶的父亲带权为 15（见图 7-24（3））。

第四步，10，15 所对应的结点的父亲带权为 25（见图 7-24（4））。

图（4）中所示的树为带权 2，3，5，7，8 的最优二元树 T 。

$W(T)$ =2×3+3×3+5×2+7×2+8×2=55

其实，$W(T)$ 等于 T 的各分支点的权之和，即 $W(T)$ =5+10+15+25=55

（2）由 T 形成的二元前缀码为 B ={000,001,01,10,11}

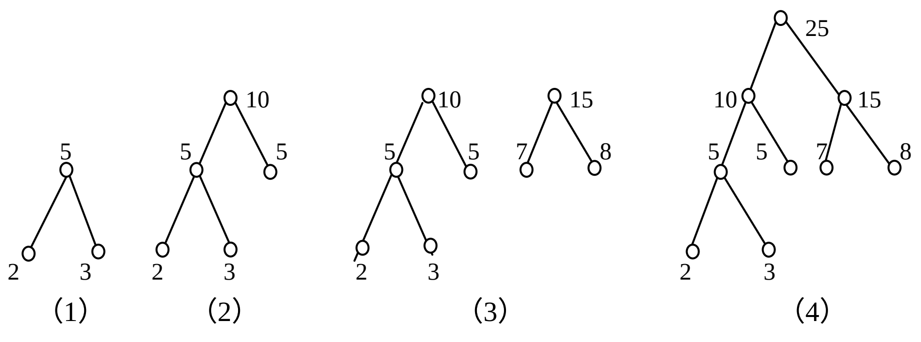


图 7-24

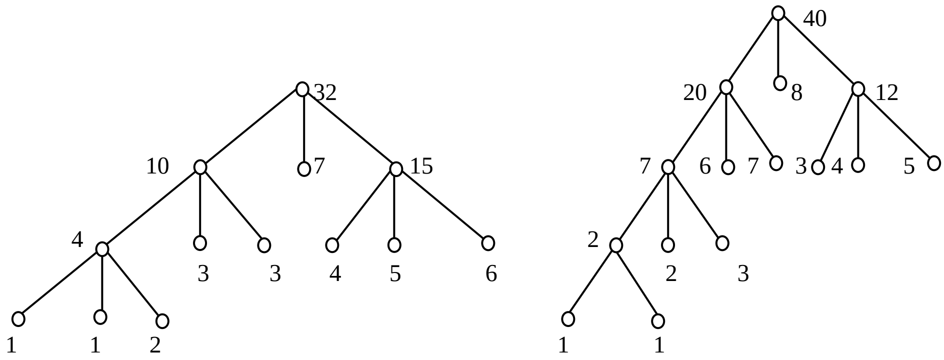
*40．（1）求带权为 1，1，2，3，3，4，5，6，7 的最优三元树；

（2）求带权为 1，1，2，3，3，4，5，6，7，8 的最优三元树。

解：

（1）所求树的树叶数 t=9，元数 r =3。$\frac{t-1}{r-1}=\frac{8}{2}=4$，说明所求三元树为正则三元树。由 Huffman 算法得三元树 T_1，如图 7-25 中（1）所示。$w(T_1)$ =61

（2）$\frac{t-1}{r-1}=\frac{10-1}{3-1}=\frac{9}{2}$,于是 $t-1$ 除以 $r-1$ 的余数为 1，由 Huffman 算法得三元树 T_2 如图 7-25 中（2）所示，$w(T_2)$ =81



（1）　　　　（2）

图 7-25

*41．在下面给出的 3 个符号串集合中，哪些是前缀码？哪些不是前缀码？若是前缀码，构造二叉树，其树叶代表二进制编码。若不是前缀码，则说明理由。

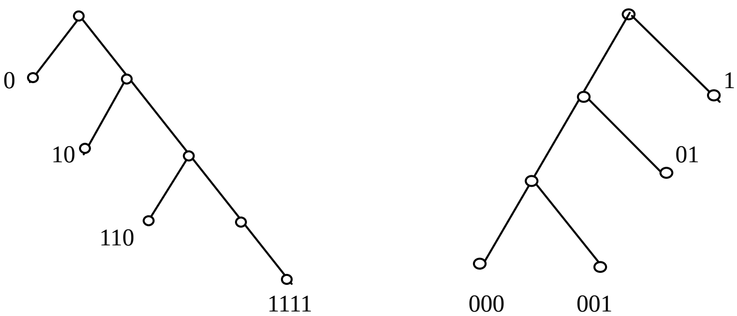
（1） $B_1=\{0,10,110,1111\}$；

（2） $B_2=\{1,01,001,000\}$；

（3） $B_3=\{1,11,101,001,0011\}$。

解：

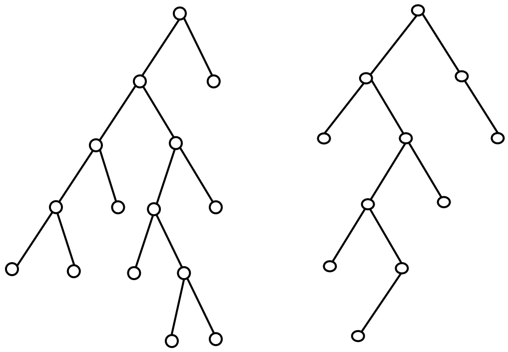
B_1 和 B_2 中的各符号串均互不为前缀，因而 B_1 和 B_2 是前缀码。而 B_3 中，1 既是 11 的前缀，又是 101 的前缀，因而 B_3 不是前缀码。由 B_1 和 B_2 构造的二叉树如图 7-26 中（1）和（2）所示。



（1）　　　　（2）

图 7-26

42．根据图 7-27 中所示的两棵二元树，产生两个前缀码。



（1）　　（2）

图 7-27

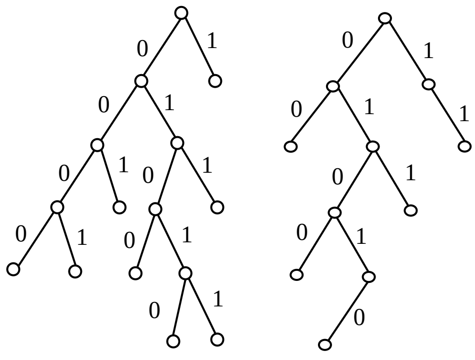
解：

在图 7-27 中，设图（1）所示的树为T_1，T_1是二元正则树。将每个分支点引出的两条边上分别标上 0（左）和 1（右），将树根到每片树叶的通路上所标的数字组成的符号串组成集合B_1，B_1={0000，0001，001，0100，01010，01011，011，1}，则B_1为前缀码。

设图（2）中所示的树为T_2，T_2是二元树，但不是正则树。对有一个儿子的分支点引出的边可随便标上 0 或 1，有两个儿子的分支点标法同T_1，所得前缀码为B_2。

B_2={00，0100，01010，011，11}

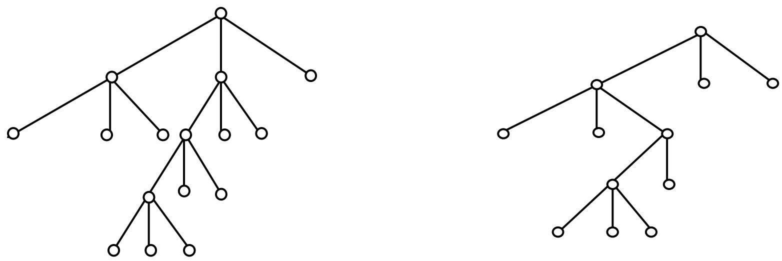
标注上 0 和 1 的T_1和T_2分别如图 7-28 中的（1），（2）所示。



（1）　　（2）

图 7-28

43．根据图 7-29 中给出的两棵三元树T_1，T_2产生三元前缀码（3 个符号用 a,b,c 表示）。



T_1 T_2

图 7-29

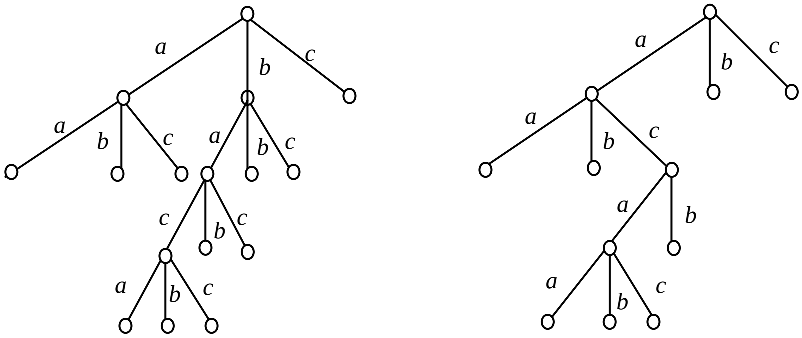
解：

对于T_1，因它是三元正则树，它的每个分支点引出的三条边从左到右，分别标上 a,b,c 得三元前缀码为 $B_1=\{aa,ab,ac,baaa,baab,baac,bab,bac,bb,bc,c\}$。

T_2 不是三元正则树，对于不足三个儿子的分支点引出的边可用 a,b（或 c）标注。所得前缀码为 $B_2=\{aa,ab,acaa,acab,acac,acb,b,c\}$。

标注上 a,b,c 的T_1，T_2 分别如图 7-30 中的（1)、（2）所示。

受本题的启发，可以知道，r 元树能产生 r 元前缀码。



（1） （2）

图 7-30

*44．试用二叉树表示下面的代数式，并写出其相应的前缀码。

$(2\times a)+(3-(4\times b))+(x+(3\times 11))$

解：

相应的二叉树如图 7-31 所示。

前缀码为{000,001,010,0110,0111,10,110,111}

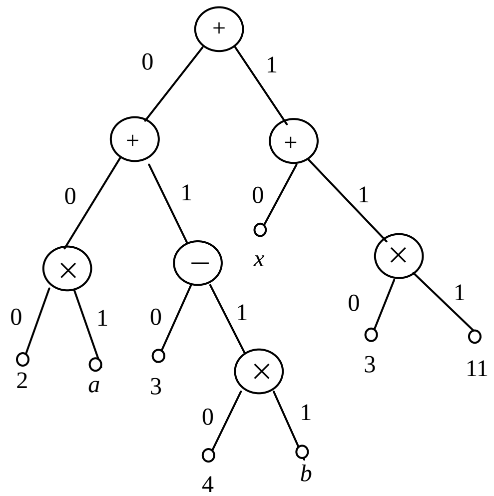


图 7-31

*45．在通信中要传输八进制数字 0，1，2，…，7。这些数字出现的频率为

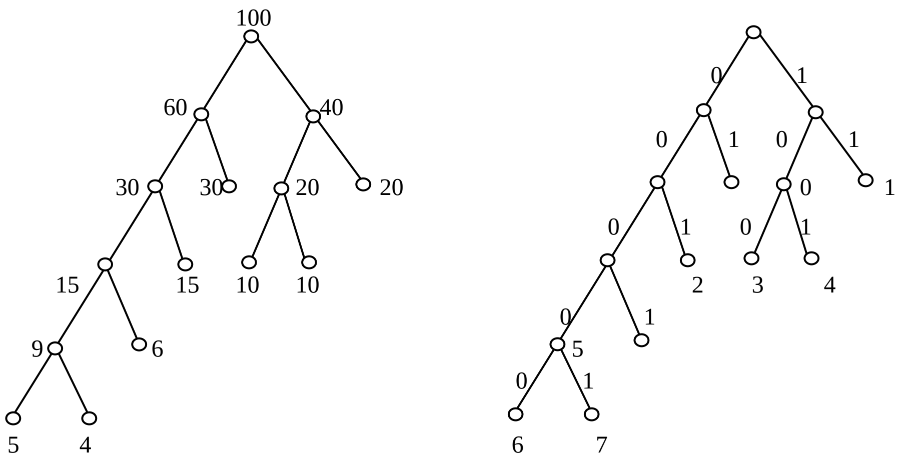
0：30%； 1：20%； 2：15%； 3：10%； 4：10%； 5：6%； 6：5%；7：4%。

编一个最佳前缀码，使通讯中出现的二进制数字尽可能地少。具体要求如下：

（1）画出相应的二元树；

（2）写出每个数字对应的前缀码；

（3）传输按上述比例出现的数字 10000 个时，至少要用多少个二进制数字？



（1）　　　　　　　　（2）

图 7-32

解：

应该用较短的符号串传输出现频率高的数字，因而可用 100 乘各数字出现的频率作为权，求最优二元树，然后用这样的二元树产生前缀码传输上面给定的数字。具体做法如下：用 100 乘各频率得权 w_0=30，w_1=20，w_2=15，w_3=10，w_4=10，w_5=6，

w_6=5，w_7=4。将这些权由小到大排列得到 4，5，6，10，10，15，20，30。

（1）所求最优树如图 7-32 中（1）所示。

（2）用所求的最优树产生二元前缀码（如图 7-32 中（2）所示）。带权为 w_i 的树叶对应的符号串就为传输 i 的符号串。数字 i 对应的符号串为

0：01	1：11
2：001	3：100
4：101	5：0001
6：00000	7：00001

用这样的符号串传输按上述比例出现的数字最少。

（3）$10^4\times0.3\times2+10^4\times0.2\times2+10^4\times0.15\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.06\times41+10^4\times0.05\times5+10^4\times0.04\times5=27400$

所以传输 10000 个按上述比例出现的数字至少要用 27400 个二进制数字。

第 8 章　命 题 逻 辑

数理逻辑是用数学方法研究思维规律和推理过程的科学，而推理的基本要素是命题，因此命题逻辑是数理逻辑最基本的研究内容之一，也是谓词逻辑的基础。由于数理逻辑使用了一套符号，简洁地表达出各种推理的逻辑关系，因此，一般又称之为符号逻辑。数理逻辑和电子计算机的发展有着密切的联系，它为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计、逻辑电路、开关理论等计算机应用和理论研究提供了必要的理论基础。

§8.1　内 容 分 析

§8.1.1　命题与命题变量

在日常生活中，人们不仅使用语句描述一些客观事物和现象，陈述某些历史和现实事件，而且往往还要对陈述的事实加以判断，从而辨其真假。语句可以分为疑问句、祈使句、感叹句与陈述句等，其中只有陈述句能分辨真假，其他类型的语句无所谓真假。在数理逻辑中，我们把每个能分辨真假的陈述句称作为一个命题。陈述句的这种真或假性质称之为真值或值，这就是说真值包含“真”和“假”。因而命题有两个基本特征，一是它必须为陈述句；二是它所陈述的事情要么成立（真），要么不成立（假），不可能同时既成立又不成立，即它的真值是惟一的。

命题可按其真值分为两类。若一个命题是真的，则称其真值为真，用 1 或 T 表示，称该命题为真命题；若一个命题是假的，则称其真值为假，用 0 或 F 表示，称该命题为假命题。命题还可根据其复杂程度分类。只是由一个主语和一个谓语构成的最简单的陈述句，称为简单命题或原子命题或原始命题。简单命题不可能再分解成更简单的命题了，它是基本的，原始的。当然，也有一些命题并不是最基本的，它们还可以分解成若干个简单命题。由若干个简单命题通过联结词复合而成的更为复杂的新命题称为复合命题或分子命题。复合命题仍为陈述句。任意有限个简单或复合命题，还可用若干不同的联结词复合成极为复杂的复合命题。

简单命题和复合命题的真值是固定不变的，故又可称为命题常量或命题常元，简称为命题。而有些陈述句尽管不是命题，但可以将其变成命题，它的真值是不固定的、可变的，这种真值可变化的陈述句称为命题变量或命题变元。命题常元或命题变元用大写英文字母 A,B,Λ ,P,Q,Λ 或 $A_i,B_i,\Lambda ,P_i,Q_i,\Lambda$ 表示。一个简单命题，它的真值不是真就是假，因此，我们在命题逻辑中常常用 1 或 T 表示一个抽象的“真命题”，用 0 或 F 表示一个抽象的“假命题”。命题变元虽然没有确定的真值，但当我们用一个具体的命题常元代入时，它的真值就可确定了。

§8.1.2　命题联结词

日常用语中有很多不同意义的联结词可将较简单的语句联结成复杂的复合语句。命题逻辑中简单命题也可以通过联结词复合成复合命题，因此，复合命题的真值不仅与其中所含的简单命题的真值有关（但与简单命题的含义无关），而且还与联结词的意义有关。数理逻辑中可以定义很多联结词，这里我们只给出几个常用的命题联结词（或称命题运算符或命题运算）。实际上这些联结词已完全够用了。这里要特别指出的是，下面给出的联结词虽然与通常语言中的联结词有相应的含义，但决不可与之等同，它们是通常语言里的联结词的逻辑抽象，必须严格按定义理解。

定义 1　设 P 为命题，复合命题“非 P”称为 P 的否定式或否命题或否定，记作 $\neg P$。符号“$\neg$”称为否定联结词。P 真当且仅当 $\neg P$ 假。

$\neg P$ 的取值也可用表 8-1 定义，这种表称为 $\neg P$ 的真值表（真值表的构造类似于集合的成员表）。表中的 1 和 0 分别表示标记该列的命题取值为真和为假。“$\neg$”相当于普通用语中的“非”、“不”、“无”、“没有”、“并非”等否定词。

定义 2　设 P,Q 均为命题，复合命题“P 且 Q”称为 P 和 Q 的合取式或合取，记作 $P\wedge Q$ 或 $P\times Q$。符号“$\wedge$”称为合取联结词。$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 和 Q 同时为真。

$P\wedge Q$ 的真值表如表 8-2 所示。“$\wedge$”相当于日常用语中的“与”、“且”、“和”、“又”、“并且”、“以及”、“既……又……”、“不仅……而且……”、“虽然……但是……”、“尽管……仍然……”等词语。“$\wedge$”在逻辑电路中表示“与门”，在开关电路中表示“串联”联接方式。

定义 3　设 P,Q 均为命题，复合命题“P 或 Q”称为 P 和 Q 的析取式或析取，记作 $P\vee Q$ 或 $P+Q$。符号“$\vee$”称为析取联结词。$P\vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 同时为假。

表 8-1

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 8-2

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

表 8-3

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 8-4

P	Q	$P\to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$P\vee Q$ 的真值表如表 8-3 所示。符号“$\vee$”与通常用语中的“……或……”、“……或许……”等有类似之处，但也有不同之处。通常用语中的“或者”一词的意义可根据上下文理解成“可兼或”（即“相容或”）或“不可兼或”（即“排斥或”），是一个有二义性的词。“$\vee$”是可兼或，它允许所联结的两个命题同时为真。（而不可兼或则不允许联结的两个命题同时为真，两个命题中有且只有一个命题为真。）“$\vee$”在逻辑电路中表示“或门”，在开关电路中表示“并联”联接方式。

在命题逻辑中有上述三个联结词就足够了，但为了方便起见，我们还可根据需要定义其他联结词，它们在某些场合特别有用。

定义 4 设 P,Q 均为命题，复合命题“若 P，则 Q”称为 P 和 Q 的蕴含式或蕴涵式或条件式，或称 P 蕴含 Q，记作 $P \to Q$。其中 P,Q 分别称为蕴含式的前件（前提）和后件（结论）。符号“$\to$”称为蕴含联结词。$P \to Q$ 为假当且仅当 P 真和 Q 假同时成立。

$P \to Q$ 的真值表如表 8-4 所示。“$\to$”是日常用语中“如果……那么……”、“只要……就……”、“必须……以便……”、“仅当……则……”等词汇的逻辑抽象。

定义 5 设 P,Q 均为命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 和 Q 的等价式，记作 $P \leftrightarrow Q$。符号“$\leftrightarrow$”称为等价联结词。$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P，Q 的真值相同。

$P \leftrightarrow Q$ 的真值表如表 8-5 所示。“$\leftrightarrow$”是日常用语中的“当且仅当”、“充分必要”、“相当于”、“……和……一样”、“等价”等词汇的逻辑抽象。

定义 6 设 P,Q 均为命题，复合命题“P 或 Q 恰有一个成立”称为 P 和 Q 的异或式，记作 $P \overline{\vee} Q$ 或 $P \oplus Q$。符号“$\overline{\vee}$”称为异或联结词。$P \overline{\vee} Q$ 真当且仅当 P 和 Q 恰有一个为真。

$P \overline{\vee} Q$ 的真值表如表 8-6 所示。在日常语言中，“$\overline{\vee}$”即表示“不可兼或”。

定义 7 设 P, Q 均为命题，复合命题“P 不成立或 Q 不成立”称为 P 和 Q 的与非式，记作 $P \uparrow Q$。符号“$\uparrow$”称为与非联结词。$P \uparrow Q$ 假当且仅当 P 和 Q 同时为真。

$P \uparrow Q$ 的真值表如表 8-7 所示。“$\uparrow$”在逻辑电路中相当于与非门。

定义 8 设 P,Q 均为命题，复合命题“P 不成立且 Q 不成立”称为 P 和 Q 的或非式，记作 $P \downarrow Q$。符号“$\downarrow$”称为或非联结词。$P \downarrow Q$ 真当且仅当 P 和 Q 同时为假。

$P \downarrow Q$ 的真值表如表 8-8 所示。“$\downarrow$”在逻辑电路中相当于或非门。

表 8-5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

表 8-6

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 8-7

P	Q	$P \uparrow Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

表 8-8

P	Q	$P \downarrow Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

在日常语言中，通常是在意义上具有某种关系的两个命题之间使用联结词，即整个语句总是有意义的。但在逻辑学中，无论被联结的命题之间有无内在联系，都可以用联结词联结成为复合命题。$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \to Q$，$P \leftrightarrow Q$，$P \overline{\vee} Q$，$P \uparrow Q$，$P \downarrow Q$ 的真值只与 P 和 Q 的真值有关，而与其内容无关。我们对复合命题中的 P 和 Q 的具体内容不大关心，而只对它们的抽象真值关系感兴趣。对联结词我们也只承认它由真值表定义，而并不理会它的实际含义。

在研究推理时，若把命题分析到简单命题为止，则这种建立在以简单命题为基本推理单位的逻辑体系，称为命题逻辑或命题演算。

§8.1.3　命题公式

$\neg P$，$P\wedge Q$，$P\vee Q$，$P\to Q$，$P\leftrightarrow Q$，$P\overline{\vee}Q$，$P\uparrow Q$，$P\downarrow Q$ 既可看作是具体命题的符号化表达式，也可把其中的 P，Q 看作是命题变元，联结词看成是运算符，从而成为真值不惟一确定的抽象命题公式。在它们的基础上还可以构造出更复杂的命题公式。由命题变元、联结词和圆括号组成的字符串可构成命题公式。但并不是由这三类符号组成的每一个符号串都可成为命题公式。下面给出命题公式（即合式公式或公式）的递归定义。

定义 9　命题公式是满足下列条件的公式：

（1）真值 0，1 是公式；
（2）命题常元、命题变元是公式，即 $P,Q,R,\Lambda\ ,P_i,Q_i,R_i,\Lambda$ 是公式；
（3）若 A 是公式，则 $\neg A$ 也是公式；
（4）若 A 和 B 是公式，则（$A\wedge B$）、（$A\vee B$）、（$A\to B$）、（$A\leftrightarrow B$）也是公式；
（5）只有有限次地应用（1）~（4）构成的符号串才是命题公式。

为简单起见，我们常省去公式最外层的圆括号。若规定联结词结合的强弱次序（即运算的优先级）为 $\neg;\wedge,\vee,\overline{\vee},\uparrow,\downarrow;\to;\leftrightarrow$，则可省掉公式中的某些圆括号。

显然，若把公式中的命题变元代以简单命题或复合命题，则该公式便是一个复合命题。因此，对复合命题的研究可转化为对公式的研究。命题公式不是命题，只有当公式中的每一个命题变元都被赋以确定的真值时，公式的真值才能被确定，从而成为一个命题。

定义 10　设 A 为含有命题变元 $P_1,P_2,\Lambda\ ,P_n$ 的公式，给 $P_1,P_2,\Lambda\ ,P_n$ 指定一组真值，这称为对 A 的一个赋值或真值指派。

定义 11　公式 A 在其一切可能的赋值下取得的值列成表，该表称为 A 的真值表。

定义 12　若命题公式 A 在任何一个赋值下的值都真，则 A 称为重言式或永真式，常用“1”表示；若 A 在任何一个赋值下的值都假，则 A 称为矛盾式或永假式，常用“0”表示；若 A 至少有一个赋值使其值为真，则 A 称为可满足式。

从公式真值的角度看，公式可分为重言式、矛盾式、可满足式三类，其中重言式最重要，在推理时所引用的公理和定理都是重言式。重言式和矛盾式的性质截然相反，但它们之间可以互相转化，即重言式的否定是矛盾式；矛盾式的否定是重言式。因此只研究其中的一个即可，一般均着重研究重言式。由于一个公式的真值表刻划了它的逻辑含义，因此，可用真值表法判定公式的类型。但当公式所含不同的命题变元较多或较为复杂时，真值表法很麻烦，计算真值表所花时间的程度甚至可能连现代最快速的计算机也无法计算。真值表法也是一个乏味的方法，它对于培养逻辑思维与推理能力帮助甚少。所以我们一般采用等值演算法判定公式的类型。

§8.1.4 命题公式的等值式

命题公式之间常有一些关系，比较基本的两种关系是等值关系和蕴含关系。研究命题公式的等值和蕴含是命题逻辑的重要内容之一。

定义 13 设 A 和 B 是命题公式，若 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 和 B 等值或等价或相等或逻辑等价，记作 $A \Leftrightarrow B$， $A \Leftrightarrow B$ 称为等值式或逻辑等价式。

注意，“ $\Leftrightarrow$ ”不是联结词而是公式间的关系符号， $A \Leftrightarrow B$ 不表示一个公式。而“ $\leftrightarrow$ ”是联结词， $A \leftrightarrow B$ 表示公式。

显然，等值关系是等价关系。n 个命题变元可以构成无数不同形式的命题公式，其中大多数的真值都相同，即等值，不等值的公式只有 2^{n^2} 个。我们可先用真值表法求得一些所含命题变元不多的简单基本等值式，然后利用基本等值式推导出众多的较为复杂的等值式，这种方法称为推导法或等值演算法。表 8-9 给出几组重要的等值式。

表 8-9

交换律 E_1	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$　　$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$ $A \overline{\vee} B \Leftrightarrow B \overline{\vee} A$　　$A \uparrow B \Leftrightarrow B \uparrow A$　　$A \downarrow B \Leftrightarrow B \downarrow A$
结合律 E_2	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$　　$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \Leftrightarrow A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$　　$(A \to B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$ $(A \overline{\vee} B) \overline{\vee} C \Leftrightarrow A \overline{\vee} (B \overline{\vee} C)$
分配律 E_3	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　　$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \wedge (B \overline{\vee} C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \overline{\vee} (A \wedge C)$
同一律 E_4	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$　　$A \vee 0 \Leftrightarrow A$　　$1 \to A \Leftrightarrow A$　　$A \leftrightarrow 1 \Leftrightarrow A$　　$A \overline{\vee} 0 \Leftrightarrow A$
互否律 E_5	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 0$　　$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$　　$\neg A \to A \Leftrightarrow A$ $A \leftrightarrow \neg A \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 0$　　$A \overline{\vee} \neg A \Leftrightarrow 1$
双重否定律 E_6	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
幂律 E_7	$A \wedge A \Leftrightarrow A$　　$A \vee A \Leftrightarrow A$　　$A \to A \Leftrightarrow 1$　　$A \leftrightarrow A \Leftrightarrow 1$ $A \overline{\vee} A \Leftrightarrow 0$　　$A \uparrow A \Leftrightarrow \neg A$　　$A \downarrow A \Leftrightarrow \neg A$
常元律 E_8	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$　　$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$　　$0 \to A \Leftrightarrow 1$　　$A \to 1 \Leftrightarrow 1$ $A \to 0 \Leftrightarrow \neg A$　　$A \leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \neg A$　　$A \overline{\vee} 1 \Leftrightarrow \neg A$　　$A \uparrow 1 \Leftrightarrow \neg A$ $A \uparrow 0 \Leftrightarrow 1$　　$A \downarrow 1 \Leftrightarrow 0$　　$A \downarrow 0 \Leftrightarrow \neg A$
吸收律 E_9	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$　　$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
德·摩根律 E_{10}	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$　　$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \uparrow B) \Leftrightarrow \neg A \downarrow \neg B$　　$\neg(A \downarrow B) \Leftrightarrow \neg A \uparrow \neg B$
联结词化归律 E_{11}	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$ $\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $A \overline{\vee} B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$　　$A \uparrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$　　$A \downarrow B \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$
其他 E_{12}	$A \to (B \to C) \Leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \to C$ $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$　　$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$	$\neg A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow \neg B$
$\neg(A \overline{\vee} B) \Leftrightarrow \neg A \overline{\vee} B \Leftrightarrow A \overline{\vee} \neg B$	

表 8-9 中的一部分等值式与集合运算的基本定律形式相似，可对照记忆。表 8-9 的各式中，A,B,C 是任意的命题公式，每个等值式实际上代表了无数多个命题公式的等值式。

定义 14　仅含联结词$\neg,\wedge,\vee$的命题公式称为限定性公式。设 A 为限定性公式，若在 A 中用$\vee$代换$\wedge$，用$\wedge$代换$\vee$，用 1 代换 0，用 0 代换 1，所得的新公式记作 A^*或 A^D，则称 A 和 A^*互为对偶式。

定理 1　设 A 和 A^*是对偶式，P_1,P_2,Λ,P_n是出现于 A 和 A^*中的所有命题变元，则$\neg A(P_1,P_2,\Lambda,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\Lambda,\neg P_n)$。

定理 2　设 A 和 B 为限定性公式，若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

定理 2 说明了为什么表 8-9 中限定性公式的等值式常是成对出现，它们之中的每一个都有与其相对应的对偶式。

定义 15　设 A 是一个命题公式，P_1,P_2,Λ,P_n是 A 中的所有命题变元。若

（1）用某些公式代换 A 中的某些命题变元；

（2）若用公式 Q_i 代换 P_i，则必须用 Q_i 代换 A 中所有的 P_i，则由此而得的新公式 B，称为 A 的一个代入或代换。

定理 3（代入规则）　重言式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是重言式。

定义 16　设 C 是命题公式 A 的一部分（即 C 是 A 中连续的几个符号），若 C 也是一个公式，则称 C 是 A 的子公式。

定理 4（置换规则）　设 C 是公式 A 的子公式，$C \Leftrightarrow D$。若用 D 置换（一个或多个或全部）C，得到公式 B，则 $A \Leftrightarrow B$。

有了置换规则和代入规则，我们便可以利用表 8-9 中的等值式推导出其他一些更复杂的公式的等值式。

公式的等值演算在实际上还有很多用处，它可以化简公式，简化复杂的逻辑电路，化简一个程序，它还可以简化混乱的逻辑思维，使它们表达清晰、条理清楚。

§8.1.5　命题公式的逻辑蕴含式

定义 17　给定命题公式 $A \to B$，命题公式 $B \to A$ 称为 $A \to B$ 的逆换式；$\neg A \to \neg B$ 称为 $A \to B$ 的反换式；$\neg B \to \neg A$ 称为 $A \to B$ 的逆反式。

由 E_{12} 知，$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$，即 $A \to B$ 与 $\neg B \to \neg A$ 等值。但 $A \to B$ 与 $B \to A$ 和 $\neg A \to \neg B$ 不等值。

定义 18 设 A 和 B 是命题公式，若 $A \to B$ 是重言式，即 $A \to B \Leftrightarrow 1$，则称 $A \to B$ 为重言蕴含式，称 A 蕴含 B 或 A 逻辑蕴含 B，记作 $A \Rightarrow B$， $A \Rightarrow B$ 称为逻辑蕴含式。

注意，“$\Rightarrow$”和“$\to$”是两个完全不同的符号，它们的区别与“$\Leftrightarrow$”和“$\leftrightarrow$”的区别完全类似。蕴含关系是偏序关系。

定理 5 设 A 和 B 是命题公式， $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$。

定理 6 设 A,B,C 是命题公式，若 $A \Rightarrow B$， $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$。

定理 7 设 A,B,C 是命题公式，若 $A \Rightarrow B$， $A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$。

定理 8 设 A 和 B 是命题公式，若 $A \Rightarrow B$，且 A 是重言式，则 B 必为重言式。

给定两个命题公式 A 和 B，判定 $A \Rightarrow B$ 是否成立的两种方法：

（1）假定前件 A 为真。若 B 为真，则 $A \Rightarrow B$ 成立，否则 $A \Rightarrow B$ 不成立。
（2）假定后件 B 为假。若 A 为假，则 $A \Rightarrow B$ 成立，否则 $A \Rightarrow B$ 不成立。

$A \Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 之间可双向推导，即由 A 可推出 B，反之由 B 可推出 A；而 $A \Rightarrow B$ 表示 A 和 B 之间只能单向推导，即由 A 可推出 B（或说当 A 真时 B 也一定为真）。表 8-10 列出一些较重要的逻辑蕴含式。

表 8-10

$A \wedge B \Rightarrow A$	$A \wedge B \Rightarrow B$
$A \Rightarrow A \vee B$	$B \Rightarrow A \vee B$
$\neg A \Rightarrow A \to B$	$B \Rightarrow A \to B$
$\neg(A \to B) \Rightarrow A$	$\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$
$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$	$\neg B \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$
$A \wedge (A \to B) \Rightarrow B$	$\neg B \wedge (A \to B) \Rightarrow \neg A$
$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$	
$(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge D)$	
$(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow C$	

由定理 5 可知，表 8-9 中给出的等值式均可看成逻辑蕴含式，且一个等值式对应两个逻辑蕴含式。表 8-10 所列逻辑蕴含式中的 A,B,C,D 是任意的命题公式，我们实质上给出了无穷多个逻辑蕴含式，我们还可以表从 8-10 所列逻辑蕴含式出发证明许多逻辑蕴含式。

§8.1.6 全功能联结词集合

由表 8-9 给出的基本等值式可以发现，前面介绍的联结词在表示逻辑关系时并非都是不可缺少的，其中有些联结词的功能可由其他联结词代替。

定义 19 设 D 为联结词集合，若 D 中一个联结词可以由 D 中的其他联结词表示，则此联结词称为冗余联结词，否则，称为独立联结词。

定义 20　设 D 为联结词集合，若任何命题公式总可以用含有 D 中的联结词的等值式表示，且 D 中不含冗余联结词，则称 D 为全功能联结词集合。

定理 9　$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$，$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$都是全功能联结词集合。

应该说明，寻求最少联结词的全功能联结词集合，主要不是个理论性问题，而是为了满足工程实践中的需要。但是，一般情况下为了不至于因联结词的数目减少而使得公式的形式变得复杂，我们仍常采用“$\neg$”、“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\rightarrow$”、“$\leftrightarrow$”这 5 个联结词。

§8.1.7　范式

对一个命题公式，除了用真值表法外，怎样判定其类型？已知一公式为真和为假的赋值，能否写出该公式的表达式？如何找出命题公式的标准形式，使得我们仅根据这种标准形式就能判断两公式是否等值？这些都可由范式加以解决，范式的研究对命题逻辑的发展起了极重大的作用。

定义 21　命题变元或命题变元的否定利用“$\vee$”构成的析取式称为简单析取式或质析取式；命题变元或命题变元的否定利用“$\wedge$”构成的合取式称为简单合取式或质合取式。

定理 10　（1）一个简单合取式是矛盾式当且仅它同时包含某个命题变元及其否定。
（2）一个简单析取式为重言式当且仅当它同时包含某个命题变元及其否定。

定义 22　简单合取式的析取称为析取范式；简单析取式的合取称为合取范式。

定理 11　（1）一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
（2）一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

定理 12　任何一个命题公式均可表示成析取范式与合取范式。

设 A 是任一命题公式，求 A 的范式可按下面步骤进行：

（1）利用 E_{11} 将$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$\overline{\vee}$、$\uparrow$、$\downarrow$消除（如果有的话），使 A 中只含$\neg$、$\wedge$、$\vee$；
（2）利用 E_{10} 将 A 中的$\neg$（如果有的话）全都移至命题变元前；
（3）利用 E_6 使 A 中所有命题变元前至多含有一个$\neg$（如果有的话）；
（4）利用 E_3 求得 A 的析取范式和合取范式。

范式为命题公式提供了一种标准形式，但这种标准形式有一个缺点，即它的形式不惟一。根据范式的异同来判定公式等值问题还有困难和不便，因此，我们给出更为标准的范式结构，使每一命题公式仅有惟一的这种范式与之等值。

定义 23　在具有 n 个命题变元 $P_1,P_2,\Lambda\ ,P_n(n\geq 1)$ 的简单合取式中，每个 $P_i(1\leq i\leq n)$ 和 $\neg P_i$ 如果恰好有一个出现一次，而且正好出现在左起第 i 个变元的位置上，则该简单合取式称为极小项或最小项。

n 个命题变元可以构成 2^n 个不同的极小项，每个极小项只存在一组赋值使其为真。任何两个不同的极小项不等值。表 8-11 是有 2 个命题变元 P,Q 的极小项真值表，其中 m_i 是第

i 个极小项的简写，从表中可以看出，第 i 个极小项 m_i 的下标转换成两位二进制数后，正好与使得 m_i 为真的赋值（看成一个二进制数）相同。于是每个 m_i 与使其为真的赋值之间建立了一一对应的关系。

表 8-11

P	Q	$\neg P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$P\wedge Q$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1
		m_0	m_1	m_2	m_3

定义 24 由极小项构成的析取范式称为主析取范式或特异析取范式。

定理 13 任何一个不是永假的命题公式都存在惟一一个与之等值的主析取范式。

由于主析取范式的真值完全取决于其所含的极小项，因此，我们不仅可以通过比较极小项的异同来判断两公式是否等值，还可根据极小项的个数判断一个公式的类型。若含有 n 个命题变元的公式 A 的主析取范式有 2^n 个极小项，则 A 是重言式；若不含任何极小项（此时令主析取范式为 0），则 A 是矛盾式；若所含极小项的个数在 1 到 2^n 之间，则 A 是可满足式。

可以用等值演算法求主析取范式，不过在求公式的主析取范式时，除了使用求范式时的四个步骤（1）~（4）以外，还要作以下三项置换：

（5）利用 E_4 消去矛盾的简单合取式；

（6）利用 E_7 消去相同的简单合取式，消去简单合取式中相同的合取项；

（7）利用 E_4、E_3 将不包含某一命题变元的简单合取式置换为包含有这一命题变元的简单合取式。

当我们已知一公式的真值表时，我们还可直接由真值表构造极小项，从而写出相应的主析取范式。其步骤如下：

（1）将真值表中使公式为真的每一组赋值都构造成一个极小项。当某变元在相应赋值中取 1 时，该变元出现在极小项相应的位置上，否则该变元的否定出现在相应的位置上；

（2）最后按其赋值对应的二进制数从小到大的顺序把（1）中构造的极小项用“$\vee$”联结起来，就得到了主析取范式。

定义 25 在具有 n 个命题变元 $P_1,P_2,\Lambda,P_n(n\geq 1)$ 的简单析取式中，每个 $P_i(1\leq i\leq n)$ 和 $\neg P_i$ 如果恰好有一个出现一次，而且正好出现在左起第 i 个变元的位置上，则该简单析取式称为极大项或最大项。

同极小项类似，n 个命题变元可以构成 2^n 个不同的极大项，第 i 个极大项记为 M_i，对

于每个 M_i 只有一组赋值使其为假，且下标 i 的二进制数与这个赋值正好对应相同。表 8-12 给出了有两个变元 P,Q 的极大项真值表，从中可以看出这种一一对应的关系。

表 8-12

P	Q	$P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0
		M_0	M_1	M_2	M_3

定义 26　由极大项构成的合取范式称为主合取范式或特异合取范式。

定理 14　任何一个不是永真的命题公式都存在惟一一个与之等值的主合取范式。

除了用等值演算法求主合取范式外，我们也可利用公式的真值表求主合取范式。具体求法是：先对真值表中使公式为假的每一组赋值构造一个相应的极大项，若某一变元在赋值中取 0，则让变元本身出现在极大项中，否则让该变元的否定式出现在极大项中，然后按相应赋值的二进制数从小到大的顺序把构造好的极大项用“$\wedge$”依次联结起来即可。

顺便指出，当我们知道了公式的主析取范式和主合取范式之一时，另一个其实不需再求而直接就可写出来。具体求法是：（1）找出主范式中没有出现的极大（小）项；（2）将找出的极大（小）项中的变元换成相应的否定式，而变元的否定式换成相应的变元，并将析（合）取换成合（析）取，求得相应的极小（大）项；（3）最后用析（合）取词将它们联结成主析（合）取范式。

§8.1.8　命题演算的推理理论

数理逻辑的主要任务是提供一套推理规则。按照这种公认的推理规则，从给定的前提集合出发，推导出一个结论来。这样的推导过程，通常称为推理或演绎或形式证明。

推理是由已知的命题得到新命题的思维过程，任何一个推理都由前提和结论两部分组成，前提就是推理所根据的已知的命题，结论则是从前提通过推理而得到的新命题。

定义 27　设 A,B 是命题公式，如果 $A\Rightarrow B$，即如果命题公式 $A\to B$ 为重言式，则称 B 是前提 A 的结论或从 A 推出结论 B。一般地，设 H_1,H_2,Λ,H_n 和 C 是一些命题公式，如果 $H_1\wedge H_2\Lambda\wedge H_n\Rightarrow C$，则称从前提 H_1,H_2,Λ,H_n 推出结论 C，有时可记为 $H_1,H_2,\Lambda,H_n\Rightarrow C$ 或 $H_1,H_2,\Lambda,H_n\vdash C$，并称$\{H_1,H_2,\Lambda,H_n\}$为 C 的前提集合。

一组前提是否可以推出某个结论，可以按照定义进行判断。判断 $H_1\wedge H_2\Lambda\wedge H_n\to C$ 是否为重言式，我们可以用真值表法，也可以利用等值演算法。但当前提和结论都是比较复杂的命题公式或者包含的命题变元很多的时候，直接用定义进行推导将是很困难的，因此需要寻求更有效的推理方法。

定义 28 一个描述推进过程的命题序列，其中每个命题或者是已知的，或者是由某些前提所推得的结论，序列中最后一个命题就是所要求的结论，这样的命题序列称为形式证明。

要想进行正确的推理，就必须构造一个逻辑结构严谨的形式证明，这需要使用一些推理规则。下面几个规则是人们在推理过程中常用到的推理规则：

（1）前提引入规则 P：在证明的任何步骤上都可以引用前提。
（2）结论引用规则 T：在证明的任何步骤上得到的结论都可以在其后的证明中引用。
（3）置换规则：在证明的任何步骤上，公式的子公式都可以用与之等值的公式置换。
（4）代入规则：在证明的任何步骤上，重言式中的任一命题变元都可以用一命题公式代入，得到的仍是重言式。
（5）蕴含证明规则 CP：若能够从 A 和前提集合 H 中推导出 B，则能够从 H 中推导出 $A\to B$。

表 8-9 中列出的等值式都是在推理过程中经常使用的一些等值式。表 8-13 列出了推理过程中经常使用的逻辑蕴含式。

表 8-13

I_1	$A\wedge B\Rightarrow A$	（简化式）
I_2	$A\wedge B\Rightarrow B$	
I_3	$A\Rightarrow A\vee B$	（附加式）
I_4	$B\Rightarrow A\vee B$	
I_5	$\neg A\wedge A\to B$	
I_6	$B\Rightarrow A\to B$	
I_7	$\neg(A\to B)\Rightarrow A$	
I_8	$\neg(A\to B)\Rightarrow \neg B$	
I_9	$A,B\Rightarrow A\wedge B$	（合取引入）
I_{10}	$\neg A,(A\vee B)\Rightarrow B$	（析取三段论）
I_{11}	$A,A\to B\Rightarrow B$	（假言推论或分离规则）
I_{12}	$\neg B,(A\to B)\Rightarrow\neg A$	（拒取式）
I_{13}	$A\to B,B\to C\Rightarrow A\to C$	（假言三段论）
I_{14}	$A\to B,C\to D\Rightarrow A\wedge C\to B\wedge D$	
I_{15}	$A\vee B,A\to C,B\to C\Rightarrow C$	（二段推论或二难推论）
I_{16}	$P\to Q\Rightarrow (P\vee R)\to(Q\vee R)$	
I_{17}	$P\to Q\Rightarrow (P\wedge R)\to(Q\wedge R)$	

如果证明过程中的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明称作是有效的。通过有效的证明而得到的结论，称作是有效的结论。因此，一个证明是否有效与前提的真假没有关系，一个结论是否有效与它自身的真假也没有关系。在数理逻辑中，

主要关心的是如何构造一个有效的证明和得到有效的结论。

在形式证明中，为了得到一组给定前提的有效结论，一般采用两类基本方法。

（1）直接证明法：由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的蕴含式和等值式推导出有效结论的方法称为直接证法。

（2）间接证明法：间接证明法也就是大家熟悉的反证法，把结论的否定当作附加前提与给定前提一起推证，若能推导出矛盾，则说明结论是有效的。

定义 29　如果对于出现在公式 H_1, H_2, Λ, H_n 中的命题变元的任何一组真值指派，公式 H_1, H_2, Λ, H_n 中至少有一个为假，即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \Lambda \wedge H_n$ 是矛盾式，则称公式 H_1, H_2, Λ, H_n 是不相容的。否则，称公式 H_1, H_2, Λ, H_n 是相容的。

当且仅当存在着一个命题 R，使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \Lambda \wedge H_n \Rightarrow R \wedge \neg R$ 时，H_1, H_2, Λ, H_n 是不相容的，这里 R 是任一公式。

为了证明结论 C 可以从前提 H_1, H_2, Λ, H_n 推出，我们把 $\neg C$ 添加到这组前提中去。如果有某个公式 R 使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \Lambda \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$，则这组新的前提是不相容的。于是，当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \Lambda \wedge H_n$ 为真时，$\neg C$ 必为假。也就是当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \Lambda \wedge H_n$ 为真时，C 必为真。于是，C 可由前提 H_1, H_2, Λ, H_n 推出。

§8.2　重点及难点解析

§8.2.1　基本要求

1. 掌握命题、命题变元、联结词、复合命题等概念，能够将命题符号化。
2. 掌握命题公式、重言式、矛盾式、可满足式、公式真值表等概念，能够利用公式的真值表判定较简单的公式类型。
3. 掌握命题公式的等值式、对偶式，命题公式的代入和置换等概念，能够利用基本等值式、代入规则和置换规则进行等值演算。
4. 掌握命题公式的逻辑蕴含式、逆换式、反换式、逆反式等概念，对于较简单的命题公式 A 和 B，能够判定 $A \Rightarrow B$ 是否成立。能够用基本逻辑蕴含式推证更复杂的逻辑蕴含式。
5. 掌握全功能联结词集合的概念，能够判别一个联结词集合是否为全功能联结词集合。会求最小联结词集合。
6. 掌握范式、极小（大）项、主范式的概念和性质，掌握求各种范式的方法，能够用等值演算法和真值表法求命题公式的主范式。熟悉一个命题公式的主合取范式与主析取范式的关系——如何根据一种主范式立刻写出另一种主范式。
7. 掌握形式证明、前提引入规则、结论引用规则、置换规则、代入规则、蕴含证明规则等概念，能够根据推理规则以及一些基本等值式和逻辑蕴含式，利用直接法和间接法作有效推理，并最终得到一个有效结论。

§8.2.2 疑难点解析

1．并非一切陈述句所陈述的内容都能确定真假，因而不是所有陈述句都是命题。命题必须是具有唯一真值的陈述句，但是并不一定要知道命题的真值。例如，“太阳系外有宇宙人”是一个命题，虽然目前人们还无法判断其真假，但客观上其真值是唯一存在的。

2．联结词可以联结两个没有内在联系的命题。

3．要知道可兼或与不可兼或的区别。

4．在等值演算过程中，应首先把各种联结词化为只用五种基本联结词“$\neg$”、“$\wedge$”、“$\vee$”、“$\rightarrow$”、“$\leftrightarrow$”表达的表达式，以便于演算。

5．命题变元不是命题，而是一个可以代表任何命题的符号。命题公式不是复合命题，而是一个复合命题结构。当公式中的每一个命题变元都取定一个命题（1 或 0）为值时，公式变成一个复合命题。

6．符号$\Leftrightarrow$和$\Rightarrow$都不是逻辑联结词。$A \Leftrightarrow B$表示$A \leftrightarrow B$是永真式。$A \Rightarrow B$表示$A \rightarrow B$是永真式。

7．注意区别代入规则和置换规则的意义、用法。利用代入规则可以把任意一个公式变成等值的另一公式。置换规则只能把永真式变成永真式；非永真式经使用置换规则后一般得不到等值的公式。所以置换规则通常用在把一个等值公式的两边同时变形而得到一个新的等值公式。因此，表 8-9 中全部等值式中的大写字母都可以理解为任意的命题公式，而不必限制为命题变元。

8．命题公式进行代换时，若对多个变元进行代换，则代换必须同时进行。例如，先用$P \vee Q$代换$A = P \rightarrow Q$中的 P，得$B = (P \vee Q) \rightarrow Q$，再用 R 代换 B 中的 Q，得$C = (P \vee R) \rightarrow R$，$C$ 不是 A 的一个代换。而分别用$P \vee Q$和 R 同时代换 A 中的 P 和 Q，得$D = (P \vee Q) \rightarrow R$，则 D 是 A 的一个代换。

9．用等值演算法求公式的主范式是一个重点，也是一个难点。要会准确地求出公式的主析取范式和主合取范式。掌握主析取范式与真值表的关系，主析取范式与成真赋值的关系，主析取范式与主合取范式的关系，公式的主合取范式与真值表及成假赋值的关系。还要弄清不同类型公式的主析取范式及主合取范式的特点，特别是要知道，重言式的主析取范式含 2^n（n 为公式中所含的命题变元数）个极小项，重言式的主合取范式为 1，而矛盾式的主析取范式为 0，主合取范式含 2^n 个极大项。

10．会用多种方法（如真值表法、等值演算法、主范式法等）判断公式的类型及两个公式是否等值。

11．要弄清蕴含式$P \rightarrow Q$的逻辑关系及其真值。这里 Q 是 P 的必要条件。无论蕴含关系如何表述，都要仔细地区分出蕴含式的前件和后件，否则会混淆必要条件与充分条件，当然就有可能将假命题变成真命题，或将真命题变成假命题。

12．推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴含式的引用要适当，逻辑思维要清晰。

§8.3　基　本　题

§8.3.1　选择题

1．由 n 个命题变元组成不等值的命题公式的个数为（　　　）。

A．$2n$　　B．2^n　　C．n^2　　D．2^{2^n}

答案：D

2．设 P：我将去镇上，Q：我有时间。命题“我将去镇上，仅当我有时间时”符号化为（　　）。

A．$P \to Q$　　B．$Q \to P$　　C．$P \leftrightarrow Q$　　D．$\neg Q \vee \neg P$

答案：A

3．下列各组公式中，哪组是互为对偶的?（　　）

A．P, P　　B．$P, \neg P$　　C．$A, (A^*)^*$　　D．A, A

（其中 P 为单独的命题变元，A 为含有联结词的命题公式）

答案：A

4．设 P：我们划船，Q：我们跑步。命题“我们不能既划船又跑步”符号化为（　　）。

A．$\neg P \wedge \neg Q$　　B．$\neg P \vee \neg Q$　　C．$\neg(P \leftrightarrow Q)$　　D．$P \leftrightarrow \neg Q$

答案：B

5．下面哪一个命题是命题“2 是偶数或－3 是负数”的否定?（　　）

A．2 是偶数或－3 不是负数　　B．2 是奇数或－3 不是负数

C．2 不是偶数且－3 不是负数　　D．2 是奇数且－3 不是负数

答案：C

6．设 P：张三可以做这件事，Q：李四可以做这件事。命题“张三或李四可以做这件事”符号化为（　　）。

A．$P \vee Q$　　B．$P \vee \neg Q$　　C．$P \leftrightarrow Q$　　D．$\neg(\neg P \vee \neg Q)$

答案：A

7．下列语句中哪个是真命题?（　　）

A．我正在说谎　　B．严禁吸烟;

C．如果 1+2=3，那么雪是黑的　　D．如果 1+2=5，那么雪是黑的。

答案：D

8．下面哪个联结词运算不可交换?（　　）

A．$\wedge$　　B．$\rightarrow$　　C．$\vee$　　D．$\leftrightarrow$

答案：B

9．命题公式$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$是（　　）。

A．矛盾式　　B．蕴含式　　C．重言式　　D．等值式

答案：C

10．下面哪个命题公式是重言式?（　　）

A．$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$　　B．$(P \wedge Q) \rightarrow P$

C．$(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q)$　　D．$\neg(P \vee Q)$

答案：B

11．下面哪一组命题公式是等值的?（　　）

A．$\neg P \wedge \neg Q, P \vee Q$　　B．$A \rightarrow (B \rightarrow A), \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

C．$Q \rightarrow (P \vee Q), \neg Q \wedge (P \vee Q)$　　D．$\neg A \vee (A \wedge B), B$

答案：B

12．$P \rightarrow Q$的逆反式是（　　）。

A．$Q \rightarrow \neg P$　　B．$P \rightarrow \neg Q$　　C．$\neg Q \rightarrow P$　　D．$\neg Q \rightarrow \neg P$

答案：D

13．$\neg P \rightarrow Q$的逆换式是（　　）。

A．$Q \rightarrow \neg P$　　B．$P \rightarrow \neg Q$　　C．$Q \rightarrow \neg P$　　D．$P \rightarrow \neg Q$

答案：A

14．下列命题联结词集合中，哪个是最小联结词组?（　　）

A．$\{\neg, \leftrightarrow\}$　　B．$\{\neg, \vee, \wedge\}$　　C．$\{\uparrow\}$　　D．$\{\wedge, \rightarrow\}$

答案：C

15．下面联结词集中，哪一个不是最小联结词组?（　　）

A．$\{\neg, \wedge\}$　　B．$\{\neg, \rightarrow\}$　　C．$\{\neg, \wedge, \vee\}$　　D．$\{\uparrow\}$

答案：C

16．已知A是B的充分条件，B是C的必要条件，D是B的必要条件，则A是D的（　　）。

A．充分条件　　B．必要条件　　C．充要条件　　D．A、B、C都不对

答案：A

17．$\neg P \rightarrow Q$ 的反换式是（　　）。

A．$Q \rightarrow \neg P$　　B．$\neg P \rightarrow \neg Q$　　C．$\neg Q \rightarrow \neg P$　　D．$P \rightarrow \neg Q$

答案：D

18．下面哪一个命题公式是重言式?（　　）

A．$P \rightarrow (Q \vee R)$　　B．$(P \vee R) \wedge (P \rightarrow Q)$；

C．$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee R)$　　D．$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

答案：D

19．下面哪个命题公式不是重言式?（　　）

A．$Q \rightarrow (P \vee Q)$　　B．$(P \wedge Q) \rightarrow P$

C．$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$　　D．$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

答案：C

20．重言式的否定式是（　　）。

A．重言式　　B．矛盾式　　C．可满足式　　D．蕴含式

答案：B

21．下面哪一个命题是假命题?（　　）

A．如果 2 是偶数，那么一个公式的析取范式惟一

B．如果 2 是偶数，那么一个公式的析取范式不惟一

C．如果 2 是奇数，那么一个公式的析取范式惟一

D．如果 2 是奇数，那么一个公式的析取范式不惟一

答案：A

22．下面哪一组命题公式不是等值的?（　　）

A．$\neg(A \rightarrow B), A \wedge \neg B$　　B．$\neg(A \leftrightarrow B), (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

C．$A \rightarrow (B \vee C), \neg A \wedge (B \vee C)$　　D．$A \rightarrow (B \vee C), (A \wedge \neg B) \rightarrow C$

答案：C

23．命题公式 $P \rightarrow Q \wedge R$ 的对偶式为（　　）。

A．$P \rightarrow (Q \vee R)$　　B．$P \wedge (Q \vee R)$

C．$\neg P \vee (Q \wedge R)$　　D．$\neg P \wedge (Q \vee R)$

答案：D

24．命题公式 $P \to (Q \downarrow P)$ 是（　　）。

A．重言式　　B．可满足式　　C．矛盾式　　D．等值式

答案：B

25．$P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow$（　　）。

A．$\neg P \to (P \to \neg Q)$　　B．$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
C．$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P)$　　D．$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P)$

答案：D

26．命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的主析取范式中含极小项的个数为（　　）。

A．8　　B．3　　C．5　　D．0

答案：C

27．命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的主析取范式中含极大项的个数为（　　）。

A．0　　B．8　　C．5　　D．3

答案：D

28．命题公式 $\neg(P \wedge Q) \to R$ 的成真赋值为（　　）。

A．000，001，110　　B．001，011，101，110，111
C．全体赋值　　D．无

答案：B

29．如果 $A \Rightarrow B$ 成立，则以下各种蕴含关系哪一个成立?（　　）

A．$B \Rightarrow A$　　B．$\neg A \Rightarrow \neg B$　　C．$\neg B \Rightarrow \neg A$　　D．$\neg A \Rightarrow B$

答案：C

§8.3.2　填空题

1．下列句子中，是命题的有__________。

（1）我是教师。
（2）禁止吸烟！
（3）蚊子是鸟类动物。
（4）上课去！
（5）月亮比地球大。

答案：（1）　（3）　（5）

2．设 P：我生病，Q：我去学校

（1）命题“我虽然生病但我仍去学校”符号化为__________。
（2）命题“只有在生病的时候，我才不去学校”符号化为____________。
（3）命题“如果我生病，那么我不去学校”符号化为__________。

答案：（1）$P \wedge Q$　（2）$P \leftrightarrow \neg Q$　（3）$P \wedge \neg Q$

3．设 P：我有钱，Q：我去看电影。

（1）命题“如果我有钱，那么我就去看电影”符号化为__________。
（2）命题“虽然我有钱，但我不去看电影”符号化为__________。
（3）命题“当且仅当我有钱时，我才去看电影”符号化为__________。

答案：（1）$P \to Q$　（2）$P \wedge \neg Q$　（3）$P \leftrightarrow Q$

4．对于下列各式，是永真式的有___________。

（1）$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
（2）$P \to (P \vee Q)$
（3）$Q \to (P \wedge Q)$
（4）$(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q$
（5）$(P \to Q) \to Q$

答案：（1）　（2）　（4）

5．$(P \wedge (P \vee Q)) \to R \Leftrightarrow$ ___________。

答案：$P \to R$

6．$P \to (P \to Q) \Leftrightarrow$__________。

答案：$P \to Q$

7．对于下列各式

（1）$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 可化简为___________。
（2）$Q \to (P \vee (P \wedge Q))$ 可化简为___________。
（3）$((\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)) \wedge P$ 可化简为___________。

答案：（1）$\neg P$　（2）$Q \to P$　（3）P

8．命题公式 $P \vee (Q \wedge \neg R)$ 的成真赋值为__①__，成假赋值为__②__。

答案：① 010，100，101，110，111　② 000,001,011

9．若__①__且__②__则称 X 是公式 A 的子公式。

答案：① X 是 X 公式 A 的一部分

② X 本身也是公式

10. 写出表 8-14 中各列所定义的命题联结词。

答案：① $\wedge$ ② $\uparrow$

表 8-14

P	Q	P ① Q	P ② Q
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

11. 由 n 个命题变元可组成_______个不等值的命题公式。

答案：2^{2^n}

12. 用两种形式写出 $P\uparrow Q$ 的对偶式__①__，__②__。

答案：① $\neg(P\vee Q)$ ② $P\downarrow Q$

13. 两个重言式的析取是__①__，一个重言式与一个矛盾式的析取是__②__。

答案：① 重言式 ② 重言式

14. A、B 为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当__①__，$A\Rightarrow B$ 当且仅当__②__。

答案：① $A\leftrightarrow B$ 是重言式 ② $A\rightarrow B$ 是重言式

15. 设 P、Q 为两个命题，德 • 摩根律可表示为__①__，吸收律可表示为__②__。

答案：① $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
② $P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$，$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

16. 设命题公式 A 中仅含有联结词¬、∧、∨，若____得到公式 A^*，则 A^*称为 A 的对偶式。

答案：将 A 中∧、∨、1、0 换以∨、∧、0、1

17. 公式 $(P\vee Q)\rightarrow R$ 的只含联结词¬、∧的等值式为__①__，它的对偶式为__②__。

答案：① $\neg(\neg(\neg P\wedge\neg Q)\wedge\neg R)$ ② $\neg(P\wedge Q)\wedge R$

18. 命题公式 $A\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\uparrow 0$，则其对偶式 $A^*\Leftrightarrow$ ____________。

答案：$(P\vee Q\vee R)\downarrow 1$

19. 在命题演算中，一个蕴含式与它的__①__式是等值的，它的__②__式与它的__③__式是不等值的。

答案：① 逆反 ② 反换 ③ 逆换

20. 公式 $\neg P\rightarrow Q$ 的反换式为__①__，逆反式为__②__。

答案：① $P\rightarrow\neg Q$ ② $\neg Q\rightarrow P$

21．任意两个不同极小项的合取为__①__式，全体极小项的析取式必为__②__。

答案：① 永假　　② 永真

22．命题公式$\neg(P \to Q)$的主析取范式为__①__，主合取范式的编码表示为__②__。

答案：① $P \wedge \neg Q$　　② $M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{11}$

23．已知公式$A(P,Q,R)$的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_5$，它的主析取范式为（写成编码形式）______。

答案：$m_1 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

24．命题公式$\neg(P \leftrightarrow Q)$的主析取范式为__①__，其编码表示为__②__，主合取范式的编码表示为__③__。

答案：① $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$　　② $m_{10} \vee m_{01}$　　③ $M_{00} \wedge M_{11}$

25．对于前提：$S \to \neg Q, S \vee R, \neg R, \neg P \leftrightarrow Q$，其有效结论为__________。

答案：P

26．对于前提：$(P \wedge Q) \to R, \neg R \vee S, \neg S$，其有效结论为__________。

答案：$\neg P \vee \neg Q$

§8.3.3　判断题

1．“王兰和王英是姐妹”是复合命题，因为该命题中出现了联结词“和”。（　）
答案：×

2．凡陈述句都是命题。（　）　答案：×

3．语句$3x+5y=0$是一个命题。（　）　答案：×

4．命题“两个角相等当且仅当它们是对顶角”的值为 1。（　）　答案：×

5．语句“$x+y=4$”是个命题。（　）　答案：×

6．命题“十减四等于五”是一个原子命题。（　）　答案：√

7．命题“如果 1+2=3，那么雪是黑的”是真命题。（　）　答案：×

8．$(P\vee \to (Q \wedge R))$是一个命题演算的命题公式，其中P、Q、R是命题变元。（　）
答案：×

9．$(P \to (Q \wedge R \to \neg Q)$是一个命题公式，其中$P$、$Q$、$R$是命题变元。（　）
答案：×

10．若A：张明和李红都是三好学生，则$\neg A$：张明和李红都不是三好学生。（　）
答案：×

11．若A：张明和李红都是运动员，则$\neg A$：张明和李红不都是运动员。（　）
答案：√

12．若P：每一个自然数都是偶数，则$\neg P$：每一个自然数都不是偶数。（　）
答案：×

13．若 P：每个自然数都是偶数，则$\neg P$：每个自然数不都是偶数。（ ）

答案：√

14．如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，$A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$。（ ） 答案：√

15．如果 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$，则 $A \Leftrightarrow B$。（ ） 答案：×

16．联结词“↓”是可结合的。（ ） 答案：×

17．联结词“↑”是可结合的。（ ） 答案：×

18．联结词“↓”是可交换的。（ ） 答案：√

19．联结词“↑”是可交换的。（ ） 答案：√

20．联结词“$\rightarrow$”满足交换律。（ ） 答案：×

21．“学习有如逆水行舟，不进则退”。设 P：学习如逆水行舟，Q：学习进步，R：学习退步。则命题符号化为 $P \wedge (\neg Q \rightarrow R)$。（ ） 答案：×

22．P、Q、R 定义同上题，则“学习有如逆水行舟，不进则退”形式化为：$P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R)$。（ ）

答案：√

23．设 P、Q 是两个命题，当且仅当 P、Q 的真值均为 1 时，$P \leftrightarrow Q$ 的值为 1。（ ）

答案：×

24．命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是矛盾式。（ ） 答案：×

25．命题公式 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是重言式。（ ） 答案：√

26．联结词$\wedge$与$\vee$不是相互可分配的。（ ） 答案：×

27．在命题的演算中，每个最小联结词组至少有两个联结词。（ ） 答案：×

28．命题联结词集$\{\neg, \leftrightarrow\}$是最小联结词集。（ ） 答案：×

29．命题联结词集$\{\neg, \wedge, \vee\}$是最小联结词集。（ ） 答案：×

30．命题联结词集$\{\wedge, \rightarrow\}$是最小联结词集。（ ） 答案：×

31．命题联结词集$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是最小联结词集。（ ） 答案：√

32．A 是命题公式，A 与 $(A^*)^*$ 互为对偶式。（ ） 答案：×

33．A 是命题公式，$A \Leftrightarrow (A^*)^*$。（ ） 答案：√

34．P 是命题变元，P 与 P 互为对偶式。（ ） 答案：√

35．任一命题公式的主析取范式和它的主合取范式互为对偶式。（ ） 答案：×

36．任一命题公式都可以表示成与其等值的若干极小项的析取式。（ ） 答案：×

§8.4 习 题 解 析

1．使用命题：

P：这个材料有趣。

Q：这些习题很难。

R：这门课程让人喜欢。

将下列句子用符号形式写出：

（1）这个材料很有趣，并且这些习题很难。
（2）这个材料无趣，习题也不难，而且这门课程也不让人喜欢。
（3）如果这个材料无趣，习题也不难，那么这门课程就不会让人喜欢。
（4）这个材料有趣，意味着这些习题很难，并且反之亦然。
（5）或者这个材料有趣，或者这些习题很难，并且两者恰具其一。

解：

（1）命题表示为：$P \wedge Q$
（2）命题表示为：$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
（3）命题表示为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \wedge R$
（4）命题表示为：$P \leftrightarrow Q$
（5）命题表示为：$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

2. 用符号形式写出下列命题：

（1）假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报；
（2）我今天进城，除非下雨；
（3）仅当你走，我将留下；
（4）一个数是素数当且仅当它只能被 1 和它自身整除。

解：

（1）命题可表示为：$(\neg P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R)$
其中 P：上午下雨；Q：我去看电影；R：我在家里读书或看报。
（2）命题可表示为：$\neg P \rightarrow Q$
其中 P：今天下雨；Q：今天我进城。
（3）命题可表示为：$Q \rightarrow P$
其中 Q：我留下；P：你走。
（4）命题可表示为：$P \leftrightarrow (Q \wedge R \wedge \neg S)$。
其中 P：一个数是素数；Q：一个数能被 1 整除；R：一个数能被它本身整除；S：一个数能被除去 1 和它自身以外的数整除

3．判断下列语句是否为命题，若是命题请指出是简单命题还是复合命题。

（1）$\sqrt{2}$ 是无理数。
（2）5 能被 2 整除。
（3）现在开会吗？
（4）$x+5>0$。
（5）这朵花真好看呀！
（6）2 是素数当且仅当三角形有 3 条边。
（7）雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起。
（8）2000 年 10 月 1 日天气晴好。
（9）太阳系以外的星球上有生物。
（10）小李在宿舍里。

（11）全体起立！

（12）4 是 2 的倍数或是 3 的倍数。

（13）4 是偶数且是奇数。

（14）李明与王华是同学。

（15）蓝色和黄色可以调配成绿色。

解：

除（3），（4），（5），（11）外全是命题。其中，（1），（2），（8）（9），（10），（14），（15）是简单命题，（6），（7），（12），（13）是复合命题。

首先应该注意到，命题是陈述句，因而不是陈述句的句子都不是命题。本题中，（3）为疑问句，（5）为感叹句，（11）为祈使句，它们都不是陈述句，所以它们都不是命题。

其次，（4）这个句子是陈述句，但它表示的判断结果是不确定的，也就是说，它可真（如取 x 为 2），它也可能为假（如取 $x=-10$），于是（4）不是命题。

其余的句子都是有确定判断结果的陈述句，因而它们都是命题。又因为（1），（2），（8），（9），（10），（14），（15）都是简单的陈述句，因而作为命题，它们都是简单命题。（6）和（7）都为由联结词“当且仅当”联结起来的复合命题，（12）是由联结词“或”联结的复合命题，而（13）是由联结词“且”联结起来的复合命题，这里的“且”为“合取”联结词。在日常生活中，合取联结词有许多表述法，例如，“虽然……，但是……”.“不仅……，而且……”.“一面……，一面……”.“……和……”. “……与……”等。但要注意，有时“和”或“与”联结的是主语，构成简单命题。例如，（14），（15）中的“与”与“和”联结的就是主语，这两个命题均为简单命题，而不是复合命题。希望读者在遇到“和”或“与”出现的命题时，要根据命题所陈述的含义加以区分。

4．确定下列命题的真值：

（1）“如果太阳从西边出来，那么地球自转”；

（2）“如果太阳从东边出来，那么地球自转停止”；

（3）“如果 8+9>30，那么三角形有三条边”；

（4）“如果疑问句是命题，那么地球将停止转动”。

解：

真值分别为：（1）1　　（2）0　　（3）1　　（4）1

5．判断下面语句是否是命题，若是，确定其真值：

（1）喜玛拉雅山比华山高；

（2）如果时间静止不动，你就可以长生不老；

（3）如果时间流逝不止，你就可以生长不老；

（4）伦敦是英国首都；

（5）这盆茉莉花好香啊！

解：

（1）是命题，真值为 1。

（2）是，其值为 1；（3）是，其值为 0；

（4）是，其值为 1；（5）不是命题。

6．给命题变元 P、Q、R、S 分别指派真值为 1、1、0、0，求下列命题公式的真值：

（1）$(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S)$

（2）$(P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S)$

解：

将 P、Q、R、S 的真值式代入公式，有

（1）$(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S)$

$\Leftrightarrow (\neg(1 \wedge 1) \wedge \neg 0) \vee (((\neg 1 \wedge 1) \vee \neg 0) \wedge 0) \Leftrightarrow (0 \vee 1) \vee ((0 \vee 1) \wedge 0)$

$\Leftrightarrow 1 \vee 0 \Leftrightarrow 1$

（2）$(P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \leftrightarrow (Q \vee \neg S) \Leftrightarrow$

$(1 \vee (1 \to (0 \wedge \neg 1))) \leftrightarrow (1 \vee \neg 0) \Leftrightarrow (1 \vee 0) \leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 1$

7．设 A^*、B^* 分别是命题公式 A 和 B 的对偶式，判断下列各式是否成立，若不成立，请举例说明：

（1）$A^* \Leftrightarrow A$

（2）$A \Leftrightarrow B$ 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$

（3）$A \Rightarrow B$ 则 $A^* \Rightarrow B^*$

（4）$(A^*)^* \Leftrightarrow A$

解：

（2）、（4）成立；（1）不成立，例如，设 $A: P \wedge Q$，则 $A^* P \vee Q$，$A^* \Leftrightarrow A$ 不成立；（3）不成立，例如，设 $A^*: P \vee Q$，$B^*: P$，虽然有 $P \wedge Q \Rightarrow P$ 的成立，但 $P \vee Q \Rightarrow P$ 不成立。

8．命题联结词“$\downarrow$”定义为 $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

（1）构造 $P \downarrow Q$ 的真值表；

（2）证明$\vee$、$\wedge$、$\neg$可以用仅含联结词$\downarrow$的等值公式表示。

解：

（1）$P \downarrow Q$ 的真值表如表 8-15 所示。

（2）因为 $\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$

$P \wedge Q \Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$

$P \vee Q \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$

所以$\vee$、$\wedge$、$\neg$可用仅含联结词$\downarrow$的等值式表示。

表 8-15

P	Q	$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\downarrow Q$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

9．化简下面命题公式：

（1）$A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))$

（2）$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)$

（3）$((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\wedge R$

（4）$((A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A))\vee C$

解：

（1）$A\vee(\neg A\vee(B\wedge\neg B))\Leftrightarrow A\vee(\neg A\vee F)\Leftrightarrow A\vee\neg A\Leftrightarrow T$

（2）$(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\Leftrightarrow B\wedge C$

（3）$((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\wedge R$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\leftrightarrow(\neg\neg Q\vee\neg P))\wedge P\ \Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q))\wedge R$

$\Leftrightarrow 1\wedge R\Leftrightarrow R$

（4）$((A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A))\vee C\Leftrightarrow((A\to B)\leftrightarrow(A\to B))\vee C$

$\Leftrightarrow 1\vee C\Leftrightarrow 1$

10．如果有 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，是否一定有 $A\Leftrightarrow B$？

解：

不一定。因为设有某种真值指派使得公式 C 为 0，而公式 A 为 1，B 为 0，（或 A 为 0，B 为 1），则 $A\wedge C$ 和 $B\wedge C$ 均为 0。故 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$ 不一定有 $A\Leftrightarrow B$。

11．如果 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，是否一定有 $A\Leftrightarrow B$？

解：

不一定。因为设有某种真值指派，使得公式 C 为 1，而公式 A 为 1，B 为 0（或 A 为 0，B 为 1），则 $A\vee C$ 和 $B\vee C$ 的值都为 1，故 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$ 成立时，不一定有 $A\Leftrightarrow B$。

12．如果 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，是否有 $A\Leftrightarrow B$？

解：

必有。因为 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg B\leftrightarrow\neg A$，所以，$\neg B\leftrightarrow\neg A$ 为永真式时，$A\leftrightarrow B$ 也是永真式，故 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$ 时，必有 $A\Leftrightarrow B$。

13．用真值表判断下列各式是否为重言式：

（1）$((\neg P\vee Q)\wedge(Q\to R))\to\neg(P\wedge\neg R)$

（2）$(P\wedge Q\to R)\to(P\wedge\neg R\wedge Q)$。

解：

由真值表 8-16 知（1）是重言式，（2）不是重言式。

表 8-16

P	Q	R	$\neg P\vee Q$	$Q\to R$	$\neg(P\wedge\neg R)$	（1）	$P\wedge Q\to R$	$P\wedge\neg R\wedge Q$	（2）
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0

14．设命题公式 A 的真值表如表 8-17，试求出 A 的主析取范式和主合取范式（用编码表示和公式表示）：

表 8-17

P	Q	A
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

解：

由表 8-17 可知，A 的主析取范式为：$m_{11}\vee m_{10}\vee m_{00}$，主合取范式为 M_{01}。

15．用等值演算法证明 $P\wedge(P\to Q)\to Q$ 是重言式。

证：

$P\wedge(P\to Q)\to Q\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)\to Q\Leftrightarrow(P\wedge\neg P)\vee(P\wedge Q)\to Q$

$\Leftrightarrow P\wedge Q\to Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee Q\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee Q\Leftrightarrow\neg P\vee 1\Leftrightarrow 1$

$\therefore P\wedge(P\to Q)\to Q$ 是重言式。

16．证明下列命题的等值关系：

（1）$(P\to Q)\wedge(R\to Q)\Leftrightarrow(P\vee R)\to Q$

（2）$(P\wedge Q\wedge A\to C)\wedge(A\to P\vee Q\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge(P\leftrightarrow Q))\to C$

（3）$P\to(Q\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)$

（4）$(P\to Q)\wedge(P\to R)\Leftrightarrow P\to(Q\wedge R)$

（5）$(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$

证：

（1）左式 $\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg R)\vee Q\Leftrightarrow\neg(P\vee R)\vee Q$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\to Q$ =右式

（2）左式$=(P \wedge Q \wedge A \to C) \wedge (A \to P \vee Q \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg(P \wedge Q \wedge A) \vee C) \wedge (\neg A \vee (P \vee Q \vee C))$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q \vee \neg A) \vee C) \wedge ((\neg A \vee P \vee Q) \vee C)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee P \vee Q)) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee \neg Q \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee P \vee Q)) \to C$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee \neg Q \vee \neg A) \vee \neg(\neg A \vee P \vee Q)) \to C$

$\Leftrightarrow ((P \wedge Q \wedge A) \vee (A \wedge \neg P \wedge \neg Q)) \to C$

$\Leftrightarrow (A \wedge ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))) \to C$

$\Leftrightarrow (A \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q))) \to C$

$\Leftrightarrow (A \wedge ((Q \to P) \wedge (P \to Q))) \to C$

$\Leftrightarrow (A \wedge (P \leftrightarrow Q)) \to C$ =右式

所以，$(P \wedge Q \wedge A \to C) \wedge (A \to P \vee Q \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge (P \leftrightarrow Q)) \to C$

（3）$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$

（4）$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow P \to (Q \wedge R)$

（5）$(P \vee Q) \wedge \neg(P \to Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow \neg((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$

17．求证下面命题的蕴含关系：

（1）$P \wedge Q \Rightarrow P \to Q$

（2）$(P \to (Q \to R)) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

证：

（1）$(P \wedge Q) \to (P \to Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q \Leftrightarrow \neg P \vee 1 \Leftrightarrow 1$

所以 $P \wedge Q \Rightarrow P \to Q$

（2）左式$=(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

右式$=(P \to Q) \to (P \to R) \Leftrightarrow \neg(P \to Q) \vee (P \to R)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee R \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg P \vee R$

故 $(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

所以 $(P \to (Q \to R)) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$

18．求下面各式的主析取范式与主合取范式，并写出相应的为真赋值。

（1）$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q)$

（2）$(\neg R \vee (Q \to P)) \to (P \to (Q \vee R))$

（3）$((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P)$

（4）$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (R \to (Q \to P))$

（5）$\neg((P \to Q) \wedge (R \to P)) \vee \neg((R \to \neg Q) \to \neg P)$

解：

本题可用真值表，也可通过等值演算来确定其主范式，并给出其为真赋值。

（1）$\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　主析取范式

$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$　主合取范式

真值表见表 8-18。

表 8-18

P	Q	$\neg(P\to Q)$	$P \to \neg Q$	（1）
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

其为真赋值为：10，11

（2）$(\neg R \vee (Q \to P)) \to (P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow \neg(\neg R \vee \neg Q \vee P) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \vee Q \vee R) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R$　主合取范式

主析取范式为：

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

（主析取范式也可通过上面变形直接得到。）真值表见表 8-19。

表 8-19

P	Q	R	$\neg R\vee(Q\to P)$	$P\to(Q\vee P)$	（2）
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

其为真赋值为：000，001，010，011，101，110，111。

（3）$((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P) \Leftrightarrow (\neg(\neg P \vee Q) \vee Q) \to (\neg(\neg Q \vee P) \vee P)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg P) \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee P$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$　主析取范式

主合取范式为 1。

真值表见表 8-20。

表 8-20

P	Q	$(P\to Q)\to Q$	$(Q\to P)\to P$	（3）
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

其为真赋值为：00，01，10，11。

（4）$(P\to(Q\to R))\leftrightarrow(R\to(Q\to P))\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\leftrightarrow(\neg R\vee\neg Q\vee P)$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\vee(\neg R\vee\neg Q\vee P))\wedge(\neg(\neg R\vee\neg Q\vee P)\vee(\neg P\vee\neg Q\vee R))$

$\Leftrightarrow((P\wedge Q\wedge\neg R)\vee P\vee\neg Q\vee R)\wedge((\neg P\wedge Q\wedge R)\vee\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$　主合取范式

主析取范式为：

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$
$\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

真值表见表 8-21。

表 8-21

P	Q	R	$P\to(Q\to R)$	$R\to(Q\to P)$	（4）
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

其为真赋值为：000，001，010，100，101，111。

（5）$\neg((P\to Q)\wedge(R\to P))\vee\neg((R\to\neg P)\to\neg)$

$\Leftrightarrow\neg((\neg P\wedge Q)\wedge(\neg R\vee P))\vee\neg(\neg(\neg R\vee\neg Q)\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee((\neg Q\vee\neg R)\wedge P)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee((P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

上式为主析取范式。主合取范式为：

$(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

真值表见表 8-22。

表 8-22

P	Q	R	$P \to Q$	$R \to P$	$\neg((P \to Q) \wedge (R \to P))$	$R \to \neg P$	$\neg((R \to \neg P) \to \neg P)$	（5）
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1		0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0

其为真赋值为：001，011，100，101，110。

19．联结词 f_1，f_2 由表 8-23 所示真值表定义，证明{f_1，f_2}是最小联结词组。

证：

（1）由表 8-23 可知 $f_1 P \Leftrightarrow \neg P$，$P f_2 Q \Leftrightarrow Q \to P$ 而 $\{\neg, \to\}$ 是最小联结词组，所以{f_1，f_2}能表示所有的命题公式。

表 8-23

P	Q	f_1P	Pf_1Q
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

（2）f_1 是一元联结词，不能表示二元联结词，所以 f_1 不能表示 f_2，另外 f_2 也不能表示 f_1，如若不然，则 $f_1 P \Leftrightarrow P f_2 (\Lambda\ \Lambda\ Q f_2 \Lambda\ \Lambda) \Lambda\ \Lambda\ f_2 R$，对该式中所有变元指派为 1，则左式为 0，右式为 1，矛盾。

由（1）（2）所证，{f_1，f_2}是最小联结词组。

20．设计一种简单的表决器，表决者每人座位旁有一按钮，若同意则按下按钮，否则不按按钮，当表决结果超过半数时，会场电铃就会响，否则铃不响。试以表决人数为 3 人的情况设计表决器电路的逻辑关系。

解：

设三个表决者的按钮分别与命题变元 P_1，P_2，P_3 对应。当按钮按下时，令其真值为 1；当不按按钮时，其值为 0。设 B 对应表决器电铃状态，铃响其值为 1，不响其值为 0，它是按钮命题变元的命题公式。根据题意，电铃与按钮之间的关系如表 8-24 所示，从表 8-24 可以看出，使得 B 为 1 的赋值有 011，101，110，111 共

四组，分别对应极小项$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$，$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$，$P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$，$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$，因此，$B$可由主析取范式的形式表示，即有：

$$B \Leftrightarrow (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$$

这就是表决器电路的逻辑关系式。利用这一关系式就可设计出电路图。一般根据需要，还可以应用等值演算将主析取范式尽量化简，以便在具体实施表决器方案时，省工省时省器件，从而降低生产成本。

表 8-24

P_1	P_2	P_3	B
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

21．证明{↑}是最小联结词组。

证：

（1）$P \wedge Q \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

$P \vee Q \Leftrightarrow (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$

$\neg P \Leftrightarrow P \uparrow P$

$P \to Q \Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)) \wedge (Q \uparrow (P \uparrow P))$

所以{↑}能表示所有的命题公式。

（2）{↑}的真子集为空集，不能表示任何命题公式。

由（1）（2）所证，{↑}是最小联结词组。

22．设计一加法器，实现两自然数相加的功能。

解：

设 a,b 是两自然数，$c = a + b$，a,b,c 分别用二进制数表示如下：

$a = a_n a_{n-1} \Lambda \ a_2 a_1$

$b = b_n b_{n-1} \Lambda \ b_2 b_1$

$c = c_{n+1} c_n \Lambda \ c_2 c_1$

于是 $c_i (1 \le i \le n+1)$ 的求法可表示为

$a_n a_{n-1} \Lambda \ a_2 a_1$

$$\begin{array}{r} b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 \\ e_{n+1} e_n e_{n-1} \Lambda\ e_2 e_1 \\ \hline c_{n+1} c_n c_{n-1} \Lambda\ c_2 c_1 \\ e_{n+1} e_n \Lambda\ e_3 e_2 \end{array}$$

这里 e_1 等于 0，e_{i+1} 表示第 i 位相加的进位，有进位时 $e_{i+1}=1$，否则 $e_{i+1}=0$，$i=1,\cdots,n$。因此，我们可以由 a_i,b_i,e_i 出 c_i 和 e_{i+1}（$i=1,\cdots,n$）。根据加法规则，a_i,b_i,e_i 与 c_i 和 e_{i+1} 之间的关系可用表 8-25 表示。由表我们可写出求 c_i 和 e_{i+1} 的主合取范式如下：

$$c_i \Leftrightarrow (a_i \vee b_i \vee e_i) \wedge (a_i \vee \neg b_i \vee \neg e_i) \wedge (\neg a_i \vee b_i \vee \neg e_i) \wedge (\neg a_i \vee \neg b_i \vee e_i),$$
$$e_{i+1} \Leftrightarrow (a_i \vee b_i \vee e_i) \wedge (a_i \vee b_i \vee \neg e_i) \wedge (\neg a_i \vee \neg b_i \vee e_i) \wedge (\neg a_i \vee b_i \vee e_i)$$

最后补以 $e_1=0, c_{n+1}=e_{n+1}$

表 8-25

a_i	b_i	e_i	c_i	e_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

实现运算¬，∧，∨的电子元件分别称为非门．与门．或门，我们可根据上面求出的主合取范式设计出计算 c_i 和 e_{i+1} 的器件，这就是加法器。类似的方法可设计出减法器，乘法器，除法器等。数字计算机的运算部件的设计原理就是如此。

23．某勘探队有 3 名队员。有一天取得一块矿样，3 人的判断如下：

甲说：这不是铁，也不是铜；
乙说：这不是铁，是锡；
丙说：这不是锡，是铁。

经实验室鉴定后发现，其中一人两个判断都正确，一个人判对一半，另一个全错了。根据以上情况判断矿样的种类。

解：

设 P：矿样为铁；Q：矿样为铜；R：矿样为锡

$F_1 \Leftrightarrow$（甲全对）∧（乙对一半）∧（丙全错）

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge R)) \wedge (\neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge \neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge R \wedge \neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0$

$F_2 \Leftrightarrow$（甲全对）$\wedge$（乙全错）$\wedge$（丙对一半）

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge \neg R) \wedge ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R \wedge P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0$

$F_3 \Leftrightarrow$（甲对一半）$\wedge$（乙全对）$\wedge$（丙全错），

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg P \wedge R) \wedge (\neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg P \wedge R \wedge \neg P \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg P \wedge R \wedge \neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee 0$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$

$F_4 \Leftrightarrow$（甲对一半）$\wedge$（乙全错）$\wedge$（丙全对），

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge (P \wedge \neg R) \wedge (P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge P \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow 0 \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$F_5 \Leftrightarrow$（甲全错）$\wedge$（乙对一半）$\wedge$（丙全对），

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge ((\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge R)) \wedge (P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge P \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge P \wedge R \wedge P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0$

$F_6 \Leftrightarrow$（甲全错）$\wedge$（乙全对）$\wedge$（丙对一半）

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge R) \wedge ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg P \wedge R \wedge P \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0$

设 $F \Leftrightarrow$（一人全对）$\wedge$（一人对一半）$\wedge$（一人全错），则 F 为真命题，并且

$F \Leftrightarrow F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \vee F_5 \vee F_6$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow 1$

但是矿样不可能既是铜又是锡，于是 Q，R 中必有假命题，所以 $\neg P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow 0$，因而必有 $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow 1$

于是，必有 P 为真，Q 与 R 为假，即矿样为铁。

24．观察下列推理过程，是否正确，结论是否有效，说明理由。

（1）① $P \wedge Q \to R$	P
（2）② $P \to R$	T ① I
（3）③ P	P
（4）④ R	T ②③ I

所以 $P \wedge Q \to R$， $P \Rightarrow R$ 。

解：

推理过程有错误，第（2）步不对。R 不是前提公式 $P \wedge Q \to R$，P 的有效结论。例如，若 P、Q、R 分别指派为 1、0、0 时，前提公式值为 1，而结论公式值为 0。

25．下列证明过程是否正确，若正确补足每一步推理依据，否则指出错误。

（1）① $\neg D \vee A$
（2）② D
（3）③ A
（4）④ $A \to (C \to B)$
（5）⑤ $C \to B$
（6）⑥ C
（7）⑦ B
（8）⑧ $D \to B$

所以 $A \to (C \to B)$，$\neg D \vee A$，$C \Rightarrow D \to B$。

解：

推理正确。（1）① P，（2）P（附加前提），（3）T ①② I，（4）P，（5）T ③④ I，（6）P，（7）T ⑤⑥ I，（8）CP 规则。

26．证明 $A \to (B \to C)$，$B \to (C \to D) \Rightarrow A \to (B \to D)$。

证：

① $A \wedge B$	P（附加前提）
② $A \to (B \to C)$	P
③ A	T ① I
④ B	
⑤ $B \to (C \to D)$	P
⑥ $B \to C$	T ②③ I
⑦ $C \to D$	T ④⑤ I
⑧ $B \to D$	T ⑥⑦ I
⑨ D	T ④⑧ I
⑩ $A \wedge B \to D$	CP
□ $A \to (B \to D)$	T⑩ E

27．用 CP 规则证明 $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$，$Q \to (R \to S)$，$P \Rightarrow Q \to S$。

证：

① Q	P（附加前提）
② $Q \to (R \to S)$	P
③ $R \to S$	T ①② I
④ $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$	P
⑤ P	P
⑥ $\neg Q \vee R$	T ④⑤ I

⑦ R　　　　T ①⑥ I

⑧ S　　　　T ③⑦ I

⑨ $Q \to S$　　　　CP

28．用推理规则说明 $A \to B$，$\neg(B \vee C)$，$A \wedge C$ 是否能同时为真？

证：

① $A \to B$　　　　P

② $A \wedge C$　　　　P

③ A　　　　T ② I

④ B　　　　T ①③ I

⑤ $\neg(B \vee C)$　　　　P

⑥ $\neg B \wedge \neg C$　　　　T ⑤ I

⑦ $\neg B$　　　　T ⑥ I

⑧ $B \wedge \neg B$　　　　T ④⑦ I

所以 $A \to B$，$\neg(B \vee C)$, $A \wedge C$ 不能同时为真。

29．用推理规则证明 $(P \vee Q) \to R$，$\neg S \vee U$，$\neg R \vee S$，$U \to W$，$\neg W \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q$。

证：

① $(P \vee Q) \to R$　　　　P

② $\neg R \vee S$　　　　P

③ $R \to S$　　　　T ② E

④ $(P \vee Q) \to S$　　　　T ①③ I

⑤ $\neg S \vee U$　　　　P

⑥ $S \to U$　　　　T ⑤ E

⑦ $(P \vee Q) \to U$　　　　T ④⑥ I

⑧ $U \to W$　　　　P

⑨ $\neg W$　　　　P

⑩ $\neg U$　　　　T ⑧⑨ I

□ $\neg(P \vee Q)$　　　　T ⑦⑩ I

□ $\neg P \wedge \neg Q$　　　　T □ E

30．用推理规则证明下列推理的正确性：如果 A 努力工作，那么 B 或 C 感到愉快；如果 B 愉快，那么 A 不努力工作；如果 D 愉快那么 C 不愉快。所以，如果 A 努力工作，则 D 不愉快。

证：

设命题变元 A：A 努力工作，B、C、D 分别表示 B、C、D 愉快，则前提公式为 $A \to B \vee C$，$B \to \neg A$，$D \to \neg C$，结论公式为 $A \to \neg D$。

①　　A　　　　P（附加前提）

②　　$A \to B \vee C$　　　　P

③　　$B \vee C$　　　　T ①② I

④	$B \to \neg A$	P
⑤	$A \to \neg B$	T ④ E
⑥	$\neg B$	T ①⑤ I
⑦	C	T ③⑥ I
⑧	$D \to \neg C$	P
⑨	$C \to \neg D$	T ⑧ I
⑩	$\neg D$	T ⑦⑨ I
□	$A \to \neg D$	CP

31．用等值演算法证明 $\neg P \wedge \neg(P \to Q)$ 是矛盾式。

证：

$$\neg P \wedge \neg(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \Leftrightarrow 0$$

所以原式是矛盾式。

32．用 CP 规则证明 $A \to (B \wedge C)$，$(E \to \neg F) \to \neg C$，$B \to (A \wedge \neg S) \Rightarrow B \to E$

证：

①	B	P（附加前提）
②	$B \to (A \wedge \neg S)$	P
③	$A \wedge \neg S$	T ①② I
④	A	T ③ I
⑤	$A \to (B \wedge C)$	P
⑥	$B \wedge C$	T ④⑤ I
⑦	C	T ⑥ I
⑧	$(E \to \neg F) \to \neg C$	P
⑨	$C \to \neg(E \to \neg F)$	T ⑧ E
⑩	$\neg(E \to \neg F)$	T ⑦⑨ I
□	$\neg(\neg E \vee \neg F)$	T ⑩ E
□	$E \wedge F$	T □ E
□	E	T □ I
□	$B \to E$	CP

33. 用反证法证明 $(A \to B) \wedge (C \to D)$，$(B \to E) \wedge (D \to F)$，$\neg(E \wedge F)$，$A \to C \Rightarrow \neg A$

证：

①	A	P（假设前提）
②	$A \to C$	P
③	C	T ①② I
④	$(A \to B) \wedge (C \to D)$	P
⑤	$A \to B$	T ④ I
⑥	$C \to D$	T ④ I

⑦	B	T ①⑤ I
⑧	D	T ③⑥ I
⑨	$(B \to E) \wedge (D \to F)$	P
⑩	$B \to E$	T ⑨ I
□	$D \to F$	
□	E	T ⑦⑩ I
□	F	T ⑧□ I
□	$E \wedge F$	T □□ I
□	$\neg(E \wedge F)$	P
□	$\neg(E \wedge F) \wedge (E \wedge F)$	T □□ I

所以 $(A \to B) \wedge (C \to D)$，$(B \to E) \wedge (D \to F)$，$\neg(E \wedge F)$，$A \to C \Rightarrow \neg A$

34．用反证法证明 $A \to B$，$(\neg B \vee C) \wedge \neg C$，$\neg(\neg A \wedge D) \Rightarrow \neg D$

证：

①	D	P（假设前提）
②	$\neg(\neg A \wedge D)$	P
③	$A \vee \neg D$	T ② E
④	A	T ①③ I
⑤	$A \to B$	P
⑥	B	T ④⑤ I
⑦	$(\neg B \vee C) \wedge \neg C$	P
⑧	$(\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C)$	T ⑦ E
⑨	$\neg B \wedge \neg C$	T ⑧ E
⑩	$\neg B$	T ⑨ I
□	$B \wedge \neg B$	T ⑥⑩ I

所以 $A \to B$，$(\neg B \vee C) \wedge \neg C$，$\neg(\neg A \wedge D) \Rightarrow \neg D$

第 9 章　谓 词 逻 辑

本章主要内容包括谓词逻辑的基本概念、谓词逻辑命题的符号化，谓词公式及其真值，谓词公式的前束范式，重言蕴含式与推理规则等。下面就此作一简要介绍。

§9.1　内 容 分 析

§9.1.1　谓词逻辑的基本概念及其符号化

个体是指可以独立存在的客观实体，它可以是具体的，也可以是抽象的。具体的特定个体称为个体常量；抽象的、泛指的或在一定范围内变化的个体称为个体变量，也称为个体变元；个体变量的取值范围称为个体域（或论域）；在命题中，表示一个个体性质、特征或多个个体之间关系的成份称为谓词；表示具体性质或关系的谓词称为谓词常量或常谓词，否则称为谓词变量。

一般用大写字母 F,G,H 等表示谓词，而用 X,Y,Z 等表示谓词变量。表示一个个体性质的谓词称为一元谓词；表示多个个体之间关系的谓词称为多元谓词。

在命题中除了个体和谓词外，有时还出现表示数量的词称为量词。我们讨论的量词有两个，即存在量词和全称量词。全称量词对应于汉语中的“每个”、“所有的”、“任意的”等，用符号“ $\forall$ ”表示。存在量词对应于汉语中的“有的”、“至少有一个”、“存在”等，用符号“ $\exists$ ”表示。

在个体域事先给定的情形下，我们只有将个体域中的每个具体的个体代入到 $F(x)$ 中去确定其真假，才能断定 $\forall xF(x)$ 的真假。当每一个个体都使得 $F(x)=1$ 时，就有 $\forall xF(x)=1$ ；否则 $\forall xF(x)=0$ 。对于 $\exists xF(x)$ ，我们只要发现个体域中有（一个或多个）个体使得 $F(x)=1$ 时，就有 $\exists xF(x)=1$ ；否则（即任何个体都使得 $F(x)=0$ ） $\exists xF(x)=0$ 。

在用量词符号化命题时，首先强调的是个体域，同一命题在不同的个体域内可能有不同的符号化形式，同时也可能有不同的真值，因此必须先清楚个体域，不先确定所考虑的个体域就不能准确地表达原命题的意思。为了解决这一问题，使得符号化表达式有确定的含义而不需事先考虑个体域，我们在符号化表达式中增加一个指出个体变量的变化范围的谓词，这样就可以不需事先考虑个体域而能够准确地把命题的意思表示出来。这样我们考虑含有量词的命题时，总是在由一切事物构成的总体个体域上考虑问题。

当符号化时，如果命题中含有全称量词，则把所增加的指出个体变化范围的谓词（称为特性谓词）作为前件，而命题中原有的谓词作为后件，构成一个蕴含式来表示命题的意思；如果命题中含有存在量词，则用增加的特性谓词和原命题中的谓词构成的合取式表示命题的意思。

在对给定的自然语言形式的命题进行符号化时，若是为了确定命题的真值，一般约定在某个个体域上进行，否则一般在总体个体域上进行，要根据具体情况而定。若是在总体个体域上进行，则需按上面的说明加上特性谓词及相应的联结词来表示。

§9.1.2 谓词公式及其真值

定义：设 F 和 X 分别为 n 元谓词和 n 元谓词变量，x_1, x_2, Λ, x_n 是个体变量，则 $F(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$ 和 $X(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$ 都称为原子公式。

定义 1 谓词公式是指满足下列条件的公式：

（1）命题公式和原子公式是公式；
（2）若 A 是公式，则 $\neg A$ 也是公式；
（3）若 A,B 是公式，则 $(A \vee B)$，$(A \wedge B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是公式；
（4）若 A 是公式，x 是个体变量，则 $(\forall x A)$ 和 $(\exists x A)$ 也是公式；
（5）只有有限次应用（1）～（4）得到的才是公式。

定义 2 把紧跟在 $\forall x$ 或 $\exists x$ 后面并用圆括号括起来的公式，或者没有圆括号括着的一个原子公式，称为相应量词的作用域（或辖域）。

把 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中的变量叫作相应量词的指导变量（或指导变元、作用变元等）；在量词作用域中出现的与指导变量相同的变量称为约束变量（或约束变元）；除约束变量外的一切变量称为自由变量（或自由变元）。

在谓词公式中，自由变量虽然有时也在量词的作用域中出现，但不受相应量词中指导变量的约束，故可把自由变量看作公式中的参数。另一方面，在谓词公式中，一个变量可以既是约束变量，也是自由变量，后面习题解析中有相应的习题。为了避免一个变量既是自由变量又是约束变量可能引起的混淆，可对约束变量改名，使得一个变量在一个公式中只呈现一种形式，即仅为自由变量或仅为约束变量。

根据定义，谓词公式是一个关于自由变量（个体和命题）、谓词变量的命题函数，其值随着这些变量的变化而变化。

定义 3 设 A 为一谓词公式，其中含有自由个体变量 x_1, x_2, Λ, x_l，命题变量 p_1, p_2, Λ, p_m，谓词公式 X_1, X_2, Λ, X_n，则谓词公式 A 可表示成为 $A(x_1, x_2, \Lambda, x_l;\ p_1, p_2, \Lambda, p_m;\ X_1, X_2, \Lambda, X_n)$。如果对 x_1, x_2, Λ, x_l 分别指定个体 a_1, a_2, Λ, a_l，对 p_1, p_2, Λ, p_m 分别指定为真值 1 或 0，对 X_1, X_2, Λ, X_n 分别指定常谓词 F_1, F_2, Λ, F_n，则给公式 A 作了一组赋值。此时也称是对谓词公式的一个解释。当给定一组赋值后，公式的真值就惟一确定了。

定义 4 如果一谓词公式在任何赋值下均为真，则该公式称为重言式（或永真式、逻辑有效式）；如果任何赋值都使其为假，则该公式称为矛盾式（或永假式）；如果至少有一赋值使其为真，则说公式为可满足式。

有教材也出现了闭式的定义。闭式是指在任何赋值（或解释）下，命题的真值不真即

假，不会发生真值不确定的情况，也就是说，闭式在任何赋值下均为命题。

设 A,B 是谓词公式，若 $A \to B$ 是重言式，则称为重言蕴含式。重言蕴含式 $A \to B$，也称 A 逻辑蕴含 B，记作 $A \Rightarrow B$，此式称为逻辑蕴含式。若 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称为重言等价式，并称 A 和 B 等值或逻辑等价，记作 $A \Leftrightarrow B$，此式称为等值式或逻辑等价式。

除了由上一章命题逻辑推广而来的谓词逻辑等值式外，还有许多谓词公式本身特有的等值式（主要与量词相关），下面给出一些常见且重要的基本谓词公式等值式。

定理 1　设 $A(x)$ 是一个含有个体变量 x 的谓词公式，B 是一个不含自由变量 x 的公式，则下面各等值式成立：

（1）$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$
（2）$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x))$
（3）$\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x(\neg A(x)))$
（4）$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg A(x)))$
（5）$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
（6）$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$
（7）$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
（8）$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$

说明：其中（1）（2）（3）（4）称为量词转换律，它说明量词外面的否定词可以移至量词的作用域内，作用域内的否定词也可以移至外面，全称量词和存在量词可以互换；（5）（6）（7）（8）称为量词作用域的扩张与收缩，它说明了在量词作用域内，如果存在与量词约束无关的公式，在某些情况下，可把这些公式从作用域内移出，反之，亦可移入。

定理 2　设 $A(x)$ 是一个含有个体变量 x 的谓词公式，B 是一个不含自由变量 x 的公式，则下面各等值式成立：

（9）$\forall x A(x) \to B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \to B)$
（10）$\exists x A(x) \to B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$
（11）$B \to \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x(B \to A(x))$
（12）$B \to \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x(B \to A(x))$

定理 3　设 $A(x)$，$B(x)$ 都是含有个体变量 x 的谓词公式，则下面等值式成立：

（13）$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$
（14）$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
（15）$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
（16）$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x \forall y(A(x) \vee B(y))$
（17）$\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x \exists y(A(x) \wedge B(y))$

定理 4　设 $A(x,y)$ 是含有个体变量 x,y 的谓词公式，则

（18）$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

（19） $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

还有一些等值式如：

$$\forall x \forall y \big(P(x) \vee Q(y)\big) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$$
$$\forall x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$$
$$\forall x \forall y \big(P(x) \to Q(y)\big) \Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall y Q(y)$$
$$\exists x \exists y \big(P(x) \to Q(y)\big) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$$

可以由上面一些等值式推出。

§9.1.3 谓词公式的前束式

定理 5 （约束变量改名规则）设 $A(x)$ 是含有自由变量 x 而不含有变量 y 的谓词公式，$A(y)$ 是将 $A(x)$ 中的自由变量 x 均改成 y 后得到的公式。则有：

$\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall y A(y)$ ； $\exists x A(x) \Leftrightarrow \exists y A(y)$

改名规则为：

（1）对约束变量，可以改名。其更改的变量名称范围为量词中的指导变量以及该量词作用域中所有出现该变量的地方，公式的其余部分不变。

（2）改名时一定要更改为作用域中没有出现过的变量名称。

定理 6 （自由变量改名规则）设 x 是 $A(x,z)$ 中仅自由出现的个体变量，y 不出现在 $A(x,z)$ 中，则 $A(x,z) \Leftrightarrow A(y,z)$，且

$\exists z A(x,z) \Leftrightarrow \exists z A(y,z)$ ；$\forall z A(x,z) \Leftrightarrow \forall z A(y,z)$

改名规则（也称为代入规则）为：

（1）谓词公式中的自由变量可以更改，更改时需对公式中出现该自由变量的每一处都进行更改。

（2）用以更改的变量与原公式中所有变量的名称不能相同。

定义 6 设 B 是一个不含量词的谓词公式，Δ_i 为 $\forall$ 或 $\exists$。如果公式 $A \Leftrightarrow \Delta_1 x_1 \Delta_2 x_2 \Lambda\ \Delta_n x_n B$，则 $\Delta_1 x_1 \Delta_2 x_2 \Lambda\ \Delta_n x_n B$ 称为公式 A 的前束范式。当 $n = 0$ 时，有 $A \Leftrightarrow B$，B 也称为 A 的前束范式。

定理 7 （前束范式存在定理）任意一个谓词公式 A 都存在与它等值的前束范式。

说明：谓词公式的前束范式并不一定惟一，所以不能象命题公式的主范式那样直接用于解决问题，它只是将谓词公式形式的范围缩小了一点，能够给研究工作提供一定的方便。

§9.1.4 重言蕴含式与推理规则

定理 8 设 $A(x)$，$B(x)$ 均为含有自由变量 x 的任意的谓词公式，则有

（20）$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$
（21）$\exists x\big(A(x) \wedge B(x)\big) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$
（22）$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$
（23）$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \exists xA(x) \to \exists xB(x)$
（24）$\forall x\big(A(x) \leftrightarrow B(x)\big) \Rightarrow \forall xA(x) \leftrightarrow \forall xB(x)$

定理 9　设 $A(x)$ 为含有自由变量 x 的任意的谓词公式，则有

（25）$\forall xA(x) \Rightarrow A(x)$
（26）$A(x) \Rightarrow \exists xA(x)$
（27）$\forall xA(x) \Rightarrow \exists xA(x)$

定理 10　设 $A(x, y)$ 为含有自由变量 x， y 的任意的谓词公式，则有

（28）$\forall x\forall yA(x, y) \Rightarrow \exists y\forall xA(x, y)$
（29）$\exists x\forall yA(x, y) \Rightarrow \forall y\exists xA(x, y)$
（30）$\forall x\exists yA(x, y) \Rightarrow \exists y\exists xA(x, y)$
（31）$\forall x\forall yA(x, y) \Rightarrow \forall xA(x, x)$
（32）$\exists xA(x, x) \Rightarrow \exists x\exists yA(x, y)$

在推理过程中，上面给出的一些等值式和重言蕴含式可以作为推理依据使用，并分别将推理过程中使用的等值式和重言蕴含式分别称为 E 规则和 I 规则。除此之外，常用的一些推理规则还有：

（1）前提引入规则：也称为 P 规则，即前提在推理过程中随时可引入使用。
（2）结论引用规则：也称为 T 规则，即在推理过程中产生的中间结论可以作为后面推理的前提使用。
（3）全称量词规定规则（US）：如果对个体域中的所有变量 x， $P(x)$ 成立，则对个体域中的某个变量 c， $P(c)$ 成立，表示为： $\forall xP(x) \vdash P(c)$
（4）全称量词推广规则（UG）：如果对个体域中的每个个体变量 c， $P(c)$ 成立，则可得到结论 $\forall xP(x)$，表示为： $P(x) \vdash \forall xP(x)$
（5）存在量词规定规则（ES）：如果对个体域中的某个个体 $P(x)$ 成立，则必有某个特定的个体 c， $P(c)$ 成立，表示为：$\exists xP(x) \vdash P(c)$
（6）存在量词推广规则（EG）：如果对个体域中的某个个体 c， $P(c)$ 成立，则在个体域中，必存在 x，使得 $P(x)$ 成立，表示为： $P(c) \vdash \exists xP(x)$

§9.2　重点及难点解析

§9.2.1　基本要求

1．掌握个体、个体变量、个体域、谓词、全称量词、存在量词等概念，并学会利用它

们符号化一些命题并构成一些较复杂的命题。

2．掌握谓词公式的正确概念，理解约束变量和自由变量的形式及意义。

3．正确使用约束变量的改名规则和自由变量的代入规则。

4．掌握谓词公式演算的永真、等价、蕴含等概念并能比较与命题公式演算中同样的概念及其异同。

5．能利用定义证明定理 1，2，3，8，9 等中给出的各个含有量词的等价关系式和蕴含关系式。

6．能记住主要的等值式，即量词否定等值式，量词作用域扩张与收缩等值式、量词分配等值式、在有限个体域内消去量词等值式。

7．会用约束变量和自由变量改名规则进行等值演算，掌握前束范式的概念以及把谓词公式化成与之等价的前束范式的方法。

8．掌握谓词演算中推理的概念。并能利用正确的方法判断一个推理过程是否正确。

§9.2.2　疑难点解析

1．谓词公式不同于命题公式之处在于引进了谓词、个体、量词等概念。因此掌握这几个概念，学会使用它们是学好本章的关键。

2．在谓词公式的演算中，注意量词的作用域。量词的作用域是紧跟在量词后面的最小子公式。即如果紧跟量词后面的不是括号，则量词的作用域就是紧跟其后的那个原子公式。如果紧跟在量词后面的是左括号，则量词的作用域就是从此括号开始到与此括号匹配的右括号为止的范围。

3．等价关系、蕴含关系等概念都可以由永真的概念导出，故关键在于弄清楚永真的概念。在学习命题公式时我们已经学过，一个命题公式是永真式指的是这个命题公式对于一切解释的取值都为真。谓词公式的永真式也可以同样定义，只是谓词公式更加复杂，其中的可变因素更多。

4．对于公式的每种赋值（解释），谓词公式 G（在为闭式时）变成了一个命题。据此，容易说明，命题演算中的每个永真公式也是谓词公式演算中的永真公式。

5．由于引进了量词，所以增加了一些包含量词的新的永真公式（等价关系式、蕴含关系式）。这些新的公式如定理 1，2，3，8，9 等，一方面要记住相应的结论，另一方面要对其结论有深刻的理解，并对没有的性质能通过举例给出说明。

6．证明一些包含量词的新关系式是谓词公式演算中的新问题。对于这些关系式，我们都可以直接根据定义加以证明，也可由几个基本的公式推导出复杂的结论。

7．求解某个谓词公式的前束范式时，特别在给变量改名中一定要注意：在对量词及其作用域中的约束变量进行改名时，一定要更改为作用域中没有出现的变量名称。由于 $\neg$ 不能放在全式的前面，故经常用定理 1 中（1）、（2）等。

8．关于推理的基本概念，命题演算和谓词演算是一样的，只是谓词演算中增加了量词。为了能够使用命题演算中熟悉的那一套推理方法，有必要在推理过程中暂时删除量词，而在最后结论中加上量词。于是根据谓词公式有四个蕴含关系总结出四条有关删除量词、增加量词的规则，即全称规定、全称推广、存在规定、存在推广等。

§9.3　基　本　题

§9.3.1　选择题

1．谓词公式 $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\to Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的作用域是（　　　）。

A．$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))$　　B．$P(x)$
C．$(P(x)\vee\exists yR(y))$　　D．$P(x),Q(x)$

答案：C

2．谓词公式 $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\to Q(x)$ 中变元 x 是（　　　）。

A．自由变量
B．约束变量
C．既不是自由变量也是不约束变量
D．既是自由变量也是约束变量

答案：D

3．若个体域为整数域，下列公式中哪个值为真？（　　　）

A．$\forall x\exists y(x+y=0)$　　B．$\exists y\forall x(x+y=0)$
C．$\forall x\forall y(x+y=0)$　　D．$\neg\exists x\exists y(x+y=0)$

答案：A

4．设谓词 $P(x):x$ 是奇数，$Q(x):x$ 是偶数，谓词公式 $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ 在下面哪个论域中是可满足的？（　　　）

A．自然数集　　B．整数集
C．实数集　　D．以上均不成立

答案：D

5．设 $C(x):x$ 是运动员，$G(x):x$ 是强壮的。命题“没有一个运动员不是强壮的”可符号化为（　　　）。

A．$\neg\forall x(C(x)\wedge\neg G(x))$　　B．$\neg\forall x(C(x)\to\neg G(x))$
C．$\neg\exists x(C(x)\wedge\neg G(x))$　　D．$\neg\exists x(C(x)\to\neg G(x))$

答案：C

6．设 $A(x):x$ 是人，$B(x):x$ 犯错误，命题“没有不犯错误的人”符号化为（　　　）。

A．$\forall x(A(x)\wedge B(x))$
B．$\neg\exists x(A(x)\to\neg B(x))$
C．$\neg\exists x(A(x)\wedge B(x))$

D. $\neg\exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$

答案：D

7．设$Z(x): x$是整数，$N(x): x$是负数，$S(x,y): y$是 x 的平方，则“任何整数的平方非负”可表示为下述谓词公式：（　　）。

A. $\forall x\forall y(Z(x)\wedge S(x,y)\to\neg N(y))$
B. $\forall x\exists y(Z(x)\wedge S(x,y)\to\neg N(y))$
C. $\forall x\forall y(Z(x)\to S(x,y)\wedge\neg N(y))$
D. $\forall x(Z(x)\wedge S(x,y)\to\neg N(y))$

答案：A

8．令$F(x): x$是火车，$G(y): y$是汽车，$H(x,y): x$比 y 快。则语句“某些汽车比所有的火车慢”可表示为：（　　）。

A. $\exists y(G(y)\to\forall x(F(x)\wedge H(x,y)))$
B. $\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\to H(x,y)))$
C. $\forall x\exists y(G(y)\to(F(x)\wedge H(x,y)))$
D. $\exists y(G(y)\to\forall x(F(x)\to H(x,y)))$

答案：B

9．设个体域$A=\{a,b\}$，公式$\forall xP(x)\wedge\exists xS(x)$在 A 中消去量词后应为（　　）。

A. $P(x)\wedge S(x)$
B. $P(a)\wedge P(b)\wedge(S(a)\vee S(b))$
C. $P(a)\wedge S(b)$
D. $P(a)\wedge P(b)\wedge S(a)\vee S(b)$

答案：B

10．在谓词演算中，下列各式哪个是正确的？（　　）

A. $\exists x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\exists xA(x,y)$
B. $\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$
C. $\exists x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall x\exists yA(x,y)$
D. $\forall x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xB(x,y)$

答案：B

11．下列各式哪个不正确？（　　）

A. $\forall x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$
B. $\forall x(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$
C. $\exists x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

D．$\forall x(P(x)\wedge Q)\Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge Q$

答案：A

12．下面谓词公式哪个是前束范式？（　　　）

A．$\forall x\forall y\exists z(B(x,y)\to A(z))$
B．$\neg\forall x\exists yB(x,y)$
C．$\exists x\forall y\forall x(A(x,y)\wedge B(x,y))$
D．$\forall x(A(x,y)\to \exists yB(y))$

答案：A

13．在谓词演算中：$P(a)$ 是 $\forall xP(x)$ 的有效结论，其理论根据是（　　　）。

A．全称规定规则（US）　　B．全称推广规则（UG）
C．存在规定规则（ES）　　D．存在推广规则（EG）

答案：A

§9.3.2　填空题

1．令 $R(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x 是有理数。

（1）命题“并非每个实数都是有理数”。其符号化为__①__。
（2）命题“虽然有些实数是有理数，但并非一切实数都是有理数”。则其符号化可表示为__②__。

答案：① $\neg\forall x(R(x)\to Q(x))$　　② $\exists x(R(x)\wedge Q(x))\wedge\neg\forall x(R(x)\to Q(x))$

2．设 $G(x):x$ 是金子，$F(x):x$ 是闪光的，则命题“金子是闪光的，但闪光的不一定是金子”符号化为________。

答案：$\forall x(G(x)\to F(x))\wedge\exists y(F(y)\wedge\neg G(y))$

3．设 $C(x):x$ 是计算机，$P(x,y):x$ 能做 y，$I(x):x$ 是智能工作，则命题“并非所有智能工作都能由计算机来做”符号化为__________。

答案：$\neg\forall x(I(x)\to\exists y(C(y)\wedge P(y,x)))$

4．设 $Q(x):x$ 是偶数，$P(x):x$ 是素数，则命题“存在惟一一个偶素数”可符号化为__①__，“至多存在一个偶素数”可符号化为__②__。

答案：① $\exists x(Q(x)\wedge P(x)\wedge\forall y(P(y)\wedge Q(y)\to(x=y)))$
② $\forall x\forall y(Q(x)\wedge P(x)\wedge Q(y)\wedge P(y)\to(x=y))$

*5．设 $O(x):x$ 是奇数， $Z(x):x$ 是整数，则语句“不是所有整数都是奇数”所对应的谓词公式为＿＿＿＿＿＿。

答案：$\neg\forall x((Z(x)\to O(x))$

6．设个体域为自然数集， $P(x):x$ 是奇数， $Q(x):x$ 是偶数，则命题“不存在既是奇数又是偶数的自然数”可符号化为＿＿＿＿＿。

答案：$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$

7．设个体域为全总个体域， $R(x):x$ 是实数， $Q(x):x$ 是有理数， $Z(x):x$ 是整数，则命题“所有的有理数是实数”,“有些有理数是整数”,“有些有理数是实数但不是整数”符号化分别为＿①＿，＿②＿，＿③＿。

答案：① $\forall x(Q(x)\to R(x))$ ② $\exists x(Q(x)\wedge Z(x))$ ③ $\exists x(Q(x)\wedge R(x)\wedge\neg Z(x))$

8．$\forall x\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge\exists xP(x,y)$ 中 $\forall x$ 的作用域为＿①＿， $\forall y$ 的作用域为＿②＿，$\exists x$ 的作用域为＿③＿。

答案：① $\forall y(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ② $(P(x,y)\wedge Q(y,z))$ ③ $P(x,y)$

9．公式 $\forall x(P(x)\to Q(x,y)\vee\exists zR(y,z))\to S(x)$ 中自由变量为＿①＿，约束变量为＿②＿。

答案：① x,y ② x,z

10．取个体域为整数集，给定下列公式：

（1） $\forall x\exists y(x\cdot y=0)$
（2） $\forall x\exists y(x\cdot y=1)$
（3） $\exists x\exists y(x\cdot y=2)$
（4） $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$
（5） $x-y=-y+x$
（6） $\forall x\forall y(x\cdot y=y)$
（7） $\forall x(x\cdot y=x)$
（8） $\exists x\forall y(x+y=2y)$

上面公式中，真命题的有＿①＿，假命题的有＿②＿。

答案：① （1）（3）（4）（5） ② （2）（6）（8）

说明：对（7），由于 $y=1$ 时，命题的真值为 1， $y\neq 1$ 时，命题的真值为 0，不同的 y，命题的真值不同，故无法确定其真假。

*11．下列谓词公式

（1） $\neg(\exists xA(x))$ 与 $\forall x\neg A(x)$
（2） $\forall x(A(x)\vee B(x))$ 与 $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$
（3） $\forall x(A(x)\wedge B(x))$ 与 $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
（4） $\exists x\forall yD(x,y)$ 与 $\forall y\exists xD(x,y)$

中是等值的。

答案：（1）和（3）

12．对公式 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$，其中 $P(x): x=1$，$Q(x): x=2$，当论域为{1,2}时，其真值为__①__，当论域为{0,1,2}时，其真值为__②__。

答案：① 1　　② 0

13．设个体域为 $A=\{a,b,c\}$，消去公式 $\forall xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ 中的量词，可得______。

答案：$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge (Q(a) \vee Q(b) \vee Q(c))$

14．下列各式

（1）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$

（2）$(\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge A(c)) \to A(c)$

（3）$(\forall x(\neg A(x) \to B(x)) \wedge \forall x \neg B(x)) \to \exists xA(x)$

（4）$(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \to (\exists xP(x) \to \neg Q(x))$

其中______是永真式。

答案：（1）（2）（3）

说明：可以证明（3）是正确的。

$$
\begin{aligned}
&(\forall x(\neg A(x) \to B(x)) \wedge \forall x \neg B(x)) \to \exists xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &(\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x \neg B(x)) \to \exists xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(A(x) \wedge \neg B(x)) \to \exists xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &\neg \forall x(A(x) \wedge B(x)) \vee \exists xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(\neg(A(x) \wedge B(x)) \vee A(x))\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x) \vee A(x)) \Leftrightarrow \exists x(1) \Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

15．下列各式：

（1）$\exists y \forall xA(x,y)$　　（2）$\exists x \forall yA(x,y)$

（3）$\forall x \exists yA(x,y)$　　（4）$\exists x \exists yA(x,y)$

它们之间存在着_______的推理关系。
可供选择的项有：

A．（1）$\Rightarrow$（2）；（2）$\Rightarrow$（3）　　B．（2）$\Rightarrow$（1）；（3）$\Rightarrow$（4）

C．（1）$\Rightarrow$（3）；（4）$\Rightarrow$（3）　　D．（4）$\Rightarrow$（1）；（1）$\Rightarrow$（3）

E．（1）$\Rightarrow$（3）；（2）$\Rightarrow$（4）

答案：E

16．填上联结词：$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ ____ $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

答案：$\Rightarrow$

*17．只用联结词 $\neg, \forall, \to$，表示以下的公式。

（1）$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ =__①__；

(2) $\exists x(P(x) \leftrightarrow \forall y Q(y))$ = ___②___；

(3) $\forall y(\forall x P(x) \vee \neg Q(y))$ = ___③___。

答案：① $\neg\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$

② $\neg\forall x\neg((P(x) \to \forall y Q(y)) \to \neg(\forall y Q(y) \to P(x)))$

③ $\forall y(Q(y) \to \forall x P(x))$

18．给定下面谓词公式：

(1) $\forall x(\neg F(x) \to \neg F(x))$

(2) $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$

(3) $\neg(F(x) \to (\forall y G(x,y) \to F(x)))$

(4) $\forall x \exists y F(x,y) \to \exists x \forall y F(x,y)$

(5) $\neg\forall x F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$

(6) $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \to (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$

(7) $\exists x \exists y F(x,y) \to \forall x \forall y F(x,y)$

(8) $\forall x(F(x) \vee G(x)) \to (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$

(9) $(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \to \forall x(F(x) \vee G(x))$

(10) $\forall x \forall y F(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x F(x,y)$

(11) $\neg(\forall x F(x) \to \forall y G(y)) \wedge \forall y G(y)$

上面 11 个公式中，为重言式的有___①___，为矛盾式的有___②___。

答案：① (1)(2)(5)(6)(9)(10)　　② (3)(11)

说明：(4)(7)(8)都既不是重言式，也不是矛盾式，它们都存在使其为真或为假的解释。

19．给定下列各公式：

(1) $(\neg\exists x F(x) \vee \forall y G(y)) \wedge (F(u) \to \forall z H(z))$

(2) $\exists x F(y,x) \to \forall y G(y)$

(3) $\forall x(F(x,y) \to \forall y G(x,y))$

则___①___是(1)的前束范式，___②___是(2)的前束范式，___③___是(3)的前束范式。

供选择的答案有：

① $\exists x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \to H(z)))$

② $\forall x \forall y \forall z((\neg F(x) \vee G(y)) \wedge (F(u) \to H(z)))$

③ $\exists x \forall y(F(y,x) \to G(y))$

④ $\forall x \forall y(F(z,x) \to G(y))$

⑤ $\forall x \forall y(\neg F(z,x) \vee G(y))$

⑥ $\forall x \exists y(F(x,z) \to G(x,y))$

⑦ $\forall x \forall y(F(x,z) \to G(x,y))$

⑧ $\forall y\forall x(F(x,z)\to G(x,y))$
⑨ $\forall y\forall x(\neg F(x,z)\vee G(y))$

答案：②；　④⑤⑨；　⑦⑧

说明：注意约束变量改名规则、自由变量改名规则的使用。在（3）中，由于$\forall x$的作用域为$(F(x,y)\to\forall yG(x,y))$，这就决定了它的前束范式为$\forall x\forall y(F(x,z)\to G(x,y))$（将自由变量$y$改名为$z$），但由于
$\forall y\forall x(F(x,z)\to G(x,y))\Leftrightarrow\forall y\forall x(F(x,z)\to G(x,y))$
故⑧也是（3）的前束范式。

20．谓词公式$\forall xP(x)\to\forall xQ(x)\vee\exists yR(y)$的前束范式为__________________。

答案：$\exists x\forall z\exists y(P(x)\to Q(z)\vee R(y))$

21．谓词公式$\forall x(P(x)\to Q(x,y)\vee\exists zR(y,z))\to S(x)$的前束范式为______。

答案：$\exists x\forall z((P(x)\to Q(x,y)\vee R(y,z))\to S(u))$

*22．$\neg\exists x(\neg\forall yG(y,b)\to H(x))$的前束范式是____________________。

答案：$\forall x\exists y(G(y,b)\to\neg H(x))$

23．在谓词逻辑中给出四个推理：

（1）前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$，$\exists yF(y)$；　结论：$\exists yG(y)$
（2）前提：$\exists x(F(x)\wedge G(x))$；　结论：$\forall yF(y)$
（3）前提：$\exists xF(x)$，$\exists xG(x)$；　结论：$\exists y(F(y)\wedge G(y))$
（4）前提：$\forall x(F(x)\to H(x))$，$\neg H(y)$；　结论：$\forall x(\neg F(x))$

以上 4 个推理中，正确的推理有____________。

答案：(1)，(4)

24．在谓词逻辑中构造下面推理的证明：

每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车，每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车。有的人不喜欢骑自行车，因而有的人不喜欢步行。

命题符号化：$F(x)$：x喜欢步行；$G(x)$：x喜欢坐汽车；$H(x)$：x喜欢骑自行车。
前提：$\forall x(F(x)\to\neg G(x))$，$\forall x(G(x)\vee H(x))$，$\exists x(\neg H(x))$；
结论：$\exists x(\neg F(x))$。

证明：
（1）$\exists x(\neg H(x))$　前提引入
（2）$\neg H(c)$
（3）$\forall x(G(x)\vee H(x))$　前提引入
（4）$G(c)\vee H(c)$
（5）$G(c)$

(6) $\forall x(F(x)\to\neg G(x))$ 前提引入

(7) $F(c)\to\neg G(c)$ (6) US

(8) $\neg F(c)$

(9) $\exists x(\neg F(x))$ (8) EG

在上述推理中,(2)后用的推理规则是__①__,(4)后用的推理规则是__②__,(5)后用的推理规则是由(2)和(4)得到的推理规则__③__,(8)后用的是由(5)和(7)得到的推理规则__④__。

答案:① ES ② US ③ 析取三段论 ④ 拒取式

§9.3.3 判断题

1. 在谓词公式中,一个变量只能是自由变量或约束变量中的一种。( ) 答案:×
2. 公式 $\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge R(y)$ 中 $\forall x$ 的作用域为 $P(x)$。( ) 答案:×
3. 同一谓词公式,指定不同的论域,其真值不一定相同。( ) 答案:√
4. 谓词公式 $\forall xP(x)\wedge\exists y(\neg P(y))$ 是矛盾式。( ) 答案:√

*5. $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$ 为真。( ) 答案:√

证明:$\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\vee(\neg\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists xQ(x)\vee\neg\exists xP(x)$

$\Leftrightarrow\exists x((P(x)\wedge\neg Q(x))\vee Q(x))\vee\neg\exists xP(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(P(x)\vee Q(x))\vee\neg\exists xP(x)$

$\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\vee\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow 1$

6. 对公式 $\exists z(P(z)\wedge Q(x,z)\wedge M(z,y))\vee R(z)$ 中自由变量代入后,有 $\exists z(P(z)\wedge Q(a,z)\wedge M(z,b))\vee R(z)$ ( ) 答案:×
7. $\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow\exists xP(x)\to\forall yQ(y)$ ( ) 答案:√

*8. $P(x),Q(x)$ 表示谓词,P 表示命题,有 $\forall x(P(x)\to P)\Leftrightarrow\exists xP(x)\to P$ ( ) 答案:√

*9. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ ( ) 答案:√

*10. $\forall x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ ( ) 答案:×

11. 任意一个谓词公式都与一个前束范式等价。( ) 答案:√
12. 公式 $\forall xP(x)\to\exists yQ(x,y)$ 前束范式为 $\forall x\forall y(P(x)\to Q(x,y))$ ( ) 答案:×
13. 公式 $\exists x(\neg\exists yP(x,y)\to(\exists zQ(z)\to R(x)))$ 的前束范式为 $\exists x\exists y\exists z(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$ ( ) 答案:√
14. 下面的推理:
    条件:$\forall x(P(x)\vee Q(x))$,根据全称规定(US)有:$P(a)\vee Q(b)$
    是正确的。( ) 答案:×
15. 对公式 $\exists z(P(z)\wedge Q(x,z)\wedge M(z,y))\vee R(z)$ 中约束变量 z 改名后,得到的等价公式为:$\exists t(P(t)\wedge Q(x,t)\wedge M(t,y))\vee R(t)$ ( ) 答案:×

§9.4　习 题 解 析

1．用谓词和量词将下列命题符号化：

（1）没有不犯错误的人；
（2）尽管有人聪明，但未必一切人都很聪明；
（3）每个计算机系的学生都学离散数学；
（4）所有的人都学习和工作；
（5）并非一切推理都能用计算机完成；
（6）任何自然数都有惟一的一个后继数。

解：

（1）设 $F(x)$ 表示“x 犯错误”，$N(x)$ 表示“x 为人”，则此语句表示为：$\neg(\exists xN(x)\wedge\neg F(x))$；

（2）设 $F(x)$ 表示“x 聪明”，$M(x)$ 表示“x 是人”，则此语句表示为：$\exists x(M(x)\wedge F(x))\wedge\neg(M(x)\to F(x))$；

（3）设 $C(x)$ 表示“x 是计算机系的学生”，$D(x)$ 表示“x 学习离散数学”，则此语句表示为：$\forall x(C(x)\to D(x))$；

（4）设 $M(x)$ 表示“x 是人”，$S(x)$ 表示“x 要学习”，$W(x)$ 表示“x 要工作”，则此语句表示为：$\forall x(M(x)\to(S(x)\wedge W(x)))$；

（5）设 $F(x)$ 表示“x 是推理”，$M(x)$ 表示“x 是计算机”，$H(x,y)$ 表示“x 能由 y 完成”，则原命题可表示成为：$\neg\forall x(F(x)\to\exists yM(y)\wedge H(x,y))$；

（6）因原语句与“一切自然数 x，都有一个自然数 y，使得 y 是 x 的后继数；并且对任何自然数 x，当 y 和 z 都是 x 的后继时，则有 $y=z$”的意思相同，所以原语句可符号化表示为：

$$\forall x(N(x)\to\exists y(N(y)\wedge M(x,y)))\wedge\forall x\forall y\forall z(N(x)\wedge N(y)\wedge N(z)\to(M(x,y)\wedge M(x,z)\to(y=z)))$$

其中 $N(x)$ 表示 x 是自然数，$M(x,y)$ 表示 y 是 x 的后继数。

*2．令 $S(x,y,z)$ 表示“$x+y=z$”，$G(x,y)$ 表示“$x=y$”，$L(x,y)$ 表示“$x<y$”，其中个体域为自然数集，用以上符号表示下列命题：

（1）没有 $x<0$，且若 $x>0$ 当且仅当有这样的 y，使得 $x\geq y$。
（2）并非对一切 x，都存在 y，使得 $x\leq y$。
（3）对任意的 x，若 $x+y=x$，当且仅当 $y=0$。

解：

（1）可表示为：$\neg\exists xL(x,0)\wedge\forall x(L(0,x)\leftrightarrow\exists y\neg L(x,y))$
（2）可表示为：$\neg\forall x\exists y(G(x,y)\vee L(x,y))$
（3）可表示为：$\forall x(S(x,y,x)\leftrightarrow G(y,0))$

说明：对（1），把 $x>0$ 理解为：$0<x$，即 $L(0,x)$；当然也可理解为：$\neg G(x,0)\wedge\neg L(x,0)$

对（2），把 $x\leq y$ 理解为：$((x<y)\vee(x=y))$，即 $G(x,y)\vee L(x,y)$；也可理解为：

$\neg(y<x)$，即$\neg L(y,x)$

对(3)，$y=0$理解为：$G(y,0)$或$G(0,y)$，实际上也可理解为：$\neg(0<y)\wedge\neg(y<0)$，即$\neg L(0,y)\wedge\neg L(y,0)$

3．用谓词公式表示命题“$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$”，并写出该命题的否定命题。

解：

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$即为：对任意的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

令个体域D为实数集合，则可表示“$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$”为：

$\forall\varepsilon\big((\varepsilon>0)\to\exists\delta\big((\delta>0)\wedge\forall x\big((|x-a|<\delta)\wedge(|x-a|>0)\to(|f(x)-A|<\varepsilon)\big)\big)\big)$

其否定命题即：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$不成立时可表示为：给定某个$\varepsilon>0$，对任意的$\delta>0$，都存在某个$x\in(a-\delta,a+\delta)$，使得$|f(x)-A|\geq\varepsilon$。即

$\exists\varepsilon\big((\varepsilon>0)\wedge\forall\delta\big((\delta\leq 0)\vee\exists x\big((|x-a|<\delta)\wedge(|x-a|>0)\wedge(|f(x)-A|\geq\varepsilon)\big)\big)\big)$

*4．设$P(x):x$是外语学得好的学生，$Q(x):x$是三好学生，对下述自然语言用谓词符号化：

（1）并不是外语学得好的都是三好学生。

（2）有这样的学生，外语学得好而不是三好学生，但外语学不好的学生一定不是三好学生。

解：

这里只给出答案：

（1）$\neg\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)$

（2）$\big(\exists x\big(P(x)\wedge\neg Q(x)\big)\big)\wedge\forall x\big(\neg Q(x)\to\neg P(x)\big)$

5．指出下列公式中量词每次出现的作用域，并指出个体变量是约束变量还是自由变量。

（1）$\forall x\forall y\big(R(x,y)\vee L(y,z)\big)\wedge\exists xH(x,y)$

（2）$\forall x\big(P(x)\wedge\exists xQ(x)\big)\vee\big(\forall xP(x)\to Q(x)\big)$

解：

（1）在公式$\forall x\forall y\big(R(x,y)\vee L(y,z)\big)\wedge\exists xH(x,y)$中，$\forall x$的作用域为$\forall y\big(R(x,y)\vee L(y,z)\big)$，$\forall y$的作用域为$R(x,y)\vee L(y,z)$。$\exists x$的作用域为$H(x,y)$。出现在$\forall y\big(R(x,y)\vee L(y,z)\big)$和$H(x,y)$的$x$均为约束变量。出现在$R(x,y)\vee L(y,z)$中的变量$y$是约束变量而$z$是自由变量。出现在$H(x,y)$中的变量$y$是自由变量。

（2）在公式$\forall x\big(P(x)\wedge\exists xQ(x)\big)\vee\big(\forall xP(x)\to Q(x)\big)$中，第一次出现的$\forall x$的作用域为$P(x)\wedge\exists xQ(x)$，$\exists x$的作用域为$Q(x)$，而第二次出现的$\forall x$的作用域为$P(x)$。公式中只出现了变量$x$，其中最后一次出现（即$Q(x)$）是自由变量，其他是约束变量。

6．设 f,g,h 是二元运算符号，E,L 是二元谓词符号，考查的个体域为有理数集。给出解释如下：

$f(x,y)=x\cdot y$ ； $g(x,y)=x+y$ ；$h(x,y)=x^2-y^2$ ；$a=0$ ；$b=1$ ；
$E(x,y):x=y$ ； $L(x,y):x<y$

根据上面的解释，以下公式中哪些为真，哪些为假？

（1） $E\big(f(x,y),g(x,y)\big)$
（2） $E\big(f(x,x),h(x,a)\big)$
（3） $L(x,y)\to L(y,x)$
（4） $\exists xE\big(f(x,y),b\big)$
（5） $\neg E(x,a)\wedge E\big(g(y,x),y\big)$

解：

（1）根据上面的解释，$E\big(f(x,y),g(x,y)\big)$即为：$x\cdot y=x+y$。随 x,y 的值的不同，该公式的真值可真可假。因此，$E\big(f(x,y),g(x,y)\big)$在该解释下既不真也不假。

（2）根据上面的解释，$E\big(f(x,x),h(x,a)\big)$即为：$x^2=x^2-0^2$。在有理数集下，它是一个真命题。因此公式 $E\big(f(x,x),h(x,a)\big)$在该解释下为真。

（3）根据上面的解释，公式 $L(x,y)\to L(y,x)$ 即为：若 $x<y$，则 $y<x$。当 $x<y$ 时此命题为假命题，当 $x\geq y$ 时，此命题为真命题，因此公式 $L(x,y)\to L(y,x)$ 在该解释下不真也不假。

（4）根据上面的解释，公式 $\exists xE\big(f(x,y),b\big)$即为：存在有理数 x，使得 $x\cdot y=1$。该公式随着 y 的不同而有不同的真值，因此公式 $\exists xE\big(f(x,y),b\big)$在该解释下不真也不假。

（5）根据上面的解释，公式 $\neg E(x,a)\wedge E\big(g(y,x),y\big)$即为：$x\neq 0$ 且 $y+x=y$。该命题不管 y 取何值均为假命题。因此公式 $\neg E(x,a)\wedge E\big(g(y,x),y\big)$在该解释下为假。

7．在谓词逻辑中将命题（1）（2）（3）符号化，并指出各命题的真值。对应的个体域分别为①②③：

① 非负整数集 N；
② 实数集 R；
③ 整数集 Z。

（1）对于任意的 x，均有 $(x+1)^2=x^2+2x+1$
（2）存在 x，使得 $x+1=0$
（3）存在 x，使得 $5x=1$

解：

（1）在①，②，③中均符号化为 $\forall xF(x)$，其中 $F(x):(x+1)^2=x^2+2x+1$。
此命题在①,②,③中中均是真命题。

（2）在①,②，③中均符号化为 $\exists xG(x)$，其中 $G(x):x+1=0$。

此命题在①中为假命题，在②,③中为真命题。

（3）在①,②,③中均符号化为 $\exists xH(x)$，其中 $H(x):5x=1$。

此命题在①,③中是假命题，在②中是真命题。

*8．假设论域为自然数集 $N=\{1,2,3,\Lambda\}$，a 为 2，P 为命题“ $2>1$ ”；$A(x)$ 表示“ $x>1$ ”；$B(x)$ 表示“ x 是某个自然数的平方 ”。请在此基础上，求下面公式的真值：

$$\forall x(A(x)\to(A(a)\to B(x)))\to((P\to\forall xA(x))\to B(a))$$

解：

由于论域为自然数集，在上面定义下，因为 $A(a)\Leftrightarrow 1$， $P\Leftrightarrow 1$， $B(a)\Leftrightarrow 0$，故

$$\begin{aligned}
&\forall x(A(x)\to(A(a)\to B(x)))\to((P\to\forall xA(x))\to B(a))\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(A(x)\to(1\to B(x)))\to((1\to\forall xA(x))\to 0)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(A(x)\to(\neg 1\vee B(x)))\to((\neg 1\vee\forall xA(x))\to 0)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(A(x)\to B(x))\to\neg\forall xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &\neg\forall x(\neg A(x)\vee B(x))\vee\neg\forall xA(x)\\
\Leftrightarrow\ &\neg\forall x((\neg A(x)\vee B(x))\wedge A(x))\\
\Leftrightarrow\ &\neg\forall x(A(x)\wedge B(x))\\
\Leftrightarrow\ &\exists x(\neg A(x)\vee\neg B(x))
\end{aligned}$$

显然在自然数集下上式应理解为“ 不是每个大于 1 的自然数都是某个自然数的平方 ”，或“ 存在有不大于 1 或者不是某个自然数的平方的自然数 ”是正确的，如自然数 3，即上述命题的真值为 1。

9．将下列各式翻译成自然语言，然后在不同的个体域中确定它们的真值：

（1） $\forall x\exists y(x\cdot y=0)$

（2） $\exists x\forall y(x\cdot y=0)$

（3） $\forall x\exists y(x\cdot y=1)$

（4） $\exists x\forall y(x\cdot y=1)$

（5） $\forall x\exists y(x\cdot y=x)$

（6） $\exists x\forall y(x\cdot y=x)$

（7） $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$

个体域分别为：① 实数集 ② 整数集 ③ 正整数集 ④ 非负实数集

解：

（1）对所有的 x，存在 y，使得 $x\cdot y=0$。在①，②中为真命题，在③，④中为假命题。

（2）存在 x，对所有的 y，都有 $x\cdot y=0$。在①，②中为真命题，在③，④中为假命题。

（3）对所有的 x，存在 y，使得 $x\cdot y=1$。在①，②，③中为假命题，在④中为真命题。

（4）存在 x，对所有的 y，都有 $x\cdot y=1$。在①，②，③，④中均为假命题。
（5）对所有的 x，存在 y，使得 $x\cdot y=x$。在①，②，③，④中均为真命题。
（6）存在 x，对所有的 y，都有 $x\cdot y=x$。在①，②中为真命题，在③，④中为假命题。
（7）对所有的 x 和 y，存在着 z，使得 $x-y=z$。在①，②中为真命题，在③，④中为假命题。

10．设解释 T 如下：个体域为实数集 R，元素 $a=0$，函数 $f(x,y)=x-y$，特定谓词 $F(x,y)$ 为 $x<y$。根据解释 T，下列哪些公式为真？哪些为假？

（1）$\forall xF(f(a,x),a)$
（2）$\forall x\forall y(\neg F(f(x,y),x))$
（3）$\forall x\forall y\forall z(F(x,y)\to F(f(x,z),f(y,z)))$
（4）$\forall x\exists yF(x,f(f(x,y),y))$

解：

（1）$\forall x(-x<0)$
（2）$\forall x\forall y(x-y\geq x)$
（3）$\forall x\forall y\forall z((x-y)\to(x-z<y-z))$
（4）$\forall x\exists y(x<x-2y)$

根据解释 T，（1）（2）假，（3）（4）为真。

11．求下面谓词公式

$$\exists x(X(x)\wedge\forall y(X(y)\to((Y(x,z)\wedge Y(y,z)\wedge p)\to\forall t(X(t)\to (Y(x,t)\to Y(y,t))))))$$

在赋值 $(z;p;X(x);Y(x,y))=(2;1;x\text{是自然数};x<y)$ 下的值。

解：

设常谓词 $N(x)$ 表示 x 是自然数。我们将赋值代入公式并化简得到

$$\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\to(((x<z)\wedge(y<z)\wedge 1)\to\forall t(N(t)\to((x<t)\to(y<t))))))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(N(x)\wedge\forall y(N(y)\to(((x<2)\wedge(y<2))\to\forall t(N(t)\to((x<t)\to(y<t))))))$$

观察此式发现，个体变量全是约束变量，而且它们都是在自然数范围内取值。所以，原式等于在自然数域上求下面公式的值：

$$\exists x\forall y(((x<2)\wedge(y<2))\to\forall t((x<t)\to(y<t)))$$

由于式中含有多层量词，我们按照从内到外的次序先求子公式 $\forall t((x<t)\to(y<t))$ 的值。

（1）$x<t$ 时，作用域 $\Leftrightarrow 1\to(y<t)\Leftrightarrow y<t$；从而 $y<t$ 时，作用域 $\Leftrightarrow 1$，$y\geq t$ 时，作用域 $\Leftrightarrow 0$
（2）$x\geq t$ 时，作用域 $\Leftrightarrow 0\to(y<t)\Leftrightarrow 1$

由（1）（2）可知，只有在 $x<t\leq y$ 时，公式 $\forall t((x<t)\to(y<t))$ 有作用域 $\Leftrightarrow 0$，

其他情况下，作用域$\Leftrightarrow 1$。因此，当$x<y$时，取$t=y$就有$x<t\le y$成立，这时作用域$\Leftrightarrow 0$，即存在使得作用域$\Leftrightarrow 0$的t，所以$\forall t((x<t)\to(y<t))\Leftrightarrow 0$；当$x\ge y$时，不可能有$t$既使$x<t$又使$t\le y$成立，从而$\forall t((x<t)\to(y<t))\Leftrightarrow 1$。故由$x<y$和$x\ge y$两种情况的结果有$\forall t((x<t)\to(y<t))\Leftrightarrow x\ge y$，代入原式中得到

$$\exists x\forall y\big(((x<2)\wedge(y<2))\to(x\ge y)\big)$$

显然我们只要将≥ 2的自然数赋给x，无论y取何值都有：

作用域$\Leftrightarrow(0\wedge(y<2))\to(x\ge y)\Leftrightarrow 0\to(x\ge y)\Leftrightarrow 1$

例如给x赋值3，有$((3<2)\wedge(y<2))\to(3\ge y)\Leftrightarrow 0\to(3\ge y)\Leftrightarrow 1$

于是最后得到 $\exists x\forall y\big(((x<2)\wedge(y<2))\to(x\ge y)\big)\Leftrightarrow 1$，亦即原式在给定赋值下取值为真。

12．设解释T为：个体域为$D=\{-2,3,6\}$，谓词$F(x):x\le 3$，$G(x):x>5$，$R(x):x\le 7$。根据解释T，求下列各式的真值：

（1）$\forall x\big(F(x)\wedge G(x)\big)$

（2）$\forall x\big(R(x)\to F(x)\big)\vee G(5)$

（3）$\exists x\big(F(x)\vee G(x)\big)$

解：

（1）$\forall x\big(F(x)\wedge G(x)\big)$

$\Leftrightarrow\big(F(-2)\wedge G(-2)\big)\wedge\big(F(3)\wedge G(3)\big)\wedge\big(F(6)\wedge G(6)\big)$

$\Leftrightarrow(1\wedge 0)\wedge(1\wedge 0)\wedge(0\wedge 1)\Leftrightarrow 0$

所以$\forall x\big(F(x)\wedge G(x)\big)$在解释$T$下为假。

（2）$\forall x\big(R(x)\to F(x)\big)\vee G(5)$

$\Leftrightarrow\Big(\big(R(-2)\to F(-2)\big)\wedge\big(R(3)\to F(3)\big)\wedge\big(R(6)\to F(6)\big)\Big)\vee 0$

$\Leftrightarrow\big((1\to 1)\big)\wedge\big((1\to 1)\big)\wedge\big((1\to 0)\big)\Leftrightarrow 0$

所以$\forall x\big(R(x)\to F(x)\big)\vee G(5)$在解释$T$下为假。

（3）$\exists x\big(F(x)\vee G(x)\big)$

$\Leftrightarrow\exists xF(x)\vee\exists xG(x)$ 量词分配等值式

$\Leftrightarrow\big(F(-2)\vee F(3)\vee F(6)\big)\vee\big(G(-2)\vee G(3)\vee G(6)\big)$

$\Leftrightarrow(1\vee 1\vee 0)\vee(0\vee 0\vee 1)\Leftrightarrow 1$

所以$\exists x\big(F(x)\vee G(x)\big)$在解释$T$下为真。

13．设$A(x)$是一含有个体变量x的谓词公式，证明下面等值式成立：

$$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x))$$

证：

设U是$\forall xA(x)$的任意一个赋值。

（1）如果在赋值U下有$\forall xA(x)\Leftrightarrow 1$，则有$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow 0$，

从而$\neg\forall xA(x)\to\exists x(\neg A(x))\Leftrightarrow 1$

（2）如果在赋值 U 下 $\forall xA(x) \Leftrightarrow 0$，则说明至少有一个 $x=a$，使得 $A(a) \Leftrightarrow 0$，从而 $\neg A(a) \Leftrightarrow 1$，进一步有 $\exists x(\neg A(x)) \Leftrightarrow 1$，此时有

$$\neg\forall xA(x) \to \exists x(\neg A(x)) \Leftrightarrow 1 \to 1 \Leftrightarrow 1$$

因此，对任何一个赋值 U 都有

$\neg\forall xA(x) \to \exists x(\neg A(x)) \Leftrightarrow 1$。即 $\neg\forall xA(x) \Rightarrow \exists x(\neg A(x))$。

反过来，对任一赋值 U，

（1）如果 $\exists x(\neg A(x)) \Leftrightarrow 1$，则说明至少有一个 $x=b$ 使得 $\neg A(b) \Leftrightarrow 1$，则 $A(b) \Leftrightarrow 0$，从而 $\forall xA(x) \Leftrightarrow 0$，所以有

$$\exists x(\neg A(x)) \to \neg\forall xA(x) \Leftrightarrow 1$$

（2）如果在赋值 U 下使得 $\exists x(\neg A(x)) \Leftrightarrow 0$，则也有

$$\exists x(\neg A(x)) \to \neg\forall xA(x) \Leftrightarrow 0 \to\to \neg\forall xA(x) \Leftrightarrow 1$$

因此，对任何赋值 U 都有 $\exists x(\neg A(x)) \to \neg\forall xA(x) \Leftrightarrow 1$，即

$$\exists x(\neg A(x)) \Rightarrow \neg\forall xA(x)$$

因此有：$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x))$

14．设 $A(x)$，$B(x)$ 均为含有自由变量 x 的任意谓词公式，证明：

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$$

证：

$\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall xA(x) \to \forall xB(x))$	
$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \vee (\neg\forall xA(x) \vee \forall xB(x))$	联结词化归律
$\Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge \forall xA(x)) \vee \forall xB(x)$	结合律与德摩根律
$\Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg A(x) \vee B(x)) \wedge A(x))) \vee \forall xB(x)$	作用域的收缩与扩张
$\Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg A(x) \wedge A(x)) \vee (B(x) \wedge A(x)))) \vee \forall xB(x)$	分配律
$\Leftrightarrow \neg(\forall x(B(x) \wedge A(x))) \vee \forall xB(x)$	交换律、矛盾律
$\Leftrightarrow \neg(\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)) \vee \forall xB(x)$	作用域
$\Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee \neg\forall xB(x) \vee \forall xB(x)$	德摩根律
$\Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee 1$	排中律
$\Leftrightarrow 1$	零律

故有　$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \to \forall xB(x)$

说明：类似地，可以判断下面各式是否成立：

（1）$\forall xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

（2）$\exists xA(x) \to \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

（3）$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \to \forall xB(x)$

15．证明：$\forall x\forall y(G(x)\leftrightarrow H(y))\Rightarrow\forall xG(x)\leftrightarrow\forall xH(x)$。

证：

$\forall x\forall y(G(x)\leftrightarrow H(y))$

$\Rightarrow\forall x(G(x)\leftrightarrow H(x))$

$\Leftrightarrow\ \forall x((G(x)\to H(x))\wedge(H(x)\to G(x)))$　　联结词化归律

$\Leftrightarrow\ \forall x(G(x)\to H(x))\wedge\forall x(H(x)\to G(x))$　　作用域的收缩与扩张

$\Rightarrow\quad(\forall xG(x)\to\forall xH(x))\wedge(\forall xH(x)\to\forall xG(x))$

$\Leftrightarrow\ \forall xG(x)\leftrightarrow\forall xH(x)$　　联结词化归律

所以有　$\forall x\forall y(G(x)\leftrightarrow H(y))\Rightarrow\forall xG(x)\leftrightarrow\forall xH(x)$

16．设 $G(x),\ H(x)$ 分别是谓词公式，试证明 $\forall xG(x)\to\exists xH(x)\Leftrightarrow\exists x(G(x)\to H(x))$

证：

$\forall xG(x)\to\exists xH(x)$

$\Leftrightarrow\ \neg\forall xG(x)\forall\exists xH(x)$

$\Leftrightarrow\ \exists x\neg G(x)\forall\exists xH(x)$

$\Leftrightarrow\ \exists x(\neg G(x)\vee H(x))$

$\Leftrightarrow\ \exists x(G(x)\to H(x))$

17．求下列各式的前束范式，要求使用约束变量改名规则：

（1）$\neg\exists xF(x)\to\forall yG(x,y)$

（2）$\neg(\forall xF(x,y)\vee\exists yG(x,y))$

解：

（1）$\neg\exists xF(x)\to\forall yG(x,y)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg F(x)\to\forall yG(x,y)$　　量词否定等值式

$\Leftrightarrow\forall z\neg F(z)\to\forall yG(x,y)$　　约束变量改名规则

$\Leftrightarrow\exists z\forall y(\neg F(z)\to G(x,y))$　　量词作用域收缩与扩张等值式

$\Leftrightarrow\exists z\forall y(F(z)\vee G(x,y))$

（2）$\neg(\forall xF(x,y)\vee\exists yG(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg F(x,y)\wedge\forall y\neg G(x,y)$　　德摩根律及量词否定等值式

$\Leftrightarrow\exists z\neg F(z,y)\wedge\forall w\neg G(x,w)$　　约束变量改名规则

$\Leftrightarrow\exists z\forall w(\neg F(z,y)\wedge\neg G(x,w))$　　量词作用域收缩与扩张等值式

说明：公式的前束范式不是惟一的。（1）中最后两步都是前束范式，其实 $\forall y\exists z(F(z)\vee G(x,y))$ 也是（1）中公式的前束范式。

18．求下列公式的前束范式，要求使用自由变量改名规则：

（1）$\forall xF(x)\vee\exists yG(x,y)$

（2）$\exists x(F(x)\wedge\forall yG(x,y,z))\to\exists zH(x,y,z)$

解：

（1）$\forall xF(x) \vee \exists yG(x, y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(z, y)$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\big(F(x) \vee G(z, y)\big)$；

（2）$\exists x\big(F(x) \wedge \forall yG(x, y, z)\big) \to \exists zH(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \exists x\big(F(x) \wedge \forall yG(x, y, u)\big) \to \exists zH(v, w, z)$

$\Leftrightarrow \exists x\forall y\big(F(x) \wedge G(x, y, u)\big) \to \exists zH(v, w, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\exists z\big(\big(F(x) \wedge G(x, y, u)\big) \to H(v, w, z)\big)$

在上面演算中分别使用了自由变量改名规则和量词作用域收缩和扩张等值式。

*19．将下列公式化成等价的前束范式：

$\forall x\forall y\big(\exists zP(x, y, z) \wedge \big(\exists uQ(x,u) \to \exists vQ(y, v)\big)\big)$

解：

$\forall x\forall y\big(\exists zP(x, y, z) \wedge \big(\exists uQ(x,u) \to \exists vQ(y, v)\big)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\big(\exists zP(x, y, z) \wedge \forall u\exists v\big(Q(x, u) \to Q(y, v)\big)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\exists z\forall u\exists v\big(P(x, y, z) \wedge \big(Q(x, u) \to Q(y, v)\big)\big)$

20．求谓词公式 $\forall x\big(F(x) \to G(x)\big) \to \big(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\big)$ 的前束范式。

解：

$\forall x\big(F(x) \to G(x)\big) \to \big(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\big(\neg F(x) \vee G(x)\big) \to \big(\neg\exists xF(x) \vee \exists xG(x)\big)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\big(\neg F(x) \vee G(x)\big) \vee \big(\neg\exists xF(x) \vee \exists xG(x)\big)$

$\Leftrightarrow \exists x\big(F(x) \wedge \neg G(x)\big) \vee \neg\exists xF(x) \vee \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\big(F(x) \vee G(x)\big) \vee \forall x\neg F(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\big(F(x) \vee G(x)\big) \vee \forall y\neg F(y)$

$\Leftrightarrow \exists x\forall y\big(F(x) \vee G(x) \vee \neg F(y)\big)$

此即为所求前束范式。

21．求谓词公式 $\forall x\forall y\big(\exists z\big(P(x, z) \wedge P(y, z)\big) \to \exists uQ(x, y, u)\big)$ 的一个前束范式。

解：

$\forall x\forall y\big(\exists z\big(P(x, z) \wedge P(y, z)\big) \to \exists uQ(x, y, u)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\big(\neg\exists z\big(P(x, z) \wedge P(y, z)\big) \vee \exists uQ(x, y, u)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\big(\forall z\big(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)\big) \vee \exists uQ(x, y, u)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z\exists u\big(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, y, u)\big)$

*22．求公式 $\exists xP(x) \to \big(Q(y) \to \neg\big(\exists yR(y) \to \forall xS(x)\big)\big)$ 的前束范式。

解：

$\exists xP(x) \to \big(Q(y) \to \neg\big(\exists yR(y) \to \forall xS(x)\big)\big)$

$\Leftrightarrow \exists xP(x) \to \big(Q(y) \to \neg\big(\exists zR(z) \to \forall uS(u)\big)\big)$　　约束变量改名规则

$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \vee (\neg Q(y) \vee \neg(\neg\exists zR(z) \vee \forall uS(u)))$
$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x)) \vee (\neg Q(y)) \vee (\exists zR(z) \wedge \exists u(\neg S(u)))$
$\Leftrightarrow \forall x\exists z\exists u(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee (R(z) \wedge \neg S(u)))$

*23．下列公式是否成立，成立则证明，不成立，则举例说明之。

（1） $\forall x\exists yA(x,y) \Rightarrow \exists x\exists yA(x,y)$
（2） $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

证：

（1）成立；理由如下：

$\forall x\exists yA(x,y) \vdash \exists yA(c,y)$ （全称规定 US）
$\exists yA(c,y) \vdash \exists x\exists yA(x,y)$ （存在推广 EG）

（2）不成立。如当个体域为自然数集，$A(x):x$ 为偶数，$B(x):x$ 为奇数，则 $\exists xA(x) \Leftrightarrow 1$；$\exists xB(x) \Leftrightarrow 1$，从而 $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \Leftrightarrow 1$，但因不存在自然数 x，使得 x 既是奇数又是偶数，从而 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow 0$，所以 $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$ 不成立。

*24．下面公式是否是永真式？说明理由。

（1） $(A \to \exists xB(x)) \leftrightarrow \exists x(A \to B(x))$
（2） $\exists x(A(x) \to B(x)) \leftrightarrow (\forall xA(x) \to \exists xB(x))$
（3） $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$

解：

（1）、（2）、（3）均是永真式。理由如下：

（1） $(A \to \exists xB(x)) \leftrightarrow \exists x(A \to B(x))$
$\Leftrightarrow \exists x(A \to B(x)) \leftrightarrow \exists x(A \to B(x))$ 作用域的收缩与扩张
$\Leftrightarrow 1$

（2） $\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$
$\Leftrightarrow \exists x\neg A(x) \vee \exists xB(x)$
$\Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee \exists xB(x)$
$\Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$

有：$\exists x(A(x) \to B(x)) \leftrightarrow (\forall xA(x) \to \exists xB(x)) \Leftrightarrow 1$

（3） $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$
$\Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall B(x) \leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ 作用域的收缩与扩张
$\Leftrightarrow 1$

*25．下面谓词公式是否是永真式？是则证明之，不是，请举出反例：

（1） $\exists x\forall yA(x,y) \leftrightarrow \forall y\exists xA(x,y)$

（2）$(\exists xA(x) \to \exists xB(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$

解：

（1）不是永真式。如：设论域为实数集，$A(x,y)$ 表示 $x+y=0$，因对任何实数 y 均存在实数 x（取 $x=-y$），使得 $x+y=0$，故 $\forall y\exists xA(x,y)$ 在此种赋值下为 1，而此时 $\exists x\forall yA(x,y)$ 的真值为 0，因为不存在这样的实数 x，使得对所有的 y，都有 $x+y=0$。

（2）$(\exists xA(x) \to \exists xB(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\exists xA(x) \vee \exists xB(x)) \vee \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists xA(x) \wedge \neg\exists xB(x)) \vee \exists x\neg A(x) \vee \exists xB(x)$

$\Leftrightarrow (\exists xA(x) \vee \exists x\neg A(x) \vee \exists xB(x)) \vee (\neg\exists xB(x) \vee \exists x\neg A(x) \vee \exists xB(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x(A(x) \vee \neg A(x)) \vee \exists xB(x)) \vee 1$

$\Leftrightarrow \exists x(1) \vee \exists xB(x) \Leftrightarrow 1$

*26．下面公式是否有效，对有效的公式加以证明，对无效的公式加以反驳。

（1）$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$

（2）$(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$

解：

（1）不正确，（2）是有效的。

对（1），如个体域为自然数集，$P(x):x$ 为奇数，$Q(x):x$ 偶数，则 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 取值为 1，$(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \Leftrightarrow 0$，故 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$ 取值为 0。

下面给出（2）的证明：

若存在某一种赋值，使得 $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$ 为真，即 $\forall xP(x)$ 为真，或 $\forall xQ(x)$ 为真，从而对任意变量 x，有 $P(x)$ 为真或者 $Q(x)$ 为真，从而 $P(x) \vee Q(x)$ 为真，即 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 为真。

27．航海家都教育自己的孩子成为航海家，有一个人教育他的孩子去做飞行员，证明：这个人一定不是航海家。

证：

设个体域为人的集合。谓词 $S(x):x$ 是航海家；$E(x):x$ 教育他的孩子成为航海家。

前提：$\forall x(S(x) \to E(x))$，$\exists x(\neg E(x))$

结论：$\exists x(\neg E(x) \wedge \neg S(x))$

推理过程为：

① $\exists x(\neg E(x))$	条件引入
② $\neg E(c)$	存在规定（ES）
③ $\forall x(S(x) \to E(x))$	条件引入
④ $S(c) \to E(c)$	全称规定（US）
⑤ $\neg S(c)$	由②④
⑥ $\neg E(c) \wedge \neg S(c)$	由②⑤

⑦ $\exists x(\neg E(x)\wedge\neg S(x))$　　存在推广（EG）

由以上推理过程证知，这个人一定不是航海家。

28．指出下列推理中的错误：

（1）① $\forall xF(x)\to G(x)$　　前提引入

② $F(y)\to G(y)$　　①US

（2）① $\forall x(F(x)\vee G(x))$　　前提引入

② $F(a)\vee G(b)$　　①US

（3）① $F(x)\to G(x)$　　前提引入

② $\exists y(F(y)\to G(y))$　　①EG

（4）① $F(x)\to G(c)$　　前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(x))$　　①EG

（5）① $F(a)\to G(b)$　　前提引入

② $\exists x(F(x)\to G(x))$　　①EG

（6）① $\exists x(F(x)\wedge G(x))$　　前提引入

② $\exists y(H(y)\wedge R(y))$　　前提引入

③ $F(c)\wedge G(c)$　　①ES

④ $F(c)$　　③化简

⑤ $H(c)\wedge R(c)$　　②ES

⑥ $H(c)$　　⑤化简

⑦ $F(c)\wedge H(c)$　　④⑥合取

⑧ $\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　⑦EG

解：

（1）②错。使用 US，UG，ES，EG 规则应对前束范式，而①中公式不是前束范式，所以，不能使用 US 规则。

（2）②错。①中公式为 $\forall xA(x)$，这里 $A(x)=F(x)\vee G(x)$，因而使用 US 规则时，应得 $A(a)$ （或 $A(y)$），故应有 $F(a)\vee G(a)$，而不是 $F(a)\vee G(b)$。

（3）②错。应对 $A(c)=F(c)\to G(c)$ 使用 EG 规则，其中 c 为特定的使 A 为真的某个特定的个体常量，而不能为个体变量。

（4）②错。①中公式含个体变量 x，不能使用 EG 规则。

（5）②错。①中公式含两个不同的个体常量，不能使用 EG 规则。

（6）⑤错。对①使用 ES 规则得 $F(c)\wedge G(c)$，此 c 应使 $F(c)\wedge G(c)$ 为真。此 c 不一定使 $H(c)\wedge R(c)$ 为真。

*29．试找出下列推理过程中的错误，写出正确的推导过程，说明理由：

① $\forall x(P(x)\to Q(x))$　　条件

② $P(y)\to Q(y)$　　全称规定（US）

③ $\exists xP(x)$　　条件

④ $P(y)$　　存在规定（ES）
⑤ $Q(y)$　　由条件②④
⑥ $\exists x Q(x)$　　存在推广（EG）

解：

④是错误的，只能存在某个特定的个体 c，使得 $P(c)$ 成立，不能是一个自由变量 y。

正确的推理过程为：

① $\exists x P(x)$　　条件引入
② $P(c)$　　存在规定（ES）
③ $\forall x(P(x) \to Q(x))$　　条件引入
④ $P(c) \to Q(c)$　　全称规定（US）
⑤ $Q(c)$　　由②④
⑥ $\exists x Q(x)$　　存在推广（EG）

*30．下面推理是否是一个有效的推理，为什么？

① $\forall x \exists y Q(x, y)$　　条件
② $\exists y Q(a, y)$　　全称规定（US）
③ $Q(a,b)$　　存在规定（ES）
④ $\forall x Q(x,b)$　　全称推广（UG）
⑤ $\exists y \forall x Q(x, y)$　　存在推广（EG）

解：

上面的推理不是一个有效的推理。其中的推理④是错误的。因为推理③中的 a 只是某个个体，且这里的 b 可能与 a 相关，不同的 a 对应的可能是不同的 b。
例如论域为整数集时，$Q(x, y)$ 表示 $x + y = 0$，则有 $Q(3,-3) \Leftrightarrow 1$，即③成立，但得不到 $\forall x Q(x,-3)$ 成立。

*31．下面推理是否正确，若有错，请指出：

$$
\begin{aligned}
\forall x(A(x) \to B(x)) &\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B(x)) && ① \\
&\Leftrightarrow \forall x \neg(A(x) \wedge \neg B(x)) && ② \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x(A(x) \wedge \neg B(x)) && ③ \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists x A(x) \wedge \exists x \neg B(x)) && ④ \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x(\neg B(x)) && ⑤ \\
&\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee \forall x B(x) && ⑥ \\
&\Leftrightarrow \exists x A(x) \to \forall x B(x) && ⑦
\end{aligned}
$$

解：

④推理不正确。因为存在量词$\exists$对合取联结词$\wedge$不具备分配律。
$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x \neg B(x)$ 不正确。

*32．用谓词演算推理规则证明：

$$\forall x(P(x)\to(Q(y)\wedge R(x)))，\ \forall xP(x)\ \vdash Q(y)\wedge\exists x(P(x)\wedge R(x))$$

证：

推理过程为：

① $\forall xP(x)$	P 规则
② $P(a)$	US 规则
③ $\forall x(P(x)\to(Q(y)\wedge R(x)))$	P 规则
④ $P(a)\to(Q(y)\wedge R(a))$	US 规则
⑤ $Q(y)\wedge R(a)$	②④I 规则
⑥ $Q(y)$	⑤I 规则
⑦ $R(a)$	⑤I 规则
⑧ $P(a)\wedge R(a)$	②⑦E 规则
⑨ $\exists x(P(x)\wedge R(x))$	⑧EG 规则
⑩ $Q(y)\wedge\exists x(P(x)\wedge R(x))$	⑤⑨E 规则

33．改正下面证明中的错误：

前提：$\forall x(\exists y(S(x,y)\wedge M(y))\to\exists z(P(z)\wedge R(x,z)))$；

结论：$\neg\exists zP(z)\to\forall x\forall y(S(x,y)\to\neg M(y))$。

证明过程：

① $\forall x(\exists y(S(x,y)\wedge M(y))\to\exists z(P(z)\wedge R(x,z)))$	P
② $\exists y(S(b,y)\wedge M(y))\to\exists z(P(z)\wedge R(b,z))$	①US
③ $\neg\exists zP(z)$	P（附加前提）
④ $\forall z(\neg P(z))$	③T，E
⑤ $\neg P(a)$	④US
⑥ $\neg P(a)\vee\neg R(b,a)$	T，⑤I
⑦ $\forall z(\neg P(z)\vee\neg R(b,z))$	⑥UG
⑧ $\neg\exists z(P(z)\wedge R(b,z))$	⑦T，E
⑨ $\neg\exists y(S(b,y)\wedge M(y))$	②，⑧T，I
⑩ $\forall y(\neg S(b,y)\vee\neg M(y))$	⑨T，E
□ $\forall y(S(b,y)\to\neg M(y))$	⑩T，E
□ $\forall x\forall y(S(x,y)\to\neg M(y))$	□UG
□ $\neg\exists zP(z)\to\forall x\forall y(S(x,y)\to\neg M(y))$	CP

正确的证明过程为：

① $\forall x(\exists y(S(x,y)\wedge M(y))\to\exists z(P(z)\wedge R(x,z)))$	P
② $\exists y(S(b,y)\wedge M(y))\to\exists z(P(z)\wedge R(b,z))$	①US
③ $\neg\exists zP(z)$	P（附加前提）
④ $\forall z(\neg P(z))$	③，T，E

⑤ $\neg P(a)$	④，US
⑥ $\neg P(a) \vee \neg R(b,a)$	T，⑤I
⑦ $\neg(P(a) \wedge R(b,a))$	⑥，T，E
⑧ $\forall z \neg(P(z) \wedge R(b,z))$	⑦，UG
⑨ $\neg\exists z(P(z) \wedge R(b,z))$	⑧，T，E
⑩ $\neg\exists y(S(b,y) \wedge M(y))$	②，⑨，T，E
□ $\forall y(S(b,y) \to \neg M(y))$	⑩，T，I
□ $\neg(S(b,c) \wedge M(c))$	□，US
□ $\neg S(b,c) \vee \neg M(c)$	□，T，E
□ $S(b,c) \to \neg M(c)$	□，T，E
□ $\forall y(S(b,y) \to \neg M(y))$	□，UG
□ $\forall x \forall y(S(x,y) \to \neg M(y))$	□，UG
□ $\neg\exists z P(z) \to \forall x \forall y(S(x,y) \to \neg M(y))$	CP

参 考 文 献

[1] 耿素云，屈婉玲. 离散数学基础. 北京：北京大学出版社，1994
[2] 张立昂. 离散数学习题集（抽象代数分册）. 北京：北京大学出版社，1990
[3] 耿素云. 离散数学习题集（图论分册）. 北京：北京大学出版社，1990
[4] 李鸣山，张银洲. 离散数学. 武汉：湖北科技出版社，1994
[5] 李为鉴. 离散数学－方法导引. 上海：复旦大学出版社，1990
[6] 李为鉴等. 离散数学基础题解. 北京：人民邮电出版社，1982
[7] 黄和之. <离散数学导论>习题选解. 北京：北京经济学院出版社，1988
[8] 温武，钟沃坚. 离散数学及应用. 广州：华南理工大学出版社，1996
[9] 刘玉珍，刘咏梅. 离散数学. 武汉：武汉大学出版社，1995
[10] （美）S．利普舒茨. 离散数学的理论与习题. 南宁：广西人民出版社，1984
[11] 邵学才，叶秀明. 计算机等级考试教程（离散数学）. 北京：机械工业出版社，1998
[12] 傅彦，顾小丰. 离散数学及其应用. 北京：电子工业出版社，1997
[13] 卢开澄，卢华明. 图论及其应用. 北京：清华大学出版社，1995
[14] 戴一奇等. 图论与代数结构. 北京：清华大学出版社，1995
[15] 孙俊秀等. 离散数学标准题解. 天津：天津人民出版社，1993
[16] 洪帆. 离散数学. 武汉：华中理工大学出版社，1988
[17] 左孝凌等. 离散数学理论、分析、题解. 上海：上海科技文献出版社，1988