线 性 几 何 引 论

杨文茂　叶明训　编著

武 汉 大 学 出 版 社

1993 年

线性几何引论

杨文茂　叶明训　编著

※

武汉大学出版社出版发行
(430072　武昌　珞珈山)
印刷厂印刷
※
850×1168　1/32　印张　千字
1993年9月第1版　1993年9月第1次印刷
印数: —
ISBN　7-307-01427-0/O.117
定价:3.15元

目　　录

序言 …… (1)

第一章　基本概念 …… (1)

§1.1　群和域 …… (1)

§1.2　向量空间 …… (7)

§1.3　对偶空间 …… (11)

§1.4　双线性空间 …… (16)

§1.5　线性代数 …… (20)

§1.6　线性群和线性几何 …… (24)

第二章　仿射几何 …… (30)

§2.1　仿射空间 …… (30)

§2.2　平面的交与联 …… (36)

§2.3　关联定理 …… (41)

§2.4　仿射变换群 …… (44)

§2.5　平面与二次超曲面 …… (50)

第三章　射影几何 …… (55)

§3.1　射影空间与关联定理 …… (55)

§3.2　射影坐标与射影变换 …… (61)

§3.3　对偶原理 …… (65)

§3.4　德沙格定理 …… (70)

§3.5　共线四点的交比 …… (76)
§3.6　二次超曲面 …… (83)

第四章　欧氏几何 …… (88)
§4.1　欧氏空间 …… (88)
§4.2　E^4 内两个平面的夹角 …… (93)
§4.3　E^4 内两个二维平面的关系 …… (99)
§4.4　E^n 内两个平面的夹角 …… (104)
§4.5　E^n 内两个平面的距离 …… (111)
§4.6　E^n 内的等距变换 …… (117)
§4.7　E^4 内的等距变换 …… (123)

第五章　厄尔米几何与辛几何 …… (127)
§5.1　厄尔米几何 …… (127)
§5.2　辛几何 …… (129)

序　　言

所谓某一种几何学(M, G)是研究底空间 M 中的图形 $C(M)$在作用于 M 的变换群 G 下不变几何性质的学科.图形 C 是 M 中点构成的集合,变换 $\phi\in G$ 是作用于 M 上的点变换

$$\phi: M \to M, m(\in M) \to m' = \phi(m) \in M.$$

经典的几何学,如欧氏几何 $\mathbf{E}^n$,仿射几何 $\mathbf{A}^n$ 和射影几何 $\mathbf{P}^n$,$n = 1,2,3$,所讨论的内容多与线性概念联系在一起,主要有如下几方面:

1. 底空间 M 常与某个线性空间有关,如欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 与仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 可以从 n 维实线性空间 $\mathbf{R}^n$ 通过定位向量确定点,引入欧氏度量等而得到.而射影空间 $\mathbf{P}^n$ 可以从 $n+1$ 维实线性空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 通过等价关系～给出,即 $\mathbf{P}^n = (\mathbf{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$.

2. 研究的对象是图形,如点 P,直线 L,平面 π,它们都可以视为线性平移子空间,即各种维数的“平面”.

3. 研究的内容,如射影空间中的结合关系 $x\cdot\xi = 0$(x 表示点,ξ 表示直线或平面),无论对于 x 还是 ξ 都是线性的.又如欧氏空间的内积 $\langle x, y\rangle$ 无论对于 x 还是 y 也都是线性的.

4. 研究的变换群 G 多是与全线性群 $GL(n, \mathbf{R})$有关的群或其子群.如欧氏变换群的齐次部分或正交群就是全线性群中满足正交条件的子群.如仿射群的齐次部分是全线性群.又如射影变换群在非齐次坐标表示时,其中的变换并非线性,而是分子分母都为一次的分式.但如果换为齐次坐标表示时,却也是线性的.不过这

时齐次坐标的个数比空间维数增加一个.

也许有人提出异议说,“经典几何中还研究了二次曲线与二次曲面,它们的方程并非线性.”但是,按二次曲线的射影定义,它是两个线束(线性图形)在射影对应下对应线交点的轨迹,可视二次曲线为线性的“产物”.关于二次曲面也有类似结果.

如果解脱线性的约束,向各种非线性方面发展,得到各种几何学.如微分几何研究的是一般曲线与曲面并非线性,当然是对经典几何的推广.但目前称之为“线性几何”的一门学科是在保持线性概念前提下对经典几何向各方面的推广.在某种意义下讲,线性几何又可理解为对线性代数与线性群的理论赋于几何语言和几何内容的一门学科.这里所说各种推广主要有如下几方面:

1. 底空间 M 从一、二、三维向高维 n 发展,即讨论一般与 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 有关的几何学.基域也不限于实数域 $\mathbf{R}$,而可以是复数域 $\mathbf{C}$ 或一般域 F.

2. 研究的对象是高维空间 M 中的各维线性平移子空间或平面 A^k, $k = 0, 1, \cdots, n-1$.如讨论两个平面 A^k 与 A^l 的相互关系、它们之间的夹角与距离.又如讨论作为三角形在高维的推广——单形的理论,如正弦定理与余弦定理在高维的推广.

3. 研究的内容有各种形式的推广.如结合关系,在 n 维射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中,我们就可以定义平面 A^k 与平面 B^{n-1-k}的结合关系,它们的维数和是 $n-1$.这正是在 $\mathbf{P}^2$ 中点与线的结合或在 $\mathbf{P}^3$ 中点与面的结合的自然推广.又如内积 $\langle x, y\rangle$ 关于 x, y 的对称性是欧氏内积的条件之一,我们也可以讨论具有反对称性

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 0$$

的辛内积,从而得到辛几何.

4. 研究的变换群 G 可以是全线性群的各种子群或与它有关的群,如辛群,厄尔米群等等.

本书作为线性几何的基础教材,共分六章.第一章介绍了各种必备的知识.在此基础上,我们试图首先对“线性几何”下一个确切

的定义.第二章讲仿射几何,着重于仿射空间中平面的相互关系.第三章讲射影几何,介绍了射影不变量交比、结合关系、对偶原理以及二次超曲面等.第四章讲欧氏几何,讲述了高维欧氏空间中各维平面之间的一些度量问题,如夹角和距离的问题.第五章讲厄尔米几何与辛几何.第六章讲椭圆几何,作为非欧几何的一个例子,还介绍了二维球面上的球面三角形的一些基本理论.另外,书末有个附录,介绍了用复数与四元数来表示欧氏空间中等距变换的一个应用.最后给出了关于线性几何方面的参考文献,包括书与论文.

我们希望线性几何这门课程能作为高校数学系学生的一门基础课,并试图用它来代替或部分地代替空间解析几何、高等几何或射影几何课.因此,我们曾在武汉大学《中法数学试验班》上利用此书的前稿讲授过四届.在编写过程中,我们广泛地参阅了书末开列的书籍与论文,几经修改,错误难免,希望得到使用此书的师生们的批评指正.

编　者

1992 年 3 月于珞珈山

第一章　基本概念

在这一章内,我们按照 F .Klein 的观点,要给线性几何下一个定义,以便后面各章作深入讨论 .为此,又先要简明介绍一些必备的代数结构 .本章的主要内容有:群、域和向量空间;对偶空间和双线性空间;线性代数;线性群和线性几何的概念 .

§1 .1　群　和　域

群、域和向量空间都是代数系,即有闭合运算的集合 .

假设 A 和 B 是两个集合,那么由 A 与 B 中元素的有序元素偶(a, b)构成一个新的集合

$$\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

叫做 A 与 B 的笛卡尔积,简称为积,记成 $A \times B$.例如实数集 **R** 与自身的笛卡尔积是

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}.$$

定义 1　集合 G 叫做群,如果它满足下面的四个条件:

1 . 有闭合的运算:有 $G \times G$ 到 G 的一个映射 ϕ,即对于任意的$(a, b) \in G \times G$,

$$(a, b) \to \phi(a, b) \in G,$$

记 $\phi(a, b) = ab$,叫做 a 与 b 的乘积 .这里 ϕ 又叫做 G 的一个乘法运算,简称为乘法 .

2 . 有结合律:对于任意的 $a, b, c \in G$,都有

$$(ab)c = a(bc) .$$

3．有单位元 e: G 内有元素 e,使得

$$ae = ea = a \quad (\forall\ a \in G).$$

4．有逆元: 对于任意的 $a \in G$,有相应的 $a' \in G$,使得

$$aa' = a'a = e.$$

这里 a'叫做 a 的逆元,记 $a' = a^{-1}$.

元素的个数为有限的群叫做有限群,否则叫无限群.

定义 2　如果群 G 的乘法运算还满足交换律,即

$$ab = ba \quad (\forall\ a, b \in G),$$

那么群 G 就叫做可换群,或 Abel 群.

我们通常把定义 1 内的群叫做乘群,把定义 2 内的可换群叫做加群.乘群内的术语中,乘法、积、单位元、逆元等,在加群内分别换成加法、和、零元、负元.

例 1　整数集 **Z** 关于加法成可换群.

例 2　有理数集 **Q**,实数集 **R**,复数集 **C** 关于加法都成可换群.这些集合中去掉数 0 得到的集合,关于乘法也都成可换群.

例 3　假设 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$是 n 个元素的集合,σ是 S 到 S 上的一对一的映射.那么,这样的映射 σ 总共有 $n!$ 个,组成一个集合 G.关于映射的乘法,集合 G 是一个有限群,它的元素为

$$\sigma: i \to \sigma(i), \quad i = 1, \cdots, n.$$

σ 的逆元为

$$\sigma^{-1}: \sigma(i) \to i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

这里 σ 叫做 S 的一个置换,G 叫做 n 个文字上的对称群,通常记成 S_n.

定义 3　假如群 G 的子集合 $H(H \quad G)$,关于 G 的运算 φ,也成为一个群.那么,H 叫做 G 的子群.

显然,群 G 的子集合$\{e\}$和 G 都是 G 的子群,不是$\{e\}$和 G 的子群叫真子群.假设 H 是群 G 的子群,K 是 H 的子群,那么 K 也是 G 的子群.譬如前面例 1 和例 2 的集合之间有包含关系:

$$\mathbf{Z} \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{C},$$

我们也容易判别它们之间有无子群关系,无论关于加法或乘法 .

例 4 平面上的等距变换 φ,可以在平面直角坐标系中表示成

$$\varphi: \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + x, \\ y' = \pm (x\sin\theta + y\cos\theta) + y, \end{cases} \qquad (1)$$

其中的系数行列式为±1 .所有这样的变换 φ 关于变换的乘法构成等距变换群 G .当(1)的第二式取正号时,φ叫正常变换,所有正常的等距变换组成 G 的子群 G_+ ;当(1)的第二式取负号时,φ叫反常变换,所有反常的等距变换组成 G 的子集合 G_- ,它不是 G 的子群 .群 G 的单位元就是恒等变换,表示成

$$\varphi_0: \begin{cases} x' = x, \\ y' = y . \end{cases}$$

例 5 平面上的仿射变换 φ,可以在平面仿射坐标系中表示成

$$\varphi: \begin{cases} x' = ax + by + x, \\ y' = cx + dy + y, \end{cases} \qquad (2)$$

其中系数行列式 $ad - bc \neq 0$.所有这样的变换 φ 关于变换的乘法构成仿射变换群 AG,例 4 中等距变换群 G 是它的子群 .

但是,象下面定义的子集合并不一定是子群 .

定义 4 假设 H 是群 G 的子群, g 是 G 的元素 .那么,

$$gH = \{ gh \mid h \in H \}, \quad Hg = \{ hg \mid h \in H \}$$

分别叫做 H 的左、右陪集 .

从形式上看,群 G 有多少个元素 g,就有多少个相应的左陪集 gH .实际上并不一定如此,下面性质以左陪集来证明,右陪集也可同样证明 .

性质 1 群 G 关于子群 H 的两个左(右)陪集 aH 与 bH,或是重合,或是无公共元素 .也就是说,

$$aH = bH, \text{ 或 } aH \cap bH = ě \ .$$

证明 如果 $aH \cap bH \neq ě$,就存在 $c \in aH$, $c \in bH$.于是,

$$c = ah_1 = bh_2, \quad h_1, h_2 \in H,$$

因而 $b = ah_1 h_2^{-1} \in aH$.对于任意 $bh \in bH$,就有

$$bh = a(h_1 h_2^{-1} h) \in aH,$$

得到 $bH \subseteq aH$.同理可证 $aH \subseteq bH$,因而 $aH = bH$.

既然两个陪集可能重合,怎样才能判别两个元素 a 与 b 属于同一个陪集呢?

性质 2 a 与 b 属于群 G 关于子群 H 的同一个左(右)陪集,必要充分条件是 $a^{-1}b \in H(ab^{-1} \in H)$.

证明 $a, b \in cH$ 时, $a = ch_1$, $b = ch_2$, 因此 $a^{-1}b = h_1^{-1}h_2 \in H$.反过来, $a^{-1}b = h$ 时, $b = ah \in aH$, 因而 $bH \subseteq aH$.同理 $aH \subseteq bH$, 得到 $aH = bH$.

在左陪集 aH 中, a 叫做代表元 .一个陪集的代表元并不一定是唯一的,即有

性质 3 左(右)陪集 aH 内的任何元都可以作代表元 .

证明 如果 $a' \in aH$,那么 $a' = ah$, $a'H \subseteq aH$;同时 $a = a'h^{-1}$, $aH \subseteq a'H$,得到 $a'H = aH$.

我们把群 G 关于子群 H 的所有不同的左陪集组成一个集合

$$G/H = \{ \bar{g} = gH \mid g \in G \},$$

即由新的元素 $\bar{g}$ 组成的新的集合 .在一定的条件下,这个集合又可以成为一个群 .

定理 假设 G 是可换群, H 是 G 的子群 .那么 G/H 可以成群 .

证明 首先来给定 $(G/H)\times(G/H)$ 到 G/H 的一个映射 $\bar{f}$,即给定 G/H 的一个闭合运算

$$\bar{f}: (aH, bH) \to \bar{f}(aH, bH) = (aH)(bH) = (ab)H .$$

这个映射是确定的, 由于性质 3 有不同代表元时, $\bar{f}$ 仍然是一意的:如果 $a' \in aH$, $b' \in bH$,那么 $a' = ah_1$, $b' = bh_2$.于是,

$$a'b' = (ah_1)(bh_2) = (ab)(h_1 h_2) \in (ab)H .$$

当陪集取不同代表元时,珔使得

$$珔(aH, bH) = 珔(a'H, b'H)$$
$$= (a'b')H = (ab)(h_1 h_2)H$$
$$= (ab)H.$$

其次,由 G 有结合律又得到 G/H 内也有结合律,即

$$(aH \cdot bH) \cdot cH = (ab)H \cdot cH$$
$$= [(ab)c]H = [a(bc)]H$$
$$= aH \cdot (bc)H = aH \cdot (bH \cdot cH).$$

再当 G 的单位元是 e 时,G/H 有单位元 $eH = H$.

最后,aH 的逆元是 $a^{-1}H$.这就完全证明了定理.

例 6　在例 4 中,平面上的等距变换群

$$G = G_+ \cup G_-,$$

其中 G_+ 是 G 的子群,也是 G 关于 G_+ 的一个左陪集,代表元可以取作 φ_0;其中 G_- 不是 G 的子群,却是 G 关于 G_+ 的一个左陪集,代表元可以取作

$$\varphi_1: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

这就是说,$G_- = \varphi_1 G_+$, $G = G_+ \cup \varphi_1 G_+$.

等距变换群不是可换群,这只要看(1)中 x_0 与 y_0 不同时为 0 的两个变换相乘是不可换的.当 $x_0 = y_0 = 0$ 时,即 G 内所有保持坐标原点不动的等距变换,它们组成一个群 G^0,是 G 的一个子群.同前一样,$G^0 = G^0_+ \cup G^0_-$,其中 $G^0_+ = G_+ \cap G^0$,$G^0_- = G_- \cap G^0$.而且还有 $G^0_- = \varphi_1 G^0_+$,是 G^0 关于子群 G^0_+ 的一个左陪集.由定理的结论,

$$G^0/G^0_+ = \{\varphi_0 G^0_+, \varphi_1 G^0_+\}$$

可以成为一个二元群.前面定理中的群 G/H 叫做 G 关于 H 的商群.

前面介绍了群的定义和一些性质,群是有一个闭合运算的代

数系.下面再来介绍域的概念,它有两个运算.

定义 5 集合 F 叫做体,如果它满足下面的三个条件:

1. F 关于运算 φ 成可换群(加群);
2. $F-\{0\}$ 关于运算 ψ 成群(乘群),这里 0 是加群的零元;
3. 有分配律:对于任意 $a, b, c \in F$,都有

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (a+b)c=ac+bc.$$

如果条件 2 的乘群还是可换群,F 就叫做域.子集成域时叫做子域.

例 2 说明,数集 **Q**, **R**, **C** 都是域.整数集 **Z** 不是域,因为乘法不是闭合的.在一般的域内,还有下面的概念.

定义 6 假设 F 是域,0 是其加群的零元,e 是其乘群的单位元.如果存在一个最小的正整数 p,使得 p 个 e 的和

$$pe=e+\cdots+e=0,$$

就称 p 为 F 的特征数;如果不存在这样的正整数,就称 F 的特征数为 0.

数域 **Q**, **R**, **C** 的特征数都是 0;代数学里还证明了,域的特征数是 0 或质数.所谓特征数,并不仅仅表示单位元的特性,还有下面的

性质 4 假设域 F 的特征数是 p, a 是 F 的元素,那么 $pa=0$.

证明 当特征数是 0 时,性质显然成立.当 p 为正整数时,

$$\begin{aligned} pa &= a+\cdots+a=ea+\cdots+ea \\ &= (e+\cdots+e)a=pe\cdot a \\ &= 0e=0. \end{aligned}$$

性质证毕.我们在此作一个总的声明:本书所讨论的域,特征数都不为 2.也就是说,对于域的任何非零元素 a,都有 $2a\neq 0$.

习 题

1. 平面 $\mathbf{R}^2$ 或空间 $\mathbf{R}^3$ 中的旋转群是不是可换群?

2. $n\geq 3$ 时 S_n 不是可换群.

3. 试证明群内有:

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$;

(2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

(3) $ac = bc$ 或 $ca = cb$ 时 $a = b$.

4. 假设群 G 关于子群 H 的左陪集共有有限多个,那么右陪集也有同样多个.

5. 在域内 $ab = 0$ 时必有 $a = 0$ 或 $b = 0$.

6. 域的特征数为 0 或质数.

§1.2 向 量 空 间

向量空间的理论是线性几何的重要基础,譬如仿射空间内的各维平面实质上是向量空间的商空间的元素.在这一节内,我们要补充一些向量空间的知识,对于线性代数里已经介绍的一般概念和结论就不详述了.

定义 1 假设 F 是一个域,$\mathbf{V}$ 是一个集合.那么,我们把 $\mathbf{V}$ 叫做 F 上的线性空间或向量空间,把 F 叫做向量空间 $\mathbf{V}$ 的基域,如果它们满足下面的三个条件:

1. 关于 $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}$ 的映射 φ,集合 $\mathbf{V}$ 是一个加群.记

$$\varphi: (a, b) \to \varphi(a, b) = a + b \in \mathbf{V} \quad (\forall a, b \in \mathbf{V}).$$

2. 存在 $F\times\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}$ 的映射 ψ.记

$$\psi: (\lambda, a) \to \psi(\lambda, a) = \lambda a \in \mathbf{V} \quad (\forall \lambda \in F, a \in \mathbf{V}).$$

3. 上述两个映射有

分配律 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ $(\forall \lambda, \mu \in F, a, b \in \mathbf{V})$;

结合律 $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ $(\forall \lambda, \mu \in F, a \in \mathbf{V})$;

对于 F 的单位元 e 有 $ea = a$ $(\forall a \in \mathbf{V})$.

上面的 φ 叫做加法,ψ 叫做数乘,统称为线性运算.又把 $\mathbf{V}$ 的元素叫做向量,F 的元素叫做数.$F = \mathbf{R}$ 时 $\mathbf{V}$ 又叫实空间,$F = \mathbf{C}$ 时 $\mathbf{V}$

叫复空间 .

例 1 假设 F 是一个域,那么集合

$$F^n = \{ x = (x^1, \cdots, x^n) \mid x^i \in F, i = 1, \cdots, n \}$$

对于线性运算

$$(x^1, \cdots, x^n) + (y^1, \cdots, y^n) = (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n),$$
$$\lambda(x^1, \cdots, x^n) = (\lambda x^1, \cdots, \lambda x^n)$$

成为一个域 F 上的向量空间 .

向量空间内存在一个基,我们在本书中只讨论有限维的向量空间,即基内只含有限多个向量, $\dim \mathbf{V} = n$.向量空间内的向量可以唯一地表示成

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i, \tag{1}$$

在不引起误解的情况下简单表示成 $x = \sum_i x_i e^i$,这里 $x^1, \cdots, x^n$ 叫做 x 关于基 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ 的坐标 .我们甚至也用 x 来表示 n 元向量 $x = (x^1, \cdots, x^n)$,使(1)更简单地表示成

$$x = xe^{\mathrm{t}} = ex^{\mathrm{t}} .$$

但是,一个向量空间内的基不是唯一的 .假设 $\mathbf{V}$ 的两个基

$$e = (e_1, \cdots, e_n), \quad e' = (e_1', \cdots, e_n')$$

之间有变换式

$$e' = eA, \tag{2}$$

这里系数矩阵 A 的行列式 $\det A \neq 0$.那么, $\mathbf{V}$ 的同一个向量 x 用不同基来表示

$$x = xe^{\mathrm{t}} = x'e'^{\mathrm{t}} \tag{3}$$

时,不同的坐标 x 与 x' 之间有变换式

$$x = x'A^{\mathrm{t}}, 即\ x' = x(A^{-1})^{\mathrm{t}} . \tag{4}$$

为了讨论和比较两个向量空间,我们常常利用下面的线性映射,它保持向量空间的线性运算 .

定义 2 假设域 F 上向量空间 $\mathbf{V}$ 到 F 上向量空间 $\mathbf{V}'$ 的映射

$$\rho: x(\in \mathbf{V}) \to \rho(x) = x' \in \mathbf{V}',$$

满足条件

$$\rho(x + y) = \rho(x) + \rho(y), \ \rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)$$
$$(\forall \lambda \in F, x, y \in \mathbf{V}).$$

那么，ρ 叫做 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的线性映射或同态映射.再假若 ρ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的双射，即到上的一对一的映射，那么 ρ 又叫做同构映射，而且称 $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{V}'$ 同构，记成 $\mathbf{V} \cong \mathbf{V}'$.

比较域 F 上的两个向量空间，区别的不是空间的元素，而是空间的维数.线性代数已经证实：域 F 的任意 n 维向量空间都同构于 F^n.因此，同一域上的任意两个同维向量空间互相同构；同一域上的两个同构的向量空间有相同的维数.

我们还知道，域 F 上的向量空间 $\mathbf{V}$ 的子集合 K 也是 F 上的向量空间时，叫做 $\mathbf{V}$ 的子空间.而且，$\mathbf{V}$ 的子空间 V_1, V_2 之和与交

$$V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 \in \mathbf{V} \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\},$$
$$V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbf{V} \mid x \in V_i, i = 1, 2\}$$

都是 $\mathbf{V}$ 的子空间，它们之间有以下维数关系.

定理 1 $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

特别地，$\mathbf{V}$ 的子空间 V_1 与 V_2 满足 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$，那么和 $V_1 + V_2$ 叫做直接和，记成 $V_1 \oplus V_2$.我们可以推广成

定义 3 假设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 $\mathbf{V}$ 的子空间，而且 $V_i \cap V_j = \{0\}, i, j = 1, \cdots, m, i \neq j$.那么，集合

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i \mid x_i \in V_i, i = 1, \cdots, m$$

是 $\mathbf{V}$ 的子空间，叫做 $V_1, \cdots, V_m$ 的直接和，记作 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$.

和 $m = 2$ 的情况一样，$H = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 的充要条件是

$$H = V_1 + \cdots + V_m;$$

$$\dim H=\sum_{i=1}^{m}\dim V_i .$$

还有一个充要条件是：H 的向量 $x=\sum_{i=1}^{m}x_i$ 的表示方法是唯一的．

最后，类似§1.1内商群，我们来介绍商空间的概念．

假设 $\mathbf{V}$ 是域 F 上的向量空间，H 是 $\mathbf{V}$ 的子空间．我们把向量空间只看作加群，H 是可换群 $\mathbf{V}$ 的子群．根据§1.1的定理，$\mathbf{V}/H$ 是一个商群．现在把乘法改变成加法的符号，$\mathbf{V}/H$ 的元素是 $\bar a=a+H$，加法运算是 σ 使得 $\sigma(\bar a,\bar b)=\bar a+\bar b=\overline{a+b}$．于是要问，$\mathbf{V}/H$ 是否能成为域 F 上的向量空间呢？为此还给定一个 $F\times(\mathbf{V}/H)$ 到 $\mathbf{V}/H$ 的映射

$$\tau:(\lambda,\bar a)\to\tau(\lambda,\bar a)=\lambda\bar a=\overline{\lambda a}.$$

这个数乘运算是确定的，$\bar a=\overline{a'}$ 时，由§1.1性质2，有 $a'-a\in H$，因此 $\lambda(a'-a)\in H$，$\lambda a'-\lambda a\in H$，$\overline{\lambda a'}=\overline{\lambda a}$．于是，

$$\tau(\lambda,\bar a)=\tau(\lambda,\overline{a'})=\overline{\lambda a'}=\overline{\lambda a},$$

说明 τ 的定义是确定的，与 $\bar a$ 的代表元选择无关．

容易证明，对于上述线性运算 σ 和 τ，有下面的

定理 2　假设 $\mathbf{V}$ 是域 F 上的向量空间，H 是 $\mathbf{V}$ 的子空间．那么，$\mathbf{V}/H$ 也是域 F 上的向量空间，叫做 $\mathbf{V}$ 对于 H 的商空间．

商空间也有维数，而且有下面的维数关系．

定理 3　假设 $\mathbf{V}$ 是域 F 上的向量空间，H 是 $\mathbf{V}$ 的子空间．那么，

$$\dim\ \mathbf{V}/H=\dim\mathbf{V}-\dim H .$$

证明　取 H 的基 $e_1,\cdots,e_m$，添加成 $\mathbf{V}$ 的基

$$e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n,$$

只需证明 $\overline{e_{m+1}},\cdots,\overline{e_n}$ 是 $\mathbf{V}/H$ 的一个基．首先，如果有

$$k_{m+1}\overline{e_{m+1}}+\cdots+k_n\overline{e_n}=\bar 0,$$

即是 $\overline{k_{m+1}e_{m+1}}+\cdots+\overline{k_ne_n}=\bar 0$，$k_{m+1}e_{m+1}+\cdots+k_ne_n\in H$，可表示成

$$k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_n e_n = k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m,$$

$$-k_1 e_1 - \cdots - k_m e_m + k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_n e_n = 0,$$

由 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 线性无关得 $k_i = 0, i = m+1, \cdots, n$.这就证明了 $\overline{e_{m+1}}, \cdots, \overline{e_n}$ 线性无关 .

其次,任意 瑢$\in$ **V**/ H,由 $x \in$ **V** 得

$$x = k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m + k_{m+1}e_{m+1} + \cdots + k_n e_n,$$

$$瑢 = k_1 \overline{e_1} + \cdots + k_m \overline{e_m} + k_{m+1} \overline{e_{m+1}} + \cdots + k_n \overline{e_n} .$$

但是, $i = 1, \cdots, m$ 时 $e_i \in H, \overline{e_i} = \bar{0}$, 因而 瑢能用 $\{\overline{e_{m+1}}, \cdots, \overline{e_n}\}$ 线性表示 .

定理 2 证毕 .向量空间的这些结果将在以后章节中应用 .

习　　题

1 . 试证明:**R** 是域 **Q** 上的向量空间;**C** 是域 **Q**,**R**,**C** 上的向量空间;域 F 是其子域上的向量空间 .

2 . 假设 A 是域 F 上元素构成的 $n \times n$ 阶方阵, $M^{n\times n}$ 是这样的 n 阶方阵的集合:

$$M^{n\times n} = \quad A \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in F \quad .$$

那么,对于线性运算 $A + B$ 和 λA, $M^{n\times n}$ 是域 F 上的 n^2 维向量空间 .

3 . 假设 V_1 是向量空间 **V** 的子空间,那么存在子空间 V_2 使得 **V** = V_1 G V_2 .

4 . 举例说明 **V** 的两个子空间 V_1, V_2 的并集 $V_1 \cup V_2$ 不是子空间 .

5 . 假设 V_1, V_2 是 **V** 的子空间, dim**V** = 3, $\dim V_i = 2, i = 1, 2$. 那么,

$\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ 或 2,

$\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ 时 $V_1 = V_2$.

6 . 假设 $V_1, V_2, V_1 \cup V_2$ 都是 **V** 的子空间,那么 V_1　　V_2 或 V_2　　V_1 .

§1.3　对 偶 空 间

对偶空间是线性型所组成的向量空间,先从多重线性型说起,

它是向量空间上的多元线性函数．

定义 1 假设 V 是域 F 上的向量空间；f 是 V 的 r 重笛卡尔积 $\mathbf{V}^r=\mathbf{V}\times\cdots\times\mathbf{V}$ 到域 F 的映射

$$f:(x_1,\cdots,x_r)(\in\mathbf{V}^r)\to f(x_1,\cdots,x_r)\in F;$$

而且对于每个 x_j, $j=1,\cdots,r$, 映射都是线性的, 即

$$\begin{aligned}&f(x_1,\cdots,\lambda x_j+\mu x_j',\cdots,x_r)\\&=\lambda f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_r)+\mu f(x_1,\cdots,x_j',\cdots,x_r),\\&\qquad(\forall\lambda,\mu\in F,\ x_j\in\mathbf{V},\ j=1,\cdots,r).\end{aligned}$$

那么, f 叫做 V 上的 r 重线性型, 或 r 重线性函数．当 $r=1$ 时 f 叫 V 上的线性型, 当 $r=2$ 时 f 叫 V 上的双线性型．对任意 i 与 j, 当

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=\pm f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

时, f 分别叫做对称的和反对称的．

我们知道, 向量空间内的线性变换, 完全由基的象所决定．多重线性型也是这样, 有下面的

定理 1 假设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是向量空间的基, f 是 V 上的 r 重线性型．那么, f 完全由 $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$ 所确定, $i_1,\cdots,i_r=1,\cdots,n$．

证明 V 内任意向量都可以用基来表示, 取 r 个向量

$$x_i=x_i^1e_1+\cdots+x_i^ne_n,\quad i=1,\cdots,r.$$

由 f 是 r 重线性型的定义 1, 就得到

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_r)&=f\Big(\sum_{i_1=1}^n x_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,\sum_{i_r=1}^n x_r^{i_r}e_{i_r}\Big)\\&=\sum_{i_1,\cdots,i_r}x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r}f(e_{i_1},\cdots,e_{i_r}).\end{aligned}$$

这就证明了, 任意 $x_1,\cdots,x_r$ 的象由这些 $f(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})$ 所确定, 也就是 f 由这些象所确定．

特别地, 当 f 是线性型时, 对于 $x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$, 有

$$f(x) = x^1 f(e_1) + \cdots + x^n f(e_n). \tag{1}$$

我们甚至也用 x, f 来表示向量，$x = (x^1, \cdots, x^n)$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$，这里 $f_i = f(e_i)$, $i = 1, \cdots, n$.于是,(1)可以简单地表示成

$$f(x) = xf^t = fx^t. \tag{2}$$

就得到定理 1 的

推论 假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是向量空间的基，f 是 $\mathbf{V}$ 上的线性型 .那么，f 完全由(2)内的 $f_1, \cdots, f_n$ 所确定 .

这个推论使得抽象的线性型有比较具体的描述 .向量空间 $\mathbf{V}$ 上的所有线性型又组成一个新的集合,记成 $\mathbf{V}^*$,它是否能成为一个新的向量空间呢？我们先来给定两个运算:

1 . $\mathbf{V}^*$ 的加法,即 $\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*$ 到 $\mathbf{V}^*$ 的映射,使得

$$(f, g) \to f + g,$$

这里 $f + g$ 是 $\mathbf{V}^*$ 的元,即 $\mathbf{V}$ 上线性型:

$$[f + g](x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x \in \mathbf{V}).$$

2 . $\mathbf{V}^*$ 的数乘,即 $F \times \mathbf{V}^*$ 到 $\mathbf{V}^*$ 的映射,使得

$$(\lambda, f) \to \lambda f,$$

这里 λf 是 $\mathbf{V}^*$ 的元,即 $\mathbf{V}$ 上线性型:

$$[\lambda f](x) = \lambda f(x) \quad (\forall x \in \mathbf{V}).$$

对于上述线性运算,容易证实下面的

定理 2 $\mathbf{V}^*$ 也是域 F 上的向量空间,叫做 $\mathbf{V}$ 的对偶向量空间或余向量空间,它的元叫做 $\mathbf{V}$ 的余向量 .

既然 $\mathbf{V}^*$ 是一个向量空间,它的维数是什么呢？最直接的方法是找出 $\mathbf{V}^*$ 的一个基,也就得到了 $\dim\mathbf{V}^*$.$\mathbf{V}^*$ 的基是由 $\mathbf{V}$ 上的线性型来组成的,而每一个线性型又可以用定理 1 推论的方法来表示 .用这种方法可以找出 $\mathbf{V}^*$ 的基 .

定理 3 假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是向量空间 $\mathbf{V}$ 的基,那么由条件

$$e^i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

所确定的 $\{e^1, \cdots, e^n\}$ 是 $\mathbf{V}^*$ 的基,叫做 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的对偶基 .

证明 条件(3)所确定的 e^i 都是 **V** 上的线性型,譬如 e^1 使

$$e^1(e_1)=1,\ e^1(e_2)=0,\cdots,e^1(e_n)=0,$$

因而使任意 $x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$ 的象

$$e^1(x)=e^1(x^1e_1+\cdots+x^ne_n)=x^1.$$

同样地有 $e^i(x)=x^i,\ i=1,\cdots,n$.

首先,$\{e^1,\cdots,e^n\}$ 是线性无关的.如果

$$k_1e^1+\cdots+k_ne^n=0,$$

即对于任意 $x\in\mathbf{V}$ 都有

$$[k_1e^1+\cdots+k_ne^n](x)=0(x)=0.$$

特别地取 $x=e_i$ 得到 $k_i=0,\ i=1,\cdots,n$.

其次,任意 $f\in\mathbf{V}^*$ 都可以用$\{e^1,\cdots,e^n\}$来线性表示成

$$f=f(e_1)e^1+\cdots+f(e_n)e^n.\tag{4}$$

这只要对 **V** 内任意向量 x 来验证,(4)两端使 x 的象是相同的.

定理 3 证毕,从证明过程中还得到下面的

推论 向量空间与其对偶向量空间的维数相等.

对偶基是相对于原向量空间的基而言.向量空间的基不是唯一的,它们各自有对偶基,这些对偶基之间又有什么关系呢?

定理 4 假设向量空间 **V** 的两个基有关系

$$(e_1',\cdots,e_n')=(e_1,\cdots,e_n)A,\text{即 } e'=eA,\tag{5}$$

其中 A 是 n 阶非退化矩阵.那么,它们的对偶基有关系

$$(e^1,\cdots,e^n)=(e'^1,\cdots,e'^n)A^{\mathrm{t}}.\tag{6}$$

证明 把 $\mathbf{V}^*$ 的两个基的关系式记成

$$(e'^1,\cdots,e'^n)=(e^1,\cdots,e^n)B,$$

其中 B 是 n 阶非退化矩阵.定理 4 求证的是 $B=(A^{\mathrm{t}})^{-1}$,也就是求证 $A^{\mathrm{t}}\cdot B=I_n$,$I_n$ 表示 n 阶单位矩阵.我们记 $A=(a_i^j)$,$B=(b_i^j)$,来看 $A^{\mathrm{t}}\cdot B$ 的第 i 行与第 j 列交叉处的元,即 A^{t} 的第 i 行乘 B 的第 j 列,也即 A 的第 i 列乘 B 的第 j 列:

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k b_j^k = \sum_{k=1}^{n} \left[b_j^k e^k \left(\sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l \right) \right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} b_j^k e^k \right) \left(\sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l \right)$$

$$= e'^{j}(e_i') = \delta_{ij},$$

这就证明了定理 4 .

在定理 4 的假设条件下, $e' = eA$ 时,V 的向量 x 的不同坐标 x 与 x'有关系式

$$x = x'A^{t}, \tag{7}$$

这里 $x = xe^{t} = x'e'^{t}$, x 表示向量又表示坐标 .由定理 4,V* 的元 f 对于不同的 e 和 e'分别有不同的坐标 f 和 f'时,从(6)立即得到

$$f' = fA . \tag{8}$$

这就又得到下面的

推论 假设向量空间 V 的两个基有关系(5),那么 V 的向量 x 的坐标有关系(7),余向量 f 的坐标有关系(8) .

从坐标变换的规律或形式上看,(5)和(8)是相同的 .因此,我们称余向量 f 为向量空间 V 的共变或协变向量 .与此相反,(5)和(7)是相逆的,我们称向量空间 V 的原向量为它的反变或逆变向量 .

前面已经得知,域 F 上的 n 维向量空间 V 的对偶空间 V* 也是一个域 F 上的 n 维向量空间 .于是,V* 又有对偶空间 V**,它也是域 F 上的 n 维向量空间 .这三者之间有什么关系呢 ?维数相同的这三个域 F 上的向量空间是同构的 .不仅如此,V 与 V** 之间还有更确定的联系 .假设$\{ e_i\}$是 n 维向量空间 V 的基,那么,它有对偶基$\{ e^i\}$即 V* 的基,后者又有对偶基$\{ \tilde{e}_i\}$为 V** 的基 .我们给定一个从 V 到 V** 的映射

$$\sigma: x = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \to \sigma(x) = \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} k_i \tilde{e}_i, \tag{9}$$

来证明下面的

定理 5　假设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是向量空间 V 的基 .那么,(9)给定的映射 σ 使 V 与 V^{**} 同构;而且,对于 V^* 的任意元 f 和 V 的任意元 x,都有

$$[\sigma(x)](f)=f(x),\text{即 }\tilde{x}(f)=f(x). \tag{10}$$

证明　V^* 的元 f 可以表示成 $f=\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_ne^n$, 利用对偶基的条件(3),就得到

$$\begin{aligned}\tilde{x}(f)&=[k_1\tilde{e}_1+\cdots+k_n\tilde{e}_n](\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_ne^n)\\&=k_1\lambda_1+\cdots+k_n\lambda_n\\&=[\lambda_1e^1+\cdots+\lambda_ne^n](k_1e_1+\cdots+k_ne_n)\\&=f(x).\end{aligned}$$

定理 5 证毕 .在映射(9)的对应下, x 与 $\tilde{x}$ 可以等同看待, V 与 V^{**} 可以等同看待 .在同构的意义下,甚至可以写成

$$x=\tilde{x},\quad V=V^{**},\quad f(x)=x(f).$$

这里引用一个记号 $\langle f,x\rangle=f(x)$,刚才的结果可以写成

$$\langle f,x\rangle=\langle x,f\rangle,$$

说明 f 与 x 具有对称的位置 .

习　　题

1 . 假设 f 是 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射:对于任意的 $x=(x^1,x^2),y=(y^1,y^2)$,

$$(x,y)\to f(x,y)=x^1y^2+2x^2y^1.$$

试问 f 是 $\mathbf{R}$ 上的双线性型么?

2 . 对于任意 $x\in V$,存在余向量 $f\in V^*$,使得 $f(x)\neq 0$.

3 . 假设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 F^n 的基, φ_i 是 F^n 到 F 的映射:对于 F^n 的任意向量 $x=\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$, 使得

$$x\to\varphi_i(x)=x^i,\quad i=1,\cdots,n.$$

那么,$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$是$\{e_1,\cdots,e_n\}$的对偶基 .

4 . 假设 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ 组成 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,对于 $\mathbf{R}^3$ 的任意元 $x=(x^1,x^2,x^3)$,试求 $\alpha^i(x),i=1,2,3$.

5．假设 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 是 $\mathbf{V}^*$ 的一个基．那么，存在 $\mathbf{V}$ 的一个基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，使得

$$e^i=\varphi_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

6．试证明定理 2．

§1.4 双线性空间

上节已经介绍了双线性型的概念．域 F 上的向量空间 $\mathbf{V}$ 上的双线性型 ω，它是 $\mathbf{V}^2$ 到 F 的一个映射，或说是 $\mathbf{V}$ 上的二元函数，对每个元都是线性的．根据§1.3 的定理 1，双线性型 ω 完全决定于 $\mathbf{V}$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的象 $\omega(e_i,e_j)=\omega_{ij},\ i,j=1,\cdots,n$．

$$\omega:(x,y)(\in\mathbf{V}^2)\to\omega(x,y)\in F,$$

$$\omega(x,y)=\omega\Big(\sum_{i=1}^n x^ie_i,\sum_{j=1}^n y^je_j\Big)=\sum_{i,j=1}^n x^iy^j\omega_{ij}.$$

象过去一样，允许记 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$，甚至把 ω 也作为一个 n 阶矩阵记成 $\omega=(\omega_{ij})$．于是，得到双线性型的矩阵表达式

$$\omega(x,y)=x\omega y^{\mathrm{t}}=y\omega x^{\mathrm{t}}.\tag{1}$$

这里 x 和 y 既表示 $\mathbf{V}$ 的元，又表示向量；ω 既表示双线性的映射，又表示矩阵．以后还常有这样的情况，一种记号多种用处，要注意加以区别．

下面介绍两种常用的也是重要的双线性型．

定义 1　假设 ω 是向量空间 $\mathbf{V}$ 上的双线性型．对于 $\mathbf{V}$ 内任意向量 x 与 y，如果 $\omega(x,y)=\omega(y,x)$，那么 ω 叫做对称的双线性型；如果 $\omega(x,y)=-\omega(y,x)$，那么 ω 叫做反对称的双线性型．

双线性型的矩阵表达式，显然与 $\mathbf{V}$ 所取用的基有关，(1)内的矩阵的元是基的象．当基变化时，对应的矩阵有下面的相应的变化．

定理　假设向量空间 $\mathbf{V}$ 的基 $\{e_i\}$ 到 $\{e_i'\}$ 的变换式为

$$e' = eA.$$

那么,V 上双线性型 ω在$\{e_i\}$中的矩阵到 ω在$\{e_i'\}$中的矩阵 ω′的变换式为

$$\omega' = A^{t}\omega A. \tag{2}$$

证明　当基的变换式为 $e' = eA$ 时,向量的坐标有变换式

$$x = x'A^{t},\quad y = y'A^{t}.$$

把它们代入(1)得到

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= x\omega y^{t} = (x'A^{t})\omega(y'A^{t})^{t}\\ &= x'(A^{t}\omega A)y'^{t};\end{aligned}$$

又由 $\omega(x, y) = x'\omega' y'^{t}$ 就得到(2),证明了定理.

(2)联系的两个矩阵 ω与 ω′是合同的,其中 $\det A \neq 0$.两个合同的矩阵的秩是相等的,因而下面的定义是合理的.

定义 2　假设$\{e_i\}$是向量空间 **V** 的任意一个基, ω是 **V** 上的双线性型, $\omega = (\omega_{ij})$ 是 ω在此基上的矩阵.那么,矩阵 ω的秩叫做双线性型 ω的秩,记成 rankω.当 rankω = rank**V** 时, ω称为非退化的;否则称为退化的.

在向量空间中,赋予有些特征的双线性型,就可以得到一些特殊的向量空间,是几何学的研究对象.

定义 3　假设 **V** 是域 F 上的向量空间, ω是 **V** 上的非退化的双线性型.那么,这样的 **V** 叫做双线性向量空间,简称双线性空间;记成(**V**, ω),简记成 **V**.

下面有一些具体的双线性空间,其中的 ω都是非退化的双线性型,除了埃米特空间以外.

1.复欧空间:(**V**, ω), $F = \mathbf{C}$, ω还是对称的.

2.复辛空间:(**V**, ω), $F = \mathbf{C}$, ω还是反对称的, $\dim\mathbf{V} = 2k$ 是偶数.

3.埃米特空间: $F = \mathbf{C}$,**V** 是复向量空间, ω是 **V** 上的埃米特型,即它对于第一个分量仍然是线性的,但对于第二个分量却是线性系数还作共轭运算.也就是说,

$$\omega(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\omega(x, z) + \mu\omega(y, z),$$
$$\omega(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda}\omega(x, y) + \bar{\mu}\omega(x, z).$$

4 . **欧氏空间:**$(\mathbf{V}, \omega)$, $F = \mathbf{R}$, **ω 还是对称的和正定的,即**

$$\omega(x, y) = \omega(y, x), \quad \omega(x, x) > 0(x \neq 0).$$

5 . **拟欧空间:**$(\mathbf{V}, \omega)$, $F = \mathbf{R}$, **ω 还是对称的和惯性指数有符号差的 .例如,** $\dim\mathbf{V} = 4$, **ω 的惯性指标是三负一正的,这样的**$(\mathbf{V}, \omega)$**就是狭义相对论中的闵可夫斯基时空空间 .**

6 . **辛空间:**$(\mathbf{V}, \omega)$, $F = R$, $\dim\mathbf{V} = 2k$ **是偶数,ω 还是反对称的 .**

上面列举的空间中,欧氏空间是比较熟悉的 .在一般的双线性空间中,ω 不一定是对称的也不一定是反对称的 .因此,有条件 $\omega(x, y) = 0$ **时不一定有** $\omega(y, x) = 0$ **.所以,在双线性空间内的正交概念与顺序有关 .**

定义 4 **假设**$(\mathbf{V}, \omega)$**是一个双线性空间,$\mathbf{V}$ 内向量** x **与** y **满足条件** $\omega(x, y) = 0$, **那么** x **与** y **叫做依序正交,记成** $x \perp y$ **或** $y \mathrm{T} x$ **.假设** A, B **是 $\mathbf{V}$ 的子集,而且**

$$\omega(a, b) = 0 \quad (\forall a \in A, b \in B),$$

那么称 A **依序正交于** B, **记成** $A \perp B$, **或** $B \mathrm{T} A$, **或** $\omega(A, B) = 0$ **.假设** H **是 $\mathbf{V}$ 的子空间,那么**

$$\{ x \in \mathbf{V} \mid \omega(h, x) = 0(\forall h \in H) \}$$

是 $\mathbf{V}$ 的子集合,叫做 H **的正交补,记成** $H^{\perp}$ **.同样还有**

$$\{ x \in \mathbf{V} \mid \omega(x, h) = 0(\forall h \in H) \} = H^{\mathrm{T}}.$$

关于正交,下面的性质 1 **和** 2 **是容易证明的,不详述了 .**

性质 1 **假设** H **和** K **都是**$(\mathbf{V}, \omega)$**的子空间 .那么,**

1 . $H^{\perp}$ **和** H^{T} **都是 $\mathbf{V}$ 的子空间;**

2 . $0^{\perp} = 0^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}, \mathbf{V}^{\perp} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} = 0$, **这里** 0 **表示**$\{0\}$**;**

3 . $H \quad K$ **时** $H^{\perp} \quad K^{\perp}, H^{\mathrm{T}} \quad K^{\mathrm{T}}$.

性质 2 **假设** H **是**$(\mathbf{V}, \omega)$**的子空间 .那么,**

$$\dim H + \dim H^{\perp} = \dim H + \dim H^{\mathrm{T}} = \dim\mathbf{V}.$$

一般来说，H 与 $H^{\perp}$ (或 H^{T}) 的和不一定是直接和，以后在辛空间内再举出例子.子空间与其正交补又有和与交，它们之间有下面的关系.

性质 3 假设 H 与 K 都是$(\mathbf{V}, \omega)$的子空间.那么，

1. $H^{\perp\mathrm{T}} = H^{\mathrm{T}\perp} = H$;

2. $H \quad K$, $H^{\perp} \quad K^{\perp}$, $H^{\mathrm{T}} \quad K^{\mathrm{T}}$ 这三种关系是等价的;

3. $(H+K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}$, $(H+K)^{\mathrm{T}} = H^{\mathrm{T}} \cap K^{\mathrm{T}}$

4. $(H \cap K)^{\perp} = H^{\perp} + K^{\perp}$, $(H \cap K)^{\mathrm{T}} = H^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}$.

证明 性质中的结论，在证法上是类似的，就不去赘述了.

1. 对于任意 $a \in H$, 都有 $\omega(a, H^{\perp}) = 0$.再由 T 的定义得到 $a \in H^{\perp\mathrm{T}}$, 证明了 $H \quad H^{\perp\mathrm{T}}$.根据性质 2，又有

$$\dim H^{\perp\mathrm{T}} = \dim\mathbf{V} - \dim H^{\perp}$$
$$= \dim\mathbf{V} - (\dim\mathbf{V} - \dim H) = \dim H.$$

于是 $H = H^{\perp\mathrm{T}}$.

2. 由定义容易得证.

3. 对于任意 $x \in H^{\perp} \cap K^{\perp}$ 即 $x \in H^{\perp}$ 同时 $x \in K^{\perp}$, 于是，$\omega(H, x) = 0$ 同时 $\omega(K, x) = 0$, 推得 $\omega(H+K, x) = 0$, $x \in (H+K)^{\perp}$.反过来，对于任意 $x \in (H+K)^{\perp}$, 就有 $\omega(H+K, x) = 0$.特别地，又可得到 $\omega(H, x) = 0$ 和 $\omega(K, x) = 0$，即 $x \in H^{\perp}$ 和 $x \in K^{\perp}$, 推出 $x \in H^{\perp} \cap K^{\perp}$.以上两方面结论证明了 $(H+K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}$.

4. 由前面刚得到的 1 和 3 推得.

习　　题

1. §1.3 习题 1 的双线性型是对称的么?是反对称的么?
2. 从 $\mathbf{C}^2$ 到 $\mathbf{C}$ 的映射

$$\omega: (x, y) \to \omega(x, y) = x^1 \overline{y^2} + x^2 \overline{y^1}$$

是埃米特型么?是非退化的么?

3. 试证明性质 1.

4. 试证明性质 2.

5. 假设 W 是向量空间 $\mathbf{V}$ 上所有双线性型组成的集合. 那么,对于映射的加法和数乘, W 也是一个向量空间;而且

$$\dim W = (\dim \mathbf{V})^2 .$$

6. 假设 W 是复向量空间 $\mathbf{V}$ 上所有埃米特型组成的集合. 对于映射的加法和数乘,试问 W 也是一个复向量空间么?

§1.5 线性代数

在§1.2 的定义 2,已经介绍过线性映射的概念. 这一节讨论线性映射的运算和它们的矩阵表示,研究线性映射所形成的集合.

假设 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}'$ 都是域 F 上的向量空间, φ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的线性映射即同态映射. 那么,由 φ 派生出两个重要的子空间:一个是 φ 的象子空间 $\varphi(\mathbf{V}) \quad \mathbf{V}'$,当 $\varphi(\mathbf{V}) = \mathbf{V}'$ 时 φ 是到上的;另一个是 φ 的核子空间 $\ker\varphi \quad \mathbf{V}$,当 $\ker\varphi = \{0\}$ 时 φ 是一对一的,当 $\ker\varphi = \mathbf{V}$ 时 φ 是零映射. 上面这些概念和证明方法,都是代数中介绍过的,不再重述. 此外,又派生出域 F 上一个新的商空间 $\mathbf{V}/\ker\varphi$. 为了讨论这个商空间与 $\varphi(\mathbf{V})$ 的关系,我们从 φ 定义一个映射 $\bar{\varphi}$,它是 $\mathbf{V}/\ker\varphi$ 到 $\varphi(\mathbf{V})$ 的映射

$$\bar{\varphi}: x + \ker\varphi = \bar{x} \to \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x) . \tag{1}$$

下面来证明

定理 1 $\bar{\varphi}$ 是 $\mathbf{V}/\ker\varphi$ 到 $\varphi(\mathbf{V})$ 的同构映射.

证明 由于同余类的代表元不是唯一的,必须先证实定义(1)是确定的. 假如 $\overline{x'} = \bar{x}$, 就有 $x' \in \bar{x}$, $x' = x + x_0$, $x_0 \in \ker\varphi$. 于是,除 $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$ 外,还有

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\overline{x'}) = \varphi(x + x_0) = \varphi(x) + \varphi(x_0) = \varphi(x),$$

结果是一样的.

$\bar{\varphi}$ 显然是到上的. 如果 $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{y})$, 即 $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\varphi(x - y) = 0$, 就有 $x - y \in \ker\varphi$, $\bar{x} = \bar{y}$, 说明 $\bar{\varphi}$ 还是一对一的.

最后，$\bar{\varphi}$ 还是线性的，这是因为

$$\bar{\varphi}(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y})=\bar{\varphi}(\overline{\lambda x+\mu y})=\varphi(\lambda x+\mu y)$$
$$=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)=\lambda\bar{\varphi}(\bar{x})+\mu\bar{\varphi}(\bar{y}).$$

定理 1 证毕 .利用定理 1 和 §1 2 的定理 2 又得到下面的

推论 $\dim\varphi(\mathbf{V})+\dim(\ker\varphi)=\dim\mathbf{V}$.

线性映射可以通过矩阵来具体地表现 .假设 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}$ 都是域 F 上的向量空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{e_1',\cdots,e_m'\}$ 分别是它们的基，φ 是 $\mathbf{V}$ 到 $\mathbf{V}'$ 的线性映射 .那么，$\varphi(e_i)\in\mathbf{V}'$ 可以用它的基来表示成

$$\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_i^j e_j',\quad i=1,\cdots,n,$$

就得到一个 $m\times n$ 阶矩阵

$$\Phi=\begin{pmatrix}\varphi_1^1 & \cdots & \varphi_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^m & \cdots & \varphi_n^m\end{pmatrix}.$$

n 维空间 $\mathbf{V}$ 到 m 维空间 $\mathbf{V}'$ 的所有线性映射组成集合 $L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$，元素在 F 上的所有 $m\times n$ 阶矩阵组成集合 $M_F(m,n)$.上面的过程说明，$L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 内的任何线性映射 φ 对应于 $M_F(m,n)$ 内的一个矩阵，即

$$\varphi\to\Phi. \qquad (2)$$

我们容易证明：(2) 是到上的一对一的对应，也是一个映射 .而且还容易证明：(2) 使得 φ 对应 Φ 和 ψ 对应 Ψ 时，就使得 $\varphi+\psi$ 对应于矩阵 $\Phi+\Psi$，$k\varphi$ 对应于矩阵 $k\Phi$.于是得到下面的

定理 2 假设 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}'$ 分别是域 F 上的 n 维和 m 维向量空间 .那么，$L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$ 是域 F 上的 mn 维向量空间，同构于 $M_F(m,n)$.

此外，线性映射还有乘积 .假设 $\mathbf{V},\mathbf{V}',\mathbf{V}''$ 分别是域 F 上的 n 维、m 维、r 维向量空间，$\varphi\in L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$，$\psi\in L(\mathbf{V}',\mathbf{V}'')$.那么，在取定基下，按 (2) 的对应方法，φ 对应一个 $m\times n$ 阶矩阵 Φ，ψ 对应一个 $r\times m$ 阶矩阵；而且，$\psi\varphi\in L(\mathbf{V},\mathbf{V}'')$，它对应的 $r\times n$ 阶

矩阵正好是 $\Psi\Phi$. 关于线性映射的乘积,还可以推广到更多的空间来讨论;还容易证明有结合律,即 $\psi(\lambda\phi)=(\lambda\psi)\phi=\lambda(\psi\phi)$ 和 $\chi(\psi\phi)=(\chi\psi)\phi$. 特别地,上述这些结论在同一个空间内显然成立,即 $\mathbf{V}=\mathbf{V}'=\mathbf{V}''$的情况.这样,我们又得到一种新的代数系.

定义 1 假设 $\mathbf{V}$ 是域 F 上的向量空间,$\mathbf{V}$ 还有一个乘法运算即 $\mathbf{V}^2$ 到 $\mathbf{V}$ 的映射

$$(x,y)(\in \mathbf{V}\times\mathbf{V})\rightarrow xy\in\mathbf{V},$$

满足结合律:

$$(xy)z=x(yz)\quad(\forall\, x,y,z\in\mathbf{V}),$$

$$(\lambda x)y=\lambda(xy)=x(\lambda y)\quad(\forall\,\lambda\in F,\ \forall\, x,y\in\mathbf{V}).$$

那么,$\mathbf{V}$ 叫做域 F 上的可结合的线性代数,简称代数;这个空间 $\mathbf{V}$ 的维数叫做代数 $\mathbf{V}$ 的维数.

于是,前面的讨论就得到

定理 3 假设 $\mathbf{V}$ 是域 F 上的 n 维向量空间.那么 $L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ 是域 F 上的 n^2 维线性代数.

回到线性映射对应于矩阵的(2),前提是相对于 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}'$的两个基.如果相对于另外的基,同样的 ϕ 所对应的矩阵就不同了,举一些简单的例子就能说明.

例 1 对于 n 维向量空间 $\mathbf{V}$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 恒等映射 i 对应于 n 阶单位矩阵 I_n, 图示成

$$\underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{\mathbf{V}}\ \underset{\underset{I_n}{\uparrow}}{\vec{i}}\ \underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{\mathbf{V}}$$

但是,相对于 $\mathbf{V}$ 的不同基 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 和 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, i 对应于 n 阶矩阵 A, 图示成

$$\underset{\{e_1',\cdots,e_n'\}}{\mathbf{V}}\ \underset{\underset{A}{\uparrow}}{\vec{i}}\ \underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{\mathbf{V}}$$

这里 A 不是 I_n,正好是基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 到基 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 的变换矩阵,和 §1.2 的(2)中一样.

例 2 假设向量空间 $\mathbf{V}$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 到 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 的

变换矩阵是 A，那么基$\{e_1,\cdots,e_n\}$到$\{e_1',\cdots,e_n'\}$的变换矩阵是 $B = A^{-1}$. 这只要象例 1 那样，利用恒等映射 i 把假设条件图示成

$$\underset{\{e_1',\cdots,e_n'\}}{\mathbf{V}} \xrightarrow[A]{i} \underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{\mathbf{V}} \xrightarrow[B]{i} \underset{\{e_1',\cdots,e_n'\}}{\mathbf{V}}$$

于是，映射的乘积 $i = i \cdot i$，相对于 $\mathbf{V}$ 的基$\{e_1',\cdots,e_n'\}$，对应于矩阵的乘积 AB；显然，由例 1 知道这个矩阵又是 I_n. 所以 $AB = I_n$，得证 $B = A^{-1}$.

定理 4 假设 $\varphi \in L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$，相对于 $\mathbf{V}$ 的基$\{e_1,\cdots,e_n\}$和 $\mathbf{V}$ 的基$\{f_1,\cdots,f_m\}$，φ 对应于 $m \times n$ 阶矩阵 Φ；相对于 $\mathbf{V}$ 的基$\{e_1',\cdots,e_n'\}$和 $\mathbf{V}'$的基$\{f_1',\cdots,f_m'\}$，φ 对应于 $m \times n$ 阶矩阵 Φ'；$\mathbf{V}$ 内$\{e_1,\cdots,e_n\}$到$\{e_1',\cdots,e_n'\}$的变换矩阵是 A；$\mathbf{V}'$内$\{f_1,\cdots,f_m\}$到$\{f_1',\cdots,f_m'\}$的变换矩阵是 B. 那么，$\Phi' = B^{-1}\Phi A$.

证明 利用例 1 和例 2，把定理 4 的假设条件图示成

$$\begin{tikzcd}
\underset{\{e_1',\cdots,e_n'\}}{\mathbf{V}} \arrow[r, "\varphi", "\Phi'"'] & \underset{\{f_1',\cdots,f_m'\}}{\mathbf{V}'} \\
\underset{\{e_1,\cdots,e_n\}}{\mathbf{V}} \arrow[r, "\varphi"', "\Phi"] \arrow[u, leftarrow, "A \to i"] & \underset{\{f_1,\cdots,f_m\}}{\mathbf{V}'} \arrow[u, "i", "B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

因为 $\varphi = i\varphi i$，所以 $\Phi' = B^{-1}\Phi A$，定理 4 证毕.

正是由于有了定理 4，而且 Φ 与 Φ'的秩是相等的，下面的定义就是合理的.

定义 2 假设 $\varphi \in L(\mathbf{V},\mathbf{V}')$，$\varphi$ 按照(2)的方法对应于矩阵 Φ. 那么，$\operatorname{rank}\Phi$ 叫做 φ 的秩，记成 $\operatorname{rank}\varphi$.

φ 的秩可以通过矩阵来讨论，由 Φ 的阶数立即得知性质 1 .

性质 1 $\operatorname{rank}\varphi \le \min(\dim \mathbf{V}, \dim \mathbf{V}')$.

性质 2 $\operatorname{rank}\varphi = \dim\varphi(\mathbf{V})$.

证明 象子空间 $\varphi(\mathbf{V})$ 是由 $\{\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)\}$ 所生成的 $\mathbf{V}'$ 的子空间 .根据(2)的方法，$\varphi(e_i)$ 正是 Φ 的第 i 个列向量，Φ 的 n 个列向量所生成子空间的维数 $\dim\varphi(\mathbf{V})$ 正是矩阵的秩 $\operatorname{rank}\Phi$.

习　　题

1 . 证明定理 3 .

2 . 假设 $\varphi \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$，那么下面任意两条可以推出第三条：$\varphi$ 是到上的；φ 是一对一的；$\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}'$.

3 . 假设 $\mathbf{V}$ 的基是 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，$\mathbf{V}'$ 的基是 $\{f_1, \cdots, f_m\}$.那么，存在

$$\varphi_{ij}, \quad i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, m,$$

使得 $\varphi_{ij}(e_k) = \delta_{ik} f_j$ ，并且 $\{\varphi_{ij}\}$ 是 $L(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ 的基 .

4 . 假设 $\varphi \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$，并且 $\varphi^2 = \varphi$.那么，$\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{V}) \oplus \ker\varphi$.

5 . 假设 $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \cdots, \mathbf{V}_{n+1}$ 都是域 F 上的向量空间，$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{n+1} = \{0\}$；线性映射 $\varphi_i \in L(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1})$，$i = 0, 1, \cdots, n$；$\varphi_i(\mathbf{V}_i) = \ker\varphi_{i+1}$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$.那么，

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim\mathbf{V}_i = 0 .$$

6 . 假设 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ 都是域 F 上的向量空间，$\varphi_i \in L(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1})$，$i = 1, 2$.那么，

$$\dim[\ker(\varphi_2\varphi_1)] \le \dim(\ker\varphi_2) + \dim(\ker\varphi_1) .$$

7 . 假设条件和上题一样的时候，求证：

$$\dim[\varphi_1(\mathbf{V}_1) \cap \ker\varphi_2] = \dim\varphi_1(\mathbf{V}_1) - \dim\varphi_2\varphi_1(\mathbf{V}_1) .$$

§1 .6　线性群和线性几何

上一节介绍了域 F 上的线性代数 $L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$，这一节讨论其中的满秩线性映射 .

定义 1 假设 $\varphi \in L(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ 有 $\operatorname{rank}\varphi = \dim\mathbf{V} = n$，就称 φ 为非退化的，或满秩的；否则就称 φ 为退化的，或降秩的 .

再来看 $L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ 内所有非退化的线性映射,组成一个子集

$$GL(n,F)=\{\varphi\in L(\mathbf{V},\mathbf{V})\mid \operatorname{rank}\varphi=n\}.$$

决定 $GL(n,F)$ 内的元 φ, 即决定一个线性映射,是对应的 n 阶矩阵 Φ, 不是 $\mathbf{V}$ 的具体元素.这也是采用记号 $GL(n,F)$ 的原由.

定理 1 对于映射的乘法, $GL(n,F)$ 成群,称为域 F 上 n 维向量空间的全线性群,简称 n 阶全线性群.

证明 首先, $\varphi,\psi\in GL(n,F)$ 时,它们对应的 n 阶矩阵 Φ 和 Ψ 是非退化的.由 $\det\Phi\neq 0,\det\Psi\neq 0$ 得到 $\det(\Psi\Phi)\neq 0$, 说明 $\psi\varphi\in GL(n,F)$.其次, §1.5 定理 3 已经证明 $L(\mathbf{V},\mathbf{V})$ 内乘法有结合律.再次,恒等映射是 $GL(n,F)$ 的单位元.最后,任意 $\varphi\in GL(n,F)$ 时, $\varphi(\mathbf{V})=\mathbf{V}$, φ 是到上的;由 §1.5 定理 1 的推论又得到 $\ker\varphi=\{0\}$, φ 是一对一的.因此, φ 存在逆映射 φ^{-1}, 它就是 φ 在 $GL(n,F)$ 内的逆元.

定理 1 证毕.在群 $GL(n,F)$ 内,又有各种子群,是线性几何所常见的,有很丰富的内容.

定义 2 域 F 上 n 阶全线性群 $GL(n,F)$ 的任何子群都叫做域 F 上的 n 阶线性群,或经典群.

按几何学的习惯,线性群内的元,即非退化的线性映射,才叫做线性变换,它不同于一般的同态映射.下面是线性群的实例.

例 1 取 $F=\mathbf{C},\mathbf{V}=\mathbf{C}^n$, 得复全线性群 $GL(\mathbf{C}^n,\mathbf{C})$, 或 $GL(n,\mathbf{C})$.取 $F=\mathbf{R},\mathbf{V}=\mathbf{R}^n$, 得实全线性群 $GL(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$, 或 $GL(n,\mathbf{R})$.

例 2 将 $GL(n,\mathbf{R})$ 分成两部分,

$$GL(n,\mathbf{R})=GL_+(n,\mathbf{R})\cup GL_-(n,\mathbf{R}),$$

其中第一部分的 φ 所对应的 $\det\Phi>0$, 第二部分的 $\det\Phi<0$.容易验证, $GL_+(n,\mathbf{R})$ 是 $GL(n,\mathbf{R})$ 的子群,也是 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶线性群,单位元是恒等变换.但是, $GL_-(n,\mathbf{R})$ 不是线性群,它不能成群, $\varphi_1,\varphi_2\in GL_-(n,\mathbf{R})$ 时, $\varphi_2\varphi_1\notin GL_-(n,\mathbf{R})$.

例 3 在全线性群 $GL(n,F)$ 内,子集合

$$GL_1(n, F) = \{\varphi \in GL(n, F) \mid \det\Phi = 1\}$$

是子群,也是一个 F 上的线性群,其中 1 表示 F 的单位元.

例 4 假设$(\mathbf{V}, \omega)$是一个双线性空间,那么就容易证明:

$$G(\omega) = \{\varphi \in GL(n, F) \mid \omega(\varphi(x), \varphi(y)) = \omega(x, y)(\forall x, y \in \mathbf{V})\}$$

是一个线性群.例如,$\mathbf{V}$是一个 n 维实空间,ω是一个正定的对称双线性型时,$(\mathbf{V}, \omega)$是一个欧氏空间,线性群 G 是由保持ω不变的那些线性变换所组成的,即正交变换群.这里 φ叫保ω变换.

例 5 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶全线性群 $GL(n, \mathbf{R})$内,子集合

$$G_t = \{\varphi_t \in GL(n, \mathbf{R}) \mid \Phi_t = (\varphi_j^i(t)), t \in (-\infty, +\infty)\}.$$

也就是说,φ_t 所对应的矩阵 Φ_t 内,每个元素 $\varphi_j^i(t)$ 都是以 t 为参数的.假如 G_t 还满足下面的三个条件:

1. $\varphi_{t_2}\varphi_{t_1} = \varphi_{t_2+t_1}$.这就是说,$\varphi_{t_2}, \varphi_{t_1} \in G$ 时 $\varphi_{t_2}\varphi_{t_1} \in G$.

2. φ_0 是恒等映射.这就是说,G 有单位元.

3. $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.这就是说,$\varphi_t \in G$ 时 $(\varphi_t)^{-1} \in G$.

那么,G 也是成群,是 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶线性群,叫单参数变换群.

关于线性群,最后来介绍一个维数的概念.在线性代数中,维数指的是向量空间内最大无关组所含向量的个数.但群没有基域,没有线性无关的概念,就没有上述意义的维数.下面先以例子讨论群的自由度.

域 F 上的 n 阶全线性群 $GL(n, F)$ 内,线性变换 φ完全由对应的有 $\det\Phi \neq 0$ 的矩阵 Φ所决定;而 Φ又完全由它的 n^2 个元素 φ_j^i 所决定.这就是说,$GL(n, F)$ 有 n^2 个自由度.同样,例 2 中的线性群 $GL_+(n, F)$ 也是 n^2 个自由度.又看例 5 的线性群 G_t,每个 φ_t 对应的Φ_t,虽然都有 n^2 个元,但矩阵的 n^2 个元都以 t 为参数.所以 G_t 的自由度为 1.

定义 3 线性群 G 的自由度叫做 G 的维数,记成 $\dim G$.

于是,$\dim[GL(n, F)] = n^2$,$\dim[GL_+(n, F)] = n^2$,$\dim G_t = 1$.

有了线性群的概念后,我们来给线性几何作一个定义.这个观点是克莱因(F.Klein)在1872年提出的,对于百年来几何学的发展起了很大的作用.下面粗略地叙述这个观点:一定的几何学是与一定的变换群相联系的,所谓某种空间的几何性质实质上就是某种变换群下的不变性质.

我们讨论某些几何点的集合,叫做一个空间 M,再把 M 的子集合 C 叫做 M 的一个图形.假设 G 是 M 的一个变换群,即 G 内的 φ 是 M 到 M 上的一对一的映射,G 对于映射的乘法成群.记 $\varphi(C)=C'$,叫做图形 C 的象图形.对于任意 $\varphi\in G$,图形 C 与其象图形 C' 所具有的共同性质,即对于任意 φ 的不变性质,就称为 G 下的不变几何性质.

定义 4　假设 M 是几何点组成的一个空间,G 是 M 的一个变换群.那么,M 内在 G 下不变的几何性质全体,就叫做 M 在 G 下的几何学,记为(M, G);M 叫做这种几何学的底空间;G 叫做这种几何学的基本群.

至于线性几何学,其底空间与 F^n 对应,基本群是线性群,具体说是下面的

定义 5　假设 M 是一个空间,相对于它取定的坐标系,M 的点可以用坐标即一个域 F 上向量空间 F^n 内的元来表示,即有 M 到 F^n 上的一对一的映射

$$x(\in M)\longleftrightarrow x=(x^1,\cdots,x^n)\in F^n.$$

又假设 M 上的基本群为 G,其中的变换 φ 可以用点的坐标变换式来表示成

$$\varphi(\in G):\ x'^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i x^j+a^i,\quad i=1,\cdots,n,$$

这里 $(x^1,\cdots,x^n)=x$,$(x'^1,\cdots,x'^n)=x'=\varphi(x)$.把 φ 的一次部分记成 φ_0,全体 φ_0 组成 G_0,即

$$\varphi_0(\in G):\ x'^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i x^j,\quad i=1,\cdots,n.$$

如果 G_0 是全线性群 $GL(n, F)$ 的一个子群，那么几何学 (M, G) 叫做域 F 上的线性几何学.

根据上述定义，首先要问全线性群是什么几何学的基本群呢?

例 6 在域 F 上的 n 维向量空间内，任意非退化的线性变换 φ，使得线性相关组 $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 的象 $\{\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_m)\}$ 仍然线性相关，线性无关组的象仍然线性无关.用几何的观点来说，空间 $\mathbf{V}$ 内那些与线性相关联系的性质，都是对于 $GL(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ 下不变的几何性质.所以，$\mathbf{V}$ 内这些性质的全体就是线性几何学 $(\mathbf{V}, GL(n, F))$，$GL(n, F)$ 是这种线性几何学的基本群.

但是，我们更有兴趣讨论以一般线性群为基本群的线性几何学，而且空间是双线性空间.

定义 6 假设 $(\mathbf{V}, \omega)$ 是双线性空间，G 是保持 ω 不变的那些变换所组成的线性群.那么，线性几何学 $(\mathbf{V}, G)$ 又称为 ω-几何，记成 $(\mathbf{V}, \omega, G)$.

例 7 欧氏几何 $(\mathbf{V}, \omega, G)$：$\mathbf{V}$ 是实向量空间，ω 是实正定的对称双线性型，G 是正交变换群.辛几何 $(\mathbf{V}, \omega, G)$：$\mathbf{V}$ 是偶数维实空间，ω 是实反对称双线性型，G 是保持 ω 的线性群，叫辛群.

如果已知一个双线性型 ω，怎么判别一个变换是否保 ω 呢?

定理 2 假设双线性空间 $(\mathbf{V}, \omega)$ 的双线性型

$$\omega(x, y) = x\omega y^{t}, \tag{1}$$

变换 φ 使得 $\varphi(x) = xA^{t}$ $(\forall x \in \mathbf{V})$.那么，$\varphi \in G(\omega)$ 的充要条件是

$$A^{t}\omega A = \omega. \tag{2}$$

证明 由(1)计算得

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(x), \varphi(y)) &= \varphi(x)\omega\varphi(y)^{t} = (xA^{t})\omega(yA^{t})^{t} \\ &= x(A^{t}\omega A)y^{t},\end{aligned} \tag{3}$$

比较(1)和(3)，由 x 和 y 的任意性，就证明了(2).

几何是满足某些不变条件的性质的全体，底空间是一个集合，它也有子集合.

定义 7 假设 (M, G) 是一种几何学，N 是 M 的子集合;如果 G 中变换 ϕ 在 N 上的限制 ϕ_N 又是 N 的变换,即

$$\phi_N: x(\in N) \to \phi_N(x) \in N;$$

而且

$$H = \{\phi_N \mid \phi \in G\}$$

是同构于 G 的一个子群.那么，(N, H) 叫做 (M, G) 的子几何.

例 8 假设仿射空间 A^n 中对于仿射群 AG 下不变的仿射几何为 (A^n, AG),又假设空间 A^n 中对于欧氏群 $MG(\quad AG)$ 下不变的欧氏几何为 (A^n, MG).那么,后者是前者的子几何.我们习惯把后者的 A^n 记成 E^n,即欧氏几何 (E^n, MG).

例 9 射影几何 (P^n, PG) 以仿射几何 (A^n, AG) 和欧氏几何 (E^n, MG) 为其子几何.一般说来，$A^n \quad P^n$，在 P^n 中有无穷远超平面,它不属于 A^n,所以 $A^n \neq P^n$.

例 8 和例 9 的含义在以后要作详细的讲述,本章到此为止.

习　　题

1. 详细证明例 4 的 $G(\omega)$ 是一个群.
2. $GL_{.}(n, F)$ 是一个群么?
3. 假设 $\phi \in GL(n, \mathbf{R})$,使得 $\phi(x) = xA^t$，其中 $\det A = 1$.那么,这样的 ϕ 的全体成群,叫做么模群.

第二章　仿射几何

本章讲仿射几何,首先介绍仿射空间和平面的概念和性质;然后讨论平面的交与联,讨论平面之间的位置关系;最后介绍仿射变换群,研究仿射变换群下不变的几何性质.

§2.1　仿射空间

仿射空间也是由几何点构成的集合,它的点与向量空间中的向量是一一对应的,可以用向量的坐标来表示仿射空间的点.为了对仿射空间给予精确的定义,先在向量空间内定义平移.

定义 1　假设 a 是向量空间 **V** 的一个向量, T_a 是 **V** 到 **V** 的映射,使得

$$T_a: x \to x' = x + a \quad (\forall x \in \mathbf{V}).$$

那么, T_a 叫做 **V** 的平移映射,简称平移, $T_a(x) = x + a$.

显然,平移映射不一定是线性映射.

定义 2　假设 **V** 是域 F 上的 n 维向量空间,它的向量用小写字母 $x, y, \cdots$ 表示.**A** 是几何点的集合,它的点用大写字母 $O, X, Y, \cdots$ 表示.Φ 是从 **A** 到 **V** 上一对一映射的全体所构成的集合,而且满足条件:

1.对于任意取定的点 $O \in \mathbf{A}$,存在一个映射 $\phi_O \in \Phi$,使得 O 的象是 **V** 的零向量,即 $\phi_O(O) = 0$;

2.对于 Φ 内任意两个映射 ϕ_O 和 $\phi_{O'}$,映射 $\phi_O \phi_{O'}^{-1}$ 是 **V** 的一个平移 T_a,即 $\phi_O \phi_{O'}^{-1} = T_a$.

那么,A 称为域 F 上的一个 n 维仿射空间; φ_O 称为 A 的一个坐标映射,或坐标系;使得 $\varphi_O(O)=0$ 的点 O 称为坐标系 φ_O 的坐标原点;V 称为对应于仿射空间 A 的向量空间 .

正是由于 Φ 的元都是到上的一对一的映射,所以今后常常不把 A 与 V 严加区别 .

进一步问,条件 2 中平移 T_a 是什么, a 是 V 的什么向量呢 ? Φ 内两个映射 φ_O 和 $\varphi_{O'}$,使得 $\varphi_O(O)=0$, $\varphi_{O'}(O')=0$,即 O 与 O' 是两个坐标系的坐标原点 .于是,坐标原点 O 在另一个坐标系下的象 $\varphi_{O'}(O)=a$ 是 V 的向量 .我们再来看 $\varphi_O\varphi_O^{-1}$,它对零向量 0 的象是

$$\varphi_O\varphi_O^{-1}(O)=\varphi_{O'}(O)=a=0+a=T_a(0).$$

再看它对于 V 内任意向量 x 的象是什么呢 ? 如果 x 是对坐标映射 φ_O 而言 X 的象, x' 是对坐标映射 $\varphi_{O'}$ 而言 X 的象,即

$$\varphi_O(X)=x,\quad \varphi_{O'}(X)=x'. \tag{1}$$

那么就有

$$\varphi_{O'}\varphi_O^{-1}(x)=\varphi_{O'}(X)=x',$$

由条件 2 又有

$$\varphi_O\varphi_O^{-1}(x)=T_a(x)=x+a.$$

这就得到 $x'=x+a$. 这就证明了下面的

性质 1 在向量空间 V 所对应的仿射空间 A 内, $\varphi_O\varphi_O^{-1}$ 是 V 的平移映射 T_a ,其中 $a=\varphi_{O'}(O)$. 同一个点 X 在不同坐标映射下的象分别是 x 和 x' 时,即(1)时,象之间有关系 $x'=x+a$.

为了介绍仿射空间内点的坐标概念,先要给出向量空间内向量的坐标 .假设 V 内选取基 $e=(e_1,\cdots,e_n)$, 那么 V 内任意向量 x 可以表示成 $x=(x^1,\cdots,x^n)e^t$, 其中 $x^1,\cdots,x^n$ 是 x 的坐标,仍然记成 $x=(x^1,\cdots,x^n)$. 假如 A 内点 X 在坐标映射 φ_O 下的象

$$\varphi_O(X)=x=(x^1,\cdots,x^n),$$

我们称 x 为点 X 在坐标系 φ_O 中的坐标向量或坐标,记成 $X(x)$. 显然,任何坐标系下坐标原点的坐标都是 $0=(0,\cdots,0)$.坐标为基

向量 e_i **的点** E_i **叫做单位点,即** $\varphi_O(E_i) = e_i,\ i = 1,\cdots,n$ **.显然,** E_i **的坐标为** $(\delta_{1i},\cdots,\delta_{ni})$ **.仿射空间 A 内上述的** $n+1$ **个点** O, $E_1,\cdots,E_n$ **所组成有顺序的点的集合,叫做 A 的仿射标形或标架 .也可以说,A 的仿射标形是由原点** O **和 V 的基** $e = (e_i)$ **所构成 .也常采用初等几何的术语,把** $OE_1\cdots E_n$ **叫做仿射坐标系 .**

仿射空间的元素是点而不是向量,但是可以定义连接两点的向量 .

定义 3　假设 A 是仿射空间, φ_O **是它的一个坐标系,** X **和** Y **是它的两个点,使得** $\varphi_O(X) = x,\ \varphi_O(Y) = y$ **.那么,** $y - x$ **叫做以** X **为起点,** Y **为终点的向量,记成** $\overline{XY}$ **,即**

$$\overline{XY} = \varphi_O(Y) - \varphi_O(X) = y - x\ . \tag{2}$$

也记成 $\overline{XY} = \overrightarrow{xy} = y - x$ **.**

在定义 3 中,如果取另外的坐标系 $\varphi_{O'}$, **(2)就成为**

$$\overline{XY} = \varphi_{O'}(Y) - \varphi_{O'}(X) = y' - x'.$$

由性质 1 得知 $x' = x + a$ **和** $y' = y + a$ **,因而** $y' - x' = y - x$ **,说明定义 3 与坐标系的选取无关 .而且,A 中点** X **的坐标向量** x **就是** $\overline{OX}$ **,又称** x **为** X **的定位向量或径矢量 .**

假设仿射空间 A 有两个坐标系 φ_O **和** $\varphi_{O'}$ **,相应的标架分别是**

$$\begin{aligned} &OE_1\cdots E_n, \quad \varphi_O(E_i) = e_i, \\ &O'E_1'\cdots E_n', \quad \varphi_{O'}(E_i') = e_i', \end{aligned} \qquad i = 1,\cdots,n\ .$$

又假设点 X **在这两个坐标系中的坐标分别是**

$$x = (x^1,\cdots,x^n), \quad x' = (x'^1,\cdots,x'^n), \tag{3}$$

点 X **的坐标向量分别是**

$$\overline{OX} = xe^{t}, \quad \overline{O'X} = x'e'^{t}\ .$$

试问,(3)中两种仿射坐标之间有什么关系呢?这就要看两个基向量之间的关系 .假设 $e = (e_1,\cdots,e_n)$ **与** $e' = (e_1',\cdots,e_n')$ **之间有**

$$e' = eA, \quad \det A \neq 0\ . \tag{4}$$

又假设坐标系 $\varphi_{O'}$ **的坐标原点** O' **在标架** $OE_1\cdots E_n$ **中的坐标是**

$$a = (a^1, \cdots, a^n),$$

即是

$$\overline{OO'} = ae^{\mathrm{t}}. \tag{5}$$

利用定义 3 得到

$$\begin{aligned}\overline{OX} &= \varphi_{O'}(X) - \varphi_{O'}(O) = \overline{O'X} - \overline{O'O} \\ &= \overline{OO'} + \overline{O'X},\end{aligned}$$

再由(3),(4),(5)又得到

$$\begin{aligned}xe^{\mathrm{t}} &= ae^{\mathrm{t}} + x'e'^{\mathrm{t}} = ae^{\mathrm{t}} + x'A^{\mathrm{t}}e^{\mathrm{t}} \\ &= (a + x'A^{\mathrm{t}})e^{\mathrm{t}}.\end{aligned}$$

于是,证明了下面的

定理 1 仿射空间内点 X 的坐标变换式为

$$x = a + x'A^{\mathrm{t}}, \tag{6}$$

其中 A 为基向量变换(4)的系数矩阵, a 为坐标系 $\varphi_{O'}$ 的原点 O' 在 φ_O 中的坐标, x 和 x' 分别是 X 在 φ_O 和 $\varphi_{O'}$ 中的坐标 .

我们在前面介绍了仿射空间及其与向量空间的关系 .象向量空间有子空间一样,仿射空间也有类似的概念,即平面 .

定义 4 假设 $\mathbf{V}$ 是仿射空间 $\mathbf{A}$ 所对应的 n 维向量空间, H 是 $\mathbf{V}$ 的子空间 .那么,商空间 $\mathbf{V}/H$ 的元素 $A = \bar{a} = a + H (\forall a \in \mathbf{V})$ 叫做仿射空间 $\mathbf{A}$ 的一个平面,或平移子空间 .子空间 H 的维数 $\dim H$ 又叫做平面 A 的维数,也记成 $\dim A$.

当 $\dim A = 0$ 时, $A = a + \{0\} = a$ 是零维的平面, $\bar{a} = a$ 也就是 $\mathbf{A}$ 的点 .于是,仿射空间 $\mathbf{A}$ 就是所有零维平面的集合,

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}/\{0\} = \{A = \bar{a} \mid \dim A = 0, a \in \mathbf{V}\}.$$

当 $\dim A = 1$ 时, $A = a + [e], e \neq 0$.这时, A 是一维平面,又称为仿射空间 $\mathbf{A}$ 的直线 .

当 $\dim A = n - 1$ 时, $A = a + [e_1, \cdots, e_{n-1}]$, 这里 $[e_1, \cdots, e_{n-1}]$ 是 $n - 1$ 个线性无关向量所生成的子空间 .这时 A 是 $n - 1$ 维平面,又称为仿射空间 $\mathbf{A}$ 的超平面 .

显然,平面或平移子空间不一定是 $\mathbf{V}$ 的子空间 .一个平面是

子空间的充要条件是坐标原点在平面上,因为 $A = a + H = H$ 等价于 $a \in H$,也是 $0 \in H = A$.

平面是一个初等几何沿用的术语,类似的还有

定义 5 仿射空间 **A** 的平面 $A = a + H$ 时, H 叫做 A 的方向子空间.假若平面 $A = a + H$ 与 $B = b + K$ 的方向子空间有包含关系,即 $H \quad K$ 或 $K \quad H$ 时,那么,两个平面 A 与 B 叫做互相平行,记成 $A \parallel B$.

在初等几何内,平面的平行关系是等价关系.在这里则不然,它不具有传递性.例如

$$A = a + [e_1], B = b + [e_1, e_2], C = c + [e_2],$$

这里 e_1, e_2 是两个线性无关的向量.这时, $A \parallel B, B \parallel C$ 但 $A \parallel C$.

性质 2 同一个平面内任意两点的定位向量之差在这个平面的方向子空间内.

证明 假设 $X, Y \in A = a + H$,那么

$$x = \phi_0(X) = a + h_1, y = \phi_0(Y) = a + h_2, \quad h_1, h_2 \in H.$$

于是连接这两点的向量,即两点的定位向量之差是

$$\overline{XY} = \phi_0(Y) - \phi_0(X) = h_2 - h_1 \in H.$$

性质 2 证毕,再讨论两个平面.两个平行的平面,即其方向子空间有包含关系的两个平面,不一定有包含关系.即 $H \quad K$ 时不一定有 $a + H \quad b + K$.但是,下面的逆命题成立.

性质 3 假设两个平面有包含关系,那么它们的方向子空间也有包含关系.

证明 假设 $a + H \quad b + K$,那么 $a + 0 = b + k_1, k_1 \in K$.于是 $b - a \in K$.对于任意 $h \in H$, 都有 $a + h = b + k, k \in K$.因此, $h = (b - a) + k$, 得到 $h \in K$, 证明了 $H \quad K$.

性质 3 证毕.它说明,有包含关系的两个平面是平行平面,即是说两个平面的包含关系是平行关系的特例.

下面来讨论平面的参数方程和一般方程.

我们知道,由 m 个线性无关向量 $a_\alpha = (a_\alpha^1, \cdots, a_\alpha^n)$, $\alpha = 1, \cdots, m$ 所生成的子空间 $H = [a_1, \cdots, a_m]$ 内,向量 x 可以用生成元线性表示.于是,我们称子空间 H 的参数方程是

$$H: x = \sum_{\alpha=1}^{m} t^\alpha a_\alpha, \text{或 } x^i = \sum_{\alpha=1}^{m} t^\alpha a_\alpha^i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{7}$$

同样,平面 $A = a + H$ 的参数方程是

$$A: x = a + \sum_{\alpha=1}^{m} t^\alpha a_\alpha, \quad a = (a^1, \cdots, a^n),$$

$$\text{或} \quad x^i = a^i + \sum_{\alpha=1}^{m} t^\alpha a_\alpha^i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8}$$

引用 $m \times n$ 型系数矩阵 M 和行向量 $t = (t^1, \cdots, t^m)$,

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} M = m,$$

就可以把参数方程改写成矩阵形式:

$$H: x = tM, \tag{7'}$$

$$A: x = a + tM. \tag{8'}$$

在参数方程中,含有参数 $t^1, \cdots, t^n$.这些参数可以消去,具体方法如下.

(7)式可以看作一个线性方程组,它的系数矩阵是 M^t,有 m 个变量 $t^1, \cdots, t^m$,有 n 个方程.即

$$\begin{aligned} a_1^1 t^1 + \cdots + a_m^1 t^m &= x^1, \\ &\cdots\cdots \\ a_1^m t^1 + \cdots + a_m^m t^m &= x^m, \\ &\cdots\cdots \\ a_1^n t^1 + \cdots + a_m^n t^m &= x^n, \end{aligned} \tag{7''}$$

由于 $\operatorname{rank} M^t = m$,系数矩阵内有一个 m 级的非零子式.不影响一般性,不妨认为上方的 m 级子式不等于零.于是,利用克莱姆定

理，从$(7'')$的前 m 个方程可以得到解 $(t^1,\cdots,t^m)$. 当 $(x^1,\cdots,x^m)$ 取定一组数时，上述解向量是唯一的，它可以用 $x^1,\cdots,x^m$ 来线性表示成

$$t^\alpha=\sum_{i=1}^{m}f_i^\alpha x^i,\quad \alpha=1,\cdots,m.$$

将这个解代入$(7'')$的后 $n-m$ 个方程，经移项和同类项合并后，成为仅含 x^i 的齐次线性方程组，记成

$$xB^{\mathrm{t}}=0,\text{或}\sum_{i=1}^{n}b_i^\beta x^i=0,\quad \beta=1,\cdots,n-m. \tag{9}$$

其中 $(n-m)\times n$ 矩阵 $B=(b_i^\beta)$ 的秩为 $n-m$. 这个方程(9)不再含参数，是 H 内 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 所满足的方程，叫做 H 的一般方程. 类似的，可得到平面 A 的一般方程

$$A:\ xB^{\mathrm{t}}=b,\text{或}\sum_{\beta=1}^{n}b_i^\beta x^i=b^\beta,\quad \beta=1,\cdots,n-m. \tag{10}$$

从上述过程看，任取 m 个数 $x^1,\cdots,x^m$，就可以求出对应的 m 个数 $t^1,\cdots,t^m$，进而求出对应的 $x^{m+1},\cdots,x^n$. 因此，齐次线性方程组(9)的基础解系含 m 个线性无关的解向量，系数矩阵的秩是

$$\operatorname{rank}B^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}B=n-m.$$

习　题

1. 举出仿射空间的实例.
2. 举出两个平面的实例，它们平行但无包含关系.
3. 已知平面的一般方程，怎样得到它的参数方程？

§2.2　平面的交与联

两个平面的交集不同于两个子空间的交集，可能是空的，当两个平面 A 与 B 的交 $A\cap B=\varnothing$ 时，称 A 与 B 不相交，否则称 A

与 B 相交.

定理 1　相交的两个平面 $A = a + H$, $B = b + K$ **的交集** $A \cap B$ **也是一个平面,其方向子空间为** $H \cap K$.**因而**

$$\dim(A \cap B) = \dim(H \cap K).$$

证明　由 $A \cap B \neq \emptyset$,**存在一个** $c \in A \cap B$,**有平面** $c + H \cap H$.**利用§1.1 的性质 3,由** $c \in A$ **得** $A = c + H$,**同理** $B = c + K$.**下面来证明** $A \cap B = c + H \cap K$.

任意 $x \in A \cap B$,**由** $x \in A = c + H$ **得** $x - c \in H$.**同理** $x - c \in K$.**于是** $x - c \in H \cap K$, $x \in c + H \cap K$, $A \cap B \quad c + H \cap K$.**反之,任意的** $x \in c + H \cap K$,**由** $x - c \in H$ **得** $x \in A$,**同理** $x \in B$.**于是** $c + H \cap K \quad A \cap B$.

定理 1 证毕.它可以推广到有限多个平面的情况.

推论　m **个平面** $A_i = a_i + H_i$, $i = 1, \cdots, m$ **相交时,交** $A_1 \cap \cdots \cap A_m$ **也是一个平面,其方向子空间为** $H_1 \cap \cdots \cap H_m$.

于是要问,怎样的两个平面才是相交的呢?

定理 2　两个平面 $A = a + H$ **与** $B = b + K$ **相交的充要条件是**

$$b' - a' \in H + K \quad (\forall a' \in A, b' \in B).$$

证明　由于§1.1 性质 3,这里只要证明 $b - a \in H + K$.

如果 $A \cap B \neq \emptyset$,**就存在** $c = a + h = b + k \in A \cap B$, $h \in H$, $k \in K$.**于是,** $b - a = h - k \in H + K$.**反之,如果** $b - a \in H + K$,**就可以表示**

$$b - a = h - k, \quad h \in H, k \in K.$$

于是, $c = a + h = b + k \in A \cap B$,**即** $A \cap B \neq \emptyset$.

推论　两个平面 $A = a + H$ **与** $B = b + K$ **不相交的充要条件是有**

$$b' - a' \notin H + K \quad (\forall a' \in A, b' \in B).$$

进一步讨论两个平面平行又相交的情况,它不同于初等几何的结论.

定理 3　两个平面平行且相交时,它们的交是较小的那个平面 .

证明　假设 $A = a + H, B = b + K, A \parallel B$, 不妨认为 $H \quad K$. 于是 $H \cap K = H$, 再由定理 1 就得到

$$A \cap B = c + H \cap K = c + H = A .$$

定理 3 证毕 .上面讨论两个平面的交集,很自然地问两个平面的并集 .因为两个平面的并集不一定还是一个平面,我们就不详细讨论了 .又因为平面不一定是一个子空间,也就没有两个平面之和的概念 .但是,有下面类似的

定义 1　假设 A, B 是仿射空间的两个平面 .那么,包含 A 和 B 的最小的平面叫做 A 与 B 的联,记成 $A \cup B$.

定义 1 的意思是: $A \quad A \cup B, B \quad A \cup B$; 任意平面 $Q \quad A, B$ 时, $Q \quad A \cup B$. 也就是说, $A \cup B$ 是所有上述 Q 的交集 .

联不是并,也不是和,它是和的推广到平面的概念 .当两个平面都是子空间时,它们的联就是和 .

例　假设 x, y 是两个点,那么它们的联是过 x 与 y 的直线,即一维平面 .假设 A 与 B 是两条相交或平行的直线,那么它们的联是过 A 与 B 的平面,即二维平面 .

联的概念还可以推广到有限多个平面,记成

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \text{, 或 } A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m .$$

两个平面的联是一个平面,它的方向子空间是什么? 它的维数是什么?

定理 4　两个平面 $A = a + H, B = b + K$ 的联

$$A \cup B = a + ([b - a] + H + K) .$$

证明　任意 $Q \quad A, B$, 可记成 $Q = a + L$, 下面来证明

$$L \quad [b - a] + H + K .$$

由 $A, B \quad Q$, 利用 §2 .1 性质 3, 得到 $H, K \quad L$. 又利用 §2 .1 性质 2, 由 $a \in A \quad Q$ 和 $b \in B \quad Q$ 得到 $b - a \in L$, 因

而 $b-a$ 生成的子空间 $[b-a]\quad L$.但是 L 为子空间,由得到的

$$H,\ K,[b-a]\quad L$$

就有 $[b-a]+H+K\quad L$.

于是,由 $[b-a]+H+K$ 也是一个子空间,又由 A∪B 的最小性,就证明了定理 4 .

定理 4 指明了 $A\cup B$ 的方向子空间,再利用定理 2 及其推论,就得到

推论 当两个平面 $A=a+H$ 与 $B=b+K$ 相交时,

$$A\cup B=a+(H+K),\dim(A\cup B)=\dim(H+K).$$

当 A 与 B 不相交时,

$$A\cup B=a+([b-a]+H+K),$$

$$\dim(A\cup B)=1+\dim(H+K).$$

因此, $\max(\dim A,\dim B)\leq\dim(A\cup B)\leq1+\dim(H+K)$.

上面介绍了平面的交与联的概念和基本性质,自然要问这两个集合的关系 .我们知道,向量空间内两个子空间的交与和的维数,有关系式

$$\dim(H+K)+\dim(H\cap K)=\dim H+\dim K, \tag{1}$$

$$\max(\dim H,\dim K)\leq\dim(H+K)\leq\dim H+\dim K.$$

但是,仿射空间内两个平面的情况就复杂了 .因为两个子空间的交总是非空的,两个平面的交不一定非空,而且两个平面也不一定是平行的 .在多种情况下,它们的维数关系也不一样,有下面的定理确定联的维数 .

定理 5 假设 $A=a+H,B=b+K$ 是仿射空间的两个平面 .

1 . $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\nparallel B$ 时,

$$\dim(A\cup B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B).$$

2 . $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\parallel B$ 时,

$$\dim(A\cup B)=\max(\dim A,\dim B).$$

3 . $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\parallel B$ 时,

$$\dim(A \cup B) = 1 + \dim(H + K).$$

4. $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \parallel B$ 时,

$$\dim(A \cup B) = 1 + \max(\dim A, \dim B).$$

证明 当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时,利用定理 4 推论和关系式(1),得到

$$\begin{aligned}\dim(A \cup B) &= \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B),\end{aligned}$$

这个结论对于 $A \parallel B$ 和 $A \parallel B$ 都成立.

当 $A \cap B \neq \varnothing$ 且 $A \parallel B$ 时,不仅有 $H \quad K$ 或 $K \quad H$,而且还有 $A \quad B$ 或 $B \quad A$.先不妨认为 $H \quad K$;由 $A \cap B \neq \varnothing$,就存在 $c \in A \cap B$,于是可以表示 $A = c + H$, $B = c + K$.因此,$H \quad K$ 推出 $A \quad B$.这时 $A \cap B = A$,定理的结论 2 成立.

当 $A \cap B \neq \varnothing$ 且 $A \parallel B$ 时,平面 A 和 B 就没有包含关系,这由 §2.1 的性质 3 立即得到.

当 $A \cap B = \varnothing$ 时,定理 4 的推论就是这里的结论了,它当然对于 $A \parallel B$ 的情况也成立.$A \parallel B$ 时不妨认为 $H \quad K$,于是 $H + K = K$, $\dim(H + K) = \dim K$,这又证明了结论 4.

定理 5 证毕.其中的情况 3,即不相交又不平行的两个平面叫做两个异面平面.

例 1 三维仿射空间内两条异面直线 L_1 与 L_2 的联 $L_1 \cup L_2$ 是三维平面,由定理 5 的结论 3 得到.三维仿射空间内两条不重合的共面直线 L_1 与 L_2,当它们相交时,联 $L_1 \cup L_2$ 是二维平面,由结论 1 得到;当它们不相交时,联 $L_1 \cup L_2$ 是二维平面,由结论 2 得到.

例 2 三维仿射空间内一条直线 L 与一个平面 π,有定理 5 的 1,2,4 三种情况,没有情况 3.因为 $L \parallel \pi$ 时,它们一定有交点,$L \cap \pi \neq \varnothing$.

习　　题

1．仿射空间 **A** 的两相交平面能相互平行么？举例说明．

2．仿射空间 **A** 的两个平面 A 与 B 的并集 $A \cup B$ 是平面么？举例说明．

3．仿射空间 **A** 内平面 $A_1, \cdots, A_m$ 的联运算满足结合律．

4．假设 A 是 **A** 的一个平面，0 是零向量．那么，A 生成的子空间 $[A] = A \cup 0$．

5．假设 **V** 是域 F 上的向量空间，**A** 是对应于 **V** 的仿射空间；A 是 **A** 的平面；

$$a_i \in A, \lambda_i \in F, i = 1, \cdots, m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \text{.那么,一定有} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in A.$$

6．在上题的仿射空间中，集合

$$\left\{ a_i \in A \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \in A, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

仍然是 **A** 的平面．

7．平面 $A = a + H$ 是子空间的充要条件是 $0 \in A$．

8．平面的平行关系有传递律么？举例说明．

9．假设 $A \parallel B$．那么只有两种可能：有包含关系 $A \quad B$ 或 $B \quad A$；不相交 $A \cap B =$ ě．

§2.3　关 联 定 理

仿射几何的一个重要内容是，利用交与联的概念，来讨论不同平面之间的相互关系．讨论各维平面之间的位置关系，讨论各维平面的交与联是什么平面，这些命题都称为关联定理．§2.2 定理 5 就是一般仿射空间 **A** 的关联定理，是本节具体讨论问题的主要依据，本节引用的都是这个定理 5 的四个结论．

这一节具体对于二维仿射空间 $\mathbf{A}^2$ 和三维仿射空间 $\mathbf{A}^3$ 作详细分析．先讲 $\mathbf{A}^2$，它的零维平面就是点，记成 $a, b, \cdots$；它的一维平面就是直线，记成 $l, h, \cdots$．因此，$\mathbf{A}^2$ 有三种平面位置关系：a 与 b，a

与 l, l 与 h .下面就讨论这些情况下的交与联,即二维仿射空间 $\mathbf{A}^2$ 的关联定理 .

定理 1 假设点 $a, b \in \mathbf{A}^2$,直线 l, h $\mathbf{A}^2$.那么,

1 . $a \neq b$ 时, $a \cup b$ 是一条直线 .

2 . $a \cap l =$ ě 时, $a \cup l = \mathbf{A}^2$; $a \cap l \neq$ ě 时, $a \cup l = l$.

3 . $l \parallel h$ 时, $l = h$, 或 $l \cap h =$ ě , $l \cup h = \mathbf{A}^2$; $l \parallel h$ 时, $l \cap h = a$ 是一个点, $l \cup h = \mathbf{A}^2$.

证明 1 . 由 $a \neq b$, 得 $a \cap b =$ ě ; 点是零维空间,与任意平面都平行,有 $a \parallel b$.根据 § 2 .2 定理 5 的结论 4, $\dim(a \cup b) = 1$, 即 $a \cup b$ 是一条直线 .

2 . 同上段的理由, $a \parallel l$.又 $a \cap l =$ ě 时,根据 § 2 .2 定理 5 的结论 4, $\dim(a \cup l) = 2$, 即 $a \cup l = \mathbf{A}^2$. $a \parallel l$ 又 $a \cap l \neq$ ě 时,根据结论 2, $\dim(a \cup l) = 1$, 即 $a \cup l = l$.

3 . $l \parallel h$ 时,用上面的方法容易证明命题成立 . $l \parallel h$ 时,它们的方向子空间,即方向向量不平行这两向量的交是零向量,这两向量的和是 $\mathbf{A}^2$.于是, $\dim(l \cap h) = 0$, 即 $l \cap h$ 是一个点 .根据结论 1,得 $\dim(l \cup h) = 2$, 即 $l \cup h = \mathbf{A}^2$.值得注意的,上面已经证明了 $l \parallel h$ 时, $l \cap h \neq$ ě .也就是说, $l \parallel h$, $l \cap h =$ ě 的情况是不存在的 .事实上,在这种情况下,根据结论 3 得 $\dim(l \cup h) = 3$,也说明不可能出现 .

定理 1 证毕 .再讨论三维仿射空间 $\mathbf{A}^3$,它的零维平面就是点,记成 $a, b, \cdots$; 它的一维平面就是直线,记成 $l, h, \cdots$; 它的二维平面就是平面,记成 $\alpha, \beta, \cdots$. $\mathbf{A}^3$ 内的情况就复杂些,有六种位置关系: a 与 b, l 与 h, α 与 β, a 与 l, a 与 α, l 与 α .下面就讨论这些情况下的交与联,即三维仿射空间 $\mathbf{A}^3$ 的关联定理 .

定理 2 假设点 $a, b \in \mathbf{A}^3$,直线 l, h $\mathbf{A}^3$,平面 α, β $\mathbf{A}^3$.那么,

1 . $a \neq b$ 时, $a \cup b$ 是一条直线 .

2．$l \parallel h$, $l \neq h$ 时，$l \cup h$ 是一个平面；$l \parallel h$, $l \cap h$ = ě 时，$l \cup h = \mathbf{A}^3$；$l \parallel h$, $l \cap h \neq$ ě 时，$l \cup h$ 是一个平面．

3．$\alpha \parallel \beta$ 时，$\alpha \cap \beta$ = ě ，$\alpha \cup \beta = \mathbf{A}^3$；或 $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$, $\alpha \cup \beta = \alpha = \beta$．$\alpha \parallel \beta$ 时，$\alpha \cap \beta$ 是一条直线，$\alpha \cup \beta = \mathbf{A}^3$．

4．a ú l 时，$a \cup l$ 是一个平面．

5．a ú α 时，$a \cup \alpha = \mathbf{A}^3$．

6．$l \cup \alpha = \mathbf{A}^3$．

证明 1．根据 §2.2 定理 5 的结论 4 立即得证．

2．$l \parallel h$ 又 $l \neq h$ 时，一定有 $l \cap h$ = ě ．因为否则 l h，或 h l 都与 $l \neq h$ 相矛盾．于是，根据结论 4 得 $\dim(l \cup h) = 2$，即 $l \cup h$ 是一个平面．

$l \parallel h$, $l \cap h$ = ě 时，根据结论 3 得 $\dim(l \cup h) = 3$，即 $l \cup h = \mathbf{A}^3$．

$l \parallel h$, $l \cap h \neq$ ě 时，根据结论 1 得 $\dim(l \cup h) = 2$，即 $l \cup h$ 是一个平面．

3．$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta$ = ě 时，根据结论 4 得 $\dim(\alpha \cup \beta) = 3$，即 $\alpha \cup \beta = \mathbf{A}^3$．$\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta \neq$ ě 时，根据结论 2 得 $\dim(\alpha \cup \beta) = 2$，即 $\alpha \cup \beta = \alpha = \beta$，因而 $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$．

$\alpha \parallel \beta$ 时必有 $\alpha \cap \beta \neq$ ě ．记 α, β 的方向子空间分别为 H, K，有

$$\dim(\alpha \cap \beta) = \dim(H \cap K) = 1, \text{或 } 2．$$

但 $\dim(H \cap K) = 2$ 时 $H \cap K = H = K$，即 $\alpha \parallel \beta$，与 $\alpha \parallel \beta$ 相矛盾．于是 $\alpha \parallel \beta$ 时只能 $\dim(\alpha \cap \beta) = 1$，$\alpha \cap \beta$ 是一条直线．这时，根据结论 1 得 $\dim(\alpha \cup \beta) = 3$，即 $\alpha \cup \beta = \mathbf{A}^3$．

4 和 5．根据结论 4 容易证实．

6．$l \cap \alpha$ = ě 且 $l \parallel \alpha$ 时，根据结论 4 得 $\dim(l \cup \alpha) = 3$，即 $l \cup \alpha = \mathbf{A}^3$．注意，$l \cap \alpha$ = ě 且 $l \parallel \alpha$ 的情况不存在，否则，把 l 与 α 的方向子空间记成 L 与 H，根据结论 3 得到

$$\dim(l \cup \alpha) = 1 + \dim(L + H) = 4$$

的矛盾 .

$l \cap \alpha \neq$ ě 且 $l \parallel \alpha$ 时,先求 $\dim(l \cap \alpha)$, 由

$$0 \leq \dim(l \cap \alpha) \leq \min(\dim l, \dim\alpha) = 1,$$

说明只可能 $\dim(l \cap \alpha) = 0, 1$.如果 $\dim(l \cap \alpha) = 1$ 必有 $l \quad \alpha$, 与假设相矛盾,因此 $\dim(l \cap \alpha) = 0$. 根据结论 1 得 $\dim(l \cup \alpha) = 3$, 即 $l \cup \alpha = \mathbf{A}^3$.同样注意, $l \cap \alpha \neq$ ě 且 $l \parallel \alpha$ 的情况不存在,否则,根据结论 2 得 $\dim(l \cup \alpha) = 2$, 即 $l \cup \alpha = \alpha$, $l \quad \alpha$. 这时,由 § 2 .1 性质 3 得到 $l \parallel \alpha$ 的矛盾 .

定理 2 证毕 .至于四维以上仿射空间内平面的位置关系、交与联等,都可以类似地讨论,只不过情况复杂得多了 .本节两个定理的结果与初等几何的结果是一致的,在高维仿射空间内就抽象了 .

习　　题

1 . $\mathbf{A}^3$ 内相交于一点的两条直线的联是一个平面 .

2 . $\mathbf{A}^3$ 内两条共面但不平行的直线只有一个交点 .

3 . $\mathbf{A}^3$ 内不平行的直线与平面只有一个交点 .

4 . 假设 α, β 是 $\mathbf{A}^3$ 的两个平面, $\alpha \parallel \beta$ 那么 $\alpha \cap \beta \neq$ ě ,$\dim(\alpha \cap \beta) \neq 0$.

5 . 假设 α, β 是四维仿射空间 $\mathbf{A}^4$ 的平面,即二维平面,试讨论它们的交与联 .

§ 2 .4　仿射变换群

在 § 2 .1 内,我们介绍过仿射空间中一个点的不同坐标之间的坐标变换 .假设点 X 在仿射坐标系 $OE_1 \cdots E_n$ 中的坐标向量为 x ,在仿射坐标系 $OE_1' \cdots E_n'$ 中的坐标向量为 x' . 那么, § 2 .1 定理 1 已经证明,两种坐标之间可以用线性变换和平移变换相联系,有

$$x = x' A^{t} + a, \text{或 } x' = (x - a)(A^{-1})^{t} .$$

在本节内,我们将介绍另外一个几何概念,它的表达形式与上式类似,实质上则是仿射空间内不同点的变换 .

在取定一个仿射坐标系下,仿射空间 **A** 的点与向量空间 **V** 的向量是一一对应的,我们常常不将两者严加区别,用 **V** 内的向量变换来定义 **A** 内点的变换 .

定义 1 假设 φ 是仿射空间 **A** 到 **A** 的映射,即

$$\varphi: X \to X' = \varphi(X);$$

在取定的仿射坐标系下, X 与 X' 分别对应于 x 与 x',而且

$$x' = xA^{t} + a, \text{或 } x'^{i} = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + a^i, \tag{1}$$

其中 $\det A \neq 0$.那么, φ 叫做 **A** 的非奇异的或满秩的仿射变换;而且不妨记 $x' = \varphi(x)$.

仿射变换是同一个坐标系下不同点的变换,而坐标变换是不同坐标下同一个点的坐标变量,在概念上是有区别的 .

由§2 .1 定义 3,仿射空间内每一对点可以定义一个向量 .因此,很自然地可以作下面的定义 .

定义 2 假设 φ 是仿射空间 **A** 的一个仿射变换; υ 是以 x 为起点、以 y 为终点的向量,即 $\upsilon = \overrightarrow{xy} = y - x$.那么, $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$ 叫做 $\overrightarrow{xy}$ 在仿射变换 φ 下的象,记成 $\varphi(\upsilon)$, 即

$$\upsilon' = \varphi(\upsilon) = \overline{\varphi(x)\varphi(y)} = \varphi(y) - \varphi(x) . \tag{2}$$

于是,由(1)和(2)立即得到 $\upsilon' = (y - x)A^{t}$, 即

$$\upsilon' = \upsilon A^{t}, \text{或 } \upsilon'^{i} = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \upsilon^j . \tag{3}$$

这就证明了下面的定理 .

定理 1 假设 φ 是(1)定义的点的仿射变换,是非齐次的线性变换 .那么,在仿射变换 φ 下向量的变换式为(3),是线性齐次变换,即向量空间内的线性变换或同态映射 .

推论 1 在仿射空间内点的仿射变换下,向量的线性关系不变,即

$$\varphi(\lambda u + \mu\upsilon) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(\upsilon) .$$

证明 由定理 1 容易推得

$$
\begin{aligned}
\varphi(\lambda u+\mu v) &= (\lambda u+\mu v)A^{t} \\
&= (\lambda u)A^{t}+(\mu v)A^{t} \\
&= \lambda(uA^{t})+\mu(vA^{t}) \\
&= \lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v).
\end{aligned}
$$

从上面的推论 1 可以推导出仿射变换的一个重要不变量,先介绍一些新的概念.

定义 3　假设 X_1, X_2 与 X 是仿射空间内的三个点, x_1, x_2 与 x 是向量空间内的三个对应向量;连接它们的两个向量相互平行, $\overline{X_1X} \parallel \overline{X_2X}$,即 $\overline{x_1x} \parallel \overline{x_2x}$, $(x-x_1) \parallel (x-x_2)$,

$$
\overline{x_1x}=\lambda\overline{x_2x}. \tag{4}
$$

那么,我们称 X_1, X_2 与 X 是共线的,或称这三点在一条直线上;这个 λ 叫做三点 X_1, X_2, X 的简比,也不妨叫做共线三点 x_1, x_2, x 的简比,记成 $\lambda=(x_1, x_2, x)$.

在定义 3 内,我们并没有定义仿射空间内的长度概念.(4)式说明,从形式上看,简比是两个向量的长度之比.下面的推论 2 说明,这个看作长度之比的简比,正是仿射变换下的基本不变量.

推论 2　仿射空间内共线的三点,在仿射变换下的象仍然是共线的,而且它们的简比不变.

证明　记三点 x_1, x_2, x 在仿射变换 φ 下的象为 $x_1'=\varphi(x_1)$, $x_2'=\varphi(x_2)$, $x'=\varphi(x)$.把(4)两端用 φ 来作用,利用推论 1,就得到

$$
\overline{x_1'x'}=\lambda\overline{x_2'x'},
$$

证明了推论 2.

还要说明的,这里的简比与解析几何内的定比仅相差一个符号.那里的定比 γ 是符合 $\overline{x_1x}=\gamma\overline{xx_2}$ 的,由 $\overline{x_2x}=-\overline{xx_2}$ 得 $\lambda=-\gamma$.

线段 x_1x_2 的中点 x,是简比 $\lambda=-1$ 的点.由推论 2 立即得到

推论 3　仿射空间内线段的中点在仿射变换下不变．

前面介绍了仿射变换的一些性质,下面讨论同一个仿射空间内的所有仿射变换．

定理 2　仿射空间内所有的仿射变换成群．

证明　对于仿射空间 **A** 内的任意两个仿射变换,可以表示成

$$\varphi: x' = xA^t + a,$$

$$\psi: x' = xB^t + b.$$

于是,它们的乘积 $\psi\varphi$ 可以由上述两式推出,即

$$x' = (xA^t + a)B^t + b = x(BA)^t + (aB^t + b).$$

记 $C = BA$, $c = aB^t + b$,由 $\det A \neq 0$ 和 $\det B \neq 0$ 得 $\det C \neq 0$．因此,

$$\psi\varphi: x' = xC^t + c,$$

说明 $\psi\varphi$ 仍然是一个仿射变换．

同样的方法容易推出,仿射变换的乘法满足结合律,恒等映射 φ_0 也是一个仿射变换,对于任意仿射变换 φ,都有 $\varphi\varphi_0 = \varphi$．

最后,利用前面仿射变换的乘法,容易验证(1)所定义的仿射变换 φ 有逆映射

$$\varphi^{-1}: x' = x(A^{-1})^t - a(A^{-1})^t,$$

它也是 **A** 的一个仿射变换．

这就证明了定理 2,这个群叫做仿射变换群．这个群的元素决定于 n 阶矩阵 A 和 n 维向量 a,自由度为 $n^2 + n$．于是有

推论　n 维仿射空间 **A** 中所有的仿射变换构成 $n(n+1)$ 维的仿射变换群 **G**．

接着讨论仿射变换群的子群．为此,先介绍一些有关的概念．

假设 φ 是仿射空间 **A** 的仿射变换,那么,满足 $\varphi(x) = x$ 的点 x 叫做 φ 的不动点．也就是说,不动点 x 满足 $x = xA^t + a$,不动点的全体是集合

$$\{x \in \mathbf{A} \mid x(I_n - A^t) = a\}, \tag{5}$$

这里 A 和 a 是由 φ 所决定的．根据§2.1 的(10),上面的集合(5)

表示一个平面的方程,叫做 ϕ 的不动平面.当 $\mathrm{rank}(I_n - A^t) = m$ 时,这个平面是 $n-m$ 维.当 $a\neq 0$, $A = I_n$ 时,这个仿射变换没有不动点.

下面列举这个仿射群 **G** 的几个子群.

一、中心仿射群　以坐标原点 $x=0$ 为不动点的仿射变换 ϕ 叫做中心仿射变换.这时,$\phi(0)=0$,即使得 $0 = 0A^t + a$,只有 $a=0$.所有中心仿射变换构成 **G** 的一个子群

$$\mathbf{G}_0 = \{\phi\in\mathbf{G} \mid \phi: x' = xA^t\},$$

叫做中心仿射群.$\dim\mathbf{G}_0 = n^2$,**G** 同构于全线性群 $GL(n, F)$.

二、平移仿射群　以 $A = I_n$ 的仿射变换 ϕ 叫做平移变换.这时,$\phi(x) = x + a$.所有平移变换构成 **G** 的一个子群 $\mathbf{G}_t$,叫做平移仿射群,$\dim\mathbf{G}_t = n$.

仿射群正好是中心仿射群与平移仿射群的笛卡尔积,即

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \times \mathbf{G}_t.$$

三、幺模仿射群　以 $\det A = 1$ 的仿射变换 ϕ 叫做幺模变换.所有幺模变换构成 **G** 的一个子群 $\mathbf{G}_1$,叫做幺模变换群,或等积仿射群.因为使 $\det A = 1$ 的矩阵只有 $n^2 - 1$ 个自由度,所以

$$\mathbf{G}_1 = \{\phi\in\mathbf{G} \mid \phi(x) = xA^t + a, \det A = 1\},$$

$$\dim\mathbf{G}_1 = n(n+1) - 1.$$

下面介绍幺模变换的一个重要性质,从一个几何概念开始.在初等几何里,以 2 个向量为边可以生成一个平行四边形,以 3 个向量为边可以生成一个平行六面体.这些多面体的体积的概念,借助于§1.3 定义 1 的多重线性型,可以在仿射空间内推广.

定义 4　假设 $\mathbf{A}^n$ 是仿射空间,$\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n$ 是 n 个向量,f 是一个 n 重的反对称的线性型.记 $f(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_n)$.那么,

$$V = (\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n)$$

叫做向量 $\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n$ 的混合积,又叫做这 n 个向量生成的 $2n$ 面体

的体积.再假设以基底 $e_1, \cdots, e_n$ 生成的 $2n$ 面体的体积

$$V_0 = (e_1, \cdots, e_n) = 1,$$

那么,这个仿射空间叫做 n 维么模仿射空间,这个坐标系叫做么模坐标系.

前面所说的么模变换又叫做等积仿射变换,因为有下面命题.

定理 3 在 n 维么模仿射空间的么模仿射变换下,平行 $2n$ 面体的体积不变.

证明 首先把 $\upsilon_1, \cdots, \upsilon_n$ 所对应的体积用 $e_1, \cdots, e_n$ 所对应的体积来表示.如果

$$\upsilon_i = \sum_{j=1}^{n} \upsilon_i^j e_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

那么就有

$$\begin{aligned} V = (\upsilon_1, \cdots, \upsilon_n) &= \sum_{i_1, \cdots, i_n} (\upsilon_1^{i_1} e_{i_1}, \cdots, \upsilon_n^{i_n} e_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, \cdots, i_n} \upsilon_1^{i_1} \cdots \upsilon_n^{i_n} (e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) \\ &= \det [\upsilon_i^j] (e_1, \cdots, e_n). \end{aligned}$$

如果取定么模坐标系,就得到

$$V = \det [\upsilon_i^j]. \tag{6}$$

根据定理 1,仿射变换(1)的 ϕ 使得

$$\upsilon_i' = \phi(\upsilon_i) = \upsilon_i A^{t}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

利用(6)和 ϕ 是么模变换,就得到

$$\begin{aligned} V' &= (\phi(\upsilon_1), \cdots, \phi(\upsilon_n)) \\ &= (\upsilon_1 A^{t}, \cdots, \upsilon_n A^{t}) \\ &= V \cdot \det A^{t} = V, \end{aligned}$$

证明了定理 3.

前面介绍了仿射变换群和它的几个子群.每一个仿射变换,把仿射空间的每一个点都映射到一个象点,把仿射标架的 $n+1$ 个

点映射到 $n+1$ 个象点.反过来还有下面的性质,先把仿射标架的概念加以推广.

定义 5 假设 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 是仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 的 $n+1$ 个点,而且 n 个向量 $\overline{P_0P_i}, i=1,\cdots,n$ 是线性无关的.那么,这 $n+1$ 个点称为在一般位置下.

性质 假设 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 是仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 内 $n+1$ 个在一般位置下的点,$OE_1\cdots E_n$ 是 $\mathbf{A}^n$ 的仿射标架.那么,存在唯一的仿射变换 ϕ,使得

$$\phi(O)=P_0,\quad \phi(E_i)=P_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{7}$$

证明 我们先将 $\mathbf{A}^n$ 的点用坐标向量表示成

$$e_0=(0,\cdots,0),$$

$$e_i=(\delta_i^1,\cdots,\delta_i^n),\quad i=1,\cdots,n,$$

$$p_i=(p_i^1,\cdots,p_i^n),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

性质要求的 ϕ 必须满足条件 $\phi(e_i)=p_i, i=0,1,\cdots,n$.也就是说,(1)所表示的 ϕ 必须满足条件

$$a^j=p_0^j,\quad a_i^j+a^j=p_i^j,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

令(1)中 A 和 a 为

$$a_i^j=p_i^j-p_0^j,\ a^j=p_0^j,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

由 $n+1$ 个一般位置下的点的假设,有 $\det A=\det(p_i^j-p_0^j)\neq 0$,这个 ϕ 就是性质所指的仿射变换.

这个性质又可以推广成下面的定理,它是仿射变换的基本定理,与向量空间的线性变换相类似.

定理 4 假设 $P_0, P_1, \cdots, P_n; P_0', P_1', \cdots, P_n'$ 是仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 的两组一般位置下的点.那么,存在唯一的仿射变换 ϕ 使得

$$\phi(P_i)=P_i',\quad i=1,\cdots,n. \tag{8}$$

证明 根据前面的性质中(7),存在唯一的 ϕ_1 和 ϕ_2 使得

$$\phi_1(O)=P_0,\quad \phi_1(E_i)=P_i;$$

$$\phi_2(O)=P_0',\quad \phi_2(E_i)=P_i',\quad i=1,\cdots,n.$$

于是,仿射变换 $\varphi = \varphi_2\varphi_1^{-1}$ 就使得(8)成立.

习　　题

1. 仿射变换(1)当 $\det A > 0$ 时,叫正向仿射变换,G 内所有正向仿射变换构成集合 G_+.问 G_+ 成群么?
2. 上题内 $\det A < 0$ 的情况,反向仿射变换的集合 G_- 成群么?
3. G 内所有正向的中心仿射变换的集合 G_0^+ 是 G_0 和 G_+ 的子群.
4. 把重量为 m_i 的质点放在仿射空间的点 x_i 上, $i = 1, \cdots, k$.点

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$$

叫做 $x_1, \cdots, x_k$ 的重心.试证明:重心是仿射变换下的不变量.也就是说,重心的象等于象的重心.

5. 假设 $OE_1 \cdots E_n$ 是一个仿射标架, φ 是仿射变换.试证明:

$$\varphi(O)\varphi(E_1)\cdots\varphi(E_n)$$

还是一个仿射标架.

§2.5　平面与二次超曲面

仿射几何讨论仿射变换下不变的几何性质,上节的许多命题都是这种不变性质.这一节继续对平面和二次代数超曲面来讨论,在仿射变换下不变的性质是什么.

先谈简单的平面,§2.1 的(10)是平面的一般方程.

定理 1　在仿射变换下,平面的维数不变.

证明　仿射变换不妨写成

$$\varphi: \quad x = x' A^{t} + a, \quad \det A \neq 0 \tag{1}$$

时,平面 $xB^{t} = b$ 的象集是满足条件

$$(x' A^{t} + a) B^{t} = b,$$

$$x' (BA)^{t} = b - aB^{t}$$

的点 x'的集合,它也是一个平面.因为 BA 与 B 的秩相等,所以这个平面与 $xB^{t} = b$ 的维数相同.

定理 1 证毕.讲的是仿射变换下一个平面的变化.再讲两个平行的平面 $a + H$ 与 $b + K$,其中 $H \quad K$.在仿射变换 ϕ 下,显然有 $\phi(H) \quad \phi(K)$,保持了方向子空间的包含关系.因此,$\phi(a) + \phi(H)$ 与 $\phi(b) + \phi(K)$ 仍然保持平行关系,这里 $\phi(H)$ 与 $\phi(K)$ 仍然是向量子空间,这就得到了下面的

定理 2 在仿射变换下,两个平行平面的平行关系不变.

除了平行关系以外,还有一种衔接关系:如果一个点在一个平面上,即这个平面通过这个点,就称这样的点与平面有衔接关系.显然,衔接关系是平行关系的特例.因此有下面的

推论 在仿射变换下,点与平面的衔接关系不变.

前面都对平面来讨论,平面是指各维的仿射平面.下面来讨论代数超曲面,即是下面的几何图形.

定义 在仿射空间内,适合 $x^{1}, \cdots, x^{n}$ 的一个代数方程的所有点 $x = (x^{1}, \cdots, x^{n})$,组成一个图形,叫做代数超曲面,这个方程的次数叫做代数超曲面的次数.

例如一次超曲面

$$xB^{t} + c = 0,$$
$$B = (b_{1}, \cdots, b_{n}) \neq 0, \quad c \in \mathbf{R}.$$

一次代数超曲面的方程正是§2.1 内(10)所表示的平面的一般方程,rank $B = 1$ 说明这个平面的维数是 $n - 1$.所以,一次代数超曲面就是仿射空间的超平面.再例如二次超曲面,可以认为它的代数方程是

$$Q: \quad xBx^{t} + 2xC^{t} + d = 0, \tag{2}$$
$$B^{t} = B = (b_{ij}) \neq 0, C = (c_{1}, \cdots, c_{n}), d \in \mathbf{R},$$

这里 B 和 C 都是实矩阵,B 是 n 阶对称的.也就是说,

$$Q: \sum_{i, j} b_{ij} x^{i} x^{j} + 2 \sum_{i} c_{i} x^{i} + d = 0.$$

至于三次以上超曲面的代数方程,也不难写出来 .

定理 3 在仿射变换下,代数超曲面及其次数都是不变的 .

证明 对于一次超曲面即 $n-1$ 维平面,定理 1 已经证明了命题成立 .下面只对二次超曲面来证明命题成立,至于一般情况只是更复杂些,方法是一样的,就不予叙述了 .

把(1)代入(2),得到

$$Q':\ x'B'x'^{t}+2x'C'^{t}+d'=0, \tag{3}$$

这是二次超曲面 Q 上点 x,在仿射变换 φ 下的象 x' 所适合的方程,其中

$$B'=A^{t}BA,\ C'=A^{t}(B^{t}a^{t}+C^{t}),\ d'=a(Ba^{t}+2C^{t})+d.$$

由 $B\neq 0$ 和 $\det A\neq 0$ 得 $B'\neq 0$, 说明(3)的 Q' 仍然是二次超曲面 .

定理 3 证毕 .(2)中 Q 的二次项部分的系数矩阵是 B,它的秩叫做二次超曲面的秩,记成 $\operatorname{rank} Q$.因为(3)中 B' 与 B 合同,所以秩相等 .这又得到

推论 在仿射变换下,二次超曲面的秩是不变的 .

关于仿射变换下的不变几何性质,就讨论到此为止 .下面是利用仿射空间的理论,讨论二次超曲面的两个问题 .

第一个问题,仿射空间 **A** 中的直线

$$L:\ x=x_0+\lambda v\quad(\lambda\in\mathbf{R},\ v\neq 0) \tag{4}$$

与二次代数超曲面 Q 的交点 .

将(4)代入(2),得到 λ 的二次方程式

$$(vBv^{t})\lambda^{2}+2v(C^{t}+Bx_0^{t})\lambda+Q(x_0)=0. \tag{5}$$

1 . 当 $vBv^{t}\neq 0$ 时,(5)有两个实根或一对共轭复根 .相应地,L 与 Q 有两个交点(相同或不同点),或没有交点(两个共轭复交点) .

2 . 当 $vBv^{t}=0$ 和 $v(C^{t}+Bx_0^{t})\neq 0$ 时,(5)有唯一实根 .相应地,L 与 Q 有唯一交点 .

3．当 $\upsilon B\upsilon^{t}=0$，$\upsilon(C^{t}+Bx_0^{t})=0$ 和 $Q(x_0)\neq 0$ 时，(5)是矛盾方程．相应地，L 与 Q 没有交点．

4．当 $\upsilon B\upsilon^{t}=0$，$\upsilon(C^{t}+Bx_0^{t})=0$ 和 $Q(x_0)=0$ 时，(5)是恒等式．相应地，L 在 Q 上．

第二个问题，二次代数超曲面的仿射分类，即有下面的

定理 4 仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 中的二次代数超曲面，在仿射变换下，可以化成下列标准方程之一：

$$(x^1)^2+\cdots+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-\cdots-(x^n)^2=\pm 1,0; \qquad (6)$$

$$(x^1)^2+\cdots+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-\cdots-(x^{p+q})^2=x^n; \qquad (7)$$

$$(x^1)^2+\cdots+(x^p)^2-(x^{p+1})^2-\cdots-(x^{p+q})^2=\pm 1,0. \qquad (8)$$

证明 (2)表示的二次超曲面 Q 中，第一部分 xBx^{t} 是一个二次齐次多项式．利用二次齐式的化标准形方法，有满秩线性变换也是仿射变换 $x=x'A^{t}$，使二次齐式化成完全平方的代数和，当然也使一次部分发生变换．于是，(2)化成

$$x'B'x'^{t}+2x'C'^{t}+d=0, \qquad (9)$$

这里 $B'=A^{t}BA=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$，其中 1 的个数为正惯性指数 p，-1 的个数为负惯性指数 q，$p+q=\mathrm{rank}\,B$．

当 Q 为满秩时，即 $p+q=n$．再由 $C'=(c_1',\cdots,c_n')$ 作仿射变换

$$x''^{i}=x'^{i}+c_i'^{-1}c_k'x'^{k}-d.$$

就使得(9)化成(7)的类型．

当 Q 为降秩，且 $(c_{p+q+1}',\cdots,c_n')=0$ 时，作仿射变换

$$x''^{i}=x'^{i}+c_i',\quad i=1,\cdots,p+q,$$

$$x''^{j}=x'^{j},\quad j=p+q+1,\cdots,n.$$

把(9)化成(10)．再作一个恰当的相似变换，由 $d'>0$，<0，$=0$ 的情况，把(10)化成(8)的类型．

定理 4 证毕，它说明：在恰当的仿射坐标系下，二次超曲面只

有上述三种类型.

习　　题

1. 在仿射变换下,不共线的三点的象也是不共线的.
2. 在仿射变换下,向量子空间的象集还是向量子空间.
3. 依据定理 4,列举 $\mathbf{A}^2$ 中二次曲线的 9 个标准方程.
4. 依据定理 4,列举 $\mathbf{A}^3$ 中二次曲面的 17 个标准方程.

第三章　射 影 几 何

这章主要讨论射影空间和射影变换的理论,如结合关系和对偶原理,以及二次曲面的射影理论等.

§3.1　射影空间与关联定理

我们先从二维仿射空间即仿射平面谈起,举两个直观的例子,说明仿射平面内必须增添新的点,才能使新的问题有恰当的解决.

例 1　假设平面内两条不同的直线是

$$L_1:\quad a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$L_2:\quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

试讨论它们的交点.

由于两条直线是不同的,方程的系数不成比例,即

$$a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2.$$

当 $L_1 \nparallel L_2$ 时,还有 $a_1:b_1\neq a_2:b_2$.这时,两直线的交点的坐标是 $\left(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D}\right)$,其中

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}.$$

但是,当 $L_1\parallel L_2$ 时 $D=0$,无法得出这样两条直线的交点.从几何直观上,很自然地看到,当两条直线由相交逐渐转变成平行时,它们的交点就逐渐远离.所以,我们引进"无穷远点"作为两条平行直线的交点,就得到一般命题:平面上任意两条不同的直线有唯一

的交点 .

例 2　假设平面上有一个固定点 a 和一条固定直线 L, $a \notin L$ 以 a 为中心的线束内,直线 P, Q, R, … 分别与 L 相交于点 p, q, r, …, 如图示 .但是当 $S \parallel L$ 时, S 与 L 没有交点 .

作一个映射 φ: 把线束内的直线,对应 L 上的交点,即

$$\varphi(P) = p, \quad \varphi(Q) = q, \quad \varphi(R) = r, \quad \cdots .$$

和例 1 一样,我们在 L 上引进“无穷远点”作为 S 与 L 的交点,就使得 φ 是线束到 L 上的一一映射, S 也有象 $\varphi(S)$.

根据上述两个例子的思想,我们给出下面的定义 .

定义 1　在仿射平面 $\mathbf{A}^2$ 的任一条直线 L 上,原有点叫正常点 .与 L 平行的那些直线与 L 的交点,叫做 L 上的理想点,即无穷远点,记成 p_∞ . L 上所有正常点与理想点的集合,即 $L \cup p_\infty$, 叫做扩大的仿射直线 .在 $\mathbf{A}^2$ 上扩大的所有的无穷远点的集合 $\{p_\infty\}$ 叫做平面上的无穷远直线,记成 L_∞ .并集 $\mathbf{A}^2 \cup \boldsymbol{L}_\infty$ 叫做扩大的仿射平面,记成 $\overline{\mathbf{A}^2}$.

在扩大的 $\overline{\mathbf{A}^2}$ 内,前面的例子说明: $\overline{\mathbf{A}^2}$ 中两条不同直线有唯一的交点; $\overline{\mathbf{A}^2}$ 中线束到直线的映射 φ 是到上的一一映射 .

仿射平面 $\mathbf{A}^2$ 内的点都能够用仿射坐标来表示,扩大的仿射平面 $\overline{\mathbf{A}^2}$ 内的无穷远点则不能,它们用怎样的坐标来表示呢?还是从例 1 来讨论,然后找出一般的方法 .例 1 的两条不平行的直线有唯一的交点,它决定于三个有序的数 (D_1, D_2, D), 其中 $D \neq 0$.也就是说,交点的仿射坐标可以由这三个有序的数来确定,

$$x_0 = \frac{D_1}{D}, \quad y_0 = \frac{D_2}{D}.$$

但是,两条平行直线的交点是无穷远点,这时 $D = 0$, 不能确定交点的仿射坐标,不妨就用这个有序数组 (D_1, D_2, D) 来当做交点的"坐标".当然,这种坐标不同于仿射坐标.根据这个思想,我们作下面的

定义 2 假设对于仿射平面 $\mathbf{A}^2$ 的仿射坐标系 OE_1E_2, 点的仿射坐标是 (x, y).那么,在扩大的仿射平面 $\overline{\mathbf{A}}^2$ 内,用三个有序的数 (x_1, x_2, x_3) 表示一个点 P:当 $x_3 \neq 0$ 时,它表示仿射坐标是 $x = \dfrac{x_1}{x_3}, y = \dfrac{x_2}{x_3}$ 的正常点 P;当 $(x_1, x_2) \neq 0$, $x_3 = 0$ 时,它表示无穷远点 P.我们把 (x_1, x_2, x_3) 叫做点 P 的齐次仿射坐标,简称齐次坐标.

按定义 2,$\overline{\mathbf{A}}^2$ 的正常点有齐次坐标,还有非齐次坐标,即仿射坐标;无穷远点只是 $x_3 = 0$ 的齐次坐标,没有非齐次坐标;没有齐次坐标为(0,0,0)的点.

按定义 2,$\mathbf{A}^2$ 的仿射坐标系的原点 O 的齐次坐标是(0,0,1).直线 $L: ax + by + c = 0$ 上扩大的无穷远点的齐次坐标是什么呢?先看 L 上的正常点 $P(x_1, x_2, x_3)$, 它满足条件 $a\dfrac{x_1}{x_3} + b\dfrac{x_2}{x_3} + c = 0$.即扩大直线 L 的齐次坐标方程是

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \tag{1}$$

L 上的正常点和无穷远点的齐次坐标都满足这个条件.容易看到,无穷远点 $(b, -a, 0)$ 就满足条件(1),是 L 上的无穷远点.

按定义 2,$\overline{\mathbf{A}}^2$的无穷远直线 L_∞ 的齐次坐标方程是 $x_3 = 0$, 即任意无穷远点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的坐标都适合.在仿射直线 L 上,它的点向两个相反方向无限伸展.但是在扩大的 L 上,它的点向两个相反方向无限伸展到同一个无穷远点.所以, L 可视作在无穷远处"封闭"的几何图形,与 L 有不同的拓扑结构.

在上面的讨论中，譬如仿射坐标原点的齐次坐标，也可以是 $(0,0,k)$，$k \neq 0$.其它问题也都是这样，需要下面的

性质 1 假设 $(x_1':x_2':x_3') = (x_1:x_2:x_3)$.那么，在$\overline{\mathbf{A}}^2$内齐次坐标 (x_1',x_2',x_3') 与 (x_1,x_2,x_3) 表示同一个点 .

证明 由假设条件知道，$x_i' = kx_i$，$k \neq 0$，$i = 1,2,3$.当 $x_3 \neq 0$ 时 $x_3' \neq 0$，$\left(\frac{x_1'}{x_3'},\frac{x_2'}{x_3'}\right) = \left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)$.说明仿射坐标相同，表示同一个正常点 .当 $x_3 = 0$ 时 $x_3' = 0$，(x_1,x_2,x_3) 满足某一个直线(1)时 (x_1',x_2',x_3') 也满足(1) .但一条直线只有唯一的无穷远点，所以它们表示同一个无穷远点 .

性质 1 证毕 .把齐次坐标作为三维向量空间 $\mathbf{V}^3$ 的非零向量，$x' = (x_1',x_2',x_3')$ 与 $x = (x_1,x_2,x_3)$ 有关系 $x' = kx(k \neq 0)$，$x' \sim x$.容易证明，这个关系是 $\mathbf{V}^3 - \{0\}$内元素间的一个等价关系 .用这种等价关系可以把 $\mathbf{V}^3 - \{0\}$的向量等价分类，并组成商集$(\mathbf{V}^3 - \{0\})/\sim$.根据性质 1，这个商集与$\overline{\mathbf{A}}^2$的元素间是一一对应的 .这里向量 x 所在的等价类，就是由 x 所生成的一维子空间的非零元组成的 .于是又得到

性质 2 $\overline{\mathbf{A}}^2 = (\mathbf{V}^3 - \{0\})/\sim$.

根据上面对实例的分析，我们推广这种方法，定义一般的 n 维射影空间 .

定义 3 假设 $\mathbf{V}^{n+1}$是域 F 上的 $n+1$ 维向量空间，$\mathbf{V}^{n+1} - \{0\}$内元素间的一个关系

$$x \sim y: y = kx, 0 \neq k \in F .$$

那么，$\sim$是一个等价关系 .商集$(\mathbf{V}^{n+1} - \{0\})/\sim$叫做域 F 上的 n 维射影空间，记成 $\mathbf{P}^n$ 或 $\mathbf{P}$；它的元素叫做射影空间的点 .

由定义 3，射影空间的点就是 $\mathbf{V}^{n+1}$ 的一个一维子空间 P 对$\{0\}$的余集，也就是说，

$$\mathbf{P}^n = \{ P - \{0\} \mid 子空间\ P \subset \mathbf{V}^{n+1}, \dim P = 1 \} .$$

通常把射影空间的点记成 $p \in \mathbf{P}^n$，也用 $p = \mathrm{pro}(P)$ 表示 p 与 P

的上述关系.当 $P=[x]$, $x\neq 0$ 时，P 中每一个向量 kx 都称为点 p 的坐标,或解析点.一个几何点 p 对应无穷多个解析点 kx, 它们之间只差一个非零的比例常数.

我们把 $\mathbf{V}^{n+1}$ 中一维子空间来作为 $\mathbf{P}^n$ 的点,很自然地有

定义 4 假设 K 是 $\mathbf{V}^{n+1}$ 的 $m+1$ 维子空间，$m<n$.那么，K 内所有一维子空间来作出的 $\mathbf{P}^n$ 的点的集合

$$\mathbf{K}=\{p\in\mathbf{P}^n \mid p=\mathrm{pro}(P), P\subset K\},$$

叫做 $\mathbf{P}^n$ 的 m 维射影平面, $\dim\mathbf{K}=m$.当 $m=0$ 时, K 叫做射影点; $m=1$ 时, K 叫做射影直线; 当 $m=n-1$ 时, K 叫做射影超平面.

把定义 4 中子空间 K 与射影平面 K 的关系也记成 K $=\mathrm{pro}(K)$, 它们之间的维数关系是

$$\dim\mathbf{K}=\dim K-1. \tag{1}$$

也象仿射空间一样,定义两个射影平面的交与联.

定义 5 V 中两个子空间 H 与 K 的交 $H\cap K$, 对应于 P 的子集 $\mathrm{pro}(H\cap K)$, 叫做两对应射影平面 $\mathrm{pro}(H)$ 与 $\mathrm{pro}(K)$ 的交, 记成 $\mathrm{pro}(H)\cap\mathrm{pro}(K)$.即

$$\mathrm{pro}(H)\cap\mathrm{pro}(K)=\mathrm{pro}(H\cap K). \tag{2}$$

V 中两个子空间的和 $H+K$ 对应于 P 的子集 $\mathrm{pro}(H+K)$, 叫做两对应射影平面的联,记成 $\mathrm{pro}(H)\cup\mathrm{pro}(K)$, 即

$$\mathrm{pro}(H)\cup\mathrm{pro}(K)=\mathrm{pro}(H+K). \tag{3}$$

容易证明,两个射影平面的交与联也是射影平面.

利用(1)和向量空间的子空间维数定理,即§1.2 定理 1, 立即得到

定理 1 射影空间 P 的射影平面 H 与 K 的交与联有维数关系

$$\dim(\mathbf{H}\cup\mathbf{K})+\dim(\mathbf{H}\cap\mathbf{K})=\dim\mathbf{H}+\dim\mathbf{K}. \tag{4}$$

这是一个基本结论,借助它可以证明射影空间的关联定理.还是象上章一样,约定 $a, b,\cdots$ 表示射影点, $l, h,\cdots$ 表示射影直线,

$\alpha, \beta, \cdots$ 表示二维射影平面 .

定理 2(二维射影空间 P^2 的关联定理)

1 . $a, b \in P^2$, $a \neq b$ 时, $a \cup b = l$.

2 . l, h 　P^2 , $l \neq h$ 时, $l \cup h = P^2$, $l \cap h = a$.

证明　1 . 记 $a = \mathrm{pro}(H)$, $b = \mathrm{pro}(K)$, 这里 $\dim H = \dim K = 1$. 由 $a \neq b$ 有 $H \neq K$, 因而 $\dim(H + K) = 2$. 于是, 由(3)和(1)有

$$a \cup b = \mathrm{pro}(H) \cup \mathrm{pro}(K) = 1 .$$

即 $a \cup b = l$ 是一条直线 . $a \neq b$ 时显然还有 $a \cap b =$ ě　.

2 . 记 $l = \mathrm{pro}(L)$, $h = \mathrm{pro}(H)$, 这里 $\dim L = \dim H = 2$. 由 $l \neq h$, 有 $L \neq H$, 因而 $\dim(L + H) > 2$, $\dim(l \cup h) > 1$. 一方面, 由于 $l \cup h$ 　P^2 又有 $\dim(l \cup h) \leq 2$, 所以只有 $\dim(l \cup h) = 2$, $l \cup h = P^2$. 再利用(4), 求得 $\dim(l \cap h) = 0$, 即 $l \cap h = a$ 是一个点 .

定理 3(三维射影空间 P^3 的关联定理)

1 . $a \neq b$ 时, $a \cup b = l$.

2 . $l \neq h$ 时, $l \cap h =$ ě , $l \cup h = P^3$; 或 $l \cap h = a$, $l \cup h = \alpha$.

3 . $\alpha \neq \beta$ 时, $\alpha \cap \beta = l$, $\alpha \cup \beta = P^3$.

4 . a ú　l 时, $a \cup l = \alpha$.

5 . l à　α 时, $l \cap \alpha = a$.

证明　1 . 类似定理 2 的结论 1 的证明 .

2 . 记 $l = \mathrm{pro}(L)$, $h = \mathrm{pro}(H)$, 这里 $\dim L = \dim H = 2$. 由 $L \cap H$ 　H 有 $\dim(L \cap H) \leq 2$. 但 $\dim(L \cap H) = 2$ 时 $L \cap H = L = H$, 因而 $l = h$ 与假设矛盾 . 所以只能 $\dim(L \cap H) = 0, 1$.

由(2)和定义 3, $\dim(L \cap H) = 0$ 时 $l \cap h =$ ě ; $\dim(L \cap H) = 1$ 时 $l \cap h = a$ 是一个点 . 利用 §1 .2 定理 1, 分别得 $\dim(L + H)$ 是 4 和 3 . 于是, $\dim(l \cup h) = 3, 2$, 即 $l \cup h = P^3$ 和 α .

3 . $\dim(\alpha \cap \beta) \leq \dim \alpha = 2$.$\dim(\alpha \cap \beta) = 2$ 时 $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$, 与假设矛盾 .$\dim(\alpha \cap \beta) = 0$ 时, 由(4)得 $\dim(\alpha \cup \beta) = 4$, 与 $\alpha \cup \beta \subset P^3$ 矛盾 所以只能 $\dim(\alpha \cap \beta) = 1$, $\alpha \cap \beta = l$ 是一条直线 利用(4)又得到 $\dim(\alpha \cup \beta) = 3$, $\alpha \cup \beta = P^3$.

4 . 记 $a = \mathrm{pro}(H)$, $l = \mathrm{pro}(L)$.这里 $\dim H = 1$, $\dim L = 2$.由 $a \not\subset l$ 有 $H \cap L = \varnothing$, $\dim(H \cap L) = 0$, 因而 $\dim(H + L) = 3$.于是 $\dim(a \cup l) = 2$, 即 $a \cup l = \alpha$ 是一个二维平面 .

5 . 类似上面结论 4 的证明 .

定理 3 证毕 .类似的方法可以证明高维射影空间的关联定理 .

习　　题

1 . 在 P^2 内有两个点的齐次坐标是 $A(3, -1, 2)$, $B(2, 0, 1)$.试求通过这两点的直线方程, 并求这条直线上的无穷远点 .

2 . 试写出实二次曲线

$$C:\ a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

的齐次坐标方程, 求 C 与 L_∞ 的两个交点, 并导出 C 三种类型的代数条件 .

3 . 在 P^2 上, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在无穷远点的切线就是它的渐近线 .

4 . 两个射影平面的交与联仍然是射影平面 .

5 . 在 P^3 内, l 与 h 共面时 $l \cap h$ 是什么 ? 异面时呢 ?

§3 .2　射影坐标与射影变换

我们在上节的定义 3, 把射影空间 P^n 用高一维的向量空间 $\mathbf{V}^{n+1}$ 来定义, $\mathbf{P}^n$ 的几何点与 $\mathbf{V}^{n+1}$ 的解析点之间有对应关系 .但这不是一一的对应: 一个解析点 $x = (x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbf{V}^{n+1}$, $x \neq 0$, 生成一个一维子空间 $[x]$, 对应一个几何点 $\mathrm{pro}[x] \in \mathbf{P}^n$.为简便计, 不妨也记成 $x = \mathrm{pro}[x]$.又将 $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 叫做几何点 x 的齐次坐标, 不妨也记成 $x = (x^1, \cdots, x^{n+1})$.上节已经证明, 一个几

何点 x 的齐次坐标不是唯一的,相差一个比例常数.所以,上面的几何点又有 $x = k(x^1, \cdots, x^{n+1}), k \neq 0$.一个几何点对应无穷多个解析点.这样不是一一的对应关系,都是初学者容易误解的,都是要小心区别的.

和仿射空间一样,我们在这节来介绍射影空间内的射影标架和射影坐标.

在向量空间 $\mathbf{V}^{n+1}$ 内,任意 $n+1$ 个线性无关的向量即解析点

$$f_i = (f_i^1, \cdots, f_i^{n+1}), \quad i = 1, \cdots, n+1. \tag{1}$$

可以生成 $n+1$ 个一维子空间 $[f_i]$,分别对应 $\mathbf{P}^n$ 内的 $n+1$ 个几何点 $f_i = \mathrm{pro}[f_i]$,这样就有 $\mathbf{P}^n$ 内的 $n+1$ 个点

$$f_i = k(f_i^1, \cdots, f_i^{n+1}), \quad k \neq 0, \quad i = 1, \cdots, n+1. \tag{2}$$

它们的齐次坐标向量线性无关.此外,还有 $\mathbf{V}^{n+1}$内向量 f 用(1)表示成

$$f = k_1 f_1 + \cdots + k_{n+1} f_{n+1}, \quad k_1 \cdots k_{n+1} \neq 0, \tag{3}$$

对应于 $\mathbf{P}^n$ 内的一个几何点 $f = \mathrm{pro}[f]$.我们把 $n+2$ 个几何点的有序集合 $\{f_i, f\}$ 叫做 $\mathbf{P}^n$ 的一个射影标架,或射影坐标系.

任意几何点 $x = k(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 的齐次坐标向量,显然可以用(2)的齐次坐标来表示.但是,(2)的齐次坐标不是唯一的,因而这种表示也不是唯一的,有无穷多种表示的方法,因此,必须借助于 f 来限制 f_i 的齐次坐标的选用.由(3)知道,

$$f = (k_1 f_1^1, \cdots, k_1 f_1^{n+1}) + \cdots + (k_{n+1} f_{n+1}^1, \cdots, k_{n+1} f_{n+1}^{n+1}).$$

于是,我们根据上式来限制 f_i 的齐次坐标为

$$f_i = (k_i f_i^1, \cdots, k_i f_i^{n+1}), \quad i = 1, \cdots, n+1. \tag{4}$$

在上述限制(4)下,显然有与(3)等价的

$$f = f_1 + \cdots + f_{n+1}. \tag{5}$$

还有,x 可以唯一的表示成

$$x = y^1 f_1 + \cdots + y^{n+1} f_{n+1}. \tag{6}$$

我们把 $y = (y^1, \cdots, y^{n+1})$ 叫做点 x 的射影坐标.

容易由(5)和(6)验证，f_i 的射影坐标是 $(\delta_i^1, \cdots, \delta_i^{n+1})$，$f$ 的射影坐标是(1,…,1).反过来,如果在前面(1)中选取 $f_i = (\delta_i^1, \cdots, \delta_i^{n+1})$，在(3)中选取 $f = (1, \cdots, 1)$，那么(6)所确定的射影坐标就是齐次坐标.因此,齐次坐标是射影坐标的特例.由于这两种坐标并无本质上的区别,我们又把齐次坐标叫做自然齐次坐标,而把射影坐标叫做射影齐次坐标.

又因为同一个点的齐次坐标可以相差一个比例常数,由(6)得知,同一个点的射影坐标也可以相差一个比例常数.

前面(6)表示的只是 x 的一个齐次坐标，x 的齐次坐标向量也有无穷多个.为简便计,我们把(4)限制的齐次坐标更改记成 $f_i = (f_i^1, \cdots, f_i^{n+1})$，由(6)可得到 x 的所有齐次坐标是

$$x^i = k\sum_{j=1}^{n+1} y^j f_j^i, \quad k\det(f_j^i) \neq 0 .$$

这就是说,同一点的齐次坐标与射影坐标之间有可逆的线性关系,改写成向量关系是

$$\lambda x = yF^{\mathrm{t}}, \quad F = (f_j^i), \quad \lambda = k^{-1} . \qquad (7)$$

利用上述(7),容易证明

性质 在射影空间的两个射影标架下,同一个点 x 的射影坐标 y 与 y' 之间,有变换式

$$ky' = yA^{\mathrm{t}}, \quad k\det A \neq 0 . \qquad (8)$$

对于上面的(8),还有另外的几何解释,即下面的

定义 假设在射影空间 $\mathbf{P}^n$ 的射影标架 $\{f_i, f\}$ 下，$\mathbf{P}^n$ 到 $\mathbf{P}^n$ 的点变换

$$\phi: \quad x \to \phi(x) = x',$$
$$kx' = xA^{\mathrm{t}}, \quad A = (a_j^i), \quad k\det A \neq 0 .$$

那么，ϕ 叫做 P^n 的点的射影变换，A 叫做 ϕ 的系数矩阵.

从这个定义立即得到:如果 ϕ, ψ 是 $\mathbf{P}^n$ 的系数矩阵分别是 A，B 的射影变换,那么 $\psi\phi$ 也是 $\mathbf{P}^n$ 的系数矩阵是 BA 的射影变换，ϕ^{-1} 是 $\mathbf{P}^n$ 的系数矩阵是 A^{-1} 的射影变换;系数矩阵是纯量矩阵的

射影变换是恒等变换.

一个射影变换 φ 决定于系数矩阵的 $(n+1)^2$ 个元素.但是,射影坐标也可以相差一个比例常数,A 与 λA 所确定的射影坐标相同.所以,我们综合前面的结果得到

定理 1 射影空间 $\mathbf{P}^n$ 的所有射影变换构成一个群,维数是

$$(n+1)^2-1=n^2+2n.$$

这个群叫做射影变换群.为了探讨射影变换下的不变性质,我们来给出射影平面的方程.

假设 **K** 是射影空间 **P** 的 m 维射影平面,$\mathbf{K}=\mathrm{pro}(K)$,$K$ 是 **V** 的 $m+1$ 维子空间.记 $K=[a_0,a_1,\cdots,a_m]$,即是

$$K=\left\{x\in\mathbf{V}\;\middle|\;x=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i a_i\right\}.$$

那么,我们把 $x=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i a_i$;或

$$x^j=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i a_i^j,\quad j=1,\cdots,n+1,$$

叫做射影平面 **K** 的参数方程.它可以改写成矩阵的形式,

$$\mathbf{K}:\quad x=\lambda\mathbf{A},\tag{9}$$

$$x=(x^1,\cdots,x^{n+1}),\quad \lambda=(\lambda^0,\cdots,\lambda^m),$$

$$A=\begin{pmatrix}a_0^1 & \cdots & a_0^{n+1}\\ \hline a_m^1 & \cdots & a_m^{n+1}\end{pmatrix},\quad \mathrm{rank}\,A=m+1.$$

再消去(9)的参数 λ^i,就得到 **K** 的一般方程

$$\mathbf{K}:\quad xB=0,\tag{10}$$

$$B=\begin{pmatrix}b_1^1 & \cdots & b_1^{n+1}\\ \hline b_{n-m}^1 & \cdots & b_{n-m}^{n+1}\end{pmatrix},\quad \mathrm{rank}\,B=n-m.$$

例如,射影空间内点和直线的参数方程分别是

$$p: x = \lambda a, \text{或 } x^j = \lambda a^j;$$
$$L: x = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1,$$
$$\text{或}\quad x^j = \lambda^0 a_0^j + \lambda^1 a_1^j, \quad j = 1, \cdots, n+1.$$

而超平面的一般方程是

$$\mathbf{K}^{n-1}: b_1 x^1 + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} = 0. \tag{11}$$

定理 2 在射影变换下,射影平面的维数不变.

证明 射影平面可用(10)表示,射影变换 ϕ 使得 $\phi(x) = x'$ 满足 $kx' = xA^{\mathrm{t}}$,即 $x = kx'(A^{-1})^{\mathrm{t}}$.把它代入(10)得到

$$x'(A^{-1})^{\mathrm{t}} B = 0.$$

这就是 $\phi(\mathbf{K})$的方程,与(10)表示的射影平面有相同的维数.

习　题

1. 假设一条直线上两点的射影坐标分别是 $x = (x^1, x^2), y = (y^1, y^2)$.那么这直线上点的射影坐标是 $(x^1 + ky^1, x^2 + ky^2)$.
2. 在射影空间 **P** 内,三点 x_1, x_2, x_3 共线的充要条件是它们的射影坐标向量线性相关.当 x_1 与 x_2 不重合时,则 $x_3 = \lambda x_1 + \mu x_2$.
3. 假设 $a_0 = (1,0,0), a_1 = (1,1,0)$.试求 $\mathbf{K} = \mathrm{pro}[a_0, a_1]$ 的一般方程.
4. 将射影平面的参数方程(9)化成一般方程(10).

§3.3　对 偶 原 理

对偶原理是几何学的一种论证方法,借助对偶原理可以得到很多新的几何命题.所谓的对偶原理,是讨论对偶元素的几何性质;对偶元素又是相对于一定的结合关系.

由§3.2 的(11)知道,射影空间 **P** 的超平面方程是

$$x\xi^{\mathrm{t}} = 0, \tag{1}$$

这里 $x = (x^1, \cdots, x^{n+1}), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{n+1})$.一个超平面 $\mathbf{K}^{n-1}$完全由 ξ的 $n+1$ 个不全为 0 的数来确定,不妨把 $\mathbf{K}^{n-1}$简记成 ξ,也叫做超平面的射影坐标.

对(1)可以作两种解释:当 ξ 固定但 x 变动时,(1)表示一个超平面方程,x 是超平面上的动点的射影坐标;当 x 固定但 ξ 变动时,(1)表示一个固定点的方程,ξ 是通过这个点的变动超平面.

定义 1 假设 x 是 **P** 的点,ξ 是 **P** 的超平面,它们满足关系式(1),即点 x 在超平面 ξ 上,或超平面 ξ 通过点 x.那么,我们称点 x 与超平面 ξ 有结合关系(1),是一对对偶元素.

定义 2 在 **P** 中固定 x 时,满足(1)的所有 ξ 的集合,叫做 **P** 的一个超平面把;固定点 x 叫做这个超平面把的中心,或核,或承载子.

譬如,在 $\mathbf{P}^2$ 内的点与直线是对偶元素,在 $\mathbf{P}^3$ 内点与平面是对偶元素.

在 $\mathbf{P}^2$ 内,结合关系(1)可以用矢量代数里的内积符号来表示成 $x\cdot\xi=0$.此外,在 $\mathbf{P}^2$ 内两条直线 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 与 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 的交点,即是线性方程组

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0,$$
$$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$$

的解 $x=(x_1,x_2,x_3)$,它可以用外积的符号来表示成

$$x=k(\xi\times\eta)=k\left(\begin{vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ \eta_3 & \eta_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{vmatrix}\right).$$

这就是说,射影空间 $\mathbf{P}^2$ 中两不同直线 ξ 与 η 的交点是 $x=\xi\times\eta$.同理可证,射影空间 $\mathbf{P}^2$ 中两不同点 x 与 y 的连线是 $\xi=x\times y$.最后,混合积的符号也有应用.$\mathbf{P}^2$ 内三个点 x,y,z 共线,就是点 x 在 y 与 z 的连线上,$x\in y\times z$;也就是说,$x(y\times z)=0$,或混合积

$$(x,y,z)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

这就是说,射影空间 $\mathbf{P}^2$ 中三点 x,y,z 共线的充要条件是 $(x,y,$

$z) = 0$.同理可证,射影空间 $\mathbf{P}^2$ 中三线 ξ, η, ρ 共点的充要条件是 $(\xi, \eta, \rho) = 0$.

前面介绍了对偶元素的概念,并利用向量积的符号来表示一些几何的概念 .下面再介绍对偶图形和对偶命题的概念 .

在射影空间 $\mathbf{P}$ 内,以点和超平面为元素,按照一定的位置关系组成一个几何图形 C, 如果把 C 的每一个元素都换成它的对偶元素,按照原来的位置关系组成一个几何图形 C'. 那么, C 与 C' 叫做一对对偶图形 .下面的例子中,例 m 与例 m'的图形就是对偶图形 .

例 1 $\mathbf{P}^2$ 内共线的三点．

例 1′ $\mathbf{P}^2$ 内共点的三线．

例 2 $\mathbf{P}^2$ 内不共线的三点，以及这三点所连的直线组成三点形，即三角形．

例 2′ $\mathbf{P}^2$ 内不共点的三线，以及这三线所交的三点组成三边形，即三角形．

例 3 $\mathbf{P}^2$ 内四点处在一般位置(即其中任意三点不共线)，以及这四点所连的六条直线组成完全四点形．

例 3′ $\mathbf{P}^2$ 内四线处在一般位置(即其中任意三线不共点)，以及这四线所交的六个点组成完全四边形．

在射影空间 P 内，以点和超平面为元素，关于位置关系的命题 A．如果把 A 的每一个元素都换成它的对偶元素，关于原来的位置关系得到命题 A'．那么，A 与 A'叫做一对对偶命题．下面例

子中,例 m 与例 m' 的命题就是对偶命题,都是射影空间 $\mathbf{P}^2$ 内的命题 .

例 4 两点 x 与 y 重合的充要条件是矩阵

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$$

的秩为 1 .

例 5 点 x 在直线 ξ 上的充要条件是 $\xi\cdot x = 0$.

例 6 两不同直线 ξ 与 η 的交点是 $x = \xi\times\eta$.

例 7 三点 x, y, z 共线的充要条件是

$$(x, y, z) = 0 .$$

例 8 过两点 x 与 y 的连线上的动点是

$$z = \lambda x + \mu y, (\lambda, \mu) \neq 0 .$$

例 9 假设 x, y, z 是三个不共线的点 .那么任意点

$$w = \lambda x + \mu y + \gamma z .$$

例 4′ 两线 ξ 与 η 重合的充要条件是矩阵

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix}$$

的秩为 1 .

例 5′ 线 ξ 过点 x 的充要条件是 $x\cdot\xi = 0$.

例 6′ 两不同点 x 与 y 的连线是 $\xi = x\times y$.

例 7′ 三线 ξ, η, ζ 共点的充要条件是

$$(\xi, \eta, \zeta) = 0 .$$

例 8′ 过两线 ξ 与 η 交点的动直线是

$$\zeta = \lambda\xi + \mu\eta, (\lambda, \mu) \neq 0 .$$

例 9′ 假设 ξ, η, ζ 是三条不共点的线 .那么任意直线

$$\rho = \lambda\xi + \mu\eta + \gamma\zeta .$$

上面所述的对偶命题是把一个命题的元素换成对偶元素,而对偶元素又是相对于结合关系(1)的 .(1)是上述一些对偶概念的基础,也是下面对偶原理的根据 .

在射影空间 $\mathbf{P}^n$ 内,结合关系(1)中的点与超平面这一对对偶元素是对称的:因为点与超平面分别对应于坐标 x 与 ξ, 都是 $n+1$ 维的非零向量,当 $x\xi^{t} = 0$ 时 $\xi x^{t} = 0$, 所以从代数的观点看 x 与 ξ 是对称的 .

以点和超平面为元素,关于位置关系的对偶命题,都是利用结合关系(1)得到的线性方程组来证明的 .如果其中一个命题成立,

把它的证明过程中的元素都换成对偶元素,就成为对偶命题的证明过程.从代数观点看,一对对偶命题的证明过程和方法是完全相同的,仅仅是引用的符号有区别.于是,有下面重要的定理,即对偶原理.

定理 在射影空间内,以点和超平面为元素关于位置关系的一对对偶命题中,一个命题成立时其对偶命题也成立.

上面的对偶关系是相对于(1)的,以零维的点为核.其实,对偶的概念都可以推广,从(1)的一个齐次线性方程到一个齐次线性方程组,从零维到 m 维平面.

定义 3 假设 $x_1, \cdots, x_{m+1}$ 为射影空间 $\mathbf{P}$ 的 $m+1$ 个点,方程组

$$\begin{aligned} x_1 \xi^t &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m+1} \xi^t &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

的系数矩阵的秩为 $m+1$, 由这些点所确定的 m 维平面

$$\mathbf{K}^m = \mathrm{pro}[x_1, \cdots, x_{m+1}].$$

那么,满足(2)的所有超平面 ξ 构成一个集合,叫做线性丛,记成 Φ.

由(2)立即可以得知:对于任意 $\xi \in \Phi$, 都有 $\mathbf{K}^m \quad \xi$.

由(2)还可以得知:(2)的解向量空间的维数是 $(n+1)-(m+1)$, 所以 Φ 是 $n-m-1$ 维平面.因此,我们常常把 Φ 记成 Φ^{n-m-1}.

定义 4 $\mathbf{K}^m$ 叫做 Φ^{n-m-1} 的中心,或核,或承载子.我们也称 $\mathbf{K}^m$ 与 Φ^{n-m-1} 为互相对偶.

当 $m=0$ 时,$\mathbf{K}^0 = x$ 为一个点, $\Phi^{n-1} = \xi$ 为一个超平面,它们的互相对偶正是经典的对偶概念.

习 题

1. 在 $\mathbf{P}^2$ 内, $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$, $C=(3,1,-5)$, $D=(-1,1,$

3). 试求直线 AB 与 CD 的交点.

2. 试写出上题的对偶命题.

3. 试求 $\mathbf{P}^2$ 内两直线 $\xi_1=(2,1,3)$ 与 $\xi_2=(1,-1,0)$ 的交点,再求这个交点与点 $x=(1,2,-1)$ 连线的方程.

4. 试写出上题的对偶命题.

5. 试证明例 4 至例 9.

§3.4　德沙格定理

德沙格(Desargues)定理是射影几何学中只包含结合关系的一个最基本的定理.在发展这门学科理论中有着重大意义.在综合的射影几何学中它是作为公理之一给出的.本书讲述的是解析的射影几何学,对它必须给予证明.这个定理在射影几何学中扮演的角色如同平行公理在欧氏几何学中一样.有了欧氏平行公理的几何是欧氏几何,否定欧氏平行公理的几何是非欧几何.类似地,有了德沙格定理的射影几何就是通常的射影几何.否定德沙格定理的几何就是非德沙格射影几何.

定义 1　设射影空间 P^n 中两个三角形为$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$.如果三线 $\alpha=x\cup x'$, $\beta=y\cup y'$, $\gamma=z\cup z'$ 相交于一点 w,则称两个三角形有透视中心 w;如果三点 $a=(y\cup z)\cap(y'\cup z')$, $b=(z\cup x)\cap(z'\cup x')$, $c=(x\cup y)\cap(x'\cup y')$ 在一条直线 l 上,则称两个三角形有透视轴 l.

定理 1(德沙格)　设 $\mathbf{P}^n$ 中两个三角形$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$ 有透视中心,则有透视轴.也即是两个三角形对应顶点的连线共点,则它们的对应边的交点共线.

定理 2(德沙格定理之逆)　设 $\mathbf{P}^n$ 中两三角形$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$ 有透视轴,则有透视中心.也即是两个三角形对应边的交点共线,则它们的对应顶点的连线共点.

由于三角形或三点形是自对偶图形,因此德沙格定理的逆就

是它的对偶定理.这样一来,我们只要证明定理 1,从对偶原理得知定理 2 也真.下面将给出定理 1 的三个证明.

证明一 采用适当选取射影坐标的方法对 $\mathbf{P}^n$ 中情况给予证明,为此还需要如下

引理 设三点 x, y, z 共线,且其中任意两点不重合,则可以适当选取任意两点 x 与 y 的射影坐标 x'与 y'使得第三点 z 的射影坐标 $z = x' + y'$或 $z = x' - y'$.

证明 由设 x, y, z 三点共线,且 x 与 y 不重合,据 §3.2 中习题 2,有 $z = \lambda x + \mu y$.且 λ, μ 都不为零,否则 z 与 x 或 y 重合.所以能够选取点 x 的射影坐标 $x' = \lambda x$, y 的射影坐标 $y' = \pm \mu y$,这样一来 $z = x' + y'$或 $z = x' - y'$.证毕.

定理 1 的证明 设两个三角形对应顶点的连线是

$$\alpha = x \cup x', \beta = y \cup y', \gamma = z \cup z'; \tag{1}$$

三对对应边是

$$\begin{aligned} \xi &= y \cup z \text{ 与 } \xi' = y' \cup z', \\ \eta &= z \cup x \text{ 与 } \eta' = z' \cup x', \\ \zeta &= x \cup y \text{ 与 } \zeta' = x' \cup y'. \end{aligned} \tag{2}$$

因此对应边的交点是

$$a = \xi \cap \xi', b = \eta \cap \eta', c = \zeta \cap \zeta'. \tag{3}$$

设 w 为直线 α, β, γ 的交点,即两个三角形的透视中心.如果 w 与一个三角形的某个顶点重合,则定理 1 的结论可立即得到.事实上,设 w 重合于点 x(如图),于是 x, y, y'共线,$y' \in \zeta (= x \cup y)$.但 $y' \in \zeta' (= x' \cup y')$,因此 y'重合于 $c (= \zeta \cap \zeta')$.同理,从 x, z, z'共线,

$z'\in\eta(=x\cup z)$.但 $z'\in\eta'(=x'\cup z')$,因此 z'重合于 $b(=\eta\cap\eta')$.按定义 $a\in\xi'(=y'\cup z')$,而 $y'\cup z'$重合于 $c\cup b$,因 $a\in c\cup b$,即三点 a,b,c 共线.

现在设 w 不与两个三角形的任意顶点重合.因此 w 分别与 $x,x';y,y';z,z'$都共线,而与其中任何一点都不重合.分别引用引理,可以适当选取 $x,\cdots,z'$的射影坐标,仍记为 $x,\cdots,z'$,使得

$$w=x-x'=y-y'=z-z'.$$

从 $x-x'=y-y'$得 $x-y=x'-y'$,但 $x-y\in\zeta$, $x'-y'\in\zeta'$,因此 $x-y$ 重合交点 $\zeta\cap\zeta'=c$,也即是说 $x-y$ 为点 c 的射影坐标.同理可得 $y-z$ 重合于 $\xi\cap\xi'=a$, $z-x$ 重合于 $\eta\cap\eta'=b$.又因为

$$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0,$$

所以三点 a,b,c 共线,证明中只用到射影坐标,因此不管两三角形顶点是否为正常点还是无穷远点,定理的结论都成立.

证明二　在三维射影空间 $\mathbf{P}^3$ 中,从空间情况到平面情况给出几何证明.

1.当$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$分别所在的平面 π 与 π'是异面的情况,德沙格定理容易从图形上论证.

设平面 π 与 π'的交线为 l .因为 $x \cup x'$, $y \cup y'$相交于 w,因此四点 x, y, x', y'共面,于是两直线 $\zeta = x \cup y$ 与 $\zeta' = x' \cup y'$也共面,其交点 $c(= \zeta \cap \zeta')$既在平面 π 上又在平面 π'上,所以在它们的交线 l 上 .同理从 $y \cup y'$, $z \cup z'$相交于 w,得 ξ 与 ξ'共面,其交点 $a \in l$.再从 $z \cup z'$, $x \cup x'$相交于 w,得 $b \in l$.最后得 a, b, c 三点共线 .

2 . 当$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$都在同一平面 π 上,可以利用上述异面情况的结果来证明 .从点 w 作一条不在平面 π 上的直线 $w \cup p$,在此直线上另取一点 p'不与 w, p 重合 .直线 $x \cup x'$和 $p \cup p'$相交于点 w,决定了一个平面,记交点$(p \cup x) \cap (p' \cup x') = x''$ú π .同理,记

$(p \cup y) \cap (p' \cup y') = y''$ú π, $(p \cup z) \cap (p' \cup z') = z''$ú π .

$\triangle x''y''z''$不在 π 上, 和$\triangle xyz$ 以及$\triangle x'y'z'$都不共面 . 考虑$\triangle xyz$ 与

$\triangle x''y''z''$,它们的对应顶点连线相交于点 p,利用 1 中关于异面情况的结果,它们有透视轴,就是$\triangle x''y''z''$所在平面与 π 的交线 l(图中未画出来) .同理$\triangle x'y'z'$与$\triangle x''y''z''$有透视中心,从而有透视轴,也是交线 l .另外由$\triangle x''y''z''$的边 $x'' \cup y''$不在 π 上,所以它与 π 的交点只有一个 .这样一来, $x'' \cup y''$无论是和 $x \cup y$ 的交点还是和 $x' \cup y'$的交点都是 $x'' \cup y''$与 π 的交点 .正是 $x \cup y$ 与 $x' \cup y'$的交点,从而在 l 上 .同理得到 $y \cup z$ 与 $y' \cup z'$的交点, $z \cup x$ 与 $z' \cup x'$的交点也在 l 上 .即 l 也是$\triangle xyz$ 与$\triangle x'y'z'$的透视轴 .证毕 .

证明三　在二维射影空间 $\mathbf{P}^2$ 中，利用 §3.3 引进的关于用三维向量的内积、外积与混合积来表示射影平面上结合关系等几何概念的方法，可以解析地直接证明德沙格定理．此时从(1) - (3)得到

$$\alpha = x\times x', \beta = y\times y', \gamma = z\times z', \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a &= (y\times z)\times(y'\times z'),\\ b &= (z\times x)\times(z'\times x'),\\ c &= (x\times y)\times(x'\times y'). \end{aligned} \tag{5}$$

定理 1 的假设为 α, β, γ 三线共点，即

$$(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{6}$$

定理 1 的结论为 a, b, c 三点共线，即

$$(a, b, c) = 0. \tag{7}$$

利用向量代数的知识，完成从(6)到(7)的推导，即证明了定理 1．请读者作为习题完成．

下面再介绍讨论结合关系的巴卜斯(Pappus)定理．

定理 3　假设 P 中两条共面直线上分别有三个点 x, y, z 与 x', y', z'．那么，三个点

$$\begin{aligned} a &= (y\cup z')\cap(y'\cup z),\\ b &= (z\cup x')\cap(z'\cup x),\\ c &= (x\cup y')\cap(x'\cup y) \end{aligned}$$

共线．

证明　首先说明，巴卜斯定理可以看作德沙格定理的退化情况．这是由于构成三角形的点 x, y, z 或 x', y', z' 在巴卜斯定理中

是共线的,三角形退化到一条直线上 .

利用三维向量表示二维射影平面上点的坐标,巴卜斯定理就是从条件

$$(x, y, z) = 0, \quad (x', y', z') = 0$$

来推出

$$\begin{aligned}((y \times z') \times (y' \times z), (z \times x') \times (z' \times x), \\ (x \times y') \times (x' \times y)) = 0 .\end{aligned} \tag{5}$$

利用引理,适当选取 x, y 和 x', y' 的射影坐标,使得

$$z = x + y, \quad z' = x' + y' .$$

于是,两次利用(4),就可以计算出

$$(5)\text{ 的左端} = \begin{vmatrix} (y \times z', y' \times z, x \times y') & (y \times z', y' \times z, x' \times y) \\ (z \times x', z' \times x, x \times y') & (z \times x', z' \times x, x' \times y) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} (y, z', x) & (y, z', y') \\ (y', z, x) & (y', z, y') \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (y, z', x') & (y, z', y) \\ (y', z, x) & (y', z, y') \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (z, x', x) & (z, x', y') \\ (z', x, x) & (z', x, y') \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} (z, x', x') & (z, x', y) \\ (z', x, x') & (z', x, y) \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y, y', z')(x, y', z) & (x', y, z')(y, y', z) \\ (x', x, z)(x, y', z') & (x, x', z')(x', y, z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y, y', x')(x, y', y) & (x', y, y')(y, y', x) \\ (x', x, y)(x, y', x') & (x, x', y')(x', y, x) \end{vmatrix}$$

$$= (y, y', x')(x', x, y)\begin{vmatrix} (x, y', y) & (x, y', y) \\ (x, y', x') & (x, y', x') \end{vmatrix}$$

$$= 0 .$$

习　　题

1．利用六个向量之间的公式

$$(a\times p, b\times q, c\times r) = \begin{vmatrix} (a, p, c) & (a, p, r) \\ (b, q, c) & (b, q, r) \end{vmatrix},$$

用代数的运算直接证明 $\mathbf{P}^2$ 中的德沙格定理．

2．叙述并证明巴卜斯定理的对偶定理．

3．△ABC 的顶点 A, B, C 分别在共点的三直线 α, β, γ 上移动，AB 和 BC 分别通过定点 P 与 Q 时，CA 也通过 PQ 上的一个定点．

4．假设 a, b, c, d 为平面上的四条直线，不用先定出交点 $a\times b$ 与 $c\times d$，试作一直线过这两个交点．

5．△ABC 的两个顶点 A 与 B 分别在定直线 α 与 β 上移动，三边 AB, BC, CA 分别通过共线的定点 P, Q, R．试证：C 的轨迹是一条直线．

6．n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 $n-1$ 个顶点 $A_1, \cdots, A_{n-1}$ 分别在 $n-1$ 条定直线 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 上移动，n 个边 $A_1A_2, \cdots, A_nA_1$ 分别通过共线的定点 $P_1, \cdots, P_n$．试证：A_n 的轨迹是一条直线．

7．已知三点 A, B, C 的一组齐次坐标分别是

$$a = (2,3,-2), b = (1,2,-4), c = (0,1,6).$$

验证这三点共线，并求 λ 与 μ 使得 $a = \lambda b + \mu c$，再求 B 与 C 的齐次坐标 b' 与 c' 使得 $a = b' + c'$．

§3.5　共线四点的交比

在上一章内，我们介绍了共线三点的简比，它是仿射变换下的不变量，也是仿射几何的一个重要概念．在射影几何内，简比是射影变换下的变量，交比才是不变量．这一节的问题都是限制在射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内来讨论的．

我们先把简比的概念扩展到整个直线上,包括无穷远点.

所谓共线三正常点 A, B, C 的简比是

$$\gamma = (AB, C) = \frac{AC}{BC},$$

其中 A, B 叫基点, C 叫分点.

在没有扩大的直线上, A 和 B 两点截出直线内唯一一个线段 AB.在扩大了无穷远点的直线上,即在无穷远处封闭的曲线上, A 和 B 两点把它分成两个线段: AB 和 $AM_\infty B$.于是,在扩大的直线上取定两个正常的基点 A 和 B,再取一个动的分点 M,来讨论这三点的简比 $\gamma = (AB, M)$.

当 M 位于线段 AB 内时, $\gamma < 0$;当 M 位于线段 $AM_\infty B$ 内时, $\gamma > 0$;当 M 重合于 A 时, $\gamma = 0$;当 M 重合于 B 时,定义

$$(AB, B) = \lim_{M \to B}(AB, M),$$

因此 $\gamma = \pm\infty$;当 M 为无穷远点时,定义

$$(AB, M_\infty) = \lim_{M \to M_\infty}(AB, M),$$

因此

$$\gamma = \lim_{M \to M_\infty} \frac{AM}{BM} = \lim_{M \to M_\infty} 1 + \frac{AB}{BM} = 1 .$$

这样,扩大直线上所有点构成的集合与全体实数及∞构成的集合之间,有下面图示的一一对应:

$$\underset{}{1 > \gamma > 0} \quad \underset{A}{\gamma = 0} \quad \underset{}{0 > \gamma > +\infty} \quad \underset{B}{\gamma = \infty} \quad \underset{M_\infty}{+\infty > \gamma > 1}$$

这也就是,在射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内定义了简比.

下面利用点的齐次坐标来表示简比.

定理 1 假设射影平面内正常点 A, B 的齐次坐标分别是

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3).$$

$M \neq B$, M 是 A 和 B 所在直线上的点.那么,

$$\gamma = (AB, M) = -\mu\frac{b_3}{a_3}.$$

证明 直线上任意点 M 的坐标可表示成 $x=\lambda a+\mu b$, $M\neq B$ 时, $\lambda\neq 0$.所以直线上除 B 外的任意点 M 的坐标可表示成 $a+\mu b$.

当 $M=M_\infty$ 时, $a_3+\mu b_3=0$,于是

$$\gamma=(AB,M_\infty)=1=-\mu\frac{b_3}{a_3}.$$

当 M 是正常点时,记 A,B,M 的非齐次坐标分别为

$$(x_1,y_1),\quad (x_2,y_2),\quad (x,y).$$

它们与齐次坐标有如下的关系:

$$x_1=\frac{a_1}{a_3},\quad y_1=\frac{a_2}{a_3};\quad x_2=\frac{b_1}{b_3},\quad y_2=\frac{b_2}{b_3};$$

$$x=\frac{a_1+\mu b_1}{a_3+\mu b_3},\quad y=\frac{a_2+\mu b_2}{a_3+\mu b_3}.$$

再利用简比的公式

$$x=\frac{x_1-\gamma x_2}{1-\gamma},\quad y=\frac{y_1-\gamma y_2}{1-\gamma},$$

化简得到

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_3\gamma+\mu b_3)=0,$$

$$(a_3b_2-a_2b_3)(a_3\gamma+\mu b_3)=0.$$

但是 $A\neq B$, $a_3b_1-a_1b_3$ 与 $a_3b_2-a_2b_3$ 不同时为 0,只有 $a_3\gamma+\mu b_3=0$.证明了命题.

在简比概念的基础上,我们来介绍交比的概念.

定义 1 假设 A,B,C,D 是射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内四个不相同的共线的点,其中 A 和 B 是正常点.那么, $\dfrac{(AB,C)}{(AB,D)}$ 叫做这四个有顺序点的交比,记成 (AB,CD); A 和 B 叫做基点偶, C 和 D 叫做分点偶.

根据简比的定义,立即得到

$$(AB,CD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}.$$

根据交比的定义,立即得到:当 C 和 D 分别在两线段内时,(AB, C)与(AB, D)符号不同,因而$(AB, CD) < 0$;当 C 和 D 在同一个线段内时,$(AB, CD) > 0$.而且,上述结果的逆也成立.

象定理 1 一样,交比也与点的齐次坐标有关.

定理 2 假设 A, B, C, D 是四个不相同的共线的点,其中 A 和 B 是正常点,四个点的齐次坐标分别是 $a, b, a+\mu_1 b, a+\mu_2 b$. 那么,

$$(AB, CD) = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2) \neq 0.$$

证明 因为假设条件中四个共线的点是不相同的,所以 μ_1 与 μ_2 是两个非零的互异的数,即 $\mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2) \neq 0$.再根据定理 1 和定义 1,立即证明了定理 2.

在定义 1 中限制基本点偶为正常点,是因为我们用非齐次坐标来定义交比的.如果只用齐次坐标按照定理 1 导出的公式来定义交比,就可以取消基点偶为正常点的限制.这时,不论其中一个或两个是无穷远点,共线的不同四点总可以用齐次坐标来表示为 $a, b, a+\mu_1 b, a+\mu_2 b$.由于下面的 $A\neq D$,因而 $\mu_2\neq 0$,可以作如后的定义.

定义 2 假设 A, B, C, D 是射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内四个不相同的共线的点,齐次坐标分别是 $a, b, a+\mu_1 b, a+\mu_2 b$.那么,$\frac{\mu_1}{\mu_2}$叫做这四点的交比,记成$(AB, CD)$.

这样,就对各种情况作了交比的定义,而且,从定理 2 容易得到下面的

推论 假设 A, B, C 是不相同的共线的三点.那么,存在唯一的点 D,使(AB, CD)等于预先给定的 $\lambda\neq 0$.

其实,推论很容易证明,只要把 A, B, C 用齐次坐标表示成 $a, b, a+\mu_1 b$,再取 $a+\frac{\mu_1}{\lambda}b$ 表示的点 D 就行了.

定理 3 假设不相同的共线的点 $M_i(i=1,2,3,4)$的齐次坐标分别是 $x+\mu_i y$.那么,

$$(M_1M_2,M_3M_4)=\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)}{(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3)}.$$

证明 为了利用定理 2 的结论,引用新的符号

$$x+\mu_1 y=a,\quad x+\mu_2 y=b.$$

这是一个线性方程组,把 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 的坐标看作未知量,把 $a=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $b=(b_1,b_2,b_3)$ 的坐标,μ_1,μ_2 都看作已知量.解这个方程组,得到

$$\left.\begin{aligned} x_i&=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}(\mu_2 a_i-\mu_1 b_i),\\ y_i&=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}(-a_i+b_i),\end{aligned}\right.\qquad i=1,2,3.$$

再把它们代入 M_3,M_4 的坐标中,得到这四个点的坐标分别是

$$a,b,a+\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_3}b,a+\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_2-\mu_4}b.$$

根据定理 2,立即证明了定理 3.

定理 3 显然有下面的

推论 假设不相同的共线的点 $M_i(i=1,2,3,4)$的齐次坐标分别是 $\lambda_i x+\mu_i y$.那么,

$$(M_1M_2,M_3M_4)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1&\mu_1\\\lambda_3&\mu_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2&\mu_2\\\lambda_4&\mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1&\mu_1\\\lambda_4&\mu_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_2&\mu_2\\\lambda_3&\mu_3\end{vmatrix}}.$$

前面介绍了交比的定义和计算,交比是与四个点的顺序有关的.四个点共有 4!个不同的排列,但不一定有 4!个不同的交比.从下面的简单性质说起,利用定理 3 都是容易证明的.

性质 假设 A,B,C,D 是不相同的共线的四个点.那么,

$$(CD, AB) = (AB, CD), \tag{1}$$
$$(BA, DC) = (AB, CD), \tag{2}$$
$$(AB, DC) = (BA, CD) = \frac{1}{(AB, CD)}, \tag{3}$$
$$(AC, BD) = (DB, CA) = 1 - (AB, CD). \tag{4}$$

上面的性质揭示了这 24 个交比之间的关系,说明只能取六个数值.具体地说,就是:

1.$(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = (DC, BA) = a$;

2.$(AB, DC) = (DC, AB) = (BA, CD) = (CD, BA) = \frac{1}{a}$;

3.$(AC, BD) = (BD, AC) = (CA, DB) = (DB, CA) = 1 - a$;

4.$(AC, DB) = (DB, AC) = (CA, BD) = (BD, CA) = \frac{1}{1-a}$;

5.$(AD, BC) = (BC, AD) = (DA, CB) = (CB, DA) = \frac{a-1}{a}$;

6.$(AD, CB) = (CB, AD) = (DA, BC) = (BC, DA) = \frac{a}{a-1}$.

进一步要问,当 A, B, C, D 是不相同的共线的四个点时,这六种交比是否还可能有相等的呢?仔细观查这六个实数,每两个是互逆的.而且,记六个交比的任何一个为 b,并不改变这六元集合的构造:例如,记 $\frac{1}{1-a} = b$ 时,容易验证

$$a = \frac{b-1}{b}, \frac{a}{a-1} = 1 - b, 1 - a = \frac{1}{b},$$
$$\frac{1}{a} = \frac{b}{b-1}, \frac{a-1}{a} = \frac{1}{1-b}.$$

因此,如果六个交比中有相等的,不妨认为 a 等于其余五个的一个,即下面情况之一:

$$a=\frac{1}{a},\ a=1-a,\ a=\frac{1}{1-a},\ a=\frac{a-1}{a},\ a=\frac{a}{a-1}.$$

也就是 a 等于下面数之一:$1,0,-1,\frac{1}{2},2$.

把 A,B,C,D 分别看成定理 3 的 M_1,M_2,M_3,M_4,利用定理 3 的结论,就不难得知:当 $a=0$ 时,$\mu_1=\mu_3$ 或 $\mu_2=\mu_4$,即四个共线的点有相迭合的;当 $a=1$ 时,$\mu_1=\mu_2$ 或 $\mu_3=\mu_4$,即四个共线的点有相迭合的;当 $a=-1$ 时,所有六个交比的值都是$\{-1,\frac{1}{2},2\}$内的值;当 $a=\frac{1}{2}$和 $a=2$ 时,交比的值也是这样.

定义 3 假设 A,B,C,D 是不相同的共线的四点,$(AB,CD)=-1$.那么,这四个点叫做调和点组.

综合上述结果,就得到下面的

定理 4 不相同的共线的非调和点组所成 24 个交比分成六组,每组四个交比是相等的.

前面系统地介绍了交比的概念、计算和性质,下面来证明交比在射影变换下的不变性.

定理 5 在射影变换 φ 下,不相同的共线的四点 $M_i\ (i=1,2,3,4)$ 的交比保持不变.也就是说,$M_i'=\varphi(M_i)$时,

$$(M_1'M_2',M_3'M_4')=(M_1M_2,M_3M_4).$$

证明 共线四点 M_i 所在的直线 L,经过射影变换 φ 的象集 $L'=\varphi(L)$仍然是直线,这是§3.2 定理 2 所证实的,$M_i'\in L'$.记 φ 诱导出的从 L 到 L'的射影变换为

$$\varphi_L:\ \begin{cases} k\lambda'=a_{11}\lambda+a_{12}\mu, \\ k\mu'=a_{21}\lambda+a_{22}\mu, \end{cases}\qquad k\det A\neq 0,$$

这里 $A=(a_{ij})$,(λ,μ)是点的射影坐标.于是,$M_i(\lambda_i,\mu_i)$与 $M_i'(\lambda_i',\mu_i')$的射影坐标满足关系

$$k\lambda_i' = a_{11}\lambda_i + a_{12}\mu_i \qquad i = 1,2,3,4,$$

$$k\mu_i' = a_{21}\lambda_i + a_{22}\mu_i, \qquad k\det A \neq 0 .$$

因此,利用定理 3 的推论,立即得到

$$(M_1'M_2', M_3'M_4') = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1' & \mu_1' \\ \lambda_3' & \mu_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2' & \mu_2' \\ \lambda_4' & \mu_4' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1' & \mu_1' \\ \lambda_4' & \mu_4' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2' & \mu_2' \\ \lambda_3' & \mu_3' \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(\det A)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix}}{(\det A)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

$$= (M_1 M_2, M_3 M_4) .$$

这就完全证明了定理 5 .

习　　题

1 . 已知直线上用仿射坐标表示的三点 $A(0)$, $B(1)$, $C(-2)$,试求 D 的坐标,使 $(AB, CD) = -3$.
2 . 假设 A, B, C, D, E 是不相同的共线的五个点 .那么,
$$(AB, CD)(AB, DE)(AB, EC) = 1 .$$
3 . 试求 $A(2,1,-1)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,0,0)$, $D(1,5,-5)$的交比 .
4 . 试证明本节内性质的公式(1),(2),(3),(4) .

§3 .6　二次超曲面

这节介绍二次超曲面的一些性质和分类,先从概念开始 .

定义 1　在射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中用射影坐标的二次齐次方程

$$F(x) = xCx^{t} = 0, C = (c_{ij}), C^{t} = C \tag{1}$$

给出的点 x 的轨迹称为二阶超曲面,对称矩阵 C 称为这个二次超

曲面的系数矩阵.

在射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中用超平面的射影坐标 ξ 的二次齐次方程

$$F(\xi)=\xi C\xi^{\mathrm{t}}=0,\ C=(c_{ij}),\ C^{\mathrm{t}}=C$$

给出的 ξ 的轨迹称为二级超曲面.

以上两种曲面统称二次超曲面,它们是一对对偶图形.下面我们着重讨论二阶超曲面.

把 $\mathbf{P}$ 中射影坐标变换 $kx=x'A^{\mathrm{t}}$ 代入(1),得到新坐标系下二阶超曲面的方程

$$x'C'x'^{\mathrm{t}}=0,\quad C'=A^{\mathrm{t}}CA.\tag{2}$$

可见,二阶超曲面的系数矩阵 C 的秩 $\operatorname{rank}C$ 与射影坐标系的选取无关.如果将坐标变换式看成是点的射影变换,那么 $\operatorname{rank}C$ 是射影不变量,称它为二阶超曲面的秩.

下面讨论二阶超曲面与直线的交点.假设直线方程

$$L:\ x=\lambda a+\mu b,\tag{3}$$

其中 a,b 为直线上的两个固定点,λ,μ 为齐次参数.将(3)代入(1)得

$$\lambda^2 aCa^{\mathrm{t}}+2\lambda\mu aCb^{\mathrm{t}}+\mu^2 bCb^{\mathrm{t}}=0,\tag{4}$$

这是关于 λ,μ 的二次齐次方程,从中确定它们的比值,代回(3)就可以得到所求的交点.

关于交点,与经典的 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{P}^3$ 类似,一般来说有两个.我们感兴趣的是有唯一交点的情况,先引进

定义 2 假设直线 L 与二阶超曲面相交于一个二重点,或者直线 L 都包含在二阶超曲面上,就称 L 为这个二阶超曲面的切线.

容易证明,通过二阶超曲面上一点的所有切线包含在一个超平面内,这个超平面称为二阶超曲面的切超平面.

为了得到切超平面,必须把曲面上的点作下述的区分.

定义 3 在二阶超曲面(1)上满足方程

$$xC=0\ \text{或}\ Cx^{\mathrm{t}}=0\tag{5}$$

的点 x 称为(1)的奇点,否则称为(1)的正常点.

定理 1　假设 x_0 是(1)的正常点.那么,(1)在 x_0 的切超平面方程是

$$x_0 C x^t = 0, \tag{6}$$

而且它的坐标为

$$\xi = \lambda x_0 C, \quad \lambda \neq 0 .$$

证明　因为 x_0 不是奇点,(5)不成立,所以(6)中关于动点 x 的系数不全为零,(6)是一个超平面的方程.通过点 x_0 与(6)的任意动点 x 作一条直线

$$L: y = \lambda x_0 + \mu x . \tag{7}$$

将(7)代入(1)求它们的交点,得到类似(4)的方程

$$\lambda^2 x_0 C x_0^t + 2\lambda\mu x_0 C x^t + \mu^2 x C x^t = 0 .$$

由于 x_0 在(1)和(6)上,上式前两项系数均为零,从而 $\mu = 0$ 是它的二重根.即(7)与(1)交于二重点 x_0, L 为切线,(6)为切平面.

定理 1 证毕.于是又问,二阶超曲面是否都有奇点呢?

定理 2　二阶超曲面(1)存在奇点的充要条件是 $\operatorname{rank} C < n + 1$.奇点构成射影空间中一个 $n - r$ 维平面.

证明　方程组(5)有非零解的充要条件是系数矩阵为降秩,证明了命题前一部分.当 $\operatorname{rank} C = r < n + 1$ 时,解空间的维数是 $n + 1 - r$,对应于射影空间的 $n - r$ 维平面.

定义 4　二阶超曲面(1)的秩 $\operatorname{rank} C = n + 1$ 时,(1)叫做非退化的;$\operatorname{rank} C < n + 1$ 时,(1)叫做退化的.

根据定理 2,非退化的曲面不存在奇点;退化的曲面有奇点,构成 $n - r$ 维平面,叫做(1)的奇平面.

最后,我们讨论二阶超曲面的标准方程.

公式(2)说明,二阶超曲面在不同射影坐标系下的系数矩阵有合同关系,$C' = A^t C A$.对于实二阶超曲面,利用线性代数中把实二次齐式化成标准形的方法,就可以得到下面的

定理 3 对于任意实二阶超曲面，可以适当选取射影坐标系，使得它的方程化为

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x^i)^2 = 0, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

其中 $r = \operatorname{rank} C$; ε_i 中有 p 个 1 和 q 个 -1, $p + q = r$; p 和 q 是不变的正、负惯性指数.

我们可以对 p, q, r 的各种不同情况，把二阶超曲面作分类.

例 1 射影平面 $\mathbf{P}^2$ 内二阶超曲线共有五类:

1. 非退化的实二阶曲线 $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$;
2. 非退化的虚二阶曲线 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$;
3. 退化的秩为 2 的实二阶曲线 $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$;
4. 退化的秩为 2 的虚二阶曲线 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$;
5. 退化的秩为 1 的实二阶曲线 $x^2 = 0$.

例 2 射影空间 $\mathbf{P}^3$ 内二阶超曲面共有七类:

1. 非退化的实二阶曲面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$,
   $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0$;
2. 非退化的虚二阶曲面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0$;
3. 退化的秩为 3 的实二阶曲面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$;
4. 退化的秩为 3 的虚二阶曲面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$;
5. 退化的秩为 2 的实二阶曲面 $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$;
6. 退化的秩为 2 的虚二阶曲面 $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$;
7. 退化的秩为 1 的实二阶曲面 $x^2 = 0$.

下面来讨论关于二阶超曲面所引出的配极对应概念.

定义 5 用二阶超曲面(1)的系数矩阵来作成的，射影空间内点到超平面的对应

$$\phi: \quad \xi = \phi(x), \quad \rho\xi = xC, \tag{8}$$

叫做(1)的配极对应,或配极;超平面 ξ 叫做点 x 的极(超)平面 .

凡属于点 x 的极超平面上的点 y,都有

$$\rho\xi y^t = xCy^t = 0 . \tag{9}$$

因此, x 与 y 的关系是互相对称的, x 与 y 叫做关于曲面(1)是互相共轭的点 .

从(9)看出,当 $y = x$ 时就成为(1) .因此,自共轭的点就是曲面(1)上的点 .当点 x 固定时,所有与 x 共轭的点的轨迹就是 x 的极超平面 $\phi(x)$.

当曲面(1)非退化时,配极对应是可逆的 .任何一个超平面都是某个点的极超平面,称这个点为超平面的极点 .当曲面(1)退化时,若干个点可以对应于一个极超平面 .

关于曲面(1)的互相共轭的点 x 与 y,有下面的几何意义 .

定理 4 假设 a 与 b 是关于曲面(1)的一对共轭点,连接 a 与 b 的直线与(1)相交于两点 x 与 y .那么, a, b 与 x, y 调和分割,即

$$(a, b; x, y) = -1 .$$

证明 a 与 b 满足(9),通过这两点的直线方程为(3),它与(1)的交点的参数 λ 与 μ 满足(4) .根据(9),式(4)成为

$$\lambda^2 aCa^t + \mu^2 bCb^t = 0 . \tag{10}$$

首先把四个点表示成

$$a = \lambda_1 a + \mu_1 b, \quad \lambda_1 = 1, \mu_1 = 0;$$

$$b = \lambda_2 a + \mu_2 b, \quad \lambda_2 = 0, \mu_2 = 1;$$

$$x = \lambda_3 a + \mu_3 b;$$

$$y = \lambda_4 a + \mu_4 b,$$

其中 x 与 y 的参数是方程(10)的两组解, λ_3/μ_3 与 λ_4/μ_4 分别为 $\pm \quad -bCb^t/aCa^t$ 然后,利用§3 .5 定理 3 的推论来计算

$$(a, b; x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_4 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\lambda_4}{\mu_4} / \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -1 .$$

定理 4 证毕 .值得注意的是,对于不在(1)上的一对共轭点 a **与** b**,必有** aCa^t **与** bCb^t **反号的两个数 .**

习 题

1 . **在 $\mathbf{P}^2$ 内,通过点(3,1,4),求二次曲线**

$$2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$$

的切线,以及这些切线的切点 .

2 . **在 $\mathbf{P}^2$ 内求二次曲线的极线:**

1) **点**$(1, -1, 0)$, $3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 7x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3 = 0$;

2) **点**$(5, 1, 7)$, $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

3 . **在 $\mathbf{P}^2$ 内,二次曲线(1)退化为一对相交直线时,任意点的极线都通过这对直线的交点 .**

第四章　欧 氏 几 何

在这一章里，我们来讨论欧氏空间的度量性质，以及等距变换群的性质

§4.1　欧 氏 空 间

欧氏空间的度量概念是直观几何空间的度量概念的推广.为了探讨这些丰富的度量概念，本章限制在实的欧氏空间内，首先复习线性代数里的欧氏向量空间，再在其中定义某些度量.

假设 **V** 是 n 维的实向量空间，ω是 **V** 内的正定的对称双线性型，即对于 **V** 内任意的向量 x 和 y 都有

$$\omega(x, y) = \omega(y, x);\quad \omega(x, x) > 0(x \neq 0) \tag{1}$$

那么，我们把这个双线性空间(**V**, ω)称为实欧氏向量空间，ω叫做(**V**, ω)的内积，为简便计，常把(**V**, ω)记成 **V**，把 $\omega(x, y)$ 记成 $\langle x, y\rangle$.

定义 1　假设 x 和 y 都是欧氏向量空间 **V** 的向量.那么，我们分别称

$$\| x \| = \langle x, x\rangle,\quad d(x, y) = \| x - y \| \tag{2}$$

为向量 x 的长度，向量 x 到 y 的距离.

由(1)知道(2)是有意义的，而且容易得到

定理 1(Schwarz 不等式)　欧氏向量空间内任意向量 x 和 y 都满足不等式

$$|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \cdot \| y \|, \tag{3}$$

其中等号成立的充要条件是 x 与 y 线性相关.

证明 当 $x=0$ 时(3)显然成立. $x \neq 0$ 时 $\|x\| \neq 0$, 而且对于任何 $\lambda \in \mathbf{R}$ 都有

$$0 \leq \langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle = \|x\|^2 \lambda^2 - 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2,$$

特别取 $\lambda = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}$ 就得到

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2,$$

即有(3). 其中 $\langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle = 0$ 的充要条件是 $\lambda x - y = 0$, 即 x 与 y 线性相关.

推论 欧氏向量空间内任意向量 x 和 y 都满足不等式

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{4}$$

证明 利用(3)立即得到

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

按照定义 1, 欧氏向量空间内有距离这样的度量, 它满足

定理 2 欧氏向量空间内任意向量 x, y, z 都有下列性质:

1. $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, y) \geq 0$, 其中 $d(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$;
3. 三角不等式, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
4. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$;
5. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2 d(x, y)$.

证明 上面列举的性质 1, 2, 4, 5 都是显然成立的. 把(4)内的 x, y 分别换成 $x - y, y - z$ 就得到

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

再由定义 1 的(2), 就证明了上面的性质 3.

定理 2 证毕. 下面再来定义两个向量的夹角, 这是欧氏向量空间内的另一个度量概念. 由于(3), 下面的定义是合理的.

定义 2 假设 x 和 y 是欧氏向量空间内任意两个非零的向量,那么,用

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \cdot \| y \|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{5}$$

定义的角 θ, 叫做 x 与 y 的夹角 .$\cos\theta$ 又记成 $\cos(x, y)$. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,称 x 与 y 是正交的,记成 $x \perp y$.

定理 3(平行四边形等式) 欧氏向量空间内任意向量 x 和 y 都有

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) .$$

证明 根据双线性型的性质和定义 1 的(2)即得 .这个结论和平面几何内是一样的 .

定义 3 假设 H 是欧氏向量空间 $\mathbf{V}$ 的子空间,那么

$$H^{\perp} = \{ x \in \mathbf{V} \mid \langle x, h\rangle = 0(\forall h \in H)\}$$

叫做 H 关于 $\mathbf{V}$ 的正交补 .

定理 4 假设 H 是 n 维欧氏向量空间 $\mathbf{V}$ 的 m 维子空间 .那么, $H^{\perp}$ 是 $\mathbf{V}$ 的 $n - m$ 维子空间;而且,直和 $H \oplus H^{\perp} = \mathbf{V}$.

证明 §1.4 的性质 1 和性质 2 已经证明了 $H^{\perp}$ 是子空间,维数是 $n - m$.又由于欧氏向量空间内的双线性型是正定的,只有零向量是自正交的,所以 $H \cap H^{\perp} = \{0\}$, $H + H^{\perp} = H \oplus H^{\perp}$. 这直和的维数是 $m + (n - m) = \dim\mathbf{V}$, 因此 $\mathbf{V} = H \oplus H^{\perp}$.

定理 5 假设 H, K 都是欧氏向量空间 $\mathbf{V}$ 的子空间 .那么,

1 . $H \subseteq K$ 时 $K^{\perp} \subseteq H^{\perp}$;

2 . $(H^{\perp})^{\perp} = H$;

3 . $(H + K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}$;

4 . $(H \cap K)^{\perp} = H^{\perp} + K^{\perp}$.

证明 与 §1.4 性质 3 的方法一样 .

定义 4 假设欧氏向量空间 $\mathbf{V}$ 的基 $\{ e_i \}$ 满足条件

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

即基的向量是相互正交的单位向量.那么,$\{e_i\}$ 叫做 V 的标准正交基.

在线性代数里已经证明了下面的

定理 6 欧氏向量空间内存在标准正交基 $\{e_i\}$,而且其中任意向量 $x=\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$ 与 $y=\sum_{i=1}^{n}y^ie_i$ 的内积、距离、夹角分别满足

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i, \tag{7}$$

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}, \tag{8}$$

$$\cos\theta=\frac{\sum_i x^iy^i}{\sqrt{\sum_i(x^i)^2\cdot\sum_i(y^i)^2}},\quad \sin^2\theta=\frac{\sum_{i,j}(x^iy^j-x^jy^i)^2}{\sum_i(x^i)^2\cdot\sum_i(y^i)^2}. \tag{9}$$

上面讨论了度量的概念及其基本性质,下面介绍与度量相联系的线性变换.在欧氏向量空间 V 内,保持任意两个向量的内积不变的变换 φ,即

$$\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle=\langle x,y\rangle,$$

它使得任意两个向量的距离保持不变.我们把这样的线性变换 φ 称为 V 的等距变换,或正交变换.对于 V 的标准正交基底,正交变换对应于正交矩阵,即

$$\varphi: x'=xA^{\mathrm{t}},\text{或}\ x'^i=\sum_{j=1}^{n}a^i_jx^j,$$

其中 $AA^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}A=I$.$n$ 维欧氏向量空间 V 的所有正交变换构成的群 G_0 叫 V 的等距群,或正交群.G_0 的维数决定于 A 的自由度,A 有 n^2 个元素,但是 $\sum_{t=1}^{n}a^i_ta^j_t=\delta_{ij}\ (i,j=1,\cdots,n)$ 总共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个限制,所以

$$\dim G_0 = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

上面讨论的欧氏向量空间以向量为元素.下面加以推广的欧氏空间,以点为元素.

定义 5 假设 $\mathbf{A}^n$ 是实的 n 维仿射空间,$\mathbf{V}^n$ 是它所对应的 n 维实向量空间,$(\mathbf{V}^n, \omega)$是实欧氏向量空间.那么,我们把 $\mathbf{V}^n$ 内两向量的内积称为 $\mathbf{A}^n$ 内对应两点的内积;把 $\mathbf{A}^n$ 称为 n 维实欧氏空间,记成 $\mathbf{E}^n = (\mathbf{A}^n, \omega)$,简记成 $\mathbf{E}$;把

$$d(x, y) = \sqrt{\omega(y - x, y - x)} = \sqrt{\langle y - x, y - x\rangle} \tag{10}$$

称为 $\mathbf{E}^n$ 内两点 x 与 y 的距离;把向量 $x - y$ 与 $z - y$ 之间的夹角 $\theta(x - y, z - y)$ 称为以 y 为顶点的角,记成 $\angle xyz$.

在欧氏空间内,也有正交变换群 G_0 保持两点的距离不变.此外,还有欧氏空间的平移变换

$$\phi_a: \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n, \quad \phi_a(x) = x + a.$$

由(10)容易验证,ϕ_a 下两点的距离保持不变,三点所成的夹角不变,即

$$d(\phi_a(x), \phi_a(y)) = d(x, y),$$

$$\theta(\phi_a(x) - \phi_a(y), \phi_a(z) - \phi_a(y)) = \theta(x - y, z - y).$$

$\mathbf{E}^n$ 的所有平移变换构成平移群 G_ϕ.欧氏空间的正交群 G_0 和平移群 G_ϕ 生成的群 G,叫做 $\mathbf{E}^n$ 的等距群,它的变换一般表示成

$$\phi: x' = xA^t + a.$$

变换 ϕ 决定于正交矩阵 A 和点 a,因此

$$\dim G = \dim G_0 + \dim G_\phi = \frac{n(n+1)}{2}.$$

习　　题

1. 试证明定理 2 和定理 6.
2. 假设 $A = [a_1, a_2]$ 和 $B = [b_1, b_2]$ 都是 $\mathbf{B}^4$ 的过原点的二维平面.那么,$A \cap B^{\perp} \neq \{0\}$ 的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \langle a_1, b_1\rangle & \langle a_1, b_2\rangle \\ \langle a_2, b_1\rangle & \langle a_2, b_2\rangle \end{vmatrix} = 0 .$$

§4.2 $\mathbf{E}^4$ 内两个平面的夹角

前面§4.1 已经定义了 **E** 中三点所成的角,这一节来定义两个平面的夹角,并导出夹角的计算公式.

定义 1 **E** 中两条直线

$$l_i: x = a_i + \lambda v_i, \quad i = 1,2$$

的方向向量之间的夹角 $\theta(v, v_2)$,叫做这两条直线之间的夹角,记成 $\theta(l_1, l_2)$.即

$$\theta(l_1, l_2) = \theta(v_1, v_2).$$

由于方向向量可以反向,例如以 $-v_1$ 换 v_1 时,$\theta(l_1, l_2)$ 换成补角 这就是说,两条直线的夹角根据定义可换成补角.

对于两个任意维数的平面,怎样定义它们之间的夹角呢?

定义 2 **E** 中平面 $A = a + H$ 与 $B = b + K$ 的方向子空间之间的夹角 $\theta(\mathbf{H}, \mathbf{K})$,叫做这两个平面之间的夹角,记成 $\theta(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.即

$$\theta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \theta(\mathbf{H}, \mathbf{K}).$$

因此,本节后面的二维平面 A 和 B 等,不妨认为都是通过原点的.

至于两个子空间的夹角又怎样定义,是一个复杂的问题,我们只就 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面来讨论.这种方法容易推广到 $\mathbf{E}^{2m}$ 中,讨论其中两个 m 维平面的夹角.

首先讨论 $\mathbf{E}^4$ 中二维平面的表示式.在 $\mathbf{E}^4$中取定一个正交坐标系下,通过原点的二维平面的一般方程是

$$A: \begin{array}{l} c_{11}x^1 + c_{21}x^2 + d_{11}x^3 + d_{21}x^4, \\ c_{12}x^1 + c_{22}x^2 + d_{12}x^3 + d_{22}x^4. \end{array} \tag{1}$$

记

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 $\operatorname{rank}(C, D) = 2$.

对于任意点 $a = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbf{E}^4$, 引进下面的分块坐标

$$a = (x, y), \quad x = (x^1, x^2), \quad y = (x^3, x^4). \tag{3}$$

利用(2)和(3),可以把(1)改写成矩阵形式

$$A: xC + yD = 0.$$

又如果 $\det C$, $\det D$ 至少有一个非零时,上式又可以改写成

$$y = xA \quad \text{或} \quad x = yB$$

的形状.在不引起误会的情况下,常用同一个大写字母表示二维平面同时又表示它的方程的系数矩阵. 即

$$A: y = xA, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

(4)称为二维平面 A 的矩阵方程,矩阵 A 称为平面 A 的斜率矩阵.

例 $\mathbf{E}^4$ 的正交基是 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 时,由它们张成两个平面

$$X = [e_1, e_2], \quad Y = [e_3, e_4].$$

它们的一般方程(1)分别是

$$x^3 = 0, \quad x^1 = 0,$$
$$x^4 = 0, \quad x^2 = 0.$$

用分块坐标表示分别是

$$y = 0, \quad x = 0.$$

于是,平面 X 的斜率矩阵 $A = O$, 而平面 Y 没有形如(4)的方程.

任意一个点 $a \in A$, 利用(4),它的分块坐标可以写成

$$a = (x, y) = x(I, A), \tag{5}$$

其中 I 表示 2 阶单位矩阵.

分别属于两个二维平面

$$A: y = xA, \quad B: y = xB \tag{6}$$

的两个向量 $a = u(I, A), b = v(I, B), u = (u^1, u^2), v = (v^1, v^2)$. 它们的内积是

$$\langle a, b\rangle = u(I + AB^t) v^t . \tag{7}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle &= u(I, A) \cdot [v(I, B)]^t \\ &= u(I, A)(I, B)^t v^t \\ &= u(I + AB^t) v^t .\end{aligned}$$

特别地,同一个平面上两个向量 $a = u(I, A), b = v(I, A)$ 的内积

$$\langle a, b\rangle = uP_A v^t, \quad P_A = I + AA^t .$$

对于两个任意的二维平面,它们的方程是否能同时写成(6)的形式呢?在 $\mathbf{E}^2$ 中 OX 轴和 OY 轴的方程分别是 $y = 0$ 和 $x = 0$, 不能同时写成 $y = kx$ 或 $x = ky$ 的形式.如果把坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$, 上述两直线的新方程分别是 $y' = -x'$ 和 $y' = x'$, 同时是 $y = kx$ 的形式.在 $\mathbf{E}^4$ 中也有类似的结论,即下面的

引理 $\mathbf{E}^4$ 中存在一个正交坐标系 $\{x^i\}$, 使得任意二维平面 A 和 B 在这个坐标系下的方程都可以表示成(6)的形式.

证明 首先讨论一个二维平面 A 能表示成(6)的充要条件.假设 $A: y = xA$. 那么,对于 $\mathbf{E}^4$ 的两个特殊的二维坐标平面

$$X: y = 0, \quad Y: x = 0,$$

有 $A \cap Y = O$. 这是因为 $a \in A \cap Y$ 时, $a = (x, y)$ 满足

$$\begin{aligned} y &= xA, \\ x &= 0, \end{aligned}$$

因而 $y = 0, a = O$. 反过来也成立.假设 $A \cap Y = O$, 那么一般式为 $xC + yD = 0$ 的二维平面 A 使得

$$\begin{aligned} xC + yD &= 0, \\ x &= 0 \end{aligned}$$

只有零解,即 $yD = 0$ 只有零解,必须 $\det D \neq 0$. 因此, A 的一般

式可化成 $y = xCD^{-1}$, 即(6)形式 .

其次对任意两个二维平面 A 和 B, 可以找到一个二维平面 C, 使

$$A \cap C = O, \quad B \cap C = O. \tag{8}$$

为了证明这个结论,只需要讨论以下两种情况:

当 $A \cap B = O$ 时, 记 $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ 就有向量组 $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 线性无关 .取 $C = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ 可使(8)成立 .

当 $A \cap B = [c]$ 是一维平面时, 记 $A = [a, c]$, $B = [b, c]$ 就有 $\{a, b, c\}$ 线性无关 .再添加成线性无关组 $\{a, b, c, d\}$, 取 $C = [d, a + b]$ 可使(8)成立 .

最后,取 C 为新的坐标平面 Y', 平面 A 和 B 在新坐标系下可以同时表示成(6)的形式 .

引理证毕 .下面再来定义两个二维平面的夹角,先说简单的

定义 3 假设 A 和 B 是 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面, $a \in A$. 那么, 可以唯一地分解

$$a = a_1 + a_2, \quad a_1 \in B, a_2 \in B^{\perp}. \tag{9}$$

其中 B 的正交补空间 $B^{\perp}$ 也是二维平面 .我们把 a_1 叫做 a 在平面 B 上的投影向量, 记成 $\mathrm{pro}_B(a) = a_1$.

定理 1 假设 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面

$$A: y = xA, \quad B: y = xB.$$

那么,任意向量 $u(I, A) = a \in A$ 在 B 上的投影向量

$$\mathrm{pro}_B(a) = v(I, B), \tag{10}$$

其中 v 使得

$$vP_B = u(I + AB^{\mathrm{t}}), \quad P_B = I + BB^{\mathrm{t}}. \tag{11}$$

证明 由于 $\mathrm{pro}_B(a) \in B$, 可以记 $\mathrm{pro}_B(a) = a_1 = v(I, B)$. 再由(9)得 $a_2 = a - a_1 = u(I, A) - v(I, B) \in B^{\perp}$. 于是, 对于任意 $b = w(I, B) \in B$, 都有 $\langle a_2, b\rangle = 0$. 利用(7)得

$$\langle u(I, A) - v(I, B), w(I, B)\rangle = 0,$$

$$[u(I + AB^t) - v(I + BB^{-1})] w^t = 0.$$

由于 b 为 B 的任意向量时上式成立,所以(11)成立.这里 P_B 是正定矩阵,因而是可逆矩阵.

现在定义二维平面 A 内任意向量 a 与二维平面 B 的夹角.

定义 4 假设 A, B 是 $\mathbf{E}^4$ 的两个二维平面, $0 \neq a \in A$.那么

$$\frac{\| \mathrm{pro}_B(a) \|}{\| a \|} = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

所确定的 θ 叫做 a 与 B 的夹角,记成 $\theta(a, B)$.

定理 2 $\theta(a, B)$ 的余弦平方是

$$\cos^2 \theta(a, B) = \frac{uQ_{AB}u^t}{uP_A u^t}, \tag{13}$$

其中

$$P_A = I + AA^t, \tag{14}$$

$$Q_{AB} = (I + AB^t)(I + BB^t)^{-1}(I + BA^t), \tag{15}$$

分别是正定和半正定的对称矩阵.

证明 先计算(12)中的 $\| a \|^2$,由(7)有

$$\| a \|^2 = [u(I, A)] \cdot [u(I, A)]^t$$

$$= u(I + AA^t) u^t = uP_A u^t.$$

再由定理 1 又得到

$$\| \mathrm{pro}_B(a) \|^2 = [v(I, B)] \cdot [v(I, B)]^t$$

$$= vP_B v^t$$

$$= [u(I + AB^t) P_B^{-1}] P_B [u(I + AB^t) P_B^{-1}]^t$$

$$= u[(I + AB^t) P_B^{-1}] (I + BA^t)] u^t$$

$$= uQ_{AB}u^t.$$

于是,由(12)就得到了(13).

在(12)的分数中,立即看出 $\| a \|^2 > 0$ 和 $\| \mathrm{pro}_B(a) \|^2 \geq 0$.因此, P_A 和 Q_{AB} 分别是正定和半正定的.定理 2 证毕.

上面定义了非零向量 a 与平面 B 的夹角,并且讨论了夹角的计算方法,(13)实质上是两个二次齐式之比.一般说来, a 在 A 内变化时, $\theta(a, B)$ 也随之变化.我们不妨假设 a 为单位向量,从(13)得到 $\cos^2\theta(a, B) = uQ_{AB}u^t$, 其中 u 满足 $uP_Au^t = \| a\|^2 = 1$.除 A 与 B 等斜情况外, $\theta(a, B)$ 有两个逗留值,即当 a 取遍 A 时 $\theta(a, B)$ 的两个特殊值.我们把这两个逗留值定义为 A 与 B 的夹角,这就是下面的

定义 5 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面 A 与 B 之间的夹角 $\theta(A, B)$, 是当 $a \neq 0$ 在 A 内变化时 $\theta(a, B)$ 的逗留值,即

$$\theta(A, B) = \{\theta(a, B)\text{ 的逗留值 } | \ 0 \neq a \in A\}. \tag{16}$$

定理 3 假设 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面

$$A: y = xA, \quad B: y = xB.$$

那么,它们的夹角 $\theta_i(A, B)$ 的余弦平方满足

$$\det(Q_{AB} - \lambda_i P_A) = 0, \tag{17}$$

$$\lambda_i = \cos^2\theta_i(A, B), \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

其中 Q_{AB} 和 P_A 由(14)和(15)规定.

说明 根据定理 2 与定义 5,利用(13)是两个二次齐式之比,利用(16)的逗留值定义,可以得到定理 3.证明过程恰似微分几何曲面论中从法曲率 $\kappa_n = \dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}$ 到主曲率 $\kappa_i (i = 1,2)$ 的推理过程,其中 Φ_1 和 Φ_2 分别为曲面的第一和第二基本齐式,它们都是曲面切方向$(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ 的二次齐式.因为主曲率是作为法曲率 κ_n 的逗留值来定义的:

$$\kappa_i = \{\kappa_n(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)\text{ 的逗留值 } | \ (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)\text{ 是曲面的切方向}\},$$

这正如(16)来定义 $\theta(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 一样.

证明 记 $\lambda = \cos^2(a, B)$, 把(13)写成

$$u(Q_{AB} - \lambda P_A)u^t = 0.$$

对上式关于 u^i 求偏导,得到

$$\frac{u}{u^i}(Q_{AB} - \lambda P_A)u^t + u(Q_{AB} - \lambda P_A)\left(\frac{u}{u^i}\right)^t - \frac{\lambda}{u^i}uP_Au^t = 0 .$$

这里要注意 $\frac{u}{u^i} = (\delta_i^1, \delta_i^2)$.又由 Q_{AB} 和 P_A 的对称性,还知道 $Q_{AB} - \lambda P_A$ 也是对称的 .于是,上式的第一、二项相同,变成

$$2(\delta_i^1, \delta_i^2)(Q_{AB} - \lambda P_A)u^t - \frac{\lambda}{u^i}uP_Au^t = 0 .$$

在 λ 的逗留值处有 $\frac{\lambda}{u^i} = 0$, 上式又变成

$$(\delta_i^1, \delta_i^2)(Q_{AB} - \lambda P_A)u^t = 0 .$$

由于 $(\delta_1^1, \delta_1^2) = (1,0)$, $(\delta_2^1, \delta_2^2) = (0,1)$ 是两个线性无关向量,所以有

$$(Q_{AB} - \lambda P_A)u^t = 0 . \tag{19}$$

这个方程组有非零解 u, 必须(17)成立,这就证明了定理 3 .

习　　题

1 . 对于任意矩阵 A, 证明: $P_A = I + AA^t$ 是正定的 .

2 . 证明:方程 $\det(Q_{AB} - \lambda P_A) = 0$ 的两根之积与和是

$$\lambda_1\lambda_2 = \det(Q_{AB}P_A^{-1}), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(Q_{AB}P_A^{-1}) .$$

3 . 在下列情况下求 $\theta(A, B)$:

1) $A: y = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B: y = x\begin{pmatrix} \frac{3+1}{3-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A: y = x\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B: y = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

§4.3　$\mathbf{E}^4$ 内两个二维平面的关系

本节将利用两个二维平面的夹角计算公式,来讨论它们之间的位置关系 .为此,先进一步研究两平面的夹角 .

上一节定义的 $\theta(A, B)$ 是否有对称性呢 ? 通过下面对于角

向量的讨论,可以得到肯定的结论 $\theta(\mathbf{A},\mathbf{B})=\theta(\mathbf{B},\mathbf{A})$.

定义 1 假设 A 和 B 是 $\mathbf{E}^4$ 的两个二维平面, a_1 和 a_2 是 A 的两个非零向量,使得

$$\theta(a_i,B)=\theta_i(A,B),\quad a_i\in A,\quad i=1,2. \tag{1}$$

那么 a_i 叫做 A 相对于 B 的角向量;沿方向 a_i 的直线 l_i 叫做 A 相对于 B 的角直线.

定理 1 A 相对于 B 的角向量 $a_i=u_i(I,A)$ 满足

$$u_iQ_{AB}=\lambda_iu_iP_A,\quad i=1,2. \tag{2}$$

证明 角向量 a_i 满足(2),而 $\theta_i(A,B)$ 和 λ_i 又必须满足 §4.2 的(17).由 P_A 是正定和 Q_{AB} 是半正定可以证出,(17)有两个非负的实根 λ_1 和 λ_2.但是, λ_i 和 u_i 又满足(19),转置得到本节的(2), u_i 所对应的 a_i 就是角向量.

定理 1 证毕.证明中看到, λ_i 是矩阵 $Q_{AB}P_A^{-1}$ 的特征根, u_i 是它的特征向量.它们之间有什么关系呢?

定理 2 不同特征根 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 所对应的角向量互相垂直.

证明 对于 λ_1 和 λ_2,分别把(2)写成

$$u_1Q_{AB}=\lambda_1u_1P_A,\quad u_2Q_{AB}=\lambda_2u_2P_A.$$

把第一式右乘以 u_2^{t},第二式右乘以 u_1^{t},所得两式相减成

$$\begin{aligned}0&=u_1Q_{AB}u_2^{\mathrm{t}}-u_2Q_{AB}u_1^{\mathrm{t}}\\&=(\lambda_1-\lambda_2)u_1P_Au_2^{\mathrm{t}}\\&=(\lambda_1-\lambda_2)\langle a_1,a_2\rangle.\end{aligned}$$

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 立即证出 $\langle a_1,a_2\rangle=0$,即 $a_1\perp a_2$.

定理 3 假设 a_i 是 A 相对于 B 的角向量, a_i 在 B 上的投影向量 $b_i=\mathrm{pro}_B(a_i)\neq0$.那么, b_i 是 B 相对于 A 的角向量,而且 $b_i=v_i(I,B)$ 满足

$$v_iQ_{BA}=\lambda_iv_iP_B,\quad i=1,2. \tag{3}$$

证明 根据 §4.2 的(14)和(15), B 相对于 A 的相应矩阵

$$P_B=I+BB^{\mathrm{t}},\quad Q_{BA}=(I+BA^{\mathrm{t}})P_A^{-1}(I+AB^{\mathrm{t}}).$$

根据§4.2 的定理 1,投影向量 $b_i = \mathrm{pro}_B(a_i) = u_i(I, B)$ 的坐标

$$v_i = u_i(I + AB^t)P_B^{-1}. \tag{4}$$

利用(2)和(4),计算

$$\begin{aligned} v_iQ_{BA} &= [u_i(I + AB^t)P_B^{-1}](I + BA^t)P_A^{-1}(I + AB^t) \\ &= (u_iQ_{AB})P_A^{-1}(I + AB^t) \\ &= (\lambda_i u_iP_A)P_A^{-1}(I + AB^t) \\ &= \lambda_i[u_i(I + AB^t)] \\ &= \lambda_i v_iP_B, \end{aligned}$$

证明了(3)成立,说明 b_i 是 B 相对于 A 的角向量.

定理 3 证毕.它和上节定理 3 得到

推论 $\theta_i(A, B) = \theta_i(B, A)$, 下面是两个同解方程式:

$$\det(Q_{AB} - \lambda P_A) = 0, \quad \det(Q_{BA} - \lambda P_B) = 0.$$

从这个推论看出,两个二维平面的夹角与次序无关,解决了前面提出的问题,可以来讨论两平面的位置关系.

定义 2 假设 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面 A 和 B 的两个夹角相等,即 $\theta_1(A, B) = \theta_2(A, B)$.那么,就称 A 与 B 是等斜的,否则是非等斜的.

A 与 B 等斜时,§4.2 的(17)有两个等根,可证得 Q_{AB} 与 P_A 是成比例的:因为这时 $\theta_1(A, B) = \theta_2(A, B)$, A 中任意 $a = u(I, A)$ 与 B 的夹角 $\theta(a, B)$ 都相等,(19)对任意 u 都成立,只有 $Q_{AB} - \lambda P_A = 0$.这就得到下面的

定理 4 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面 A 与 B 等斜的充要条件是

$$Q_{AB} = \lambda P_A, \quad Q_{BA} = \lambda P_B. \tag{5}$$

例 求平面 A 与坐标平面 $X(y = 0)$ 等斜的条件.

解 平面 X 的斜率矩阵是 $B = O$, 代入§4.2 的(15),就得到 $Q_{AB} = I$, (5)成为

$$I + AA^t = kI, \quad AA^t = (k - 1)I.$$

这就是说, A 与 X 等斜的充要条件是 AA^t 为纯量矩阵.

任意 $a\in A$，与平面 B 有一个夹角 $\theta(a,B)$. 它与两个逗留值有什么关系呢？下面来讨论这个问题.

假设 A 和 B 是 $\mathbf{E}^4$ 中两个不等斜的二维平面，a_1 和 a_2 是 A 上两个单位角向量. 那么，由定理 2，a_1 和 a_2 互相正交. 假设 A 与 B 等斜，那么 A 上任意向量都是角向量，我们不妨也选取两个互相正交的单位角向量 a_1 和 a_2. 于是，任意 $a\in A$，都可以表示成

$$a=a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi, \tag{6}$$

$$\varphi=(a_1,a), 0\le\varphi\le 2\pi,$$

其中 φ 表示平面 A 上从 a_1 到 a 的夹角.

定理 5(Euler 公式)　假设 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面 A 与 B 的夹角 $\theta_1\le\theta_2$，a_1 和 a_2 是对应的 A 中两个互相正交的单位角向量，A 中 a 与 a_1 的夹角为 φ. 那么，a 与 B 的夹角满足

$$\cos^2\theta(a,B)=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_2\sin^2\varphi, \tag{7}$$

$$\lambda_i=\cos^2\theta_i(A,B),\quad i=1,2.$$

证明　为了求(7)中 λ 的表达式，利用 §4.2 的(13)，必须求出 P_A，Q_{AB} 和 u. 先在 $\mathbf{E}^4$ 中挑选一个正交基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，为简化问题计，不妨取 $e_1=a_1$，$e_2=a_2$.

这时，角向量 a_1，a_2 所在的平面 $A=[a_1,a_2]=[e_1,e_2]$，它的斜率矩阵 $A=O$，因而

$$P_A=I+AA^{\mathrm{t}}=I. \tag{8}$$

再由 $a_i=u_i(I,A)=e_i(i=1,2)$，得 $u_1=(1,0)$，$u_2=(0,1)$. 利用(2)又容易求出

$$Q_{AB}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}. \tag{9}$$

对于 A 中向量 $a=u(I,A)$，利用(6)立即得到 $u=(\cos\varphi,\sin\varphi)$. 再按 §4.2 的(13)计算，就得到(7).

推论　两个平面 A 与 B 的夹角 $\theta_i(A,B)$ 是

$$\{\theta(a,B)\mid a\in A\}$$

内的角的两个极值 .

证明　不妨也认为 $\theta_1 \leq \theta_2$ **, 因而** $\lambda_1 \geq \lambda_2$ **.利用**(7)**计算**

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta(a, B) &= \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi \\ &\geq \lambda_2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \cos^2 \theta_2 (A, B) .\end{aligned}$$

这就证明 $\theta(a, B) \leq \theta_2(A, B)$ **, 同理可证** $\theta(a, B) \geq \theta_1(A, B)$.

有了上面的准备,可以讨论两平面的位置关系 .

定理 6　$\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面 $A = a + H$ **与** $B = b + K$ **有以下各种位置关系:**

1 . A **与** B **等斜**, $\theta_1 = \theta_2$, $Q_{AB} = \lambda P_A$.

1 .1　$\theta_1 = \theta_2 = 0$ **时**, A **与** B **平行 .**

1 .2　$\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ **时**, A **与** B **正交 .**

1 .3　$0 < \theta_1 = \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

2 . A **与** B **不等斜**, $\theta_1 < \theta_2$, $Q_{AB} \neq \lambda P_A$.

2 .1　$\theta_1 = 0$ **时**, $\dim(H + K) = 3$, $\dim(H \cap K) = 1$.

2 .2　$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ **时**, $\dim(H^{\perp} \cap K) \geq 1$, $\dim(H \cap K^{\perp}) \geq 1$.

2 .3　$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

证明　分题设的各种情况来证明 .

1 .1　**由** $\theta_1 = 0$ **得知**, $\forall a \in H$ **都有** $a \in K$ **.由** $\theta_2 = 0$ **得知**, $\forall b \in K$ **都有** $b \in H$ **.于是** $H = K$, $A \parallel B$.

1 .2　**由** $\theta_i = \dfrac{\pi}{2}$ **得知**, $\forall a \in H$ **都有** $a \perp K$ **.于是**, $H \perp K$, **两平面正交**, $A \perp B$.

2 .1　**记** $\theta_1 = 0$ **所对应的角向量为** a_1 , $a_1 \in H$, $a_1 \in K$ **.于是** $\dim(H \cap K) \geq 1$ **.记** $\theta_2 \neq 0$ **所对应的角向量为** a_2 , $a_2 \in H$, $a_2 \overline{\in}$

K.于是 $\dim(H+K)\geq 3$.再根据子空间的维数定理,

$$\dim(H+K)+\dim(H\cap K)=\dim H+\dim K=4,$$

得到 $\dim(H+K)=3,\dim(H\cap K)=1$.

2.2 记 $\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$所对应的角向量为 $a_2, a_2\in H, a_2\in K^{\perp}$.于是 $\dim(H\cap K^{\perp})\geq 1$.同理 $\dim(H^{\perp}\cap K)\geq 1$.

例 在通常的三维欧氏空间内,两个二维平面之间的夹角定义为它们的二面角 θ,只有一个夹角.按照上节的定义,实际上还有另一个夹角为 0.这是因为这样两个平面至少有一条交线,属于定理 6 中情况 2.1 所述.

习 题

1. 试证明定理 3 的推论.
2. 求两个二维平面

$$A: y=x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B: y=x\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

的夹角,并确定两个 a 的值,分别使得 $\theta_1=\theta_2$;$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 试证明:两个二维平面

$$A: y=x\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},\quad B: y=x\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

是等斜的,并求 $\theta(A,B)$.

§4.4 $\mathbf{E}^n$ 内两个平面的夹角

前两节讨论了欧氏空间 $\mathbf{E}^4$ 中两个二维平面之间的夹角,类似的方法可以讨论 $2m$ 维欧氏空间中两个 m 维平面 A 与 B 的夹角,它有 m 个值 $\theta_i(A,B), i=1,\cdots,m$.本节讨论一般 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 中两个任意维平面 A^h 与 B^k 之间的夹角,情况就比较复杂了,先从简单情况谈起.

当 $h = k$ 时,对于两个同维平面 A 与 B, 记它们的基分别是 $\{a_1, \cdots, a_h\}$ 与 $\{b_1, \cdots, b_h\}$.那么,这两个平面的夹角 $\theta(A, B)$ 由

$$\cos\theta(A, B) = \frac{G(a_1, \cdots, a_h; b_1, \cdots, b_h)}{G(a_1, \cdots, a_h)G(b_1, \cdots, b_h)} \tag{1}$$

来定义,式中

$$G(a_1, \cdots, a_h; b_1, \cdots, b_h) = \det(\langle a_i, b_j\rangle),$$

$$G(a_1, \cdots, a_h) = \det(\langle a_i, a_j\rangle)$$

等是向量组的格拉姆行列式 .

例 当 $h = 1$, A 和 B 的方向向量分别是 a 和 b 时,

$$G(a; b) = \langle a, b\rangle, G(a) = \| a\|^2, G(b) = \| b\|^2 .$$

于是,由上述夹角的定义(1),有

$$\cos\theta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{\langle a, b\rangle}{\| a\| \cdot \| b\|},$$

这正是经典的夹角余弦公式 .

为了区别下面将定义的另一种夹角,我们把(1)式定义的角又叫做 A 与 B 的多维角,或 h 维角 .下面来定义另一种所谓的单维角 .

不妨假设两个平面都通过坐标原点,它们的参数方程分别是

$$\begin{aligned} A: x = uA, \quad u = (u^1, \cdots, u^h), \\ B: y = vB, \quad v = (v^1, \cdots, v^k); \end{aligned} \tag{2}$$

其中矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{pmatrix};$$

$$a_i = (a_i^1, \cdots, a_i^n), \quad i = 1, \cdots, h,$$

$$b_j = (b_j^1, \cdots, b_j^n), \quad j = 1, \cdots, k .$$

这里 a_i 是平面 A 的 h 个线性无关向量, b_j 是平面 B 的 k 个线性无关向量 .于是,分别属两个平面的向量 $x = uA$ 与 $y = vB$ 的内积

是

$$\langle x, y\rangle = uAB^{t}v^{t}. \tag{3}$$

特别地,同一个平面内两个向量 $x = uA$ 与 $y = u_1 A$ 的内积是

$$\langle x, y\rangle = uP_A u_1^{t}, \quad P_A = AA^{t},$$

其中 P_A 是一个 h 阶的正定矩阵 .

类似§4.2,我们先定义平面上向量与另一个平面的夹角,再用这个夹角的逗留值来定义两个平面的夹角 .

定理 1 平面 A 中向量 $a = uA$ 在平面 $B(y = vB)$ 上的投影向量是

$$\mathrm{pro}_B(a) = wB, \tag{4}$$

其中

$$w = uAB^{t}P_B^{-1}, \quad P_B = BB^{t}. \tag{5}$$

证明 向量 a 在 B 及其正交补 $B^{\perp}$ 上可唯一地分解成

$$a = a_1 + a_2, \quad a_1 = \mathrm{pro}_B(a) \in B, \quad a_2 \in B^{\perp}.$$

由 $a_1 \in B$, 可表示成 $a_1 = wB$.于是,

$$a_2 = a - a_1 = uA - wB.$$

因为 $a_2 \in B^{\perp}$, 对于 B 中任意向量 $b = vB$, 都有 $\langle a_2, b\rangle = 0$, 即

$$(uA - wB)B^{t}v^{t} = 0,$$

$$(uAB^{t} - wP_B)v^{t} = 0.$$

由 b 的任意性,上式得到

$$uAB^{t} - wP_B = 0,$$

因而(5)成立,定理 1 证毕 .

平面 A 内任意非零向量 a 与平面 B 的夹角定义为 a 与 $\mathrm{pro}_B(a)$ 之间的夹角,即

$$\cos\theta(a, B) = \frac{\|\mathrm{pro}_B(a)\|}{\|a\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

定理 2 平面 A 内非零向量 $a = uA$ 与平面 B 的夹角 $\theta(a, B)$ 满足

$$\lambda = \cos^2 \theta(a, B) = \frac{uQ_{AB}u^{\mathrm{t}}}{uP_A u^{\mathrm{t}}}, \tag{7}$$

其中 h 阶对称矩阵 $P_A = AA^{\mathrm{t}}$, $Q_{AB} = A^{\mathrm{t}} BP_B^{-1} BA^{\mathrm{t}}$ 分别是正定和半正定的 .

证明 利用定理 1,我们有

$$\| a \|^2 = uP_A u^{\mathrm{t}},$$

$$\begin{aligned} \| \mathrm{pro}_B(a) \|^2 &= wP_B w^{\mathrm{t}} \\ &= (uAB^{\mathrm{t}} P_B^{-1}) P_B (uAB^{\mathrm{t}} P_B^{-1})^{\mathrm{t}} \\ &= uAB^{\mathrm{t}} P_B^{-1} BA^{\mathrm{t}} u^{\mathrm{t}} \\ &= uQ_{AB}u^{\mathrm{t}} . \end{aligned}$$

把它们代入(6)就得到(7),定理 2 获证 .

当非零向量 a 在 A 上变化时,我们把夹角 $\theta(a, B)$ 的逗留值叫做两个平面 A 与 B 的夹角,或单维角,记成 $\theta(A, B)$.于是有

定理 3 假设 A 和 B 是 $\mathbf{E}^n$ 的两个平面,维数分别是 h 和 k,

$$A: x = uA, \quad B: y = vB .$$

那么,它们夹角 $\theta_i(A, B)$ 的余弦平方满足

$$\det(Q_{AB} - \lambda_i P_A) = 0, \tag{8}$$

其中 $\lambda_i = \cos^2 \theta_i(A, B)$, $i = 1, \cdots, h$.

证明 首先把(7)改写成

$$u(Q_{AB} - \lambda P_A) u^{\mathrm{t}} = 0 . \tag{9}$$

对(9)式关于 u^i 求偏导,得到

$$2 \frac{u}{u^i}(Q_{AB} - \lambda P_A) u^{\mathrm{t}} - \frac{\lambda}{u^i} uP_A u^{\mathrm{t}} = 0 .$$

由于 $\frac{u}{u^i} = (\delta_i^1, \cdots, \delta_i^h)$, 还由于在 λ 的逗留点有 $\frac{\lambda}{u^i} = 0$, 我们有

$$2(\delta_i^1, \cdots, \delta_i^h)(Q_{AB} - \lambda P_A) u^{\mathrm{t}} = 0 .$$

当 $i = 1, \cdots, h$ 时 $(\delta_i^1, \cdots, \delta_i^h)$ 是 h 个线性无关的向量,从上式得

$$(Q_{AB} - \lambda P_A) u^{\mathrm{t}} = 0 . \tag{10}$$

上面(10)关于非零向量 u 都有解,必须系数行列式为零,即(8)成立,定理 3 获证 .

由于 P_A 与 Q_{AB} 分别是正定和半正定的对称矩阵,作为特征问题(8)有 h 个非负特征值 $\lambda_i \geq 0$, 因此两平面的夹角也有 h 个值, $\theta_i(A, B), i = 1, \cdots, h$.使得

$$\theta(a_i, B) = \theta_i(A, B), \quad a_i \in A$$

的非零向量 a_i, 叫做 A 相对于 B 的角向量 . $a_i = u_i A$ 的参数 u_i 由(10)确定,即有

$$u_i Q_{AB} = \lambda_i u_i P_A . \tag{11}$$

类似于§4.3,定理 2 和定理 3 的证明方法,可以得到

定理 4 对应于不相等的两个特征值, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 角向量 a_i 与 a_j 互相正交 .

定理 5 假设 a_i 是平面 A 相对于平面 B 的角向量, a_i 在 B 上的投影向量 $b_i = \mathrm{pro}_B(a_i) \neq 0$(或 $\lambda_i \neq 0$) .那么, b_i 是 B 相对于 A 的角向量 .

定理 5 说明, a_i 在 B 上投影向量 $b_i = v_i B$ 的参数

$$v_i = u_i AB^{\mathrm{t}} P_B^{-1} \tag{12}$$

正是 B 相对于 A 的特征问题

$$\det(Q_{BA} - \mu_i P_B) = 0, \quad i = 1, \cdots, k, \tag{13}$$

$$v_i Q_{BA} = \mu_i v_i P_B \tag{14}$$

的解 即 v_i 是(14)的特征向量,其中

$$Q_{BA} = B^{\mathrm{t}} A P_A^{-1} AB^{\mathrm{t}}, \quad P_A = AA^{\mathrm{t}} .$$

定理 5 还容易导出下面的

推论 特征问题(8)的根 $\lambda_i \neq 0$ 时,相应的特征问题(13)的根 $\mu_i = \lambda_i$.

这个推论说明,当两个平面的某个夹角 $\theta_i \neq \frac{\pi}{2}$ 或 $\lambda_i \neq 0$ 时,这个夹角与两平面的顺序无关 即是这时有

$$\lambda_i = \mu_i, \quad \theta_i(A, B) = \theta_i(B, A),$$

说明 $\theta_i \neq \dfrac{\pi}{2}$ 时夹角定义的合理性 .但是,从 A 到 B 有 h 个夹角,从 B 到 A 有 k 个夹角,当 $h \neq k$时是否还有$\theta_i = \dfrac{\pi}{2}$ 的夹角呢 ? 下面的定理来回答这个问题 .

定理 6 假设平面 A 的维数 h 小于平面 B 的维数 k;两个平面的特征问题

$$\det(Q_{AB} - \lambda P_A) = 0, \quad \det(Q_{BA} - \mu P_B) = 0$$

的特征根是

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h (\geq 0), \\ &\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_h \geq \cdots \geq \mu_k (\geq 0) . \end{aligned} \tag{15}$$

那么,前 h 个相等,后 $k - h$ 个为零,即

$$\begin{aligned} &\lambda_i = \mu_i, \quad i = 1, \cdots, h; \\ &\mu_{h+1} = \cdots = \mu_k = 0 . \end{aligned} \tag{16}$$

证明 当 $\lambda_i \neq 0$ 时,定理 5 的推论已经证实 $\lambda_i = \mu_i$.下面只需证明,对于为零的 λ_i 或 μ_j, 当两组特征根按(15)排列时, 也有

$$\lambda_i = \mu_j = 0 .$$

首先显然有

$$Q_{AB} - \lambda P_A = (Q_{AB} P_A^{-1} - \lambda \mathbf{I}_h) P_A,$$

$$Q_{BA} - \mu P_B = (Q_{BA} P_B^{-1} - \mu I_k) P_B .$$

式中 $\mathbf{I}_h$ 与 I_k 分别是 h 和 k 阶的单位矩阵 .因此,定理所设的特征问题就是

$$\det(Q_{AB} P_A^{-1} - \lambda \mathbf{I}_h) = 0, \quad \det(Q_{BA} P_B^{-1} - \mu I_k) = 0 .$$

再来改写矩阵的形式,

$$Q_{AB} P_A^{-1} = AB^{\mathrm{t}} P_B^{-1} BA^{\mathrm{t}} P_A^{-1} = C_{AB} C_{BA},$$

$$Q_{BA} P_B^{-1} = BA^{\mathrm{t}} P_A^{-1} AB^{\mathrm{t}} P_B^{-1} = C_{BA} C_{AB},$$

式中 $C_{AB} = AB^{\mathrm{t}} P_B^{-1}$, $C_{BA} = BA^{\mathrm{t}} P_A^{-1}$ 分别是 $h \times k$ 和 $k \times h$ 阶矩阵 .于是,上述特征问题又可以改写成

$$\det(C_{AB}C_{BA} - \lambda \mathbf{I}_h) = 0, \quad \det(C_{BA}C_{AB} - \mu \mathbf{I}_k) = 0 .$$

根据西尔威斯特定理(熊全淹、叶明训编《线性代数》第三版 §5.1 例 6),当 $k > h$ 时,C_{AB} 与 C_{BA} 两种乘积的特征多项式满足关系

$$\det(C_{BA}C_{AB} - \lambda \mathbf{I}_k) = \lambda^{k-h}\det(C_{AB}C_{BA} - \lambda \mathbf{I}_h) .$$

因此,后者比前者的特征根多 $k - h$ 个零根,其余 h 个特征根对应相等 .如果按(15)的大小顺序,就得到(16) .

定理 6 证毕,它立即得到下面的

推论　两个不同维数的平面 A 与 B 的夹角,至少有 $k - h$ 个为 $\frac{\pi}{2}$, 其中 $h \leq k$, 分别是两个平面的维数 .

例 1　在三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 内,直线 $A = l(\dim A = 1)$ 与平面 $B = \pi(\dim B = 2)$ 之间的夹角,按经典的意义只有一个 θ_1, 这就是 l 上向量 a 与其在 B 上投影 b_1 之间的夹角 .按本节的定义,在 B 内还有一个与 b_1 正交的向量 b_2, 它与 a 的夹角 $\theta_2(a, b_2)$ 也被定义为 A 与 B 的夹角,而且这里显然也有 $\theta_2(a, b_2) = \frac{\pi}{2}$.

例 2　假设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 n 维欧氏空间的一个标准正交基底,

$$A = [e_1, \cdots, e_h], \quad B = [e_1, \cdots, e_h, \cdots, e_k]$$

是两个平面, $h \leq k \leq n$, 显然 A　　B .对于 A 内任意向量 a 有 $a \in B$, 因而 $\mathrm{pro}_B(a) = a, \cos\theta(a, B) = 1$.于是,

$$\lambda_i = 1, \quad \theta_i(A, B) = 0, \quad i = 1, \cdots, h .$$

再取在 B 内而不在 A 内的向量 $e_{h+1}, \cdots, e_k$, 它们都与 A 正交,因此有

$$\mathrm{pro}_A(e_j) = 0, \quad j = h + 1, \cdots, k .$$

于是又有

$$\mu_j = 0, \quad \theta_j(B, A) = 0, \quad j = h + 1, \cdots, k .$$

回到本节夹角的定义和公式,它们并不依赖于平面 A 与 B 的

基底的选取.例如,$\{a_1, \cdots, a_h\}$ 和 $\{a_1', \cdots, a_h'\}$ 是 A 的不同基底,平面 A 相对于不同基底的参数方程分别是

$$x = uA, \quad x = u'A',$$

式中的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_h \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_1' \\ \cdots \\ a_h' \end{pmatrix}.$$

于是存在满秩的 h 阶矩阵 C,使得 $A' = CA$.可以证明:两个特征方程

$$\det(Q_{AB} - \lambda P_A) = 0, \quad \det(Q_{A'B} - \lambda P_{A'}) = 0$$

是同解的.类似地,当平面 B 的基底改变时,也有同样的结论.

下面讨论两个同维平面,它们的多维角与单维角之间有下述的关系.

定理 7 两个 h 维平面 A 与 B 的多维角 θ 与其 h 个单维角 θ_i 之间有关系式

$$\cos^2\theta = \cos^2\theta_1 \cdots \cos^2\theta_h. \tag{17}$$

证明 根据定理 3,特征方程(8)的 h 个特征根之积

$$\cos^2\theta_1 \cdots \cos^2\theta_h = \lambda_1 \cdots \lambda_h = \frac{\det Q_{AB}}{\det P_A}. \tag{18}$$

由于 $h = k$ 时 AB^t 和 BA^t 都是方阵,我们有

$$\det P_A = \det(AA^t) = G(a_1, \cdots, a_h),$$

$$\begin{aligned}\det Q_{AB} &= \det(AB^t P_B^{-1} BA^t) \\ &= [\det(AB^t)]^2 \cdot \det P_B^{-1} \\ &= G^2(a_1, \cdots, a_h; b_1, \cdots, b_h) \cdot G^{-1}(b_1, \cdots, b_h).\end{aligned}$$

把它们代入(18),利用(1),就得到(17).

习　　题

1. 试证明定理 4.

2. 试证明定理 5.

3. 试证明:夹角的定义不依赖于基底的选取.

§4.5 $\mathbf{E}^n$ 内两个平面的距离

前面三节讨论了两个平面的夹角,这一节讨论两个平面的距离.我们从两点之间的距离说起,给出一个关于距离的引理.

假设平面 A 的参数方程是

$$A: x = uA + x_0, \tag{1}$$

$$u = (u^1, \cdots, u^h), \quad h = \dim A = \operatorname{rank} A.$$

为简便计,可设 A 的方向子空间由 h 个互相正交的单位向量 a_1, $\cdots$, a_h 构成,即有 $\langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, h$.这时,参数方程(1)中矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_h \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{t}} = (a_1^{\mathrm{t}}, \cdots, a_h^{\mathrm{t}}).$$

于是又得到

$$P_A = AA^{\mathrm{t}} = (\langle a_i, a_j\rangle) = I_h. \tag{2}$$

对于平面 B, 也可作类似的假设,参数方程是

$$B: y = vB + y_0, \tag{3}$$

$$v = (v^1, \cdots, v^k), \quad k = \dim B = \operatorname{rank} B.$$

这时,参数方程(3)内的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad B^{\mathrm{t}} = (b_1^{\mathrm{t}}, \cdots, b_k^{\mathrm{t}}),$$

$$P_B = BB^{\mathrm{t}} = (\langle b_i, b_j\rangle) = I_k. \tag{4}$$

引理 分别在两个平面(1)和(3)上的两点 x 和 y 之间的距离平方

$$d^2(x, y) = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2uAB^t v^t - 2(uA - vB)\Delta^t + \| \Delta \|^2,$$

式中 $\Delta = y_0 - x_0$.

证明 利用前面的(1)到(4),利用记号

$$\| \Delta \|^2 = \langle \Delta, \Delta \rangle, \| u \|^2 = \sum_{i=1}^{h} (u^i)^2, \| v \|^2 = \sum_{i=1}^{k} (v^i)^2,$$

就容易计算得

$$\begin{aligned} D = d^2(x, y) &= \langle y - x, y - x \rangle \\ &= (\Delta + vB - uA)(\Delta + vB - uA)^t \\ &= uAA^t u^t + vBB^t v^t - 2uAB^t v^t - 2(uA - vB)\Delta^t + \Delta\Delta^t, \end{aligned}$$

即可得到引理 .

特别地,当 $A = 0$ 时,得到点 $a = x_0$ 到平面 B 上动点 y 的距离平方公式

$$D = d^2(a, y) = \| v \|^2 + 2vB\Delta^t + \| \Delta \|^2, \tag{5}$$

其中 $\Delta = y_0 - a$.

现在来定义点到平面的距离 .

定义 1 欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 内点 a 到平面 B 的距离 $d(a, B)$, 定义为 a 到 B 上动点 y 的距离的逗留值 .即

$$d(a, B) = \{ d(a, y) \text{ 的逗留值 } | \ y \in B \}.$$

定理 1 假设平面 B 的参数方程是(3) .那么,点 a 到 B 的距离平方是

$$d^2(a, B) = \| \Delta \|^2 - \| \Delta B^t \|^2, \tag{6}$$

式中 $\Delta = y_0 - a$, ΔB^t 是一个 k 维向量 .

证明 对于(5)式,求关于 v^i 的偏导数 .注意到

$$\frac{v}{v^i} = (\delta_i^1, \cdots, \delta_i^k), \quad \frac{v}{v^i} B = b_i .$$

写出 D 的逗留值条件,我们有

$$\frac{1}{2} \frac{D}{v^i} = v^i + b_i \Delta^t = 0, \quad i = 1, \cdots, k .$$

从上式解出取逗留值的 v^i, 得 $v_0^i = - b_i \Delta^t$,即

$$v_0^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ \cdots \\ v_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1\Delta^{\mathrm{t}} \\ \cdots \\ -b_k\Delta^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{pmatrix}\Delta^{\mathrm{t}},$$

$$v_0 = -\Delta B^{\mathrm{t}}. \tag{7}$$

从而 $\|v_0\|^2 = \|\Delta B^{\mathrm{t}}\|^2$, $v_0 B\Delta^{\mathrm{t}} = -\|\Delta B^{\mathrm{t}}\|$.把它们代入(5),就得到 D 的逗留值,即 a 到 B 的距离平方(6) .定理 1 证毕 .

为了达到逗留值 $d(a, y)$, 即 a 到 B 的距离,要求出对应的 y 点 .将(7)代入(3)即得到

$$y_1 = v_0 B + y_0 = -\Delta B^{\mathrm{t}} B + y_0,$$

y_1 称为点 a 在平面 B 上的正投影点 .事实上,这点到点 a 的连接向量

$$\begin{aligned} a - y_1 &= a - y_0 + \Delta B^{\mathrm{t}} B = \Delta B^{\mathrm{t}} B - \Delta \\ &= \Delta(B^{\mathrm{t}} B - I_k) \end{aligned}$$

是正交于平面 B 的,这是因为对于 B 中任意向量 $b = vB$, 都有

$$\begin{aligned} \langle a - y_1, vB\rangle &= (a - y_1)(vB)^{\mathrm{t}} \\ &= \Delta(B^{\mathrm{t}} B - I_k) B^{\mathrm{t}} v^{\mathrm{t}} \\ &= \Delta[B^{\mathrm{t}}(BB^{\mathrm{t}}) - B^{\mathrm{t}}] v^{\mathrm{t}} \\ &= \Delta[B^{\mathrm{t}} I_k - B^{\mathrm{t}}] v^{\mathrm{t}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

这就得到了下面的推论 1,它也可作为点到平面的距离的定义 .

推论 1 点 a 到平面 B 的距离,等于 a 与其在 B 上投影点 y_1 之间的距离 .

推论 2 假设点 a 不在平面 B 上 .那么, a 到 B 的距离是 a 与 B 内动点之间的距离的极小值 .

证明 假设 a 在平面 B 上的投影点是 y_1, 由定理 1 和推论 1,

$$d^2(a, y_1) = \|\Delta\|^2 - \|\Delta B^{\mathrm{t}}\|^2.$$

再设 y 是 B 上的任意点,由(5)又有

$$d^2(a, y) = \|\boldsymbol{\Delta}\|^2 + \|v\|^2 + 2vB\boldsymbol{\Delta}^t .$$

为了证实推论 2,只需要证明

$$\|v\|^2 + 2vB\boldsymbol{\Delta}^t + \|\boldsymbol{\Delta}B^t\|^2 \geq 0 . \qquad (8)$$

注意 v 和 $\boldsymbol{\Delta}B^t$ 都是 $\mathbf{E}^k$ 的向量,$\mathbf{E}^k$ 内的内积满足

$$\langle v + \boldsymbol{\Delta}B^t, v + \boldsymbol{\Delta}B^t\rangle \geq 0 .$$

展开上式的左边,就得到(8) .

例 1 $\mathbf{E}^3$ 中点到直线的距离 .假设 a 是一个点, L 是一条直线,

$$L: y = vb + y_0, \quad \|b\| = 1, \quad \boldsymbol{\Delta} = y_0 - a .$$

于是, $B^t = B = b$, $\|\boldsymbol{\Delta}B^t\|^2 = \langle y_0 - a, b\rangle^2$ 是向量 $y_0 - a$ 在 L 上的投影的平方 .最后,点 a 到 L 的距离平方

$$d^2(a, L) = \|y_0 - a\|^2 - \langle y_0 - a, b\rangle^2 .$$

例 2 $\mathbf{E}^3$ 中点到平面的距离 .假设 a 是一个点, B 是一个平面,

$$B: y = (v^1, v^2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + y_0, \quad \boldsymbol{\Delta} = y_0 - a .$$

于是, $\|\boldsymbol{\Delta}B^t\|^2 = \langle y_0 - a, b_1\rangle^2 + \langle y_0 - a, b_2\rangle^2$ 是向量 $y_0 - a$ 在 B 上投影的平方 .最后,点 a 到 B 的距离平方

$$d^2(a, B) = \|y_0 - a\|^2 - \{\langle y_0 - a, b_1\rangle^2 + \langle y_0 - a, b_2\rangle^2\} .$$

现在讨论两个平面的距离

定义 2 欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 中两个平面 A 与 B 的距离 $d(A, B)$,定义为 A 与 B 上动点的距离的逗留值 .即

$$d(A, B) = \{d(x, y) \text{ 的逗留值} \mid x \in A, y \in B\} .$$

定理 2 $\mathbf{E}^n$ 内由(1)和(3)给出的两个平面 A 和 B, 它们的距离平方是

$$d^2(A, B) = \|\boldsymbol{\Delta}\|^2 - (u_0 A - v_0 B)\boldsymbol{\Delta}^t, \qquad (9)$$

其中 $\boldsymbol{\Delta} = y_0 - x_0$;参数 u_0 和 v_0 满足方程

$$
\begin{aligned}
u_0(PP^{t} - I_h) &= \Delta(PB - A)^{t},\\
v_0(P^{t}P - I_k) &= -\Delta(P^{t}A - B)^{t},
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

这里 $P = AB^{t} = (\langle a_i, b_\alpha\rangle)$ 是 $h \times k$ 型矩阵 .

证明　平面 A 与 B 上动点的距离,由引理给出了计算公式 . 将此式关于 u^i 与 v^α 求偏导,注意到

$$
\frac{u}{u^i} = (\delta_i^1, \cdots, \delta_i^h), \qquad \frac{v}{v^\alpha} = (\delta_\alpha^1, \cdots, \delta_\alpha^k);
$$

$$
\frac{u}{u^i}A = a_i, \qquad \frac{v}{v^\alpha}B = b_\alpha;
$$

$$
i = 1, \cdots, h, \qquad \alpha = 1, \cdots, k .
$$

并写出 D 的逗留值条件,我们得到

$$
\frac{1}{2}\frac{D}{u^i} = u^i - a_iB^{t}v^{t} - a_i\Delta^{t} = 0,
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{D}{v^\alpha} = v^\alpha - b_\alpha A^{t}u^{t} + b_\alpha\Delta^{t} = 0 .
$$

由此解出

$$
u^i = a_i(vB + \Delta)^{t},
$$

$$
v^\alpha = b_\alpha(uA - \Delta)^{t} .
$$

或者

$$
\begin{aligned}
u^{t} &= \begin{matrix} u^1 \\ \cdots \\ u^h \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 \\ \cdots \\ a_h \end{matrix} (vB + \Delta)^{t} = A(vB + \Delta)^{t},\\
v^{t} &= \begin{matrix} v^1 \\ \cdots \\ v^k \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{matrix} (uA - \Delta)^{t} = B(uA - \Delta)^{t} .
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

把上述两式中的每一个代入另一个,就得到只含一个变向量 u 或 v 的方程 .再改记 u, v 为 u_0, v_0 就得到(10)式,这就是 D 的逗留点所满足的方程 .

下面要证明,对于满足(10)或(11)的 u_0 和 v_0, 从引理的两点

距离公式可以得到(9),正是两个平面的距离公式.为此,分别用 u_0 和 v_0 去左乘(11)的两个式子,并改写 u 和 v 为 u_0 和 v_0,得

$$\| u_0 \|^2 = u_0 AB^t v_0 + u_0 A\Delta^t,$$
$$\| v_0 \|^2 = v_0 BA^t u_0 - v_0 B\Delta^t.$$

两式相加得

$$\| u_0 \|^2 + \| v_0 \|^2 = 2 u_0 AB^t v_0 + (u_0 A - v_0 B)\Delta^t.$$

把上式代入改写 u, v 为 u_0, v_0 的引理,即得到(9),定理 2 获证.

要注意的是,两个相交平面 A 与 B 的距离 $d(A, B) = 0$.这是由于 $d(x, y) \geq 0$,而选取其公共点 $x_0 = y_0$ 代入,有 $d(x_0, y_0) = 0$.所以公共点 $x_0 = y_0$ 为逗留点,$d(A, B) = 0$.这个明显的事实也可以从定理 2 来推出.

当两个平面平行时,两个平面的距离等于较低维平面上任一点到另一平面的距离.即当 $\dim A \leq \dim B$ 时,任取 $x \in A$ 都有

$$d(x, B) = d(A, B).$$

例 3 求 $\mathbf{E}^3$ 中两条异面直线

$$A: x = ua + x_0, \quad \| a \| = 1,$$
$$B: y = vb + y_0, \quad \| b \| = 1$$

之间的距离.这里 $a \nparallel b$ 或 $a \times b \neq 0$,三个向量 $a, b, \Delta = y_0 - x_0$ 不共面,它们的混合积$(a, b, \Delta) \neq 0$,$P = ab^t = \langle a, b\rangle$.利用公式(10)有

$$u_0(\langle a, b\rangle^2 - 1) = \Delta(\langle a, b\rangle b - a)^t,$$
$$v_0(\langle a, b\rangle^2 - 1) = -\Delta(\langle a, b\rangle a - b)^t.$$

假如两条直线 A 与 B 的夹角为 θ,即 $\langle a, b\rangle = \cos\theta$,那么从上式得

$$u_0 = \sin^{-2}\theta\,[\langle \Delta, a\rangle - \langle \Delta, b\rangle \cos\theta],$$
$$v_0 = \sin^{-2}\theta\,[\langle \Delta, a\rangle \cos\theta - \langle \Delta, b\rangle].$$

把它们代入公式(9),得到 A 与 B 的距离平方

$$d^2(A, B) = \langle \Delta, \Delta\rangle - \sin^{-2}\theta\,[\langle \Delta, a\rangle^2 + \langle \Delta, b\rangle^2$$

$$-2\langle\Delta, a\rangle\langle\Delta, b\rangle\cos\theta\ .$$

这个结果与解析几何里公式

$$d^2(A, B) = \frac{(a, b, \Delta)^2}{(a\times b)^2} = (a, b, \Delta)^2\sin^{-2}\theta$$

是一致的.事实上,只要利用混合积的拉格朗日公式,展开上式中的混合积平方

$$(a, b, \Delta)^2 = \begin{vmatrix} \langle\Delta,\Delta\rangle & \langle\Delta, a\rangle & \langle\Delta, b\rangle \\ \langle a,\Delta\rangle & \langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b,\Delta\rangle & \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle\Delta,\Delta\rangle(1-\cos^2\theta) - [\langle\Delta, a\rangle^2$$

$$+\langle\Delta, b\rangle^2 - 2\langle\Delta, a\rangle\langle\Delta, b\rangle\cos\theta],$$

就立即证实两个公式的一致性.

习　　题

1. 试证明:相交两平面之间的距离为 0.
2. 假设 A 和 B 是两个平行的平面,

$$A: x = uA + x_0,\quad \dim A = h,$$

$$B: y = vB + y_0,\quad \dim B = k\geq h.$$

而且 $b_1 = a_1,\cdots, b_h = a_h$.那么,对于任意 $x\in A$ 和 $y\in B$ 都有

$$d(A, B) = d(x, B).$$

3. 对于两个异面平面 A 和 B,即 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\nparallel B$,方程组(10)有唯一解 u_0 和 v_0 么?距离 $d(A, B)$ 是唯一的么?

§4.6　$\mathbf{E}^n$ 内的等距变换

在§4.1中已经知道,欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 的变换群或等距群 G,是由正交群 G_0 和平移群 G_ϕ 所构成.这一节着重讨论正交群,并导出正交矩阵的标准形.首先引进正交变换的不变平面的概念.

定义 1　假设正交变换 $\phi\in G_0$, H 是欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 的子空间

或通过原点的平面. 对于任意 $x \in H$ 都有 $\varphi(x) \in H$ 时, H 叫做 φ 的不变子空间, 或不变平面.

为了求不变平面, 必须讨论特征向量.

定义 2 假设 $\mathbf{E}^n$ 的正交变换 φ 在正交基底 $\{e_i\}$ 下的矩阵是 A. 那么, 方程式

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1}$$

的根 $\lambda = \lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ 称为 φ 的特征根. 满足方程

$$(A - \lambda_i I) x_i^{\mathrm{t}} = 0 \tag{2}$$

的向量 x_i 叫做 φ 关于特征值 λ_i 的特征向量.

特征值 λ_i 不依赖于正交基底的选取. 方程(2)等价于

$$A x_i^{\mathrm{t}} = \lambda_i x_i^{\mathrm{t}}, \quad x_i A^{\mathrm{t}} = \lambda_i x_i.$$

复特征值所对应的复特征向量, 应看成厄尔米空间的向量. 因而向量长的平方 $\| x \|^2$ 是 $x \bar{x}^{\mathrm{t}}$, 两个复向量的内积 $\langle x, y \rangle = x \bar{y}^{\mathrm{t}}$.

定理 1 假设 φ 是 $\mathbf{E}^n$ 的正交变换. 那么, φ 的特征值的模为 1; 对应不同特征值的特征向量是正交的.

证明 由(2)及其取转置和共轭运算, 有

$$x_i A^{\mathrm{t}} = \lambda_i x_i, \quad A \bar{x}_i^{\mathrm{t}} = \bar{\lambda}_i \bar{x}_i^{\mathrm{t}}.$$

两式相乘, 得到

$$x_i (A^{\mathrm{t}} A) \overline{x_i}^{\mathrm{t}} = (\lambda_i \bar{\lambda}_i) x_i \overline{x_i}^{\mathrm{t}},$$

$$x_i I \overline{x_i}^{\mathrm{t}} = |\lambda_i|^2 x_i \overline{x_i}^{\mathrm{t}},$$

$$\| x_i \|^2 = |\lambda_i|^2 \cdot \| x_i \|^2.$$

由于 $\| x_i \|^2 \neq 0$, 得 $|\lambda_i|^2 = 1$, $|\lambda_i| = 1$.

假设 $\lambda_i \neq \lambda_j$, $x_i A^{\mathrm{t}} = \lambda_i x_i$, $x_j A^{\mathrm{t}} = \lambda_j x_j$. 对后式取转置和共轭运算, 得到

$$A \overline{x_j}^{\mathrm{t}} = \bar{\lambda}_j \overline{x_j}^{\mathrm{t}}. \tag{3}$$

利用(2), 由上面(3)可得到

$$x_i (A^{\mathrm{t}} A) \overline{x_j}^{\mathrm{t}} = (\lambda_i \bar{\lambda}_j) x_i \overline{x_j}^{\mathrm{t}},$$

$$(1 - \lambda_i \bar{\lambda}_j) \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ 时 $1 - \lambda_i \overline{\lambda_j} \neq 0$, 只有 $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

定理 1 证毕.根据这个定理,正交变换的特征值为

$$\lambda_j = e^{i\theta_j}, \quad \theta_j \in \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

这种特征值共有两类: $\theta_j = k\pi$ 时 $\lambda_j = \pm 1$; $\theta_j \neq k\pi$ 时 $\lambda_j \bar{\in} \mathbf{R}$.对于第一类情况,每个特征值所对应的特征向量构成 φ 的一维不变子空间.对于第二类情况,每个特征值所对应的特征向量构成 φ 的什么不变子空间?

定理 2 正交变换 φ 的每一个复特征值 $e^{i\theta}(\theta \neq k\pi)$, 对应于 φ 的一个二维不变子空间 H; 当取 H 的某正交标准基底时, φ 在 H 的限制 φ_H 下的变换矩阵是

$$A_H = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \neq k\pi. \tag{5}$$

证明 如果 $\lambda = e^{i\theta}$ 所对应的复特征向量是 $c = a + ib$, 其中 a 和 b 是实向量.由 $\varphi(c) = e^{i\theta}c$, 得到

$$\begin{aligned}\varphi(a) + i\varphi(b) &= e^{i\theta}(a + ib) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(a + ib) \\ &= (a\cos\theta - b\sin\theta) + i(a\sin\theta + b\cos\theta).\end{aligned}$$

比较两边的实部和虚部,得到

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= a\cos\theta - b\sin\theta, \\ \varphi(b) &= a\sin\theta + b\cos\theta.\end{aligned} \tag{6}$$

利用(6)式,把 φ 是等距变换所满足的条件

$$\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle = \langle a, b \rangle, \langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle,$$
$$\langle \varphi(b), \varphi(b) \rangle = \langle b, b \rangle$$

分别写成

$$(\| a \|^2 - \| b \|^2)\sin 2\theta + 2\langle a, b \rangle(\cos 2\theta - 1) = 0, \tag{7.1}$$

$$\| a \|^2(\cos^2\theta - 1) + \| b \|^2\sin^2\theta - \langle a, b \rangle \sin 2\theta = 0, \tag{7.2}$$

$$\| a \|^2 \sin^2\theta + \| b \|^2 (\cos^2\theta - 1) + \langle a, b\rangle \sin 2\theta = 0 . \tag{7.3}$$

由(7.2)和(7.3)又得到

$$(\| a \|^2 - \| b \|^2)(1 - \cos 2\theta) + 2\langle a, b\rangle \sin 2\theta = 0 . \tag{7.4}$$

把(7.1)和(7.4)看成 $\| a \|^2 - \| b \|^2$ 和 $\langle a, b\rangle$ 的齐性线性方程组.当 $\theta \neq 0, \pi$ 时,方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sin 2\theta & \cos 2\theta - 1 \\ \cos 2\theta - 1 & \sin 2\theta \end{vmatrix} = 2(1 - \cos 2\theta) \neq 0,$$

于是得到 $\| a \|^2 - \| b \|^2 = \langle a, b\rangle = 0$, 即 a 与 b 是互相正交的等长的两个向量.

把这里 a 和 b 都单位化,还记作 a 和 b.于是, $H = [a, b]$ 是一个二维子空间.(6)式表明 H 是 φ 的不变子空间, φ 在 H 上的限制是一个二维平面的旋转变换,其变换矩阵是(5)中的 A_H.这就完全证明了定理 2.

我们还容易证明下面的

定理 3 假设 H 是正交变换的不变子空间, $H^\perp$ 是 H 的正交补子空间; φ_H 和 $\varphi_{H^\perp}$ 分别是 φ 在 H 和 $H^\perp$ 上的限制; e_H 和 $e_{H^\perp}$ 分别是 H 和 $H^\perp$ 内的恒等变换.那么,

1. $H^\perp$ 也是 φ 的不变子空间;
2. $\mathbf{E}^n$ 的两个变换

$$\varphi_1 = \begin{cases} \varphi_H, & \text{在 } H \text{ 上时}, \\ e_{H^\perp}, & \text{在 } H^\perp \text{ 上时}; \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} e_H, & \text{在 } H \text{ 上时}, \\ \varphi_{H^\perp}, & \text{在 } H^\perp \text{ 上时} \end{cases}$$

都是等距变换,而且 $\varphi = \varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

3. 取 $\mathbf{E}^n$ 的正交基底使得 $H = [e_1, \cdots, e_m]$, $H^\perp = [e_{m+1}, \cdots, e_n]$ 时, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ 的变换矩阵分别是

$$A_{\varphi_1}=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & I_1\end{pmatrix},\quad A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix}I_2 & \\ & A_2\end{pmatrix},\quad A_{\varphi}=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

其中 I_1 和 I_2 分别是 m 和 $n-m$ 阶单位矩阵.

利用定理 3 来证明下面的

定理 4 假设 φ是 $\mathbf{E}^n$ 的一个正交变换.那么,存在一个标准正交基底,使得 φ的变换矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&\\ & \ddots &&&&&&&\\ && 1 &&&&&&\\ &&& -1 &&&&&\\ &&&& \ddots &&&&\\ &&&&& -1 &&&\\ &&&&&& A_1 &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& A_t\end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中有 r 个 1 和 s 个 -1, $r+s+2t=n$,而且

$$A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,t.$$

证明 对于 n 用归纳法来证明.首先 $n\leq 2$ 时命题显然成立.再假设命题对于 $\leq n-1$ 是成立的.那么,对于 $\mathbf{E}^n$, φ的特征根的模为 1.当 $\lambda\in\mathbf{R}$ 时, $\lambda=\pm 1$, φ有一维不变子空间;当 $\lambda\in\mathbf{C}$ 时, $\lambda=e^{i\theta}$, φ有二维不变子空间.无论是哪种情况,这种不变子空间 H 的维数是 1 或 2,而 $H^{\perp}$ 的维数是 $n-1$ 或 $n-2$.根据定理 3,在适当的正交基底下, φ的变换矩阵形如(8).由归纳法的假设, $\varphi_{H^{\perp}}$ 的变换矩阵为(9)的形状.因而在适当的标准正交基底下, φ的变换矩阵为(9)的形状,定理 4 获证.

形状如(9)的矩阵叫做正交变换 φ的标准矩阵.

从平面解析几何中熟知,平面上的等距变换(旋转或平移),都

可以表示为两个对于直线的反射的乘积 .这就是下面的

定理 5 假设 $\mathbf{E}^2$ 内 τ_i 是对于直线 l_i 的反射, $i = 1,2$.那么, $l_1 \parallel l_2$ 时 $\phi = \tau_1\tau_2$ 是一个平移; $l_1 \parallel l_2$ 时 $\phi = \tau_1\tau_2$ 是一个旋转 .反之,任何旋转或平移,都可以表示成两个反射的乘积 .

这个定理可推广到 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 中,为此先给予反射的概念 .

定义 3 在 $\mathbf{E}^n$ 中对于原点 $(x^i = 0)$ 的反射 τ_0 是使 $x'^i = -x^i$ 的变换,它对应的变换矩阵是 $-I_n$.假设 $H^m \quad \mathbf{E}^n$, 是 m 维子空间,变换 τ 使得

$$\tau_H = e_m, \quad \text{即 } \tau \text{ 在 } H \text{ 上为恒等变换},$$

$$\tau_{H^\perp} = \tau_0, \quad \text{即 } \tau \text{ 在 } H^\perp \text{ 上为对原点的反射}.$$

那么,τ 叫做对于 H^m 的反射,它所对应的变换矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_{n-m} \end{pmatrix}.$$

例 对应于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

的变换是对于超平面 $x^n = 0$ 的反射 .还可以类似地定义对于平面的反射 .

定理 6(E.Cartan) 欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 的正交变换

$$\phi = \tau_1 \cdots \tau_k, \quad 1 \leq k \leq n, n \geq 2,$$

其中 τ_i 是 $\mathbf{E}^n$ 对于某个超平面的反射 .

证明 根据定理 4,任何正交变换 ϕ 都可以分解成某些一维或二维不变子空间上的三类变换的乘积 .它们是 r 个恒等变换 $e_1, \cdots, e_r$; s 个反射变换 $\tau_{r+1}, \cdots, \tau_{r+s}$; t 个旋转变换 $\phi_{r+s+1}, \cdots, \phi_{n-t}$.即

$$\begin{aligned}\phi &= e_1 \cdots e_r \tau_{r+1} \cdots \tau_{r+s} \phi_{r+s+1} \cdots \phi_{n-t} \\ &= \tau_{r+1} \cdots \tau_{r+s} \phi_{r+s+1} \cdots \phi_{n-t}.\end{aligned}$$

又根据定理 5,每一个旋转 ϕ_i 又可以表示成两个二维平面上反射的乘积 .将这种反射推广到 $\mathbf{E}^n$ 上,得到对于超平面的反射 .于是,ϕ 表示成 $r+2t \leq n$ 个反射的乘积 .

习　　题

1. 写出 $\mathbf{E}^3$ 中所有正交变换的类型 .
2. 试证明定理 3 .
3. 试证明定理 5 .
4. 假设 $\mathbf{E}^3$ 中等距变换 $x' = xA$ 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   试求它的一维和二维不变平面 .
5. 试求 $\mathbf{E}^n$ 中对于平面

$$\pi: \sum_{i=1}^{n} a_i x^i - p = 0$$

   的反射变换式,其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

§4.7　$\mathbf{E}^4$ 内的等距变换

上节定理 4 关于等距变换标准矩阵的结论,应用到四维欧氏空间,得到下面的

定理 1　$\mathbf{E}^4$ 中所有的正交变换总共有十类,它们所对应的矩阵分别是:

2．对于原点的反射;

3．对于 $H=[e_1, e_2]$ 的反射;

4．对于 $H=[e_1, e_2, e_3]$ 的反射;

5．对于 $H=[e_1]$ 的反射;

6．绕 $H=[e_1, e_2]$ 旋转 θ;

7．绕 $H=[e_1, e_2]$ 旋转 θ 和对于 $H^{\perp}=[e_3, e_4]$ 的反射的乘积;

8．绕 $H=[e_1, e_2]$ 旋转 θ 和对于 $K=[e_1, e_3, e_4]$ 的反射的乘积;

9．绕 $H=[e_1, e_2]$ 旋转 θ_1 和绕 $H^{\perp}=[e_3, e_4]$ 旋转 θ_2 的乘积;

10．绕 $H=[e_1, e_2]$, $H^{\perp}=[e_3, e_4]$ 都旋转 θ 的乘积.

定义 1　欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 的等距变换

$$\phi: x' = xA^{t} + a,$$

当 $\det A=1$ 时, ϕ 称为保持定向的; 当 $\det A=-1$ 时, ϕ 称为不保定向的.

在定理 1 所列的十类变换中, 第 1、2、3、6、7、9、10 类是保持定向的, 其余三类是不保定向的.

定义 2　定理 1 的第 10 类 $\mathbf{E}^4$ 的等距变换 ϕ, 称为 Clifford 平移. 当 $\theta=0$ 时, ϕ 是恒等变换; 当 $\theta=\pi$ 时, ϕ 是对于原点的反射; 当 $\theta\neq 0, \pi$ 时, ϕ 又叫做非平凡的.

从这个定义立即可以得到

定理 2　$\mathbf{E}^4$ 的等距变换是 Clifford 平移的充要条件是它的特征根是相同的共轭复数.

我们知道, 任何向量 a 与其在平移变换 ϕ 下的象 $\phi(a)$ 之间, 距离 $d(a, \phi(a))$ 是一个常数. 在高维欧氏空间内, 对于正交变换或旋转变换 ϕ, $\theta(a, \phi(a))$ 不一定是一个常数. 但是, 对于定义 2 的 Clifford 平移, 它虽然是两个旋转的乘积, 却保持下面定理 3 的性质. 这也是定义 2 把这种旋转叫做平移的原因.

定理 3　E^4 的等距变换为 Clifford 平移的充要条件是: ϕ 使空间内任意向量转过一个定角,即

$$\theta(a,\phi(a)) = \text{const} \quad (\forall a \neq 0) . \tag{1}$$

证明　假设等距变换 ϕ 使得(1)**成立,那么 ϕ 必为定理** 1 **的第** 1、2、10 **类之一 .因为对其余七类等距变换 ϕ,都可以找出两个不同向量,例如 e_1 和 e_4,使得**

$$\theta(e_1,\phi(e_1)) \neq \theta(e_4,\phi(e_4)) .$$

反过来,假设 ϕ 是 Clifford **平移 .当 ϕ 是平凡的,ϕ 为恒等变换或对于原点的反射变换,它们分别使**

$$\theta(a,\phi(a)) = 0, \quad \theta(a,\phi(a)) = \pi .$$

总之,ϕ 不论是哪一类,都使得(1)**成立 .剩下只需证明 ϕ 是非平凡的情况,不妨认为 a 是任意的单位向量 .首先把 a 表示成**

$$a = (\cos\alpha(\cos\beta,\sin\beta),\sin\alpha(\cos\gamma,\sin\gamma)),$$

这样一来,就有 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ **和**

$$\begin{aligned}\phi(a) &= aA^t \\ &= (\cos\alpha(\cos\beta,\sin\beta)A^t,\sin\alpha(\cos\gamma,\sin\gamma)A^t) \\ &= (\cos\alpha(\cos(\beta+\theta),\sin(\beta+\theta)), \\ &\quad \sin\alpha(\cos(\gamma+\theta),\sin(\gamma+\theta))) .\end{aligned}$$

最后计算夹角

$$\begin{aligned}\cos\theta(a,\phi(a)) &= \langle a,\phi(a)\rangle = a\phi^t(a) \\ &= \cos^2\alpha[\cos\beta\cos(\beta+\theta)+\sin\beta\sin(\beta+\theta)] \\ &\quad + \sin^2\alpha[(\cos\gamma\cos(\gamma+\theta)+\sin\gamma\sin(\gamma+\theta)] \\ &= (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cos\theta \\ &= \cos\theta = \text{const} .\end{aligned}$$

定理 3 **证毕** .Clifford **平移与二维平面的等斜概念还有如下的联系 .**

定理 4　假设 ϕ 是 E^4 的 Clifford **平移 .那么,任意向量 a 和它的象 $\phi(a)$ 所生成的二维平面 $H = [a,\phi(a)]$ 是 ϕ 的不变平面 .**

证明　当 $a \in E_1 = [e_1, e_2]$ 或 $a \in E_2 = [e_3, e_4]$ 时,命题显然成立.对于 $a \in \mathbf{E}^4$,可以表示成

$$a = a_1 + a_2, \quad a_i \in E_i, i = 1,2.$$

于是, $\varphi(a) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$, $\varphi^2(a) = \varphi^2(a_1) + \varphi^2(a_2)$.这里 $\varphi(a_i)$ 是把 a_i 旋转 θ 而得, $\varphi^2(a_i)$ 是把 a_i 旋转 2θ 而得,而且都有

$$\varphi^2(a_i) = \lambda a_i + \mu\varphi(a_i), \quad i = 1,2.$$

将以上两式相加,就得到

$$\varphi^2(a) = \lambda a + \mu\varphi(a).$$

再利用 $\varphi(a) = \varphi(a)$,就证明了 $H = [a, \varphi(a)]$ 是 φ 的不变平面.

定理 4 证毕.利用定理 3 证明过程中 $\varphi(a)$ 的表达式,也可以证明这个结论.

定理 5　定理 4 中不变平面 $H = [a, \varphi(a)]$ 与 E_1 或 E_2 等斜.

习　　题

1. 试证明定理 5.

第五章　厄尔米几何与辛几何

这一章讨论厄尔米几何和辛几何的基本知识,结论和方法都和上一章类似 .

§5.1　厄尔米几何

参照§4.1 的定义和命题,我们容易给出下面的概念,并用类似的方法证明下面的结论 .

定义 1　假设 **V** 是复向量空间; ω 是 **V** 上正定的厄尔米型或厄尔米内积,即 ω对第一个分量是线性的,而且

$\omega(x, y) = \overline{\omega(y, x)} \quad (\forall\, x, y \in \mathbf{V}), \omega(x, x) > 0 \quad (\forall\, x \neq 0)$.

那么,$(\mathbf{V}, \omega)$叫做厄尔米(向量)空间,或酉空间 .

$$\| x \| = \omega(x, x), \quad d(x, y) = \| x - y \|$$

分别叫做 x 的厄尔米长和 x 与 y 的厄尔米距离 .

这个定义规定 ω是正定的,与欧氏空间类似 .

性质　假设 x, y, z 是厄尔米空间 **V** 的向量 那么,

1 . $d(x, y) = d(y, x)$;

2 . $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$;

3 . $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

4 . $d(x + y, y + z) = d(x, z)$;

5 . $d(\lambda x, \lambda y) = | \lambda | 2 d(x, y)$.

定理 1(Schwarz 不等式)　厄尔米空间$(\mathbf{V}, \omega)$内任意两个向量 x 与 y 满足

$$|\omega(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

等号成立的充要条件是 x **与** y **线性相关** .

推论　厄尔米空间内任意两个向量 x **与** y **满足**

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

定理 2(平行四边形等式)　厄尔米空间内任意两个向量 x **与** y **满足**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

定义 2　厄尔米空间$(\mathbf{V}, \omega)$**的基底**$\{e_i\}$**的** e_i **是互相正交的单位向量时,即**

$$\omega(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

基底$\{e_i\}$**叫做标准正交基底** .

定理 3　任意厄尔米空间$(\mathbf{V}, \omega)$**存在标准正交基底**$\{e_i\}$**,使得**

$$\omega(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y^i}, \quad \omega = (\omega_{ij}) = I_n,$$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)(\overline{a^i} - \overline{y^i}) .$$

定理 4　假设$\{e_i\}$**是厄尔米空间**$(\mathbf{V}, \omega)$**的标准正交基底**, G **是保持** ω **不变的厄尔米变换群 .那么**, G **中变换** φ **在**$\{e_i\}$ **下对应于酉矩阵,即**

$$\varphi: x' = xA^t, \quad x'^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j,$$

$$A^t A = AA^t = I_n, \quad A^t = A^{-1} .$$

证明　由定理 3 改写

$$\omega(x,y) = x\bar{y}^t .$$

ω **保持不变**, $\omega(x', y') = \omega(x,y)$, **即有**

$$x'\overline{y'}^t = (xA^t)\overline{(yA^t)}^t = x(A^t A)\bar{y}^t = x\bar{y}^t .$$

由 x **和** y **的任意性,得到** $A^t A = I_n$.

推论 厄尔米变换群 G 的维数 $\dim G = \frac{n}{2}(n-1)$.

上面讨论了厄尔米空间$(\mathbf{V}, \omega)$的几何,下面推广到点和各维平面的厄尔米几何.

定义 3 假设 $\mathbf{A}^n$ 是厄尔米空间$(\mathbf{V}, \omega)$上定义的复仿射空间,映射 $d: \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^n \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$, 叫做 $\mathbf{A}^n$ 中点 x 与 y 的厄尔米距离,具有厄尔米距离的复仿射空间$(\mathbf{A}^n, d)$也叫做厄尔米空间,记成 $\mathbf{H}^n = (\mathbf{A}^n, d)$.

定理 5 假设 ρ_a 是 $\mathbf{H}^n$ 中的平移变换, $\rho_a(x) = x + a$.那么,两点间距离是平移的不变量,即

$$d(\rho_a(x), \rho_a(y)) = d(x, y).$$

定理 6 $\mathbf{H}^n$ 的变换群 $\mathbf{G}$ 是$(\mathbf{V}, \omega)$的厄尔米群 G 与平移群 G_ρ 的乘积,其中的一般变换为

$$\phi: x' = xA^{\mathrm{t}} + a, \quad AA^{\mathrm{t}} = I_n.$$

由于 $\dim G = \frac{n}{2}(n-1)$ 和 $\dim G_\rho = n$,又得到

推论 $\dim \mathbf{G} = \frac{n}{2}(n+1)$.

习 题

1. 试补证本节中各命题.
2. 厄尔米型 ω使得

$$4\omega(x, y) = \omega(x+y, x+y) - \omega(x-y, x-y) + \mathrm{i}\omega(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}\omega(x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y).$$

3. 对厄尔米空间 $\mathbf{H}^n$ 叙述并证明有关子空间的定义和性质.
4. 欧氏空间中还有哪些几何性质可以在厄尔米空间内推广?

§5.2 辛 几 何

首先介绍一种具有双线性型的向量空间,并讨论它的特殊性

质 .

定义 1 假设 $\mathbf{V}$ 是偶数维的实或复向量空间, ω 是 $\mathbf{V}$ 上的非退化的反对称的双线性型,即

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x), \tag{1}$$

$$\dim\mathbf{V} = \operatorname{rank}\omega = 2m .$$

那么, $(\mathbf{V}, \omega)$ 叫做辛向量空间,简称辛空间, ω 叫做辛内积或辛度量 .

条件(1)等价于

$$\omega(x, x) = 0 \quad (\forall x \in \mathbf{V}) .$$

因此,类似厄尔米空间来定义向量长度的话,任意向量的长度都为零,没有意义 .但是,辛空间内有正交的概念 .

定义 2 辛空间 $(\mathbf{V}, \omega)$ 内向量 x 和 y 使得 $\omega(x, y) = 0$ 时,称 x 与 y 是辛正交的,记成 $x \perp y$ .H 是 $\mathbf{V}$ 的子空间时,集合

$$\{x \mid x \in \mathbf{V}, \omega(x, y) = 0 (\forall y \in H)\}$$

称为 H 的辛补,记成 $H^{\perp}$.

定理 1 子空间 H 的辛补 $H^{\perp}$ 还是子空间,而且

$$\dim H^{\perp} = 2m - \dim H .$$

这个定理的证明类似§1.4 的性质 2,不重复叙述 .

辛空间内任何向量都与自我正交,而欧氏空间的任何非零向量都不与自我正交,这是一个重要的区别 .

例 向量 $a \neq 0$ 时,一维平面 $L = [a] \subset L^{\perp}$.一般说来,子空间 H 与 $H^{\perp}$ 之和并不是全空间,即 $H + H^{\perp} \neq \mathbf{V}$,从而 $H + H^{\perp}$ 不一定是直接和 .

类似§1.4 的性质 3,有下面的

定理 2 假设 H 和 K 都是辛空间的子空间 .那么,

1 . $H \subset K$ 时 $K^{\perp} \subset H^{\perp}$;

2 . $(H^{\perp})^{\perp} = H$;

3 . $(H + K)^{\perp} = H^{\perp} \cap K^{\perp}$;

4 . $(H \cap K)^{\perp} = H^{\perp} + K^{\perp}$.

证明 由定义 2 立即得到结论 1 .由定义 2 得 $H \quad (H^{\perp})^{\perp}$, 又由定理 1 得到 $\dim(H^{\perp})^{\perp} = \dim H$, 因而结论 2 成立 .结论 3、4 的证明类似于 §1.4 的性质 3 .

定理 2 证毕 .类似欧氏空间的标准正交基底, 又有

定义 3 假设$(\mathbf{V}, \omega)$是 $2m$ 维的辛空间; $\{e_i\}$ 是 $\mathbf{V}$ 的基底, 使得

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(e_{m+i}, e_{m+j}) = 0,$$

$$\omega(e_i, e_{m+j}) = -\omega(e_{m+j}, e_i) = \delta_{ij},$$

$$i, j = 1, \cdots, m .$$

那么, $\{e_i\}$ 叫做$(\mathbf{V}, \omega)$的辛标准正交基底 .

显然, 辛标准正交基底所对应的 $2m$ 阶矩阵是

$$J = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} & I_m \\ -I_m & \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中 I_m 是 m 阶的单位矩阵 .

定理 3 辛空间存在辛标准正交基底 .

证明 假设辛空间$(\mathbf{V}^m, \omega)$的维数 $\dim\mathbf{V}^m = 2m$, 对于 m 用归纳法来证明命题 .

当 $m = 1$ 时, $\mathbf{V}^1$ 一定存在基底 $\{a, b\}$ 使得 $\omega(a, b) \neq 0$, 因为否则 $\omega(x, y) = 0$, ω是退化的 .记 $\omega(a, b) = k \neq 0$, 并选取 $e_1 = a$, $e_2 = \frac{1}{k}b$. 于是,

$$\omega(e_1, e_2) = -\omega(e_2, e_1) = 1,$$

$$\omega(e_i, e_i) = 0, \quad i = 1, 2 .$$

这就是说, $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathbf{V}^1$ 的辛标准正交基底 .

假设对 $m-1$ 时命题成立 .在 $2m$ 维辛空间$(\mathbf{V}^m, \omega)$内, 选取线性无关的 $\{a, b\}$ 使得 $\omega(a, b) = k \neq 0$.再作 $e_1 = a$, $e_{m+1} = \frac{1}{k}b$. 于是,

$$\omega(e_1, e_{m+1}) = -\omega(e_{m+1}, e_1) = 1 .$$

记 $H = [e_1, e_{m+1}]$, 其辛补 $H^{\perp}$ 是 $2(m-1)$维子空间. 由于 ω 在 $H^{\perp}$ 上的限制仍然是一个辛内积, 按归纳法假设, $H^{\perp}$ 存在辛标准正交基底 $\{e_2, \cdots, e_m, e_{2+m}, \cdots, e_{2m}\}$, 使得

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \omega(e_{m+i}, e_{m+j}) = 0, \quad i, j = 2, \cdots, m,$$

$$\omega(e_i, e_{m+j}) = -\omega(e_{m+j}, e_i) = \delta_{ij}.$$

上面的 H 与 $H^{\perp}$ 之和是直接和, $H \oplus H^{\perp} = \mathbf{V}^m$. 这是因为定理 1 和下面来证明的 $H \cap H^{\perp} = 0$. 事实上, $a \in H \cap H^{\perp}$ 时, 由 $a \in H$ 得到 $a = \lambda e_1 + \mu e_2$; 由 $a \in H$ 得到

$$0 = \omega(e_1, a) = \omega(e_1, \lambda e_1 + \mu e_2) = \mu,$$

$$0 = \omega(e_{m+1}, a) = \omega(e_{m+1}, \lambda e_1 + \mu e_2) = -\lambda.$$

于是 $a = 0$.

由于 v 鳊霈 1984,**No 1**,23～26.

〔40〕 毛其吉,左铨如,切于已知球的单形宽度,数学研究与评论,1989, No **1**,14～16.

〔41〕 尹景尧,关于单形的一类三角不等式及高维正弦的改进,数学的实践与认识,1987,No **1**,46～51.

〔42〕 苏化明,与单形重心有关的几个几何不等式,数学季刊,1989,No **1**,32～38.

〔43〕 张焱,关于 n 维单形体积的两个不等式,数学的实践与认识, 1988,No **4**,71～74.

〔44〕 周加农,共球诸点相互距离之间的一个不等式,科学通报,1988,**33** (**14**),1045～1047.

〔45〕 刘立、周加农,一个经典不等式的高维推广,数学季刊,1988,**3**(**2**), 99～104.

〔46〕 刘根洪,$\mathbf{E}^n$ 中 n 维单形外接超球面的半径,苏州大学学报,1990, No **1**,1～5.

〔47〕 苏化明,关于单形的两个不等式,科学通报,1987,Vol **32**,No **1**,1 ～3.

〔48〕 马援,Pedoe 不等式的推广,数学通报,Vol **7**(1987).