高等院校信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学模型与方法教程

程理民　吴江　张玉林　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书重点介绍了财经和管理中应用较为广泛的运筹学模型与方法。全书共 10 章, 内容包括: 运筹学模型概论、线性规划模型、整数规划模型、动态规划、对策论模型、网络模型、存储模型、决策分析模型、随机服务系统模型、多目标决策模型。书中力求理论与实际相结合, 备有大量的例题和习题, 不仅适用于课堂教学, 而且便于读者自学。

本书为高等院校财经类和管理类专业本科生教材, 也可选作工商管理硕士(MBA)研究生的教材, 还可供广大管理人员自学与参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学模型与方法教程/程理民等编著. —北京: 清华大学出版社, 1999
高等院校信息管理与信息系统专业系列教材
ISBN 7-302-03788-4

Ⅰ. 运… Ⅱ. 程… Ⅲ. 运筹学-数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 63321 号

出版者: 清华大学出版社 (北京清华大学学研楼, 邮编 100084)
http:// www. tup. tsinghua. edu. cn
印刷者: 北京人民文学印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开 本: 787×1092 1/16 印张: 18. 5 字数: 456 千字
版 次: 2000 年 1 月 第 1 版 2000 年 1 月 第 1 次印刷
书 号: ISBN 7-302-03788-4/TP·2129
印 数: 0001～6000
定 价: 21. 00 元

出 版 说 明

20 世纪三四十年代, 长期摸索前进的古老的计算技术与刚走向成熟的电子技术结合。这一结合, 不仅孕育了新一代计算工具——电子计算机, 还产生了当时谁也没有料到的巨大效应: 电子计算机——这种当初为计算而开发出来的工具, 很快就超出计算的范畴, 成为“信息处理机”的代名词; 人类开始能够高效率地开发并利用信息; 信息对人类社会的作用得以有效地发挥, 并逐步超过材料和能源成为人类社会的重要支柱; 信息产业急剧增长, 信息经济高速发展, 社会生产力达到了新的高度; 人们的信息化意识不断加强, 人类在信息资源方面开始更加激烈的竞争, 社会发展走上信息化轨道。

科学技术是第一生产力, 教育是基础。为了加速社会信息化的过程, 以培养信息资源开发人才为目标的信息管理专业应运而生。

从与信息有关的学科纵向来看, 信息管理处于信息学、信息技术、信息管理、信息经济、信息社会学这个层次的中间, 它下以信息学和信息技术为基础, 上与信息经济和信息社会学相关联。从其涉及的学科横向来看, 它处在管理学、信息科学与技术、系统科学等有关学科领域的交叉点上。它对技术有极高的要求, 又要求对组织的深刻理解和对行为的合理组织, 反映了科学与人本融合的特点。这种交叉和融合正是信息管理的最重要特征, 是别的学科或专业难以取代和涵盖的。

我国的信息管理专业创建于 20 世纪 70 年代末。在不到 20 年的时间里, 已发展到 150 多个点, 成为培养信息化人才的主要摇篮。其发展速度之快、影响之深远已令世人和学术界刮目相看。

然而, 作为一个新的学科, 这个专业的课程体系、教学内容以及教学方法都需要经历一个逐步完善、逐步成熟的过程。特别是教材的建设更需要经过长期的实践和探索。没有这样一个过程, 具有专业特点、符合中国实际的教材是不可能产生的。近 20 年来大家一直在课程体系的完善和建设有自己专业特点的教材方面不断进行探讨。1991 年全国 10 所财经类院校的经济信息管理专业负责人会聚在太原召开第一次教学研讨会。以后, 1993 年在大连、1995 年在武汉、1997 年在烟台, 又有更多的院校参加了这一研讨。在讨论中, 各校的同仁一致认为, 教材建设是当务之急, 它不仅直接体现和落实培养目标, 同时也是学科建设的根本所在, 目前一些课程缺乏专业特点, 简单搬用其他专业教材的状况亟待改变。在武汉会议上, 这一共识得到了与会的国家教委有关部门负责同志的赞许, 清华大学出版社也对此表示了热情的支持。会议确定了首批计划编写八九本教材, 由张基温教授主持实施, 由清华大学出版社出版。在实施过程中, 还聘请了魏晴宇、陈禹两位教授作为顾问。

经过两年多的工作, 在全国许多高等院校的同仁共同努力下, 其中 7 本已完成初稿。我们希望这批教材的问世, 能够起到抛砖引玉的作用, 对各校信息管理专业的建设与发展有所裨益。

近 20 年来的实践使我们对信息管理专业的重要性和困难有了切身的体会。一方面, 席卷全球的信息化大潮把信息管理推到了时代发展的前沿, 信息、信息管理、信息系统已经成

为全社会注视的热点。这为信息管理专业的建设创造了良好的外部条件，提供了难得的机遇。另一方面，信息技术的迅速发展与普及，多种社会经济因素的互相渗透和影响，前所未有的许多新问题、新情况的出现，又给这个专业的发展带来了很大的困难。我们深感责任之重大和任务之艰巨。在这套教材问世之时，我们再次表示这样一个心愿：希望与全国的同行共勉，为祖国信息化建设的宏伟事业多添一块砖，多加一块瓦，多出一份力，培养出更多的优秀人才。

由于如上种种原因，这套教材当然不会是完整的，也不会是完美的。它必然要不断补充、不断修改、不断完善。因此，对于它的任何修改意见，都是我们非常盼望的。希望能够在这套教材出版后，收到更多的意见和建议，使之逐步走向成熟。

全国高等院校计算机基础教育研究会
财经信息管理专业委员会
信息管理与信息系统专业教材编委会
1997 年 9 月

前　　言

在社会主义市场经济中,由于信息对经济活动的引导作用,信息资源已成为现代社会经济发展的支柱资源之一。信息资源的开发和利用有赖于运用现代科学技术所提供的工具和方法,有赖于运用模型对经济活动中各种经济量及大量数据提供诸多功能的分析和加工。运筹学模型的建立和应用将大大增强经济信息处理的能力和管理决策的有效性,从而为解决复杂的经济问题提供科学依据。因此,运筹学是现代经济管理的重要辅助工具。

运筹学是 20 世纪 40 年代开始形成的一门应用科学,它用科学的方法研究现实世界运行系统的现象和其中具有典型意义的优化问题,从中提出具有共性的模型,寻求解决模型的方法。其目的是帮助管理者科学地确定其方针和行动,使之既合乎客观规律,又能获得尽可能好的结果。第二次世界大战以来,发展了许多重要的运筹学模型,这些模型包括确定性和随机性模型。它们从不同的方面描述了运行系统及其运行过程。这些系统和过程出现在许多应用领域,如财政、金融、会计、营销、人力管理、投资经济分析、方案选择、存储控制、生产计划、可靠性工程、维修和更新、时间表和排序、设备的位置和布局等。运筹学模型在经济领域的广泛应用,确立了其在现代经济管理中的重要地位,“运筹学”已成为财经类和管理类专业的专业基础课程和主干课程。

本书按照一定的逻辑系统共分 10 章。在介绍运筹学模型概论后,分别介绍了 9 类重要的运筹学模型及其方法。根据模型的特点、联系所用到的经济数学知识,按确定性模型到随机性模型、单目标模型到多目标模型依次进行介绍。各章包含如下基本内容:

· 学习本章的目的和概要;
· 运筹学模型的对象、思想方法和主要应用范围;
· 建立运筹学模型所需要的假设条件;
· 运筹学模型的结构和求解方法;
· 运筹学在经济管理中的应用实例;
· 建模和求解模型的练习题。

本书的目的在于向财经和管理类专业的学生介绍在经济管理决策活动中应用较多的运筹学模型及其方法,培养学生对实际问题的建模能力,并能借助于计算机软件,迅速地进行求解,为管理决策者提供决策依据。本书在比较系统地和深入浅出地介绍运筹学模型基本知识的同时,注意理论与应用相结合。因此,本书注重于模型方法的介绍和实际应用,而不去刻意追求深奥的数学证明,并且尽量通过经济活动中的实例引入概念和说明问题,使学生在学习运筹学模型时能够置身于对有关信息进行处理的决策活动之中。同时,本书还介绍求解模型的算法与借助的计算机软件,进一步强化学生使用计算机的能力。本书内容全部讲授约需 96 学时。由于各类模型具有一定的独立性而采用了板块组合,因此,可根据专业所侧重的经济应用领域的需要以及具体教学目的和学时的要求,有选择地组合部分类型的模型,组成一个相对完整的运筹学模型体系。

参加本书编写的有江西财经大学程理民(第 1, 3, 5, 6 章)、江西财经大学吴江(第 4, 7,

8, 9, 10 章)、扬州大学税务学院张玉林(第 1, 2 章及附录)。全书由程理民进行了统稿和审定。本书的编写得到江西财经大学科研处和信息学院的大力支持, 其中刘满凤、杨波、袁捷敏老师做了许多有益的工作, 在此一并致谢。

本书是为高等院校财经类和管理类专业本科生编写的教材, 也可选作为工商管理硕士研究生的教材。由于编者水平有限, 书中存在不少疏漏和不足, 敬请读者批评和指正。

目　　录

第 1 章　运筹模型概论

1.1　运筹学的历史与性质

运筹学的早期工作及其历史可追溯到 1914 年, 当时兰彻斯特(Lanchester)提出军事运筹学的战斗方程. 1917 年, 排队论的先驱者丹麦工程师埃尔朗(Erlang)在哥本哈根电话公司研究电话通信系统时, 提出了排队论的一些著名公式. 存储论的最优批量公式是在 20 世纪 20 年代初提出的. 在商业方面列温逊在 20 世纪 30 年代已用运筹思想分析商业广告、顾客心理. 线性规划是丹青格(G. B. Dantzing)在 1947 年发表的成果, 所解决的问题是美国空军军事规划时提出的, 创造性地提出了求解线性规划问题的单纯形方法. 早在 1939 年苏联的学者康托洛维奇(Л. В. КАНТОРОВИЧ)在解决工业生产组织和计划问题时, 已提出了类似线性规划模型, 并给出了"解乘数法"的求解方法, 可惜当时未被重视.

运筹学作为一门学科诞生于 20 世纪 30 年代末期, 通常认为运筹学的活动是第二次世界大战早期从军事部门开始的. 当时, 英国为了研究"如何最好地运用空军及新发明的雷达保卫国家", 成立了一个由各方面专家组成的交叉学科小组, 这就是最早的运筹学小组. 它的任务是进行"作战研究"(operational research), 后来, 美国从事这方面研究的科学家又称之为"O. R., operations research", 该名字广泛使用至今. O. R. 的中文译名"运筹学"则是出自《史记》卷八的"高祖本记"中刘邦的一句话:"夫运筹于帷幄之中, 决胜于千里之外, 吾不如子房". 借用了其中的"运筹"二字作为 O. R. 的中文译名倒也十分恰当, 说明运筹学不只是数学, 还含有决策、规划的意思.

第二次世界大战期间, 英国和美国的军队中都有运筹学小组, 它们研究诸如护航舰队保护商船队的编队问题; 当船队遭受德国潜艇攻击时, 如何使船队损失最小的问题; 反潜深水炸弹的合理起爆深度问题; 稀有资源在军队中的分配问题等. 研究了船只受到敌机攻击时应采取的策略, 它们提出了大船应急转向, 小船应缓慢转向的躲避方法, 该研究成果使船只的中弹率由 47% 降到 29%. 研究了反潜深水炸弹的合理起爆深度后, 德国潜艇的被摧毁数增加到 400%. 当时的英国空中战斗、太平洋岛屿战斗、大西洋北部战斗等一系列战斗的胜利, 被公认为与运筹学密切相关. 运筹学在军事上的显著成功, 引起了人们广泛的关注. 第二次世界大战结束后, 运筹学很快深入到工业、商业、政府部门等, 并得到了迅速发展. 战后, 在英、美军队中相继成立了更为正式的运筹研究组织. 以兰德公司(RAND)为首的一些部门开始着重研究战略性问题, 如未来的武器系统的设计和其可能合理运用的方法. 例如, 为美国空军评价各种轰炸机系统, 讨论未来的武器系统和未来战争的战略. 到 20 世纪 50 年代, 由于开发了各种洲际导弹, 到底发展哪种导弹, 运筹学界也投入了争论; 到 20 世纪 60 年代, 参与了战略力量的构成和数量问题研究等.

在 20 世纪 50 年代中期, 钱学森、许国志等教授全面介绍运筹学, 并结合我国的特点在国内推广应用. 1957 年, 我国在建筑业和纺织业中首先应用运筹学; 从 1958 年开始在交通运输、工业、农业、水利建设、邮电等方面陆续得到推广应用. 比如, 粮食部门为解决粮食的合

理调运问题,提出了“图上作业法”,我国的运筹学工作者从理论上证明了它的科学性. 在解决邮递员合理投递路线时,管梅谷教授提出了国外称之为“中国邮路问题”的解法. 从 20 世纪 60 年代起,运筹学在钢铁和石油部门开始得到了比较全面、深入的应用. 从 1965 年起统筹法在建筑业、大型设备维修计划等方面的应用取得可喜的进展;1970 年在全国大部分省、市和部门推广优选法;70 年代中期,最优化方法在工程设计界受到了广泛的重视,并在许多方面取得成果;排队论开始应用于矿山、港口、电信及计算机设计等方面;图论用于线路布置、计算机设计、化学物品的存放等;70 年代后期,存储论在应用汽车工业等方面获得成功. 近年来,运筹学已趋向研究和解决规模更大、更复杂的问题,并与系统工程紧密结合. 在此期间,以华罗庚教授为首的一大批数学家加入到运筹学的研究队伍,使运筹学的很多分支很快跟上当时的国际水平.

从以上可见,为运筹学的建立和发展做出贡献的有物理学家、经济学家、数学家、其他专业的学者、军官和各行业的实际工作者.

运筹学是一门应用科学,至今还没有统一且确切的定义. 我们给出以下几个定义来说明运筹学的性质和特点.

莫尔斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)的定义是:“运筹学是为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法.”它首先强调的是科学方法,其含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用,而是可用于整个一类问题上,并能传授和有组织的活动. 它强调以量化为基础,必然要运用数学. 但任何决策都包含定量和定性两方面,而定性方面又不能简单地用数学表示. 如政治、社会等因素,只有综合多种因素的决策才是全面的. 运筹学工作者的职责是为决策者提供可以量化方面的分析,指出那些定性的因素.

另一定义是:“运筹学是一门应用科学,它广泛地应用现有科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量的依据.”该定义表明运筹学具有多学科交叉的特点,如综合运用经济学、心理学、物理学、化学中的一些方法. 运筹学强调最优决策.“最”是过分理想了,在实际生活中往往用次优、满意等概念代替最优.

又一定义是:“运筹学是一种给出问题坏的答案艺术,否则的话,问题的结果会更坏.”

最早建立运筹学会的国家是英国(1948 年),接着是美国(1952 年)、法国(1956 年)、日本和印度(1957 年)等. 到 1986 年为止,国际上已有 38 个国家和地区建立了运筹学会及类似的组织. 我国的运筹学会成立于 1980 年. 在 1959 年,由英、美、法三国的运筹学会发起成立了国际运筹学联合会(IFORS),以后各国的运筹学会纷纷加入,我国于 1982 年加入该会. 此外还有一些地区性组织,如欧洲运筹学协会(EURO)成立于 1976 年,亚太运筹学协会(APORS)成立于 1985 年.

为了有效地应用运筹学,前英国运筹学学会会长汤姆林森(Tomlinson)提出六条原则:

(1) 合伙原则　是指运筹学工作要和各方面的人士,尤其是同实际部门工作者合作.

(2) 催化原则　在多学科共同解决某问题时,要引导人们改变一些常规的看法.

(3) 互相渗透原则　要求多部门彼此渗透地考虑问题,而不是只局限于本部门.

(4) 独立原则　在研究问题时,不应受某人或某部门的特殊政策所左右,应独立工作.

(5) 宽容原则　解决问题的思路要宽,方法要多,而不是局限于某种特定的方法.

(6) 平衡原则　要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡.

1.2　运筹学模型及其研究的特点

运筹学在解决实际问题的过程中,其核心问题是建立模型. 整个过程的主要步骤如下.

1. 提出问题,明确目标

解决实际问题总是从对现实系统的详细分析开始. 通过对系统中错综复杂的现状分析,找出影响系统的主要问题,提出要解决的问题. 如果主要问题有多个,就要把急待解决的最主要的问题摆在首位. 通过对问题的深入分析,明确主要目标、主要变量和参数以及它们的变化范围,弄清它们之间的相互关系. 同时,还要对解决所提出问题的困难程度,可能花费的时间与成本以及获得成功的可能,从技术、经济和操作的可行性等方面进行分析,做到心中有数,目的更明.

2. 构建模型

运筹学的一个显著特点就是通过模型来描述和分析所提出问题范围内的系统状态. 构建模型是运筹学研究的关键步骤. 运筹学中的模型主要有像形模型、模拟模型和数学模型三大类型,并以数学模型为主. 由于模型代表着所研究的实际问题中最本质、最关键和最重要的基本状态,它必然是对现实情况的一种抽象,不可能完全准确地反映实际问题. 因此,在建造模型时,往往要根据一些理论的假设或设立一些前提条件对模型进行必要的抽象和简化.

在建立模型前,必须搜集和掌握与问题有关的数据信息资料,对其进行科学地分析和加工,以获得建模所需要的各种参数.

运筹学的数学模型一般包括:(1)一组需要通过求解模型确定的决策变量;(2)一组反映系统逻辑和约束关系的约束函数;(3)反映决策目标的目标函数;(4)与系统密切相关的各种参数.

模型的构造是一门基于经验的艺术,既要有理论作指导,又要靠实践积累建模的经验,切忌把运筹学模型硬套某些问题. 建模时不能把与问题有关的所有因素都考虑进去,只能暂时不考虑非主要因素,而抓住主要因素;否则,模型将会过于复杂而不便于分析和计算. 同时,模型的建立不是一个一次性的过程,一个好的模型往往要经过多次修改才可能符合实际情况. 构建运筹学模型一要尽可能简单;二要能较完整地描述所研究的问题.

3. 求解与检验

建模后,要对模型进行求解计算,其结果是解决问题的一个初步方案. 此方案是否满意,还需检验. 如果不能接受,就要考虑模型的结构和逻辑关系的合理性、采用数据的完整性和科学性,并对模型进行修正或更改. 只有经过反复修改验证的模型,才能最终给管理决策者提供一项既有科学依据,又符合实际的可行方案. 值得一提的是,由于模型和实际存在差异,由模型求解所得的最优解有可能不是真实系统中问题的最优解,它可能只是一个满意解. 因此,运筹学模型求解的结果只能提供管理决策者最终决策的一个参考.

4. 结果分析与实施

借助模型求出结果,不是运筹学研究的终结,还必须对结果进行分析,对求解出的结果,决不能仅仅理解为一个或一组最优解. 对结果进行分析,要让管理人员和建模人员共同参与. 要让他们了解求解的方法步骤,对结果赋予经济含义,并从中获取求解过程中提供的多种宝贵的经济信息,使双方对结果取得共识. 让管理人员参加对结果分析的全过程,有利于

掌握分析的方法和理论,便于以后完成日常分析工作,保证结果分析的真正实施.

对结果分析的实施,关系到被研究系统总体效益能否有较理想的提高,也是运筹学研究的最终目的.因此,在实施过程中,不仅要求加强系统内部科学管理,保证按支持结果的管理理论和方法进行,而且要求管理人员密切关注系统外部的市场需求、价格波动、资源供给和系统内部的情况变化,以便及时调整系统的目标、模型中的参数等.从某种意义上说,将分析结果成功地实施,是运筹学研究的最重要的一步.

运筹学发展到今天,内容已相当丰富,分支也很多,可以根据所解决问题的主要特征将其分为两大类:确定型模型和概率型模型.确定型模型主要包括:线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规则、图与网络;概率型模型主要包括:决策论、对策论、排队论、存储论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等.

运筹学研究问题具有以下特点:

(1) 面向实际,从全局追求总体效益最优.运筹学是为决策寻找科学依据的,其最终目的是为解决企业(或系统)实际问题提供决策方案.它依赖于与问题相关的信息资料,用系统的观点分析企业(或系统)时,着眼于全局,而不是某个局部,通过协调各部门之间的关系,帮助企业(或系统)决策者用全局的观点加强对各部门的管理,使整个企业(或系统)的总体效益达到最优.

(2) 借助于模型,用定量分析的方法,合理解决实际问题.在解决企业(或系统)问题的过程中,运筹学运用系统分析的方法,构建一个能合理反映实际问题的模型,并用数学方法和技巧进行定量分析,其结果将是解决实际问题的较好方案.

(3) 多学科专家集体协作研究.运筹学从它问世之日起就是由许多知识专长不同的人共同努力而取得成果的.这是因为要解决的实际问题来自于各行各业,在构建与求解模型时,不可避免地要涉及到各方面的科学技术知识和方法.尤其是那些大而复杂的系统,往往与政治、经济、技术、社会、心理、生态等多种因素密切相关。而具备运筹学知识的人又不可能对各个领域都很精通,这就需要有多学科专家的集体智慧共同努力,加上企业决策者的直接参与,才有可能较好地解决问题.

(4) 电子计算机是不可缺少的工具.近50年来,随着电子计算机的发展,使许多运筹学方法得以实现和发展.没有电子计算机,运筹学只是一种理论科学,不会像今天这样成为广泛应用、不断发展的应用学科.在解决实际问题时,应用计算机既可避免在利用模型进行求解时大量重复计算的劳动,又可利用它对某些实际问题进行仿真模拟,达到解决问题的目的.因此,电子计算机是运筹学研究不可缺少的工具.

1.3 运筹学模型的应用及其在经济信息管理中的作用

近几十年来,运筹学模型已广泛应用于许多领域,深入到国民经济的多个方面,诸如生产计划管理、市场预测与分析、资源分配与管理、工程优化设计、运输调度管理、库存管理、企业管理、区域规划与城市管理、计算机与管理信息系统等.随着社会经济和计算机的迅速发展,运筹学模型在经济管理中的作用将越来越受到重视,应用运筹学模型的领域越来越广泛.

从运筹学模型的构建与应用的整个过程可以看出,提出问题和明确目标依赖于企业对

系统外部环境和内部管理经济信息的掌握; 构建模型需要所提问题的有关(经过科学加工处理的)数据信息作支撑; 求解模型的结果又产生新的经济信息, 它必须用现实环境作检验; 在对结果分析和实施中更需要密切关注整个内部经济活动和外部市场动态的经济信息, 并及时反馈给企业的管理决策者, 以使运筹学模型保持适应外部市场和企业内部经济环境的动态平衡. 缺乏经济信息的支持, 运筹学模型将不可能达到预期的目标. 它们之间的关系如图 1. 1 所示。

图 1. 1

总之, 运筹学模型的构建和应用离不开过去、现在和将来(通过预测获得) 有关的经济信息. 这些宝贵的信息获取来自于企业的管理信息系统.

应用运筹学模型, 强烈要求获取的经济信息具有针对性、准确性和时效性. 运筹学模型仅仅为企业的管理决策者提供一个或多个参考方案, 只有企业的经济管理信息系统获取需要的信息量越大, 准确度越高, 时效性越强, 决策者才可能有正确的决策, 所选用的方案才会有最佳的效果. 为此, 企业必须加强管理信息系统的建设, 强化管理信息系统处理经济信息的科学性和高效性. 因此, 运筹学模型的应用必将促进企业经济信息管理的现代化和科学化.

第 2 章　线性规划模型

2.1　引　　言

在经济生活中,经常会遇到在有限的资源(如人力、原材料、资金等)情况下,如何合理安排,而使效益达到最大;或者对给定的任务,如何统筹安排现有的资源,完成给定的任务而使花费最小.这类现实中的优化问题,都可以用线性规划的数学模型来描述.

线性规划是运筹学的重要分支,也是运筹学最基本的部分.20 世纪 30 年代末,前苏联学者康托洛维奇首先研究了线性规划问题,并提出了解线性规划问题的"解乘数法".随后许多学者也对此问题做了深入研究.特别是从 1947 年美国学者丹青格提出求解线性规划的一般方法——单纯形方法后,线性规划的理论和方法趋向成熟.

线性规划应用极其广泛,从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策领域都可以发挥作用.它是现代科学管理的一种重要手段.

1961 年提出目标规划,它的应用范围也极其广泛,深为管理者所重视.

我们先看两个例子。

例 1　某工厂生产甲、乙两种产品.每件产品的利润、所消耗的材料、工时及每天的材料限额和工时限额,如表 2.1 所示.试问如何安排生产,使每天所得的利润为最大?

表　2.1

	甲	乙	限额
材料	2	3	24
工时	3	2	26
利润(元/件)	4	3	

这是一个生产计划问题.可用如下数学模型描述.设每天生产甲、乙两种产品分别为 x_1 件和 x_2 件,则该问题的数学模型是求一组变量 x_1, x_2 满足

约束条件:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 26$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$

且使目标函数 $Z = 4x_1 + 3x_2$ 的值达到最大.

即

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 26 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

其中"s.t."是英文"subject to"的缩写.

例 2　某公司经销某种产品,该产品由 3 个生产点 A_1, A_2, A_3 生产,日产量为 $A_1 = 60$

吨, $A_2=40$ 吨, $A_3=60$ 吨, 分别销往 4 个销售点 B_1, B_2, B_3, B_4, 各销地日销量为: $B_1=30$ 吨, $B_2=50$ 吨, $B_3=40$ 吨, $B_4=40$ 吨. 已知每吨产品从各生产点到各销售地的运价如表 2.2 所示. 问如何调运, 保证产销平衡且总运费最小?

表 2.2 (单位: 百元/吨)

单位运价 产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产 量
A_1	5	6	10	3	60
A_2	4	1	9	7	40
A_3	4	2	3	8	60
销量	30	50	40	40	

这是一个产销平衡的运输问题, 即各产地产量的总和等于各销地销量的总和. 设从生产点 A_i 到销售点 B_j 的调运量为 $x_{ij}(i=1,2,3, j=1,2,3,4)$, 则该问题的数学模型为:

$$\min Z = 5x_{11}+6x_{12}+10x_{13}+3x_{14}+4x_{21}+x_{22}+9x_{23}+7x_{24}$$
$$+4x_{31}+2x_{32}+3x_{33}+8x_{34},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=40 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=60 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=30 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=50 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=40 \\ x_{ij}\geq 0\ (i=1,2,3, j=1,2,3,4)\end{cases}.$$

上述例 1 和例 2 中两个不同类型的数学模型具有如下共同特征:

(1) 有决策变量(如例 1 中的 x_i, 例 2 中的 x_{ij}), 约束条件和目标函数等三个要素;

(2) 目标函数是决策变量的线性函数, 约束条件是决策变量的线性等式或不等式.

同时满足以上特征的这类优化问题, 称为线性规划问题.

线性规划问题的求解过程本质上是迭代, 因此求解一个规模稍大的实际问题必须借助于计算机. 目前, 电子计算机已能处理具有成千上万个约束条件和决策变量的大型线性规划问题. 因此, 随着我国经济建设的不断深入发展, 电子计算机的普及与应用, 线性规划作为现代科学管理的手段, 必将愈来愈广泛地得到应用.

本章主要介绍线性规划、运输问题、目标规划和 DEA 问题的数学模型及其解法.

2.2 线性规划的数学模型

2.2.1 线性规划问题的标准型

线性规划问题有各种不同形式, 其目标函数可以是实现最大化, 也可以是实现最小化;

约束条件可以是"$\leq$",也可以是"$\geq$",还可以是"$=$"的形式;决策变量可以非负,也可以是无符号限制.归纳起来,线性规划问题的数学模型的一般形式为:

$$\max(\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq)\, b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq)\, b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq)\, b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0. \end{cases} \begin{matrix} \\ (2.2) \\ \\ \\ (2.3) \end{matrix}$$

为以后研究之便,我们规定如下标准型简写为

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

令

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots, P_n), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此,标准型可描述为向量形式:

$$\max\ Z = CX,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j = b \\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

也可用矩阵形式描述:

$$\max\ Z = CX,$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0.$$

称系数矩阵 A 为资源消耗系数矩阵,b 为资源限量向量,C 为价值向量,X 为决策变量向量.

同时,我们对标准型还作如下假定:

(1) 矩阵 A 的秩 $\mathrm{rank}(A) = m$, $0 < m < n$. 这就是说,标准型中的约束方程彼此独立,没有多余方程,且约束方程个数小于变量的个数.

(2) $b \geq 0$. 若有 $b_i < 0$,则可对第 i 个约束方程两边同时乘以 -1 即可.

以下讨论如何将线性规划问题的一般形式化为标准型.

(1) 如果目标函数为最小化,即 $\min\ Z = CX$.

只须令 $Z' = -Z$，化为 $\max Z' = -CX$ 即可.

(2) 如果约束方程为不等式.

①"$\geq$"约束

不等式的左端 - 某松弛变量 = 右端 (该松弛变量 ≥ 0).

②"$\leq$"约束

不等式的左端 + 某松弛变量 = 右端 (该松弛变量 ≥ 0).

其中松弛变量的价值系数为 0.

③ 如果变量 x_k 无非负性限制，则可令 $x_k = x_k' - x_k''$，其中 $x_k' \geq 0$，$x_k'' \geq 0$

例 3 化例 1 的数学模型为标准型.

解 例 1 的数学模型为

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2,$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 26 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

对两个约束不等式分别加上一个松弛变量 x_3, x_4，得如下标准型:

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4,$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_2 + 2x_2 + x_4 = 26 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

例 4 化下述问题为标准型.

$$\min Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3,$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_3 \geq 0, x_2 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

请读者用上述方法完成之.

参考答案为

$$Z' = -Z,$$
$$\max Z' = x_1 - 2(x_2' - x_2'') + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5,$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + 2(x_2' - x_2'') + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - (x_2' - x_2'') + x_3 - x_5 = 2 \\ -3x_1 + (x_2' - x_2'') + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

2.2.2 线性规划问题解的概念

对于线性规划问题

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.6}$$

可行解: 满足约束条件(2.5)和(2.6)的解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 称为可行解.

最优解: 满足(2.4)的可行解称为最优解.

基: 设 A 是约束方程组(2.5)的 $m \times n$ 阶系数矩阵, rank(A) = m, 如果 B 是矩阵 A 中的一个 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵($|B| \neq 0$), 则称 B 是线性规划问题的一个基.

基向量与非基向量: 基 B 中的列向量称为基向量, 基 B 中含有 m 个基向量. 矩阵 A 中除基 B 之外的各列即为非基向量, A 中共有($n - m$)个非基向量.

基变量与非基变量: 与基向量 P_j 对应的变量 x_j 称为基变量; 否则称为非基变量.

基解: 令所有非基变量为 0, 求出的满足(2.5)的解称为基解.

基可行解与可行基: 满足(2.6)的基解称为基可行解. 对应基可行解的基, 称为可行基. 基可行解的数目 ≤ 基解的数目 ≤ C_n^m.

基本最优解与最优基: 满足(2.4)的基可行解称为基本最优解, 对应基本最优解的基称为最优基.

退化的基可行解: 基变量中含有零分量的基可行解, 称为退化的基可行解; 否则称为非退化的基可行解.

以下讨论时, 一般都假设不出现退化的情况.

图 2.1 表示了线性规划问题解之间的关系.

图 2.1

2.2.3 两个变量的线性规划问题的图解法

图解法简单直观, 有助于理解线性规划问题解的基本概念和定理.

图 2.2

1. 图解法步骤

下面结合例 1 的求解来说明.

第一步: 在直角坐标系中分别作出各约束条件, 求出可行域. 据直线分平面为二部分, 分析得可行域, 如图 2.2 阴影部分, 即四边形 $OQ_1Q_2Q_3$.

第二步: 作出一条目标函数等值线, 并确定 Z 值增大方向, 如图 2.2 所示.

第三步: 沿 Z 值增大方向移动, 当移至 $Q_2(6, 4)$ 点时, Z 值为最大, $Z^* = 36$.

2. 图解法的直观结论

(1) 解的情况

① 有唯一最优解.

如例 1 具有唯一最优解, Q_2 点, 即 $X^* = (6, 4)^T$, $Z^* = 36$.

② 有多重最优解.

如将例 1 的目标函数改为 $Z = 4x_1 + 6x_2$, 约束条件不变, 则图 2.2 中线段 Q_3Q_2 上的任一点均为最优解点.

③ 无界解.

例

$$\max Z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

见图 2.3.

④ **无可行解.**

例

$$\max Z = x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

见图 2.4, **可行域为空集.**

图 2.3　　　　　　　　**图** 2.4

(2) **最优解可在可行域的某顶点上达到**

直观上可以得出, 若在内部某点达到最优, 则过该点的目标函数的等值线(或等值面)与边界的交点(或交线)也为最优解. 实际上, 后面我们可以进一步得到这样的结论: 如果线性规划问题有最优解, 则必可在可行域的某顶点达到.

2.2.4 基本定理

为了介绍基本定理的需要, 先介绍以下概念.

凸集: 设 K **是** n **维欧氏空间** E^n **中的一点集, 若任意两点** $X^{(1)}, X^{(2)} \in K\ (X^{(1)} \neq X^{(2)})$ **连线上的一切点** $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \in K\ (0 \leq \alpha \leq 1)$, **则称** K **为凸集.**

凸组合: 设 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ **是** n **维欧氏空间** E^n **中的** k **个点, 若存在** $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ (**其中** $0 \leq \mu_i \leq 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$; **且** $\sum \mu_i = 1$) **使** $X = \mu_1 X^{(1)} + \mu_2 X^{(2)} + \cdots + \mu_k X^{(k)}$, **则称** X **为** $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(k)}$ **的凸组合.**

极点: 设 K **是凸集,** $X \in K$; **若不能用两个不同的点** $X^{(1)} \in K, X^{(2)} \in K$ **的线性组合表示为** $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} (0 \leq \alpha \leq 1)$, **则称** X **为** K **的一个极点.**

定理 1　**若线性规划问题存在可行域, 则其可行域为凸集. 即**

$D = \{X \mid AX = b, X \geq 0\}$ **为凸集.**

证　任取 $X^{(1)} \in D, X^{(2)} \in D$ **且** $X^{(1)} \neq X^{(2)}$,

则

$$AX^{(1)} = b, \quad X^{(1)} \geq 0 ,$$

$$AX^{(2)} = b, \quad X^{(2)} \geq 0 .$$

令 X **是** $X^{(1)}$ **和** $X^{(2)}$ **连线上任意一点, 即有** $0 \leq \mu \leq 1$,

使 $$X=\mu X^{(1)}+(1-\mu)X^{(2)}\geq 0,$$
而 $$AX=A[\mu X^{(1)}+(1-\mu)X^{(2)}]$$
$$=\mu AX^{(1)}+(1-\mu)AX^{(2)}=\mu b+(1-\mu)b=b,$$
即 $$AX=b.$$
从而 $X\in D$, 由定义知 D 为凸集. □

定理 2 线性规划问题的可行解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为基可行解的充分必要条件是 X 的正分量对应的系数列向量是线性无关的.

证明 (1) 必要性 由基可行解的定义可知.

(2) 充分性 设可行解 X 的正分量为前 k 个, 其对应的线性无关列向量为 $P_1,P_2,\cdots,P_k$, 由于 $\text{rank}(A)=m$, 故 $k\leq m$. 当 $k=m$ 时, 它们恰为一基, 从而 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T$ 为相应的基可行解; 当 $k<m$ 时, 由线性代数理论知, 一定可以从其余的$(n-k)$个列向量中取出$(m-k)$个列向量与 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 构成最大线性无关组, 其对应的基解恰为 X, 据定义它是基可行解(退化的). □

定理 3 线性规划问题的基可行解 X 对应于可行域的极点.

该定理的证明思路为: 不是基可行解, 一定不是极点; 不是极点, 也一定不是基可行解. 证明可参考文献[3], 这里略去.

引理 若 K 是有界凸集, 则任何一点 $X\in K$, 一定可表示为 K 的极点的凸组合.

证明略.

定理 4 若线性规划问题的可行域有界, 则其目标函数最优值一定可以在其可行域的极点上达到.

证 设 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(k)}$ 是可行域所有的极点, 且目标函数值在某一可行解 $X^{(0)}\in D$ 达到最优 $Z^*=CX^{(0)}$. 若 $X^{(0)}$ 是极点, 立得结论. 若 $X^{(0)}$ 不是极点, 则由引理知 $X^{(0)}$ 可表示为 $X^{(1)}, X^{(2)},\cdots, X^{(k)}$ 的凸组合, 即

$$X^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\mu_i X^{(i)}\leq\mu_i\leq 1,(i=1,2,\cdots,k),\ \sum_{i=1}^{k}\mu_i=1.$$

从而有 $$CX^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\mu_i CX^{(i)}.$$

令 $$CX^{(m)}=\max(CX^{(1)},CX^{(2)},\cdots,CX^{(k)}),$$

由于 $$CX^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\mu_i CX^{(i)}\leq\sum_{i=1}^{k}\mu_i CX^{(m)}=CX^{(m)},$$

即 $$CX^{(0)}\leq CX^{(m)}.$$

另一方面, 由于 $CX^{(0)}$ 是最优值, 故有 $CX^{(0)}\geq CX^{(m)}$,

从而 $$CX^{(0)}=CX^{(m)}.$$

即目标函数在极点 $X^{(m)}$ 处也取得最优值 Z^*. □

归纳上述定理, 对线性规划问题有以下结论:

(1) 可行域若为非空, 则一定为凸集.

(2) 每个基可行解对应于可行域的一个极点, 极点数为有限个($\leq C_n^m$).

(3) 若存在最优解, 必定可在某极点得到.

从理论上讲, 采用"枚举法"找出所有基可行解, 并一一比较, 一定可找到最优解. 但当

m, n 较大时, 这种办法是不经济和不可取的. 下面继续讨论, 如何有效地找到最优解的方法, 其基本思想是从一个基可行解向另一个基可行解的迭代(极点到极点), 这个方法就是著名的单纯形方法.

2.3 单纯形方法

2.3.1 单纯形表

在线性规划问题的标准型:

$$\max Z = CX,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0. \end{cases}$$

中, 不妨设 B 是一个可行基, 于是系数矩阵 A 可分块为(B, N). 不失一般性假定 $B=(P_1, \cdots, P_m)$. 对应于 B 的基变量 $X_B=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$; $N=(P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots, P_n)$, 对应的非基变量 $X_N=(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)^T$.

则

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}.$$

相应地有 $C=(C_B, C_N)$, 其中 C_B 为基变量 X_B 的系数行向量, C_N 是非基变量 X_N 的系数行向量. 于是原问题化为

$$\max Z = CX = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix},$$
$$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$
$$X_B, X_N \geq 0.$$

即

$$\max Z = C_B X_B + C_N X_N, \tag{2.7}$$
$$BX_B + NX_N = b \tag{2.8}$$
$$X_B, X_N \geq 0. \tag{2.9}$$

对(2.8)式的两边同时左乘 B^{-1}, 得

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N, \tag{2.10}$$

并代入(2.7), 得

$$Z = C_B B^{-1}b - (C_B B^{-1}N - C_N)X_N. \tag{2.11}$$

令非基变量 $X_N = 0$, 得 $X_B = B^{-1}b$, 从而相应基可行解为

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

目标函数取值为 $Z = C_B B^{-1}b$. 由于 $C_B B^{-1}B - C_B = 0$, 故又有

$$\begin{aligned} Z &= C_B B^{-1}b - (C_B B^{-1}B - C_B)X_B - (C_B B^{-1}N - C_N)X_N \\ &= C_B B^{-1}b - (C_B B^{-1}A - C)X. \end{aligned} \tag{2.12}$$

将(2.10)和(2.11)分别改写为如下形式:

$$X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b \tag{2.13}$$

$$Z + (C_BB^{-1}N - C_N)X_N = C_BB^{-1}b, \tag{2.14}$$

则可得到表 2.3, 并称其为相应于 B 的矩阵形式的单纯形表, 记为 T(B).

表 2.3

	X_B	X_N
$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$
$C_BB^{-1}b$	0	$C_BB^{-1}N - C_N$

令 $\sigma_N = C_BB^{-1}N - C_N$, $\sigma = C_BB^{-1}A - C$ 则(2.12)又可写成

$$Z = C_BB^{-1}b - \sigma_N X_N = C_BB^{-1}b - \sigma X.$$

其中 $$\sigma = (0, \sigma_N),$$

将(2.13)和(2.14)的展开式写出来, 令

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} a_{1m+1} & a_{1,m+2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2m+1} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mm+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$C_BB^{-1}N - C_N = (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \cdots, \sigma_n), \quad C_BB^{-1}b = b_0.$$

则(2.13)和(2.14)又可改写成下述方程组:

$$\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 \qquad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ Z \qquad\qquad\qquad + \sigma_{m+1}x_{m+1} + \sigma_{m+2}x_{m+2} + \cdots + \sigma_n x_n = b_0. \end{array}$$

因此, 相应于表 2.3 有一般形式的单纯形表 T(B) 如表 2.4.

表 2.4

$c_j \rightarrow$			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n
C_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}
Z		b_0	0	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n

比较表 2.4 与表 2.3, 增加了上面一行和最左边一列, 其目的是帮助读者在迭代计算中更迅速准确地算出 b_0 的值. 事实上, $Z = b_0 = \sum_{i=1}^{m} c_ib_i$.

在迭代过程中, 基变量所在的位置并不一定正好在前 m 个位置上, 但总可以通过调换,

重新排列成表 2.4 的形式, 因此具有一般意义. 但在后面求解的实际迭代中, 并不需要这样.

表的最下面一行称为检验数行, 对应于各非基变量 x_j 的检验数为

$$\sigma_j = C_B B^{-1} P_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

不难看出, 在单纯形表 T(B) 中, 对应于基变量 $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$ 的检验数均为 0= (0, 0, ⋯, 0), m 个单位列向量构成单位阵 I.

2.3.2 单纯形法的步骤

下面通过例 1 的求解过程说明单纯形法的步骤.

例 5 对线性规划问题

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 26 \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

引进松弛变量 x_3, x_4, 化为标准型

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_2 + 2x_2 + x_4 = 26 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

第一步: 找出初始可行基, 建立初始单纯形表.

本例中, 取 $B_1 = (P_3, P_4) = I$, 则 $X_{B_1} = (x_3, x_4)^T$, $C_{B_1} = (0, 0)$, $B_1^{-1} = I$, $B_1^{-1}A = A$, $b = B_1^{-1}b = b$, $\sigma = C_{B_1}B_1^{-1}A - C = -C$, $b_0 = C_{B_1}B_1^{-1}b = 0$, 得单纯形表 2.5.

表 2.5

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	24	2	3	1	0	
0	x_4	26	3	2	0	1	
Z		0	-4	-3	0	0	$\leftarrow \sigma$

在初始可行基为单位阵的情况下, 约束方程组中增广阵的数字可直接填入表中各相应的位置, 目标函数非基变量的系数以相反数填入检验数行各相应的位置. 由表 2.5, 有基可行解 $X^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (0, 0, 24, 26)^T$, 相应的目标函数值 $Z^{(1)} = 0$. 但 B_1 是否为最优基? 需要进行最优性检验, 转下一步.

第二步: 最优性检验.

检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = C_B B^{-1} P_j - C_j$, 可能有三种情况:

(1) 若所有的 $\sigma_j \ge 0$, 则基 B 为最优基, 相应的基可行解即为基本最优解, 停止计算(满足最优基定理的非基变量中, 有某非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$, 则该问题有多重最优解).

(2) 若有某 $\sigma_s < 0\ (m+1 \le s \le n)$, 它所对应的列向量的全部分量 $B^{-1}P_s = (a_{1s}, a_{2s}, \cdots,$

$a_{ms})^T \le 0$, 则该线性规划问题的目标函数值无上界, 即无界解, 停止计算.

(3) 若有某个负检验数 $\sigma_j < 0\ (m+1 \le j \le n)$ 所对应的列向量有正分量, 则基 B 不是最优基, 须转入第三步, 进行换基迭代.

在表 2.5 中, 由于 $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$, 且它们对应的列向量均有正分量, 说明增加非基变量 x_1 或 x_2 的值, 可使目标函数值增加. 所以 B_1 不是最优基, 转下一步.

第三步: 换基迭代 .

(1) 确定换入变量 x_s: 取 $s = \min\{j \mid \sigma_j < 0,\ 0 \le j \le n\}$.

(2) 确定换出变量 x_r: 由于受到非负约束 $x_j \ge 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的限制, 故 x_s 不能任意取代现有的基变量. 为此, 按最小比值原则求出主元.

$\theta = \min\limits_i \left\{ \theta_i = \dfrac{b_i}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0 \right\} = \dfrac{b_r}{a_{rs}}$, 确定 x_r 为出基变量, 其中 a_{rs} 为主元.

(3) 以 a_{rs} 为主元, 在单纯形表中进行初等行变换. 即把基变量 x_s 所在的列变为单位列向量,

$$\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } r \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

同时将 X_B 中的 x_r 换为 x_s, 得到新的可行基 $B = (P_1, \cdots, P_{r-1}, P_s, P_{r+1}, \cdots, P_m)$ 和相应的单纯形表 T(B).

重复第二、第三步, 直至获得最优解, 或判断出有无界解, 计算终止.

具体地说, 对于表 2.5, 因为 $s = \min\{j \mid \sigma_1 = -4,\ \sigma_2 = -3\} = 1$, 所以 x_1 为换入变量. 又由 $\theta = \min\left\{ \theta_i = \dfrac{b_i}{a_{is}} \middle| a_{is} > 0 \right\} = \{24/2, 26/3\} = 26/3$, 确定 x_4 为换出基变量, 并以 x_1 所在列和 x_4 所在行的交叉处 $a_{21} = 3$ 为主元素进行迭代, 得表 2.6.

表 2.6

$c_j \to$			4	3	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	24	2	3	1	0	12
0	x_4	26	[3]	2	0	1	26/3
Z		0	-4	-3	0	0	$\leftarrow \sigma_j$
0	x_3	20/3	0	[5/3]	1	-2/3	4
4	x_1	26/3	1	2/3	0	1/3	13
	Z	104/3	0	-1/3	0	4/3	$\leftarrow \sigma_j$

得新基可行解 $X^{(2)} = (26/3, 0, 20/3, 0)^T$, 目标函数取值为 $Z^{(2)} = 104/3$.

同样, 确定 x_2 换入, x_3 换出, 进行迭代, 得表 2.7.

表 2.7

$c_j \to$			4	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
3	x_2	4	0	1	3/5	-2/5	
4	x_1	6	1	0	-2/5	3/5	
Z		36	0	0	1/5	6/5	$\leftarrow \sigma_j$

表中最后一行的所有检验数都已是正数或零,表明目标函数已不能再增大,从而得到基本最优解 $X^* = X^{(3)} = (6, 4, 0, 0)^T$, $Z^* = Z^{(3)} = 36$. **由于** x_3, x_4 **是引进的松弛变量,因此,原问题的最优解为** $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, **最优值为** $Z^* = 36$.

例 6 **求解如下问题**:

$$\max Z = 3x_1 + x_2,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

解 化为标准型

$$\max Z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 . \end{cases}$$

单纯形法迭代如表 2.8 **所示**.

表 2.8

$c_j \to$			3	1	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	4	1	1	1	0	0	4
0	x_4	2	-1	1	0	1	0	-
0	x_5	18	[6]	2	0	0	1	3
Z		0	-3	-1	0	0	0	$\leftarrow \sigma_j$
0	x_3	1	0	2/3	1	0	-1/6	
0	x_4	5	0	4/3	0	1	1/6	
3	x_1	3	1	1/3	0	0	1/6	
Z		9	0	0	0	0	1/2	$\leftarrow \sigma_j$

该问题的基本最优解 $X^* = (3, 0, 1, 5, 0)^T$, **最优值** $Z^* = 9$. **删除松弛变量后,得原问题的最优解为** $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, **目标函数最优值** $Z^* = 9$.

值得注意的是,最终表中有非基变量 x_2 **的检验数为** $\sigma = 0$, **且相应的列分量中含有正分**

量,因此,该问题有多重最优解.事实上,我们在最终表中取 x_2 为进基变量,x_3 为出基变量,迭代一次,得到另一个最优解 $X^* = (5/2, 3/2, 0, 3, 0)^T$, 即 $x_1 = 5/2, x_2 = 3/2, Z^* = 9$.从而它们的凸组合 $X = \alpha X^* + (1-\alpha)X^*\ (0 \le \alpha \le 1)$ 都是最优解,显然有多重最优解.

以上讨论的是求 max Z 问题,如果是求 min Z 问题,则只须分别将最优性检验(1),(2)中的 $\sigma_j \ge 0$ 改为 $\sigma_j \le 0$ 和 $\sigma_j < 0$ 改为 $\sigma_j > 0$,其他条件不变,均有类似结论成立.

2.3.3 用人工变量法找初始可行基

2.3.2 节中介绍的单纯形法,前提是已经具有一个初始可行基,所给例子是易发现一个含有单位矩阵的可行基.而实际的问题可能是,有可行基但却不是一目了然可以得到,甚至问题本身无可行解.有没有一般的方法解决这个问题呢? 有,这就是用人工变量法找出初始可行基.下面先考虑添加人工变量.

设线性规划问题的约束方程组是 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 分别给每一个约束方程加入人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \ge 0$,得

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &&= b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} &&= b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} &&= b_m \\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0; x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \ge 0 .
\end{aligned}$$

显然, $B = (P_{n+1}, P_{n+2}, \cdots, P_{n+m}) = I$,它是以人工变量所在列构成的一个初始可行基,取 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 为基变量.令非基变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为零,得到一个初始基可行解 $X^{(0)} = (0, 0, \cdots, 0, b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$.可以证明,对加入人工变量后的问题,利用前述迭代算法计算后的最终表中,若基变量中不含有非零的人工变量,表明原问题有可行解;否则原问题一定无可行解.

1. 两阶段法

两阶段法方便计算机求解,其方法如下:

第一阶段: 给原问题加入人工变量,构造如下问题:

$$\min W = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m},$$

$$(LP_1)\quad \begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &&= b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} &&= b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} &&= b_m \\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0; x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \ge 0 .
\end{aligned}$$

易证如下结论,用单纯形法求解 LP_1:

(1) 若得到 $W = 0$,则原问题存在基可行解,继续进行第二阶段计算.

(2) 若得到 $W \ne 0$,则原问题无可行解,停止计算.

第二阶段: 将第一阶段得到的最终表删去人工变量列,将目标行的价值系数换为原问题的目标函数的价值系数,作为第二阶段的初始表,继续进行迭代即可.

例 7 求解如下线性规划问题.

$$\min Z = x_1 + 1.5x_2,$$
$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

解 先在上述线性规划问题的约束方程中引入松弛变量 x_3, x_4, 并加入人工变量 x_5, x_6, 得第一阶段的数学模型:

$$\min W = x_5 + x_6,$$
$$(LP_1)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 3 \\ x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

用单纯形法求解, 得第一阶段结果 $W = 0$, 其最优解为

$x_1 = 3/2,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, 过程如表 2.9 所示.

表 2.9

$c_j \to$			0	0	0	0	1	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_5	3	1	3	-1	0	1	0	3
1	x_6	2	[1]	1	0	-1	0	1	2
W		5	2	4	-1	-1	0	0	$\leftarrow \sigma_j$
0	x_2	1	0	[2]	-1	1	1	-1	1/2
1	x_6	2	1	1	0	-1	0	1	2
W		2	0	2	-1	1	0	-2	$\leftarrow \sigma_j$
0	x_2	1/2	0	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	
0	x_1	3/2	1	0	1/2	3/2	-1/2	3/2	
W		0	0	0	0	0	-1	-1	$\leftarrow \sigma_j$

由于 $x_5 = x_6 = 0$, 从而 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3/2, 1/2, 0, 0)$ 是原线性规划问题的一个基可行解.

将第一阶段最终表中的人工变量所在列删去, 并将目标行的各价值系数换为原目标函数对应的价值系数, 进行第二阶段计算, 其结果见表 2.10.

表 2.10

$c_j \to$			1	1.5	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
1.5	x_2	1/2	0	1	-1/2	1/2	
1	x_1	3/2	1	0	1/2	-3/2	
Z		9/4	0	0	-1/4	-3/4	$\leftarrow \sigma_j$

从表 2.10 中知, 已得到最优解: $x_1^* = 3/2, x_2^* = 1/2$, 目标函数 $Z^* = 9/4$.

应当指出, 在第一阶段的最终表中, 有可能出现 $W = 0$, 但在基变量中仍含有取值为零

的人工变量(即退化的基可行解)的情况,此时可继续进行换基迭代,将基变量中的人工变量全部替换为非基变量后,才得到原问题的初始可行基,从而转入第二阶段.

2. 大 M 法

对求最大值的原问题,约束条件中加入人工变量后,取人工变量在目标函数中的价值系数为(- M)(M 为任意大的正数),得新问题:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + (-M)\sum_{i=1}^{m} x_{n+i},$$

$$(LP_M)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0; x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 . \end{cases}$$

为使目标函数实现最大化,迭代过程中必须将人工变量从基变量中换出.一旦全部人工变量变为非基变量,即可得原问题的最优解.

对 LP_M 问题和原 LP 问题,易证如下结论:

在 LP_M 的最终表中,如有人工变量仍为非零的基变量,则原 LP 问题无可行解.

思考题: 试用大 M 法求解如下线性规划问题:

$$\min Z = -3x_1 + x_2 + x_3 ,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 . \end{cases}$$

提示: 对原问题是最小化形式,相应 LP_M 问题也取最小化形式,不同的是人工变量的价值系数取为(+ M).

2.3.4 单纯形法小结

(1) 根据实际问题给出数学模型,化为标准形式,若需要,适当添加人工变量,以松弛变量或人工变量为基变量,列出初始单纯形表.

(2) 对目标函数为求 max 的线性规划问题,单纯形法的计算步骤框图参见图 2.5.

2.3.5 修正单纯形方法

由 2.3.1 节矩阵形式的单纯形表 2.3 知,在整个迭代过程中,现行基的逆是关键.也就是说,利用现行基的逆和模型中的原始数据就可确定迭代过程中所关心的数据.而前面介绍的单纯形法,在迭代过程中,重复计算了许多与迭代过程无关的数字,影响了计算效率,用计算机编程求解时,要占用很多的内存单元.同时,在逐次迭代中会不断增加累积误差,影响计算精度.在表 2.3 的基础上进行研究,提出了修正单纯形法.其计算步骤为:

第一步: 首先构造初始可行基 B,一般情况下取 B 为单位阵,即有 $B^{-1} = B = I$.求出初始解:

图 2.5　单纯形法计算流程框图

$$\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

第二步: **计算单纯形乘子** $Y = C_B B^{-1}$, **并计算非基变量的检验数** σ_N, $\sigma_N = YN - C_N$. **如果** $\sigma_N \geq 0$, **则得到最优解, 停止计算. 否则, 转下一步.**

第三步: **令** $s = \min\{j \mid \sigma_j < 0, 0 \leq j \leq n\}$, **确定** x_s **为换入变量. 并计算** $B^{-1}P_s$ **向量, 如果** $B^{-1}P_s \leq 0$, **那么问题为无界解, 停止计算. 否则转下一步.**

第四步:

计算 $\theta = \min\left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_s)_i} \middle| (B^{-1}P_s)_i > 0 \right\} = \frac{(B^{-1}b)_r}{(B^{-1}P_s)_r}$.

确定相应的基变量 x_r 为换出变量. 于是得到一组新的基变量及新的基矩阵 B_1.

第五步: 计算新的基阵的逆阵 B_1^{-1}, 求出 $B_1^{-1}b$. 返回第二步.

用上面修正的单纯形法求解线性规划问题时, 计算逆矩阵 B_1^{-1} 这一步比较繁琐, 但考虑到上一轮迭代基 B 和下一轮迭代基 B_1 之间只相差一列, 于是有如下求 B_1^{-1} 的简便方法.

即 $B_1^{-1}=EB^{-1}$, 其中 $E=(e_1,\cdots,e_{r-1},\xi,e_{r+1},\cdots,e_m)$, e_i 表示第 i 个位置的元素为 1, 其余为 0 的 m 维单位列向量,

$$\xi=\begin{pmatrix}-a_{1s}/a_{rs}\\-a_{2s}/a_{rs}\\\cdots\\1/a_{rs}\\\cdots\\-a_{ms}/a_{rs}\end{pmatrix}\leftarrow \text{第 } r \text{ 行}.$$

由于初始时 B 为单位阵, 从而 B^{-1} 也为单位阵, 因而修正单纯形法在开始计算时, 不再需要计算基的逆阵了.

下面举例说明修正单纯法的计算步骤.

例 8　用修正单纯形法求解如下线性规划问题.

$$\max Z=4x_1+3x_2,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\le 24\\3x_1+2x_2\le 26\\x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

解　化为标准型

$$\max Z=4x_1+3x_2+0x_3+0x_4,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\qquad=24\\3x_1+2x_2\qquad+x_4=26\\x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{cases}$$

其中　$A=(P_1,P_2,P_3,P_4)=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\3&2&0&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}24\\26\end{pmatrix}$, $C=(c_1,c_2,c_3,c_4)=(4,3,0,0)$.

取初始基　$B_0=(P_3,P_4)=I$, 有 $B_0^{-1}=B_0=I$, $B_0^{-1}b=\begin{pmatrix}24\\26\end{pmatrix}$, $X_{B0}=(x_3,x_4)^T$, $C_{B0}=(0,0)$, $X_{N0}=(x_1,x_2)^T$, $C_{N0}=(4,3)$.

第一轮迭代计算:

因为　$Y_0=C_{B0}B_0^{-1}=0$, $\sigma_{N0}=Y_0N_0-C_{N0}=(-4,-3)=(\sigma,\sigma)$, 所以, 确定 x_1 为换入变量. 计算　$\theta=\min\left\{\frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_1)_i}\middle|(B_0^{-1}P_1)_i>0\right\}=\min(12,26/3)=26/3$. 于是 x_4 为换出变量. 从而得新基 $B_1=(P_3,P_1)$, $X_{B1}=(x_3,x_1)^T$, $X_{N1}=(x_2,x_4)^T$, $C_{B1}=(0,4)$, $C_{N1}=(3,0)$.

由于 $\xi=\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\end{pmatrix}$, 所以, $B_1^{-1}=E_1B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2/3\\0&1/3\end{pmatrix}$, $X_{B1}=B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}1&-2/3\\0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24\\26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20/3\\26/3\end{pmatrix}$.

第二轮迭代计算:

因为 $Y_1 = C_{B1}B_1^{-1} = (0, 4/3)$, $\sigma_{N1} = Y_1N_1 - C_{N1} = (0, 4/3)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (3, 0) = (-1/3, 4/3) = (\sigma_1, \sigma_2)$, **所以, 确定** x_2 **为换入变量**.

又 $B_1^{-1}P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} > 0$, $\theta = \min\left\{\dfrac{(B_1^{-1}b)_i}{(B_1^{-1}P_2)_i} \middle| B_1^{-1}P_2 > 0\right\} = \min(20/3 \big/ 5/3, 26/3 \big/ 2/3) = \min(4, 13) = 4$.

于是 x_3 **为换出变量. 由此得新基** $B_2 = (P_2, P_1)$. **此时** $X_{B2} = (x_2, x_1)^T$, $X_{N2} = (x_3, x_4)^T$, $C_{B2} = (3, 4)$, $C_{N2} = (0, 0)$.

由于 $\xi = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2^{-1} = E_2B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $X_{B2} = B_2^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

第三轮迭代计算:

因为 $Y_2 = C_{B2}B_2^{-1} = (3, 4)\begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = (1/5, 6/5)$, $\sigma_{N2} = Y_2N_2 - C_{N2} = (1/5, 6/5)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (0, 0) = (6/5, 1/5) \geq 0$, **所以**, B_2 **为最优基, 原问题的最优解为**

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{最优函数值 } Z^* = Y_2b = (1/5, 6/5)\begin{pmatrix} 24 \\ 26 \end{pmatrix} = 36.$$

从上例的迭代计算可以看出, 修正单纯形法比较适用于计算机编程计算.

2.4 对 偶 理 论

2.4.1 对偶问题的提出

例 9 **对本章的例** 1, **现在从另一个角度来讨论. 假设工厂考虑不安排生产, 而是出售材料, 出租工时, 问如何定价, 可使工厂获利不低于安排生产所获得的收益, 且又能使这些定价具有竞争力?**

设出售材料的定价为每单位 y_1 **元, 出租工时的定价为每工时** y_2 **元, 从工厂考虑, 这些定价下的获利不应低于安排生产所获得的收益, 否则工厂宁可生产, 而不出售和出租.**

由此, 工厂生产一件甲产品所消耗的材料和工时的总价值不应低于 4 **元, 即有**

$$2y_1 + 3y_2 \geq 4.$$

同样, 从乙产品考虑, 亦有

$$3y_1 + 2y_2 \geq 3.$$

为使这些定价具有竞争力, 目标函数应为

$$\min W = 24y_1 + 26y_2.$$

综合起来, 该问题的数学模型为:

$$\min W = 24y_1 + 26y_2,$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}2y_1+3y_2\geq 4\\3y_1+2y_2\geq 3\\y_1,y_2\geq 0.\end{cases}$$

这种内容一致但从相反角度提出的一对问题称之为互为对偶问题. 一般地, 设某企业有 m 种资源, 用于生产 n 种不同产品, 各种资源的拥有量为 $b_i(i=1,\cdots,m)$. 已知生产一单位第 j 种产品$(j=1,2,\cdots,n)$消耗第 i 种资源 a_{ij} 单位, 产值为 c_j 元. 问如何安排生产, 可使产值最大?

用 x_j 表示第 j 种产品数量, 则该问题的线性规划模型为:

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,\tag{2.15}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leq b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leq b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leq b_m\\x_j\geq 0\ (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}\tag{2.16}$$

现从另一个角度考虑问题, 若该企业不安排生产, 将所有资源租让, 问如何定价这些资源, 既可使其获利不低于安排生产所获得的收益, 又使资源租让具有竞争力.

设 y_i 表示第 i 种资源的单位成本(机会成本)$(i=1,2,3,\cdots,m)$, 则生产一个单位的第 j 种产品, 消耗的各种资源数分别为 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}$, 则相应的线性规划模型为

$$\min W=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m,\tag{2.17}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geq c_1\\a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geq c_2\\\cdots\cdots\\a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geq c_n.\end{cases}\tag{2.18}$$

如果我们把上述的两个问题之一称为原问题, 则另外一个问题称为对偶问题, 两者互为对偶.

2.4.2 原问题和对偶问题的关系

1. 对称形式的对偶问题

对称形式的对偶问题用矩阵表示, 若原问题是

$$\max Z=CX,\tag{2.19}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}AX\leq b\\X\geq 0.\end{cases}\tag{2.20}$$

则其对偶问题为

$$\min W=Yb,\qquad\qquad \min W=b^TY^T\tag{2.21}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}YA\geq C\\Y\geq 0.\end{cases}\qquad\text{或}\qquad\text{s.t.}\quad\begin{cases}A^TY^T\geq C^T\\Y^T\geq 0\end{cases}\tag{2.22}$$

由此可知, 如果 A,b,C 已知, 就可以写出相应的对偶问题.

例 10　求本章例 1 的对偶问题.

解 其系数矩阵分别为:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix},\quad C=(4,3),\quad b=\begin{pmatrix}24\\26\end{pmatrix}.$$

相应的对偶问题是

$$\min W = b^{T}Y^{T} = (24,26)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

$$A^{T}Y^{T}=\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{aligned}&\min W = 24y_1 + 26y_2,\\&2y_1+3y_2\geq 4\\&3y_1+2y_2\geq 3\\&y_1,y_2\geq 0.\end{aligned}$$

将上述对称形式的两个互为对偶问题进行比较可以看出:

(1) 一个问题中的约束条件个数等于它的对偶问题中的变量数;

(2) 一个问题中目标函数的系数是其对偶问题中约束条件的右端项;

(3) 约束条件在一个问题中为"$\leq$",则在其对偶问题中为"$\geq$";

(4) 目标函数在一个问题中求最大值,在其对偶问题中则为求最小值.

这些关系可用表 2.11 表示.

表 2.11

y_i \ x_j	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原关系	min W
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq$	b_m
对偶关系	$\geq$	$\geq$	$\cdots$	$\geq$		
max Z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		

显然对称形式的对偶问题,如果已知其中一个问题,立即就可以写出相应的对偶问题.

例 11 试根据表 2.12 写出原问题和对偶问题的关系式.

表 2.12

y_i \ x_j	x_1	x_2	b
y_1	3	4	8
y_2	2	0	16
y_3	1	2	12
C	3	5	

解　原问题:

$$\max Z=3x_1+5x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+4x_2\le 8\\ 2x_1\qquad\ \le 16\\ x_1+2x_2\le 12\\ x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

对偶问题:

$$\min W=8y_1+16y_2+12y_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3y_1+2y_2+y_3\ge 3\\ 4y_1\qquad\ +2y_3\ge 5\\ y_1,y_2,y_3\ge 0.\end{cases}$$

2. **非对称形式的对偶问题**

如果原问题中的约束条件含有等式,那么它的对偶问题的表达式应该如何?

设线性规划问题

$$\max Z=CX,\qquad \text{s.t.}\begin{cases}AX=b\\ X\ge 0.\end{cases}\tag{2.23}$$

由于 $AX=b$ **等价于** $\begin{cases}AX\le b\\ -AX\le -b,\end{cases}$

所以, (2.23) **可改写为**

$$\max Z=CX,$$

$$\text{s.t.}\quad AX\le b\tag{2.24}$$

$$\qquad -AX\le -b\tag{2.25}$$

$$X\ge 0$$

令 Y' **对应不等式**(2.24), Y'' **对应不等式**(2.25), **按对称形式可以写出它的对偶问题**

$$\begin{cases}\min W=Y'b-Y''b,\\ Y'A-Y''A\ge C\\ Y',Y''\ge 0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\min W=(Y'-Y'')b,\\ (Y'-Y'')A\ge C\\ Y',Y''\ge 0.\end{cases}$$

又令 $Y=Y'-Y''$, **显然** Y **无非负约束. 把它代入上式, 得对偶问题**

$$\min W=Yb,\qquad \begin{cases}YA\ge C\\ Y\text{ 无非负约束}.\end{cases}\tag{2.26}$$

一般而言, 原问题和对偶问题之间的对应关系如表 2.13 **所示.**

表　2.13

原问题(或对偶问题)	对偶问题(或原问题)
目标函数　max Z	目标函数　min W
变　量　n 个	约束条件　n 个
变　量　≥0	约束条件　≥
变　量　≤0	约束条件　≤
变　量　无约束	约束条件　=
约束条件　m 个	变　量　m 个
约束条件　≤	变　量　≥0
约束条件　≥	变　量　≤0
约束条件　=	变　量　无约束
约束条件右端项	目标函数变量的系数
目标函数变量的系数	约束条件右端项

例 12　试求下述问题的对偶问题.

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 10 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 \leq 8 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

解　由表 2.13 知, 其对偶问题如下:

$$\max W = 10y_1 + 8y_2 + 6y_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} y_1 \quad + 2y_2 \qquad \geq 3 \\ y_1 \qquad\qquad + y_3 \leq 2 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -4 \\ y_1 \quad - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

2.4.3　对偶问题的基本定理

对称性定理　对偶问题的对偶是原问题.(证明略.)

弱对偶性定理　若 $X^{(0)}$ 是原问题的可行解, $Y^{(0)}$ 是对偶问题的可行解, 则有 $CX^{(0)} \leq Y^{(0)}b$.

证　设原问题为

$$\max Z = CX,\ AX \leq b, X \geq 0$$

则其对偶问题是

$$\min W = Yb,\ YA \geq C, Y \geq 0.$$

因 $X^{(0)}$ 为原问题的可行解, 则有 $AX^{(0)} \leq b$.

又因 $Y^{(0)}$ 为对偶问题的可行解, 则有 $Y^{(0)}A \geq C$.

从而有 $CX^{(0)} \leq Y^{(0)}AX^{(0)} \leq Y^{(0)}b$ 即 $CX^{(0)} \leq Y^{(0)}b$. □

由弱对偶性定理可推出, 若原问题(对偶问题)为无界解, 则其对偶问题(原问题)无可行解. 同时, 由弱对偶性定理易证得最优性定理.

最优性定理　若 $X^{(0)}$ 是原问题的可行解, $Y^{(0)}$ 是对偶问题的可行解, 且有 $CX^{(0)} = Y^{(0)}b$, 则 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解.

对偶定理　若两个互为对偶问题之一有最优解, 则另一个必有最优解, 且目标函数值相等.

证　假定原问题为 $\max Z = CX,\ AX \leq b, X \geq 0$,

则其标准型为　$\max Z = CX + 0X_L,\ AX + X_L = b, X \geq 0, X_L \geq 0.$

设 X^* 为原问题的最优解, 则其相应基阵 B 下变量的检验数为

$$C_B B^{-1}(A, I) - (C, 0) \geq 0,\ \text{即}\ C_B B^{-1}A - C \geq 0,\ C_B B^{-1} \geq 0.$$

令　$Y^* = C_B B^{-1}$, **可得** $Y^* A \geq C, Y^* \geq 0$.

这就是说 $Y^* = C_B B^{-1}$ 是对偶问题　$\min W = Yb,\ YA \geq C, Y \geq 0$ **的可行解.**

同时　$W = Y^* b = C_B B^{-1} b$,

$$Z = CX^* = C_B B^{-1} b.$$

因此有 $$Y^* b = CX^*.$$

由最优性定理知, X^*, Y^* **分别是原问题和对偶问题的最优解, 且目标函数值相等.** □

互补松弛性定理 **若** X^*, Y^* **分别是原问题和对偶问题的可行解, 则** X^*, Y^* **为最优解的充分必要条件是** $Y^* X_L = 0$ **和** $Y_s X^* = 0$.

证 **设对偶问题的标准型是**

原问题:	**对偶问题:**
$\max Z = CX$,	$\min W = Yb$,
$AX + X_L = b$	$YA - Y_s = C$
$X, X_L \geq 0$.	$Y, Y_s \geq 0$.

从而有 $$Z = CX = (YA - Y_s) X = YAX - Y_s X. \tag{2.27}$$

$$W = Yb = Y(AX + X_L) = YAX + YX_L. \tag{2.28}$$

$=>$ **必要性** **若** X, Y **为最优解, 则由对偶定理有** $CX = Yb$, **再由**(2.27)**及**(2.28), **有**

$$Y^* AX^* - Y_s X^* = Y^* AX^* + Y^* X_L.$$

即 $$-Y_s X^* = Y^* X_L.$$

又由于 $$Y^*, Y_s \geq 0, X^*, X_L \geq 0,$$

故有 $$Y_s X^* = 0 \text{ 和 } Y^* X_L = 0.$$

$<=$ **充分性** **设** $$Y^* X_L = 0, Y_s X^* = 0.$$

由(2.27)**及**(2.28)**知** $$CX^* = Y^* AX^* = Y^* b.$$

依据最优性定理 X^*, Y^* **分别是原问题和对偶问题的最优解.** □

解的对应定理

设原问题是 $\max Z = CX, AX + X_L = b, X, X_L \geq 0$.

对偶问题是 $\min W = Yb, YA - Y_s = C, Y, Y_s \geq 0$.

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解, 其对应关系见表 2.14.

表 2.14

X_B	X_N	X_L
0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B B^{-1}$
Y_{s1}	Y_{s2}	Y

这里 Y_{s1} **是对应原问题中基变量** X_B **的剩余变量,** Y_{s2} **是对应原问题中非基变量** X_N **的剩余变量.**

证 **设** B **是一原问题的一个可行基, 于是** $A = (B, N)$, **原问题可以改写为**

$$\max Z = C_B X_B + C_N X_N,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} BX_B + NX_N + X_L = b \\ X_B, X_N, X_L \geq 0. \end{cases}$$

相应地对偶问题可表示为

$$\min W = Yb,$$

$$YB - Y_{s1} = C_B \tag{2.29}$$
$$\text{s.t.} \quad YN - Y_{s2} = C_N \tag{2.30}$$
$$Y, Y_{s1}, Y_{s2} \geq 0 \quad ,$$

这里 $$Y_s = (Y_{s1}, Y_{s2}).$$

当求得原问题的一个基解 $X = (X_B, X_N, X_L)^T = (B^{-1}b, 0, 0)^T$, 其相应的检验数为 $\sigma = (\sigma_B, \sigma_N, \sigma_L) = (0, C_BB^{-1}N - C_N, C_BB^{-1})$. 令 $Y = C_BB^{-1}$, 并将它代入(2.29), (2.30)得 $Y_{s1} = 0$, $Y_{s2} = C_BB^{-1}N - C_N$, 可见$(Y, Y_{s1}, Y_{s2}) = (C_BB^{-1}, 0, C_BB^{-1}N - C_N)$是对偶问题的一个基解. □

例 13 已知线性规划问题

$$\max Z = x_1 + x_2,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

试用对偶理论证明上述问题无最优解.

证 首先看到该问题存在可行解, 例如, $X = (0, 0, 0)^T$, 而上述问题的对偶问题为

$$\min W = 6y_1 + 5y_2,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} -2y_1 - 3y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ 3y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

因为 $y_1, y_2 \geq 0$, 由其中第一个约束条件可知, 对偶问题无可行解, 因而无最优解, 从而原问题无最优解.

思考题 如下线性规划问题:

$$\min W = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 5. \end{cases}$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4/5$, $y_2^* = 3/5$, $Z^* = 5$, 试用对偶理论找出原问题的最优解.

2.4.4 对偶单纯形方法

由对偶问题解的对应定理知, 用单纯形法求解线性规划问题时, 在得到原问题的一个基可行解的同时, 在检验数行得到对偶问题的一个基解. 通过逐步迭代, 当在检验数行得到对偶问题的解可行时, 由前述定理知, 已达到最优解.

所谓对偶单纯形方法, 是基于对偶问题的对称性所设计的求解原问题的一种方法. 其基本思想是在保持对偶问题的可行性($C_BB^{-1}A - C \geq 0$)基础上, 逐步迭代, 当原问题也达到可行时($B^{-1}b \geq 0$), 同样表示也已达到最优. 其优点是求解原问题的初始解不一定是基可行解, 在对偶可行的前提下, 可从非基可行解开始迭代. 具体步骤如下:

第一步: 建立线性规划问题的初始单纯形表.

设表中检验数行的值 $z_j - c_j$ 全部 ≥ 0, 即是其对偶问题的一个可行解.

第二步: 检查 b 列的数字, 若均非负, 则已得最优解, 停止计算. 若 b 列有负分量, 则转第三步.

第三步: 换基迭代

(1) 确定换出变量

按 $\min\{i \mid (B^{-1}b)_i < 0\} = r$, 确定基变量 x_r 为换出变量.

(2) 确定换入变量

在单纯形表中检查 x_r 所在行的各系数 $a_{rj}(j = 1, 2, \cdots, n)$. 若所有 $a_{rj} \geq 0$, 则无可行解, 停止计算. 否则, 计算

$$\theta = \min\left\{\frac{-\sigma_j}{a_{rj}}\,\middle|\, a_{rj} < 0\right\} = \frac{-\sigma_s}{a_{rs}},$$

确定 x_s 为换入变量.

(3) 以 a_{rs} 为主元素, 按原单纯形法在表中进行初等行变换, 得到新基的单纯形表. 返回第二步.

例 14 用对偶单纯形法求解下列线性规划问题.

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 4y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

解 先将问题化为

$$\max Z' = -12y_1 - 8y_2 - 16y_3 - 12y_4 + 0y_5 + 0y_6,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_5 = -2 \\ -2y_1 - 2y_2 - 4y_4 + y_6 = -3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0. \end{cases}$$

用对偶单纯法进行计算, 其过程见表 2.15.

表 2.15

		$c_j \to$	-12	-8	-16	-12	0	0	
C_B	X_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
0	y_5	-2	-2	-1	-4	0	1	0	
0	y_6	-3	-2	-2	0	[-4]	0	1	
Z'		0	12	8	16	12	0	0	$\leftarrow\sigma_j$
0	y_5	-2	-2	[-1]	-4	0	1	0	
-12	y_4	3/4	1/2	1/2	0	1	0	-1/4	
Z'		-9	6	2	16	0	0	3	$\leftarrow\sigma_j$
-8	y_2	2	2	1	4	0	-1	0	
-12	y_4	-1/4	-1/2	0	[-2]	1	1/2	-1/4	
Z'		-13	2	0	8	0	2	3	$\leftarrow\sigma_j$
-8	y_2	3/2	1	1	0	2	0	-1/2	
-16	y_3	1/8	1/4	0	1	-1/2	-1/4	1/8	
Z'		-14	0	0	0	4	4	2	$\leftarrow\sigma_j$

至此,得原问题的最优解 $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(0,3/2,1/8,0)^T$.

最优值为 $$Z^*=-Z'=14.$$

说明:对偶单纯形法初始基的确定,往往并不容易.理论上已找到一个一般方法,有兴趣的读者可参考有关文献,这里就不叙述了.

2.4.5 对偶变量的经济意义和影子价格

前已述及,若 B 为原问题$\{\max Z=CX | AX\leq b, X\geq 0\}$的最优基时,对偶变量 $Y^*=C_BB^{-1}$,且有

$$Z^*=C_BB^{-1}b=Y^*b=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i^*,$$

由于$\frac{Z^*}{b_i}=y_i^*$,因此,对偶变量 y_i 的经济意义是第 i 种资源在最优决策下的边际价值.也就是说,在其他条件不变的情况下,增加单位第 i 种资源将会使目标函数值增加$(C_BB^{-1})_i$.其定量表达了在最优生产方案下对单位第 i 种资源的一种估价,这种估价不是该种资源的市场价格,而是在最优生产方案下的结果,故称其为影子价格(shadow price).没有最优决策,就没有影子价格.

影子价格真实反映了资源在经济结构中最优决策下对总收益(目标函数值)的影响和贡献大小.资源的影子价格越高,表明该种资源的贡献越大.由松紧定理知,影子价格为正数,表明该种资源在最优决策下已充分利用耗尽,并成为进一步增加总收益的紧缺资源,亦称短线资源.影子价格为零,表明该种资源在最优决策下尚有剩余,成了长线资源.

影子价格亦是机会成本.当第 i 种资源的市场价格低于影子价格 y_i 时,可适量买进这种资源,组织和增加生产;相反,当市场价格高于影子价格时,可以卖出资源而不安排生产或提高产品的价格.

在完全的宏观市场条件下,随着资源的买进和卖出,影子价格随之变化,直到影子价格与市场价格保持同等水平时,才处于平衡状态.

影子价格是对资源的恰当估价,这种估价直接涉及到资源的最有效利用.如可借助资源的影子价格确定内部结算价格,以便控制有限资源的使用和考核下属部门经营的好坏.

因此,有效利用资源的影子价格指导经济活动是有积极作用的.

(1) 影子价格从资源最优利用的角度,提出了企业挖潜改革,扬长避短的方向.

影子价格为正数的短线资源,已成为进一步发展生产增加收益的瓶颈.在资源的影子价格大于该资源的市场购价时,适量购进该资源即可增加总收益.此外,如果能在生产工艺上革新降低这种资源的消耗,将使企业增收节支.

对影子价格为零的长线资源,其剩余资源是进一步发展生产的潜在优势,为以长线资源为主要资源的新产品的生产提供可能性.

(2) 影子价格可以指导管理部门对紧缺资源实现“择优分配”.

(3) 影子价格可以帮助预测产品的价格.买方要购入卖方的产品作为资源投入生产,要求其价格必须小于该产品作为自己最优生产资源的影子价格,否则将无利可图;卖方要求出售产品的价格必须大于自己的生产“成本”,否则,利益受到损失.因此,产品的价格应在双方的“成本”和影子价格之间.

(4) 资源影子价格的高低可以作为同类企业经济效益的评估标准之一.

2.5 优化后分析

在前面讨论的线性规划问题中, a_{ij}, b_i, c_j 这些数据通常是根据以往资料, 或估计, 或预测等得到的, 不完全符合经济活动的现实. 面对市场经济中价格的波动, 工艺的改进, 资源储量的变化等, 必须考虑这些数据中的一个或几个发生变化时, 现行最优方案会有什么变化? 将这些数据的变化限制在什么范围内, 原最优解仍是最优的? 如果原最优基不再是最优基, 又怎样在先前优化的基础上迅速求得新的最优方案? 这就是优化后分析的内容.

考查数据变化对现行最优方案的影响, 实质上考查对基 B 最优性的影响. 因此, 可考虑从以下两个方面入手:

(1) 数据的变化是否影响基 B 的原始可行性(即 $B^{-1}b \geq 0$);

(2) 数据的变化是否影响基 B 的对偶可行性(即 $C_B B^{-1}A - C \geq 0$).

下面分别进行讨论(以下的分析都是假定最终表中已得到最优基 B).

2.5.1 价值系数 c_j 的变化分析

(1) 若 c_j 是非基变量 x_j 的系数. 当 $c_j \to c_j + \Delta c_j$, 为保持原基 B 的最优性, 须

$$\sigma_j' = C_B B^{-1} P_j - (c_j + \Delta c_j) \geq 0,$$

解不等式有

$$\Delta c_j \leq C_B B^{-1} P_j - c_j = \sigma_j. \tag{2.31}$$

从而确定了在不影响基 B 最优性下, Δc_j 的允许变化范围.

(2) 若 c_r 是基变量 x_r 的系数. 当 $c_r \to c_r + \Delta c_r$ 时, 就引起 C_B 的变化, 从而可能导致所有非基变量的检验数发生变化, 这时

$$\begin{aligned} \sigma' &= (C_B + \Delta C_B) B^{-1} A - C' \\ &= C_B B^{-1} A + (0, \cdots, \Delta c_r, \cdots, 0) B^{-1} A - C' \\ &= C_B B^{-1} A - C + \Delta c_r (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rm}) . \end{aligned}$$

即

$$\sigma' = \sigma + \Delta c_r (a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rm}) .$$

从而

$$\sigma_j' = \sigma_j + \Delta c_r a_{rj}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n) .$$

要使基的最优性不变, 须满足

$$\sigma_j' = \sigma_j + \Delta c_r a_{rj} \geq 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n) . \tag{2.32}$$

解不等式组(2.31)得到 Δc_r 的变化范围:

$$\max_j \{-\sigma_j / a_{rj} \mid a_{rj} > 0\} \leq \Delta c_r \leq \min_j \{-\sigma_j / a_{rj} \mid a_{rj} < 0\} .$$

当 Δc_r 的变化超出此范围时, 则破坏基 B 的对偶可行性, 此时可用单纯形法继续迭代.

例 15 试以本章例 1 的最终表 2.7 为例, 设基变量 x_1 的系数 c_1 变化 Δc_1, 在最优性不变的条件下, 试确定 Δc_1 的范围.

解 直接将 $c_1 + \Delta c_1$ 代入表 2.6 中, 并计算得表 2.16.

为保持原基 B 的最优性, 解不等式组

$$\begin{aligned} 1/5 - 2/5 \Delta c_1 &\geq 0 \\ 6/5 + 3/5 \Delta c_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

得
$$-2 \leq \Delta c_1 \leq 1/2 .$$

表 2.16

$c_j \rightarrow$			$4+\Delta c_1$	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
3	x_2	4	0	1	3/5	-2/5	
$4+\Delta c_1$	x_1	6	1	0	-2/5	3/5	
Z	$36+6\Delta c_1$		0	0	$1/5-2/5\Delta c_1$	$6/5+3/5\Delta c_1$	$\leftarrow \sigma_j$

即 x_1 的价值系数 c_1 可以在[2, 4.5]之间变化,而不影响现行最优方案.但此时目标函数值相应增加了 $6\Delta c_1$.

2.5.2 资源数量的变化分析

当资源数量 b_k 的值有变化时,由于 b_k 的变化和 B^{-1}, A, C 不相关,因此,检验数没有变化.这样当 $b_k \rightarrow b_k+\Delta b_k$,最终表中基变量的值为 $X_B' = B^{-1}(b+\Delta b)$,其中

$\Delta b = (0, 0, \cdots, \Delta b_k, 0, \cdots, 0)^T$.只要 $X_B' \geq 0$,则基 B 的最优性不变.

Δb_k 的范围可用以下方法确定:

因为
$$B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b ,$$
设
$$B^{-1}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m)^T ,$$
所以,
$$B^{-1}\Delta b = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta b_k \begin{pmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{pmatrix} .$$
只要
$$B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \geq 0 ,$$
即
$$\bar{b}_i + \bar{a}_{ik}\Delta b_k \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m . \tag{2.33}$$
就能保证基 B 的最优性不变.解不等式组(2.33),得到 Δb_k 的允许变化范围:
$$\max_i \{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ik} \mid \bar{a}_{ik} > 0\} \leq \Delta b_k \leq \min_i \{-\bar{b}_i/\bar{a}_{ik} \mid \bar{a}_{ik} < 0\} .$$

应当指出,当 b_k 在此范围内变化时,虽然基 B 的最优性仍可保持,但最优解中基变量的值和目标函数值同时改变.当 b_k 变化超出范围时,则必然破坏基 B 的可行性,此时可用对偶单纯形法在最终表上继续迭代.

例 16 求本章例 1 的第二个条件 b_2 的变化范围.

解 由表 2.7 知,只须
$$B^{-1}b + B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0 ,$$
即
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}\Delta b_2 \geq 0 .$$

解不等式组

$$4 - \frac{2}{5}\Delta b_2 \geq 0$$
$$6 + \frac{3}{5}\Delta b_2 \geq 0 .$$

得
$$-10 \leq \Delta b_2 \leq 10 .$$

故 b_2 的变化范围为[16, 36] .

2.5.3 技术系数的变化分析

(1) 基变量的技术系数 a_{ij} 的变化比较复杂, 既有可能引起 b 列的变化, 也可能引起检验数行的变化. 下面以具体例子说明.

例 17 以例 1 为例, 分析原计划生产产品的工艺结构发生变化. 若生产产品甲的工艺有了改进, 其技术系数向量变为 $P_1' = (1, 2)^T$, 相应甲产品的每件利润为 6 元. 试分析对原计划有什么影响?

解 把改进工艺结构的产品甲视为甲', 设 x_1' 是其产量, 在最终表中用 x_1' 代替 x_1, 用 P_1' 代替 P_1

计算
$$B^{-1}P_1' = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_1' = C_B B^{-1}P_1' - c_1' = (3, 6)\begin{pmatrix} -1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} - 6 = -9/5 .$$

同时,
$$\sigma_3 = (3, 6)\begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} - 0 = -3/5 ,$$

$$\sigma_4 = (3, 6)\begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} - 0 = 12/5 .$$

将上述数据填入表 2.6 中相应位置, 得新表 2.17.

表 2.17

$c_j \rightarrow$			6	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	
3	x_2	4	-1/5	1	3/5	-2/5	-
6	x_1'	6	[4/5]	0	-2/5	3/5	15/2
Z		48	-9/5	0	-3/5	12/5	$\leftarrow \sigma_j$

由表 2.17 以[4/5]为主元素进行变换并迭代, 过程如表 2.18 至 2.19 所示.

表 2.18

$c_j \rightarrow$			6	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	
3	x_2	11/2	0	1	[1/2]	-1/4	11
6	x_1'	15/2	1	0	-1/2	3/4	-
Z		123/2	0	0	-3/2	15/4	$\leftarrow \sigma_j$

表 2.19

$c_j \to$			6	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1'	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	11	0	2	1	-1/2	
6	x_1'	13	1	1	0	1/2	
Z		78	0	3	0	3	$\leftarrow \sigma$

表 2.19 中的结果已是最优解. 即生产产品甲′13 件, 生产产品乙为 0 件, 可获利 78 元.

例 17 的分析方法, 也可看作增加新产品(必须生产)的优化分析. 事实上, 若将产品甲′视为必须生产的新产品, 就会有上述结果.

(2) 非基变量的技术系数 a_{ij} 的变化, 仅影响基 B 的对偶可行性, 而不会影响 B 的可行性.

当 $a_{rj} \to a_{rj} + \Delta a_{rj}$, 则变化的检验数

$$\sigma_j' = C_B B^{-1} P_j' - c_j = \sigma_j + (C_B B^{-1})_r \Delta a_{rj},$$

其中$(C_B B^{-1})_r$ 为 $C_B B^{-1}$的第 r 个分量.

若要保持基 B 的最优性, 则 Δa_{rj}的允许变化范围为

$$\Delta a_{rj} \geq -\frac{\sigma_j}{(C_B B^{-1})_r}. \tag{2.34}$$

否则用单纯形法进行换基迭代.

2.5.4 对增加约束条件的分析

优化后对增加新约束条件的分析, 可按以下方法进行:

首先, 检验原最优解是否满足新增加的约束条件. 如果满足, 则说明此约束条件对原最优方案无影响(称此约束条件为不起作用的约束, 否则称为起作用的约束); 如果不满足, 则将最终表中基变量的表达式代入新约束, 整理后放置最终表中, 继续进行迭代.

例 18　对例 1 增加电力约束: 设生产 1 件甲产品需耗电 3 个单位, 生产 1 件乙产品需耗电 4 个单位, 且每天供电量不超过 30 单位, 即

$$3x_1 + 4x_2 \leq 30.$$

试进行分析.

解　将 $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ 代入新增加的电力约束, 左端为 34, 大于右端. 所以, 电力约束为起作用的约束. 于是以

$x_1 = 6 + 2/5x_3 - 3/5x_4$ 和 $x_2 = 4 - 3/5x_3 + 2/5x_4$　代入 $3x_1 + 4x_2 \leq 30$, 整理得

$$-6/5x_3 - 1/5x_4 \leq -4.$$

加入松弛变量 x_5 后, 放置最终表 2.7 中, 用对偶单纯形法进行迭代, 详见表 2.20.

即增加电力约束后, 最优方案变为生产甲产品 22/3 件, 乙产品 2 件, 每天获得的最大利润为 106/3 元.

表　2.20

$c_j \rightarrow$			4	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_2	4	0	1	3/5	-2/5	0
4	x_1	6	1	0	-2/5	3/5	0
0	x_5	-4	0	0	[-6/5]	-1/5	1
Z		36	0	0	1/5	6/5	0
3	x_2	2	0	1	0	-1/2	1/2
4	x_1	22/3	1	0	0	2/3	-1/3
0	x_3	10/3	0	0	1	1/6	-5/6
Z		106/3	0	0	0	6/7	1/6

2.6　运输问题及其解法

2.6.1　运输问题的数学模型

在运输行业中,经常要将某种物资从一些产地运往另外一些销地.而单位物资的运输费用一般来说都与运输距离有关,根据已有的交通网,如何调运可使总的费用最少?这个问题可用以下模型描述.

已知有 m 个产地 A_i, $i=1,2,\cdots,m$,可供应某种物资,其供应量(产量)分别为 a_i,有 n 个销地 B_j, $j=1,2,\cdots,n$,其销量分别为 b_j,从 A_i 到 B_j 的单位物资运价为 c_{ij},这些数据汇总于如下调运量和单位运价表 2.21 中。

表　2.21

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	…	B_n	产　量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	…	b_n	

设 x_{ij} 表示 A_i 到 B_j 的运量,那么在产销平衡的条件下 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,要确定总运费最小的调运方案,实际为求解如下数学模型:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad ,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,\cdots,n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\cdots,m \\ x_{ij} \geq 0,\ (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

将上面的数学模型写成矩阵形式:

$$\min Z = CX,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0. \end{cases}$$

其中

$$C = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{m1}, c_{m2}, \cdots, c_{mn}),$$

$$X = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})^T,$$

$$b = (a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots\ x_{mn} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ n\text{行} \\ \\ \\ m\text{行} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

A 矩阵中 x_{ij} 对应的列向量 P_{ij} 为 $P_{ij} = e_i + e_{m+j}$. 可以证明矩阵 A 的秩 $\text{rank}(A) = m+n-1$, 并且删去矩阵 A 的任意一行所得的矩阵的秩恰好为 $m+n-1$. 因而运输问题的任一基可行解均有 $m+n-1$ 个基变量, 其值构成一个可行的调运方案.

由于运输问题有可行解, 而 $0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$, 故无论是 max 问题, 还是 min 问题, 它们的解一定是上有界或下有界, 从而运输问题一定有最优解.

运输问题的数学模型共包含 $m \times n$ 个决策变量 x_{ij} 和 $m+n-1$ 个独立的约束条件. 如果用单纯形法求解, 如再考虑增加人工变量, 即使 m 和 n 都不很大, 但变量数却比较多, 计算起来比较麻烦. 考虑到矩阵 A 的特殊结构, 人们在单纯形法的基础上, 设计求解运输问题的表上作业法, 其实质仍是单纯形方法.

2.6.2 产销平衡问题的表上作业法

表上作业法首先在表上给出一个初始调运方案(即初始基可行解); 然后, 按照给出的准则对方案进行判别是否最优. 如果所得方案不是最优, 则需对所得方案进行调整. 如此直到最优.

下面通过例子说明表上作业法的方法与步骤.

例 18 设某产品从产地 A_1, A_2, A_3 运往销地 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, 运量和单位运价如表 2.22所示. 问如何调运才能使总的运费最少?

表 2.22 单位: 百元/万吨

产地 \ 单位运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)
A_1	7	10	8	6	4	40
A_2	5	9	7	12	6	40
A_3	3	6	5	8	11	90
销量(万吨)	30	40	60	20	20	

解 第一步: 确定初始调运方案

确定初始调运方案的方法很多, 这里介绍两种, 即最小元素法和伏格尔法.

1. 最小元素法

最小元素法是按运价最小的优先调运原则确定初始方案的方法. 下面用最小元素法给出例 18 的初始调运方案. 首先在表 2.22 中找到最小运价 3, 将 A_3 优先供应 30 万吨给 B_1, 由于 B_1 已被满足, 所以划去运价表中的 B_1 列, 见表 2.23.

表 2.23 产销平衡表(单位: 万吨) 运价表(单位: 百元/万吨)

产地 \ 调运量 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A1						40	7	10	8	6	4
A2						40	5	9	7	12	6
A3	30					90	3	6	5	8	11
销量(万吨)	30	40	60	20	20						

再从余下的运价表中找到最小运价 4, A_1 优先供应 20 万吨给 B_5, 划去 B_5 列. 余下的最小运价为 5, A_3 余下的 60 万吨供给 B_3, 划去 B_3 列. 因为此时 A_3 也已供应完, 应划去 A_3 行, 这种要同时划去一行和一列, 为保证有$(m+n-1)$个数字格, 应在同时划去的其他格中填上一个数字格“0”, 在(A_2, B_3)处补上一个“0”; 如此下去, 直到划去所有的行和所有的列, 这些过程详见表 2.24 至 2.27。

表 2.24 产销平衡表(单位: 万吨) 运价表(单位: 百元/万吨)

产地 \ 调运量 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1					20	40	7	10	8	6	4
A_2						40	5	9	7	12	6
A_3	30					90	3	6	5	8	11
销量(万吨)	30	40	60	20	20						

表 2.25 产销平衡表(单位: 万吨) 运价表(单位: 百元/万吨)

调运量 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1					20	40	7	10	8	6	4
A_2			0			40	5	9	7	12	6
A_3	30		60			90	3	6	5	8	11
销量(万吨)	30	40	60	20	20						

表 2.26 产销平衡表(单位: 万吨) 运价表(单位: 百元/万吨)

调运量 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1				20	20	40	7	10	8	6	4
A_2			0	0		40	5	9	7	12	6
A_3	30		60			90	3	6	5	8	11
销量(万吨)	30	40	60	20	20						

表 2.27 产销平衡表(单位: 万吨) 运价表(单位: 百元/万吨)

调运量 销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量(万吨)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1				20	20	40	7	10	8	6	4
A_2		40	0	0		40	5	9	7	12	6
A_3	30		60			90	3	6	5	8	11
销量(万吨)	30	40	60	20	20						

$$Z = 20\times 6+20\times 4+40\times 9+0\times 7+0\times 12+30\times 3+60\times 5=950.$$

该调运方案的总运价为 9.5 万元. 可以证明, 用最小元素法给出的初始方案是运输问题的基可行解.

把调运方案中有数字的格叫数格, 未填数字的格叫空格. 一个合理的调运方案中数格的个数应为$(m+n-1)$个. 用最小元素法求初始方案时, 可能在产销表中填入一个数字格后, 同时要划去一行和一列, 这称为退化情况, 为保证总有$(m+n-1)$个数字格, 可在同时划去的其他格中填上数字“0”.

2. 伏格尔法

最小元素法可能为了节省一处费用, 造成其他处多花很多费用. 伏格尔法考虑到, 一产地的产品假如不能按最小运费供应, 就可考虑次小运费, 这二者之间有一个差额. 差额越大, 说明不能按最小运费调运时, 运费增加越多. 因而对差额最大处, 应当多采用最小运费调用. 其步骤为:

(1) 分别计算表中各行和各列中最小运费和次小运费的差额, 并填入表中的最右列和最下行;

(2) 从行和列的差额中选出最大者，选择其所在行或列中的最小元素，按类似于最小元素法优先供应，划去相应的行或列；

(3) 对表中未划去的元素，重复(1)、(2)，直到所有的行和列划完为止.

下面对例 18 给出相应的初始方案，步骤如表 2.28 至表 2.39.

表 2.28　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6	4	2
A_2	5	9	7	12	6	1
A_3	3	6★	5	8	11	2
列差额	2	3	2	2	2	

表 2.29　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1						40
A_2						40
A_3		40				90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.30　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6	4	2
A_2	5	9	7	12	6	1
A_3	3★	6	5	8	11	2
列差额	2	-	2	2	2	

表 2.31　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1						40
A_2						40
A_3	30	40				90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.32　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6	4	2
A_2	5	9	7	12	6	1
A_3	3	6	5★	8	11	3
列差额	-	-	2	2	2	

表 2.33　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1						40
A_2						40
A_3	30	40	20			90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.34　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6★	4	2
A_2	5	9	7	12	6	1
A_3	3	6	5	8	11	-
列差额	-	-	1	6	2	

表 2.35　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1				20		40
A_2						40
A_3	30	40	20			90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.36　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6	4★	4
A_2	5	9	7	12	6	1
A_3	3	6	5	8	11	-
列差额	-	-	1	-	2	

表 2.37　　单位：百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1				20	20	40
A_2					0	40
A_3	30	40	20			90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.38　　单位: 百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	行差额
A_1	7	10	8	6	4	-
A_2	5	9	7★	12	6	1
A_3	3	6	5	8	11	-
列差额	-	-	7	-	6	

表 2.39　　单位: 百元/万吨

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1				20	20	40
A_2			40		0	40
A_3	30	40	20			90
销量	30	40	60	20	20	

根据上述初始调运方案, 可得总运费为

$$Z=20\times 6+20\times 4+20\times 4+40\times 7+0\times 6+30\times 3+40\times 6+20\times 5=9.1\text{ 万元}.$$

可以证明, 用伏格尔法给出的初始方案是运输问题的基可行解. 本例用伏格尔法给出的初始方案是最优解.

第二步: 最优调运方案的判别

理论上已经证明, (1) 一个合理的调运方案中不应有以数格为始点的闭回路. 所谓闭回路, 是指方案中从某一始格出发, 沿同行或同列前进, 当遇到一个数字格时可转 90 度继续前进, 按此方法进行下去, 直到回到始点的一个封闭的曲线. (2) 每一个空格有且只有一条闭回路.

显然表 2.40 所给方案是一个可行方案, 但存在图中虚线所示的闭回路, 故不能作为某个运输问题一个合理调运方案.

表 2.40

产地＼运量＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1		30	30			60
A_2	40			30		70
A_3		30	30		40	100
销量	40	60	60	30	40	

一个初始方案是一个基可行解, 方案中的数格对应于基变量, 空格对应于非基变量. 因此, 如何判别方案是否最优, 实际上是计算空格(非基变量)的检验数 $\sigma_j=C_BB^{-1}P_{ij}-c_{ij}=(u_i+v_j)-c_{ij}$　$i,j\in J_N$. 对目标函数要求极小化的运输问题, 当所有的 $\sigma_j\leqslant 0$ 时, 为最优方案.

如何计算空格的检验数, 现介绍两种方法.

1. 闭回路法

对表 2.27 所制定的调运方案计算其空格的检验数.

将表 2.27 所制定的方案中的各个调运量换成相对应的单位运价, 得表 2.41, 表中的空格是表 2.27 中的空格.

对空格(A_1,B_2)有闭回路$(A_1,B_2)\to(A_1,B_4)\to(A_2,B_4)\to(A_2,B_2)\to(A_1,B_2)$, 设想若由 A_1 供应 1 万吨给 B_2, 则总的运费有何变化呢? 显然为保持产销平衡, 那么 A_1 要少运 1 万吨给 B_4, A_2 要多运 1 万吨给 B_4, A_2 少运一万吨给 B_2. 这样的调整方案, 运费增加 $10-6+12-9=7$ 万元, 这表明, 如果这样调整将增加运费. 该数字 7 的相反数 -7 就是空格(A_1,B_2)

的检验数. 如上所述, 可找出该方案的所有空格的检验数, 如表 2.42 所示.

表 2.41　　单位: 百元/万吨

产地 \ 运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1				6	4
A_2		9	7	12	
A_3	3		5		

表 2.42　检验数表

产地 \ 检验数 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-8	-7	-7		
A_2	0				4
A_3		1		2	-3

从表 2.42 中可以看出, 共有 3 个正检验数, 故这个方案不是最优的.

2. 位势法

用闭回路法求检验数时, 需给每一空格找一条闭回路. 当产销点很多时, 这种计算比较繁. 下面介绍用位势法计算空格的检验数.

由线性规划的对偶理论可知, $C_B B^{-1}$ 表示运输问题 $m+n$ 个约束条件的对偶变量向量. 设其分量为 $u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n$.

因为检验数 $\sigma_{ij} = C_B B^{-1} P_{ij} - c_{ij}$, 而 $P_{ij} = e_i + e_{m+j}$, 所以, $\sigma_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$. 其中基变量(数格)的检验数 $\sigma_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} = 0 (i, j \in J_B)$. 因而有由 $m+n$ 个变量和 $m+n-1$ 个方程组成方程组

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (i, j \in J_B).$$

显然, 上述方程组中含一个自由变量, 令其中某个为任一确定的值, 可得到方程组的解 u_i 和 v_j $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 从而可求出非基变量(空格)的检验数. 以下计算均在表中进行.

下面仍以表 2.41 为例, 介绍具体的方法.

在表 2.41 的下边和右侧各加一行和一列, 分别称为位势行和位势列, 记为 u_i 和 v_j (见表 2.43).

表 2.43　　单位: 百元/万吨

产地 \ 运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
A_1				6	4	u_1
A_2		9	7	12		u_2
A_3	3		5			u_3
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

由 $u_i + v_j = c_{ij}(i, j \in J_B)$, 有如下方程组

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_4 &= 6 \\
u_1 + v_5 &= 4 \\
u_2 + v_2 &= 9 \\
u_2 + v_3 &= 7 \\
u_2 + v_4 &= 12 \\
u_3 + v_1 &= 3 \\
u_3 + v_3 &= 5,
\end{aligned}
$$

令 $u_2 = 6$ 得

$$
\begin{aligned}
u_2 &= 12 \\
u_3 &= 10 \\
v_1 &= -7 \\
v_2 &= -3 \\
v_3 &= -5 \\
v_4 &= 0 \\
v_5 &= -2.
\end{aligned}
$$

按 $\sigma_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}(i, j \in J_N)$, 计算空格相应的检验数, 其结果见表 2.44.

表 2.44　　　　单位: 百元/万吨

运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	u_i
A_1	-8	-7	-7			6
A_2	0				4	12
A_3		1		2	-3	10
v_j	-7	-3	-5	0	-2	

不难看出, 用该法和闭回路法算得的检验数完全一样.

第三步: 用闭回路法调整方案

当在表中空格处出现正检验数时, 表明它不是最优方案, 必须对其进行调整. 具体调整方法如下: 若有两个或两个以上的正检验数时, 一般选其中最大的正检验数, 以它对应的格为调入格, 如例 18 中的(A_2, B_5)格. 然后沿此空格的闭回路进行最大可能的调整, 最大调整量 $\theta = \min$\{闭回路中第奇数拐角点的调运量\}. 该处最大调整量为 0 吨, 调整后的方案为表 2.45, 相应检验数如表 2.46 所示.

表 2.45

调运量 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1				20	20	40
A_2		40	0		0	40
A_3	30		60			90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.46　检验数表

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-4	-3	-3		
A_2	0			-4	
A_3		1		-12	-7

同样以(A_3, B_2)为调整格, 重新调整如表 2.47 所示, 相应检验数如表 2.48 所示.

从表 2.48 中可以看出, 8 个检验数均为非正, 说明这个方案是最优方案. 此时总运费为 $Z^* = 20\times 6 + 20\times 4 + 20\times 4 + 40\times 7 + 0\times 6 + 30\times 3 + 40\times 6 + 20\times 5 = 9.1$ 万元.

几点说明:

(1) 在最优方案中某空格检验数为 0 时,由线性规划的理论知,一定有多重最优解.

(2) 退化情况.

表上作业法求解运输问题出现退化情况时,须在相应格中填上一个 0,以表示此格为数格.有以下两种情况:

① 确定初始方案时,若出现同时划去一行和一列,则需在填写数格的行或列上,再添一个“0”数格.

② 闭回路调整时,若同时有 $r\ (r>1)$ 个最小值格时,则需在要划去的这 r 个数格中改填 $r-1$ 个“0”数格.

这两种情况的处理,参见例 18.

表 2.47

产地 \ 运量 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1				20	20	40
A_2			40		0	40
A_3	30	40	20			90
销量	30	40	60	20	20	

表 2.48 检验数表

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-4	-4	-3		
A_2	0	-1		-4	
A_3				-2	-7

2.6.3 产销不平衡问题的解法

前面讨论的是产销平衡的问题,即有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

而实际问题中产销往往是不平衡的.对于这样的运输问题,解决的办法是把它转化为平衡的问题,然后用前述的表上作业法求得最优方案.

当产大于销,即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

时,运输问题的数学模型可表示为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

由于总产量大于总销量,可虚拟 B_{n+1} 为存储地,并设 $x_{i,n+1}$ 是产地 A_i 的储存量,于是有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

总的存量为

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}.$$

由于就地存储的单位运费为 0, 所以, 令 $c_{i,n+1} = 0, i = 1, 2, 3, \cdots, m$, 从而得到一个产销平衡的运输问题:

$$\min Z' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1, 2, \cdots, n+1) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n+1). \end{cases}$$

同样, 当总销量大于总产量时, 只要增加一个虚拟的产地 A_{m+1}, 它的产量 a_{m+1} 为

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

可令从假想产地 A_{m+1} 到销地 B_j 的单位运费 $c_{m+1,j} = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$, 同样可以将这类问题转化为产销平衡的问题.

例 19 设有三个电视机厂供应四个地区某种型号的电视机. 各厂家的年产量、各地区的年销售量及各厂到各地区的单位运价如表 2.49 所示. 试求出总的运费最省的电视机调拨方案.

表 2.49 运价单位: 万元/万台

销地 / 厂家	B_1	B_2	B_3	B_4	产量(万台)
A_1	6	3	12	6	10
A_2	4	3	9	-	12
A_3	9	10	13	10	10
最低需求(万台)	6	14	0	5	
最高需求(万台)	10	14	6	不限	

解 这是一个产销不平衡的典型运输问题, 总产量为 32 万台, 四个地区的最低总需求为 25 万台, 最高总需求为无限. 据现有产量知第四个地区最高可分配到 12 万台, 这样确定最高需求为 42 万台, 大于产量. 为了求得平衡, 增加一个虚拟的厂家 A_4, 其年产量为 10 万台. 各地区的需求量包含两部分, 如地区 A_1, 其中 6 万台是最低需求, 从而也就不能由 A_4 供应, 故可令相应运价为 M(M 为很大的正数), 其余部分可由 A_4 供应, 相应运价设为 0. 参照上述分析, 对有两种需求不同的地区, 可视为两个地区对待. 这样可得表 2.50.

表 2.49 中(A_2, B_4)处表示 A_2 不供应 B_4 地区, 在表 2.50 中相应运价也用 M 表示. 对表 2.50 用表上作业法计算, 得最优方案如表 2.51 所示.

最优方案为生产厂 A_1 分别调运给 B_2 和 B_4 各 8 万台和 2 万台, A_2 分别调运给 B_1 和 B_2 各 6 万台, A_3 全部调运给 B_4 共 10 万台.

总运价为 $Z^* = 8\times 3 + 2\times 6 + 6\times 4 + 6\times 3 + 5\times 10 + 5\times 10 = 178$ 万元.

表 2.50

销地 / 厂家	B_1'	B_1''	B_2	B_3	B_4'	B_4''	产量
A_1	6	6	3	12	6	6	10
A_2	4	4	3	9	M	M	12
A_3	9	9	10	13	10	10	10
A_4	M	0	M	0	M	10	10
销量	6	4	14	6	5	7	

表 2.51

销地 / 厂家	B_1'	B_1''	B_2	B_3	B_4'	B_4''	产量
A_1			8			2	10
A_2	6		6				12
A_3					5	5	10
A_4		4		6		0	10
销量	6	4	14	6	5	7	

2.7 目标规划模型

前面介绍的线性规划及运输问题, 都是在约束条件下具有单个目标函数的基本特征. 但现实世界中有很多问题具有多个目标, 这些目标的重要性各不相同, 往往有不同的量纲, 又相互冲突. 同时, 在许多实际问题中, 在某些限制条件下, 决策者希望实现的多项目标, 有的要求百分之百地予以实现, 有的则要求基本实现就可以. 诸如此类问题, 这正是目标规划要研究解决的. 目标规划通常包括线性目标规划、非线性目标规划等. 本节仅介绍线性目标规划(简称目标规划) 的数学模型及方法.

引例　如对本章的例 1, 我们已经很熟悉了, 它是一个单目标的线性规划问题.

设每天生产甲、乙两种产品分别为 x_1 件和 x_2 件, 其数学模型如下:

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2,$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 26 \\ x_1, x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

其最优解为 $x_1^* = 6, x_2^* = 4, z^* = 36$. 即最优方案为甲产品生产 6 件, 乙产品生产 4 件, 每天的总利润为 36 元.

现在工厂领导要考虑市场等一系列其他因素, 提出如下目标:

(1) 根据市场信息, 甲产品的销量有下降趋势, 而乙产品的销量有上升趋势, 故考虑乙产品的产量应大于甲产品的产量;

(2) 尽可能充分利用工时, 不希望加班;

(3) 应尽可能达到并超过计划利润 30 元.

在原材料不能超计划使用的前提下，并考虑上述(1)(2)(3)后，如何安排生产使这些目标依次实现?

为了建立数学模型，仍设每天生产甲、乙两种产品分别为 x_1 件和 x_2 件，由于原材料的限制，显然有如下资源约束: $2x_1+3x_2\leq 24$.

令 d_1^- 表示乙产品的产量低于甲产品产量的数，d_1^+ 表示乙产品的产量高于甲产品产量的数. 我们称它们分别为产量比较的负偏差变量和正偏差变量. 从而满足目标约束(1)的约束为约束等式

$$-x_1+x_2+d_1^- - d_1^+ = 0.$$

同样令 d_2^- 和 d_2^+ 分别表示安排生产时，低于可利用工时和高于可利用工时，即加班工时的偏差变量，则对目标(2)，有: $3x_1+2x_2+d_2^- - d_2^+ = 26$.

又令 d_3^- 和 d_3^+ 分别表示安排生产时，低于计划利润30元和高于计划利润30元的偏差变量，则对目标(3)，有: $4x_1+3x_2+d_3^- - d_3^+ = 30$.

这个问题的目标函数依次为:

$$\min Z_1 = d_1^-,$$
$$\min Z_2 = d_2^+ + d_2^-$$
$$\min Z_3 = d_3^-.$$

因此，该问题的数学模型可描述为

目标 $\min Z_1 = d_1^-$; $\min Z_2 = d_2^+ + d_2^-$; $\min Z_3 = d_3^-$.

约束条件

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 24 & (1)\\ -x_1+x_2+d_1^- - d_1^+ = 0 & (2)\\ 3x_1+2x_2+d_2^- - d_2^+ = 26 & (3)\\ 4x_1+3x_2+d_3^- - d_3^+ = 30 & (4)\\ x_1, x_2\geq 0, d_i^+\geq 0, d_i^-\geq 0, i=1,2,3. \end{cases}$$

2.7.1 目标规划的数学模型

目标规划的基本思想是化多项目标为单一目标，为此先引入与目标规划数学模型有关的概念.

1. 决策变量和偏差变量

决策变量又称控制变量，用 x_i 表示.

在目标规划中，引进正、负偏差变量，分别用 d_i^+ 和 d_i^- 表示. d_i^+ 为正偏差变量，它表示实际决策值超过第 i 个目标值的数量; d_i^- 为负偏差变量，它表示实际决策值低于第 i 个目标值的数量.

显然 d_i^+ 和 d_i^- 二者中至少有一个为零. 事实上，当 $d_i^+\neq 0$ 时，说明实际值超过目标值，此时有 $d_i^-=0$; 同样当 $d_i^-\neq 0$ 时，也有 $d_i^+=0$，因此，$d_i^+d_i^-=0$. 目标规划一般有多个目标值，每个目标值都有一对偏差变量 d_i^+ 和 d_i^-.

2. 资源约束和目标约束

资源约束是指必须严格满足的等式或不等式约束，如引例的数学模型中的约束条件

(1), 又称为硬约束. 目标约束是目标规划特有的, 它把要预定的目标值作为右端的常数项, 在达到目标值时允许发生正或负的偏差量, 因此, 目标约束是软约束, 具有一定的弹性. 如引例的数学模型中的约束条件(2)(3)(4). 目标约束不会不满足, 但可能偏差过大.

例如, 对于约束 $f_i(X)+d_i^- - d_i^+ = b_i$,

当 $d_i^- = 0$ 时, 有 $f_i(X) \geq b_i$,

当 $d_i^+ = 0$ 时, 有 $f_i(X) \leq b_i$,

当 $d_i^+ = d_i^- = 0$ 时, 有 $f_i(X) = b_i$.

3. 优先因子与权系数

目标规划中, 当决策者要求实现多个目标时, 为使多个目标统一在单一目标中, 且按主次或轻重缓急依次实现, 故引进优先因子. 凡要求第一位达到的目标赋予优先因子 P_1, 次位的目标赋予优先因子 $P_2, \cdots, P_{k+1}$, 并规定 $P_k \gg P_{k+1}$, $(k=1,2,\cdots,K)$ 表示 P_k 比 P_{k+1} 有更大的优先权, 不同的优先因子代表不同的优先等级. 满足时首先保证 P_1 级目标的实现, 这时不考虑其他次级目标, P_2 级目标是在保证 P_1 级目标实现的基础上考虑, 依此类推, 若要考虑具有相同优先因子的两个目标的差别, 这时可分别赋予它们不同的权系数 ω_{jk}, 这些都由决策者按具体情况而定.

4. 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数是由各目标约束的正、负偏差变量和相应的优先因子组成的. 因决策者的愿望是尽可能缩小偏离目标值, 故目标函数总是极小化.

对于目标约束 $f_i(X)+d_i^- - d_i^+ = b_i$, 相应目标函数的基本形式有如下三种:

(1) 若要求恰好达到预定目标值, 则目标函数为 $\min\,(d_i^+ + d_i^-)$;

(2) 若要求不超过预定目标值, 则目标函数为 $\min\,(d_i^+)$;

(3) 若要求超过预定目标值, 则目标函数为 $\min\,(d_i^-)$.

对引例的三个目标(1)(2)(3)考虑分别赋予优先因子 P_1, P_2, P_3, 则这个问题的模型为

$$\min Z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3 d_3^-,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 & (1)\\ -x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2)\\ 3x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 26 & (3)\\ 4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 & (4)\\ x_1, x_2 \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, i = 1,2,3. \end{cases}$$

一般地, 目标规划的数学模型为

$$\min Z = \sum_{r=1}^{L} P_r \sum_{k=1}^{K} (\omega_{rk}^- d_k^- + \omega_{rk}^+ d_k^+),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1,2,\cdots,m\\ \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = g_k & k = 1,2,\cdots,K\\ x_j \geq 0\ j = 1,2,\cdots,n;\ d_k^-, d_k^+ \geq 0\ k = 1,2,\cdots,K. \end{cases}$$

为了使上述模型中的资源约束一定成立, 从而保证其解的可行性, 可引进相应的偏差变

量，可将资源约束的正负偏差量之和，赋予优先因子 P_0 并首先给予满足. 如果改变后的最优值中 P_0 的系数大于零，说明原问题无可行解.

建立目标规划的数学模型时，排定各个目标的优先等级，确定各目标值和权系数等，一般通过专家评定事先解决.

2.7.2 目标规划的图解法

对于只具有两个决策变量的目标规划的数学模型，用图解法求解简单直观. 下面结合例题的求解说明图解法的步骤.

例 20 用图解法求引例的解.

解 (1) 先在平面直角坐标系中作出各约束条件所确定的区域.

资源约束条件的作图与线性规划相同，如图 2.6 中的阴影部分，即三角形 OAB 所围的区域为可行域. 对目标约束条件，令相应的正、负偏差(d_i^+, d_i^-)均为 0，作相应的直线.

图 2.6

(2) 标出目标约束在相应直线上 d_i^+, d_i^- 的方向.

(3) 根据目标函数的优先因子分析求解.

在可行域中，首先考虑 P_1 的实现，即要求 $\min d_1^-$，从图中可见，满足 $d_1^- = 0$ 的区域为三角形 OBC；接着考虑 P_2 相应的目标，即在区域 OBC 中要实现 $\min(d_2^+ + d_2^-)$，容易看出，$C(24/5, 24/5)$ 点距离直线(2)最近，即可以使$(d_2^+ + d_2^-)$取最小，此时 $d_2^+ = 0$, $d_2^- = 2$；最后，同理考虑 P_3 相应目标的实现，此时只有 C 点，$d_3^- = 0$, $d_3^+ = 18/5$. 因此，满意解为，$x_1 = 24/5$, $x_2 = 24/5$，相应的利润为 $168/5 = 33.6$ 元.

图解法不仅直观表达了 d_i^+ 和 d_i^- 的几何意义，而且可以得出(理论上也可以证明)，任何目标规划问题都有满意解的结论.

2.7.3 用单纯形法解线性目标规划的步骤

由于目标规划的数学模型结构和线性规划的模型结构类似，所以，可用单纯形法求解. 以下结合例题的求解，说明其方法步骤.

例 21 试用单纯形法求解引例.

解 先将引例化为标准型:

$$\min Z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3 d_3^-,$$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\
-x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\
3x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 26 \\
4x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\
x_i \geq 0,\ d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0,\ i = 1, 2, 3
\end{cases}
.
$$

第 1 步: 建立初始单纯形表

取 x_3, d_1^-, d_2^-, d_3^- 为基变量, 建立初始单纯形表 2.52.

表 2.52

$c_j \to$			0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	P_3	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
0	x_3	24	2	3	1	0	0	0	0	0	0	8
P_1	d_1^-	0	-1	[1]	0	1	0	0	-1	0	0	0
P_2	d_2^-	26	3	2	0	0	1	0	0	-1	0	13
P_3	d_3^-	30	4	3	0	0	0	1	0	0	-1	10
$\sigma_j \to$		P_1	-1	1					-1			
		P_2	3	2						-2		
		P_3	4	3							-1	

表 2.52 中的检验数矩阵是这样得到的:

根据线性目标规划具有多个目标函数, 且分别属于不同的优先等级的特点, 其各级目标函数系数中的非基变量的检验数, 都含有不同等级的优先因子, 因此, 检验数可表示为

$$
\sigma_j = z_j - c_j = \sum_{k=1}^{K} a_{kj} P_k - c_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n) .
$$

对于本例来说, 基变量 x_1 的检验数

$$
\sigma_1 = z_1 - c_1 = (2, -1, 3, 4) \begin{pmatrix} 0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} - 0 = -P_1 + 3P_2 + 4P_3 .
$$

把 σ_1 中各级优先因子的系数写成具有 K 行的列向量 $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 并填入表中. 其他非基变量的检验数也如此计算分别填入表中. 便得到表中具有 K 行的检验数矩阵.

第 2 步: 判别满意解

线性目标规划满意解的检验是对单纯形表中检验数矩阵从 P_1 到 P_K 逐行进行的.

如果单纯形表中检验数矩阵的第 $k(1 \leq k \leq K)$ 行的系数均为非正, 且它所在列的前 $k-1$ 个数均为非正, 则表中相应的解为满意解, 停止计算. 否则转第 3 步.

本例中, 表 2.52 中检验数矩阵的 P_1 行中含有正数 2, 所以转入下一步.

第 3 步: 换基迭代

(1) 换入变量的确定. 如果表中检验数矩阵第 $k(1 \leq k \leq K)$ 行中有正数, 且它们所在列

的前第 k- 1 个数均为零, 则取其中最左边正系数对应的变量为换入变量.

(2) 按最小比值确定换出变量, 当存在两个或两个以上相同的最小比值时, 选取具有较高优先级的变量为换出变量.

本例中, x_2 为换入变量, d_1^- 为换出变量, 且 a_{22}为主元.

按单纯形法进行迭代运算, 得新表 2.53, 返回第 2 步.

重复进行第 2, 3 步, 得最终表 2.55,

表 2.53

$c_j \to$			0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
0	x_3	24	5	0	1	-3	0	0	3	0	0	24/5
0	x_2	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0	-
P_2	d_2^-	26	5	0	0	-2	1	0	2	-1	0	26/5
P_3	d_3^-	30	[7]	0	0	-3	0	1	3	0	-1	30/7
$\sigma_j \to$		P_1				-1						
		P_2	5			-2			2	-2		
		P_3	7			-3			3		-1	

表 2.54

$c_j \to$			0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
0	x_3	18/7	0	0	1	-6/7	0	-5/7	6/7	0	[5/7]	18/5
0	x_2	30/7	0	1	0	4/7	0	1/7	-4/7	0	-1/7	-
P_2	d_2^-	32/7	0	0	0	1/7	1	-5/7	-1/7	-1	5/7	32/5
0	x_1	30/7	1	0	0	-3/7	0	1/7	3/7	0	-1/7	-
$\sigma_j \to$		P_1				-1						
		P_2				1/7		-5/7	-1/7	-2	5/7	
		P_3						-1				

表 2.55

$c_j \to$			0	0	0	P_1	P_2	P_3	0	P_2	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_1^+	d_2^+	d_3^+	
0	d_3^+	18/5	0	0	7/5	-6/5	0	-1	6/5	0	1	-
0	x_2	24/5	0	1	1/5	2/5	0	0	-2/5	0	0	15/2
P_2	d_2^-	2	0	0	-1	1	1	0	-1	-1	0	2
0	x_1	24/5	1	0	1/5	-3/5	0	0	3/5	0	0	-
$\sigma_j \to$		P_1				-1						
		P_2			-1	1			-1	-2		
		P_3						-1				

表 2.55 所示的满意解 $x_1^* = 24/5, x_2^* = 24/5, z^* = 168/5, d_2^- = 2, d_3^+ = 18/5, d_1^+ = d_1^- = d_2^+ = d_3^- = 0$, 相当于图 2.6 中的 C(24/5, 24/5) 点.

2.8 评价相对有效性的 DEA 模型

2.8.1 DEA 模型的发展

所谓相对有效性是指在同类型的企业或部门(称为决策单元)各投入一定数量的资源、资金或劳动力后, 对其生产的产品的数量、经济效益或社会效益相互间进行比较而言. 评价同类企业或部门的相对有效性是衡量一个企业或部门的科学管理水平的一个重要标记.

自然, 评价一个决策单元, 其主要依据是"投入量"(或称"输入数据")和"产出量"(或称"输出数据"). 例如, 评价一所高等院校, 输入数据是学校的全年经费、教职员工的总人数、各类职称的教师人数、教学用房总面积以及图书、设备、仪器等; 输出数据则应是每年培养的学生人数、毕业生的质量、教师的教学质量和科研成果的数量和质量等, 然后根据这些"投入量"与"产出量"评价这所高校的优劣. 这里的优劣是通过与其他学校相互比较而言的.

1978 年著名的运筹学家查尼斯(A. Charnes)、库珀(W. W. Cooper)及罗兹(E. Rhodes)首先提出了一个评价部门间相对有效性的数据包络分析法(the method of data envelopment analysis), 简称 DEA 方法. 它是根据一组输入和输出的观察值来估计有效生产前沿面. 他们的第一个 DEA 模型称为 C^2R 模型, 是用来评价部门间的相对"规模有效"的. 1985 年提出了单纯评价"技术有效"性的 C^2GS 模型. 1986 年根据研究具有无穷多个决策单元的情况, 提出了 C^2W 模型. 1987 年给出具有"偏好"的锥比率的 C^2WH 模型. 这些模型已经在实际中得到成功的运用.

为了说明 DEA 模型建模的基本思路, 下面看一个例子.

某公司有甲、乙、丙三个企业, 为评价这几个企业的生产效率, 收集到反映其投入(固定资产年净值 x_1, 流动资金 x_2, 职工人数 x_3)和产出(总产值 y_1, 利税总额 y_2)的有关数据如表 2.56 所示.

表 2.56

指标 \ 企业	甲	乙	丙
x_1(万元)	4	15	27
x_2(万元)	15	4	5
x_3(万元)	8	2	4
y_1(万元)	60	22	24
y_2(万元)	12	6	8

由于投入指标与产出指标都不止一个, 故通常采用加权的办法来综合指标值和产出指标值. 设 v_i 为第 i 个投入指标 x_i 的权重, u_r 为第 r 个产出指标 y_r 的权重, 则第 j 个企业投入的综合值为

$\sum_{i=1}^{3} v_i x_{ij}$, 产出的综合值为 $\sum_{r=1}^{2} u_r y_{rj}$, 其效率定义为 $h_j = \dfrac{\sum_{r=1}^{2} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{3} v_i x_{ij}}$

于是问题实际上是确定一组最佳的权变量 v_1, v_2, v_3 和 u_1, u_2, 使第 j 个企业的效率值 h_j 最大. 这个最大的效率评价值是该企业相对于其他企业来说不可能更高的相对效率评价值.

我们限定所有的 h_j 值($j = 1, 2, 3$) 不超过 1, 即 $\max h_j \leq 1$. 这意味着, 若第 k 个企业 $h_k = 1$, 则该企业相对于其他企业来说生产率最高, 或者说这一生产系统是相对有效的; 若 $h_k < 1$, 那么该企业相对于其他企业来说, 生产率还有待提高, 或者说这一生产系统还不是有效的.

根据上述分析, 可以建立确定任一个企业(如第 3 个企业即丙企业) 的相对生产率的最优化模型如下:

$$\max H = h_3,$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} h_j \leq 1, j = 1, 2, 3 \\ u_r \geq 0, r = 1, 2, \ v_i \geq 0, i = 1, 2, 3 . \end{cases}$$

其中

$$h_1 = \frac{60u_1 + 12u_2}{40v_1 + 15v_2 + 8v_3}, \ h_2 = \frac{22u_1 + 6u_2}{15v_1 + 4v_2 + 8v_3}, \ h_3 = \frac{24u_1 + 8u_2}{27v_1 + 5v_2 + 4v_3} .$$

这是一个分式规划模型, 利用查尼斯-库珀变换后, 可以把它转化为一个等价的线性规划模型, 然后利用线性规划的知识进行求解即可.

DEA 方法是运筹学的一个较新的研究领域, 它的众多优点吸引了许多应用工作者. 在国外, 应用范围已扩展到军用飞机的飞行、城市建设、银行信贷等方面. 同时还可用它研究多种方案之间的相对有效性, 甚至可以用来进行政策评价. 目前我国正在进行的各行各业的评价中, DEA 方法是一个较为理想的方法.

本节, 只简单介绍 C^2R 模型, 其他几个模型请参考有关的资料.

2.8.2 C^2R 模型

设有 n 个同类型的部门(又称决策单元), 对每个部门都有 m 种不同的输入以及 p 种不同的输出(即投入 m 种"资源", 产出 p 种"产品"), 它们由表 2.57 给出.

表 2.57

	指标	权数 \ 部门	1	2	…	j	…	n
输入	1	v_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
	2	v_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}
	⋮	⋮	…	…	…	…	…	…
	m	v_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}
输出	1	u_1	y_{11}	y_{12}		y_{1j}	…	y_{1n}
	2	u_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}
	⋮	⋮	…	…	…	…	…	…
	p	u_p	y_{p1}	y_{p2}	…	y_{pj}	…	y_{pn}

其中:

x_{ij}表示第 j 个决策单元关于第 i 种类型投入的总量, $x_{ij} > 0$;

y_{rj}表示第 j 个决策单元关于第 r 种类型产出的总量, $y_{rj} > 0$;

v_i 表示第 i 种类型输入的度量(也称为权系数);

u_r 表示第 r 种类型输出的度量(也称为权系数);

$i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n; r = 1, 2, \cdots, p$.

x_{ij}和 y_{rj}为已知的数据,它可以根据历史的资料或预测的数据得到; v_i 和 u_r 是变量.

对应于权系数 $V = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^T$ 与 $U = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^T$, 每个决策单元都有相应的效率评价指数

$$h_j = \frac{\sum_{r=1}^{p} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

从理论上来说,我们总是可以选取适当的权系数 V 和 U,使其满足:

$$h_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

现在对第 j_0 个决策单元进行效率评价($1 \leq j_0 \leq n$),以权系数 V 和 U 为变量,以第 j_0 个决策单元的效率指数为目标,以所有决策单元的效率指标 $h_j \leq 1$ 为约束,构成如下的最优化模型:

$$\max\ h_{j0} = \frac{\sum_{r=1}^{p} u_r y_{rj0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0}},$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{p} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$V = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^T \geq 0$$

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^T \geq 0.$$

不难看出,利用上述模型评价决策单元 j_0 是不是有效,是相对于其他所有决策单元而言的. 为方便起见,记 y_{rj0}为 y_{r0}, x_{ij0}为 x_{j0}, 同样 Y_{j0}记为 Y_0, X_{j0}记为 X_0, 使用矩阵符号,有

$$(P) \qquad \begin{aligned} \max\ V_P &= \frac{U^T Y_0}{V^T X_0}, \\ \text{s.t.}\ & \frac{U^T Y_j}{V^T X_j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ & V \geq 0, \quad U \geq 0. \end{aligned}$$

其中 $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^T$, $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{pj})^T$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

(P)是一个分式规划,使用查尼斯—库珀变换,可以转化为一个等价的线性规划问题. 为此,令

$$t = \frac{1}{V^T X_0}, \quad \omega = tV, \quad \mu = tU,$$

则有

$$\frac{U^T Y_0}{V^T X_0} = \mu^T Y_0$$

$$\frac{U^T Y_j}{V^T X_j} = \frac{\mu^T Y_j}{\omega^T X_j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\omega^T X_0 = 1, \quad \omega \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

因此分式规划(P)变为

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\max V_P = \mu^T Y_0, \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \omega^T X_j - \mu^T Y_j \geq 0, & j = 1, 2, \cdots, n \\ \omega^T X_0 = 1, \ \omega \geq 0, \ \mu \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

定理 1 分式规划(P)和线性规划(P)在下述意义下等价:

(1) 若 V^0, U^0 为(P)的最优解,则

$\omega^0 = t^0 V^0, \ \mu^0 = t^0 U^0$ 为(P)的最优解,并且最优值相等,其中

$$t^0 = \frac{1}{V^{0T} X_0}.$$

(2) 若 ω^0, μ^0 为(P)的最优解,则 V^0, U^0 也为(P)的最优解,并且最优值相等.

定义 1 若线性规划(P)的最优解 ω^0, μ^0 满足 $V_P = \mu^{0T} Y_0 = 1$,则称决策单元 j_0 为弱 DEA 有效.

定义 2 若线性规划(P)的最优解中存在 $\omega^0 > 0, \mu^0 > 0$ 满足 $V_P = \mu^{0T} Y_0 = 1$,则称决策单元 j_0 为 DEA 有效.

由上面定义知,若决策单元 j_0 为 DEA 有效,则必弱 DEA 有效.

显然线性规划(P)的对偶规划为

$$(D) \qquad \begin{aligned} &\min V_D = \theta, \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + S^- = \theta X_0 \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j - S^+ = Y_0 \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ S^+ \geq 0, S^- \geq 0, \ \theta \text{无约束}. \end{cases} \end{aligned}$$

定理 2 线性规划(P)及其对偶线性规划(D)都存在最优解且最优值 $V_D = V_P \leq 1$.

定理 3 对于对偶线性规划(D)有

(1) 若(D)的最优值 $V_D = 1$,则决策单元 j_0 为弱 DEA 有效;反之亦然.

(2) 若(D)的最优值 $V_D = 1$,并且它的最优解 $\lambda^0, S^{0-}, S^{0+}, \theta^0$,都有 $S^{0-} = 0, S^{0+} = 0$,则决策单元 j_0 为 DEA 有效;反之亦然.

例 22 已知甲、乙、丙三个同行企业,为评价其相对生产率,取投入要素为固定资产 K(亿元)和职工人数 L(千人),产出项目为净产值 Y(亿元),有关数据如表 2.58. 试比较它们的有效性.

表 2.58

	指标	权数 \ 部门	甲	乙	丙
输入	1(K)	v_1	1.5	1	3
	2(L)	v_2	4	3	7
输出	1(Y)	u_1	5	4	8

解 (1) **甲企业对应的** DEA **模型为**:

$$
(D)\quad \min V_D = \theta,\quad
\text{s.t.}\begin{cases}
1.5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + s_1^- = 1.5\theta \\
4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 + s_2^- = 4\theta \\
5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 - s_3^+ = 5 \\
\lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ s_1^- \geq 0,\ s_2^- \geq 0,\ s_3^+ \geq 0 .
\end{cases}
$$

(D) **的最优解为** $\lambda^0 = (0, 1.25, 0)^T$, $\theta^0 = 0.93$, $s_1^{0-} = 0.15$, $s_2^{0-} = s_3^{0+} = 0$. **由于** $\theta^0 < 1$, **所以甲企业不是** DEA **有效**.

(2) **乙企业对应的** DEA **模型为**

$$
(D)\quad \min V_D = \theta,\quad
\text{s.t.}\begin{cases}
1.5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + s_1^- = \theta \\
4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 + s_2^- = 3\theta \\
5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 - s_3^+ = 4 \\
\lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ s_1^- \geq 0,\ s_2^- \geq 0,\ s_3^+ \geq 0 .
\end{cases}
$$

(D) **的最优解为** $\lambda_0 = (0, 1, 0)^T$, $\theta^0 = 1$, $s_1^{0-} = s_2^{0-} = s_3^{0+} = 0$. **可知, 乙企业是** DEA **有效**.

(3) **丙企业对应的** DEA **模型为**

$$
(D)\quad \min V_D = \theta,\quad
\text{s.t.}\begin{cases}
1.5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + s_1^- = 3\theta \\
4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 + s_2^- = 7\theta \\
5\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 - s_3^+ = 8 \\
\lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ s_1^- \geq 0,\ s_2^- \geq 0,\ s_3^+ \geq 0 .
\end{cases}
$$

(D) **的最优解为** $\lambda_0 = (0, 2, 0)^T$, $\theta^0 = 0.85$, $s_1^{0-} = 0.57$, $s_2^{0-} = s_3^{0+} = 0$. **由于** $\theta^0 < 1$, **所以, 丙企业不是** DEA **有效**.

上述计算结果表明, 乙企业的相对生产率最高, 丙企业的相对生产率最低.

2.9 应用实例

线性规划应用非常广泛, 限于篇幅, 我们略举数例. 每例的重点放在建立相应的数学模型上, 求解过程都省略了.

2.9.1 配料问题

例 23 某养鸡专业户，养鸡 1 000 只，用大豆和谷物饲料混合喂养，每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 公斤；其中应至少含有 0.1 公斤蛋白质和 0.002 公斤钙. 已知每公斤大豆含有 50% 的蛋白质和 0.5% 的钙，价格是每公斤 1.00 元；每公斤谷物含有 10% 的蛋白质和 0.4% 的钙，价格是每公斤 0.30 元. 粮食部门每周只保证供应谷物饲料 2 500 公斤，大豆供应量不限，问如何搭配这两种饲料，才能使喂养成本最低?

解 设每周需要供应大豆和谷物各 x_1, x_2 公斤，则由它们配合而成的混合饲料总量应恰好为鸡群一周吃完，从而有 $x_1 + x_2 = 7 \times 1\,000 \times 0.5$ 即 $x_1 + x_2 = 3\,500$.

由蛋白质要求，又有 $50\% x_1 + 10\% x_2 \geq 7 \times 1\,000 \times 0.1$，即 $5x_1 + x_2 \geq 7\,000$.

同样由钙质要求，有 $5x_1 + 4x_2 \geq 14\,000$.

最后由供应谷物饲料的限制，有 $x_2 \leq 2\,500$.

目标是喂养成本最低，即 $z = x_1 + 0.3x_2$ 为最小.

综上所述，得如下数学模型:

$$\min z = x_1 + 0.3x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 = 3\,500 \\ 5x_1 + x_2 \geq 7\,000 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 14\,000 \\ x_2 \leq 2\,500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

求解得最优方案

$x_1^* = 1\,000, x_2^* = 2\,500, z^* = 1\,750$.

2.9.2 综合生产问题

例 24 某工厂加工 A, B, C 三种元件，三种元件在粗加工、精加工和包装检验三个车间所需的单位工时，单位价格和各车间总工时限额如表 2.59 所示. 问如何安排生产，可获最大总产值.

表 2.59

	A	B	C	各车间工时
粗加工	1	2	1	430
精加工	3	0	2	460
检查包装	1	4	0	420
单位价格(元)	30	20	50	

解 设生产 A, B, C 元件分别为 x_1, x_2, x_3，件，其数学模型为

$$\max Z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 460 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 420 \\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3)&. \end{aligned}$$

引入松弛变量 x_4, x_5, x_6, **化为标准形式**:

$$\max Z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 &= 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 &= 420 \\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)&. \end{aligned}$$

用单纯法解之, 得最终表 2.60.

表 2.60

c_j			30	20	50	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
20	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0
50	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0
0	x_6	20	2	0	0	-2	1	1
Z		13500	40	0	0	10	20	0

因此, 最优方案是:

A **元件不生产**, B **元件生产** 100 **件**, C **元件生产** 230 **件, 可获得最大产值** 13500 **元. 同时由最终表可以看出: 粗加工工时的影子价格为** 10 **元/工时, 精加工工时的影子价格为** 20 **元/工时, 检验包装车间剩余** 20 **个工时.**

(1) **该厂附近有甲、乙两个小厂愿意承接粗加工和精加工任务. 但受各种因素的限制, 该厂只能与一个厂签订一种加工合同. 为增加收益, 该厂应如何分别与两厂签订合同? 已知甲乙两厂分别提出的条件见表** 2.61.

表 2.61

	粗加工	**精加工**
甲厂	3 **元/工时**	17 **元/工时**
乙厂	8 **元/工时**	16 **元/工时**

解　首先要对粗加工工时 b_1 **和精加工工时** b_2 **作灵敏度分析, 以便求出在保证现行最优基** B **的前提下,** b_1 **和** b_2 **的允许增加量.**

从最终表知

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/2 - 460/4 \\ 230 \\ -2b_1 + 880 \end{pmatrix} \geq 0 .$$

得

$$230 \leq b_1 \leq 440 .$$

即: 粗加工工时在 230 **和** 440 **之间时, 最优基不变. 因为现有** 430 **粗加工工时, 所以, 该厂为了进一步提高总收益, 在不改变现行生产方案的前提下可追加粗加工工时** 440- 430= 10. **又由**

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ b_2 \\ 420 \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

得

$$440 \leq b_2 \leq 860 .$$

即: 还可追加精加工工时 860- 460= 400.

根据粗加工工时的影子价格 10 **元/工时, 追加** 10 **个粗加工工时可多获产值** 10× 10= 100 **元; 根据精加工工时的影子价格为** 20 **元/工时, 追加** 400 **个精加工工时可多获产值** 20× 400= 8 000 **元.**

若与甲厂签订加工合同, 要付甲厂加工费分别是 3× 10= 30 **和** 17× 400= 6 800(**元**), **该厂净获利为** 100- 30= 70(**元**) **或** 8 000- 6 800= 1 200(**元**).

若与乙厂签订加工合同, 要付乙厂加工费分别是 8× 10= 80 **和** 16× 400= 6 400(**元**), **该厂净获利为** 100- 80= 20(**元**) **或** 8 000- 6 400= 1 600(**元**).

因此, 应与甲厂签订粗加工合同 10 **个工时, 与乙厂签订精加工合同** 400 **个工时的合同可使获利最大为** 70+ 1 600= 1 670(**元**).

(2) **由于市场价格的波动, A 元件的价格有上升趋势, 问在价格达到多少时, A 元件投产才有利.**

对 A 元件的价格系数 c_1 **作灵敏度分析. 若要** x_1 **进基作为产品变量, 必须** x_1 **的检验数** $C_B B^{-1} P_1 - c_1 < 0$.

即

$$(10, 20, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - c_1 < 0, \text{ 亦即 } c_1 > 70.$$

这说明只有当 A 元件的单位价格达到 70 **元才有利于生产.**

(3) **由于市场供求关系的限制, 现在 B 元件最多只能生产** 60 **件, 问应如何调整生产安排?**

在原问题中添加一个约束条件 $x_2 \leq 60$, **引进松弛量** x_7 **得** $x_2 + x_7 = 60$, **把它作为新的一行添加到最终表** 2.61 **中, 得表** 2.62, **并解之. 用对偶单纯形法得最终表** 2.63.

调整后的最优方案是 A 元件不生产, B 元件生产 60 **件, C 元件生产** 230 **件, 最大利润是** 12 700 **元, 比原来减少了** 800 **元.**

由于最终表(表 2.63)的改变, 粗加工工时的影子价格由 10 元/工时降为 0 元/工时. 原来粗加工工时很紧张, 以至需要在外厂加工, 而现在粗加工工时还空余 80 工时. 包装检验工时比原来剩余的更多, 而精加工工时仍很紧张, 影子价格由原来的 20 元/工时上升到 25 元/工时. 因此, 外厂加工的任务也应作出相应的变化. 考虑的方法如前所述. 并且应另辟途径以利用剩余的 80 粗加工工时和 180 个检验包装工时.

表 2.62

c_j			30	20	50	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
20	x_2	100	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	0
50	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	0
0	x_6	20	2	0	0	-2	1	1	0
0	x_7	-40	1/4	0	0	-1/2	1/4	0	1
Z		13500	40	0	0	10	20	0	0

表 2.63

c_j			30	20	50	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
20	x_2	60	0	1	0	0	0	0	1
50	x_3	230	3/2	0	1	0	1/2	0	0
0	x_6	180	1	0	0	0	0	1	-4
0	x_4	80	-1/2	0	0	1	-1/2	0	-2
Z		12700	45	0	0	0	25	0	20

当然也可考虑在上级指令至少生产 100 件的条件下如何安排生产, 讨论的方法与上面相同.

2.9.3 投资计划问题

例 25 某公司经调研分析知, 在今后三年内有四种投资机会. 第 Ⅰ 种方案是在三年内每年年初投资, 年底可获利 15%, 并可将本金收回; 第 Ⅱ 种是在第一年的年初投资, 第二年的年底可获利 45%, 并将本金收回, 但该项投资不得超过 2 万元; 第Ⅲ种是在第二年的年初投资, 第三年的年底可获利 65%, 并将本金收回, 但该项投资不得超过 1.5 万元; 第Ⅳ种是在第三年的年初投资, 年底收回本金, 且可获利 35%, 但该项投资不得超过 1 万元. 现在本公司准备拿出 3 万元来投资, 问如何计划可使到第三年年末本利和最大(仅写出其数学模型, 不求解)?

解 本问题的投资年份有三年, 投资方案有四个, 因而设变量 x_{ij} 为第 i 年投资到第 j 种投资的金额数, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$. 下面进行分析.

第一年年初有第 Ⅰ, Ⅱ 种投资机会, 可供使用的资金为 3 万元. 资金不会闲置, 故有

$$x_{11} + x_{12} = 3.$$

另外,由于第Ⅱ种投资不得超过 2 万元,故有

$$x_{12} \leq 2.$$

第二年年初,此时第一年的第Ⅰ种投资已全部收回,本利和为 $1.15x_{11}$,它可第二年重新投资,投资机会有第Ⅰ,Ⅲ种,因而有

$$x_{21} + x_{23} - 1.15x_{11} = 0.$$

另外,由于第Ⅲ种投资不得超过 1.5 万元,故有

$$x_{23} \leq 1.5.$$

第三年年初,此时第一年的第Ⅱ种投资应全部收回,本利和为 $1.45x_{12}$,第二年投资于Ⅰ的资金亦已收回,本利和为 $1.15x_{21}$,这些资金可供重新投资,这一年的投资机会有第Ⅰ,Ⅳ种,因而有如下约束

$$x_{31} + x_{34} - 1.45x_{12} - 1.15x_{21} = 0.$$

另外,由于第Ⅳ种投资不得超过 1 万元,故有 $x_{34} \leq 1$.

第三年年底,所有本利全部收回.即第二年投资于Ⅲ本利和 $1.65x_{23}$,第三年年初投资于Ⅰ的本利和 $1.15x_{31}$ 及投资于Ⅳ的本利和为 $1.35x_{34}$.归纳上述分析,该问题的数学模型为

$$\max z = 1.65x_{23} + 1.15x_{31} + 1.35x_{34},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 3 \\ x_{12} \leq 2 \\ x_{21} + x_{23} - 1.15x_{11} = 0 \\ x_{23} \leq 1.5 \\ x_{31} + x_{34} - 1.45x_{12} - 1.15x_{21} = 0 \\ x_{34} \leq 1 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

2.9.4 中转调运问题

例 26 已知甲、乙两处分别有 100 吨和 85 吨同种物资外运,A, B, C 三处各需物资 55, 60, 70(吨).物资可以直接运到目的地,也可以经某些中转点转运,已知各处之间的距离(公里)如表 2.64,表 2.65,表 2.66 所示,试确定一个最优的调运方案(最小的总吨公里数).

表 2.64

从 \ 到	甲	乙
甲	0	12
乙	10	0

表 2.65

从 \ 到	A	B	C
甲	10	14	12
乙	15	12	18

表 2.66

从 \ 到	A	B	C
A	0	14	11
B	10	0	4
C	8	12	0

解　这是一个产销平衡的转运问题,解决这类问题的思路是先将它化为无转运的平衡运输问题,再用表上作业法求解.为此,作如下考虑:

(1) 首先根据具体问题求出最大可能中转量 Q;

(2) 纯中转站可视为销量和产量均为 Q 的一个产地和销地;

(3) 兼中转站的产地 A_i 可视为一个销量为 Q 的销地及产量为 a_i+Q 产地;

(4) 兼中转站的销地 B_j 可视为一个产量为 Q 的产地及销量为 b_j+Q 销地;

在上述考虑的基础上,列出产销平衡表,然后用表上作业法求解.

本例的总运量为 185 吨,最大可能中转量 Q 也为 185 吨.甲、乙是兼中转站的产地,A,B,C 是兼中转站的销地.经转化得产销平衡表 2.67,再由表上作业法求解,得最优方案如表 2.68,最小运量为 2 210 吨公里.

表　2.67

	甲	乙	A	B	C	产量
甲	0	12	10	14	12	285
乙	10	0	15	12	18	270
A	10	15	0	14	11	185
B	14	12	10	0	4	185
C	12	18	8	12	0	185
销量	185	185	240	245	255	

表　2.68

	甲	乙	A	B	C	产量
甲	185		55		45	285
乙		185		85		270
A			185			185
B				160	25	185
C					185	185
销量	185	185	240	245	255	

2.9.5　提级加薪问题

例 27　某公司的员工工资有四级,根据公司的业务发展情况,准备招收部分新员工,并将部分员工的工资提升一级.该公司的员工工资及提级前后的编制如表 2.69 所示.其中提级后的编制是计划编制,允许有变化,其中 1 级员工中有 8% 要退休.

公司领导的目标如下:

(1) 提级后在职员工的工资总额不超过 550 千元;

(2) 各级员工不要超过定编人数;

(3) 为调动积极性,各级员工的升级面不少于现有人数的 18%;

(4) 总提级面不大于 20%,但尽可能多提;

(5) 4 级不足编制人数可录用新工人.

表　2.69

级　别(Ⅰ)	1	2	3	4
工资(千元)	8	6	4	3
现有员工数	10	20	40	30
编制员工数	10	22	52	30

问应如何拟定一个满意的方案,才能接近上述目标?

解　设 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示提升到 1,2,3 级和新录用的员工数,P_1,P_2,P_3 和 P_4 分别表示各目标的优先因子:

P_1——提级后在职员工的工资总额不超过 550 千元;

P_2——各级员工不要超过定编人数;

P_3——各级员工的升级面不少于现有人数的 18%;

P_4——总提级面人数不大于 20%, 但尽可能多提;

分别建立各目标约束:

(1) 提级后在职员工的工资总额不超过 550 千元

$$8(10-10\times 8\%+x_1)+6(20-x_1+x_2)+4(40-x_2+x_3)+3(30-x_3+x_4)+d_1^- - d_1^+ = 550 .$$

(2) 各级员工不要超过定编人数

1 级有 $10-10\times 8\%+x_1+d_2^- - d_2^+ = 10$,

2 级有 $20-x_1+x_2+d_3^- - d_3^+ = 22$,

3 级有 $40-x_2+x_3+d_4^- - d_4^+ = 52$,

4 级有 $30-x_3+x_4+d_5^- - d_5^+ = 30$.

(3) 各级员工的升级面不少于现有人数的 18%

对 2 级有 $x_1+d_6^- - d_6^+ = 22\times 18\%$,

对 3 级有 $x_2+d_7^- - d_7^+ = 40\times 18\%$,

对 4 级有 $x_3+d_8^- - d_8^+ = 30\times 18\%$.

(4) 总提级面人数不大于 20%, 但尽可能多提

$$x_1+x_2+x_3+d_9^- - d_9^+ = 100\times 20\% .$$

目标函数:

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^+ + d_3^+ + d_4^+ + d_5^+) + P_3(d_6^- + d_7^- + d_8^-) + P_4(d_9^+ + d_9^-) .$$

2.9.6 生产率比较问题

例 28 以 1997 年全部独立核算企业为对象, 对安徽、江西、湖南和湖北四省进行生产水平的比较. 投入要素取固定资产净值年平均余额(亿元), 流动资金年平均余额(亿元)及从业人员(万人); 产出要素取总产值(亿元)和利税总额(亿元).

样本数据和计算结果见表 2.70(样本数据引自 1997 年中国统计年鉴).

表 2.70

	安 徽	江 西	湖 南	湖 北
固定资产	932.66	583.08	936.84	1306.56
流动资金	980.45	581.64	849.31	1444.30
从业人数	401.8	294.2	443.20	461.00
利税总额	179.29	49.76	144.20	181.41
总 产 值	2196.09	930.22	1659.04	2662.21
全要素相对生产率	1.0000	0.7140	0.9285	1.0000
生产率序号	1	3	2	1

以评价湖南省的全要素相对生产率为例，其 DEA 模型为

$$\min V_D = \theta,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 932.66\lambda_1 + 583.08\lambda_2 + 936.84\lambda_3 + 1306.56\lambda_4 + s_1^- = 936.84\theta \\ 980.45\lambda_1 + 581.64\lambda_2 + 849.31\lambda_3 + 1444.40\lambda_4 + s_2^- = 849.31\theta \\ 401.8\lambda_1 + 294.2\lambda_2 + 443.20\lambda_3 + 461.00\lambda_4 + s_3^- = 443.20\theta \\ 179.29\lambda_1 + 49.76\lambda_2 + 144.20\lambda_3 + 181.41\lambda_4 - s_1^+ = 144.20 \\ 2196.09\lambda_1 + 930.22\lambda_2 + 1659.04\lambda_3 + 2662.21\lambda_4 - s_2^+ = 1659.04 \\ \lambda_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,\ s_i^- \geq 0\quad i = 1,2,3,\quad s_r^+ \geq 0\quad r = 1,2. \end{cases}$$

其解为

$$\theta = 0.9285,\ \lambda_1 = 0.8043,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

$$s_1^- = 119.71,\ s_2^- = 0,\ s_3^- = 88.17,\ s_1^+ = 0,\ s_2^+ = 107.24.$$

习　　题

2.1　**用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题是具有唯一最优解、多重最优解、无界解或无可行解.**

(1) $\max Z = 2x_1 + 3x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(2) $\min Z = -x_1 - x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ 0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

(3) $\max Z = x_1 + x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ 3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2.2　**将下列线性规划模型化为标准型.**

(1) $\max Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

(2) $\min Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束}. \end{cases}$$

(3) $\max Z = -|x| - |y|,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \\ x, y \text{ 无约束}. \end{cases}$$

2.3　**找出下列线性规划问题的所有基本解，并指出其中的基本可行解和最优解.**

(1) $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

(2) $\min Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4,$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0. \end{cases}$$

2.4 **分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步相当于图上的哪一点.**

(1) $\max Z=x_1+2x_2$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1+x_2\leq 27 \\ 4x_1+3x_2\leq 36 \\ x_1,x_2\geq 0. \end{cases}$$

(2) $\min Z=-2x_1-3x_2$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2\leq 6 \\ 3x_1+x_2\leq 15 \\ x_1,x_2\geq 0. \end{cases}$$

2.5 **求解下列线性规划问题:**

(1) $\max Z=-x_1+2x_2+x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\leq 4 \\ x_1+2x_2\quad\leq 6 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0. \end{cases}$$

(2) $\min Z=-3x_1+x_2$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1+x_2\leq 2 \\ 3x_1-x_2\leq 6 \\ x_1,x_2\geq 0. \end{cases}$$

(3) $\max Z=3x_1+5x_2+x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} -4x_1+2x_2+x_3\leq 14 \\ -x_1+x_2-x_3\leq 4 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0. \end{cases}$$

2.6 **分别用二阶段法和大 M 法求解下列线性规划问题，并指出属于哪一类解.**

(1) $\min Z=2x_1+5x_2$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\geq 6 \\ \quad x_2+3x_3\geq 9 \\ x_1,x_2\geq 0. \end{cases}$$

(2) $\max Z=x_1+2x_2+3x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3\leq 9 \\ -5x_1+6x_2+15x_3\leq 15 \\ 2x_1+x_2+x_3\geq 5 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0. \end{cases}$$

2.7 **用改进单纯法求解下述线性规划问题:**

(1) $\max Z=5x_1+2x_2+3x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=30 \\ x_1-5x_2-6x_3\leq 40 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0. \end{cases}$$

(2) $\min Z=5x_1-5x_2-13x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1+x_2+3x_3\leq 20 \\ 12x_1+4x_2+10x_3\leq 90 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0. \end{cases}$$

2.8 **写出下列线性规划问题的对偶问题.**

(1) $\max Z=2x_1+x_2+5x_3$,

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3\le 2\\3x_1+x_2+7x_3\le 3\\x_1+6x_3\le 5\\x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

(2) $\max Z=x_1+x_2+x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3\le 12\\x_1+2x_2+7x_3=6\\x_1+6x_3\ge 4\\x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

(3) $\min Z=4x_1+2x_2+3x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3\le 6\\x_1+2x_2+7x_3=4\\x_1+x_3\ge 2\\x_1\text{ 无约束}, x_2\le 0, x_3\ge 0.\end{cases}$$

2.9 **试用对偶单纯形方法求解下列线性规划问题.**

(1) $\min Z=x_1+x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2\ge 4\\x_1+7x_3\ge 7\\x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

(2) $\max Z=2x_1-x_2+x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2-5x_3\ge 4\\-x_1+9x_2-x_3\ge 3\\4x_1+6x_2+3x_3\le 8\\x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

2.10 **有线性规划问题**

$\max Z=-5x_1+5x_2+13x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\le 20 & ①\\12x_1+4x_2+10x_3\le 90 & ②\\x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

先用单纯形方法求出最优解,然后用灵敏度分析方法分析在下列各种条件下,最优解分别有何变化?

(1) **约束条件①的右端常数由** 20 **变为** 30;

(2) **约束条件②的右端常数由** 90 **变为** 70;

(3) **目标函数中** x_3 **的系数由** 13 **变为** 8;

(4) x_1 **的系数列向量由** $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ **变为** $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$;

(5) **约束条件②改变为** $10x_1+5x_2+10x_3\le 100$;

(6) **增加一个约束条件③** $2x_1+3x_2+5x_3\le 50$.

2.11 **某文教用品厂,其经济结构为:**

产品范围:信封(以盒为单位),公文袋(以捆为单位),便条(以箱为单位);

工人总数: 100 **人;**

原料情况:每天有 30 000 **公斤坯纸;**

生产定额:每个工人每天单独生产三种产品的任何一种定额都是 30 **单位;**

消耗定额: 1 **单位信封用坯纸** 10/3 **公斤,** 1 **单位公文袋用坯纸** 40/3 **公斤,** 1 **单位便条用坯纸** 79/3 **公斤;**

盈利情况：信封、公文袋、便条的单位利润分别为 2 元、3 元、1 元；

请根据上述情况制订经营策略. 如果每个工人每天工资为 20 元, 再增加 1000 人, 又当如何?

2.12 **证明运输问题中, 任何一个方程可以取作多余方程.**

2.13 **判别表 2.71(a)(b)(c)所给出调运方案可否作为表上作业法求解时的初始解, 为什么?**

表 2.71 (a)

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1	20	5					25
A_2		25	30				55
A_3			15	15	40	10	80
A_4						20	20
销量	20	30	45	15	40	30	

(b)

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1					30		30
A_2	10	25					35
A_3		15	25	5		20	65
A_4					20		20
销量	10	40	25	5	50	20	

(c)

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			6	4	10
A_2	4	8		6	18
A_3		2	9		11
销量	4	10	15	10	

2.14 **求下列运输问题的最优解.**

(1)

表 2.72 **调运表** **运价表**

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1					3	2	2	2	1
A_2					6	10	8	5	4
A_3					6	7	6	6	8
销量	4	3	4	4					

(2)

表 2.73　调运表　　　　　　　　　　运价表

	B_1	B_2	B_3	产量	B_1	B_2	B_3
A_1				12	5	1	8
A_2				14	2	4	0
A_3				4	3	6	7
销量	9	10	11				

2.15　某农场承包 100 亩地, 但因土壤等自然条件不同, 土地分为三类. 现要在三类土地上种植三种作物, 各类土地的亩数, 各类植物计划播种面积以及各种作物在各类土地上的亩产量如表 2.74 所示, 问如何安排作物布局可使作物总产量最多?

表 2.74　播种计划表　　　　　　　　　　亩产量表

土地种类 / 作物种类	B_1	B_2	B_3	面积	B_1	B_2	B_3
A_1				100	600	700	500
A_2				500	800	500	850
A_3				400	400	150	300
亩　数	200	300	500				

2.16　某公司有 3 个工厂和 3 个客户. 这 3 个工厂在下一时期将分别制造产品 3 000, 5 000 和 4 000 件. 公司答应卖给客户 1 的数量为 4 000 件, 客户 4 还想尽可能多地购买剩下的产品. 工厂 i 卖给客户 j 的单位利润如表 2.75 所示. 问如何安排生产和供应才使总利润最大?

表　2.75

客户j / 工厂 i	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	15	13	12	14
A_2	18	17	15	12
A_3	13	10	9	10

2.17　用图解法解下列线性目标规划问题.

(1) $\min Z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(d_2^- + d_3^-)$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 15x_1 + 25x_2 + d_1^- - d_1^+ = 600 \\ x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\ x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 40 \\ x_1, x_2 \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

(2) $\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^-$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1\,000 \\ x_1, x_2 \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0, i = 1, 2. \end{cases}$$

2.18　单纯形法求解下列线性目标规划问题.

(1) $\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^- + d_3^+)$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + d_3^- - d_3^+ = 20 \\ x_i \geq 0,\ d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0\ (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

(2) $\min Z = P_1 d_1^- + P_2 d_4^+ + 5P_3 d_2^- + 3P_3 d_3^- + P_4 d_1^+$,

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 45 \\ x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 90 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0\ (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

2.19 某彩色电视机组装工厂, 生产 A, B, C 三种规格的电视机. 装配工作在同一生产线上完成, 三种产品装配时的工时消耗分别为 6 小时, 8 小时和 10 小时. 生产线每月正常工作为 200 小时; 三种规格电视机销售后, 每台获利分别为 500 元, 650 元和 800 元. 每月销量预计为 12 台, 10 台和 6 台. 该厂经营目标如下:

P_1: 利润指标为每月 1.6×10^4 元;

P_2: 充分利用生产能力;

P_3: 加班时间不超过 24 小时;

P_4: 产量以预计销量为标准;

为确定生产计划, 试建立该问题的目标规划模型.

2.20 某公司从两个不同仓库向 3 个居民点提供某种产品, 在计划期内该产品供不应求, 公司决定重点保证某些居民点的需要, 同时又要保证总运费最省. 现在已知总需要超出供应能力 1 500 单位. 从仓库 i 到居民点 j 的单位运输费如表 2.76 所示($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$).

表 2.76

单位运费	居民点 1	居民点 2	居民点 3	库存量
仓库 1	10	4	12	3000
仓库 2	8	10	3	4000
需求量	2000	1500	5000	

公司有下列 6 个有序目标:

(1) 完全满足居民点 3 的需要.

(2) 至少 75% 满足所有居民点的需要.

(3) 使总运费最小.

(4) 从仓库 2 给居民点 1 的货运用船运输, 其最小运货量为 1 000 单位.

(5) 从仓库 1 给居民点 3 和从仓库 2 给居民点 1 的公路是危险公路, 尽可能减少运货量.

(6) 平衡居民点 1 和居民点 2 之间的供货量满意水平.

2.21 试建立下述问题的数学模型(可以不求解):

(1) 某房地产公司有水泥 100 单位, 木材 160 单位和玻璃 400 单位, 用以建造 A 型和 B 型住宅. 建一栋 A 型住宅需要水泥、木材、玻璃分别为 1, 2, 2 单位, 售价每栋 100 万元; 建一栋 B 型住宅需要水泥、木材、玻璃分别为 1, 1, 5 单位, 售价每栋 150 万元. 该公司如何安排两种住宅的建设, 才能使总售价最大?

(2) 一贸易公司专门经营某商品的批发业务. 公司有库容 5 000 单位的仓库. 一月一日, 公司有库存

1 000单位, 并有资金 20 000 元. 估计第一季度该商品价格如表 2.77 所示.

表 2.77

	进货价(元)	出货价(元)
一月	2.85	3.10
二月	3.05	3.25
三月	2.90	2.95

如买进的商品当月到货, 但需到下月才能卖出, 且规定"货到付款". 公司希望本季末库存为 2 000 单位, 问应采取什么样的买进卖出的策略可使 3 个月总的获利最大?

第 3 章　整数规划模型

3.1　引　　言

在第 2 章介绍的线性规划模型与方法中, 对决策变量只限于不能取负值的连续型数值, 即可以是分数或小数. 然而, 在许多经济管理的实际问题中, 决策变量只有取非负的整数才有实际意义. 例如, 最优调度的车辆数, 设置的销售网点数, 指派工作的人数等, 只能取离散的非负整数值. 因此, 进一步研究变量限制为取非负整数的规划问题是很有必要的.

称所有变量都限制为非负整数的数学规划为纯整数规划, 称部分变量限制为非负整数的数学规划为混合整数规划. 本章仅讨论约束条件和目标函数均为线性的整数规划问题, 即整数线性规划问题(以下简称整数规划) . 其数学模型的一般形式是:

求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使 $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 达到最大值或最小值, 并满足

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

x_j 皆为整数或部分为整数 .

人们对整数规划感兴趣, 还因为有些经济管理中的实际问题的解必须满足逻辑条件和顺序要求等一些特殊的约束条件. 此时, 往往需引进逻辑变量(又称 0-1 变量) , 以达到表示 " 是 "(用 1 表示) 与" 非 "(用 0 表示) . 称决策变量均为 0-1 变量的整数规划为 0-1 规划.

严格地说, 整数规划问题是个非线性问题. 这是因为整数规划的可行解集合是由一些离散的非负整数格点所组成, 而不是一个凸集. 迄今为止, 求解整数规划问题尚无统一的有效算法.

求解整数规划问题, 首先会想到能否先不考虑整数性约束, 而去求解相应的线性规划问题(称其为松弛问题) , 然后, 将所得的非整数最优解用" 舍入取整 "的方法得到整数规划的最优解呢? 一般地说, 用" 舍入取整 "方法得到的解不是原问题的最优解, 很可能远远偏离最优解, 甚至是非可行解. 即使是原问题的可行解, 也不会是最优解. 因此, 用" 舍入取整 "法求解整数规划是不可取的.

但由于用整数规划方法求整数最优解需花费较多的人力和计算机机时, 因此, 在处理经济活动中的某些实际问题时, 如果允许目标函数值在某一误差范围内, 有时也可采用" 舍入取整 "所得的整数可行解作为原问题整数最优解的近似.

设 X^* 是原整数规划问题的最优解, X 是其松弛问题的非整数最优解, X 是" 舍入取整 "得的整数可行解, d 为给出目标函数值的允许误差. 由于

$$cX \leq cX^* \leq cX ,$$

所以

$$cX^* - cX \leq cX - cX .$$

当 $cX - cX \le d$ 时,则 X 可作为 X^* 的近似解.

其次,能否考虑将整数规划问题所有可行的整数解完全枚举出来,经过比较其相应的目标函数值,从而得到最优解呢?应该说,此法仅在变量个数很少的情况下才实际有效.对于变量个数稍多的整数规划问题则不适用.例如,在3.5节将介绍的指派问题中,当变量数 $n=10$ 时,就有 $10! > 3\times 10^6$ 个可行解,当 $n=20$ 时,$20! > 2\times 10^{18}$,如果一一计算,就是用高速计算机也无法处理,所以,也是不可取的.为此,有必要对不同的整数规划问题找出有效的特殊解法.

本章在介绍整数规划的数学模型之后,将主要介绍求解整数规划的分枝定界法、0-1规划的隐枚举法和指派问题的匈牙利法,最后举出经济管理活动中的几个应用实例.

3.2 整数规划问题及其数学模型

1. 生产计划问题

例1 某工厂生产 A_1, A_2 两种产品,产品分别由 B_1, B_2 两种部件组装而成.每件产品所用部件数量和部件的产量限额以及产品利润由表3.1给出.应如何安排 A_1, A_2 的生产数量,该厂才能获取最大利润?

表 3.1

部件 / 产品	B_1	B_2	利润(百元)
A_1	6	1	15
A_2	4	3	20
部件的最大产量	25	10	

解 设 x_1, x_2 分别表示产品 A_1 和 A_2 的产量,依题意,该问题的数学模型是

$$\max Z = 15x_1 + 20x_2,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 25 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{且皆为整数}. \end{cases}$$

这是个纯整数规划问题,又因为约束条件和目标函数的系数全为整数,故亦称全整数规划问题.

2. 投资项目选择问题

例2 某单位有5个拟选择的投资项目,其所需投资额与期望收益如表3.2所示。

由于各项目之间有一定联系,A,C,E 之间必须选择一项,且仅需选择一项;B 和 D 之间需选择,也仅需选择一项;又由于 C 和 D 两项目密切相关,C 的实施必须以 D 的实施为前提条件.该单位共筹集资金15万元,应选择哪些项目投资,使期望收益最大?

表 3.2

项　目	所需投资额(万元)	期望收益(万元)
A	6.0	10.0
B	4.0	8.0
C	2.0	7.0
D	4.0	6.0
E	5.0	9.0

解　考虑到有的项目有可能被选中,也有可能不被选中,设决策变量 $x_j(j=1,2,3,4,5)$ 分别表示项目 A,B,C,D,E,且定义

$$x_j=\begin{cases}0 & \text{表示项目 } j \text{ 不被选中}\\ 1 & \text{表示项目 } j \text{ 被选中}\end{cases}\quad (j=1,2,3,4,5).$$

由于项目 A,C,E 之间必须且仅需选择一项,所以有关系式

$$x_1+x_3+x_5=1.$$

与此相同,B 与 D 之间也有类似关系式

$$x_2+x_4=1.$$

又由于项目 C 的实施要以项目 D 的实施为前提,即选中项目 C 之前必须先选中项目 D,当然也可以只选项目 D 而不选项目 C.换句话说,若 $x_3=1$,则 $x_4=1$;而 $x_3=0$ 时,则 $x_4=0$ 或 $x_4=1$.于是有关系式

$$x_3\leqslant x_4(\text{或记为 } x_3-x_4\leqslant 0).$$

对所有项目投资总额的限制条件为

$$6x_1+4x_2+2x_3+4x_4+5x_5\leqslant 15.$$

目标函数为期望收益最大,可表示为

$$\max Z=10x_1+8x_2+7x_3+6x_4+9x_5.$$

归纳起来,该问题的数学模型为

$$\max Z=10x_1+8x_2+7x_3+6x_4+9x_5,$$

$$\begin{cases}x_1+x_3+x_5=1\\ x_2+x_4=1\\ x_3-x_4\leqslant 0\\ 6x_1+4x_2+2x_3+4x_4+5x_5\leqslant 15\\ x_j \text{ 皆为 } 0 \text{ 或 } 1,(j=1,2,\cdots,5).\end{cases}$$

上述模型虽是一个全整数规划,但与例 1 不同的是,所有的决策变量只限取 0 或 1.因此,又是 0-1 规划.

显然,利用 0-1 变量处理一类“选择问题”是非常方便的.下面再进一步说明各种情况下的“选择”以及相应的数学模型.

假定现有的 m 种资源对可供选择的 n 个项目进行投资的数学模型为

求一组决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j, \tag{3.1}$$

$$\text{满足}\quad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (3.2)\\ &x_j = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (j=1,2,\cdots,n) . \qquad (3.3)\end{aligned}$$

其中, c_j 表示投资第 j 项目获得的期望收益, a_{ij} 表示第 i 种资源投于第 j 项目的数量, b_i 表示第 i 种资源的限量.

如果在可供选择的 $k(k \le n)$ 个项目中, 必须且只能选择一项, 则在(3.2)中加入新的约束条件

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = 1 .$$

如果可供选择的 $k(k \le n)$ 个项目是相互排斥的, 则在(3.2)中加入新的约束条件

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \le 1 .$$

同时, 它还表示在前 k 个项目中至多只能选择一项投资.

如果在可供选择的 $k(k \le n)$ 个项目中, 至少应选择一项投资, 则在(3.2)中加入新的约束条件

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \ge 1 .$$

如果项目 j 的投资必须以项目 i 的投资为前提, 则可在(3.2)中加入新的约束条件

$$x_j \le x_i.$$

如果项目 i 与项目 j 要么同时被选中, 要么同时不被选中, 则在(3.2)中加入新的约束条件

$$x_i = x_j (i \ne j) .$$

如果对第 r 种资源与第 t 种资源的投资是相互排斥的, 即只允许对资源 b_r 与 b_t 中的一种进行投资, 则可将(3.2)的第 r 个和第 t 个约束条件改写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j \le b_r + yM \qquad ①$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j \le b_t + (1-y)M . \qquad ②$$

其中 y 为新引进的 0-1 变量, M 为充分大正数. 易见, 当 $y=0$ 时, ①式就是原来的第 r 个约束条件, 具有约束作用. 此时对②式而言, 无论 x_j 为何值, 都成立, 毫无约束作用, 这就使问题仅允许对第 r 种资源进行投资. 当 $y=1$ 时, ②式对 x_j 起了约束作用, 而①式却成了多余的条件. 到底是满足①还是②, 则视问题在求出最优解后, y 为 0 还是为 1 而定.

如果问题是要求在前 m 个约束条件中至少满足 $k(1<k<m)$个, 则可将(3.2)中的原约束条件修改为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + (1-y_i)M \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge k .$$

其中 y_i 为 0-1 变量, M 为充分大的正数, k 为正整数.

总之,对实际问题建立数学模型,常可借助0-1变量,使含“非此即彼”的、相互排斥的决策变量和约束条件寓于同一模型之中.

3. 指派问题

例3 现有A_1, A_2, A_3, A_4四人,每人都能完成工作B_1, B_2, B_3, B_4四项中的一项.由于各自的技术专长和对工作的熟练程度不同,表3.3给出了各人完成每项工作所需的时间.如果每项工作需安排一人且仅要一人去完成,问如何安排四人使完成四项任务所花费的总时间最少?

表 3.3

时间 工作 人	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	14	10	5
A_2	10	4	12	10
A_3	9	14	15	13
A_4	7	8	11	9

解 由于每项工作需要安排一人且仅要一人去完成,所以,设x_{ij}($i, j = 1, 2, 3, 4$)表示A_i做B_j工作,且

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } A_i \text{ 被安排做 } B_j \text{ 工作} \\ 0 & \text{当 } A_i \text{ 不被安排做 } B_j \text{ 工作} \end{cases},$$

则该问题的数学模型是

$$\min Z = 3x_{11} + 14x_{12} + 10x_{13} + 5x_{14} + 10x_{21} + 4x_{22} + 12x_{23} + 10x_{24} + 9x_{31} + 14x_{32} + 15x_{33} + 13x_{34} + 7x_{41} + 8x_{42} + 11x_{43} + 9x_{44}$$

$$\text{满足} \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \end{array}\right\} (\text{表示 } A_i \text{ 只做一项工作}) \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{array}\right\} (\text{表示 } B_j \text{ 工作只有一人去做}) \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

上述数学模型是个0-1规划.由于它的特殊性,使指派问题有其特殊解法,本章将在3.5节中详细介绍.

3.3 分枝定界法

分枝定界法是求解整数规划问题常用的一种有效解法,它不仅适用于求解纯整数规划

问题,同时也适用于求解混合整数规划问题,特别是对于约束条件较多的大型问题更显示其优越性.

分枝定界法的基本思想是:先不考虑原整数规划问题中的整数性约束,去解其相应的松弛问题.对于最大化问题,松弛问题的最优值就是原问题最优值的上界 Z.如果松弛问题的最优解满足整数性约束,则它就是原问题的最优解.否则,就在不满足整数性约束的变量中,任选一个 x_i(设它的值为 b_i),将新的约束条件 $x_i \leq [b_i]$ 和 $x_i \geq [b_i]+1$ 分别加入原问题中,把原问题分枝为两个子问题,并分别求解子问题的松弛问题.若子问题的松弛问题的最优解满足整数性约束,则不再分枝,其相应的目标函数值就是原问题目标函数值的一个下界 $\underline{Z}$.对不满足整数性约束的子问题,如果需要的话,继续按上述方法进行新的分枝,并分别求解其相应的松弛问题.过程中利用逐步减小 $\bar{Z}$ 或增大 $\underline{Z}$ 的技巧,直至所有的子问题不再分枝,从而求得原问题的最优解止.

下面以本章例 1 的求解来说明分枝定界法的方法步骤.

解 (1) 先不考虑整数性约束,解原问题的松弛问题,所得最优解为 $x_1=2.5$, $x_2=2.5$,如表 3.4 中的(一)所示(即图 3.1 中的 B 点)$Z=87.5$ 是原问题目标函数的上界,并令其下界 $\underline{Z}=0$.

图 3.1

(2) 在不满足整数性约束的变量 x_1, x_2 中任选一个(譬如 $x_1=2.5$),对原问题分别增加约束条件 $x_1 \leq 2$ 和 $x_1 \geq 3$,将原问题分枝成两个子问题,它们相应的松弛问题是问题(1)和问题(2),即

问题(1)

$$
\begin{aligned}
\max\ Z &= 15x_1 + 20x_2, \\
6x_1 + 4x_2 &\leq 25 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\
x_1 \qquad &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0 .
\end{aligned}
$$

问题(2)

$$
\begin{aligned}
\max\ Z &= 15x_1 + 20x_2, \\
6x_1 + 4x_2 &\leq 25 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 10 \\
x_1 \qquad &\geq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0 .
\end{aligned}
$$

此时,原问题的松弛问题的可行域被分割成两个相应的子域 R_1 和 R_2,如图 3.1 所示.显然,被抛去的阴影区域内($2< x_1 < 3$)不含有原问题的整数可行解.

(3) 不妨先求解问题(1).而将问题(2)暂时记录下来,待求解.具体方法和计算结果见表 3.4 中(一)、(二)、(三).问题(1)的最优解,$x_1=2$, $x_2=2.67$ 和 $\max Z=83.3$.

表 3.4

			$C_j\rightarrow$	15	20	0	0	0
	C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(一)	15	x_1	5/2	1	0	3/14	-2/7	
	20	x_2	5/2	0	1	-1/14	3/7	
	Z		175/2	0	0	25/14	30/7	
(二)	15	x_1	5/2	1	0	3/14	-2/7	0
	20	x_2	5/2	0	1	-1/14	3/7	0
	0	x_5	-1/2	0	0	[-3/14]	2/7	1
	Z		175/2	0	0	25/14	30/7	0
(三)	15	x_1	2	1	0	0	0	1
	20	x_2	8/3	0	1	0	1/3	-1/3
	0	x_5	7/3	0	0	1	-4/3	-14/3
	Z		250/3	0	0	0	20/3	25/3

由于问题(1)的解中仍有 x_2 不是整数的，所以，应该对问题(1)分别增加新约束条件 $x_2\leq 2$ 和 $x_2\geq 3$，将子问题(1)分枝为两个子问题，其相应的松弛问题是问题(3)和问题(4)，即

问题(3)

$$\max Z=15x_1+20x_2,\quad \begin{cases}6x_1+4x_2\leq 25\\ x_1+3x_2\leq 10\\ x_1\leq 2\\ x_2\leq 2\\ x_1,x_2\geq 0.\end{cases}$$

问题(4)

$$\max Z=15x_1+20x_2,\quad \begin{cases}6x_1+4x_2\leq 25\\ x_1+3x_2\leq 10\\ x_1\leq 2\\ x_2\geq 3\\ x_1,x_2\geq 0.\end{cases}$$

(4) 将问题(4)暂时记录下来，待求解，并用同样的方法求解问题(3)，得其最优解 $x_1=2, x_2=2$ 和 $\max Z=70$. 由于最优解已满足整数性要求，故不再分枝. 如果再分枝，即使求出新的整数最优解，其最优值也不可能超过 70(因为 $Z=70$ 是问题(3)相应的整数规划问题目标函数值的上界). 容易理解，此时，$Z=70$ 已成为原问题目标函数值的一个新下界. 于是，同时修改原问题的下界，即 $\underline{Z}=\max\{0,70\}=70$.

(5) 按所记录下来待求解问题的顺序，依"后进先出"的原则，分别进行求解. 用同样的方法对问题(4)进行求解，得最优解 $x_1=1, x_2=3$ 和 $\max Z=75$.

同理，对问题(4)不再分枝，且修改原问题的下界 $\underline{Z}=\max\{70,75\}=75$. 以上过程可用树形图 3.2 简明表示.

(6) 对问题(2)进行求解，得最优解 $x_1=3, x_2=1.75$ 和 $\max Z=80$.

由于 x_2 不满足整数性约束，同时 $Z=80>\underline{Z}=75$，所以，对问题(2)相应的整数规划问题进行分枝，其相应的松弛问题为问题(5)和问题(6).

问题(5)

$$\max\ Z = 15x_1 + 20x_2,$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 25 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 . \end{cases}$$

问题(6)

$$\max\ Z = 15x_1 + 20x_2,$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 25 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 . \end{cases}$$

(7) **对问题**(5)**进行求解,得最优解** $x_1 = 3.5, x_2 = 1$ **和** $\max Z = 72.5$(**见图** 3.3). **由于最优值** $Z = 72.5 < \underline{Z} = 75$, **所以不分枝. 因为分枝后, 新问题的最优值不可能超过当前新的下界.**

(8) **对问题**(6)**进行求解,因为无可行解,所以不分枝.**

图 3.2

图 3.3

至此,已将所有分枝的子问题已解决,当前新的下界值相应的解是现行最好的整数可行解,也就是原整数规划问题的最优解,

即
$$x_1^* = 1, x_2^* = 3 .$$

最优目标函数值 $Z^* = 75$.

图 3.3 中每个分枝的地方,称为节点.

从上例的求解过程与分析可以看出,在分枝的同时,借助于不断修改原问题目标函数值的上、下界(对最大化问题)的技巧,而达到简化求解过程,分枝定界法也因此而得名.

对于图 3.3 中的问题(3)、(4)和(5)不再分枝,并不是说它们分枝后不可以找到新的整数可行解,而是表明即使找出新的整数可行解也不会优于目前最好的整数可行解,其目标函数值不会大于目前的下界值.这些可行解已被全部隐含枚举了.实质上,分枝定界法是一种隐枚举法.

图 3.4　用分枝定界法求解最大化整数规划问题的流程框图

不难看出,例 1 的求解过程遵循了以下分枝定界的原则:

(1) 每个松弛问题的最优值均是相应整数规划问题最优值的上界.

(2) 在求解子问题的松弛问题时,

① 若松弛问题无可行解,则相应的子问题也无可行解. 此时不分枝(如图 3.3 中的问题(6)).

② 若松弛问题的解满足整数性约束,则此解为相应子问题的最优解,此时不分枝. 如果目标函数值大于目前的下界值,则修改下界值(如图 3.3 中的问题(3)和(4)).

③ 若松弛问题的解不满足整数性约束,且目标函数值不大于目前的下界值,则不分枝(如图 3.3 中的问题(5)).

④ 若松弛问题的解不满足整数性约束,但目标函数值大于目前的下界值,则对相应的子问题须进一步分枝(如图 3.3 中的问题(2)).

极大化整数规划问题的分枝定界法流程框图如图 3.4 所示.

对于记录下来待求解的子问题的松弛问题,上面是采用“后进先出”的策略进行,其目的是为了及早地得到原整数规划问题的一个可行解. 这个可行解使原整数规划问题的目标函数值取得一个新的下界,从而使所有以后不超过这个新下界的子问题的分枝都不必进行.

与此对应的还有另一种策略. 它是从选择目标函数值最大的松弛问题的分枝开始,以期尽早地找出相应于目标函数值较大的整数可行解,并以这个目标函数值作为新的下界值,将所有不超过此值的子问题的分枝抛弃,从而使所有的子问题尽快得以解决,不再分枝.

用分枝定界法求解混合整数规划问题时,分枝过程只要针对不满足整数性约束的变量进行,而不顾其他连续型变量的取值如何,其方法步骤与例 4 相同.

3.4 0-1 规划的解法

求解 0-1 规划的方法,常见的有两种,即完全枚举法和隐枚举法,现分述如下。

3.4.1 完全枚举法

完全枚举法的基本思想是,首先将全部变量取 0 或 1 的所有组合(解)列出,然后,再逐个检查这些组合(解)是否可行的过程中,利用增加并不断修改过滤条件的办法,减少计算量,达到求出最优解之目的. 下面通过例 4 来说明其方法步骤.

例 4 用完全枚举法求解 0-1 规划问题:

$$\max Z = 17x_1 + 10x_2 + 16x_3,$$

$$4x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad ①$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad ②$$

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \quad ③$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \quad ④$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, 3).$$

解 (1) 列出变量所有的解(x_1, x_2, x_3),共有 $2^3 = 8$ 个: (0, 0, 0)、(0, 0, 1)、(0, 1, 0)、(0, 1, 1)、(1, 0, 0)、(1, 0, 1)、(1, 1, 0)、(1, 1, 1).

(2) 增设过滤条件. 用试探的方法在上述解中找出一个可行解,如(x_1, x_2, x_3) =

(0, 0, 0), 代入目标函数中, 有 $Z = 0$. 因问题是最大化, 且目标函数中各系数均非负, 可知最大值 $Z^* \geq 0$, 即

$$17x_1 + 10x_2 + 16x_3 \geq 0 . \qquad Ⓐ$$

于是将Ⓐ作为新的约束条件增加到原问题中. 称此增加的约束条件Ⓐ为过滤条件.

(3) 寻求最优解. 为了便于检查, 将Ⓐ及约束条件①～④按顺序列入表 3.5 中, 并逐个检查每个解是否满足这 5 个条件. 对不满足的条件, 记以"× ", 同行以右的条件不必继续检查; 对满足的条件, 记以" ", 并继续对下一个约束条件进行检查. 如果所有的约束条件都满足, 则为可行解, 并算出 Z 值, 同时修改过滤条件. 在表 3.5 中, 检查(0, 0, 1)是可行解, 且 $Z = 16$, 修改过滤条件Ⓐ. 即

$$17x_1 + 10x_2 + 16x_3 \geq 16 . \qquad Ⓐ$$

表 3.5

约束条件 / (x_1, x_2, x_3)	Ⓐ	①	②	③	④	Z 值
(0, 0, 0)						0
(0, 0, 1)						16
(0, 1, 0)	×					
(0, 1, 1)						26
(1, 0, 0)	×					
(1, 0, 1)			×			
(1, 1, 0)						27
(1, 1, 1)			×			

继续检查……(1, 1, 0)是可行解, 且 $Z = 27$, 并得新的过滤条件

$$17x_1 + 10x_2 + 16x_3 \geq 27 . \qquad Ⓐ$$

继续进行, 没有新的可行解. 表 3.5 指出, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$是最优解, $Z = 27$ 为最优值.

以上过程, 只有 4 个解进行了全部计算, 其余几个的计算量却很少, 这是增添并不断修改过滤条件所致.

对于最大化问题, 如果把目标函数中 x_j 的系数按非减的顺序重新排列(在上例中, 改写成 $Z = 10x_2 + 16x_3 + 17x_1$), 且仍按上法进行检查, 则更可减少计算量, 较快地找出最优解, 见表 3.6.

完全枚举法求解最大化 0-1 规划的方法步骤见图 3.5.

应当指出, 完全枚举法对于变量较少的 0-1 规划是适用的, 但当变量数很多时, 用该法进行求解是几乎不可能的.

表 3.6

约束条件 / (x_2, x_3, x_1)	Ⓐ	①	②	③	④	Z 值
(0, 0, 0)						0
(0, 0, 1)						17
(0, 1, 0)	×					
(0, 1, 1)		×				
(1, 0, 0)	×					
(1, 0, 1)						27
(1, 1, 0)	×					
(1, 1, 1)		×				

图 3.5　用完全枚举法求解最大化 0-1 规划的流程框图

3.4.2 隐枚举法

0-1 规划的隐枚举法是一种特殊的分枝定界法. 它利用变量只能取 0 或 1 两个值的特性, 进行分枝定界, 以达到隐枚举之目的. 它适用于任何 0-1 规划问题的求解.

要应用隐枚举法, 首先应将 0-1 规划化成以下规范形式:

$$
\begin{aligned}
&\max S = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad (\text{其中所有的 } C_j \leq 0), \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\
&x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

(1) 如果目标函数是求最小值, 则对目标函数两边乘以 -1, 改求最大值;

(2) 如果目标函数中某变量 x_j 的系数 $C_j > 0$, 则令 $x_j = 1 - y_j$ 替换 x_j, 其中 y_j 为 0-1 变量, 于是变量 y_j 在目标函数中的系数 C_j 变成小于 0;

(3) 如果约束条件是"$\geq$"形式, 则可两边乘以 -1, 改为"$\leq$"的形式;

(4) 如果约束条件中含有等式, 则可将每个等式化成两个"$\leq$"形式的不等式. 例如,

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{可化成} \quad
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\
-\sum a_{ij} x_j \leq -b_i
\end{cases}.
$$

如果有 k 个等式约束 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \cdots, k)$, 则可用以下 $(k+1)$ 个"$\leq$"的约束代替:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \\
&-\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -\sum_{i=1}^{k} b_i.
\end{aligned}
$$

任何 0-1 规划都可以化成形如(3.4)式的规范形式.

0-1 规划的隐枚举法的基本思想是: 首先令全部变量取 0(因为目标函数的系数全非正, 此时, 相应的目标函数值 $S = 0$ 就是上界). 如果此解可行, 则为最优解, 计算终止; 否则, 有选择地指定某个变量为 0 或 1, 并把它们固定下来(称为固定变量), 将问题分枝成两个子问题. 继续分别对它们进行检验, 即对未被固定取值的变量(称为自由变量), 令其全部为 0, 检查是否可行. 如果可行, 则它们与固定变量所组成的解就是原问题目前最好的可行解(不一定是最优解), 不再分枝, 其相应的目标函数值就是原问题的一个下界; 否则, 在余下的自由变量中, 继续上述过程. 经过检验, 或者停止分枝, 修改下界, 或者有选择地将某个自由变量, 令其为 0 或 1, 将子问题再分枝. 如此下去, 直到所有的子问题停止分枝, 或没有自由变量止, 并以最大下界值对应的可行解为最优解.

下面仍通过对例 4 的求解, 说明隐枚举法的方法步骤.

解 (1) 例 4 化成隐枚举法所要求的规范形式.

令 $x_1=1-y_1, x_2=1-y_2, x_3=1-y_3$, 并代入, 得

$$\max Z=43-17y_1-10y_2-16y_3,$$

$$\begin{aligned}-4y_2-y_3&\leq 0\\ -5y_1-y_2-2y_3&\leq -2\\ -4y_1+2y_2-3y_3&\leq 2\\ -5y_1-2y_2-3y_3&\leq -3\end{aligned}$$

y_1, y_2, y_3 皆为 0 或 1 .

将目标函数改写成 $\max Z=43+\max S$, 其中 $S=-17y_1-10y_2-16y_3$. 显然上述模型的解与以下模型的解相同:

$$\max S=-17y_1-10y_2-16y_3,$$

$$\begin{aligned}-4y_2-2y_3&\leq 0 &\quad ①\\ -5y_1-y_2-2y_3&\leq -2 &\quad ②\\ -4y_1+2y_2-3y_3&\leq 2 &\quad ③\\ -5y_1-2y_2-3y_3&\leq -3 &\quad ④\end{aligned}$$

y_1, y_2, y_3 皆为 0 或 1 .

(2) 视 y_1, y_2, y_3 为自由变量, 并令 $(y_1, y_2, y_3)=(0,0,0)$, 由于约束条件②、④不成立, 所以, 此解不可行, 但相应的 $S=0$ 却是目标函数值的上界, 记为 $\overline{S}=0$.

对上述不可行的约束进行考察. 易见, 若对约束②和④中具有负系数的变量取 1, 有可能使之成为可行的约束, 往下进行的枚举有可能得到可行解.

到底选择哪个自由变量取值为 1, 将其固定下来? 为了达到减少枚举的目的, 考虑的一种办法是使所有的约束到可行情况的总距离为最小. 所谓到可行情况的距离, 是指将约束变为可行情况, 应在约束的左端所必须减少的数值.

如令 $y_1=1$, 其余变量为 0,

		到可行情况的距离
约束①	$-4\times 0-2\times 0\leq 0$,	0
②	$-5\times 1-1\times 0-2\times 0\leq -2$,	0
③	$-4\times 1+2\times 0-3\times 0\leq 2$,	0
④	$-5\times 1-2\times 0-3\times 0\leq -3$.	0
		总距离 = 0

令 $y_2=1$, 其余变量为 0.

约束①	$-4\times 1-2\times 0\leq 0$,	0
②	$-5\times 0-1\times 1-2\times 0\nleq -2$,	1
③	$-4\times 0+2\times 1-3\times 0\leq 2$,	0
④	$-5\times 0-2\times 1-3\times 0\nleq -3$.	1
		总距离 = 2

令 $y_3=1$, 其余变量为 0,

约束① $-4\times 0-2\times 1\leq 0$, 0

② $-5\times 0-1\times 0-2\times 1\leq -2$, 0

③ $-4\times 0+2\times 0-3\times 1\leq 2$, 0

④ $-5\times 0-2\times 0-3\times 1\leq -3$. 0

总距离 = 0

其中 $y_1=1$ 和 $y_3=1$ 均得到可行情况的总距离最小. 又因为 $C_1=-17<C_3=-16$, 对求最大化的目标函数来讲, C_3 要比 C_1 对 S 值的影响较小, 所以, 先置 $y_3=1$ 和 $y_3=0$ 为固定变量, 将问题分枝成两个子问题:

问题(1) $(y_3=1)$

$$\max S=-16-17y_1-10y_2,$$

$-4y_2\leq 2$ ①′

$-5y_1-y_2\leq 0$ ②′

$-4y_1+2y_2\leq 5$ ③′

$-5y_1-2y_2\leq 0$ ④′

y_1, y_2 皆为 0 或 1 .

问题(2) $(y_3=0)$

$$\max S=-17y_1-10y_2,$$

$-4y_2\leq 0$ ①″

$-5y_1-y_2\leq -2$ ②″

$-4y_1+2y_2\leq 2$ ③″

$-5y_1-2y_2\leq -3$ ④″

y_1, y_2 皆为 0 或 1 .

(3) 检验问题(1). 令自由变量 $y_1=y_2=0$, 并代入问题(1)的所有约束, 均能满足, 所以, $(y_1, y_2)=(0, 0)$ 是可行解, 连同固定变量 $y_3=1$, $(y_1, y_2, y_3)=(0, 0, 1)$ 就是原问题目前最好的可行解, 且 $S=-16$ 是目标函数数值的一个下界, 记为 $\underline{S}=-16$, 不分枝.

(4) 检验问题(2). 令自由变量 $y_1=y_2=0$, $(y_1, y_2)=(0, 0)$ 不是可行解. 但是否应对子问题(2)进一步分枝? 这要看自由变量中是否存在同时满足以下条件的变量 y_j:

(a) 在不满足的约束中, 其系数为负;

(b) 在目标函数中, 其系数 C_j 大于目前最大的下界值减去固定变量的取值与相应系数的乘积. 即

$$C_j>\underline{S}-\sum_{i\in K}C_iy_i \qquad (K\text{ 为固定变量下标集}).$$

只有满足(a)的自由变量, 令其为 1 后才有可能使不可行的约束变成可行. 换句话说, 从满足(a)的自由变量中才有可能找到新的可行解. 而不满足(b)的自由变量, 在令其为 1 后, 即使得到新的可行解, 也不可能使新的目标函数值超过目前的下界值, 故无需继续枚举(这些可行解与非可行解均已被隐枚举了).

在本例中, 对于子问题(2)的不可行约束②″和④″, y_1, y_2 的系数均为负, 且

$$C_1=-17\not>-16-(-16\times 0)=-16,$$

$$C_2=-10>-16-(-16\times 0)=-16.$$

这就是说, 只有自由变量 y_2 同时满足(a)和(b), 所以, 置 $y_2=1$ 和 $y_2=0$ 成为固定变量,

图 3.6

图 3.7　用隐枚举法求解最大化 0-1 规划的流程框图

把子问题(2)继续分枝为两个子问题:

问题(3)　(置 $y_2=1$)

$$\max S=-10-17y_1,$$
$$-5y_1\le -1$$
$$-4y_1\le 0$$
$$-5y_1\le -1$$
y_1 为 0 或 1 .

问题(4)　(置 $y_2=0$)

$$\max S=-17y_1,$$
$$-5y_1\le -2$$
$$-4y_1\le 2$$
$$-5y_1\le -3$$
y_1 为 0 或 1 .

(5) 检验问题(3). 令自由变量 $y_1=0$, 不可行. 令 $y_1=1$, 虽然能满足条件(a), 但不满足条件(b), 即无 $S>\underline{S}=-16$ 的可行解, 所以对子问题(3)不分枝.

检验问题(4). 与问题(3)同理, 不分枝.

(6) 由于所有的子问题均已检验, 并不再分枝, 枚举结束. 因此, 对应最大下界值$\underline{S}=-16$的可行解$(y_1,y_2,y_3)=(0,0,1)$为最优解.

又因为 $x_1=1-y_1$, $x_2=1-y_2$, $x_3=1-y_3$, $\max Z=43+\max S$, 故原问题的最优解为 $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,0)$, $\max Z=27$.

整个求解过程如图 3.6 所示.

用隐枚举法求解最大化 0-1 规划的流程框图如图 3. 7 所示。

3.5　指派问题的解法

指派问题的一般提法是: 设有 n 个人(或机器等) $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 分派去做 n 项工作 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 要求每项工作需且仅需一个人去做, 每个人需做且仅做一项工作. 已知 A_i 完成 B_j 工作的效率(如工时、成本或价值等)为 C_{ij}, 问应如何指派, 才能使总的工作效率最好?

设 X_{ij}表示 A_i 完成 B_j 工作, 并令

$$X_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派 } A_i \text{ 去完成 } B_j \text{ 工作}\\ 0 & \text{当不指派 } A_i \text{ 去完成 } B_j \text{ 工作,}\end{cases}$$

则指派问题数学模型的标准形式为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}\qquad (C_{ij}\ge 0)\ ,$$
$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=1\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$
$$\sum_{i=1}^{n}X_{ij}=1\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
X_{ij} 皆为 0 或 1 .

由 C_{ij}组成的方阵 $C=(C_{ij})_{n\times n}$称为效率矩阵. 只要效率矩阵 C 给定. 指派问题也就相应确定.

匈牙利法是求解指派问题的一种好算法, 由于它由匈牙利数学家柯尼格(D・Konig)提出, 因此而得名.

指派问题有如下性质: 若从效率矩阵(C_{ij})的任何一行(列)各元素中分别减去一个常数

k(k 可正, 也可负) 得到新矩阵(b_{ij}), 则以(b_{ij}) 为效率矩阵的指派问题与原问题有相同的解, 但其最优值比原问题最优值小 k.

匈牙利法就是根据此性质而设计的. 下面通过对例 4 的求解, 说明其方法步骤.

第一步: 变换效率矩阵(C_{ij}), 使变换后的效率矩阵(b_{ij}) 的每行每列出现零元素. 具体的方法是, 对(C_{ij}) 的每行每列的各元素分别减去该行该列的最小元素.

在例 4 中, $n = 4$,

$$(C_{ij}) = \begin{array}{cccc|c} 3 & 14 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & 4 & 12 & 10 & -4 \\ 9 & 14 & 15 & 13 & -9 \\ 7 & 8 & 11 & 9 & -7 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} & & -4 & -2 \\ 0 & 11 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 11 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} = (b_{ij}) .$$

第二步: 试求最优指派方案. 具体的方法是在每行每列都含有零元素的(b_{ij}) 上, 从零元素最少的行(列) 开始, 对一个零元素标记 , 表示一种指派, 同时对同行同列的其他零元素标记ě , 以防止下一个指派落在此行此列上; 如果该行(列) 被考虑的零元素(已标记ě 的零元素不再考虑) 多于一个, 则标记 的零元素所在之列(行) 应当是零元素最少的. 反复进行, 直到(b_{ij}) 上所有的零元素都已标记止.

如果最后能得到与效率矩阵阶数相同的 n 个 , 则必然是分布在不同行不同列上, 将这 n 个 改为 1, 其他所有元素改为 0, 就得到指派问题的一个最优解, 即形成一个完整的指派方案.

对例 4 进行第二步, 有

$$(b_{ij}) = \begin{array}{cccc} ě & 11 & 3 & \\ 6 & & 4 & 4 \\ & 5 & 2 & 2 \\ ě & 1 & & ě \end{array} .$$

由于 的个数 $4 = n$, 所以最优解为

$$(x_{ij}^*) = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

即最优方案是安排 A_1 做 B_4 工作, A_2 做 B_2 工作, A_3 做 B_1 工作, A_4 做 B_3 工作. 花费时间共

$$Z^* = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} x_{ij} = 5 + 4 + 9 + 11 = 29 .$$

这个数字等于各行各列所减最小元素之和.

如果最后得到 的个数 $< n$, 则转入下一步.

例 5　求表 3. 7 所示效率矩阵的指派问题的最小解.

解　按第 1, 2 步进行

$$(C_{ij}) = \begin{array}{ccccc|c} 12 & 7 & 9 & 7 & 9 & -7 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6 & -6 \\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12 & -7 \\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10 & -6 \\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6 & -4 \end{array} \quad \text{第 1 步}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
5 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
9 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 6 & 3 & 6 & 2
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{第 2 步}} \quad
\begin{array}{ccccc}
5 & & 2 & \text{ě} & 2 \\
2 & 3 & \text{ě} & \text{ě} & \\
 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
9 & 8 & & \text{ě} & 4 \\
\text{ě} & 6 & 3 & 6 & 2
\end{array}
= (b_{ij})
$$

表 3.7

人员 \ 费用 \ 任务	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	7	9	7	9
A_2	8	9	6	6	6
A_3	7	17	12	14	12
A_4	15	14	6	6	10
A_5	4	10	7	10	6

此时在不同行不同列的 只有 4 个, 而 $n = 5$, 继续下一步.

第 3 步: 作最少的直线数覆盖所有的零元素. 具体方法是:

(1) 对没有 的行打 号;

(2) 对打 号行上所有ě 元素的列打 号;

(3) 再对打 号列上有 的行打 号;

(4) 重复(2)、(3), 直到得不出新的打 号的行列止;

(5) 对没有打 的行画横线, 对所有打 的列画竖线, 这就得到能覆盖所有零元素最少的直线. 直线的数目等于 的个数.

在例 5 中, 首先对第 5 行打 , 其次对第 1 列打 , 再对第 3 行打 , 最后对第 1, 2, 4 行画横线, 对第 1 列画竖线:

$$
\begin{array}{ccccc}
5 & & 2 & \text{ě} & 2 \\
2 & 3 & \text{ě} & \text{ě} & \\
 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
9 & 8 & & \text{ě} & 4 \\
\text{ě} & 6 & 3 & 6 & 2
\end{array}
$$

第 4 步: 变换新矩阵(b_{ij}), 使之增加新的零元素. 具体方法是:

在没有被直线覆盖的元素中找出最小元素, 并对没画直线行的各元素都减去这最小元素, 对画直线列的各元素都加上这最小元素, 得新矩阵, 返回第 2 步.

继续对例 5 进行第 4 步:

$$
\begin{array}{ccccc}
5 & & 2 & \text{ě} & 2 \\
2 & 3 & \text{ě} & \text{ě} & \\
 & 10 & 5 & 7 & 5 \\
9 & 8 & \text{ě} & & 4 \\
\text{ě} & 6 & 3 & 6 & 2 \\
+2 & & & &
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \\ -2 \\ \\ -2 \\ \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
7 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 3 & 5 & 3 \\
11 & 8 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 4 & 1 & 4 & 0
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\text{返回第二步}}
\begin{array}{ccccc}
7 & & 2 & \text{ě} & 2 \\
4 & 3 & \text{ě} & & \text{ě} \\
 & 8 & 3 & 5 & 3 \\
11 & 8 & & \text{ě} & 4 \\
\text{ě} & 4 & 1 & 4 &
\end{array} .
$$

已求得　的个数 $5 = n$, **故最优解为**

$$
(x_{ij}^{*}) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} .
$$

即最优指派方案是 A_1 **完成** B_2 **任务**, A_2 **完成** B_4 **任务**, A_3 **完成** B_1 **任务**, A_4 **完成** B_3 **任务**, A_5 **完成** B_5 **任务. 相应的最小总费用为** $Z^* = (7+6+7+6+4)+(2+2-2)=32$. **注意到经过变换得到同行和同列中都有两个或两个以上相同数量零元素的情况, 此时, 可任选一行(列)中的某一零元素加圈, 再划去同行(列)的其他零元素, 会出现多重解.**

对于最大化的指派问题, 即求 $\max Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$, **可令** $C_{ij} = M - C_{ij}$, **并取** $M = \max\{c_{ij}\}$, **构造一个新的效率矩阵**$(M - C_{ij})_{n\times n}$. **显然** $M - C_{ij} \geq 0$.

因为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M - C_{ij})X_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} MX_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$

$$
= nM - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}.
$$

所以, 使 $\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M - C_{ij})X_{ij}$ **的最优解就是使** $\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$ **的最优解. 因此,**

$$
\max Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}
$$

$$
= nM - \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M - C_{ij})X_{ij}
$$

在求解实际问题时, 经常会遇到效率矩阵不是方阵的情况, 这时可用增设虚零行(列), 使效率矩阵变成方阵后再用匈牙利法求解.

3.6　应用实例

例 6(**背包问题**)　**一位旅行者出发前准备在自己的背包中携带必需的物品, 已知可供**

选择的物品有 n 种,第 j 种物品的重量为 a_j 公斤,其价值(或效益)为 C_j,如果旅行者的背包所带物品的总重量不得超过 b 公斤,问旅行者应如何选择所带物品,以使总价值(总效益)最大?

解　设 $x_j = \begin{cases} 0 & \text{不携带第 } j \text{ 种物品} \\ 1 & \text{携带第 } j \text{ 种物品} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$,

则背包问题的数学模型为

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$$

$$x_j \text{ 为 } 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

背包问题是经济活动中一种常见的数学模型,在管理科学中很受重视. 下面是其中的一例.

例 7　某采购员准备采购 100 万元的货物,拟在五种畅销的货物中进行选择,已知采购各种货物所需的金额和购进后所能获得的利润如表 3. 8 所示. 问应采购哪几种货物才能总获利最大?

表 3. 8

货　　物	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
采购所需金额(万元)	56	20	54	42	15
利润(万元)	7	5	9	6	3

解　设 $x_j = \begin{cases} 0 & \text{不采购 } P_j \text{ 货物} \\ 1 & \text{采购 } P_j \text{ 货物} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, 5)$

其数学模型为

$$\max S = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5,$$

$$56x_1 + 20x_2 + 54x_3 + 42x_4 + 15x_5 \le 100$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, 5).$$

利用 0-1 规划的隐枚举法进行求解,得最优解和最优值为

$$x_1^* = x_4^* = 0, x_2^* = x_3^* = x_5^* = 1, z^* = 17.$$

即分别购进货物 P_2, P_3 和 P_5,可获利润 17 万元.

根据一维背包问题的特殊结构,还可用较为简单有效的启发式算法: 先比较 c_j / a_j 的比值,后按比值从大到小,依次令其相应的决策变量为 1,直至资源 b 用尽。

对例 7,先计算各种货物可获利润与采购所需金额的比值,分别是 0. 125, 0. 25, 0. 167, 0. 143, 0. 2,再按比值大小依次选取,令 $x_2 = 1$, $x_5 = 1$, $x_3 = 1$, $x_1 = x_4 = 0$. 即只采购货物 P_2, P_3, P_5,可获利润 17 万元,所需采购资金 89 万元。

例 8(仓库选用问题)　某决策者拟在 n 个仓库中决定租用其中的几个,以满足 m 个销售点对货物的需要. 每个销售点的需要量 b_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$,必须从租用的仓库中得到满

足,且只能从租用的仓库得到满足.而对租用的仓库必须支付固定的运营费(如租金、管理费等),同时,还应决定从租用的哪些仓库中运多少货物到销售点处,以使总的费用为最小.

解　设 x_{ij} 表示从租用的仓库 i 运送给销售点 j 的货物量;

g_i 表示租用仓库 i 的固定运营费(即固定成本);

d_i 表示仓库 i 的允许容量;

C_{ij} 表示从仓库 i 运送货物到销售点 j 处的单位运费(即可变成本);

那么,从租用的仓库 i 运送货物到销售点 j 处的总费用应为

$$f_i(X) = \begin{cases} g_i + \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} & \text{当 } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{当 } x_{ij} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

这里的 $f_i(X)$ 是非线性函数.而问题的本身是要在 n 个仓库中租用哪几个,使每个销售点的需要量 b_j 从租用的各仓库得到满足,且只能从租用的各仓库中得到满足.为此,可引进 0-1 变量 y_i,并设

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{若仓库 } i \text{ 被租用} \\ 0 & \text{若仓库 } i \text{ 不被租用}. \end{cases}$$

这样,从仓库 i 运送货物到销售点 j 处的总费用的表达式可改写为

$$f_i(X) = g_i y_i + \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

容易理解,上式对于具体的 i 来说,当 $x_{ij} > 0$ 时,y_i 只能为 1,即第 i 个仓库被租用,其费用为 $g_i + \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$;当 $x_{ij} = 0$ 时,y_i 可能为 0 或 1.但结合问题的目标函数是求总运费最小,因而迫使 $y_i = 0$.

由于 x_{ij} 还应满足

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \leq d_i y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m).$$

因此,该问题的数学模型应为:

求一组变量 y_i 和 x_{ij},使

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[g_i y_i + \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \right],$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq d_i y_i & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \text{所有的 } x_{ij} \geq 0, y_i = 0 \text{ 或 } 1 & (i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, m). \end{cases}$$

这是个混合整数规划，其中变量 y_i 为 0 或 1，x_{ij} 是可不为整数的非负变量.

从该模型建立的过程中可看出，利用 0-1 变量有时还可将非线性函数转化为线性函数，使问题得以简化易解.

例 9（航班分派问题） 某航空公司经营 A，B，C 三个城市之间的航线，这些航线每天班次起飞与到达时间如表 3.9 所示. 设飞机在机场停留的损失费用大致与停留时间的平方成正比，又每架飞机从降落到下班起飞至少需 2 小时准备时间，试决定一个使停留费用损失为最小的分派飞行方案.

表 3.9

航班号	起飞城市	起飞时间	到达城市	到达时间
101	A	9:00	B	12:00
102	A	10:00	B	13:00
103	A	15:00	B	18:00
104	A	20:00	C	24:00
105	A	22:00	C	2:00(次日)
106	B	4:00	A	7:00
107	B	11:00	A	14:00
108	B	15:00	A	18:00
109	C	7:00	A	11:00
110	C	15:00	A	19:00
111	B	13:00	C	18:00
112	B	18:00	C	23:00
113	C	15:00	B	20:00
114	C	7:00	B	12:00

解 如果把从 A，B，C 城市起飞当作要完成的“任务”，那么到达的飞机可看作待分派去完成任务的“人”. 只要飞机到达后两小时，即可分派去完成起飞的任务. 于是可以分别对城市 A，B，C 各列出一个指派问题的效率矩阵，其中的数字为飞机停留的损失费用.

设飞机在机场停留一小时损失 k 元，则停留 2 小时的损失为 $4k$ 元，停留 3 小时的损失为 $9k$ 元，依此类推.

依题意，对 A，B，C 三个城市建立的指派问题的效率矩阵分别如表 3.10 所示.

表 3.10

城市 A

起飞 / 到达	101	102	103	104	105
106	4k	9k	64k	169k	225k
107	361k	400k	625k	36k	64k
108	225k	256k	441k	4k	16k
109	484k	529k	16k	81k	121k
110	196k	225k	400k	625k	9k

城市 B

到达 \ 起飞	106	107	108	111	112
101	256k	529k	9k	625k	36k
102	225k	484k	4k	576k	25k
103	100k	289k	441k	361k	576k
113	64k	225k	361k	289k	484k
114	256k	529k	9k	625k	36k

城市 C

到达 \ 起飞	109	110	113	114
104	49k	225k	225k	49k
105	25k	169k	169k	25k
111	169k	441k	441k	169k
112	64k	256k	256k	64k

对上述指派问题用匈牙利法求解,得以下使停留费用损失最小的方案: (A) 101→(B) 108→(A) 105→(C) 110→(A) 101 ,

(A) 102→(B) 106→(A) 102 ,

(A) 103→(B) 107→(A) 104→(C) 113→(B) 111 →(C) 114→(B) 112→(C) 109→(A) 103 .

停留费用共损失 1 748k 元 .

习　　题

3.1　判断下列说法是否正确:

(1) 整数规划问题解的目标函数值一般优于其相应的松弛问题解的目标函数值.

(2) 用分枝定界法求解一个极大化的整数规划问题时,任何一个可行解的目标函数值是该问题目标函数值的一个下界.

(3) 用分枝定界法求解一个极大化的整数规划问题,当得到多于一个可行解时,通常可任取其中一个作为下界值,经比较后确定是否再进行分枝.

(4) 指派问题效率矩阵的每个元素乘上同一常数 k,将不影响最优指派方案.

(5) 指派问题数学模型的形式与运输问题十分相似,故也可以用表上作业法求解.

3.2　考虑装载货船问题.假定装到船上的货物有五种,各种货物的单位重量 w_i 和单位体积 v_i 以及它们相应的价值 r_i 如表 3.11 所示.

表　3.11

货物编号	w_i(吨)	v_i(米^3)	r_i(万元)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

船的最大载重量和体积分别是 $W=112$ 吨和 $V=109$ 米^3, 现在要确定怎样装运各种货物才能使装运的价值最大. 试建立此问题的数学模型.

3.3　合理下料问题. 要用一批长度为 7.4 米的圆钢做 100 套钢架, 每套由长 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢各一根组成, 应如何下料才能使所用的原料最省, 试建立此问题的数学模型.

3.4　试用 0-1 变量对下列各题分别表示成一般线性约束条件:

(1) $x_1+x_2\leq 2$ 或 $2x_1+3x_2\geq 8$;

(2) 变量 x_3 只能取值 0, 5, 9, 12;

(3) 若 $x_2\leq 4$, 则 $x_5\geq 0$, 否则 $x_5\leq 3$;

(4) 以下 4 个约束条件中至少满足 2 个:

$$x_6+x_7\leq 2$$
$$x_6\leq 1$$
$$x_7\leq 5$$
$$x_6+x_7\geq 3 .$$

3.5　将下列问题表示为混合整数规划模型

问题: $\min z=f_1(x_1)+f_2(x_2)$,

满足约束条件: (1) 或 $x_1\geq 10$, 或 $x_2\geq 10$.

(1) 下列各不等式至少有一个成立:

$$2x_1+x_2\geq 15$$
$$x_1+x_2\geq 15$$
$$x_1+2x_2\geq 15 .$$

(2) $|x_1-x_2|=0$ 或 5 或 10 .

(3) $x_1\geq 0, x_2\geq 0$,

其中

$$f_1(x_1)=\begin{cases}20+5x, & \text{当 } x_1>0\\ 0, & \text{当 } x_1=0\end{cases},$$

$$f_2(x_2)=\begin{cases}12+6x_2, & \text{当 } x_2>0\\ 0, & \text{当 } x_2=0\end{cases}.$$

3.6　某公司拟在市东、西、南三区建立门市部, 拟议中有 7 个位置(点) A_i($i=1,2,\cdots,7$) 可供选择. 并要求:

(1) 在东区, 由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个;

(2) 在西区, 由 A_4, A_5 两个点中至少选一个;

(3) 在南区, 由 A_6, A_7 两个点中只能选一个.

如选用 A_i 点, 设备投资估计为 b_i 万元, 每年可获利润估计为 c_i 万元, 但投资总额不能超过 B 万元. 问应选择哪几个点可使年利润最大? 试建立此问题的 0-1 规划模型.

3.7　某旅行推销员, 从城市 1 出发, 要到另 5 个城市去推销商品, 各城市之间行程如表 3.12 所示.

表　3.12

出发点 \ 到达点	1	2	3	4	5	6
1	0	3	2	1	5	4
2	3	0	1	2	3	1
3	2	1	0	2	2	2
4	1	2	2	0	1	5
5	5	3	2	1	0	2
6	4	1	2	5	2	0

试建立求最短巡　路线的 0-1 规划模型.

3.8　某校篮球队准备从以下 6 名预备队员中选拔 3 名为正式队员，并使平均身高尽可能高．这 6 名预备队员情况如表 3.13 所示．

表　3.13

预备队员	号　码	身高(厘米)	位　置
大张	4	193	中锋
大李	5	191	中锋
小王	6	187	前锋
小赵	7	186	前锋
小田	8	180	后卫
小周	9	185	后卫

队员的挑选要满足下列条件：

(1) 至少补充一名后卫队员；

(2) 大李或小田中间只能入选一名；

(3) 最多补充一名中锋；

(4) 如果大李或小赵入选，小周就不能入选．试建立此问题的数学模型．

3.9　考虑资金分配问题，在今后 3 年内有 5 项工程考虑施工，每项工程的期望收入和年度费用(千元)如表 3.14．假定每一项已经批准的工程要在整个 3 年内完成，目标是要选出使总收入达到最大的那些工程．

表　3.14

工程	费用(千元)			收入(千元)
	第 1 年	第 2 年	第 3 年	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
最大的可用基金数(千元)	25	25	25	—

把这个问题表示成一个 0-1 整数规划模型．

3.10　一条装配线由一系列工作站组成，被装配可制造的产品在装配线上流动的过程中，每站都要完成一道或几道工序，假定一共有 a, b, c, d, e, f 六道工序，这些工序按先后次序在各工作站上完成．关于这些工序有如表 3.15 所示的数据．且规定，在任一给定的工作站上，不管完成哪些工序，能用的总时间不得超过 10 分钟，希望将这些工序分派给各个工作站，并使需要的工作站数最少．试建立此问题的整数规划模型．

表 3.15

工 序	完成时间(分)	前面必须完成的工序
a	3	—
b	5	—
c	2	b
d	6	a, c
e	8	b
f	3	d

3.11 对下列整数规划问题,问用先求解相应的松弛问题,然后凑整的办法能否求得最优整数解?

(1) $\max z = 20x_1 + 10x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1 + 4x_2 \leq 24\\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13\\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 为整数}.\end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 + 2x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leq 14\\ 2x_1 + x_2 \leq 9\\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 为整数}.\end{cases}$$

3.12 将下面非线性的 0-1 整数规划问题,转换成线性整数规划问题.

$$\max z = x_1^2 + x_2x_3 - x_3^3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3\\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1, 2, 3.\end{cases}$$

3.13 用分枝定界法解下列整数规划:

(1) $\max z = 3x_1 + 2x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leq 14\\ 2x_1 + x_2 \leq 9\\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且为整数}.\end{cases}$$

(2) $\max z = 20x_1 + 10x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4\\ 4x_2 - 3x_3 \leq 2\\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3\\ x_1, x_2, x_3 \text{ 皆是非负整数}.\end{cases}$$

3.14 用分枝定界法求解下列混合整数规划:

(1) $\max z = 7x_1 + 9x_2,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1 + 3x_2 \leq 6\\ 7x_1 + x_2 \leq 35\\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且 } x_1 \text{ 为整数}.\end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 + x_2 + 3x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4\\ 4x_2 - 3x_3 \leq 2\\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ 且 } x_1, x_3 \text{ 为整数}.\end{cases}$$

3.15 用完全枚举法求解下列 0-1 规划:

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2\\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4\\ x_1 + x_2 \leq 3\\ 4x_2 + x_3 \leq 6\\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, 3).\end{cases}$$

3.16 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题:

(1) $\max z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 4\\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 3\\ x_2 + x_3 \geq 1\\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1.\end{cases}$$

(2) $\max z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 2\\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \geq 0\\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 2\\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, (j = 1, 2, 3, 4, 5).\end{cases}$$

$$
(3)\quad \begin{array}{l} \max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 . \end{cases} \end{array}
$$

3.17 某工厂有 4 个工人 A_1, A_2, A_3, A_4, 分别均能操作 B_1, B_2, B_3, B_4 四台车床中的一台, 每小时的产值如表 3.16. 求产值最大的分配方案.

表 3.16

工人 \ 产值 \ 车床	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	9	8	7
A_2	3	4	5	6
A_3	2	1	1	2
A_4	4	3	5	6

3.18 某公司要把 4 个有关能源工程项目承包给 4 个互不相关的外商投标者, 规定每个承包商只能且必须承包一个项目, 试在总费用最小的条件下确定各个项目的承包者, 总费用为多少?

各承包商对工程的报价如表 3.17 所示.

表 3.17 单位: 万元

投标者 \ 项目	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

3.19 已知 6 个工厂担任 4 种任务的费用矩阵如下, 问应如何分配任务, 使总费用最小?

$$
C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} .
$$

3.20 设 6 项任务由 4 个工厂担任, 每个工厂可担任 1 至 2 件. 已知各个工厂担任各项任务的费用矩阵如下, 问应如何分配任务, 使总的费用最小?

$$
C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} .
$$

第 4 章　动 态 规 划

4.1　引　　言

动态规划(Dynamic Programming)是 20 世纪 50 年代前后由美国数学家贝尔曼(Richard Bellman)等人建立和发展起来的一种解决多阶段决策问题的优化方法. 所谓多阶段决策问题是指这样一类问题, 该问题的决策过程是一种在多个相互联系的阶段分别作出决策以形成序列决策的过程. 而这些决策都是根据总体最优化这一共同的目标而采取的. 贝尔曼根据一类多阶段决策问题的特征, 发展了动态规划的最优化原理. 该原理概括了动态规划方法的基本思想, 即把一个较复杂的问题, 按照其阶段划分, 分解成若干个较小的局部问题, 然后根据局部问题的递推关系, 依次作出一系列决策, 直到整个问题达到总体最优的目标.

动态规划不仅研究时间变化的决策问题, 而且研究非时间因素的决策问题. 这是因为在这里,"阶段"可以是时间意义上的阶段, 也可以是空间和一般关系意义上的阶段. 动态规划又称为多阶段规划(Multistage Programming).

为简述动态规划方法的基本思想, 现分析如下一最短路线问题.

例 1　如图 4.1 所示, 在 A 处有一油库, E 为一港口. 今需从 A 铺设输油管道到 E 处, 拟在 B_1, B_2, B_3 之一, C_1, C_2, C_3 之一以及 D_1, D_2 之一各建一个中间站, 各站之间的管道走向如图 4.1 所示, 连线旁的数字表示两站间的管道长. 现要求选择 3 个合适的中间站, 使 A 到 E 的总输油管道长度最短.

图　4.1

该工程可划分为四个阶段. 在每一阶段, 当始点确定时, 需要对该阶段管道的走向作出决策, 即确定管道线下一站的位置. 显然每个阶段的决策都不能仅仅以本阶段管道长最短为依据, 而应着眼于全过程的总体利益, 以实现总管道长最短的目标. 因此, 这是一个多阶段决策问题.

该问题的一种解法是把从 A 到 E 的所有可能的管线的长度都计算出来并加以比较, 然

后选取其中最短者. 这就是所谓完全枚举法. 由于这个问题共有 $3\times 3\times 2=18$ 条路线, 因而计算较麻烦. 如果阶段数和备选中间站数都增加, 计算将更困难.

下面的思路将启发我们有效地解决这一问题. 在始点站我们考虑的是这样一个多阶段决策问题:" 从现在出发应经过哪些站点才能使总管道长最短". 而当我们在第一站时, 考虑的仍是这样一个多阶段决策问题:" 从现在出发应经过哪些站点才能使总管道长最短". 这一问题与前一初始问题内容相同, 解决方法也相似. 它是前一问题的子问题. 只要后一问题能够解决, 则前一问题也能解决. 类似地, 在第二站、第三站, 我们面临着同样的问题和同样相似的解决方法. 只是问题变得越来越小和越来越好解决了.

现在把这一思路具体化. 当我们处在 A 点时, 问题自然是:" 如果要获得从该点到终点的最短路线, 那么下一站该选哪一站点最好? "假若我们知道下一站各个站点到终点站的最短路线, 那么问题就很容易解决. 例如, 从表 4. 1 给出的资料很快可以得出, 从 A 出发应该以 B_3 为下一个到达的中间站. 这里, 关键是如何获得从第一站 B_i 到终点 E 的最短路线. 因此, 问题又回到了 A 点时所提出的问题: 下一站该选哪一站点最好. 同样, 我们只要知道下一站各站点 C_i 到终点 E 的最短路线就可作出决策. 类似地继续下去. 第二站各站点 C_i 到终点 E 最短路线的确定将取决于第三站各点 D_i 到终点 E 的最短路线. 而从 D_1 与 D_2 到 E 的管道路线分别只有唯一的一条, 即从 D_1 与 D_2 到 E 的最短路线长度分别为 3 和 4. 至此, 从已知第四阶段的最短路线出发反向递归, 直到求出始点到终点的管道总长最短路线.

表 4. 1

管道路线	从 A 到 B_i 的长度	从 B_i 到 E 的最短路线长度	从 A 到 E 的总长度
从 A 至 B_1	2	11	13
从 A 至 B_2	4	9	13
从 A 至 B_3	3	9	12

下面利用上述分析建立解析式求解例 1.

原问题分为四个阶段, 即 $n=4$; s_k 表示第 k 阶段初管线已铺达位置($k=1, 2, 3, 4$); $d_k(x_k)$ 表示在第 k 阶段拟把管线延伸铺达的下一站位置; $v_k(s_k, d_k(s_k))$ 表示从 s_k 到 $d_k(s_k)$ 之间的管道线段的长, $f_k(s_k)$ 表示从 s_k 出发至终点 E 按最佳线路铺设时的最短管线长.

按过程发展的反向顺序计算可得

$$f_5(s_5)=f_5(E)=0 .$$

$k=4$ 时, $$f_4(D_1)=\min\{D_1E+f_5(E)\}=3+0=3 .$$

同理可得 $$f_4(D_2)=4 .$$

$k=3$ 时, $$f_3(C_1)=\min\{v_3(C_1, d_3(C_1))+f_4(s_4)\}$$

$$=\min\begin{Bmatrix} C_1D_1+f_4(D_1) \\ C_1D_2+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 3+3^* \\ 4+4 \end{Bmatrix}=6 .$$

其中 $d_3(C_1)\in\{D_1, D_2\}$ (因为 $D_3(C_1)=\{D_1, D_2\}$) .

从 C_1 到终点 E 的最短路线是 $C_1\to D_1\to E$; 最短管线长为 6; 最优决策为 $d_3^*(C_1)=D_1$.

同理得

$$f_3(C_2)=\min\begin{Bmatrix}C_2D_1+f_4(D_1)\\C_2D_2+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}6+3\\3+4^*\end{Bmatrix}=7.$$

从 C_2 到 E 的最短路线为 $C_2\to D_2\to E$；最短管线长为 7；最优决策为 $d_3^*(C_2)=D_2$.

$$f_3(C_3)=\min\begin{Bmatrix}C_3D_1+f_4(D_1)\\C_3D_2+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+3^*\\3+4\end{Bmatrix}=6.$$

从 C_3 到 E 的最短路线为 $C_3\to D_1\to E$；最短管线长为 6；最优决策为 $d_3^*(C_3)=D_1$.

$k=2$ 时，
$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix}B_1C_1+f_3(C_1)\\B_1C_2+f_3(C_2)\\B_1C_3+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}7+6\\4+7^*\\6+6\end{Bmatrix}=11.$$

从 B_1 到 E 的最短路线为 $B_1\to C_2\to D_2\to E$；最短管线长为 11；最优决策为 $d_2^*(B_1)=C_2$.

$$f_2(B_2)=\min\begin{Bmatrix}B_2C_1+f_3(C_1)\\B_2C_2+f_3(C_2)\\B_2C_3+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+6^*\\2+7^*\\4+6\end{Bmatrix}=9.$$

从 B_2 到 E 的最短路线为 $B_2\to C_1\to D_1\to E$ 或 $B_2\to C_2\to D_2\to E$；最短管线长为 9；最优决策为 $d_2^*(B_2)=C_1$ 或 C_2.

$$f_2(B_3)=\min\begin{Bmatrix}B_3C_1+f_3(C_1)\\B_3C_2+f_3(C_2)\\B_3C_3+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}6+6\\2+7^*\\5+6\end{Bmatrix}=9.$$

从 B_3 到 E 的最短路线为 $B_3\to C_2\to D_2\to E$；最短管线长为 9；最优决策为 $d_2^*(B_3)=C_2$.

$k=1$ 时，
$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix}AB_1+f_2(B_1)\\AB_2+f_2(B_2)\\AB_3+f_2(B_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}2+11\\4+9\\3+9^*\end{Bmatrix}=12.$$

从 A 到 E 的最短路线为 $A\to B_3\to C_2\to D_2\to E$；最短管线长为 12，最优决策为 $d_1^*(A)=B_3$.

从起点开始，由逐个阶段的最优决策构成的策略为最优策略，即由

$$d_1^*(A)=B_3,\quad d_2^*(B_3)=C_2,\quad d_3^*(C_2)=D_2,\quad d_4^*(D_2)=E,$$

构成最优策略 $p_{14}^*(A)=(B_3,C_2,D_2,E)$.

因此，该问题的最优路线为 $A—B_3—C_2—D_2—E$，总管线长度为 12 单位.

这一解题思路体现了动态规划方法的如下基本特性：多阶段性，无后效性，递归性，总体优化性.

动态规划独特有效的思想和方法使其在经济、管理、生产、技术、军事等部门和领域得到广泛地应用. 尤其在生产计划、资源分配、市场营销、库存管理、设备维修与更新等方面的应用，取得了很好的效果.

4.2　动态规划模型的基本结构

4.2.1　动态规划的基本概念

1. 阶段

根据问题的特点和需要,将问题的全过程恰当地划分为若干个相互联系的阶段,以便把问题分解成若干子问题逐个求解.本章用 k 表示阶段($k \le n$, n 为阶段总数).如例 1, $n = 4$, $k = 1, 2, 3, 4$.

2. 状态与状态变量

状态是系统在变化过程中某个阶段的初始形态表征.它通过系统在某个阶段的出发位置来描述.描述状态的变量称为状态变量.本章用 s_k 表示第 k 阶段的初始状态.如例 1 中用 s_1 表示第一阶段的初始状态,即 $s_1 = A$.通常一个阶段包含若干个状态.第 k 阶段所有可能状态构成的集合称为该阶段的状态集,记为 S_k.例 1 中第二阶段的状态集为 $S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$.

3. 决策与决策变量

决策是指在某一阶段状态给定以后,从该状态演变至下一阶段某状态的选择.描述决策的变量称为决策变量.用 $d_k(s_k)$ 表示第 k 阶段处于状态 s_k 时的决策变量.$d_k(s_k)$ 的可能值全体构成决策集合 $D_k(s_k)$.如例 1 中, $D_1(A) = \{B_1, B_2, B_3\}$.

4. 状态转移与状态转移方程

系统由这一阶段的一个状态转变到下一阶段的另一个状态称为状态转移.状态转移既与状态有关,又与决策有关.描述状态转移关系的方程称为状态转移方程.若第 k 阶段的状态变量 s_k 与该阶段的决策变量 d_k 确定后,第 $k+1$ 阶段的状态变量 s_{k+1} 也随之确定,则它们的关系式

$$s_{k+1} = T_k(s_k, d_k)$$

称为由状态 s_k 转移到状态 s_{k+1} 的状态转移方程.反之,若第 k 阶段的状态变量 s_k 与 $k-1$ 阶段的决策变量 d_{k-1} 确定后,第 $k-1$ 阶段的状态变量 s_{k-1} 也随之确定,则它们的关系式

$$s_{k-1} = T_{k-1}(s_k, d_{k-1})$$

称为由状态 s_k 转移到状态 s_{k-1} 的状态转移方程.

5. 策略与(后部)子策略

由过程的第一阶段开始到终点为止的每阶段的决策 $d_k(s_k)$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) 所组成的决策序列称为全过程策略,简称策略,记为

$$p_{1n}(s_1) = (d_1(s_1), d_2(s_2), \cdots, d_n(s_n)).$$

这里,状态间的转移符合其逻辑关系.全部策略构成策略集,记为 $P_{1n}(s_1)$.

从第 k 阶段某一初始状态 s_k 开始到终点的过程称为全过程的 k 后部子过程.其相应的决策序列

$$p_{kn}(s_k) = (d_k(s_k), d_{k+1}(s_{k+1}), \cdots, d_n(s_n))$$

称为 k 后部子策略,简称子策略.k 后部子策略的全体记为 $P_{kn}(s_k)$.

6. 阶段指标

阶段指标是对过程中某一个阶段的决策效果衡量其优劣的一种数量指标. 第 k 阶段初始状态为 s_k 且采取决策 $d_k(s_k)$ 时的阶段指标记为 $v_k(s_k, d_k(s_k))$.

7. 指标函数与最优指标函数

指标函数是用来对多阶段决策过程决策效果衡量其优劣的一种数量指标, 它是定义在全过程或所有后部子过程上的确定的数量函数, 表示为

$$\begin{aligned} V_{kn}(s_k) &= V_{kn}(s_k, p_{kn}(s_k)) \\ &= V_{kn}(s_k, d_k, s_{k+1}, d_{k+1}, \cdots, s_n, d_n) \ . \end{aligned}$$

由于常见的指标函数是取各阶段指标和的形式, 故本章作此假定, 即

$$V_{kn}(s_k) = \sum_{i=k}^{n} v_i(s_i, d_i(s_i)) \ .$$

其中 $v_i(s_i, d_i(s_i))$ 表示第 i 阶段的初始状态为 s_i 且采取决策 $d_i(s_i)$ 时该阶段的指标值.

指标函数 $V_{kn}(s_k)$ 的最优值称为最优指标函数, 记为 $f_k(s_k)$. 它表示从第 k 阶段的状态 s_k 开始, 选取最优策略(或最优后部子策略)后, 得到的指标函数值. 在例 1 中, $f_1(A)$ 表示从始点 A 到终点 E 的管线最短长度.

从例 1 的计算过程可以看到, 在求解的各个阶段, 我们运用了如下递归关系:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\{v_k(s_k, d_k(s_k)) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ \qquad d_k(s_k) \in D_k(s_k) \quad (k = 4, 3, 2, 1) \\ f_5(s_5) = 0 \end{cases} .$$

这种递归关系就是一种动态规划函数方程.

4.2.2 最优化原理与函数基本方程

在求解上述动态规划问题时, 递归关系的建立和反向递归解法的形成是十分重要的. 而这些是以动态规划的最优化原理为基础的.

所谓动态规划最优化原理, 即:

“作为整个过程的最优策略具有这样的性质, 即无论过去的状态和决策如何, 对前面的决策所形成的状态而言, 余下的诸决策必须构成最优策略.”

这个原理是贝尔曼首先提出来的. 根据这个原理, 可以把多阶段决策问题的求解过程看成是对若干个相互联系的子问题逐个求解的反向递归过程.

由动态规划最优化原理可以得到体现这一原理思想的函数基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \mathrm{opt}\{v_k(s_k, d_k(s_k)) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ \qquad d_k(s_k) \in D_k(s_k) \quad (k = n, n-1, \cdots, 1) \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases} . \tag{4.1}$$

这里, opt 表示“最优”, 即代表“最大”(max)化或“最小”(min)化.

下面的例子将加深对动态规划最优化原理和函数基本方程的进一步理解.

例 2　某商店在未来四个月里, 利用一个仓库经销某种商品. 该仓库的最大容量为 1000 件, 每月中旬订购商品, 并于下月初取到订货. 据估计: 今后四个月这种商品的购价 p_k 和售价 q_k 如表 4.2 所示. 假定商店在 1 月初开始经销时仓库已存有该种商品 500 件, 每月市场需求不限, 问应如何计划每个月的订购与销售数量, 使这四个月的总利润最大(不考虑仓库的存储费用)?

表 4.2

月 份 k	购 价 p_k	售 价 q_k
1	10	12
2	9	9
3	11	13
4	15	17

解 这是一个有两个决策变量(每月的订购量和销售量)的二维多阶段决策问题. 按月份划分为四个阶段, 即 $n=4$, $k=1, 2, 3, 4$.

设状态变量 s_k 表示第 k 月初的库存量; 决策变量 x_k 和 y_k 分别表示第 k 月的订货量和销售量. $H=1000$ 为仓库的最大库容. 状态转移方程为

$$s_{k+1} = s_k + x_k - y_k. \tag{4.2}$$

又设 $v_k(s_k, x_k, y_k)$ 表示第 k 月初仓库存货为 s_k, 订货量为 x_k, 销售量为 y_k 时该月的利润; $f_k(s_k)$ 表示第 k 月初仓库存货为 s_k 时, 从 k 月初到 4 月底按最优策略经营所能获得的最大利润额, 则

$$v_k(s_k, x_k, y_k) = q_k y_k - p_k x_k. \tag{4.3}$$

且有递归关系如下:

$$\begin{aligned} f_k(s_k) &= \max\{v_k(s_k, x_k, y_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ &\quad 0 \leq y_k \leq s_k \\ &\quad 0 \leq x_k \leq H + y_k - s_k \quad (k = 4, 3, 2, 1) \\ f_5(s_5) &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

根据(4.2)、(4.3)和(4.4), 从最后一个阶段开始, 进行反向递归计算:

当 $k=4$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_4(s_4) &= \max\{17y_4 - 15x_4\} \\ &\quad 0 \leq y_4 \leq s_4 \\ &\quad 0 \leq x_4 \leq H + y_4 - s_4. \end{aligned}$$

显然, $y_4^* = s_4$, $x_4^* = 0$ 为最优决策. 这时, $f_4(s_4) = 17s_4$.

当 $k=3$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \max\{13y_3 - 11x_3 + f_4(s_4)\} \\ &\quad 0 \leq y_3 \leq s_3 \\ &\quad 0 \leq x_3 \leq H + y_3 - s_3 \\ &= \max\{13y_3 - 11x_3 + 17(s_3 - y_3 + x_3)\} \\ &\quad 0 \leq y_3 \leq s_3 \\ &\quad 0 \leq x_3 \leq H + y_3 - s_3 \\ &= \max\{17s_3 + 6x_3 - 4y_3\} \\ &\quad 0 \leq y_3 \leq s_3 \\ &\quad 0 \leq x_3 \leq H + y_3 - s_3. \end{aligned}$$

图 4.2

这是一个线性规划问题, 用图解法求解(见图 4.2), 得最优解为

$$x_3^* = H, \; y_3^* = s_3;$$

$$f_3(s_3) = 13s_3 + 6H.$$

仿此继续计算,由 $f_2(s_2) = \max\{6H + 13s_2 + 4x_2 - 4y_2\}$

$$0 \le y_2 \le s_2$$

$$0 \le x_2 \le H + y_2 - s_2.$$

得最优解为 $$x_2^* = H, \quad y_2^* = s_2;$$

$$f_2(s_2) = 9s_2 + 10H.$$

由 $f_1(s_1) = \max\{9s_1 + 10H + 3y_1 - x_1\}$

$$0 \le y_1 \le s_1$$

$$0 \le x_1 \le H + y_1 - s_1.$$

得最优解为 $$x_1^* = 0, \quad y_1^* = s_1;$$

$$f_1(s_1) = 12s_1 + 10H.$$

将 $s_1 = 500$, $H = 1000$ 代入上式并按计算顺序往回反推,可得各个月的最优订货量 x_k^* 和销售量 y_k^* 如下:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= 0, & y_1^* &= s_1 = 500;\\
x_2^* &= H = 1000, & y_2^* &= s_2 = s_1 + x_1^* - y_1^* = 0;\\
x_3^* &= H = 1000, & y_3^* &= s_3 = s_2 + x_2^* - y_2^* = 1000;\\
x_4^* &= 0 & y_4^* &= s_4 = s_3 + x_3^* - y_3^* = 1000.
\end{aligned}$$

即最优决策如表 4.3 所示。

表 4.3

月	s_k	y_k	x_k
1	500	500	0
2	0	0	1000
3	1000	1000	1000
4	1000	1000	0

最大总利润为 $$f_1(500) = 12 \times 500 + 10 \times 1000 = 16000.$$

4.3 动态规划的计算方向

从以上两个例题的计算过程可以看出,反向递归的求解过程是动态规划方法的一个重要特征.这种解题方法的寻优方向与全过程的发展方向相反.而对问题的反向求索往往更有利于对其本质属性的揭示和描述.可以看出,反向递归的求解过程能较好地体现动态规划的最优化原理,因而是求解动态规划问题的一种重要方法.

求解动态规划的另一种重要方法是正向递归.所谓正向递归就是从始点出发逐段向前递归计算,直至终点,以求得全过程的最优解.这时,其寻优方向与全过程的发展方向是一致的.

用正向递归建立的动态规划函数基本方程如下:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{d_k(s_k) \in D_k(s_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(s_k, d_k(s_k)) + f_{k-1}(s_{k-1})\} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\ f_0(s_0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

这里, $f_k(s_k)$为从初始阶段出发到第 k 阶段状态 s_k 止采取最优子策略或最优策略所获得的最优指标函数值. $V_k(s_k, d_k(s_k))$为系统在第 k 阶段状态 s_k 时采取决策 $d_k(s_k)$的阶段指标. 状态变量 s_k 则描述该阶段结束时的系统状况.

从函数基本方程(4.1)与(4.5)所建立的递归关系来看, 反向递归与正向递归两种不同的解题方法所得的结果应该相同. 在求解动态规划问题时, 正向递归的方法有时较为困难, 而反向递归的方法往往更为有效. 甚至有些动态规划问题只能采用反向递归的方法求解, 而无法利用正向递归. 同样, 有些问题只能用正向递归方法求解. 因此, 计算方向应根据问题的特点和所构成的函数基本方程来确定.

下面的动态规划问题将采用正向递归的方法来解决.

例 3　某厂在未来 3 个月连续生产某种产品. 每月初开始生产, 月产量为 x, 生产成本为 x^2, 库存费为每月每单位 1 元. 假如 3 个月的需求量预测为: $b_1 = 100, b_2 = 110, b_3 = 120$. 且初始存货 $s_0 = 0$, 第三个月的期末存货 $s_3 = 0$. 问应如何安排生产使总成本最小?

解　以月为阶段, 该问题划分为 3 个阶段. 设 x_k 为第 k 月的产量, s_k 为第 k 月末的库存量, $v_k(s_k, x_k)$为第 k 月的成本, $f_k(s_k)$为从第 1 月到第 k 月按最优策略安排生产的总成本.

状态转移方程为 $s_{k-1} = s_k - x_k + b_k, s_k \geq 0, x_k \geq 0, k = 1, 2, 3$, 且 $s_0 = 0, s_3 = 0$.

建立正向递归的函数方程为

$$f_k(s_k) = \min_{x_k \geq 0}\{v_k(s_k, x_k) + f_{k-1}(s_{k-1})\} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$f_0(s_0) = 0 .$$

当 $k = 1$ 时,

$$f_1(s_1) = \min v_1(s_1, x_1) = \min\{x_1^2 + s_1\} .$$

由 $x_1^* = b_1 + s_1 - s_0 = b_1 + s_1$, 得

$$f_1(s_1) = (b_1 + s_1)^2 + s_1, s_1 \geq 0.$$

当 $k = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min\{x_2^2 + s_2 + f_1(s_1)\} = \min\{x_2^2 + s_2 + (b_1 + s_1)^2 + s_1\} \\ &= \min\{x_2^2 + s_2 + (b_1 + b_2 - x_2 + s_2)^2 + (b_2 - x_2 + s_2)\} .\end{aligned}$$

利用微分求极值的方法求 x_2 的值, 令上式花括号中关于 x 的函数对 x_2 的导数等于 0, 即

$$2x_2 - 2(b_1 + b_2 + s_2) + 2x_2 - 1 = 0 .$$

求得

$$x_2^* = 1/2(b_1 + b_2 + s_2) + 1/4 \geq 0 .$$

于是有

$$f_2(s_2) = 1/2[(b_1 + b_2 + s_2) + 1/2]^2 - 1/4 + s_2 - b_1, s_2 \geq 0 .$$

当 $k = 3$ 时,

$$\begin{aligned} f_3(s_3) = &\min\{x_3^2 + s_3 + f_2(s_2)\} = \min\{x_3^2 + s_3 + 1/2[(b_1 + b_2 + s_2) + 1/2]^2 \\ &+ s_2 - b_1 - 1/4\} \\ = &\min\{x_3^2 + s_3 + 1/2[(b_1 + b_2 + b_3 - x_3 + s_3) + 1/2]^2 + b_3 - x_3 + s_3 - b_1 - 1/4\} \\ = &\min\{x_3^2 + 1/2[(b_1 + b_2 + b_3 - x_3) + 1/2]^2 + b_3 - x_3 - b_1 - 1/4\} .\end{aligned}$$

用微分法求 x_3 的值, 令上式花括号中关于 x 的函数对 x_3 的导数等于 0, 即

$$2x_3 - (b_1 + b_2 + b_3 - x_3 + 1/2) - 1 = 0 .$$

求得 $$x_3^* = 1/3(b_1 + b_2 + b_3) + 1/2 .$$

将 b_1, b_2, b_3 的值代入上式, 并依次往回迭代, 即可得到每月的产量如下:

$$x_3^* = 110.5 ,$$

$$s_2 = b_3 - x_3 + s_3 = 9.5 ,$$

$$x_2^* = 110 ,$$

$$s_1 = b_2 - x_2 + s_2 = 9.5 ,$$

$$x_1^* = 109.5 .$$

全期的最小总成本为: $f_3(s_3) = 110.5^2 + 0.5 \times 220^2 + 120 - 110.5 - 100 - 0.25$

$$= 36319.5 .$$

4.4 动态规划的求解形式

至今我们在求解动态规划问题的过程中一直采用解析的求解形式. 这是因为在利用递归关系进行计算时, 由于阶段与备选状态都不多, 对过程中间的信息处理并不复杂. 在这种情况下, 解析的求解过程显得很方便. 当问题所划分的阶段和可供选择的状态较多时, 可以采用另一种有效的求解形式进行求解, 这就是表格形式. 利用表格形式, 可以使各阶段、各状态下采取各种决策所获得的各个不同的结果和最佳结果得到有效地管理, 从而有利于问题的解决. 下面的例子可以说明表格形式的动态规划求解过程.

例 4(生产存储问题) 某工厂与购货单位签订的供货合同如表 4.4 所示.

表 4.4

月 份	1	2	3	4	5	6
交货量(百件)	1	2	5	3	2	1

表 4.4 中的数字为月份交货量. 该厂每月最大产量为 4 百件, 仓库的存货能力为 3 百件. 已知每一百件货物的生产费用为一万元. 在生产月份, 每批产品的生产准备费为 4 千元, 仓库保管费每一百件货物每月一千元. 假定 1 月初开始时及 6 月底交货后仓库中都无存货. 问该厂应该如何安排每月的生产与库存, 才能既满足交货合同的要求, 又使总费用最小?

解 以每个月为一个阶段, 整个合同期共划分为 6 个阶段, $n = 6$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

设状态变量 s_k 表示第 k 月初的库存量;

决策变量 d_k 表示第 k 月的计划产量;

c_k 表示 k 月的合同交货量;

状态转移方程为($k = 6, 5, 4, 3, 2, 1$)

$$s_{k+1} = s_k + d_k - c_k .$$

k 月的总费用包括生产费和库存费两项, 记为 $v_k(s_k, d_k)$, 则

$$v_k(s_k, d_k) = \begin{cases} 4 + 10d_k + s_k & \text{当 } 0 < d_k \leq 4 \\ 0 + s_k & \text{当 } d_k = 0 . \end{cases}$$

又设 $f_k(s_k)$ 表示 k 月初仓库存货为 s_k 时, 从 k 月初到 6 月底按最优计划安排生产工厂必须支付的最小总费用, 则有反向递归关系:

$$f_k(s_k) = \min\{v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}$$
$$0 \le d_k \le 4$$
$$s_k + d_k \ge c_k$$
$$f_7(s_7) = 0.$$

当 $k=6$ 时，由于 $c_6=1$, $s_7=0$，所以，s_6 只能是 0 或 1，相应的 d_6 也只能是 1 或 0. 计算结果如表 4.5 所示.

表 4.5

s_6	d_6	$v_6(s_6, d_6)$			s_7	$f_6(s_6)$	$d_6^*(s_6)$
		生产费	库存费	合　计			
0	1	14	0	14	0	14	1
1	0	0	1	1	0	1	0

从表 4.5 可以看出，对应于确定的 s_6，都只有唯一的一个允许决策. 因此，它也就是最优决策 $d_6^*(s_6)$.

当 $k=5$ 时，由于 $c_5=2$, $s_6=0$ 或 1，故 s_5 可能取值为 0, 1, 2, 3.

计算结果如表 4.6 所示.

表 4.6

s_5	d_5	$v_5(s_5, d_5)$			s_6	$f_6(s_6)$	$f_5(s_5)$	$d_5^*(s_5)$
		生　产	库　存	合　计				
0	2	24	0	24	0	14	38	
	3	34	0	34	1	1	35*	3
1	1	14	1	15	0	14	29	
	2	24	1	25	1	1	26*	2
2	0	0	2	2	0	14	16*	0
	1	14	2	16	1	1	17	
3	0	0	3	3	1	1	4*	0

$k=4, 3, 2, 1$ 的计算结果如表 4.7 至表 4.10 所示.

表 4.7

s_4	d_4	$v_4(s_4, d_4)$			s_5	$f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$	$d_4^*(s_4)$
		生　产	库　存	合　计				
0	3	34	0	34	0	35	69*	3
	4	44	0	44	1	26	70	
1	2	14	1	25	0	35	60*	2
	3	34	1	35	1	26	61	
	4	44	1	45	2	16	61	
2	1	14	2	16	0	35	51	
	2	24	2	26	1	26	52	

续表

s_4	d_4	$v_4(s_4, d_4)$			s_5	$f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$	$d_4^*(s_4)$
		生　产	库　存	合　计				
	3	34	2	36	2	16	52	
2	4	44	2	46	3	4	50^*	4
3	0	0	3	3	0	35	38^*	0
	1	14	3	17	1	26	43	
	2	24	3	27	2	16	43	
	3	34	3	37	3	4	41	

表　4.8

s_3	d_3	$v_3(s_3, d_3)$			s_4	$f_4(s_4)$	$f_3(s_3)$	$d_3^*(s_3)$
		生　产	库　存	合　计				
1	4	44	1	45	0	69	114^*	4
2	3	34	2	36	0	69	105^*	3
	4	44	2	46	1	60	106	
3	2	24	3	27	0	69	96^*	2
	3	34	3	37	1	60	97	
	4	44	3	47	2	50	97	

表　4.9

s_2	d_2	$v_2(s_2, d_2)$			s_3	$f_3(s_3)$	$f_2(s_2)$	$d_2^*(s_2)$
		生　产	库　存	合　计				
0	3	34	0	34	1	114	148^*	3
	4	44	0	44	2	105	149	
1	2	24	1	25	1	114	139^*	2
	3	34	1	35	2	105	140	
	4	44	1	45	3	96	141	
2	1	14	2	16	1	114	130^*	1
	2	24	2	26	2	105	131	
	3	34	2	36	3	96	132	
3	0	0	3	3	1	114	117^*	0
	1	14	3	17	2	105	122	
	2	24	3	27	3	96	123	

表　4.10

s_1	d_1	$v_1(s_1, d_1)$			s_2	$f_2(s_2)$	$f_1(s_1)$	$d_1^*(s_1)$
		生　产	库　存	合　计				
0	1	14	0	14	0	148	162	
	2	24	0	24	1	139	163	
	3	34	0	34	2	130	164	
	4	44	0	44	3	117	161^*	4

从表 4.10 开始, 反向追踪可求得全过程的最优策略.

由表 4.10 可知 $f_1(0)=161$, 这就是全过程的最小总费用; 构成最优策略的第一阶段的最优决策为 $d_1^*=4$(1 月份安排生产 4 百件); $s_2=s_1+d_1-c_1=0+4-1=3$. 从表 4.9 可知, $f_2^*(s_2=3)=117$, 相应的最优决策 $d_2^*=0$, ……最后, 得到该问题的最优策略如表4.11所示.

表 4.11

月份 k	月初存货 s_k	最优生产量 d_k^*	交货量 c_k	月底存货量 s_{k+1}	当月费用 $v_k(s_k,d_k)$	各月初到 6 月底的最小总费用 $f_k^*(s_k)$
1	0	4	1	3	44	161
2	3	0	2	1	3	117
3	1	4	5	0	45	114
4	0	3	3	0	34	69
5	0	3	2	1	34	35
6	1	0	1	0	1	1

动态规划求解的表格形式不仅使整个求解过程直观有序且操作方便, 而且能够突出求解过程中所产生的关键信息, 使动态规划方法的运用变得很简练. 这一点可以从下面的例题中反映出来.

例 5(背包问题) 某工厂生产三种产品, 各种产品重量与利润的关系如表 4.12 所示. 现将此三种产品运往市场出售, 运输能力总重量不超过 6 吨. 问如何安排运输使总利润最大?

表 4.12

种类	重量(吨/件)	利润(元/件)
1	2	80
2	4	180
3	3	130

解 按装运产品种类划分为三个阶段, 即装运第 k 种产品为第 k 阶段($k=1,2,3$).

设状态变量 s_k 表示可用于装载前 k 种货物的载重量;

决策变量 x_k 表示装载第 k 种货物的件数;

a_k 为第 k 种货物的单件重量; c_k 为每装一件第 k 种货物所得的利润;

$v_k(s_k,x_k)$ 表示装载 x_k 件第 k 种货物所得的利润;

$f_k(s_k)$表示装载能力为 s_k 时, 采取最优策略装载前 k 种货物所得的最大利润.

状态转移方程为

$$s_k=s_{k-1}+a_kx_k,\quad k=1,2,3$$

其中 $s_0=0$.

根据正向递归关系建立的函数方程为

$$f_k(s_k) = \max\{c_k x_k + f_{k-1}(s_{k-1})\}$$
$$x_k \in \{0, 1, \cdots, [s_k/a_k]\}, \quad k = 1, 2, 3$$
$$f_0(s_0) = 0 .$$

当 $k = 1$ 时,

$$f_1(s_1) = \max\{80x_1\}$$
$$x_1 \in D_1(s_1) .$$

当 $s_1 = 0, 1$ 时, $D_1(s_1) = \{0\}$,

当 $s_1 = 2, 3$ 时, $D_1(s_1) = \{0, 1\}$,

当 $s_1 = 4, 5$ 时, $D_1(s_1) = \{0, 1, 2\}$,

当 $s_1 = 6$ 时, $D_1(s_1) = \{0, 1, 2, 3\}$.

计算结果如表 4.13 所示.

表 4.13

	$c_1 x_1$				$f_1(s_1)$	x_1^*
s_1	0	1	2	3		
0, 1	0				0	0
2, 3	0	80			80	1
4, 5	0	80	160		160	2
6	0	80	160	240	240	3

当 $k = 2$ 时,

$$f_2(s_2) = \max\{180x_2 + f_1(s_2 - 4x_2)\}$$
$$x_2 \in D_2(s_2) .$$

当 $s_2 = 0, 1, 2, 3$ 时, $D_2(s_2) = \{0\}$,

当 $s_2 = 4, 5, 6$ 时, $D_2(s_2) = \{0, 1\}$.

计算结果如表 4.14 所示.

表 4.14

	$180x_2 + f_1(s_2 - 4x_2)$		$f_2(s_2)$	x_2^*
s_2 \ x_2	0	1		
0, 1	0+ 0		0	0
2, 3	0+ 80		80	0
4, 5	0+ 160	180+ 0	180	1
6	0+ 240	180+ 80	260	1

当 $k = 3$ 时,

$$f_3(s_3) = \max\{130x_3 + f_2(s_3 - 3x_3)\}$$
$$x_3 \in D_3(s_3).$$

当 $s_3 = 0, 1, 2$ 时, $D_3(s_3) = \{0\}$,

当 $s_3 = 3, 4, 5$ 时, $D_3(s_3) = \{0, 1\}$,

当 $s_3 = 6$ 时, $D_3(s_3) = \{0, 1, 2\}$.

计算结果如表 4.15 所示.

表 4.15

s_3 \ x_3	$130x_3 + f_2(s_3 - 3x_3)$			$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2		
6	0+ 260	130+ 0	260+ 0	260	2

由计算结果按次序反推, 便可得到最优解有两个:

(1) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; (2) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

最大总利润为 260 元.

在解决较复杂的动态规划问题时, 我们可以将求解过程的解析形式与表格形式结合起来, 使动态规划问题的求解变得更为顺利.

例 6(设备更新问题)　设某企业在今后 4 年内需使用一辆卡车. 现有一辆已使用 2 年的旧车, 根据统计资料分析, 预计卡车的年收入、年维修费(包括油料等费)、一次更新重置费及 4 年后残值如表 4.16 所示, 表中 $k = 1, 2, 3, 4$.

表 4.16

i	0	1	2	3	4	5	6
$r_k(i)$	16	14	11	8	5	2	—
$v_k(i)$	1	2	2	3	4	4	—
$c_k(i)$	—	18	21	25	29	34	—
$t_5(i)$	—	15	12	8	3	0	0

试确定 4 年中的最优更新计划, 以使总利润最大.

解　该问题为四阶段决策问题. $n = 4$.

设状态变量 s_k 表示第 k 年初机器的役龄(已使用的年数);

决策变量 d_k 表示第 k 年年初($k = 1, 2, 3, 4$)对役龄为 s_k 的机器采用的决策, 它只能取两个值: 更新(R)或继续使用(K), 即 $D_k(s_k) = \{R, K\}$.

状态转移方程:
$$s_{k+1} = \begin{cases} s_k + 1 & \text{当 } d_k = K \\ 1 & \text{当 } d_k = R. \end{cases}$$

此外, 设 $t_5(s_5)$ 表示第 4 年底(第 5 年初)役龄为 s_5 的机器残值;

$r_k(s_k)$ 表示第 k 年初役龄为 s_k 的机器继续使用一年的年收入;

$u_k(s_k)$ 表示第 k 年初役龄为 s_k 的机器继续使用一年的年维修费(包括因维修而减少生产所引起的损失);

$c_k(s_k)$ 表示第 k 年初对役龄为 s_k 的机器进行更新时的一次性以旧换新的费用(购买和安装新机器的费用与旧机器残值之差).

第 k 年的年利润为

$$v_k(s_k, d_k) = \begin{cases} r_k(s_k) - u_k(s_k) & \text{当 } d_k = K \\ r_k(0) - u_k(0) - c_k(s_k) & \text{当 } d_k = R . \end{cases}$$

设 $f_k(s_k)$ **表示第** k **年至第 4 年内, 期初有一台役龄为** s_k **的机器, 采用最优更新策略所能获得的最大利润额, 则函数方程为**

$$f_k(s_k) = \max \begin{cases} v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) & \text{当 } d_k = K \\ v_k(s_k, d_k) + f_{k+1}(1) & \text{当 } d_k = R \end{cases}$$

$$d_k \in \{K, R\} \quad k = 4, 3, 2, 1$$

$$f_5(s_5) = t_5(s_5)$$

由上述方程的反向递归关系有, $f_5(s_5) = t_5(s_5)$. **其结果如表** 4.17 **所示.**

表 4.17

s_5	1	2	3	4	5	6
$f_5(s_5)$	15	12	8	3	0	0

当 $k = 4$ **时, 由于** $s_1 = 2$, **所以** s_4 **的可能值为** 1, 2, 3, 5, **即** $s_4 \in \{1, 2, 3, 5\}$. **计算结果如表** 4.18 **所示.**

表 4.18

s_4	1	2	3	4	5
$f_4(s_4)$ d_4^*	24 K	17 K	8 K	— —	- 2 K

计算示例:

$$f_4(1) = \max \begin{cases} r_4(1) - u_4(1) + f_5(2) & \text{当 } d_4(1) = K \\ r_4(0) - u_4(0) - c_4(1) + f_5(1) & \text{当 } d_4(1) = R \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} 14 - 2 + 12^* \\ 16 - 1 - 18 + 15 \end{cases} = 24 .$$

$$d_4^*(1) = K .$$

$$f_4(5) = \max \begin{cases} r_4(5) - u_4(5) + f_5(6) & \text{当 } d_4(5) = K \\ r_4(0) - u_4(0) - c_4(5) + f_5(1) & \text{当 } d_4(5) = R \end{cases}$$

$$= \max \begin{cases} 2 - 4 + 0^* \\ 16 - 1 - 34 + 15 \end{cases} = - 2 .$$

$$d_4^*(5) = K .$$

当 $k = 3$ **时,** $s_3 \in \{1, 2, 4\}$, **计算结果如表** 4.19 **所示.**

表 4.19

s_3	1	2	3	4
$f_3(s_3)$ $d_3^*(s_3)$	29 K	18 R	— —	10 R

计算示例:

$$f_3(1)=\max\begin{array}{ll} r_3(1)-u_3(1)+f_4(2) & \text{@}d_3(1)=K \\ r_3(0)-u_3(0)-c_3(1)+f_4(1) & \text{@}d_3(1)=R \end{array}$$

$$=\max\begin{array}{l} 14-2+17^{*} \\ 16-1-18+24 \end{array}=29.$$

$$d_3^{*}(1)=K.$$

$$f_3(2)=\max\begin{array}{ll} r_3(2)-u_3(2)+f_4(3) & \text{@}d_3(2)=K \\ r_3(0)-u_3(0)-c_3(2)+f_4(1) & \text{@}d_3(2)=R \end{array}$$

$$=\max\begin{array}{l} 11-2+8 \\ 16-1-21+24^{*} \end{array}=18.$$

$$d_3^{*}(2)=R.$$

当 $k=2$ 时, $s_2\in\{1,3\}$, 计算结果如表 4.20 所示.

表 4.20

s_2	1	2	3
$f_2(s_2)$	30	—	19
$d_2^{*}(s_2)$	K	—	R

计算过程:

$$f_2(1)=\max\begin{array}{ll} r_2(1)-u_2(1)+f_3(2) & \text{@}d_2(1)=K \\ r_2(0)-u_2(0)-c_2(1)+f_3(1) & \text{@}d_2(1)=R \end{array}$$

$$=\max\begin{array}{l} 14-2+18^{*} \\ 16-1-18+29 \end{array}=30.$$

$$d_2^{*}(1)=K.$$

$$f_2(3)=\max\begin{array}{ll} r_2(3)-u_2(3)+f_3(4) & \text{@}d_3(3)=K \\ r_2(0)-u_2(0)-c_2(3)+f_3(1) & \text{@}d_2(3)=R \end{array}$$

$$=\max\begin{array}{l} 8-3+10 \\ 16-1-25+29^{*} \end{array}=19.$$

$$d_2^{*}(3)=R.$$

当 $k=1$ 时, $s_1=2$.

$$f_1(2)=\max\begin{array}{ll} r_1(2)-u_1(2)+f_2(3) & \text{@}d_1(2)=K \\ r_1(0)-u_1(0)+f_2(1)-c_1(2) & \text{@}d_1(2)=R \end{array}$$

$$=\max\begin{array}{l} 11-2+19^{*} \\ 16-1-21+30 \end{array}=28.$$

$$d_1^{*}(2)=K.$$

由 $s_1=2$ 与 $d_1^{*}(2)=K$ 可知 $s_2=3$. 从表 4.20 得 $d_2^{*}(3)=R$, 因此, $s_3=1$. 从表 4.19 得 $d_3^{*}(1)=K$, 因此, $s_4=2$. 再从表 4.18 得 $d_4^{*}(2)=K$. 综上所述, 计划期内的最优更新策略为 $\{K,R,K,K\}$, 即今后 4 年内, 仅在第 2 年年初进行一次更新. 4 年可获得最大利润为 28 个单位.

4.5 应用实例

某市工业局拥有投资总额 11 亿元, 用于投资现有企业. 一些专家建议, 这笔投资分配, 应该根据本市工业企业的实际情况和社会需求, 优先保证基础工业的发展. 对于轻纺工业的投资, 应以经济效益为中心目标, 以最佳经济效益值作指标, 来核定分配数额. 局领导采纳了专家们的意见, 决定从 11 亿元资金中划出 3 亿元, 把其中 2 亿元分配给化肥厂, 1 亿元贷给钢铁厂, 将其余 8 亿元委托专家们进行经济效益最优化处理.

于是, 专家们第一步调查了有条件申请投资企业的供产销以及经济效益的情况, 以各企业历年来生产、销售、利润统计资料和今后若干年内市场动态预测为依据, 计算出各企业年经济效益预测值. 然后, 从中选择若干经济效益较好的企业参与投资分配动态分析. 分析的工具为动态规划模型与方法. 于是专家们建立资金分配动态规划模型如下:

给定投资经费 8 亿元, 分配给 n 个企业. 各个企业在不同投资额时的投资效益不同, 以 $g_k(x)$ 表示第 k 个企业投资额为 x 亿元时的效益值. 假设每个方案的投资效益与分配到另一方案的投资额无关. 以 $f_k(x)$ 表示 x 亿元的经费全部投到企业 $k, k+1, \cdots, n$ 的最大总效益值, d_k 表示第 k 个企业分配到的投资数. 则该投资分配的动态规划模型为

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \max\{g_k(d_k) + f_{k+1}(x - d_k)\} \\ d_k &= 0, 1, \cdots, x \\ f_{n+1}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

其中, $k = 1, 2, \cdots, n$; $x = 0, 1, \cdots, 8$.

专家们设计了 3 个计算投资分配的方案. 第一个方案, 有 3 个企业参与投资分配, 即 $n = 3$. 以这 3 个企业在不同的投资情况下, 5 年后可能得到的经济效益预测值为基数(见表 4.21), 进行动态规划分析.

表 4.21　　单位: 亿元

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1(x)$	0	5	35	48	60	90	95	118	136
$g_2(x)$	0	4	45	58	65	70	83	94	115
$g_3(x)$	0	23	58	76	88	95	105	125	135

由动态规划模型(4.6)与表 4.17 中数据可知:

当 $k = 3$ 时, 由 $x - d_3 = 0$, 有 $f_3(x) = g_3(x)$, 即有结果如表 4.22 所示.

表 4.22

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(x)$	0	23	58	76	88	95	105	125	135
d_3^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8

当 $k = 2$ 时, 由(4.6)可得 $f_2(x)$ 与 d_2 的计算结果如表 4.23 所示.

表 4.23

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(x)$	0	23	58	68	103	121	134	146	153
d_2^*	0	0	0	2	2	2	3	3	3, 4

表中计算示例:

$$f_2(0) = g_2(0) + f_3(0) = 0,$$

$$f_2(1) = \max_{d_2=0,1}\{g_2(d_2) + f_3(1-d_2)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(1) \\ g_2(1) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 23^* \\ 4 + 0 \end{Bmatrix} = 23,$$

$$f_2(2) = \max_{d_2=0,1,2}\{g_2(d_2) + f_3(2-d_2)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(2) \\ g_2(1) + f_3(1) \\ g_2(2) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 58^* \\ 4 + 23 \\ 45 + 0 \end{Bmatrix} = 58,$$

$$f_2(6) = \max_{d_2=0,1,\cdots,6}\{g_2(d_2) + f_3(6-d_2)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_2(0) + f_3(6) \\ g_2(1) + f_3(5) \\ g_2(2) + f_3(4) \\ g_2(3) + f_3(3) \\ g_2(4) + f_3(2) \\ g_2(5) + f_3(1) \\ g_2(6) + f_3(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 105 \\ 4 + 95 \\ 45 + 88 \\ 58 + 76^* \\ 65 + 58 \\ 70 + 23 \\ 83 + 0 \end{Bmatrix} = 134,$$

当 $k=1$ **时**, $x=8$. **由**(4.6)**有**

$$f_1(8) = \max_{d_1=0,1,\cdots,8}\{g_1(d_1) + f_2(8-d_1)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} g_1(0) + f_2(8) \\ g_1(1) + f_2(7) \\ g_1(2) + f_2(6) \\ g_1(3) + f_2(5) \\ g_1(4) + f_2(4) \\ g_1(5) + f_2(3) \\ g_1(6) + f_2(2) \\ g_1(7) + f_2(1) \\ g_1(8) + f_2(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 153 \\ 5 + 146 \\ 35 + 134^* \\ 48 + 121 \\ 60 + 103 \\ 90 + 68 \\ 95 + 58 \\ 118 + 23 \\ 136 + 0 \end{Bmatrix} = 169.$$

根据上述计算结果知, $d_1^* = 2$, $d_2^* = 3$, $d_3^* = 3$. **最大经济效益的目标函数值为** $f_1(8) = 169$ **亿元. 即** $f_1(8) = g_1(2) + g_2(3) + g_3(3) = 35$ **亿元**$+ 58$ **亿元**$+ 76$ **亿元**$= 169$ **亿元.**

按照这个方案计算结果, 8 **亿元投资最佳的分配是**, **第一个企业** 2 **亿元**; **第二个企业** 3

亿元;第三个企业 3 亿元.

第二个方案,有 4 个企业(包括第一方案的 3 个企业在内)参加投资分配.其数据见表 4.24.

表 4.24 单位:亿元

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1(x)$	0	5	35	48	60	90	95	118	136
$g_2(x)$	0	4	45	58	65	70	83	94	115
$g_3(x)$	0	23	58	76	88	95	105	125	135
$g_4(x)$	0	3	45	67	75	89	97	110	134

由模型(4.6)式并按第一个方案的计算方法进行类似地计算,可求得第二个方案的最优经济效益值为 $f_1(8)=188$ 亿元.即 $f_1(8)=g_2(2)+g_3(3)+g_4(3)=45$ 亿元 $+76$ 亿元 $+67$ 亿元 $=188$ 亿元.

按照第二个方案,8 亿元投资最佳的分配应是:第一个企业 0 元;第二个企业 2 亿元;第三个企业 3 亿元;第四个企业 3 亿元.

第三个方案,有 5 个企业(包括第二个方案中 2 个经济效益最好的企业在内)参与投资分配.这些企业的数据见表 4.25.

表 4.25 单位:亿元

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_1(x)$	0	25	45	68	76	90	98	118	136
$g_2(x)$	0	18	35	58	75	88	98	114	135
$g_3(x)$	0	23	58	76	88	95	105	125	135
$g_4(x)$	0	3	45	67	75	89	97	110	134
$g_5(x)$	0	2	55	60	70	75	90	120	132

由模型(4.6)式可算出最大经济效益值为 $f_1(8)=205$ 亿元,即

$$f_1(8)=g_1(1)+g_3(2)+g_4(3)+g_5(2)=25+58+67+55=205\ (\text{亿元}).$$

按照第三个方案,8 亿元投资最佳的分配应是:第一个企业 1 亿元;第二个企业 0 元;第三个企业 2 亿元;第四个企业 3 亿元;第五个企业 2 亿元.

由于第三个方案的最大经济效益值为 205 亿元,比第一、二个方案都要高,故专家们建议市工业局领导按第三个方案分配 8 亿元给企业投资.

习　　题

4.1 某厂从国外引进一台设备,由工厂 A 至 G 港口有多条通路可供选择,其路线及费用如图 4.3 所示.现要确定一条从 A 到 G 的使总运费最小的路线.请将该问题描述成一个动态规划问题,然后求其最优解.

4.2 某科学实验室可以用 3 套不同的仪器(A, B, C)中任一套去完成.每做完一次实验后,如果下次实验仍使用原仪器就必须对仪器进行整修,中间要耽搁一段时间;如果下次使用另一套仪器,则卸旧装新也要耽搁一段时间.耽搁时间 t_{ij} 如表 4.26 所示.

图　4.3

表　4.26

本次用仪器 i \ 下次用仪器 j	1	2	3
1(A)	10	9	14
2(B)	9	12	10
3(C)	6	5	8

假定一次实验的时间大于任一 t_{ij}, 因而某套仪器换下后隔一次再用时, 不再另有耽搁. 现在要做 4 次实验, 首次实验指定用仪器 A, 其余各次实验可用任一套仪器. 问应如何安排使用仪器的顺序, 才能使总的耽搁时间最短?

4.3　某公司准备经销某种货物, 货物入库后才能销售, 仓库容量为 900 件. 公司每月月初订购货物, 月底才到货. 每月的销售量由公司自己确定(销售月初库存货物). 现在一至四月各月的单位货物的购货成本及销售价格如表 4.27 所示. 又知一月初存货 200 件, 问如何安排每月的货物购进量与销售量, 使四个月的利润最大.

表　4.27

月　份	购货成本	销售价格
1	40	45
2	38	42
3	40	40
4	42	44

4.4　某工厂有 100 台机器, 拟分四期使用, 在每一期都有两种生产任务. 据经验, 若把 x_1 台机器投入第一种生产任务, 则在本期结束时将有 $1/3\ x_1$ 台机器损坏报废. 剩下的机器全部投入第二种生产任务, 则有 1/10 的机器在期末损坏报废. 如果干第一种生产任务时每台机器可获利润 10, 干第二种任务时每台机器可获利润 7, 问应怎样分配使用机器以使四期的总利润最大 (期末剩下的完好机器数量不限) ?

4.5　某公司拟将 3 千万元资金用于改造扩建所属的 3 个工厂. 每个工厂的利润增长额与所分配到的投资额有关. 各工厂在获得不同的投资额时所能增加的利润如表 4.28 所示(单位: 百万元). 问应如何分配这些资金, 使公司总的利润增长额最大?

表　4.28

工　厂 \ 投　资	0	10	20	30
1	0	2.5	4	10
2	0	3	5	8.5
3	0	2	6	9

4.6　求下列数学规划的解:

$$\max Z = (4x_1 + 7x_2 + 8x_3)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_j \geq 0 \text{ 且为整数}, j = 1, 2, 3 .$$

4.7　设某工厂调查了解市场情况,估计在今后四个时期市场对产品的需求量如表 4.29 所示.

表　4.29

时　期	1	2	3	4
需求量	2	3	2	4

假定不论在任何时期,生产每批产品的固定成本费为 3(千元),若不生产,则为零.每单位生产成本费为 1(千元).同时任何一个时期生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位.又设每时期的每个单位产品库存费为 0.5(千元),同时规定在第一期期初及第四期期末均无产品库存.试问,该厂如何安排各个时期的生产与库存,使所花的总成本费用最低?

4.8　某单位在 5 年内需使用一台机器,该种机器的年收入、年运行费及每年年初一次性更新重置的费用随机器的役龄变化如表 4.30 所示.该单位现有一台役龄为 1 年的旧机器,试制订最优更新计划,以使 5 年内的总利润最大(不计 5 年期末时机器的残值).

表　4.30

机　龄	0	1	2	3	4	5
年 收 入	20	19	18	16	14	10
年运行费	4	4	6	6	9	10
更 新 费	25	27	30	32	35	36

第 5 章　对策论模型

5.1 引　　言

对策论又称博奕论, 是研究具有竞争或斗争性质现象的数学理论和方法. 它既是现代数学的分支, 也是运筹学中的一个重要分支.

在现实生活中人们经常会遇到具有竞争或斗争性质的现象, 小至下棋、打扑克、体育竞赛, 大至经济活动中同一市场的竞争、国际上政府间的外交谈判、军事斗争中的双方力量的对垒、人类与大自然之间的斗争等. 参加这类竞争或斗争的各方都想选出一个对自己最为有利的策略来对付竞争的对手, 从而使自己在竞争或斗争中取得最好的结果. 因此, 双方都很关心对方在对策中所采取的策略, 力争知己知彼, 然后采取扬长避短、克敌制胜的策略.

由于对策论处理问题的方法具有明显的特色, 因此, 在近一、二十年发展尤为迅速. 对策论的思想与方法广泛应用于人们的经济、政治、军事、国际关系、公共选择等活动乃至于一般的日常生活之中. 1994 年诺贝尔经济学奖授给三位博奕论专家: 纳什(Nash), 塞尔腾(Selten)和豪尔沙尼(Harsanyi), 不仅是因为他们在非合作博奕理论方面作出了突出的贡献, 而且还因为经济学和对策论的研究模式都是强调个人理性, 在给定的约束条件下追求效用最大化. 同时, 对策论在经济学中的应用也是最广泛和最成功的.

我国古代"齐王赛马"就是对策论研究的一个典型例子: 有一天齐王要他的大臣田忌和他赛马. 双方约定, 从各自的上、中、下三个等级的马中各选一匹参赛; 每匹马轮流参赛, 均只赛一次, 输者付给胜者一千两黄金. 已知在同等级马中, 齐王的马均强于田忌的马, 但如果田忌的马比齐王的马高一等级, 田忌则可取胜. 当时, 田忌的谋士给他出个主意: 让田忌用下马对齐王的上马, 上马对齐王的中马, 中马对齐王的下马. 比赛结果, 田忌反得一千两黄金. 此例说明, 在对策现象中, 参加竞争者如何采取策略是问题的关键.

任何对策现象都包括三个基本要素:

1. 局中人

局中人指有权决定自己行动方案的对策参加者. 如"齐王赛马"的例子中, 局中人有两个: 齐王和田忌. 一般要求一个对策中至少要有两个局中人. 局中人可以是人, 也可以是集团. 在人类与大自然的斗争中, 可以把大自然看作一局中人. 同时, 我们假定各局中人都是聪明的、有理智的.

2. 策略集

策略集指局中人预先作出对付其他局中人的完整的行动方案. 如"齐王赛马"中, 田忌先出下马, 再出上马, 最后出中马简记为(下, 上, 中), 就是田忌的一个纯策略(简称策略). 每个局中人拥有策略的个数, 可以相等, 也可不等, 可以是有限个, 也可以是无限个. 其策略的全体, 称为策略集. "齐王赛马"中, 齐王和田忌各自的策略集中均有 6 个策略. 各局中人在自己的策略集中, 选取一个策略进行对策, 所组成的策略组称为局势. 如"齐王赛马"中, 齐王采用策略(上, 中, 下), 田忌采用策略(下, 上, 中)就组成了双方比赛的一个局势.

3．赢得函数

一局对策的结果，可能是胜或败、排名的前或后、物质收支的多或少等，这些统称为得失．一局对策的得失，实际上与全体局中人所选定的一组策略有关．换句话说，局中人的得失是局势的函数，通常称为赢得函数（亦称支付函数）．

对策分为静态对策和动态对策两大类．静态对策又分结盟与不结盟两种．不结盟对策按局中人数分，有两人对策和多人对策；以结局分，有零和对策与非零和对策；以策略分，有纯策略对策、混合策略对策、有限策略对策以及无限策略对策；就赢得函数的结构分，可有矩阵对策和非矩阵对策．

本章主要介绍两人有限零和对策，其次简介两人有限非零和对策．两人有限零和对策是最基本、最简单的一类对策，在理论和方法上比较成熟．同时，它又是研究其他类型对策模型的基础．

5.2　两人有限零和对策

5.2.1　两人有限零和对策的数学模型

两人有限零和对策，是指局中人仅有两个，且各自只有有限个策略可供选择．同时，在任一局势下，两个局中人的赢得之和总为零，即一局中人的所得等于另一局中人的所失．由于赢得函数可用一个矩阵表示，因而两人有限零和对策亦称矩阵对策．

“齐王赛马”就是两人有限零和对策．局中人齐王的赢得如表 5.1 所示．

表　5.1

田忌策略 / 齐王赢得 / 齐王策略	(上中下)	(上下中)	(中上下)	(中下上)	(下上中)	(下中上)
(上中下)	3	1	1	1	-1	1
(上下中)	1	3	1	1	1	-1
(中上下)	1	-1	3	1	1	1
(中下上)	-1	1	1	3	1	1
(下上中)	1	1	1	-1	3	1
(下中上)	1	1	-1	1	1	3

其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

就是齐王的赢得矩阵．容易理解，田忌的赢得矩阵就是 $-A$．

一般地，用Ⅰ、Ⅱ分别表示两个局中人，并设局中人Ⅰ有 m 个纯策略 α, α, $\cdots$, α, 局中

人Ⅱ有 n 个纯策略 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 分别构成各自的策略集:

$$S_{\mathrm{I}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

$$S_{\mathrm{II}} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}.$$

当局中人Ⅰ, Ⅱ分别采用纯策略 α_i 和 β_j 时, 就形成一局势(α_i, β_j), 设局中人Ⅰ的赢得为 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 局中人Ⅰ的赢得矩阵是

$$A = (A_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

局中人Ⅱ的赢得矩阵就是 $-A$.

通常将两人有限零和对策的数学模型记为

$$\Gamma = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}; S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\} \text{ 或 } \Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}.$$

例 1　今有甲、乙两厂生产同一种产品, 它们都想通过内部改革挖潜, 获得更多的市场份额. 已知两厂分别都有三个策略措施, 据预测, 当双方采取不同的策略措施后两厂的市场占有份额变动情况如表 5.2 所示.

表　5.2

乙厂策略 / 甲厂产品市场份额变动(%) / 甲厂策略	β_1	β_2	β_3
α_1	10	-1	3
α_2	12	10	-5
α_3	6	8	5

这也是两人有限零和对策, 数学模型为 $\Gamma = \{S_{甲}, S_{乙}; A\}$, 其中 $S_{甲} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $S_{乙} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$分别表示甲、乙两厂的策略集,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 12 & 10 & -5 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

表示甲厂的赢得矩阵.

当 $S_{甲}$、$S_{乙}$ 和 A 确定后, 局中人甲、乙应如何"理智地"选取对自己最为有利的策略, 以谋取最大的赢得(或最少损失), 须认真地分析.

5.2.2　在纯策略下有解对策的解法

下面通过继续对例 1 的分析, 说明在纯策略下有解的对策的求解方法及有解的条件.

由赢得矩阵 A 可以分析, 局中人甲厂的最大赢得是 12, 为了得到 12, 甲厂须采用纯策略 α_2, 但局中人乙厂估计到这种心理, 就会采用纯策略 β_3, 使得甲厂不仅得不到 12, 反而付出 5. 局中人乙厂为得到最大收入 5(即局中人甲厂的最小赢得 -5), 须采用纯策略 β_3, 同样局中人甲厂也会分析到乙厂的这种心理而采用纯策略 α_3, 使乙厂不仅得不到 5, 反而要付出 5. 由于对策双方都不知道对方将采用的纯策略, 因此, 各局中人在不冒风险的前提下, 必须考

虑对方会设法使自己得到最少的赢得.

于是,从甲厂的角度考虑.对于分别采用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 三个纯策略的最小赢得(即最坏结果)是

$$\min(10, -1, 3) = -1,$$
$$\min(12, 10, -5) = -5,$$
$$\min(6, 8, 5) = 5.$$

比较这三个纯策略,为使这些最小赢得达到最大,甲厂会选择 α_3.因为

$$\max\{\min(10, -1, 3), \min(12, 10, -5), \min(6, 8, 5)\} = 5.$$

这就是说,甲厂在不冒风险的前提下,选择策略 α_3,可至少赢得增加市场占有份额的 5%.

从乙厂的角度考虑.对于分别采用 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 三个纯策略的最大损失是:

$$\max(10, 12, 6) = 12,$$
$$\max(-1, 10, 8) = 10,$$
$$\max(3, -5, 5) = 5.$$

比较三个纯策略,为使最大损失达到最小,乙厂会选择 β_3.因为

$$\min\{\max(10, 12, 6), \max(-1, 10, 8), \max(3, -5, 5)\} = 5.$$

也就是说,乙厂在不冒风险的前提下,选择策略 β_3,至多减少市场占有份额的 5%.

以上竞争双方都根据使自己的损失达到最小的原则来选择策略,立足于不利的情况下争取最好的结果,这就是所谓的最大最小原则.

根据最大最小原则求出双方的策略 α_3 和 β_3 对各自来说都是最稳妥的.为此称 α_3 和 β_3 分别为甲厂和乙厂的最优纯策略;称(α_3, β_3)为该对策的最优纯局势;称在最优纯局势下甲厂所增加的市场占有份额 5% 为对策的值.容易看出,任何一方在此时想改变其策略,都将使自己的损失比 5% 大.

一般地说,对于对策 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$,其中 $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$,$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$,$A = (a_{ij})_{m \times n}$.如果等式

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^* j^*} \tag{5.1}$$

成立,则称此公共值为对策 Γ 的值,记为 $V_\Gamma = a_{i^* j^*}$.称使(5.1)式成立的纯局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$为对策 Γ 在纯策略下的解(或均衡局势),α_{i^*} 和 β_{j^*} 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略.

根据(5.1)式,对例 1 的求解过程可简单地表述如下:

$$A = \begin{array}{ccc} 10 & -1 & 3 \\ \boxed{12} & \boxed{10} & -5 \\ 6 & 8 & \boxed{5} \end{array}$$

其步骤是:

第一步,确定 A 各行中的最小值,并在该数字上加圈;

第二步,确定 A 各列中的最大值,并在该数字上加框;

第三步,若 A 中的某元素同时被圈和框住,则该元素即为对策的值,该元素所在的行和列相应的策略则分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略.

因此,例 1 的解为$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*}) = (\alpha_2, \beta_2)$,对策的值为 $V_\Gamma = 5\%$,α_2 和 β_2 分别是局中人甲厂和乙厂的最优纯策略.

不难看出,在纯策略下有解的矩阵对策,值 $a_{i^* j^*}$ 既是所在行的最小值,又是所在列的最大值,称其为鞍点. 所以,这类矩阵对策亦称为有鞍点的对策,这个事实可推广到一般,有如下定理:

定理 1 在纯策略下矩阵对策 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$有解的充要条件是:存在纯局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$使得对于一切 $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$,均有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^* j^*} \leq a_{i^* j}. \tag{5.2}$$

例 2 设矩阵对策 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$,其中 $S_{\mathrm{I}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $S_{\mathrm{II}} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$,赢得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

求对策的解和值.

解

$$A = \begin{bmatrix} 6 & \boxed{4} & 5 & \boxed{4} \\ 5 & \boxed{4} & 6 & \boxed{4} \\ & 2 & \boxed{7} & 3 \\ \boxed{8} & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

对策的值为 $V_\Gamma = 4$.

对策的解为(α_1, β_2),(α_1, β_4),(α_2, β_2)和(α_2, β_4).

此例说明,矩阵对策的解可以不唯一. 当解不唯一时,解之间的关系具有以下性质:

(1) 无差别性. 即若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是对策 Γ 的两个解,则

$$a_{i_1^* j_1^*} = a_{i_2^* j_2^*}.$$

(2) 可交换性. 即若$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1})$和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2})$是对策 Γ 的两个解,则$(\alpha_{i_1}, \beta_{j_2})$和$(\alpha_{i_2}, \beta_{j_1})$也是对策 Γ 的两个解.

5.2.3 具有混合策略的对策

上面讨论的是在纯策略下有解的对策,即有鞍点的对策. 但一般情况下,等式

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

未必成立. 例如"齐王赛马"对策就不存在纯策略下的解,因此,必须把解的意义扩充. 先看一个例子.

例 3 设一对策的赢得矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix},$$

由于 $$\max_i \min_j a_{ij} = 7 \neq \min_j \max_i a_{ij} = 8 .$$
所以, 该对策在纯策略下无解. 此时, 双方用最大最小原则选取各自的纯策略都不会是稳妥的. 当局中人Ⅰ选取纯策略 α, 企图赢得 9 时, 局中人Ⅱ就会选取纯策略 β, 使局中人Ⅰ赢得为 7, 比局中人Ⅱ预期输掉的要少; 局中人Ⅰ考虑到这点就会选用纯策略 α, 使之能赢得 8, 局中人Ⅱ想到局中人Ⅰ可能改变策略, 就会选用纯策略 β 来对付, 使局中人Ⅰ只能赢得 2; 为对付局中人Ⅱ的新策略 β, 他又得使用 α, …如此下去. 这样, 对策的双方都无法稳定在某一纯策略上, 必须考虑随机地选取自己的各个策略, 使对方无法琢磨到自己选用的纯策略. 为此, 我们引入混合策略概念.

设局中人Ⅰ选用纯策略 α 和 α 的概率分别为 x_1 和 x_2, 且 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$; 局中人Ⅱ选用纯策略 β 和 β 的概率分别为 y_1 和 y_2, 且 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$. 此时二维向量 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) 分别表示两局中人进行对策时的一套策略(即混合策略), 当 x_1, x_2, y_1, y_2 的值求出, 局中人Ⅰ赢得的数学期望可由下式确定:
$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i y_j .$$
一般地, 设给定 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$, 令
$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m), \quad Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) .$$
$$S_{\mathrm{I}}^* = \left\{ X \mid x_i \geq 0; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} .$$
$$S_{\mathrm{II}}^* = \left\{ Y \mid y_j \geq 0; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\} .$$
对任意 $X \in S_1^*, Y \in S_2^*$ 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略, 简称策略.

X, Y 是由对策双方独立决定的, 因此, 纯局势(α, β)以概率 $x_i y_j$ 出现, 于是局中人Ⅰ在混合策略下赢得的数学期望为
$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = XAY^T .$$
其中(X, Y)称为混合局势.

经推广后, 称 $\Gamma^* = \{S_1^*, S_2^*; E\}$为原对策 Γ 的混合扩充.

类似于纯策略下的情况, 若
$$\max_{X \in S_{\mathrm{I}}^*} \min_{Y \in S_{\mathrm{II}}^*} E(X, Y) = \min_{Y \in S_{\mathrm{II}}^*} \max_{X \in S_{\mathrm{I}}^*} E(X, Y) = E(X^*, Y^*)$$
成立, 称 $E(X^*, Y^*)$为对策 Γ 的值. 称(X^*, Y^*)为对策 Γ 在混合策略下的解(简称为解). X^* 和 Y^* 分别称为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优混合策略(简称为最优策略).

混合策略 X 表明局中人Ⅰ以概率 x_i 选用纯策略 α, Y 表明局中人Ⅱ以概率 y_j 选用纯策略 β. 容易理解, 在纯策略下的解(α^*, β^*), 可看作 X 中 $x_i = 1$, 其他分量为零, Y 中 $y_j = 1$, 其他分量为零的混合策略下的特例.

下面仍以例 3 为例, 说明以上概念.

设 $$X = (x, 1 - x), \quad Y = (y, 1 - y),$$
则 $$E(X, Y) = XAY^T$$
$$= (x, 1 - x) \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 - y \end{pmatrix} = 8xy - x - 6y + 8 .$$

用微分求极值的方法,令

$$\frac{\partial E}{\partial x}=8y-1=0,\qquad \text{得 } y=\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=8x-6=0,\qquad \text{得 } x=\frac{3}{4}.$$

即 $x^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$, $y^*=\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)$. 由于

$$E(X^*,Y)=8\cdot\frac{3}{4}\cdot y-\frac{3}{4}-6y+8=7\frac{1}{4},$$

$$E(X,Y^*)=8\cdot x\cdot\frac{1}{8}-x-6\cdot\frac{1}{8}+8=7\frac{1}{4},$$

$$E(X^*,Y^*)=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-6\cdot\frac{1}{8}+8=7\frac{1}{4}.$$

这个结果告诉我们,局中人Ⅰ采用 $x^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ 的混合策略,或局中人Ⅱ采用 $y^*=\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)$ 的混合策略时,局中人Ⅰ的赢得期望至少是 $7\frac{1}{4}$,且当他们不采用上述策略时,均将会受到不应有的损失. 因此, $X^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ 和 $Y^*=\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)$ 分别是局中人Ⅰ和局中人Ⅱ的最优混合策略,对策的值 $V_\Gamma=7\frac{1}{4}$.

局中人Ⅰ的期望赢得 $7\frac{1}{4}$,并不是说他每采取一纯策略就能得到此数,而是在概率意义下,经过相当次数的竞争之后所得的平均值.

在解的概念经过推广后,我们给出以下定理:

定理 2 (对策基本定理) 在混合扩充中,任何矩阵对策都有解.

定理 3 设 $X^*\in S_{\mathrm{I}}^*$, $Y^*\in S_{\mathrm{II}}^*$,则 (X^*,Y^*) 作为对策的解的充要条件是

$$E(X,Y^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(X^*,Y). \tag{5.3}$$

定理 3 的直观意义是,无论局中人Ⅰ或Ⅱ,谁不采用最优策略,谁就有可能受到不应有的损失. 事实上,局中人Ⅰ希望自己期望赢得 $E(X,Y)$ 越大越好,而局中人Ⅱ则希望自己的期望付出 $E(X,Y)$ 越小越好. 如果局中人Ⅰ不采用最优策略 X^*,而采用其他策略 X,则只要局中人Ⅱ坚持采用最优策略 Y^*,就会有 $E(X,Y^*)$,即局中人Ⅰ的期望赢得不会超过他采用最优策略时的期望值. 同样,如果局中人Ⅱ不采用最优策略 Y^*,而采用其他策略 Y,则他的期望付出可能会更多. 如果一个策略 (X^*,Y^*) 同时具有以上性质,则它就是对策的解.

例 4 设一矩阵对策的赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}9&8&7\\2&6&8\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

可以验证

$$X^*=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right),\quad Y^*=\left(\frac{1}{8},0,\frac{7}{8}\right),$$

分别是局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略.

$$V_T = X^* A Y^{*T} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} = 7\frac{1}{4}.$$

现设局中人Ⅰ不采用最优策略 X^*, **而用混合策略** $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, **则只要局中人Ⅱ用最优策略** Y^*, **就有**

$$E(X, Y^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} = 6\frac{3}{4} < V_T.$$

可见局中人Ⅰ不采用最优策略 X^*, **有可能受到损失. 同样, 可以验证, 局中人Ⅱ若不采用** Y^*, **也将可能受到损失.**

定理 4 设 $X^* \in S_{\mathrm{I}}^*$, $Y^* \in S_{\mathrm{II}}^*$, **则**$(X^*, Y^*)$**作为对策的解的充要条件是**

$$E(\alpha_i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, \beta_j) \qquad (5.4)$$

对于一切的 i, j ($i = 1, 2, \cdots, m$; $j = 1, 2, \cdots, n$) **均成立.**

证 (5.4) **式是**(5.3) **式的特殊情况. 因此, 要证明定理成立, 只须证明**(5.4)**式与**(5.3)**式等价.**

假定(5.3) **式成立, 由于纯策略是混合策略的特例, 所以,** (5.4) **式也应成立. 事实上** (5.4) **式中的** α_i **是局中人Ⅰ的纯策略, 它可看作一个特殊的混合策略, 即** $x_i = 1$, **其他** $x_j = 0$ ($j \neq i$) **的混合策略. 同样,** β_j **是局中人Ⅱ的纯策略, 也是特殊的混合策略, 因此,** (5.4) **式成立.**

反之, 假定(5.4) **式成立, 并设** e_i **为** m **维单位向量, 即其中第** i **个分量为** 1, **其余分量为零, 则**

$$E(\alpha_i, Y^*) = e_i A Y^{*T}, \qquad X = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i^T.$$

因

$$\begin{aligned} E(X, Y^*) &= X A Y^{*T} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i^T\right)^T A Y^{*T} \\ &= \sum_{i=1}^{m} (e_i A Y^{*T}) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} E(\alpha_i, Y^*) x_i, \end{aligned}$$

又因 $x_i \geq 0$, **由**(5.4) **式有**

$$x_i E(\alpha_i, y^*) \leq E(x^*, y^*) x_i,$$

所以

$$\begin{aligned} E(X, Y^*) &= \sum_{i=1}^{m} x_i E(\alpha_i, Y^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} E(X^*, Y^*) x_i \end{aligned}$$

$$= E(X^*, Y^*) \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$= E(X^*, Y^*) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

同理, 由(5.4)式可得 $\quad E(X^*, Y) \geq E(X^*, Y^*)$

综上所述, 有 $\quad E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$. □

为应用方便, 我们给出定理 4 的等价形式:

定理 5 设 $X^* \in S_{\mathrm{I}}^*$, $Y^* \in S_{\mathrm{II}}^*$, 则$(X^*, Y^*)$为对策的解的充要条件是: 存在数 v, 使得 X^* 和 Y^* 分别是不等式组

$$(1)\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v & (j = 1, 2, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & \\ x_i \geq 0 & (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{5.5}$$

和不等式组

$$(2)\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \leq v & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1 & \\ y_i \geq 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{5.6}$$

的解, 且 $v = V_{\Gamma}$.

定理 5 告诉我们, 为求出矩阵对策中两局中人的最优策略 X^* 和 Y^*, 可同时求解上述不等式组(5.5)和(5.6).

例 5 仍以“齐王赛马”为例. 齐王的赢得矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 由定理 5 可知, 有下列两组不等式组:

$$(1)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \geq v \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq v \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \geq v \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \geq v \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \geq v \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 \geq v \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 6) . \end{cases}
\qquad
(2)\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 \geq v \\ y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq v \\ y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 - y_5 + y_6 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 - y_6 \leq v \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 3y_5 + y_6 \leq v \\ -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 3y_6 \leq v \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \\ y_i \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, 6) . \end{cases}$$

注意到矩阵 A 的特点,即各行之和与各列之和均为 6,可以认为每个局中人选取各自的每个纯策略均有等可能性.因此,可以考虑将(1)和(2)都完全取等式并分别相加得:

$$6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)=6v.$$

$$6(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)=6v$$

因 $\sum_{i=1}^{6} x_i=1$, $\sum_{j=1}^{6} y_j=1$,所以,$v=1$.

又因矩阵 A 的特殊性,各个局中人的每个纯策略被选取的机会相等,所以,齐王和田忌的最优策略分别为:

$$X^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),$$

$$Y^*=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),$$

$$V_\Gamma=1.$$

"齐王赛马"对策的求解,是根据定理 5 和齐王的赢得矩阵的特殊性所决定,即把定理 5 中的两个不等式组转化为两个方程组进行求解.但对于其他的矩阵对策更为一般的解法是线性规划法、图解法和迭代法.

5.3 两人有限零和对策的一般解法

前已述及,对于有鞍点的矩阵对策,可用最大最小原则进行求解.对于无鞍点的矩阵对策,可在混合扩充后,分别用下面介绍的方法,求出其最优混合策略或近似最优混合策略.

5.3.1 线性规划法

由定理 5 和任一矩阵对策 $\Gamma=\{S_\mathrm{I}, S_\mathrm{II}; A\}$ 的解,$X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)$ 和 $Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*)$ 应是下述两组不等式的解:

$$(1)\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v \quad (j=1,2,\cdots,n)\\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1\\ x_i\geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m).\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq v \quad (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{j=1}^{m} y_i=1\\ y_i\geq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

其中 $v=V_\Gamma=\max\limits_{x_i\in S_\mathrm{I}^*}\min\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i=\min\limits_{y_j\in S_\mathrm{II}^*}\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$.

为此,作如下变换(不妨设 $v>0$):

$x_i'=\dfrac{x_i}{v}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $y_j'=\dfrac{y_j}{v}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,于是不等式组(1)和(2)等价于互为对偶线性规划问题:

$$
\text{(P)}\quad \begin{cases} \min Z = \sum_{i=1}^{m} x_i' \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \\ x_i' \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}
$$

和

$$
\text{(D)}\quad \begin{cases} \max W = \sum_{j=1}^{n} y_i' \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i' \leq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ y_i' \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}.
$$

其中 $\min Z = \sum_{i=1}^{m} x_i'$, 即为局中人Ⅰ的期望赢得值 $v = \frac{1}{Z}$ 达到最大, $\max W = \sum_{j=1}^{n} y_j'$, 即为局中人Ⅱ的期望损失值 $v = \frac{1}{W}$ 达到最小. 因此, 可采用单纯形法求解问题(P)和(D)中的一个, 而另一个的解即可从最终单纯形表中同时得到.

应当指出, 在未求解(P)和(D)之前, V_Γ 的正负是未知的. 当对策的值 $V_\Gamma = v \neq 0$ 时, 可能 $v > 0$ 或 $v < 0$. 如果局中人Ⅰ的赢得矩阵 $A = (a_{ij})$ 中所有元素均为正值, 则必有 $v > 0$, 此时建立的线性规划模型(P)和(D)可以求解, 且其解 $X' = (x_1', x_2', \cdots, x_m')$ 和 $Y' = (y_1', y_2', \cdots, y_n')$ 均为非负. 但当 A 中的某些 a_{ij} 为负值时, 则有出现 $v \leq 0$ 的可能. 由此而得出的 x_i' 和 y_j' 可能有负值或无意义, 这与单纯形法要求模型(P)和(D)中的变量非负要求相矛盾. 为此, 当 A 中含有负元素时, 可根据下述的定理 6 进行处理.

定理 6 设对策 $\Gamma = \{S_Ⅰ, S_Ⅱ; A\}$ 和对策 $\Gamma' = \{S_Ⅰ, S_Ⅱ; A'\}$, 其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $A' = (a_{ij} + k)_{m\times n}$, k 为任一常数, 则 Γ 和 Γ' 的解相同, 且 $V_{\Gamma'} = V_\Gamma + k$.

由定理 6, 对含有负元素的 A 重新构造一个新的赢得矩阵

$$
A' = (a_{ij}')_{m\times n} = (a_{ij} + k)_{m\times n}.
$$

其中 $k = -\min\{a_{ij}\}$. 对于重新构造的 A′就可放心地建立线性规划模型进行求解. 此时, 对策双方的最优策略不会改变, 但求出的对策值 v' 会比以 A 为赢得矩阵的对策值 v 增大了 k, 因此, $v = v' - k$.

用线性规划法求解矩阵对策的具体步骤如下:

设 $\Gamma = \{S_Ⅰ, S_Ⅱ; A\}$, 其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 无鞍点.

第一步, 选择适当的常数 k, 使 $A' = (a_{ij}') = (a_{ij} + k)$ 的各元素均为非负;

第二步, 对 A′建立相应的线性规划模型(P)和(D), 用单纯形法求解(D), 分别得最优解 $X' = (x_1', x_2', \cdots, x_m')$ 和 $Y' = (y_1', y_2', \cdots, y_n')$;

第三步, 由 $W = \sum_{j=1}^{n} y_j'$ 和 $v' = \frac{1}{W}$ 求出 v', 再由 $v = v' - k$ 和 $X^* = vX'$, $Y^* = vY'$ 求得对策的值 $V_\Gamma = v$ 和局中人Ⅰ, Ⅱ的最优混合策略 X^*, Y^*.

例 6 利用线性规划法求解赢得矩阵为

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

的矩阵对策.

解 第一步取 $k = -\min\{a_{ij}\} = 2$, 使

$$A' = (a_{ij} + 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

第二步, 建立相应的线性规划模型

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{l} \min Z = x_1' + x_2' + x_3' \\ x_1' + 3x_3' \geq 1 \\ x_2' + 2x_3' \geq 1 \\ x_1' + 2x_2' \geq 1 \\ x_i' \geq 0, (i = 1, 2, 3). \end{array} \qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{array}{l} \max W = y_1' + y_2' + y_3' \\ y_1' + y_3' \leq 1 \\ y_2' + 2y_3' \leq 1 \\ 3y_1' + 2y_2' \leq 1 \\ y_j' \geq 0, (j = 1, 2, 3). \end{array}$$

用单纯形法解(D), 相应的单纯形表如表 5.3 所示.

表 5.3

	y_B	b	y_1'	y_2'	y_3'	y_4'	y_5'	y_6'
初始表	y_4'	1	1	0	1	1	0	0
	y_5'	1	0	1	2	0	1	0
	y_6'	1	[3]	2	0	0	0	1
	W	0	-1	-1	-1	0	0	0
	y_4'	2/3	0	-2/3	1	1	0	-1/3
	y_5'	1	0	1	[2]	0	1	0
	y_1'	1/3	1	2/3	0	0	0	1/3
	W	1/3	0	-1/3	-1	0	0	1/3
最终表	y_4'	1/6	0	-7/6	0	1	-1/2	-1/3
	y_3'	1/2	0	1/2	1	0	1/2	0
	y_1'	1/3	1	2/3	0	0	0	1/3
	W	5/6	0	1/6	0	0	1/2	1/3

由最终表知 $Y' = (y_1', y_2', y_3')^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $W = \frac{5}{6}$ 和 $X' = (x_1', x_2', x_3')^{\mathrm{T}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

由 $v' = \frac{1}{W} = \frac{6}{5}$, 得 $V_r = v = v' - k = \frac{6}{5} - 2 = -\frac{4}{5}$,

$X^* = v'X' = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $Y^* = v'Y' = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

以上方法是在 $V_r > 0$ 的假定条件下进行的, 当 A 中元素存在负值时, 第一步不可省去. 例如, 本例如果直接从第二步开始, 即解下面的线性规划问题:

$$
(D)\quad
\begin{aligned}
\max W = & \ y_1 + y_2 + y_3 \\
& -y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 1 \\
& -2y_1 - y_2 \leq 1 \\
& y_1 - 2y_3 \leq 1 \\
& y_j \geq 0, (j = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

用单纯形法求解有相应的初始表(表 5. 4):

表　5. 4

Y_B	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_4	1	-1	-2	-1	1	0	0
y_5	1	-1	-1	0	0	1	0
y_6	1	1	0	-2	0	0	1
W	0	-1	-1	-1	0	0	0

其中 y_2 所在列的各元素均为非正, 因此, 该线性规划问题无解, 其对偶问题也无解, 此时方法失效.

5.3.2　$2\times n$ 对策的解法

赢得矩阵形如

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}
$$

的对策称为 $2\times n$ 对策.

1. 2×2 对策的公式法

当局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 双方都只有两个纯策略, 且在没有最优纯策略的情况下, 可以证明各局中人的最优混合策略 x_1^*, x_2^*, y_1^* 和 y_2^* 均大于零. 由 A 建立的两个互为对偶的线性规划模型(P)和(D)的等价形式:

$$
(P')\quad
\begin{aligned}
\min Z = & \frac{1}{v} \\
& a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v \\
& a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v \\
& x_1, x_3 \geq \quad .
\end{aligned}
\qquad\qquad
(D')\quad
\begin{aligned}
\max W = & \frac{1}{v} \\
& a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq v \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq v \\
& y_1, y_2 \geq 0 \quad .
\end{aligned}
$$

当 x_1, x_2, y_1, y_2 均不为零时, 由互补松弛性可知, (P′)和(D′)中的约束条件取严格等式. 注意到 $x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$, (P′)和(D′)中的约束条件可分别改写成

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v \\
& a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{和} \qquad
\begin{aligned}
& a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = v \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 = v \\
& y_1 + y_2 = 1 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

显然, 上述两式有唯一解, 即最优解:

$$x_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}, \quad x_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})},$$

$$y_1^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}, \quad y_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}, \tag{5.7}$$

$$V_\Gamma = v = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}.$$

令 $\delta=(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})$, $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, 则(5.7)式可写成:

$$x_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{\delta},\ x_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{\delta},$$

$$y_1^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{\delta},\ y_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{\delta}, \tag{5.8}$$

$$V_\Gamma = \frac{\det A}{\delta}.$$

由(5.8)式, 2×2 对策的公式法的步骤是:

第一步: 计算 δ. δ为 A 的主对角线元素之和减去次对角线元素之和.

第二步: 分别计算 $x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*$ 的值. 它们的分母均为 δ. x_1^*, x_2^* 的分子分别是第二行的主对角线元素减去同行的另一元素和第一行的主对角线元素减去同行的另一元素; y_1^*, y_2^* 的分子分别是第二列的主对角线元素减去同列的另一元素和第一列的主对角线元素减去同列的另一元素.

第三步: 计算 V_Γ 的值. 其分母为 δ, 分子为 $\det A$, 即行列式$|A|$的值.

例 7 用公式法求解例 3, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

解 $\delta=(9+8)-(2+7)=8$,

$$x_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{\delta} = \frac{8-2}{8} = \frac{3}{4}, \quad x_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{\delta} = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4},$$

$$y_1^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{\delta} = \frac{8-7}{8} = \frac{1}{8}, \quad y_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{\delta} = \frac{9-2}{8} = \frac{7}{8},$$

$$V_\Gamma = \frac{\det A}{\delta} = \frac{9\times 8-2\times 7}{8} = \frac{58}{8} = 7\frac{1}{4}.$$

这与例 3 的结果完全相同, 但求解却比用线性规划法简便的多.

例 8 求解矩阵对策 $\Gamma=\{S_\mathrm{I}, S_\mathrm{II}; A\}$, 其中

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 解 由于 A 中主对角线上元素都大于次对角线上元素, 故对策无鞍点用公式法求解. 因为

$$\delta=(1+1)-(-1-3)=6,$$

$$x_1^* = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{1}{3},\ x_2^* = \frac{1-(-3)}{6} = \frac{2}{3},$$

$$y_1^* = \frac{1-(-3)}{6} = \frac{2}{3},\ y_2^* = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{1}{3},$$

$$V_r=\frac{1\times 1-(-1)\times(-3)}{6}=-\frac{1}{3}.$$

所以 $X^*=(x_1^*,x_2^*)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $Y^*=(y_1^*,y_2^*)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $V_r=\frac{1}{3}$.

(2) 解 由于对策有鞍点, 所以不能用公式法进行. 利用(5.1)式求解,

$$\begin{matrix} 1 & \\ ② & \boxed{3} \end{matrix}\ .$$

即 α 和 β 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优纯策略, $V_r=2$, 对策的解为(α^*,β^*).

之所以此例不能用公式法进行求解, 是因为公式法建立在 $X^*>0$ 和 $Y^*>0$ 的前提下.

2. $2\times n$ 对策的代数解法

对于 $2\times n$ 对策, 可考虑先将 $2\times n$ 对策转化为 C_n^2 个 2×2 子对策, 再利用 2×2 对策的公式法或(5.7)式, 分别求出各子对策的值, 最后从中求得原 $2\times n$ 对策的解.

例 9 已知赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 9 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

试用代数方法求解此对策.

解 (1) 对应于 A 的对策有三个子对策, 其相应的赢得矩阵分别为

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 9 & -2 \end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 分别求以 A_1 A_2 和 A_3 为赢得矩阵相应子对策的值:

$$V_{A_1}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}}{(1+0)-(9+7)}=\frac{21}{5},$$

$$V_{A_2}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 9 & -2 \end{vmatrix}}{(1-2)-(9+13)}=\frac{119}{23}.$$

相应于 A_3 的子对策是有鞍点的对策, 且 $V_{A_3}=7$.

(3) 取 $V_r=\min\{V_{A_1},V_{A_2},V_{A_3}\}=\min\left\{\frac{21}{5},\frac{119}{23},7\right\}=\frac{21}{5}$.

(4) 由 $V_r=V_{A_1}=\frac{21}{5}$, 进一步求子对策 Γ_{A_1} 的解:

$$x_1^{(0)}=\frac{3}{5},\qquad x_2^{(0)}=\frac{2}{5},$$

$$y_1^{(0)}=\frac{7}{15},\qquad y_2^{(0)}=\frac{8}{15}.$$

因为 A_1 是由 A 的第 $k=1$ 和第 $l=2$ 列所构成, A 的第 3 列未在其中, 可视作 $y_3^0=0$, 故原 2×3 对策的解为:

$$X^*=X^{(0)}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),\quad Y^*=Y^{(0)}=\left(\frac{7}{15},\frac{8}{15},0\right),$$

$$V_r=\frac{21}{5}.$$

通过对例 10 的求解, $2\times n$ 对策的代数解法其步骤可归纳如下:

第一步: 由 $2\times n$ 阶矩阵 A 分别写出 C_n^2 个 2×2 阶子矩阵 A_i;

第二步: 分别求出各 A_i 相应子对策的值;

第三步: 取 $V_\Gamma=\min\{V_{A_1}, V_{A_2}, \cdots, V_{A_N}\}=V_{A_k}, 1\leq k\leq N$, 其中 $N=C_n^2$, A_k 是由 A 中的第 k 和第 l 列构成;

第四步: 求出 A_k 相应子对策 Γ_{A_k} 的解 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ 取 $X^*=X^{(0)}$, 同时对 $Y^{(0)}$ 添加 $n-2$ 个零分量(对应于 A 中不是第 k 和第 l 列的位置)后构成 Y^*, 则(X^*, Y^*)就是原 $2\times n$ 对策的解.

3. $2\times n$ 对策的图解法

设局中人 I 的混合策略 $X=(x, 1-x)$, 由(5.4)式知,

$$V_\Gamma=\max_{x\in S_{\mathrm{I}}^*}\min_{y\in S_{\mathrm{II}}^*}E(X, Y)=\max_x\min_j E(X, \beta_j),$$

而

$$E(X, \beta_j)=(x, 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$$=(x, 1-x)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\end{pmatrix}$$

$$=(a_{1j}-a_{2j})x+a_{2j}.$$

所以

$$V_\Gamma=\max_{0\leq x\leq 1}\min_j\{(a_{1j}-a_{2j})x+a_{2j}\}. \tag{5.9}$$

为求 V_Γ 的值及确定 $x=x^*$, 在平面直角坐标系上作出各直线 $l_j:(a_{1j}-a_{2j})x+a_{2j}(j=1, 2, \cdots, n)$的图像, 则这些直线在 $x\in[0, 1]$中的极小值就是一条折线, 此折线的各部分就是诸直线的最下部分. 如图 5.1 的粗线部分. 其中折线的最高点 M 的横坐标 $x=x^*$ 就是局中人 I 最优混合策略的第一分量, M 点的纵坐标就是对策的值 V_Γ.

图 5.1

图 5.2

局中人 II 的最优混合策略可相应求出.

试用图解法求解例 9.

解 设局中 I 的混合策略为 $x=(x, 1-x)$, 在直角坐标系分别画出以下三直线, 如图 5.2 所示. 其中

$$l_1: v=-8x+9,$$

$$l_2: v=7x,$$

$$l_3: v = 15x - 2.$$

画图时,注意到(5.9)式
$$x = 0,\quad v = a_{2j},$$
$$x = 1,\quad v = a_{1j}.$$

所以,只要把 a_{1j} 和 a_{2j} 分别标在直线 $x = 1$ 和 $x = 0$(纵坐标轴)上,连结对应点,即得所对应的直线 l_j.

此三条直线在 $x \in [0, 1]$ 中的极小值就是折线 ABMC,其中 M 点是直线 l_1 与 l_2 的交点,且是折线的最高点,由

$$\begin{cases} v = -8x + 9 \\ v = 7x \end{cases}$$

解得
$$x^* = \frac{3}{5},\quad V_r = \frac{21}{5}.$$

由于 M 是 l_1 与 l_2 的交点,与 l_3 无关,因此,可以认为局中人Ⅱ的最优混合策略中 $y_3^* = 0$. 于是在求局中人Ⅱ的最优混合策略时只须考虑子矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

由公式(5.8)求得 $y_1^* = \frac{7}{15}, y_2^* = \frac{8}{15}$.

因此,局中人Ⅰ和Ⅱ的最优混合策略分别是 $X^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 和 $Y^* = \left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}, 0\right)$,对策的值 $V_r = \frac{21}{5}$. 这与用代数解法的结果完全相同.

例 10 试用图解法求解赢得的矩阵为 A 的对策

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 6 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

解 这是 $m \times 2$ 对策,仍可仿照 $2 \times n$ 对策用图解法进行.

设局中人Ⅱ的混合策略为 $Y = (y, 1 - y)$,在直角坐标系分别画出三条直线,如图5.3所示,其中

$$l_1: v = -5y + 7,$$
$$l_2: v = 6,$$
$$l_3: v = 9y + 2.$$

由于局中人Ⅱ为使自己最大损失达到最小,图中三条直线在 $y \in [0, 1]$ 中的极大值应是折线 AM_1M_2B, M_1 和 M_2 是折线的最低点,它们分别是 l_1 与 l_2, l_3 与 l_2 的交点,且对策的值 $V_r = 6$,由方程

$$-5y + 7 = 6$$

和

$$9y + 2 = 6$$

图 5.3

解得 $OC_1 = \frac{1}{5}$, $OC_2 = \frac{4}{9}$. 因此,局中人Ⅱ的最优混合策略 $y^* = (y, 1 - y)$,其中 $\frac{1}{5} \le y \le \frac{4}{9}$. 而局中人Ⅰ根据最大最小原则,其最优混合策略应是 $x^* = (0, 1, 0)$,即取纯策略 α.

图解法一般只适用于两个局中人之一仅有两种可供选择的策略的对策问题.

4. 迭代法

对于赢得矩阵阶数较高的矩阵对策,除了介绍的线性规划法求解外,还可以用迭代法求解. 迭代法的基本思想是: 两个局中人反复进行多局对策,在每一局中各局中人都根据在此以前的各局对策中可能赢得的总和,在自己的纯策略集中选取一个使自己累计所得最多(或累计所失最少)的纯策略. 在多局对策后,当迭代的结果双方达到一定的满意程度时,迭代结束. 此时用局中人纯策略在已进行的各局对策中出现的频率分布作为最优混合策略中概率分布的一个近似. 因此,迭代法是求解矩阵对策的一种近似方法. 下面通过例子具体介绍迭代法的求解过程.

例 11 试用迭代法求解赢得矩阵 A 的对策. 其中

$$A=\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

解 设 k 为局数. $k=1$,假定局中人Ⅰ先取纯策略 α_1,其赢得的情况见表 5.5. 由于 $\min\limits_j a_{1j}=0$,故局中人Ⅱ应取纯策略 β_2,则其支付情况见表 5.6.

表 5.5

局数	局中人Ⅰ	β_1	β_2	β_3
1	α_1	2	0	2

表 5.6

局数	局中人Ⅱ	α_1	α_2	α_3
1	β_2	0	3	2

$k=2$,由于局中人Ⅱ取 β_2,$\max\limits_i a_{i2}=3$,所以局中人Ⅰ取纯策略 α_2,其可能赢得见表 5.7. 其中 $\min\limits_j \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ij}=2$,故局中人Ⅱ应取纯策略 β_1,其可能支付见表 5.8.

表 5.7

局数	局中人Ⅰ	β_1	β_2	β_3
1	α_1	2	0	2
2	α_2	0	3	1
累计赢得		$\underline{2}$	3	3

表 5.8

局数	局中人Ⅱ	α_1	α_2	α_3
1	β_2	0	3	2
2	β_1	2	0	1
累计支付		2	$\overline{3}$	3

$k=3$,由表 5.8,$\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{2} a_{ij}=3$,所以,局中人Ⅰ应取纯策略 α_2,其可能赢得见表 5.9. 其中 $\min\limits_j \sum\limits_{i=1}^{3} a_{ij}=2$,故局中人Ⅱ应取纯策略 β_1,其可能支付见表 5.10.

表 5.9

局数	局中人Ⅰ	β_1	β_2	β_3
1	α_1	2	0	2
2	α_2	0	3	1
3	α_2	0	3	1
累计赢得		$\underline{2}$	6	4

表 5.10

局数	局中人Ⅱ	α_1	α_2	α_3
1	β_3	0	3	2
2	β_2	2	0	1
3	β_1	2	0	1
累计支付		$\overline{4}$	3	4

如此继续下去. 总之在每局的迭代中, 主要计算出以往各局对策得失的累计值, 作为下一步选取纯策略的依据. 表 5.11 给出了迭代过程前 30 局的计算结果. 表 5.11 中第 3 列为局中人 I 前 k 局的累计赢得值, 并在其最小值下标以横线; 第 5 列为局中人 II 前 k 局的累计支付值, 并在其最大值上标以横线; 标以横线的数字所对应的纯策略, 即为下一步另一局中人所取的策略. 表中第 6 列为局中人 I 的前 k 局累计所得中的最小值除以对策局数 k, 用$\underline{V}_k$表示; 表中第 7 列为局中人 II 的前 k 局累计所失中的最大值除以对策局数 k, 用$\overline{V}_k$表示; 表中第 8 列为$\underline{V}_k$与 $\overline{V}_k$ 的平均赢得, 即为对策的近似值, 用 V_k 表示. 表中第 9, 10 列分别为局中人 I 和 II 第 k 局的近似最优混合策略.

表 5.11

局数 k	局中人 I	$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	局中人 II	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	$\underline{V}_k$	$\overline{V}_k$	V_k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
1	α_1	$(2, \underline{0}, 2)$	β_2	$(1, \overline{3}, 2)$	0	3	3/2	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)
2	α_2	$(\underline{2}, 3, 3)$	β_1	$(2, \overline{3}, 3)$	2/2	3/2	5/4	(1/2, 1/2, 0)	(1/2, 1/2, 0)
3	α_2	$(\underline{2}, 6, 4)$	β_1	$(\overline{4}, 3, 4)$	2/3	4/3	1	(1/3, 2/3, 0)	(2/3, 1/3, 0)
4	α_1	$(4, 6, 6)$	β_1	$(\overline{6}, 3, 5)$	4/4	6/4	5/4	(2/4, 2/4, 0)	(3/4, 1/4, 0)
5	α_1	$(\underline{6}, 6, 8)$	β_1	$(\overline{8}, 3, 6)$	6/5	8/5	7/5	(3/5, 2/5, 0)	(4/5, 1/5, 0)
6	α	$(8, \underline{6}, 10)$	β_2	$(\overline{8}, 6, 8)$	6/6	8/6	7/6	(4/6, 2/6, 0)	(4/6, 2/6, 0)
7	α_1	$(10, \underline{6}, 12)$	β_2	$(8, 9, \overline{10})$	6/7	10/7	8/7	(5/7, 2/7, 0)	(4/7, 3/7, 0)
8	α_3	$(11, \underline{8}, 13)$	β_2	$(8, \overline{12}, 12)$	8/8	12/8	5/4	(5/8, 2/8, 1/8)	(4/8, 4/8, 0)
9	α_2	$(\underline{11}, 11, 14)$	β_1	$(10, 12, \overline{13})$	11/9	13/9	4/3	(5/9, 3/9, 1/9)	(5/9, 4/9, 0)
10	α_3	$(\underline{12}, 13, 15)$	β_1	$(12, 12, \overline{14})$	12/10	14/10	13/10	(5/10, 3/10, 2/10)	(6/10, 4/10, 0)
11	α_3	$(\underline{13}, 15, 16)$	β_1	$(14, 12, \overline{15})$	13/11	15/11	14/11	(5/11, 3/11, 3/11)	(7/11, 4/11, 0)
12	α_3	$(\underline{14}, 17, 17)$	β_1	$(\overline{16}, 12, 16)$	14/12	16/12	5/4	(6/12, 3/12, 4/12)	(8/12, 4/12, 0)
13	α	$(\underline{16}, 17, 19)$	β_1	$(\overline{18}, 12, 17)$	16/13	18/13	17/13	(6/13, 3/13, 4/13)	(9/13, 4/13, 0)
14	α_1	$(18, \underline{17}, 21)$	β_2	$(18, 15, \overline{19})$	17/14	19/14	9/7	(7/14, 3/14, 4/14)	(9/14, 5/14, 0)
15	α_3	$(\underline{19}, 19, 22)$	β_1	$(\overline{20}, 15, 20)$	19/15	20/15	13/10	(7/15, 3/15, 5/15)	(10/15, 5/15, 0)
16	α_1	$(21, \underline{19}, 24)$	β_2	$(20, 18, \overline{22})$	19/16	22/16	41/32	(8/16, 3/16, 5/16)	(10/16, 6/16, 0)
17	α_3	$(22, \underline{21}, 25)$	β_2	$(20, 21, \overline{24})$	21/17	24/17	45/34	(8/17, 3/17, 6/17)	(10/17, 7/17, 0)
18	α_3	$(\underline{23}, 23, 26)$	β_1	$(22, 21, \overline{25})$	23/18	25/18	4/3	(8/18, 3/18, 7/18)	11/18, 7/18, 0)
19	α_3	$(\underline{24}, 25, 27)$	β_1	$(24, 21, \overline{26})$	24/19	26/19	25/19	(8/19, 3/19, 8/19)	(12/19, 7/19, 0)
20	α_3	$(\underline{25}, 27, 28)$	β_1	$(26, 21, \overline{27})$	25/20	27/20	13/10	(8/20, 3/20, 9/20)	(13/20, 7/20, 0)
21	α_3	$(\underline{26}, 29, 29)$	β_1	$(\overline{28}, 21, 28)$	26/21	28/21	27/21	(8/21, 3/21, 10/21)	(14/21, 7/21, 0)
22	α_1	$(\underline{28}, 29, 31)$	β_1	$(\overline{30}, 21, 29)$	28/22	30/22	29/22	(9/22, 3/22, 10/22)	(15/22, 7/22, 0)
23	α_1	$(30, \underline{29}, 33)$	β_2	$(30, 24, \overline{31})$	29/23	31/23	30/23	(10/23, 3/23, 10/23)	(15/23, 8/23, 0)
24	α_3	$(\underline{31}, 31, 34)$	β_1	$(\overline{32}, 24, 32)$	31/24	32/24	21/16	(10/24, 3/24, 11/24)	(16/24, 8/24, 0)
25	α_1	$(33, \underline{31}, 36)$	β_2	$(32, 27, \overline{34})$	31/25	34/25	13/10	(11/25, 3/25, 11/25)	(16/25, 9/25, 0)
26	α_3	$(34, \underline{33}, 37)$	β_2	$(32, 30, \overline{36})$	33/26	36/26	69/52	(11/26, 3/26, 12/26)	(16/26, 10/26, 0)
27	α_3	$(\underline{35}, 35, 38)$	β_1	$(34, 30, \overline{37})$	35/27	37/27	4/3	(11/27, 3/27, 13/27)	(17/27, 10/27, 0)
28	α_3	$(\underline{36}, 37, 39)$	β_1	$(36, 30, \overline{38})$	36/28	38/28	37/28	(11/28, 3/28, 14/28)	(18/28, 10/28, 0)
29	α_3	$(\underline{37}, 39, 40)$	β_1	$(38, 30, \overline{39})$	37/29	39/29	38/29	(11/29, 3/29, 15/29)	(19/29, 10/29, 0)
30	α_3	$(\underline{38}, 41, 41)$	β_1	$(\overline{40}, 30, 40)$	38/30	40/30	39/30	(11/30, 3/30, 16/30)	(20/30, 10/30, 0)

本例中,当 $k=30$ 时,局中人Ⅰ取纯策略 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的次数分别为 11,3,16;局中人Ⅱ取纯策略 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的次数分别为 20,10,0,所以,

$$x^* \approx x^{(30)} = (11/30, 3/30, 16/30) \approx (0.37, 0.10, 0.53),$$

$$y^* \approx y^{(30)} = (20/30, 10/30, 0) \approx (0.67, 0.33, 0),$$

对策值 $V_\Gamma \approx V_{30} \approx 39/30 = 1.3$.

在理论上可以证明,按上述方法迭代下去,其平均赢得 V_k 将趋于对策值 V_Γ,各策略的频率分布将趋于最优策略的概率分布.

这是一种较为实用的方法,其运算简单,且容易在计算机上实现,但收敛速度较慢.

5.4 求解中的计算技巧

5.4.1 用优超法简化计算

先观察一个例子.设某对策 Γ 的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 12 & 10 & -5 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

比较 A 中的第一列和第三列的元素就会发现,局中人Ⅱ决不会采用纯策略 β_1,因为当局中人Ⅰ无论采用任一纯策略时,局中人Ⅱ采用 β_1 都比采用 β_3 时的付出大.此时,我们称局中人Ⅱ的纯策略 β_3 优超于纯策略 β_1,因而局中人Ⅱ的最优混合策略中,$y_1^* = 0$.

由于 β_1 不被采用,当然就可以把第一列元素从 A 中删去,将 3×3 的对策简化为 3×2 的对策:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & -5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

同理可以定义局中人Ⅰ的某个纯策略优超于另一个纯策略.

一般地,对于给定的对策 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$,其中 $S_{\mathrm{I}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$,$S_{\mathrm{II}} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$,$A = (a_{ij})_{m\times n}$,如果第 k 行与第 l 行的所有元素均有

$$a_{kj} \geq a_{lj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称局中人Ⅰ的第 k 个纯策略 α_k 优超于第 l 个纯策略 α_l.如果第 p 列与第 q 列的所有元素均有

$$a_{ip} \leq a_{iq} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

则称局中人Ⅱ的第 p 个纯策略 β_p 优超于第 q 个纯策略 β_q.

如果发现局中人Ⅰ的策略 α_k 优超于 α_l,就可以在 A 中把第 l 行删去,且在最优混合策略中必有 $x_l^* = 0$.如果发现局中人Ⅱ的策略 β_p 优超于 β_q,就可以在 A 中把第 q 列删去,且在最优混合策略中必有 $y_q^* = 0$.这样就可以将 A 的阶数降低,从而达到在求解时简化计算之目的.

例 12 求解赢得矩阵为 A 的矩阵对策,其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 A 是 5×5 阶矩阵, 若用线性规划法进行求解, 其计算量较大. 为此, 先考虑用优超法将 A 进行简化, 然后再用恰当的方法进行求解.

观察 A 中的各行. 由于 α 优超于 α, α 优超于 α, 所以删去第 2 行和第 1 行, 并同时记下 $x_1^* = x_2^* = 0$, 得到新矩阵 A_1

$$A_1=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

观察 A_1 中的各列, 第 3 列和第 4 列的各元素均比第 2 列相应的元素大, 即 β 均优越于 β 和 β, 所以将第 3, 4 列删去, 同时, 记下 $y_3^* = y_4^* = 0$, 得到新矩阵 A_2:

$$A_2=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

在 A_2 中, 第 1 行的各元素均比第 3 行相应的元素大, 于是又将第 3 行删去, 并记下 $x_5^* = 0$, 所得新矩阵 A_3

$$A_3=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

在 A_3 中, 第 1 列的各元素均比第 3 列相应的元素小, 于是又将第 3 列删去, 并记下 $y_5^* = 0$, 得到新矩阵 A_4

$$A_4=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

对于无法再用优超法继续简化的 A_4 可用 2×2 对策的公式法进行求解, 得

$$x^{(0)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ y^{(0)}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ V_{r_4}=5.$$

将前面已记录下的结果和上述结果合在一起, 得到原对策的解为

$$X^*=\left(0,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right),\ Y^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0\right),$$

$$V_r=V_{r_4}=5.$$

例 13 用优超法简化计算求解矩阵对策

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ 12 & 10 & -5 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

解

$$A=\begin{array}{c}\downarrow\quad\quad\quad\quad\\ \begin{pmatrix}10&-1&3\\12&10&-5\\6&8&5\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{y_1^*=0}A_1=\begin{pmatrix}-1&3\\10&-5\\8&5\end{pmatrix}\begin{array}{c}\leftarrow\\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{x_1^*=0}.$$

$$A_2=\begin{array}{c}\downarrow\quad\quad\\ \begin{pmatrix}10&-5\\8&5\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{y_2^*=0}.\ A_3=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\begin{array}{c}\leftarrow\\ \\ \end{array}\xrightarrow{x_2^*=0}A_4=[5]\ .$$

因此,对策的解为

$$x_1^*=(0,0,1),\ y^*=(0,0,1),\text{对策的值 } V_\Gamma=5\ .$$

这是有鞍点的对策,是最优混合策略的一种特殊情况.用优超法简化计算得出的结果与用最大最小原则求出的结果是一致的.

一般情况下,用优超法简化可以达到降低 A 的阶数,用优超法简化后再和其他方法结合在一起就能求出对策的解(如例 13).例 14 仅是特例.对于有鞍点的对策,用最大最小原则求解仍更为简捷.

值得指出的是,对于 A 中的纯策略 $\alpha_{i_1}(\beta_{j_1})$ 不为纯策略 $\alpha_{i_2},\alpha_{i_3},\cdots,\alpha_{i_m}(\beta_{j_2},\beta_{j_3},\cdots,\beta_{j_n})$ 所优超,而是为它们的某个凸线性组合所优超,即

$$\alpha_{i_1}\le\lambda_{i_2}\alpha_{i_2}+\lambda_{i_3}\alpha_{i_3}+\cdots+\lambda_{i_m}\alpha_{i_m},\ \sum_{i=2}^{m}\lambda_{i}=1\ ,$$

$$\left(\beta_{j_1}\ge\mu_{j_2}\beta_{j_2}+\mu_{j_3}\beta_{j_3}+\cdots+\mu_{j_n}\beta_{j_n},\ \sum_{k=2}^{n}\mu_{j_k}=1\right)\ .$$

此时,同样可在 A 中删去第 i_1 行(第 j_1 列),对策的解不变.

例 14 试求如下赢得矩阵 A 的对策的解:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4&0\\3&4&2&4\\4&2&4&0\\0&4&0&8\end{pmatrix}.$$

解

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4&0\\3&4&2&4\\4&2&4&0\\0&4&0&8\end{pmatrix}\begin{array}{c}\leftarrow\\ \\ \\ \\ \end{array}\xrightarrow{x_1^*=0}A_1=\begin{array}{c}\downarrow\quad\quad\quad\quad\quad\\ \begin{pmatrix}3&4&2&4\\4&2&4&0\\0&4&0&8\end{pmatrix}\end{array}\xrightarrow{y_1^*=0}A_2=\begin{array}{c}\downarrow\quad\quad\quad\quad\\ \begin{pmatrix}4&2&4\\2&4&0\\4&0&8\end{pmatrix}\end{array},$$

注意到 $\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\ge\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$,

即 A_2 中的第 1 列可为第 2 列和第 3 列的凸线性组合所优超,于是删去第 1 列,即

$$A_2\xrightarrow{y_2^*=0}A_3=\begin{pmatrix}2&4\\4&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{array}{c}\leftarrow\\ \\ \\ \end{array}.$$

又因为

$$(2,4)=\frac{1}{2}(4,0)+\frac{1}{2}(0,8)\quad,$$

所以,**有**

$$A_3 \quad x_2^*=0 \quad A_4=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

用 2×2 **对策的公式法继续对** A_4 **求解**.

因此,**原对策的解为**

$$x^*=\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,\ y^*=\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T,\ V_\Gamma=\frac{8}{3}.$$

5.4.2 A 为特殊矩阵的情况

1. A 为对角矩阵的情况

定理 7 **设** $\Gamma=\{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}};A\}$,$A$ **为** n **阶对角矩阵**,**主对角线上元素为** $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$,**其余元素均为零**.**若** $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$**符号相同**,**则** $x^*=y^*=\left(\frac{\lambda}{a_{11}},\frac{\lambda}{a_{22}},\cdots,\frac{\lambda}{a_{nn}}\right)^T$,**且** $V_\Gamma=\lambda$**其中**

$$\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{-1}\right)^{-1}.$$

例 15 **求解矩阵对策** $\Gamma\{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}};A\}$,**其中**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

解 **由定理 7 有**

$$\lambda=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{6}{6+3+2}=\frac{6}{11},$$

所以 $$x^*=y^*=\left(\frac{6}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11}\right)^T,\ V_\Gamma=\lambda=\frac{6}{11}.$$

例 16 **两小孩猜朴克牌花色**,**游戏规定**:**由甲小孩每次拿出一张牌给乙小孩猜花色**,**猜对了**,**甲付给乙 3 个小石子**;**猜不对**,**乙付给甲一个小石子**,**试求该游戏的解**.

解 **据题意**,**该游戏可归结为对策模型** $\Gamma=\{S_{甲},S_{乙};A\}$,**其中甲小孩的赢得矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

显然,**该对策无鞍点**.**为简化计算**,**对** A **中各元素减 1**,**得**

$$A'=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

按定理 7,**有** $\lambda=-1$,**对策的解为**

$X^* = Y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $V_\Gamma = -1 + 1 = 0$, 即甲、乙两小孩应以$\frac{1}{4}$的概率出(或猜)各种花色, 其结果互不吃亏.

2. A 的各行各列元素之和相等的情况

定理 8 设 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; A\}$, A 是 $n \times n$ 矩阵.

若
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = b \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

则
$$X^* = Y^* = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right), \text{且 } V_\Gamma = \frac{b}{n}.$$

例 17 试用定理 8 求解“齐王赛马”对策.

解 齐王的赢得矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

因为 A 中各行和各列元素之和均为 $k = 6$, $n = 6$, 所以,

$$x^* = y^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), V_\Gamma = \frac{6}{6} = 1.$$

即齐王和田忌均以$\frac{1}{6}$的概率选用自己的纯策略, 参加赛马, 经过多次比赛, 齐王可望赢得一千两黄金.

对于两人有限零和对策, 该选用哪种方法进行求解? 一般可按以下顺序进行考虑:

首先观察赢得矩阵 A, 看是否存在这样的元素; 它既是某行中的最小元素, 又是所在列中的最大元素? 若有, 则用最大最小原则求解, 找出鞍点; 否则考虑以下方法:

(1) 对 3×3 阶以上的赢得矩阵 A, 试用优超法进行简化, 尽量将 A 的阶数降低;

(2) 对赢得矩阵 A 是特殊矩阵的对策, 用定理 7 或定理 8 求解;

(3) 对 2×2 对策, 用公式法求解;

(4) 对 $2 \times n$ 或 $m \times 2$ 对策, 可转化为 C_n^2 个 2×2 子对策后再求解, 或用图解法求解;

(5) 以上方法不能求解时, 可用线性规划法或迭代法求解.

5.5 两人有限非零和对策

以上介绍的是两人有限零和对策, 对策的双方利益完全相反. 但在现实生活的对策过程中经常出现一个局中人的所得并不一定等于另一局中人的所失。对于每一局势, 两局中人的赢得之和不一定为零, 这就是两人非零和对策. 许多经济活动过程中的对策模型, 很多是非零和的. 本节简介两人有限非零和对策的数学模型及其解法.

5.5.1　两人有限非零和对策的数学模型

先看以下例子:

例 18　甲、乙两家面包店在市场竞争中, 各自都在考虑是否要降价. 如果两家都降价, 则各家可得 3 百元的利润; 如果都不降价, 则各家可得利润 5 百元; 如果一家降价, 另一家不降, 则降价的一家可得利润 6 百元, 不降价的一家由于剩余损坏等原因而亏损 4 百元. 问双方应如何选择行动较为合理?

依题意把上述数据整理成表 5.12.

表　5.12

甲面包店 \ 乙面包店	β_1(降价)	β_2(不降价)
α_1(降价)	(3, 3)	(6, -4)
α_2(不降价)	(-4, 6)	(5, 5)

表 5.12 中, 甲、乙两面包店分别有两个纯策略: 降价与不降价, 构成的策略集分别为 $S_甲 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $S_乙 = \{\beta_1, \beta_2\}$, 由局势$(\alpha_i, \beta_j)$所确定的数组$(a_{ij}, b_{ij})$表示甲面包店的利润为 a_{ij}, 乙面包店的利润为 b_{ij}. 例如, (-4, 6)表示在局势(α_2, β_1)下, 甲面包店亏损 4 百元, 乙面包店赢得 6 百元.

一般地, 两人有限非零和对策的数学模型可用 $\Gamma = \{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; (A, B)\}$表示, 其中 S_{I} 和 S_{II} 分别为局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 的纯策略集, $S_{\mathrm{I}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$, $S_{\mathrm{II}} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$和矩阵 $B = (b_{ij})_{m\times n}$分别为局中人 Ⅰ 和 Ⅱ 的赢得矩阵, $(A, B) = (a_{ij}, b_{ij})_{m\times n}$, 一般 $A + B \neq 0$.

随着 A, B 的确定, 两人有限非零和对策也就确定. 因此, 两人有限非零和对策又称为双矩阵对策. 容易理解, 当 $B = -A$ 时, 双矩阵对策就是矩阵对策. 矩阵对策是双矩阵对策的一种特殊情况.

在本例中,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

表 5.12 概述了降价竞争问题. 在这个对策中, 两家面包店在没有互通信息非合作情况下, 各自都有两种策略的选择, 降价或不降价. 显然, 双方最好策略的选择都是降价, 即(α_1, β_1). 因为选择降价至少可以得到 3 百元利润, 如果选择不降价, 则可能由于对方降价而蒙受 4 百元的损失. 当然, 在两店互通信息, 进行合作的情况下, 双方采取不降价的策略, 各自都能从合作中多得 2 百元.

例 19　设想一个垄断企业已占领市场(称为"在位者"), 另一个企业很想进入市场(称为"进入者"), 在位者想保持其垄断地位, 就要阻挠进入者进入. 假定进入者进入之前在位者的垄断利润为 300, 进入后两者的利润合为 100(各得 50), 进入成本为 10. 两者各种策略组合下的赢得矩阵如表 5.13 所示.

表　5.13

在位者 \ 进入者	β(默许)	β(斗争)
α(进入)	(40, 50)	(- 10, 0)
α(不进入)	(0, 300)	(0, 300)

表 5.13 反映了市场进入阻挠对策问题. 进入者的策略集 $S_{进}$ 中两个纯策略: α(进入) 和 α(不进入), 在位者的策略集 $S_{在}$ 中也有两个纯略: β(默许) 和 β(斗争); 进入者和在位者的赢得矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}40 & -10\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ 和 } B=\begin{pmatrix}50 & 0\\ 300 & 300\end{pmatrix}.$$

容易理解, (α, β) (进入, 默许) 和 (α, β) (不进入, 斗争) 是双方选择最好的局势. 因为当进入者选定 α(进入) 时, 在位者选择 β(默许) 可赢得利润 50, 而选择斗争则赢得为 0, 所以, β(默许) 是在位者的最优策略; 同样, 当在位者选定 β(默许) 时, 进入者的最优选择是 α (进入). 尽管进入者选择 α(不进入) 时, β(默许) 和 β(斗争) 对在位者是同一个意思, 只有当在位者选择 β(斗争) 时, α(不进入) 才是进入者最好的选择.

从以上两例可以看到非零和对策比零和对策更加复杂, 求解也更加困难.

5.5.2　非合作两人对策的解法

假定在两人有限非零和对策中, 彼此了解对方的纯策略集和赢得函数, 但不合作, 并且局中人在选择自己策略时不知道对方的选择.

1. 非合作两人对策的解——纳什均衡

我们先分析例 18 的解. 局中人甲面包店对于局中人乙面包店的策略 β(降价) 而言, 选择策略 α(降价) 也比选择策略 α(不降价) 好; 对于局中人乙面包店的策略 β(不降价) 而言, 选择 α(降价) 比 α(不降价) 好, 也就是说, 无论对于局中人乙面包店的策略 β 还是 β, 局中人甲面包店选择策略 α(降价) 为最优. 同理, 乙面包店对于甲面包店的策略 α(降价) 和 α(不降价), 选择策略 β(降价) 为最优. 因此, 对策双方的选择都应该稳定在局势 (α, β) 上, 从而达到一种均衡, 即纳什均衡. 我们把这种均衡局势 (α, β) 称为非合作两人对策的解.

一般地, 对于非合作两人对策 $\Gamma=\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}; (A, B)\}$, 如果 $\overset{*}{\alpha}\in S_{\mathrm{I}}$, $\overset{*}{\beta}\in S_{\mathrm{II}}$ 分别是局中人 I 和 II 的最优纯策略, 则称局势 $(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$ 是一个纳什均衡.

求非合作两人对策的解, 就是求对策的纳什均衡. 求纳什均衡的方法步骤如下:

第一步: 在双矩阵对策 (A, B) 表中, 对于矩阵 A 的每列, 分别找出赢得最大的数字, 并在其下划一横线;

第二步: 在双矩阵对策 (A, B) 表中, 对于矩阵 B 的每行, 分别找出赢得最大的数字, 并在其下划一横线;

第三步: 如果表中某格的两个数字下面都被划有横线, 则此格对应于两个局中人相应

策略的组合就是一个(纯策略下的)纳什均衡. 否则, 该对策不存在纯策略下的纳什均衡.

下面用上述方法分别求例 18 和例 19 的纳什均衡解.

在例 18 的表 5.12 中

乙面包店 甲面包店	β(降价)	β(不降价)
α(降价)	($\underline{3}$, $\underline{3}$)	($\underline{6}$, - 4)
α(不降价)	(- 4, $\underline{6}$)	(5, 5)

首先, 在表 5.12 中对于矩阵 A 的两列, 分别找出最大的数字 $a_{11}=3$ 和 $a_{12}=6$, 并在其下划一横线. 其实际含义是: 对应局中人乙面包店的不同策略 β_1, β_2, 分别求出局中人甲面包店的最优策略均为 α(降价)。然后在表 5.12 中, 对于矩阵 B 的两行, 分别找出最大的数字 $b_{11}=3$ 和 $b_{21}=6$, 并在其下划一横线. 其实际含义是: 对应局中人甲面包店的不同策略 α, α 分别求出局中人乙面包店的最优策略均为 β(降价), 发现在数组$(a_{11}, b_{11})=(3, 3)$下面都已划了横线, 因此, (3, 3) 对应的策略组合—— 局势(α, β) 是该对策的纳什均衡解. 即各自都取“降价”策略, 是双方的最佳选择, 彼此均能赢得 3 百元.

为什么(α, β)(不降价, 不降价) 不是一个纳什均衡呢? 这是因为不论对方选择什么策略, 自己选择降价策略可在不冒任何风险的情况下, 至少赢得 3 百元的利润. 如果个人选择不降价策略, 尽管有在对方也选择不降价策略时获得 5 百元利润的机会, 但更有损失 4 百元的可能. 在激烈的市场竞争中, 每个局中人均以自己的利益为前提, 所以, (α, β)不是纳什均衡. 当然, 如果允许局中人双方进行协调, 有可能得到(不降价, 不降价) 的合作解.

在例 19 的表 5.13 中

在位者 进入者	β(默许)	β(斗争)
α(进入)	($\underline{40}$, $\underline{50}$)	(- 10, 0)
α(不进入)	(0, $\underline{300}$)	($\underline{0}$, $\underline{300}$)

按上述方法进行, (进入, 默许) 和(不进入, 斗争) 都是纳什均衡解.

正如本例所示, 一个非合作两人对策可能有多个纳什均衡, 到底哪一个会实际出现, 就需要知道对策进入的具体过程.

2. 混合策略纳什均衡

上面介绍了在纯策略下非合作两人对策纳什均衡的概念及其求解方法. 但有些对策不存在纯策略下的纳什均衡. 考虑下面的例子.

例 20　局中人是政府和一个流浪汉, 流浪汉有两个策略: 寻找工作或游荡; 政府也有两个策略: 救济或不救济. 政府帮助流浪汉的前提是后者必须试图寻找工作; 否则, 前者不予帮助; 而流浪汉只在得不到救济时才会寻找工作. 表 5.14 给出了对策的赢得双矩阵.

表 5.14

政府 \ 流浪汉	寻找工作	游荡
救济	($\underline{3}$, 2)	(-1, $\underline{3}$)
不救济	(-1, $\underline{1}$)	($\underline{0}$, 0)

观察表 5.14, 容易理解: 当给定政府策略为救济时, 流浪汉的最优策略是游荡; 给定政府策略为不救济时, 流浪汉的最优策略是寻找工作; 当流浪汉选定寻找工作策略时, 政府的最优策略是救济; 流浪者选定游荡策略时, 政府的最优策略是不救济. 总之, 在纯策略下, 没有一个策略组合构成纳什均衡. 但是, 此对策却存在混合策略纳什均衡.

设 A, B 分别为局中人Ⅰ和Ⅱ的赢得矩阵, 且皆为 $m\times n$ 矩阵. 局中人Ⅰ, Ⅱ的混合策略集为

$$S_{\mathrm{I}}^* = \left\{ X \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$

$$S_{\mathrm{II}}^* = \left\{ Y \mid y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

如果一个混合策略组合(X^*, Y^*)同时满足

$$XAY^{*\mathrm{T}} \leq X^* AY^{*\mathrm{T}}, \quad X^* BY^{\mathrm{T}} \leq X^* BY^{*\mathrm{T}},$$

则称策略组合——局势(X^*, Y^*)是一个混合策略纳什均衡, 其中 X, Y 分别是局中人Ⅰ和Ⅱ的任意混合策略.

现在根据上述定义来求例 20 的混合策略纳什均衡解.

假定政府以概率 x 选择救济, 概率 $1-x$ 选择不救济, 即政府的混合策略为$(x, 1-x)$, 流浪汉以概率 y 选择寻找工作, 以概率 $1-y$ 选择游荡, 即流浪汉的混合策略为$(y, 1-y)$. 那么政府的期望赢得函数为

$$E_A(X, Y) = XAY^{\mathrm{T}}$$

$$= (x, 1-x)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = 5xy - x - y.$$

用微分求极值的方法,

令 $\frac{\partial E_A}{\partial x} = 5y - 1 = 0$, 得 $y^* = \frac{1}{5}$.

这就是说, 在混合策略均衡中, 流浪汉在对付给定政府的混合策略下, 最优策略是以 $\frac{1}{5}$ 的概率选择寻找工作, $\frac{4}{5}$ 的概率选择游荡, 即 $Y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

同样, 流浪汉的期望赢得函数为

$$E_B(X, Y) = XBY^{\mathrm{T}} = (x, 1-x)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = -2xy + 3x + y.$$

用微分求极值的方法,

令 $\frac{\partial E_B}{\partial y} = -2x + 1 = 0$, 得 $x^* = \frac{1}{2}$.

即在混合策略均衡中,政府在对付给定流浪汉的混合策略下,最优策略 $X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

由于纳什均衡要求每个局中人的混合策略是在给定对方的混合策略下的最优选择,因此,由 $X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $Y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 构成的(X^*, Y^*)是唯一的纳什均衡.

对于上述的混合策略纳什均衡,还可以这样来理解:如果政府认为流浪汉选择工作的概率 $y < \frac{1}{5}$,那么政府的唯一最优选择策略是不救济;但当政府以 1 的概率选择不救济,流浪汉的最优选择是寻找工作,这又将导致政府选择救济,此时流浪汉则又会选择游荡,如此等等.因此,$y < \frac{1}{5}$不构成纳什均衡.同样,如果政府认为 $y > \frac{1}{5}$,政府的唯一最优选择是救济;但当政府以 $x = 1$ 选择救济时,流浪汉的最优选择则是游荡,因此,$y > \frac{1}{5}$也不构成纳什均衡.类似地,可以验证 $x < \frac{1}{2}$和 $x > \frac{1}{2}$都不构成纳什均衡.

另外,从政府期望赢得函数 $E_A(x, y)$ 和流浪汉的期望赢得函数 $E_B(x, y)$ 来验证由 $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 和 $y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 构成的(x^*, y^*)是唯一的混合策略纳什均衡.

当 $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时,$E_B\left(\frac{1}{2}, y\right) = -2 \cdot \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} + y = \frac{3}{2}$,流浪汉选择任何混合策略带来的期望赢得都是$\frac{3}{2}$,也就是说,流浪汉的任何一种策略(纯的或混合的)都是对政府所选择的混合策略的最优反应.当然,其中 $Y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 也应是一种最优混合策略.

当 $y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 时,$E_A\left(x, \frac{1}{5}\right) = 5x \cdot \frac{1}{5} - x - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$,政府的任何策略(纯的或混合的)带给政府的期望赢得均为$-\frac{1}{5}$.那么以 $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的混合策略,当然也应是政府对流浪汉所选择的混合策略的最优反应.因此,X^* 和 Y^* 构成一个混合策略纳什均衡.

5.6 应 用 实 例

例 21　某企业生产甲、乙两种家用电器.据预测,若在某地建新厂则要投资 100 万元,每年可净收益 14 万元.若将此款存入银行,则有 2 万元利息.此外,还有以下信息可供决策者参考:

(1) 在某地建新厂后,原厂房若不能售出,则要维修,每年将花费 3.2 万元.因此,在某地建新厂后每年的净收益只能是 10.8 万元.

(2) 据预测,今后 10 年中,乙产品的需求量将下降 5%(与进口无关).在此情况下,未被吸收的固定管理费用为 2.3 万元,因此,建新厂的净收益只能是 11.7 万元.

(3) 在某地建新厂后,可增加销售额.经计算能多得 2.4 万元的收益,因此,净收益为 16.4 万元.反之,若不建新厂将会损失 2.4 万元,扣除利息 2 万元,净损失为 0.4 万元.

(4) 竞争者建厂.若该企业不在此地建新厂,则竞争者将在该地建厂,于是该企业在此地的销售份额将被竞争者所占有,将损失 3.6 万元,扣除利息 2 万元,净损失为 1.6 万元.

(5) 进口影响.进口产品中对甲产品影响不大,但对乙产品销路的威胁极大.若进口产

品成功,将会占去 80% 的市场. 此时在该地建新厂不但无收益,反而损失 4.5 万元.

根据以上信息,该企业的决策者应如何决策?

解　将以上信息可归纳为一个 2× 6 对策问题. 其中决策者可作为局中人Ⅰ,其策略有两个:在某地建厂与不建厂. 而 6 种可能变化的条件可作为虚拟的局中人Ⅱ的策略. 该企业决策者的赢得矩阵如表 5.15 所示.

表　5.15

策略 \ 条件	原始预算 (β_1)	原厂房未售出 (β_2)	需求量下降 (β_3)	增加销售 (β_4)	竞争者建厂 (β_5)	进口影响 (β_6)
建　厂 (α_1)	14	10.8	11.7	16.4	14	- 4.5
不建厂 (α_2)	2	2	2	- 0.4	- 1.6	2

这个对策没有鞍点,但它的 15 个 2× 2 的子对策相应的赢得矩阵分别为

$$A_1=\begin{pmatrix}14 & 10.8\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}14 & 11.7\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}14 & 16.4\\ 2 & -0.4\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 2 & -1.6\end{pmatrix},\quad A_5=\begin{pmatrix}14 & -4.5\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad A_6=\begin{pmatrix}10.8 & 11.7\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_7=\begin{pmatrix}10.8 & 16.4\\ 2 & -0.4\end{pmatrix},\quad A_8=\begin{pmatrix}10.8 & 14\\ 2 & -1.6\end{pmatrix},\quad A_9=\begin{pmatrix}10.8 & -4.5\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_{10}=\begin{pmatrix}11.7 & 16.4\\ 2 & -0.4\end{pmatrix},\quad A_{11}=\begin{pmatrix}11.7 & 14\\ 2 & -1.6\end{pmatrix},\quad A_{12}=\begin{pmatrix}11.7 & -4.5\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

$$A_{13}=\begin{pmatrix}16.4 & 14\\ -0.4 & -1.6\end{pmatrix},\quad A_{14}=\begin{pmatrix}16.4 & -4.5\\ -0.4 & 2\end{pmatrix},\quad A_{15}=\begin{pmatrix}14 & -4.5\\ -1.6 & 2\end{pmatrix}$$

各子对策的值为

$$v_{A_1}=v_{A_6}=v_{A_7}=v_{A_8}=10.8,$$

$$v_{A_2}=v_{A_{10}}=v_{A_{11}}=11.7,$$

$$v_{A_3}=v_{A_4}=v_{A_{13}}=14,$$

$$v_{A_5}=v_{A_9}=v_{A_{12}}=2,$$

$$v_{A_{14}}=1.33,\qquad v_{A_{15}}=0.94.$$

其中最小的是 $v_{A_{15}}=0.94$,所以

$$V_\Gamma=v_{A_{15}}=0.94.$$

原对策的解为

$$x^*=(0.16,0.84),\ y^*=(0,0,0,0,0.29,0.71).$$

此结果表明,采用"建厂"策略的概率为 0.16,可望得利 0.94 万元. 但由于该企业是否投资建厂的决策只能是一次性的,因此,结论应倾向于不投资建厂.

如果我们对上述矩阵作进一步分析,影响我们决策的因素主要有两个,一是使不建厂受到损失的是竞争者建厂,即谁不抢先在该地建厂,谁的产品就会被挤出去;二是使"建厂"受到损失的是由进口引起,而进口主要对乙产品的销路有影响.

如果考虑在该地建一个只生产甲产品的新厂,并设需投资 75 万元,期望净收益为 9.6 万元,其他数据如表 5.16 所示.

表　5.16

策　略 \ 条　件	原始计算(β_1)	原厂房未售出(β_2)	增　加销　售(β_3)	竞争者建　厂(β_4)
建　厂(α_1)	9.6	7.5	11.3	9.6
不建厂(α_2)	1.5	1.5	1.5	-0.2

进行新的计算. 易见, 此 2×4 对策是有鞍点的, $V_r = 7.5$, $X^* = (1, 0)$. 即应采用建厂策略, 将获利 7.5 万元.

例 22　房地产开发商 A 和 B 拟对某地进行单独开发. 双方经市场调查预测, 有如表 5.17的结果, 其中(a)是高需求时的情况, (b)是低需求时的情况. 表中每个数字格是对应双方纯策略组合下的赢得(利润), 第一个数字是 A 的利润(万元), 第二个数字是 B 的利润(万元), 试问 A, B 双方应如何选取策略进行对策?

表　5.17

(a) 高需求情况

开发商A \ 开发商B	开　发	不开发
开　发	$\underline{400}, \underline{400}$	$\underline{800}$, 0
不开发	0, $\underline{800}$	0, 0

(b) 低需求情况

开发商A \ 开发商B	开　发	不开发
开　发	-300, -300	$\underline{100}$, $\underline{0}$
不开发	$\underline{0}$, $\underline{100}$	0, 0

解　这是个非合作两人对策, A, B 双方仅有两个纯策略: 开发或不开发.

在高需求情况下, 可以求出纯策略下唯一的纳什均衡解(开发, 开发), 即 A, B 双方各自都对某地进行开发, 并分别可获得 400 万元的利润. 除此之外, (开发, 不开发), (不开发, 开发), (不开发, 不开发)都不是纳什均衡解. 纳什均衡解(开发, 开发)的求得除了用 5.5 节中所述的方法外, 还可以应用 5.4 节中介绍的优超法考虑. 事实上, 对开发商 A 的赢得矩阵而言, "开发"策略优超于"不开发"策略, 即 A 不会采用"不开发"策略. 于是表 5.17 中的(a)可写成表 5.18.

表　5.18

开发商A \ 开发商B	开　发	不开发
开　发	400, 400	800, 0

此时, 开发商 B 显然不采用"不开发"策略. 因此(开发, 开发), 就成为唯一的纳什均衡解.

在低需求情况下, 有两个纯策略下的纳什均衡解: (开发, 不开发)和(不开发, 开发). 除此, 还有一个混合策略下的纳什均衡解(X^*, Y^*), 其中 $X^* = \frac{1}{4}, \frac{3}{3}$, $Y^* = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

一般说来, 如果一个非合作两人对策有两个纯策略下的纳什均衡, 则必存在第三个混合策略下的纳什均衡.

习　题

5.1　判断下列说法是否正确

(1) 矩阵对策中,如果最优解要求一个局中人采取纯策略,则另一局中人也必须采取纯策略.

(2) 矩阵对策中当局势达到均衡时,任何一方单方面改变自己的策略(纯策略或混合策略)将意味着自己更少的赢得或更大的损失.

(3) 任何矩阵对策一定存在混合策略意义下的解,并可以通过求解两个互为对偶的线性规划问题得到.

(4) 矩阵对策的对策值相当于进行若干次对策后,局中人Ⅰ的平均赢得值或局中人Ⅱ的平均损失值.

5.2　甲、乙两名儿童玩猜拳游戏.游戏中双方可分别出拳头(代表石头),手掌(代表布),两个手指(代表剪刀),规则是剪刀赢布,布赢石头,石头赢剪刀,赢者得一分,若双方所出相同,算和局,均不得分.试列出游戏中儿童甲的赢得矩阵.

5.3　A,B 两人分别有 1 角、5 分和 1 分的硬币各一枚.在双方互不知道的情况下,各出一枚硬币,并规定当和为奇数时,A 赢得 B 所出硬币;当和为偶数时,B 赢得 A 所出硬币.试据此列出两人零和对策的模型,并说明该项游戏对双方是否公平合理.

5.4　两个游戏者分别在纸上写{0,1,2}三个数字中的任一个,且不让对方知道.先让第一个人猜两人所写数字总和,再让第二个人猜,但规定第二个人猜的数不能与第一个人相同.猜中者赢得 1 分,否则得零分.试回答两个游戏者各有多少个纯策略.

5.5　设有参加对策的局中人 A 和 B,A 的赢得矩阵如表 5.19 所示,求最优纯策略和对策值.

表　5.19

A 策略 \ B 策略	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	8	6	2	8
α_2	8	9	4	5
α_3	7	5	3	5

5.6　A,B 两家公司的产品竞争性推销,它们各控制市场的 50%.最近这两家公司都改进了各自的产品,现在都准备发动新的广告宣传.如果这两家公司都不做广告,那么平分市场的局面将保持不变,但如果有一家公司发动一次强大的广告宣传,那么另一家公司将按比例地失去其一定数量的顾客.市场调查表明,潜在顾客的 50% 可以通过电视广告争取到,30% 通过报纸,其余的 20% 可通过无线电广播争取到,现每一家公司的目标是要选择最有利的宣传手段.

(1) 把这个问题表达成一个两人零和的对策,写出局中人 A 的赢得矩阵.

(2) 这个对策有鞍点吗?A,B 两公司的最优策略各是什么?对策值为多少?

5.7　三河城由汇合的三条河分割为三个区,如图 5.4 所示.城市居民 40% 住在 A 区,30% 住在 B 区,30% 住在 C 区.目前,三个区没有溜冰场,两个公司甲和乙都计划要在城中修建溜冰场,公司甲打算修建两个,公司乙只打算修建一个.每个公司都知道,如果在城市的某一个区内设有两个溜冰场,那么这两个溜冰场将把该区的业务平分;如果某一区只有一个溜冰场,则该场独揽该区的全部业务,如果在一个区内没有修建溜冰场,则该区的业务将平均分散在城市的三个溜冰场中.每个公司都想把溜冰场设在营业额最多的地方.

(1) 把这个问题表达成一个两人零和对策,写出公司甲的赢得矩阵.

(2) 这个对策有鞍点吗?如果有,将有几个鞍点?甲、乙公司的最优策略各是什么?在双方都取最优策略

时，两家公司各占有多大的市场份额？

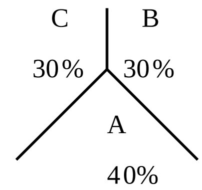

图　5.4

5.8　在下列矩阵中确定 p 和 q 的取值范围，使得该矩阵在 (a, b) 交叉处存在鞍点.

$$(1)\ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & q & 6 \\ p & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array},\qquad (2)\ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & q \\ 4 & p & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

5.9　已知下列各对策的赢得矩阵，试用图解法求出甲、乙各自的最优策略及对策值.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix},\qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.10　用公式法求解下列 2×2 矩阵对策 $\Gamma(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, A)$，其中 A 为

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.11　用代数法和图解法求解下列 2×3 矩阵对策：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.12　用迭代法求解下列矩阵对策 $P(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, A)$：

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

5.13　用线性规划方法求解下列矩阵对策问题：

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix},\qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.14　求解下列矩阵对策，其中赢得的矩阵 A 分别为

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad (4)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.15　已知矩阵对策

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

的解为 $x^* = (0, 11/14, 3/14)$，$y^* = (0, 13/14, 1/14)$，对策值为 $59/14$，求下列矩阵对策的解和对策值：

$$(a)\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 10 & 6 & 9 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix},\quad (b)\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -9 & -4 \end{pmatrix},\quad (c)\begin{pmatrix} 8 & 10 & 16 \\ 24 & 14 & 20 \\ 6 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

5.16　已知表 5.20 中对策局中人 B 的最优策略为 $x^* = 0.6, y^* = 0.4$, 求局中人 A 的最优策略和对策值.

表　5.20

局中人 B / 局中人 A	β_1	β_2
α_1	-2	4
α_2	3	2
α_3	1	5

5.17　考虑科洛奈的对策. 对策中的科洛奈和他的敌人都企图夺取两个战略位置。科洛奈和敌人可利用的兵团分别是 2 个和 3 个。双方都将把他们的兵团分布在两个位置附近. 设 n_1 和 n_2 是科洛奈分配到位置 1 和 2 处的兵团数, m_1 和 m_2 是敌人分配到位置 1 和 2 处的兵团数. 科洛奈的规则如下: 如果 $n_1 < m_1$, 则他将失去 $n_1 + 1$, 同样, 如果 $n_2 < m_2$, 则失去 $n_2 + 1$; 反之, 如果 $n_1 > m_1$, 他则赢得 $m_1 + 1$, 如果 $n_2 > m_2$, 则赢得 $m_2 + 1$, 如果双方在某位置处的兵团数相等, 则在该处为平局.

(1) 把这个问题表示成一个两人零和对策, 写出科洛奈的赢得矩阵.

(2) 求此对策的解和对策值.

5.18　在一场敌对的军事行动中, 甲方拥有三种进攻性武器 A_1, A_2, A_3, 可分别用于摧毁乙方工事; 而乙方有三种防御性武器 B_1, B_2, B_3 来对付甲方, 据平时演习得到的数据, 各种武器间对抗时, 相互取胜的可能如下:

A_1 对 B_1　2∶1;　　A_2 对 B_1　3∶7;

A_1 对 B_2　3∶1;　　A_2 对 B_2　3∶2;

A_1 对 B_3　1∶2;　　A_2 对 B_3　1∶3;

A_3 对 B_1　3∶1;　　A_3 对 B_3　2∶1;

A_3 对 B_2　1∶4.

试确定甲、乙双方使用各种武器的最优策略, 回答总的结果对甲、乙哪方有利?

5.19　给定一矩阵对策, 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

验证(1) 若(X^*, Y^*) 是解, 则(Y^*, X^*) 也是其解; (2) 对策的值是 0.

5.20　每行与每列均包含有整数 $1, \cdots, m$ 的 $m\times m$ 矩阵称为拉丁方. 例如, 一个 4×4 的拉丁方为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

试证明: 对策矩阵为拉丁方的 $m\times m$ 的矩阵对策值为$(m+1)/2$.

5.21　囚犯两难问题. 有两人因藏有被盗物品而被捕. 两人都明白, 如果两人均拒不承认盗窃, 则现有证据不足以判盗窃罪, 而只能以窝藏赃物罪判 1 年徒刑; 如果两人都招认, 则判 8 年徒刑, 如果其中一人招认而另一人拒不坦白, 则坦白者从宽处理可获释放, 抗拒者从严处理将判 10 年徒刑. 列出此问题的非零和

对策模型, 并求纳什均衡解.

5.22 **夫妻争执问题.** 一对夫妻为晚上到哪里玩, 争执不下, 妻子想去剧院, 丈夫想去看足球. 他们相亲相爱, 一定要两人同去一个地方. 假定若夫妻同去看足球, 则妻子的满意程度为 1, 丈夫为 4; 若同去剧院则妻子的满意程度为 4, 丈夫为 1; 若不同去, 则夫妻的满意程度均为 0. 试求此对策问题的纳什均衡解.

5.23 求表 5.21 中双矩阵对策的混合纳什均衡解.

表 5.21

甲 \ 乙	β_1	β_2
α_1	(0, 0)	(2, 1)
α_2	(-2, -1)	(3, -2)

第 6 章　网 络 模 型

在现实生活和生产实践中,有许多管理、组织与计划中的优化问题.如在企业管理中,如何制订管理计划或设备购置计划,使收益最大或费用最小;在组织生产中,如何使各工序衔接好,才能使生产任务完成得既快又好;在现有交通网络中,如何使调运的物资数量多且费用最小等.这类问题均可借助于图论知识得以解决.网络模型就是一种应用图论的理论与方法解决具有网络性质的管理决策问题的数学模型.由于它具有图形直观,方法简便,容易掌握的特点,因此,在近 30 年来得到迅速的发展,且广泛地应用在各个领域,尤其是经济活动中许多管理决策的优化问题.

本章在介绍有关图的一些基本概念的基础上,主要介绍网络中的最大流、最短路和最小费用流问题等数学模型及其解法,同时还介绍网络在生产组织管理等方面的应用,即网络计划技术.

6.1　图 论 导 引

6.1.1　图的基本概念

为了说明图的基本概念,先看以下例题.

例 1　哥尼斯堡七桥问题.

18 世纪的哥尼斯堡城中有一条普雷格尔河横贯,河的两岸和河中的两个小岛有 7 座桥彼此相接(如图 6.1(a)所示),当地居民热衷于讨论:一个步行者能否通过每座桥一次且仅一次就能返回原出发地.

图　6.1

我们把图 6.1(a)上的两岸和两岛看作 4 个点 A, B, C, D,把桥看作连接它们的线,则有图 6.1(b).至于图中连接两点的线的形状以及线的长短都无关紧要.于是,问题变为对图 6.1(b)能否一笔画出而不通过同一条线两次或两次以上?

1736 年欧拉证明了此图不可能不重复地一笔画成.

例 2　图 6.2(a)表示 6 家企业之间业务往来关系.其中点 a, b, c, d, e, f 分别表示 6 家企业,两点的连结表示两家企业之间的业务联系.因此,从图中可反映出 a 企业分别与 b, c, d 企业有业务往来;b 企业还与 c, e 企业,d 企业还与 e 企业有业务往来,而 f 均不与企业 a, b, c, d, e 有业务联系. 同样, 这 6 家企业之间的关系也可用图 6.2(b) 来反映. 图 6.2 中的(a)与(b)图没有本质的差异. 可见表示企业间有无业务往来关系是两点间的连线, 而与点的位置无关紧要.

图　6.2

例 3

图　6.3

图 6.3 是一张石油流向的管网示意图, A 点表示石油开采地, H 点表示石油的汇集站, B, C, D, E, F 表示可供选择的石油流动加压站(中间站) , 箭头表示石油的流向, 箭线旁的数字表示管线的长度. 现在要从 A 地调运石油到 H 地, 怎样选择管线可使路程最短?

综上所述, 图是由点及连线(不带箭头或带箭头)所组成的图形.

为区别起见, 把两点间不带箭头的连线称为边, 带箭头的连线称为弧.

无向图: 一般地, 设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$是 p 个点的集合, $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$是 q 条边的集合, 其中

$$e_i=(v_i, v_j)=(v_j, v_i), \qquad v_i, v_j \in V.$$

把由 V 和 E 组成的图形称为无向图, 记为 $G=(V, E)$.

在图 6.4 所示的图 G 中, $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $p=4$, $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_7\}$, $q=7$; 其中 $e_1=e_7=\{v_1, v_1\}$, $e_2=(v_1, v_2)$, $e_3=e_4=(v_2, v_3)$, $e_5=(v_3, v_4)$, $e_6=(v_3, v_1)$.

对于边 $e_i=(v_i, v_j)$, 称 v_i 和 v_j 为 e_i 的顶点, 也称 v_i 和 v_j 是相邻的. 若边的两个顶点相同, 称其为环, 如图 6.4 中的 e_1. 若两条边只有一个公共顶点时, 称它们是相邻边. 不与任何边相关联的点称为孤立点, 如图 6.2 中的点 f .

两个顶点间多于一条的边, 称为多重边, 如图 6.4 中的 e_3, e_4.

多重图和简单图: 含多重边的图称为多重图, 无环且无多重边的图称为简单图. 本章研究的图一般指的都是简单图.

图　6.4

子图: 设图 $G=(V, E)$ 和图 $G'=(V', E')$, 如果 V' V, E' E, 则称 G' 是 G 的一个子图. 图 6.5 中(b)和(c)都是(a)的子图. 如果 $V'=V$, E' E, 则 G 是 G 的支撑子图. 图 6.5 中的(c)是(a)的一个支撑子图.

图　6.5

有向图: 如果一个图是由点和弧所组成, 则称此图为有向图, 记为 $D=(V, A)$. 其中 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$, $A=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$. $e_i=(v_i, v_j)\neq(v_j, v_i)$, $v_i, v_j\in V$, 并称 e_i 是以 v_i 为始点, v_j 为终点的弧. 图 6.3 就是一个有向图.

链: 对于无向图 $G=(V, E)$, 称某顶点和边交替的序列$\{v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \cdots, v_{i(t-1)}, e_{i(t-1)}, v_{i_t}\}$为连接 v_{i_1} 和 v_{i_t} 的一条链, 简记为$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_t}\}$. 其中 $e_{i_k}=(e_{i_k}, e_{i_{k+1}})$, $k=1, 2, \cdots, t-1$. 图 6.2 中的$\{a, b, c\}$, $\{a, b, e, d\}$, $\{a, b, c, a\}$都是链, 称 v_{i_1} 和 v_{i_t} 为链的两个端点. 两个端点重合的链, 称为圈. 图 6.2 中的$\{a, b, c, a\}$就是圈.

路: 在有向图 $D=(V, A)$中, 称链$\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_t}\}$为一条以 v_{i_1} 为始点, 通向终点 v_{i_t} 的路. 如果 $v_{i_1}=v_{i_t}$, 则称之为回路. 图 6.3 中, 从 A 到 H 有许多条路, 但不存在回路.

连通图: 如果图 G 中任何两顶点间至少有一条链, 则称 G 是连通图, 否则为不连通. 图 6.2 是一个不连通图, 但除去点 f, 则是连通的.

赋权图: 图 G 中, 如果每条边(弧)(v_i, v_j)都被赋予一个权数 w_{ij}, 则称 G 为赋权无向图(有向图), 记为 $G=(V, E, W)$($D=(V, A, W)$). 这里的"权"可根据实际问题的需要赋予不同的含义, 如距离、时间、费用等. 图 6.3 就是一个赋权有向图.

6.1.2　树与最小支撑树

如果 $G=(V, E)$是一个无圈的连通图, 则称 G 为树, 记为 $T=(V, E)$. 如图 6.6 所示. 树有以下显而易见的性质:

(1) 树中任意两顶点间必有且仅有一条链;

(2) 在树的两个不相邻的顶点间添上一条边, 就得到一个圈;

(3) 在树中去掉任何一条边, 图就不连通;

(4) 含有 P 个顶点的树有 P-1 条边.

由树的定义可以看出, 图 6.5 中(a)的支撑子图(c)就是一棵树.

如果 $G=(V, E)$的支撑子图 $G'=(V, E')$是树, 则称 G' 是 G 的一棵支撑树. 什么样的图才有支撑树?

图　6.6

定理 1　图 G 有支撑树的充要条件是 G 连通.

证　必要性由定义直接可得.

充分性　设图 G 是连通的. (1) 若 G 不含圈, 则 G 就是自身的一棵支撑树. (2) 若 G 含圈, 任取一个圈, 在保证连通的前提下, 用"破圈"的方法, 去掉一条或几条边, 留下的图要包含这个圈上的所有点, 且无圈. 重复使用此法使每个圈都受到破坏, 最后保留下 G 中所有的

顶点,但是不成圈的图,这就是 G 的一棵支撑树.

上述充分性的证明给出了求支撑树的一种方法—— 破圈法.

例 4 用破圈法求图 6.5 中(a)的一棵支撑树.

解 取圈$\{v_1, v_2, v_3, v_1\}$,去掉边(v_2, v_3),又取圈$\{v_1, v_3, v_4, v_1\}$,去掉边(v_3, v_4);再取圈$\{v_1, v_2, v_5, v_1\}$,去掉边(v_2, v_5);再取圈$\{v_1, v_4, v_5, v_1\}$,去掉边(v_1, v_5)后,留下的图中不再含圈,于是得到图 6.5(a)的一棵支撑树,如图 6.7 中粗线所示.

图 6.7

图 6.8

例 5 图 6.8(a)表示 5 个村庄的线路图,每边旁的数字表示村庄之间线路的长度(里),现要求沿线路架设有线广播线,不仅使各村都能听到有线广播,而且使广播线总长度最短.

显然,这个问题不光是要找出连接 5 个村庄的支撑树,而且要找出一个广播线总长为最短的支撑树,即“最小支撑树”的问题.

所谓最小支撑树问题,就是在给定连通赋权无向图 $G=(V, E, W)$中,求 G 的支撑树 $T=(V, E')(E'\in E)$,使 E' 各边权 $w_{ij}(\geq 0)$的总和最小.其数学模型为

$$W(T^*) = \min \sum_{(v_i, v_j)\in T} w_{ij}.$$

其中 T^* 称为最小支撑树,简称最小树.

(1) 用破圈法求最小树的具体步骤是:

第一步:先任取一个圈,从圈中去掉一条权最大的边,若在同一圈中有几条都是权最大边,则任选其中的一条边去掉.

第二步:在余下的子图中,重复上述步骤,直至没有圈为止.

下面用破圈法求解例 5.

解 在图 6.8(a)中,取圈$\{v_1, v_2, v_3, v_1\}$,去掉最大权 $w_{13}=6$ 的边(v_1, v_3).再取圈$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1\}$,去掉$(v_3, v_4)$.又取圈$\{v_1, v_2, v_5, v_1\}$,去掉边$(v_2, v_5)$.最后取圈$\{v_1, v_4, v_5, v_1\}$,此时圈中的 $w_{14}=w_{45}=4$,任意去掉其中的一边,如边(v_4, v_5).至此,得到一棵最小树(见图 6.8 中的(b)),其连接 5 个村庄广播线的总长 $W_{(T^*)}=11$(里).

(2) 用避圈法—— Kruskal 算法求最小树.

Kruskal 算法的思想是,开始选一条最小权的边,在以后的每步中,总从未被选取的边中选一条权最小的边,并使之与已选取的边不构成圈.如果同时有几条都是最小权的边,则可从中任选一条.

具体的步骤是:

第一步:令 $i=1, E_0=$;

第二步:选边 $e_i\in E\setminus E_{i-1}$,使 $E_{i-1}\cup\{e_i\}$不含圈,且是所有未被选取的边中权最小的一

条. 如果这样的边不存在, 则 $T=(V, E_{i-1})$ 就是最小树.

第三步: 置 $i=i+1$, 转入第二步.

例 6　用避圈法求解例 5.

解　$i=1$, $E_0=$　, 从 E 中选权最小的边 (v_1, v_2), 得 $E_1=\{v_1, v_2\}$.

$i=2$, 从 E/E_1 中选最小权的边 (v_2, v_3), 得 $E_2=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$.

$i=3$, 从 E/E_2 中选最小权的边 (v_1, v_5), 得 $E_3=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_5)\}=E_2\cup(v_1, v_5)$ 不含圈.

$i=4$, 从 E/E_3 中选最小权的边 (v_1, v_4) 或 (v_4, v_5) (因为 $w_{14}=w_{45}=4$), 得 $E_4=\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_5), (v_1, v_4)\}=E_3\cup(v_1, v_4)$ 不含圈.

$i=5$, 由于在 E/E_4 中的任一边都与 E_4 构成圈, 故算法终止, $T=(V, E_4)$, 就是要求的最小树, 其中 $W(T^*)=11$(里). 见图 6.8(b).

6.2　网络中的流

6.2.1　网络与流的概念

上节例 3 的图 6.3, 是一个由 A 点开采石油, 途经中转加压站 B, C, D, E, F 点, 最后汇集到 H 点的输送石油管道网. 其中每条弧旁的数字可以表示管道的长度, 也可以表示该管道输送石油的最大能力等, 像这类的赋权有向图就是网络.

一般地, 对于有向图 $D=(V, A)$, 如果 V 中有一发点(亦称为源)记为 v_s, 还有一收点(亦称为汇)记为 v_t, 其余均为中间点, 且对 A 的每条弧均赋权 $W(v_i, v_j)\geq 0$(简记为 w_{ij}, 在此称其为弧容量), 则称这样的赋权有向图 D 为网络, 记为 $D=(V, A, W)$. 在 D 中, 通过弧 (v_i, v_j) 的物运量 f_{ij} 称为通过弧 (v_i, v_j) 的流量, 所有弧上流量的集合 $f=\{f_{ij}\}$ 称为该网络 D 的一个流.

图 6.9 中弧旁括号中的两个数字 (w_{ij}, f_{ij}), 第一个数字表示弧容量, 第二个数字表示通过该弧的流量, 如弧 (v_5, v_1) 上的 $(8, 6)$, 前者是可通过该弧的最大流量为 8, 后者是目前通过该弧的流量 6.

图　6.9

从图 6.9 中可以看出, (1) 通过每弧的流量均不超过弧容量; (2) 发点 v_s 流出的总量为 $6+3=9$, 等于流入收点 v_t 的总量 $5+4=9$, 且各中间点的流出量等于其流入量, 如中间点 v_2 的流出量减去其流入量等于零, 即 $4-(3+1)=0$.

一般地, 在网络 $D=(V, A, W)$ 中, 满足以下条件的流 f 称为可行流:

(1) 弧流量限制条件　$0\leq f_{ij}\leq w_{ij}$　　$(v_i, v_j)\in A$.

(2) **平衡条件**
$$\sum f_{ij} - \sum f_{ji} = \begin{cases} v(f) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -v(f) & i = t \end{cases}.$$

式中 $v(f)$ 称为该可行流的流量，即发点的净输出量或收点的净输入量.

在现实生活中，许多系统各自构成网络中的流量问题，如供水系统中的水流、金融系统中的现金流、控制系统中的信息流、交通系统中的物资运输流等. 对于网络中的流，可行流总是存在的，但我们更感兴趣的是在许许多多的可行流中如何寻找最大流以及最小费用最大流等问题.

6.2.2 最大流问题

网络最大流问题是在网络 D 中求一个可行流 $f = \{f_{ij}\}$，使其流量 $v(f)$ 达到最大，其数学模型如下:

$$\max\ v(f)$$

满足
$$0 \leq f_{ij} \leq W_{ij} \qquad (v_i, v_j) \in A, \tag{6.1}$$

$$\sum f_{ij} - \sum f_{ji} = \begin{cases} v(f) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -v(f) & i = t \end{cases} \tag{6.2}$$

显然，网络最大流问题是一个典型而又特殊的线性规划问题，自然可用第 2 章介绍过的单纯形法进行求解，但利用图的特点，我们介绍一种直观简便、易于掌握的求解方法.

下面先介绍与求解方法有关的概念和原理.

1. **增广链**

设网络 $D = (V, A, W)$ 中，有一可行流 $f = \{f_{ij}\}$，按每条弧上流量的多少，可将弧分为四种类型:

饱和弧 $(f_{ij} = w_{ij})$; 非饱和弧 $(f_{ij} < w_{ij})$;

零流弧 $(f_{ij} = 0)$; 非零流弧 $(f_{ij} > 0)$.

在图 6.9 中，(v_1, v_4) 是饱和弧，也是非零流弧，其他各弧均为非饱和弧，也是非零流弧.

设 μ 是网络 D 中从 v_s 到 v_t 的一条链，沿此方向，μ 上的各弧可分为两类，一类是与链的方向一致的弧称为正向弧，正向弧的全体记为 μ^+. 另一类是与链的方向相反的弧，称为反向弧，反向弧的全体记为 μ^-. 如图 6.9 所示，在链 $\mu = \{v_s, v_2, v_1, v_4, v_3, v_t\}$ 中，$\mu^+ = \{(v_s, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_t)\}$，$\mu^- = \{(v_2, v_1), (v_4, v_3)\}$.

对于可行流 f，μ 是一条从 v_s 到 v_t 的链，如果 μ^+ 中的每条弧均为非饱和弧，且 μ^- 中的每条弧均为非零流弧，则称链 μ 是关于 f 的增广链. 如图 6.9 中 $\mu = \{v_s, v_2, v_1, v_3, v_t\}$ 就是一条增广链，而 $\mu = \{v_s, v_2, v_1, v_4, v_t\}$ 却不是增广链. 不难理解，如果 μ 是一条增广链，那么在 μ 上可以增加一定的流量.

2. **截集**

如果将网络 $D = (V, A, W)$ 的 V 剖分为两部分，V_s 和 V_s，使 $v_s \in V_s$，$v_t \in V_s$，且 $V_s \cap V_s =$ ，$V_s \cup V_s = V$，则把从 V_s 指向 V_s 的弧的全体称为分离 V_s 和 V_s 的一个截集，记为 (V_s, V_s)，即 $(V_s, V_s) = \{v_i, v_j | v_i \in V_s, v_j \in V_s, (v_i, v_j) \in A\}$，截集 (V_s, V_s) 中所有弧的容量之和称为该截集的截量，记为 $W(V_s, V_s)$. 在 D 的所有截集中，称截量最小的为最小截集. 直观地说，截集的

所有弧是从 V_s 到 V_t 的必经之路. 如果从 D 中丢去这一截集, 则发点就不能通往收点.

例如, 在图 6.9 中, 若取 $V_s=\{v_s\}$, $V_s=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_t\}$, 则有:

$$(V_s, V_s,)=\{(v_s, v_1), (v_s, v_2)\},$$
$$W(V_s, V_s)=w_{s_1}+w_{s_2}=8+7=15.$$

若取 $V_s=\{v_s, v_1\}$, $V_s=\{v_2, v_3, v_4, v_t)\}$, 则有:

$$(V_s, V_s)=\{(v_s, v_2), (v_1, v_2)(v_1, v_3), (v_1, v_4)\},$$
$$W(V_s, V_s)=7+6+4+3=20\ .$$

我们还可以列举出图 6.9 的其他截集及截量, 例 7 将可验证, 截量为 13 的截集(V_s, V_s)是最小截集.

容易理解, 任何一个可行流的流量 $v(f)$都不会超过任一截集的截量, 即 $v(f)\leq W(V_s, V_s)$. 如果一可行流 f^* 使得 $v(f^*)=W(V_s^*, V_s^*)$, 则 f^* 就是最大流. 且(V_s^*, V_s^*)也是最小截集. 因此有:

最大流最小截量定理　任一网络 D 中, 最大流的流量等于最小截集的截量.

从以上增广链和截集的概念及定理知道, 要判断一个可行流 f 是否最大流有两种途径: 一是能否找出 V_s 到 V_t 的增广链, 若能, 则说明 f 不是最大流; 否则 f 就是最大流. 二是看 $v(f)$是否等于最小截量. 若等, 则 f 就是最大流, 否则就不是最大流.

在上述概念和定理的基础上, 下面介绍如何寻求最大流的(Ford- Fulkerson)标号法.

标号法的基本思想是, 从一个可行流 f 出发, 由发点 V_s 开始, 用对网络 D 中的每个顶点进行标号的办法寻找 f 的增广链. 若无, 则 f 为所求的最大流. 若有, 则在增广链上进行调整. 由定义知, 当$(v_i, v_j)\in\mu^+$ 时, $f_{ij}<W_{ij}$; 当$(v_i, v_j)\in\mu^-$ 时, $f_{ij}>0$. 此时可取调整量:

$$\theta=\min\{\min_{\mu^+}(W_{ij}-f_{ij}), \min_{\mu^-} f_{ij}\}>0\ , \tag{6.3}$$

且令

$$f_{ij}'=\begin{cases} f_{ij}+\theta & (v_i, v_j)\in\mu^+ \\ f_{ij}-\theta & (v_i, v_j)\in\mu^- \\ f_{ij} & (v_i, v_j)\in\bar{\mu} \end{cases}. \tag{6.4}$$

得到调整后新的可行流 f', 重复进行直至得到无增广链时的最大流止. 具体方法步骤如下:

第一步: 给出一个初始可行流 f (例如, $f=0$).

第二步: 给顶点标号, 寻找增广链 μ 凡是标号的点用$(v_i, l(v_j))$表示, 其中第一个分量表示该标号是从哪个点得到的, 以便找出增广链 μ 第二个分量是为确定 μ的调整量 θ 用的.

在标号过程中, 每个点属于且仅属于下列集合之一: 已标号, 但未检验的点集 V_0; 已标号, 已检验的点集 V_s, 未标号的点集 V_s.

首先给 v_s 标号$(0, +\infty)$. 此时 $V_0=\{v_s\}$, $V_s=\ $, $V_s=\{v_1, \cdots, v_t\}$.

第三步: 如果 V_0 非空, 则反复按以下①, ②进行, 否则转第五步.

①在 V_0 中任选一元素 v_i, 检查 v_i 到 V_s 中的点 v_j 的弧(v_i, v_j), 或 V_s 中的点 v_j 到 v_i 的弧(v_j, v_i), 满足以下条件的给 v_j 标号:

(i) 对于正向弧(v_i, v_j), 若非饱和, 则给点 v_j 标以$(v_i, l(v_j))$, 其中 $l(v_j)=\min\{l(v_i), w_{ij}-f_{ij}\}$, 同时把 v_j 从 V_s 中除去, 归入 V_0. 如果 v_t 归入 V_0, 说明已找出 f 的增广链 μ 则转第四步.

(ii) 对于反向弧(v_j, v_i), 若非零流, 则给点 v_j 标以$(-v_i, l(v_j))$, 其中, $l(v_j)=\min\{l(v_i), f_{ji}\}$, 同时把 v_j 从 V_s 中除去, 归入 V_0.

②把已标号已检验的点 v_i 归入 V_s.

第四步: 在增广链 μ上进行调整, 得到新的可行流 f'.

设 $v_t \in V_0$, 利用 v_t 的标号和 V_s 中各点的标号中的第一分量, 从 v_t 反向追踪到 v_s, 得到一条从 v_s 到 v_t 的增广链 μ 按(6.3)和(6.4)式在 μ上进行调整, 增加流量, 得到新的可行流 f' 返回第二步.

第五步: 写出最大流 $f^*=\{f_{ij}^*\}$的流量 $v(f^*)$和最小截集$(V_s^*, \bar{V}_s^*)$, 终止计算.

例 7　试用(Ford- Fulkerson)标号法求图 6.10 所示的网络最大流.

图　6.10

解　第一步: 可行流 f 已由图 6.10 给出.

第二步: 首先给 v_s 标以$(0, +\infty)$, 此时 $V_0=\{v_s\}$, $V_s=$　, $\bar{V}_s=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_t\}$.

第三步: 检查点 v_s, 因为在弧(v_s, v_1)上, $f_{s1}=w_{s1}=7$, 即饱和弧, 所以对 v_1 不标号.

在弧(v_s, v_2)上, 因为 $W_{s2}-f_{s2}=8-3=5>0$, 所以给点 v_2 标号, $(v_s, l(v_2))$, 其中 $l(v_2)=\min\{+\infty, 5\}=5$, 此时 $V_0=\{v_2\}$, $V_s=\{v_s\}$, $\bar{V}_s=\{v_1, v_3, v_4, v_t\}$.

检查点 v_2, 因为(v_2, v_3)已饱和, 所以, 对 v_3 不标号. 在弧(v_1, v_2)上, 因为 $f_{12}=3>0$, 即非零流弧, 所以, 给 v_1 标号$(-v_2, l(v_1))$, 其中 $l(v_1)=\min\{l(v_2), f_{21}\}=\min\{5, 3\}=3$, 此时, $V_0=\{v_1\}$, $V_s=\{(v_s, v_2\}$, $\bar{V}_s=\{v_3, v_4, v_t\}$.

检查点 v_1, 因为反向弧(v_3, v_1)是零流弧, 所以, 不给 v_3 标号; 又正向弧(v_1, v_4)是非饱和弧, 所以, 给 v_4 标号$(v_1, l(v_4))$, 其中 $l(v_4)=\min\{l(v_1), w_{14}-f_{14}\}=\min\{3, 4\}=3$, 此时, $V_0=\{v_4\}$, $V_s=\{(v_s, v_2, v_1\}$, $\bar{V}_s=\{v_3, v_t\}$.

检查点 v_4. 因为正向弧(v_4, v_t)非饱和, 所以, 给 V_t 标号$(v_4, l(v_t))$, 其中 $l(v_t)=\min\{l(v_4), W_{4t}-f_{4t}\}=\min\{3, 6\}=3$. 由于 v_t 已标号, 不需再对 v_3 标号.

此时, $V_0=\{v_t\}$, $V_s=\{v_s, v_2, v_1, v_4\}$, $\bar{V}_s=\{v_3\}$.

第四步: 利用各点已标号的第一个分量, 从 v_t 反向追踪得增广链 $\mu=\{v_s, v_2, v_1, v_4, v_t\}$, 如图 6.10 中双箭头线所示.

其中
$$\mu^+=\{(v_s, v_2), (v_1, v_4), (v_4, v_t)\},$$
$$\mu^-=\{(v_1, v_2)\}.$$

由 v_t 标号的第二个分量知 $\theta=3$, 于是在 μ上进行调整:

$$f'_{ij}=\begin{cases} f'_{s2}=f_{s2}+\theta=3+3=6 & (v_s,v_2)\in\mu^+ \\ f'_{14}=f_{14}+\theta=4+3=7 & (v_1,v_4)\in\mu^+ \\ f'_{4t}=f_{4t}+\theta=4+3=7 & (v_4,v_t)\in\mu^+ \\ f'_{12}=f_{12}-\theta=3-3=0 & (v_1,v_2)\in\mu^- \\ f_{ij} & (v_s,v_2)\in\bar{\mu} \end{cases}.$$

调整后的可行流如图 6.11 所示. 对这个新的可行流重新在图 6.11 上进行标号, 寻找新的增广链.

图 6.11

易见, 当给 v_2 标号$(v_s, 2)$后, 无法再进行下去, 此时 $V_s=\{v_s, v_2\}$, $\bar{V}_s=\{v_1, v_3, v_4, v_t\}$, $V_0=\varnothing$. 因此, 目前所得的可行流就是最大流, 最小截集为$(V_s^*, \bar{V}_s^*)=\{(v_2, v_3), (v_s, v_1)\}$, 最大流量为 $v(f^*)=f_{23}+f_{s_1}=6+7=13$.

从上例可以看出, 最小截集中各弧的容量总和构成最大流问题的瓶颈. 在实际问题中, 为提高网络中的总流量, 必须首先着力改善最小截集中各弧的弧容量.

6.3 最短路和最小费用流问题

最大流问题仅反映了网络通过物量能力的大小, 而未考虑运送费用的多少. 但实际上, 在网络 D 中运送物量 $v(f)$的方案可能有很多, 如果考虑费用的话, 则必存在费用最小的方案. 例如, 图 6.12 中的(a), (b), 表示了流量 $v(f)=6$, 费用不同的两个运送方案, 其中弧旁括号(b_{ij}, f_{ij})中第一个分量表示单位物量运送的费用, 第二个分量表示通过该弧物资的数量. (a) 方案的运费 $b(f)=1\times6+2\times3+1\times3+4\times1+1\times2+1\times2=23$; (b) 方案的运费 $b(f)=1\times6+4\times6=30$. 因此, 寻求一个总运费最小的方案是一个重要而又有实际意义的问题——最小费用流问题. 如果仅讨论单位物量(即 $v(f)=1$) 在网络中的运送总费用, 则就是求从 v_s 到 v_t 的最短路问题. 显然, 最短路问题是研究最小费用流问题的基础. 同时, 也是网络理论中应用最广的问题之一. 如管道铺设、厂区布局、线路安排、设备更新等问题都可归结为最短路问题.

图 6.12

6.3.1 最短路问题

图 6.13 中 v_1 是一煤矿所在地, v_9 是煤炭需求地, $v_2, v_3, \cdots, v_8$ 是由 v_1 到 v_9 可经过的城镇, 弧旁的数字为从 v_i 到 v_j 的距离, 现要从 v_1 调运煤炭到 v_9, 问应选择怎样的路线才能使路程最短? 这就是一个最短路问题.

图 6.13

给定一个赋权有向图 $D=(V, A, W)$, 其中 w_{ij} 表示弧(v_i, v_j)的权(可以是费用、时间、距离等). 设 v_s 和 v_t 是 D 中的两个顶点, P 是从 v_s 到 v_t 的路. 对 D 而言, 从 v_s 到 v_t 存在有限条路, 因此, 求一条从 v_s 到 v_t 最短路 P^* 的数学模型是:

$$W(P^*) = \min \sum_P W_{ij},$$

式中路 P^* 的权 $W(P^*)$ 称为 v_s 到 v_t 的距离, 记为 d_{st}, 显然, d_{st} 不一定等于 d_{ts}.

最短路问题可用第 4 章动态规划来解决, 现在介绍最短路问题的网络解法.

容易理解, 如果 P 是 D 中从 v_s 到 v_t 的最短路, v_i 是 P 中的一个中间点, 则从 v_s 沿 P 到 v_i 的路必是从 v_s 到 v_i 的最短路. 这就是求最短路方法的理论依据.

下面介绍 D 中所有 $w_{ij} \geq 0$ 情况下, 求 v_s 到 v_t 最短路的 Dijkstra 标号法.

Dijkstra 标号法的基本思想是将点集 V 分划为 V_1(称 P 标号点集) 和 V_1(称 T 标号点集). 要求 v_s 到 v_j 的最短路, 只要从 v_s 开始(除 $v_s \in V_1$, 路长 $P(v_s)=0$ 外, 其余各点均属于 V_1, 且 $T(v_j)=+\infty$) 的过程中, 逐个将 v_s 到 v_j 所有经过 V_1 中 T 标号点变为 V_1 中 P 标号, 即可找到 v_s 到 v_j 的最短路. 要想求出 v_s 到 D 中各点的最短路, 只须将 V_1 中 $p-1$ 个 T 标号点全部变为 V_1 中 P 标号点, 计算终止. 如果 v_j 不能由 V_1 中的 T 标号点变为 V_1 中 P 标号, 则 v_s 到 v_j 不存在最短路.

Dijkstra 标号法的具体步骤如下:

开始($i=0$), 把 D 中的 V 分划为 V_1 和 V_1, 使 $V_1 \cap V_1 =$. $V_1 \cup V_1 = V$, 令 $V_1=\{v_s\}$, $P(v_s)=0$, 其他 $v_j \in V_1$, 令 $T(v_j)=+\infty$.

第一步: 若 $V_1 = V$ 时, 计算终止, 此时对每个 $v_j \in V_1$, $d_{sj}=P(v_j)$, 并反向追踪求得 v_s 到 v_j 的最短路, 否则转入第二步.

第二步: 若 $V_1 \neq V$ 时, 反复按如下进行:

(1) 对 $v_j \in V_1$, 若 $T(v_j) > P(v_i)+w_{ij}$, 则把 $T(v_j)$ 修改为 $P(v_i)+w_{ij}$, 否则转(2).

(2) 令 $T(v_{j0}) = \min\{T(v_{j1}), T(j_2), \cdots, T(v_{ji})\}$, 若这样的 j_0 有两个以上, 可任取一个.

(3) 令 $P(v_{j0}) = T(v_{j0})$, 将 v_{j0} 归入 V_1, (即把 v_{j0} 的 T 标号变为 P 标号), 并置 $i=i+1$.

例 8 用 Dijkstra 标号法求图 6. 14 从 v_1 到各顶点的最短路.

解 在图 6.15(a)～(e)中, 方框表示属于 V_1 的顶点 v_i, 其内的数字表示 $d_{1i}=P(v_i)$, 圆

图　6.14

圈表示属于 V_1 且与 v_i 相关联的顶点 v_j，其内的数字表示 $T(v_j) = P(v_i) + W_{ij}$.

$i = 0$: 令 $V_1 = \{v_1\}$, $P(v_1) = 0$，其余 $v_j \in V_1$，且 $T(v_j) = +\infty$. 与 v_1 相关联的顶点有 v_2，v_3，按第二步的(1)，有 $T(v_2) = 1$, $T(v_3) = 4$，如图 6.15(a). 再按第二步的(2)，(3)有:

$P(v_{j0}) = T(v_{j0}) = \min\{T(v_2), T(v_3)\} = \min\{1, 4\} = 1 = T(v_2)$，并把 v_2 归入 V_1，如图 6.15(b)所示.

$i = 1$: $V_1 \neq V$，继续按第二步进行. 在图 6.15(b)中，与 V_1 中点 v_1，v_2 相邻的顶点有 v_3，v_4，因为 $T(v_3) = 4 > P(v_2) + w_{23} = 1 + 2 = 3$，所以，修改 $T(v_3) = 3$. $T(v_4) = P(v_2) + W_{24} = 1 + 3 = 4$, $P(v_{j0}) = T(v_{j0}) = \min\{T(v_3), T(v_4)\} = T(v_3) = 3$，把 v_3 归入 V_1，如图 6.15(b)，(c)所示.

图 6.15(c)，(d)，(e)直观地反映了 $i = 2, 3, 4$ 的情况.

图　6.15(a)～(e)

此时，虽有 $v_5 \in V_1$，但由于不存在到 v_5 的路，所以，计算终止. 图 6.15(e)中各点方框内数字表示 v_1 到该点的最短路长 d_{1j}.

为求 v_1 到 v_j 的最短路，可由下式计算 $d_{1j} - d_{1i} = w_{ij}$，进行反向追踪求出中间点 v_i，反复进行即可求得 v_1 到 v_j 的最短路.

在本例中为求 v_1 到 v_6 的最短路，可由

$d_{16} - d_{14} = 5 - 4 = 1 = w_{46}$，确定中间点 v_4，

$d_{14} - d_{12} = 4 - 1 = 3 = w_{24}$，确定中间点 v_2，

$d_{12} - d_{11} = 1 - 0 = 1 = w_{12}$.

因此,$P_{16}^* = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$,同理可求得 $P_{12}^* = \{v_1, v_2\}$,$P_{13}^* = \{v_1, v_2, v_3\}$,$P_{14}^* = \{v_1, v_2, v_4\}$.

对于 $w_{ij} \geq 0$,Dijkstra 标号法不仅可求出 v_s 到 v_t 的最短路,同时,还可求出 v_s 到 D 中各点的最短路.如果要求 D 中任意两点间的最短路,当然可用改变起始点的办法,但显然较繁.另外,当 D 中含有 $w_{ij} < 0$ 的弧时,Dijkstra 标号法不能再用.下面介绍的 Warshall-Floyd 方法更适用此类问题.

Warshall-Floyd 方法的具体步骤如下:

开始($k = 0$),作距离矩阵 $L^{(0)} = (l_{ij}^{(0)})$ 和序号矩阵 $\theta^{(0)} = (\theta_{ij}^{(0)})$,其中

$$l_{(ij)}^{(0)} = \begin{cases} W_{ij} & (v_i, v_j) \in A \\ +\infty & \text{否则} \end{cases},$$

$$\theta_{ij}^{(0)} = j \ (i, j = 1, 2, \cdots, p).$$

第一步:$k = r(1 \leq r < p)$时,$L^{(k)}$ 中第 k 行和第 k 列元素保持与 $L^{(k-1)}$ 相应元素相同,其他元素按下式计算,并填入 $L^{(k)} = (l_{ij}^{(k)})$ 中:

$$l_{ij}^{(k)} = \min\{l_{ij}^{(k-1)}, l_{ik}^{(k-1)} + l_{kj}^{(k-1)}\} \tag{6.5}$$

相应地,$\theta^{(k)}$ 的各元素按下式变化:

$$\theta_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \theta_{ij}^{(k-1)}, & \text{若 } l_{ij}^{(k)} = l_{ij}^{(k-1)} \\ \theta_{ik}^{(k-1)}, & \text{若 } l_{ij}^{(k)} < l_{ij}^{(k-1)} \end{cases}. \tag{6.6}$$

第二步:若存在 $l_{ii}^{(k)} < 0 \quad (1 \leq i \leq p)$,计算终止,这说明 D 中存在一条含有顶点 v_i 的负回路,即 $d_{ii} = W(Q) < 0$ 的回路,由 $\theta_{ij}^{(k)}(i, j = 1, 2, \cdots, P)$ 找出此回路;否则,置 $k = k + 1$.

第三步:当 $k = p$,计算终止.若 $l_{ij}^{(p)} = +\infty$,则说明 D 中不存在从 v_i 到 v_j 的路;否则,记 $d_{ij} = l_{ij}^{(p)}$,表示由 v_i 到 v_j 的最短路长,相应的最短路可由 $\theta_{ij}^{(p)}(i, j = 1, 2, \cdots, p)$ 找出.

例 9 用 Warshall-Floyd 方法求图 6.16 中各顶点间的最短路,其中各弧(边)旁的数字表示弧(边)长.

解 $k = 0$,把图 6.16 中的两条边看作长度相等、方向相反的两条弧.即有 $w_{14} = w_{41} = 9$,$w_{25} = w_{52} = 2$.根据图 6.16 中的数据,作 $L^{(0)} = (l_{ij}^{(0)})$,同时作 $\theta^{(0)} = (\theta_{ij}^{(0)})$,如表 6.1 中 $k = 0$ 所示.

图 6.16

$k = 1$,将 $L^{(1)}$ 中第 1 行和第 1 列的元素保持与 $L^{(0)}$ 中相应元素相同(在表中用虚线将其覆盖),其他元素按(6.5)式进行计算.例如:

$$l_{42}^{(1)} = \min\{l_{42}^{(0)}, l_{41}^{(0)} + l_{12}^{(0)}\} = \{\infty, 9 + 3\} = 12,$$

$$l_{43}^{(1)} = \min\{l_{43}^{(0)}, l_{41}^{(0)} + l_{13}^{(0)}\} = \{\infty, 9 + 4\} = 13.$$

其余元素经计算不变.对更新数字的元素均加上圈.

同时,在 $k = 1$ 的序数矩阵中,按(6.6)式有 $\theta_{42}^{(1)} = \theta_{41}^{(0)} = 1$,$\theta_{43}^{(1)} = \theta_{41}^{(0)} = 1$,并加上圈.如表 6.1 中 $k = 1$ 所示.

$k = 2$,将 $L^{(2)}$ 的第 2 行和第 2 列的元素保持与 $L^{(1)}$ 中相应元素相同,按(6.5)式计算:

$$l_{13}^{(2)} = \min\{l_{13}^{(1)}, l_{12}^{(1)} + l_{23}^{(1)}\} = \min\{4, 3 + (-4)\} = -1,$$

$$l_{15}^{(2)} = \min\{l_{15}^{(1)}, l_{12}^{(1)} + l_{25}^{(1)}\} = \min\{\infty, 3 + 2\} = 5,$$

$$l_{43}^{(2)} = \min\{l_{43}^{(1)}, l_{42}^{(1)} + l_{23}^{(1)}\} = \min\{13, 12 + (-4)\} = 8,$$

$$l_{53}^{(2)} = \min\{l_{53}^{(1)}, l_{52}^{(1)} + l_{23}^{(1)}\} = \{\infty, 2 + (-4)\} = -2.$$

表　6.1

	k= 0	k= 1	k= 2	k= 3	k= 4	k= 5
$[L_{ij}^{(k)}]$	0 3 4 9 ∞	0 3 4 9 ∞	0 3 -1 9 5	0 3 -1 2 2	0 3 -1 2 1	0 3 -1 2 1
	∞ 0 -4 ∞ 2	∞ 0 -4 ∞ 2	∞ 0 -4 ∞ 2	∞ 0 -4 -1 -1	8 0 -4 -1 -2	8 0 -4 -1 -2
	∞ ∞ 0 3 3	∞ ∞ 0 3 3	∞ ∞ 0 3 3	∞ ∞ 0 3 3	,? ,? 0 3 2	12 4 0 3 2
	9 ∞ ∞ 0 -1	9 ,? ,? 0 -1	9 12 8 0 -1	9 12 8 0 -1	9 12 8 0 -1	9 1 -3 0 -1
	∞ 2 ∞ ∞ 0	∞ 2 ∞ ∞ 0	∞ 2 -2 ∞ 0	∞ 2 -2 1 0	,0 2 -2 1 0	10 2 2 1 0
$[\theta_{ij}]$	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 2 4 2	1 2 2 2 2	1 2 2 2 2	1 2 2 2 2
	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 3 3	3 2 3 3 3	3 2 3 3 3
	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	4 4 3 4 4	4 4 3 4 4
	1 2 3 4 5	1 1 1 4 5	1 1 1 4 5	1 1 1 4 5	1 1 1 4 5	1 5 5 4 5
	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5	1 2 2 4 5	1 2 2 2 5	2 2 2 2 5	2 2 2 2 5

其余元素未变,并对 $l_{13}^{(2)}$, $l_{15}^{(2)}$, $l_{43}^{(2)}$, $l_{53}^{(2)}$ 加圈.

同时在 $\theta^{(2)}$ 中,按(6.6)式有 $\theta_3^{(2)} = \theta_2^{(1)} = 2$, $\theta_5^{(2)} = \theta_2^{(1)} = 2$, $\theta_3^{(2)} = \theta_2^{(1)} = 1$, $\theta_3^{(2)} = \theta_2^{(1)} = 2$,并加圈,如表 6.1 中 k= 2 所示.

k= 3, 4, 5 的结果均在表 6.1 中给出,过程从略.

$L^{(5)} = [l_{ij}^{(5)}]$ 给出了图 6.16 中各点之间的最短路长, $\theta^{(5)} = [\theta_{ij}]$ 给出了从 v_i 到 v_j 的最短路必须经过点的下标,并由此追踪可找出最短路. 例如从 v_1 到 v_5 的最短路长为 1($L_{15}^{(5)} = 1$),最短路由 $\theta_5^{(5)} = 2$(即必经过 v_2),又由 $\theta_5^{(5)} = 3$(即经过 v_3),再由 $\theta_5^{(5)} = 4$(即经过 v_4),最后由 $\theta_5^{(5)} = 5$,可知从 v_1 到 v_5 的最短路是(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5). 同理,从 v_5 到 v_1 的最短路长为 10,最短路为(v_5, v_2, v_3, v_4, v_1).

例 10　用 Warshall- Floyd 方法求图 6.17 中各顶点之间的最短路,其中各弧旁的数据表示弧长.

图　6.17

解　k= 0,由图 6.18 中的数据作 $L^{(0)} = [l_{ij}^{(0)}]$ 和 $\theta^{(0)} = [\theta_{ij}^{(0)}]$,按(6.5)式计算及按(6.6)式得表 6.2(k= 0, 1, 2, 3).

表 6.2

	k=0				k=1				k=2			
$[L_{ij}^{(k)}]$	0	1	∞3	-∞1	0	1	∞	∞	0	1	3	-1
	∞	0	2	-2	∞	0	2	-2	∞	0	2	-2
	∞	-2	0	-64	∞	-2	0	6	∞	-2	0	-4
	-2	3	-6	0	-2	-1	-6	0	-2	-1	-6	-3
$[\theta_{ij}^{(k)}]$	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	2	2
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	2
	1	2	3	4	1	1	3	4	1	1	3	1

由于 $l_{44}^{(2)}=-3<0$, **说明图** 6.17 **中含有顶点** v_4 **的负回路** Q, **由**$[\theta_{ij}^{(2)}]$**中的** $\theta_{4}^{(2)}=1$, $\theta_{4}^{(2)}=2$, $\theta_{4}^{(2)}=4$ **可知, 负回路** $Q=\{v_4,v_3,v_2,v_4\}$, $d_{44}=l_{44}^{(2)}=-3$, **计算终止. 否则, 继续计算下去, 则会出现更多的负回路, 且随着计算次数增多, 含有负回路的路** P **的长** $d_{ij}\to-\infty$. **因此, 本题不存在从** v_i **到** v_j **的最短路**$(i,j=1,2,3,4)$.

6.3.2 最小费用流问题

在给定网络 $D=(V,A,W)$ **中, 对每弧**$(v_i,v_j)\in A$, **除已给弧容量** W_{ij} **外, 还给出单位流量的费用** $b_{ij}\geq 0$. $f=\{f_{ij}\}$**是** D **中的可行流, 其总费用为** $b(f)=\sum b_{ij}f_{ij}$. **因此, 把求可行流量为** $v(f)=v$, **且使总费用** $b(f)$**最小问题称为最小费用流问题, 其数学模型为**

$$b^*(f)=\min\sum_{(v_i,v_j)\in A}b_{ij}f_{ij}$$

求使 $b(f)$**为最小且流量** $v(f)$**为最大的问题称为最小费用最大流问题. 下面介绍求解这两个问题的网络方法.**

求最小费用流的基本思想是: 从零流$(f_0=0)$**的费用有向图** $D(f_0)$**开始, 用求最短路的方法求出由** v_s **到** v_t **的最小费用链** μ, **并在** μ **上按** 6.2 **节中的方法进行流量的调整, 所以, 新的可行流** f_1 **必是最小费用可行流. 如果** $v(f_1)=v$, **则计算终止. 否则, 重新构造关于** f **的费用有向图** $D(f_1)$, **继续在** $D(f_1)$**上求出由** v_s **到** v_t **的最小费用链** μ, **并在** μ **上进行流量的调整……, 如此下去, 直至求出流量为** v **的可行流** f **止. 如果** v **是最大流的流量, 则此最小费用流就是最小费用最大流. 由此可知, 求最小费用流的方法就是求最短路和求最大流方法的综合. 具体方法步骤如下:**

开始作 $f_0=0$ **相应的费用有向图** $D(f_0)$.

第一步: 在 $D(f_0)$**上用求最短路方法求出由** v_s **到** v_t **的最小费用链** μ, **并在** μ **上按**(6.3), (6.4)**式进行流量调整, 得新可行流** f **的流量有向图.**

第二步: 重新构造可行流 f **相应的费用有向图** $D(f)$. **其中顶点集仍为** V, **弧集** A **是在观察上一个费用有向图中最小费用链的基础上按以下方法作出:**

① **对于最小费用链** μ**上的各弧:**

若$(v_i,v_j)\in\mu^+$ **且** $f_{ij}<w_{ij}$, **或**$(v_i,v_j)\in\mu^-$ **且** $f_{ij}>0$, **则添加一条与原弧方向相反, 权为**

$-b_{ij}$的弧;

若$(v_i, v_j) \in \mu^+$且$f_{ij} = w_{ij}$,或$(v_i, v_j) \in \mu^-$且$f_{ij} = 0$,则将原弧改为相反方向,权改为$-b_{ij}$;

② 对于最小费用链μ外的各弧,其方向与权不变.

第三步:在$D(f)$上仍用求最短路方法求出由v_s到v_t的最小费用链,若不存在,则f就是由v_s到v_t的最小费用最大流.计算终止.否则转第四步.

第四步:在$D(f)$上的最小费用链上仍按(6.3)(6.4)式对f进行流量调整,得新的最小费用可行流f'.若$v(f') = v$,则计算终止,否则返回第二步.

例 11　设在图 6.18 交通网络中v_s表示仓库,v_t表示商店,现在要从仓库运 10 单位的物资到商店,应如何调运才能使运费最省?图中弧旁的数字(b_{ij}, w_{ij}),b_{ij}表示通过此弧单位物资的运价,w_{ij}表示通过此弧最大的运输能力.

图　6.18

解　这是一个求流量为$v(f) = 10$单位的最小费用流问题.

开始作$f_0 = 0$相应的费用有向图$D(f_0)$,如图 6.19(a).

(1) 在$D(f_0)$上用 Dijkstra 标号法求出v_s到v_t的最短路(即最小费用链)$\mu_1 = \{v_s, v_2, v_1, v_t\}$,如图 6.19(a)中的双箭线所示.并在$\mu_1$上按$\theta = \min\{8, 5, 7\} = 5$,在$\mu_1$上进行流量调整.由于$(v_s, v_2) \in \mu^+$,$(v_2, v_1) \in \mu^+$,$(v_1, v_t) \in \mu^+$.所以,有$f_{s2} = f_{21} = f_{16} = 5$,其余不变,得可行流$f_1$的图,如(b)所示.

(2) 在$D(f_0)$和$\mu_1 = \{v_s, v_2, v_1, v_t\}$的基础上,构造可行流$f_1$的费用有向图$D(f_1)$:由于$(v_s, v_2) \in \mu^+$,$f_{s2} = 5 < w_{s2}$,所以,保留原费用方向弧,并添一反向费用弧,$b_{2s} = -1$;又$(v_2, v_1) \in \mu^+$,$f_{21} = 5 = w_{21}$,所以,将原弧的方向改为相反方向,且$b_{12} = -2$;再$(v_1, v_t) \in \mu^+$,$f_{2t} = 5 < w_{2t}$,所以,保留原费用弧方向,并添一反向费用弧,$b_{t2} = -1$;其余弧向与权数不变.如图(c)所示.

(3) 在$D(f_1)$上,求出v_s到v_t的最短路(最小费用链)$\mu_1 = \{v_s, v_1, v_t\}$,并在$\mu$上进行流量调整,得可行流$f_2$的图,如(d)所示.

(4) 用同样的方法重新构造$D(f_2)$,在$D(f_2)$上求得由v_s到v_t的最小费用链$\mu_2 = \{v_s, v_2, v_3, v_t\}$,并在$\mu$上进行流量调整,得$f_3$,如图(f)所示.

由于$v(f_3) = 10$,所以,计算终止.此时,最小总费用$b^*(f) = 2\times 4 + 8\times 1 + 5\times 2 + 7\times 1 + 3\times 3 + 2 = 48$.

图 6.19

例 12 求上例的最小费用最大流.

解 因为 f_3 已是最小费用可行流, 所以, 在 f_3 的基础上继续求最小费用最大流.

在 $D(f_2)$ 和 $\mu_2 = \{v_s, v_2, v_3, v_t\}$的基础上, 构造 f_3 的费用有向图 $D(f_3)$, 继续在其上求出 v_s 到 v_t 的最小费用链 $\mu_3 = \{v_s, v_1, v_2, v_3, v_t\}$, 并在 μ_3 上进行流量调整得 f_4. 如图 6.19 中(g)和(h)所示.

用同样方法构造 f_4 的费用有向图 $D(f_4)$(如图 6.19 中(i)所示), 对 $D(f_4)$用 Warshall - Floyd 法求由 v_s 到 v_t 的最短路, 其过程如表 6.3 所示.

表 6.3

	k= 0, 1					k= 2					k= 3					k= 4, 5				
$[b_{ij}^{(k)}]$	0	4	∞	∞	∞	0	4	2	0	∞	0	4	2	5	∞	0	4	2	5	∞
	-4	0	-2	6	∞	-4	0	-2	6	∞	-4	0	-2	1	∞	-4	0	-2	1	∞
	-1	2	0	3	∞	-2	2	0	3	∞	-2	2	0	3	∞	-2	3	0	3	∞
	∞	∞	-3	0	∞	∞	∞	-3	0	∞	5	1	-3	0	∞	-5	-1	-3	0	∞
	∞	-7	∞	-3	0	-11	-7	-9	-3	0	-11	-7	-9	6	0	-11	-7	-9	-6	0

从表$[b_{ij}^{(5)}]$中可看出, 由 v_s 到 v_t 的费用为∞, 即说明在可行流 f_4 下, 不存在由 v_s 到 v_t 的最短路. 因此, f_4 就是最小费用最大流, 其流量 $v(f_4) = 11$, 最小总费用为 55.

6.4 网络计划方法

网络计划方法又称统筹法. 网络计划方法中最为代表的是关键路线法(CPM)和计划评审法(PERT).

关键路线法是用网络图反映某项工程(任务)各道工序所需时间以及它们之间的衔接关系, 通过计算各工序有关的时间参数和完成工程(任务)所需的最少时间, 从而确定关键工序和关键路线, 并在此基础上通过网络分析方法制订出时间、成本和资源优化的网络计划方案. 该法主要应用于有历史资料和有以往类似项目经验的工程上. 计划评审法同样是应用了网络计划与网络分析方法, 但注重于对工程(任务)安排的评价与审查, 主要应用于对研究与开发的新项目上.

网络计划方法特别适用于生产技术复杂、工作内容繁多、各部门合作的大型工程及研究与开发的项目.

本节主要介绍如何编制网络计划, 它包括网络图的绘制、时间参数的计算、关键路线的确定和网络计划的优化等内容.

6.4.1 绘制网络图

绘制网络图是编制网络计划的第一步. 绘制的网络图是赋权有向图, 它表示一项工程(任务)的各道工序及其相互衔接关系.

一项工程(任务)总是由若干相互独立的活动组成, 我们统称这些活动为工序. 各道工序之间有着先后次序. 完成每道工序需要一定的人力、物力和时间、每道工序用一箭线"→"表示, 其两端点用结点"○"表示, 分别表示工序的开始和结束. 在相邻的两道工序中, 先发生的工序称为紧前工序, 后发生的工序称为紧后工序. 在绘制网络图时, 有时为了表示工序之间前后衔接关系的需要, 常用增加虚工序, 用虚箭线表示. 虚工序是事实上不存在的, 不需要人力, 物力和时间.

结点表示事项, 是相邻工序在时间上的分界点. 结点的编号是按时间的早晚、先后顺序来进行的, 通常用连续整数 1, 2, …, n 表示. 对同一工序而言, 连结箭尾的结点表示箭尾事项, 与箭头连结的结点表示箭头事项. 箭尾事项结点的编号应小于箭头事项结点的编号. 一道工序的箭尾事项与箭头事项称为该工序的相关事项.

例 13　某一工程的各道工序与所需时间以及它们之间的相互关系如表 6.4 所示, 绘制该工程的网络图.

表 6.4

工序	紧前工序	工序时间(天)	工序	紧前工序	工序时间(天)	工序	紧前工序	工序时间(天)	工序	紧前工序	工序时间(天)
a	—	5	d	b	5	g	e, f		3 j	i	3
b	—	7	e	b	3	h	d, g	5	k	g, i	2
c	a	4	f	b, c	2	i	b, c	7	m	h, k	1

解　根据表 6.4 中的所列的资料, 绘制的网络图如图 6.20 所示.

图　6.20

在图 6.20 中, 箭线 a, b, …, m 分别表示 12 道工序, 箭线下面的数字表示为完成该工序所需的天数. 11 个结点分别表示某一或某些工序的开始和结束, 两个结点和其间的箭线表示一道确定的工序. 例如, ⑤→⑥表示工序 g. 结点⑤既是工序 g 的箭尾事项, 又是紧前工序 e, f 的箭头事项, 并说明仅当 e, f 两道工序完成后方可开始 g 工序的工作. 结点⑥是工序 g 的箭头事项, 并表示工序 g 是工序 h 和工序 k 的紧前工序之一. 在这里用了虚工序表示工序 g 与工序 h, k 的前后衔接关系. 结点①和结点,? 分别表示该项工程的开始和结束.

绘制网络图应遵守以下规则:

(1) 工序从左向右排列, 结点按时序编号, 并沿箭头方向越来越大.

(2) 两结点之间只能有一条箭线. 即每道工序只能用确定的两相关事项表示. 如图 6.21 中(a) 的画法是错误的, (b) 的画法是正确的.

图　6.21

(3) 网络图中不能有缺口和回路. 除始点和终点外, 任何结点的前后都应有箭线连接, 不能中断, 即无缺口, 这样才能保证从始点经任何路线均可到达终点. 图 6.22 中(a) 的画法是错误的, (b) 的画法是正确的.

图　6.22

如果图 6.22(b) 中 b 工序的方向相反, 则出现①→②→③→①的回路, 它表明这条回路上的工序永远不能完成, 将导致工程永远不能结束, 这在绘制的网络图中是不允许的.

(4) 利用交叉作业缩短工期. 为了缩短工期, 在条件允许下可以将需要较长工时才能完成的某些工序, 分成若干小工序, 在某一小工序完工后即可转入紧后工序(即交叉作业), 而

不必等待工序全部结束后才转入紧后工序. 例如, 图 6.23(a) 中 a 表示加工 30 个零件的第一道工序, b 表示对零件加工的第二道工序. 为了缩短整个加工时间, 可按图 6.23(b) 所示的交叉作业方式进行.

图 6.23

(5) 网络图中只能有一个始点和一个终点, 它们分别表示工程的开始和结束. 如果工程开始或结束同时有两个或两个以上工序, 可采用虚工序, 增加结点即可办到.

(6) 对绘制的网络图要进行整理, 去掉多余的虚工序; 尽量避免出现交叉箭线, 对于不可避免的, 可在交叉处用弓形表示; 最后按工序时间前后, 工艺流程和组织管理的需要, 重新调整图中结点的序号.

6.4.2 计算时间参数, 确定关键路线

绘制工程计划网络图后, 接着就是算出完成该项工程最少所需的时间, 确定网络图的关键路线. 为此, 必须尽量准确地估算出工程各道工序的工序时间, 确定工程从开始到结束总的可利用时间, 这样才能使工程管理者心中有数, 抓住工程进程中的主要矛盾, 在有限的资源情况下, 统筹安排好时间、劳力、资金等, 以保证工程按期完工或提前完工.

下面通过对图 6.24 的分析加以说明(箭线旁的数字表示完成工序的时间).

图 6.24

在网络图中, 从始点到终点共有 8 条不同的路线, 各条路线所需的时间如表 6.5 所示.

其中第 5 条路线所需的时间最长. 如果这条路线上的 3 道工序均分别能在 5 天完成, 则整个工程就可在 15 天完成. 否则工程的工期就要被延误. 因此, 第 5 条路线中各工序能否按期完工成为整个工程的关键.

把网络图中所需时间最长的路线称为关键路线, 亦称主要矛盾线. 其他路线称为非关键路线. 关键路线上的工序称为关键工序; 否则, 称为非关键工序. 关键路线用粗黑线表示. 在一项工程的网络图中, 关键路线可以不唯一.

关键路线的确定对于工程管理具有非常重要的意义. 它是编制网络计划的中心. 对各关键工序优先安排人力、物力, 挖掘潜力, 采取有效措施, 压缩所需工序时间. 而对非关键工序, 只要在不影响工程完工的前提下, 可适当延长完成时间, 抽出部分人力、物力, 支援关键工序, 以达到缩短工程工期的目的.

表 6.5

路线	路线的组成	路线所需的时间
1	①→②→④→⑥	1+ 2+ 5= 8
2	①→②→④→⑤→⑥	1+ 2+ 2+ 2= 7
3	①→②→③→④→⑥	1+ 2+ 5+ 5= 13
4	①→②→③→④→⑤→⑥	1+ 2+ 5+ 2+ 2= 12
5	①→③→④→⑥	5+ 5+ 5= 15
6	①→③→④→⑤→⑥	5+ 5+ 2+ 2= 14
7	①→③→⑤→⑥	5+ 3+ 2= 10
8	①→②→③→⑤→⑥	1+ 2+ 3+ 2= 8

关键路线与非关键路线是相对的, 可变的.

关键路线的确定取决于每道工序所需时间计算的准确程度. 确定结点为 $i, j\,(i<j)$ 间的工序时间(记为 t_{ij}) 有两种方法:

一是对于具有劳动定额资料的, 或是具有类似工序的工时统计资料的, 可用分析对比的方法确定.

二是对于不具有劳动定额资料和类似工序工时统计资料的, 可用"三点估计法"进行估算工序时间. 即先分别估算三种时间: 在正常情况下完成工序的最可能时间, 记为 m; 在顺利情况下完成工序的最乐观时间, 记为 a; 在不利情况下完成工序的最保守时间, 记为 b. 由这三种时间推算出工序时间 t_{ij} 的方法就是"三点估计法".

显然, 由于 m, a, b 的不确定性, 因而由它们推算出的 t_{ij} 是一个随机变量. 据经验, 可以认为 t_{ij} 近似地服从正态分布.

一般地, 工序时间

$$t=\frac{a+4m+b}{6}. \tag{6.7}$$

方差为

$$\sigma^2=\left(\frac{b-a}{6}\right)^2. \tag{6.8}$$

假设各工序时间相互独立, 且同分布. 由于工程完工时间等于各关键工序时间之和, 所以, 可以认为工程完工时间是服从, 以

$$T_E=\sum_i \frac{a_i+4m_i+b_i}{6} \tag{6.9}$$

为均值, 以

$$\sigma^2=\sum_i \left(\frac{b_i-a_i}{6}\right)^2 \tag{6.10}$$

为方差的正态分布.

若给定工程完工时间为 T_K, $T_K \sim N(T_E, \sigma^2)$, 为求出 T_K 的概率, 可按下列计算

$$U=\frac{T_K-T_E}{\sigma}\quad 或\quad T_K=T_E+U\sigma. \tag{6.11}$$

求出 U 后($U\sim N(0,1)$),直接查正态分布表即可. 反之,若要按指定概率求出工程完工时间 T_K,可反查正态分布表,先求出 U,再由(6.11)式求出 T_K.

例 14 已知某工程的关键路线由四道工序组成,并根据估计每道工序的最乐观时间 a、最保守时间 b 和最可能时间 m,按(6.7)(6.8)式计算出相应的工序时间 t_{ij} 及其方差 σ_{ij}^2,如表 6.6 所示. 试求该工程的完工时间及规定完工时间为 21 天的概率.

表 6.6

工 序	三种时间估计(天)			t_{ij}	σ_{ij}^2
	a	m	b		
①→②	1	2	3	2	1/9
②→③	3	4	11	5	16/9
③→④	5	6	13	7	16/9
④→⑤	3	6	9	6	1

解 由表 6.6,该工程完工时间为

$$T_E=\sum t_{ij}=2+5+7+6=20(天),$$

均方差为

$$\sigma=\sqrt{\sum\sigma_{ij}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+1}=2.16.$$

现已知规定完工时间 $T_K=21$(天),按(6.11)式计算

$$U=\frac{21-20}{2.16}=0.46.$$

查正态分布表得 $P(U)=0.68$. 即规定完工时间为 21 天的概率为 0.68.

如果要求工程提前 1 天完工(即 $T_K=19$(天)),则 $U=\dfrac{19-20}{2.16}=-0.46$.

查正态分布表得 $P(U)=0.32$. 即完工时间为 19 天的概率为 0.32. 这说明要求工程提前 1 天完工的可能性不大.

如果要求工程完工时间的概率 $P(U)\geq 0.9$,则可反查正态分布表得 $U\geq 1.3$. 因此,工程完工时间为

$$T_K=T_E+U\sigma\geq 20+1.3\times 2.16\geq 22.8\approx 23(天).$$

同时,利用(6.11)式和上述同样的方法,也可以求出每道工序能否在规定的时间内完工的概率,以及要求在完成工序时间的概率下,求出工序所需的时间.

确定关键路线常见的方法有图算法和表算法,它们都是通过有关参数的计算进行的. 现分述如下:

1. **图算法**

图算法是一种在网络图上通过对各结点最早时间和结点最迟时间的计算,从而确定关键路线的方法.

结点最早时间 $T_E(j)$ **某结点** j **可能最早开工时间简称结点最早时间,记为** $T_E(j)$**,它等于从工程开始到结点** j **最长路线的各工序时间之和.所以,从始点开始,自左向右逐个推算即可得到所有结点最早时间.如果同时有几条箭线指向结点** j **时,则取这些箭线的箭尾事项各结点最早时间与工序时间之和的最大值,即**

$$\begin{aligned} &T_E(1) = 0 \\ &T_E(j) = \max\{T_E(i) + t_{ij}\} \quad (j = 2, 3, \cdots, n) . \end{aligned} \tag{6.12}$$

图 6.24 **中各结点最早时间的计算如下**:

$T_E(1)= 0, T_E(2)= 1, T_E(3)= \max\{T_E(2)+ t_{23}, T_E(1)+ t_{13}\}= \max\{3, 5\}= 5,$

$T_E(4)= \max\{T_E(2) + t_{24}, T_E(3) + t_{34}\}= \max\{3, 10\}= 10,$

$T_E(5)= \max\{T_E(3) + t_{35}, T_E(4) + t_{45}\}= \max\{8, 12\}= 12,$

$T_E(6)= \max\{T_E(4) + t_{46}, T_E(5) + t_{56}\}= \max\{15, 14\}= 15.$

其中, $T_E(6) = 15$ **就是完成工程最少所需的时间,即工程总工期.**

结点最迟时间 $T_L(j)$ **某结点** j **最迟必须完成时间简称结点最迟时间,记为** $T_L(j)$**.它等于工程的计划完工时间(即** $T_E(n)$**)减去某一结点** j **到终点** n **的最长间隔时间.所以,从终点开始,自右向左逐个推算即可得到所有结点的最迟时间.如果结点** j **同是几条箭线的箭尾事项,则结点** j **最迟时间应是这些箭线的箭头事项各结点最迟时间与工序时间之差的最小值,即**

$$\begin{aligned} &T_L(n) = T_E(n) \\ &T_L(j) = \min_{j<k}\{T_L(k) - t_{jk}\} \quad (j = n-1, n-2, \cdots, 1) . \end{aligned} \tag{6.13}$$

图 6.24 **中各结点最迟时间的计算如下**:

$$\begin{aligned} &T_L(6)= T_E(6)= 15, \\ &T_L(5)= T_L(6) - t_{56}= 15- 2= 13, \\ &T_L(4)= \min\{T_L(6)- t_{46}, T_L(5)- t_{45}\}= \min\{10, 11\}= 10, \\ &T_L(3)= \min\{T_L(5)- t_{35}, T_L(4)- t_{34}\}= \min\{10, 5\}= 5, \\ &T_L(2)= \min\{T_L(4)- t_{24}, T_L(3)- t_{23}\}= \min\{8, 3\}= 3, \\ &T_L(1)= \min\{T_L(3)- t_{13}, T_L(2)- t_{12}\}= \min\{0, 2\}= 0. \end{aligned}$$

在图 6.25 **中的** b, e, h **工序为关键工序,路线①→③→④→⑥即为关键路线.**

图 6.25

因此,图算法的具体方法步骤是:

第一步: **从始点开始,按**(6.12)**式自左向右分别计算各结点最早时间** $T_E(j)$**,并将计算结果填入图中各结点左下方的□内**;

第二步:从终点开始,按(6.13)式自右向左分别计算各结点最迟时间 $T_L(j)$,并将计算结果填入图中各结点右下方的△内;

第三步:计算 $T_L(j)-T_E(j)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,其差为零的各结点所确定的工序就是关键工序,由这些关键工序组成的路线即为关键路线.

2. 表算法

表算法是一种在表上通过对各工序的有关时间参数的计算,从而确定关键路线的方法.

工序最早开工时间 $t_{ES}(i,j)$　紧前工序最早完工时间即为紧后工序最早可能开工时间,简称工序最早开工时间,记为 $t_{ES}(i,j)$.它等于结点 i 的最早时间.如果有多道紧前工序,则取这些紧前工序最早开工时间与工序时间之和的最大值.即

$$\begin{aligned} t_{ES}(i,j) &= T_E(i) \\ t_{ES}(j,k) &= \max\{t_{ES}(i,j)+t_{ij}\} \quad (j=2,3,\cdots,n-1). \end{aligned} \tag{6.14}$$

工序最早完工时间 $t_{EF}(i,f)$　从工序最早可能开工时间起到完成该工序任务所需的可能时间,简称工序最早完工时间,记为 $t_{EF}(i,j)$.它等于工序最早开工时间与该工序时间之和.即

$$t_{EF}(i,j) = t_{ES}(i,j)+t_{ij}. \tag{6.15}$$

工序最迟开工时间 $t_{LS}(i,j)$　在不影响工程最早完工时间条件下,工序最迟必须开工的时间,简称工序最迟开工时间,记为 $t_{LS}(i,j)$.它等于紧后工序最迟开工时间与该工序时间之差.如果紧后工序有多道时,则取其差的最小值.即

$$t_{LS}(i,j) = \min\{t_{LS}(j,k)-t_{ij}\}. \tag{6.16}$$

工序最迟完工时间 $t_{LF}(i,j)$　从工序最迟开工时间起到完成该工序任务所需的时间,简称工序最迟完工时间,记为 $t_{LF}(i,j)$.它等于工序最迟开工时间与工序时间之和.即

$$t_{LF}(i,j) = t_{LS}(i,j)+t_{ij}. \tag{6.17}$$

工序总机动时间 $R(i,j)$　不影响工程最早完工时间的条件下,工序最早开工(完工)时间可以推迟的时间,简称工序总机动时间(亦称工序总时差),记为 $R(i,j)$,它等于工序最迟开工时间与最早开工时间之差,也等于工序最迟完工时间与最早完工时间之差.即

$$R(i,j) = t_{LS}(i,j)-t_{ES}(i,j) = t_{LF}(i,j)-t_{EF}(i,j). \tag{6.18}$$

工序自由机动时间 $r(i,j)$　在不影响紧后工序最早开工时间的前提下,工序最早完工时间可以推迟的时间,简称工序自由机动时间(亦称工序单时差),记为 $r(i,j)$.它等于紧后工序最早开工时间与该工序最早完工时间之差.即

$$r(i,j) = t_{ES}(j,k)-t_{EF}(i,j) \qquad (i<j<k). \tag{6.19}$$

由于 $t_{ES}(j,k)=T_E(j)$, $t_{EF}(i,j)=T_E(i)+t_{ij}$,所以

$$r(i,j) = T_E(j)-T_E(i)-t_{ij}. \tag{6.20}$$

在实际计算 $r(i,j)$ 时,(6.20)式也经常使用.

表算法的具体方法步骤如下:

第一步:根据工程网络图建立相应的工序时间参数表,并填入各道工序及其工序时间.

第二步:按以下顺序和方法在表上计算各时间参数:

(1)分别按(6.14)和(6.15)式自上而下地逐个计算 $t_{ES}(i,k)$ 和 $t_{EF}(i,j)$;

(2)分别按(6.16)和(6.17)式自下而上地逐个计算 $t_{LS}(i,j)$ 和 $t_{LF}(i,j)$;

(3)分别按(6.18)和(6.19)式逐个计算 $R(i,j)$ 和 $r(i,j)$;

第三步:将 $R(i,j)=0$ 的工序确定为关键工序,并在表中关键工序列中相应的位置注以标记* .从而确定工程计划网络图的关键路线.

以图 6.24 为例说明表算法,如表 6.7 所示.

表 6.7

工序	(i,j)	t_{ij}	$t_{ES}(i,j)$	$t_{EF}(i,j)$	$t_{LS}(i,j)$	$t_{LF}(i,j)$	$R(i,j)$	$r(i,j)$	关键工序
a	(1,2)	1	0	1	2	3	2	0	
b	(1,3)	5	0	5	0	5	0	0	*
c	(2,3)	2	1	3	3	5	2	2	
d	(2,4)	2	1	3	8	10	7	7	
e	(3,4)	5	5	10	5	10	0	0	*
f	(3,5)	3	5	8	10	13	5	4	
g	(4,5)	2	10	12	11	13	1	0	
h	(4,6)	5	10	15	10	15	0	0	*
i	(5,6)	2	12	14	13	15	1	1	

由表 6.7 可知,工序 b,e,h 为关键工序,①→③→④→⑥为网络图 6.24 的关键路线,这与图算法结果一致.

注意到在图 6.25 中的关键路线上,各结点方框里的数和三角框里的数是相等的,即 $T_E(j)=T_L(j)$,而在表 6.7 中的关键工序上有 $t_{ES}(i,j)=t_{LS}(i,j)$(或 $t_{EF}(i,j)=t_{LF}(i,j)$).因此,$R(i,j)=0$ 和 $Y(i,j)=0$.它说明这些工序的开工时间和完工时间均没有机动时间,已成为工程按期完工的关键.

非关键工序上 $R(i,j)\neq 0$,说明该工序存在机动时间,$R(i,j)$ 的大小就是该工序可推迟开工或可推迟完工的允许时间.因此,可以从非关键工序上适当地抽调人力、物力,支援到关键工序上,以保证工程按期完工和提前完工.

用图算法确定关键路线,直观、简单、迅速.但在工序很多和网络图复杂的情况下,图算法容易出错和遗漏,因此,在实际工作中图算法与表算法通常结合使用.

6.4.3 网络计划的优化

根据已知资料,绘制网络图,并通过时间参数的计算,确定关键路线,这仅得到网络计划的一个初始方案.为了缩短工程的工期,降低总成本,使资源得到合理的安排,需要对初始方案调整,进行网络计划的优化.

1. 工期优化

所谓工期优化,就是在编制网络计划时,如何加快工程进度,缩短工程的工期.工程工期是由关键路线中各关键工序时间所决定,因此,一般可从以下两个方面进行.

(1) 对关键工序增加新设备,采用新工艺、新技术等措施;或对工序时间较长的关键工序采用平行作业或交叉作业等措施,以达到提高工效,缩短关键工序时间之目的.

(2) 充分利用非关键工序的机动时间,采取组织措施,合理地从非关键工序中抽调人

力、物力,支援关键工序,从而缩短关键工序时间.

关键工序时间的缩短,有可能引起关键路线的改变,需要重新确定.

2. 工期—成本优化

所谓工期—成本优化,就是在编制网络计划中,如何使工程的完成既快又省.

缩短工期,就要增加人力、物力和资金,即要增加工程费用.工程的费用包括直接费用和间接费用两类:

直接费用包括工人的工资、设备和材料消耗等直接与完成工序有关的费用.它直接分摊到每道工序上.

间接费用包括工程管理人员的工资、办公费等.它与各工序无直接关系,但需按工序的时间长短分摊到各工序中去.

为缩短工期,需采取措施,相应地要增加直接费用.一般情况下,工序时间越短,直接费用越高,而间接费用却越少.

在进行工期—成本优化时,需要计算工程在不同完工期下各工序总费用和工程所需总费用.称使工程总费用最低的工程完工时间为最低成本日程.编制网络计划,就要计算最低成本日程,从而提出工期—成本的优化方案.

假定费用与工序所需的时间有线性关系(如果存在非线性关系可用分段线性关系近似代替).设工序(i,j)的正常时间与最短时间分别为l_{ij}和k_{ij}.工序(i,j)在正常时间下施工所需的直接费用为s_{ij},在最短工期下施工所需直接费用为u_{ij},则缩短工序(i,j)一天,工期增加的直接费用为

$$C_{ij}=\frac{u_{ij}-S_{ij}}{l_{ij}-k_{ij}}. \tag{6.21}$$

称C_{ij}为费用率,它表示工序(i,j)追赶进度一天,需增加的直接费用.

寻求最低成本日程,一般从关键路线入手,也就是要从那些费用率最小的关键工序上缩短时间.这种寻求最低成本日程的方法称为关键路线成本法.

下面仍通过图6.25中有关费用(见表6.8)说明求最低成本日程的关键路线成本法.

由表6.8中的资料,可制订以下不同的工期—成本方案:

方案一:正常进度完工的工程费用(即图6.25初始方案的工程费用)=正常进度完工的直接费用+完工时间×间接费用.

工程费用$=4\,250+15\times200=7\,250$(元).

方案二:在方案一中,关键路线是①→③→④→⑥,且由表6.8知$\min\{C_{13},C_{34},C_{46}\}=\min\{150,350,100\}=100=C_{46}$,为此缩短关键工序h一天.

工程费用=第一方案的工程费用+减少天数×每天增加的直接费用-减少天数×每天的间接费用$=7\,250+1\times100-1\times200=7\,150$(元).

调整后,关键路线有两条:①→③→④→⑥和①→③→④→⑤→⑥,工期为14天,见图6.26.

方案三:根据图6.26和表6.8知:

由关键路线①→③→④→⑥,$\min\{C_{13},C_{34},C_{46}\}=100=C_{46}$,

由关键路线①→③→④→⑤→⑥,$\min\{C_{13},C_{34},C_{45},C_{56}\}=150=C_{13}=C_{56}$.

图　6.26

表 6.8

工　序		正常情况下		采取措施后		费用率(C_{ij})(元/天)
代号	(i, j)	正常时间 l_{ij}(天)	直接费用 s_{ij}(元)	最短时间 k_{ij}(天)	直接费用 u_{ij}(元)	
a	(1, 2)	1	200	1	200	—
b	(1, 3)	5	1 000	3	1 300	150
c	(2, 3)	2	300	1	400	100
d	(2, 4)	2	250	2	250	—
e	(3, 4)	5	800	3	1 500	350
f	(3, 5)	3	400	2	700	300
g	(4, 5)	2	300	2	300	—
h	(4, 6)	5	700	3	900	100
i	(5, 6)	2	300	1	450	150
合计		4 250				
间接费用		200 元/天				

所以,对关键工序 b, h, i 分别缩短 2 天, 1 天, 1 天,即在方案二的基础上再缩短 3 天.

工程费用 $= 7\,150 + 2\times150 + 1\times100 + 1\times150 - 3\times200 = 7\,100$(元).

此时,关键路线有 4 条,工期却为 11 天.见图 6.27.

图　6.27

①→③→④→⑥, ①→③→④→⑤→⑥,

①→②→③→④→⑥, ①→②→③→④→⑤→⑥.

注意到图 6.27 中各结点最早时间与最迟时间已相等，且 b，i 两工序已调整到最短时间.如果再要缩短其他关键工序的时间，则要增加工程费用.因此，方案三为最优方案，对应的工程日期 11 天为最低成本日程.

归纳上述过程，求最低成本日程的关键路线法的步骤如下：

第一步：从关键路线上找出费用率 C_{ij} 最小的工序，考虑缩短该工序时间；

第二步：确定缩短时间的工序应同时满足以下两条：

(1) 增加新的关键路线；

(2) 工程费用不增.

为此，计算调整后的工程日期和工程费用.

第三步：调整后，如果网络图中各结点最早时间与最迟时间相等，则求解终止；否则重复上述第一、二步.

3. 工期—资源优化

编制网络计划中，在考虑工程进度及费用的同时，还要考虑工期—资源的优化问题.所谓工期—资源优化，就是在有限资源的情况下，如何合理地调配人力、材料、设备、能源等资源，使之既符合客观条件限制，又尽量不误工期.

对不同资源，应考虑其对工程计划的重要程度，分别进行调配.在编制网络计划时，合理安排有限资源，通常是按日需求量进行，所以，可用工程进度的横道图表示并进行调整.其调整的原则是：

(1) 按时确保关键工序的资源需求量；

(2) 利用非关键工序的机动时间，在不影响总工期的前提下，推迟其开工时间，尽量均衡资源的调配，使其不超过日均可供的限量；

(3) 在资源受到限制，或权衡综合经济效益下，如果允许也可适当地延长总工期.

下面仅以人力资源为例，说明如何在工程进度的横道图上进行合理安排调整的方法.

设图 6.28 表示某项工程的网络计划，箭线旁(t_{ij}, x_{ij})，前者是工序时间，后者是工序每天所需技术工人数.假定担任这项工程施工的技术工人有 9 人，且均能胜任各工序工作.各工序的工序时间、所需技术工人数及可机动时间用横道图表示，见表 6.9.

图 6.28

表 6.9

工序(i, j)	t_{ij}	R(i, j)	工程进度(天)														
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a(1, 2)	1	2	3	…	…												
b(1, 3)	5	0	6	6	6	6	6										
c(2, 3)	2	2		3	3	…	…										
d(2, 4)	2	7		4	4	…	…	…	…	…	…	…					
e(3, 4)	5	0						5	5	5	5	5					
f (3, 5)	3	5						4	4	4	…	…	…	…	…		
g(4, 5)	2	1											4	4			
h(4, 6)	5	0											5	5	5	5	5
i(5, 6)	2	1													4	4	…
每天技术工人合计			9	13	13	6	6	9	9	9	5	5	9	9	9	9	5

表中: —— 表示非关键工序的进度; ——表示关键工序的进度; …表示工序可推迟的机动时间.

工序进度上面的数字表示该工序每天所需技术工人数.

由表 6.8 中可看出, 由于按各工序最早开工时间安排工程进度, 施工的第 2, 3 天所需的技术工人数过于集中, 超过 9 人, 而第 4, 5 天所需技术工人数只要 6 人, 显然不很均衡. 按调整资源的原则进行调整后, 每天安排技术工人数的情况如表 6.10 所示.

表 6.10

工序(i, j)	t_{ij}	R(i, j)	工程进度(天)														
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a(1, 2)	1	2	3														
b(1, 3)	5	0	6	6	6	6	6										
c(2, 3)	2	2		3	3												
d(2, 4)	2	7						4	4								
e(3, 4)	5	0						5	5	5	5	5					
f (3, 5)	3	5								4	4	4					
g(4, 5)	2	1											4	4			
h(4, 6)	5	0											5	5	5	5	5
i(5, 6)	2	1													4	4	
每天技术工人合计			9	9	9	6	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9	5

以上利用工程进度横道图合理进行人力调配的方法, 同样适用于有限材料、设备、能源等资源的合理安排与调配问题.

6.5 应 用 实 例

例 15 （有容量限制的调运问题），某产品从仓库 $A_i(i=1,2,3)$ 运往市场 $B_j(j=1,2,3,4)$ 销售。已知各仓库的可供量、各市场的需求量及从 A_i 仓库至 B_j 市场路径上的容量如表 6.11 所示(表中数字 0 表示两点间无直接通路)。试制定一个调运方案使从各仓库调运产品总量最多。

表 6.11

市场 / 路径容量 w_{ij} / 仓库	B_1	B_2	B_3	B_4	可供量
A_1	30	10	0	40	20
A_2	0	0	10	50	20
A_3	20	10	40	5	100
需求量	20	20	60	20	

解 这是变量有限制的线性规划问题，可用单纯形法解之。但用网络解法更为方便。为把它化为最大流问题，其网络图如图 6.29 所示。图中 A_1, A_2, A_3 为仓库，B_1, B_2, B_3, B_4 为市场，仓库到市场各条弧上的数字为弧容量 w_{ij} 的值。在仓库左边增加虚拟发点 s，sA_i 弧上的数字为各仓库的可供量。在市场右边加虚拟收点 t，$B_j t$ 弧上的数字为各市场的需求量。

图 6.29

首先给出初始可行流，见图 6.30(a)。用标号法找出增广链 $\mu=\{s, A_3, B_1, A_1, B_2, t\}$，$\theta=10$，在 μ 上调整流量，如图 6.30(b)。继续寻找增广链和调整，如图 6.30 中的(c)，(d)所示，得最大流，其流值为 110。其调运方案如表 6.12 所示。

从表 6.11 中可看出，调运方案没有完全满足市场的需求，其中 B_3 尚缺 10 个单位。

为了满足市场需求，只有增加仓库至市场路径的容量。因此，可考虑在最小截集中将弧 (A_3, B_3) 的容量增到 50，即可进一步满足市场 B_3 的需求。

例 16 (匹配问题) 有 5 个待业者 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 和 5 项工作 $B_j(j=1,2,\cdots,5)$，表 6.13中标记“ ”表示 A_i 能干 B_j 工作。每项工作只允许一个待业者干，每个待业者只能干一项工作。试设计一个就业方案，使尽量多的待业者就业。

图 6.30

表 6.12

调运量 仓库＼市场	B_1	B_2	B_3	B_4	可供量
A_1	5	10		5	20
A_2			10	10	20
A_3	15	10	40	5	100
需求量	20	20	60	20	

解 由表 6.13, 将待业者及其所能干的工作可用图 6.31 表示, 其中每条弧线表示 A_i 可干 B_j 工作. 图 6.31 是一张二分图. 本例就是一个求二分图的最大匹配问题, 它可借助于求最大流方法进行求解:

在 $A_i(i=1,2,\cdots,5)$ 左边增加一个虚拟发点 s, 在 $B_j(j=1,2,\cdots,5)$ 右边增加一个虚拟收点 t, 分别连结 sA_i, $B_jt(i,j=1,2,\cdots,5)$, 且这些弧的容量均为 1, 而弧(A_i,B_j)的容量为∞(省略), 如图 6.32(a) 所示. 当这个网络流达到最大时, 如果(A_i,B_j)上的流量为 1, 则 A_i 就干 B_j 工作, 这就是使最多待业者就业的方案.

表 6.13

工作 / 待业者	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1					
A_2					
A_3					
A_4					
A_5					

图 6.31

按最大流标号法得到图 6.32(b)所示的最多待业者就业方案,即最大流量是 4,待业者 A_1, A_2, A_3, A_5 分别干 B_2, B_1, B_5, B_4 工作.当然这个就业方案不是唯一的.

图 6.32

匹配问题在经济管理中应用很广.例如:

设一台机器由 4 个部件 I, II, III, IV组装而成.组装前各部件须分别在某台机床上进行加工,只有 4 个部件全部加工完毕方可进行组装.现有 4 台机床 A_1, A_2, A_3, A_4,各部件在每台机床上所需加工时间如表 6.14 所示(单位:工作日).现规定一台机床只能加工一种部件,试问应将哪一部件安排在哪台机床上,加工机器才能最早开始组装?

显然,机器最早开始组装的时间即为 4 个部件各在一台机床上加工完成的最长时间.因此,先任意选定一个可行方案,如表 6.14 中用圆圈圈定的数字,即各部件加工所需时间为 5, 7, 2, 4.其中加工所需最长时间为 7,即在 7 个工作日后就可开始机器的组装.为了求出更好的方案,把加工时间不少于 7 个工作日的数字从表中删去,留下加工时间小于 7 的数字,并用空圈表示.见表 6.15.

表 6.14

部件 / 加工所需时间 / 机床	I	II	III	IV
A_1	⑤	4	7	6
A_2	9	⑦	3	5
A_3	8	11	②	3
A_4	7	5	1	④

表 6.15

机床 \ 部件	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
A_1	○	○		○
A_2			○	○
A_3			○	○
A_4		○	○	○

图 6.33

并依据表 6.15 中的对应关系建立机床与机器部件的配对网络图 6.33. 用求最大流方法求得 $\max v(f) = 4$, 其中 $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_4$, $A_3 \to B_3$, $A_4 \to B_2$, $\max\{5, 5, 2, 5\} = 5$. 也就是说, 用 A_1 机床加工Ⅰ部件, A_2 机床加工Ⅳ部件, A_3 机床加工Ⅲ部件, A_4 机床加工Ⅱ部件, 能在第 6 天最早开始机器的组装.

如果 $\max v(f) < 4$, 将说明什么问题? 请读者考虑.

例 17 (设备更新问题) 某工厂的某台机器可连续工作 4 年, 决策者每年年初都要决定机器是否需要更新. 若购置新机器, 就要支付购置费用; 若继续使用, 则需要支付维修与运行费用, 而且随着机器使用的年限费用逐年增多. 已知计划期(4 年)中每年的购置价格及维修与运行费用由表 6.16 给出. 试制订今后 4 年的机器更新计划, 使总的支付费用最少.

表 6.16

年 限	1	2	3	4
购置费(万元)	2.5	2.6	2.8	3.1
维修与运行费(万元)	1	1.5	2	4

解 把该问题看作最短路问题. 设 v_1 和 v_5 表示计划期的始点和终点(v_5 可理解为第 4 年末). 图 6.34 中各弧(v_i, v_j)表示在第 i 年初购进的机器使用到第 j 年初(即第 $j-1$ 年底), 弧旁的数字由表 6.16 中的数据可得.

图 6.34

因此, 把求最优的设备更新问题转化为求从 v_1 到 v_5 的最短路线问题.

按最短路算法可得最短路 $\{v_1, v_3, v_5\}$, 即计划期内机器更新最优计划为第 1 年, 第 3 年初各购一台新机器. 4 年总的支付费用为 10.3(万元).

又如果已知不同役龄机器年末的处理价格如表 6.17 所示, 那末在这计划期(4 年)机器的最优更新计划又会怎样?

表 6.17

	第 1 年末	第 2 年末	第 3 年末	第 4 年末
使用了 j 年机器的处理价(万元)	2.0	1.6	1.3	1.1

请读者用最短路算法给出最优更新计划.

习 题

6.1 判断下列说法是否正确:

(1) 图论中的图不仅反映了研究对象之间的关系,而且是真实图形的写照,因而对图中点与点的相对位置、点与点连线的长短曲直等都要严格注意.

(2) 在任一图 G 中,当点集 V 确定后,树图是 G 中边数最少的连通图.

(3) 如果图中从 v_1 至各点均有唯一的最短路,则连接 v_1 至其他各点的最短路在去掉重复部分后,恰好构成该图的最小树.

(4) 求网络最大流问题可归结为求解一个线性规划模型.

6.2 用破圈法和避圈法求图 6.35 的最小树.

6.3 车站拟在 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 7 个居民点中设置售票处,各点的距离由图 6.36 给出. (1) 若要设置一个售票处,问设在哪个点可使最大服务距离为最小? (2) 若要设置两个售票处,问设在哪两个点可使最大服务距离为最小?

图 6.35

图 6.36

6.4 指出图 6.37 所示的所有截集、最小截集及最小截量 弧旁的数字是 (w_{ij}, f_{ij}) .

6.5 求图 6.38 所示的网络最大流和最小截集(弧旁的数字是 (w_{ij}, f_{ij})).

图 6.37

图 6.38

6.6 某公司有 3 个仓库 A_1, A_2, A_3 和 4 个零售店 B_1, B_2, B_3, B_4,各仓库可提供的货量及零售店的最大零售量见表 6.18,表中打圈的格子表示公司指定该店可向相应的仓库取货. 现在要求作一调运方案,使

得各店从各仓库得到的总货量为最多.

表 6.18

零售店 仓库	B_1	B_2	B_3	B_4	存货量
A_1	0			0	20
A_2	0	0			12
A_3			0	0	12
最大零售量	14	9	8	10	

6.7 某产品从仓库运往市场销售.已知各仓库的可供量、各市场需求量及从 A_i 仓库至 B_j,市场的路径的运输能力见表 6.19 所示(表中数字∞表示无路可通),试求从仓库可运往市场的最大流量,各市场需求能否满足?

表 6.19

市场 仓库	B_1	B_2	B_3	B_4	可供量
A_1	30	10	∞	40	20
A_2	∞	∞	10	50	20
A_3	20	10	40	5	100
需求量	20	20	60	20	

6.8 某单位招收懂俄、英、日、德、法文的翻译各 1 人,现有 5 人应聘.已知乙懂俄文,甲、乙、丙、丁懂日文,乙、戊懂法文,问这 5 个人是否都能得到聘书? 最多几个得到招聘,招聘后每人从事哪一方面的翻译任务?

6.9 用 Dijkstra 标号法分别求图 6.39(a)和(b)的 v_1 到其他顶点的最短路及路长,并指出哪些顶点不可到达(弧旁的数字表示从 v_i 到 v_j 的距离).

图 6.39

6.10 用 Warsall-Floyd 算法分别求图 6.40(a)和(b)中任意两点间的最短路及路长.

6.11 现有 3 辆卡车需要调度到 3 个不同的目的地.各辆卡车的运行成本见表 6.20,试求能使总成本最低的调运方案.

图 6.40

表 6.20

目的地 / 成本 / 车辆	v_1	v_2	v_3
A_1	46	62	39
A_2	24	31	49
A_3	29	38	56

6.12 **如图 6.41 所示，某人每天从住处①开车至工作地⑦上班．图中各弧旁的数字为该人开车上班时经过该弧受阻的可能性，试问该人应选择哪条路线，使从家出发至工作地，路上受阻的可能性最小．**

图 6.41

6.13 **某公司职员因工作需要购置了一台摩托车，他可以连续使用或于任一年末将旧车卖掉，换一辆新车．表 6.21 列出了于第 i 年末购置或更新的车至第 j 年末的各项费用的累计(含更新所需费用、运行费用及维修费用)，试据此确定该人最佳的更新策略，使从第 i 年末至第 5 年末的各项费用的累计之和为最小．**

表 6.21

i \ j	2	3	4	5
1	0.4	0.54	0.98	1.37
2		0.43	0.62	0.81
3			0.48	0.71
4				0.49

6.14 **某公司在六个城市 $c_1, \cdots, c_6$ 中有分公司，从 c_i 到 c_j 的直接航程票价记在下述矩阵中的 (i, j) 位置上(∞表示无直接航路)．请帮助该公司设计一张任意两城市间的票价最便宜的路线表．**

$$\begin{matrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & 20 \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{matrix}$$

6.15　**如果图** 6.42 **中** v_s **表示仓库**, v_t **表示商店**, **现要从仓库运** 10 **单位的物资到商店**, **应如何调运才能使运费最省**(**图中弧表示交通线**, **弧旁的数字**(w_{ij}, b_{ij}, w_{ij}) **为交通线上运输能力限制**, b_{ij} **为单位运价**).

6.16　(1) **试求图** 6.43 **网络** $v(f) = 15$ **的最小费用流**(**弧旁的数字**(w_{ij}, b_{ij}) , **其中** w_{ij} **为弧容量**, b_{ij} **为单位物资运费**) .

图　6.42

图　6.43

(2)　**试求图** 6.43 **网络的最小费用最大流**.

6.17　**表** 6. 22 **给出某运输问题的产销平衡表与单位运价表**. **将此问题转化为最小费用最大流问题**, **画出网络图并进行求解**.

表　6. 22

销地 / 单位运价 / 产地	B_1	B_2	B_3	产　量
A_1	20	24	5	8
A_2	30	22	20	7
销量	4	5	6	

6.18　**某工程各工序关系及各工序所需时间如表** 6. 23 **所示**. **试**(1) **绘制网络图**; (2) **计算时间参数**; (3) **确定关键路线**.

表　6. 23

工序	紧前工序	工时	工序	紧前工序	工时	工序	紧前工序	工时
a	-	12	f	c	5	x	h	3
b	-	3	g	c	6	p	f	7
c	b	5	h	a, g	4	r	n	3
d	b	7	n	d , e	3	w	m	2
e	b	8	m	e	8	y	x , p , r	2

6.19　**已知如表** 6. 24 **中的资料**, **求该项工程的最低成本日程**.

表　6.24

活动	作业时间(天)	紧前活动	正常完成进度的直接费用(百元)	赶进度一天所需费用(百元)
a	4	—	20	5
b	8	—	30	4
c	6	b	15	3
d	3	a	5	2
e	5	a	18	4
f	7	a	40	7
g	4	b, d	10	3
h	3	e, f, g	15	6
合　计			153	
工程间接费用			5(百元/天)	

6.20　某工程的工序关系和时间估计如表 6.25 所示.

表　6.25

工序	紧前工序	乐观时间 a	最可能时间 m	保守时间 b
A	—	2	5	6
B	A	6	9	12
C	A	5	14	17
D	B	5	8	11
E	C, D	3	6	9
F	—	3	12	21
G	E, F	1	4	7

(1) 绘制网络图并计算每个工序的期望时间与方差;

(2) 总工期的期望值与方差是多少?

(3) 分别计算以下两种情况的概率:

　(i) 比总工期的期望值提前 3 天;

　(ii) 比总工期的期望值延迟不多于 5 天.

第 7 章　存 储 模 型

7.1　引　　言

存储问题是人们在生产和销售管理中给予很大关注的一个问题. 这是因为必要的存储能够较好地满足生产过程对原材料、在制品以及部件等方面的变化不定的需求, 预防可能发生的意外缺货和延期交货, 增加计划安排的灵活性, 减少不必要的损失. 在信息化社会, 作为生产与销售的中介环节, 尽管存储的作用将被削弱, 但并不意味着物流管理完全被信息流的管理所取代. 存储问题的内容会发生变化, 对存储问题的研究却仍是企业发展的需要.

与存储的利并存的是存储带来的弊. 这些弊主要由费用而引起. 存储与费用是密切联系的. 当存储水平提高时, 一些费用, 如存储保管费用就随之提高, 而当存储水平降得太低时, 就会引起其他费用, 如缺货损失费等的发生. 因此, 建立存储管理信息系统, 用存储模型来分析研究存储系统的活动, 将有助于对存储进行科学管理和合理控制.

考察报童问题. 报童每日早晨从报社以每份报纸 0.30 元的批发价购得当日的日报, 然后以每份 0.45 元的零售价售出. 若卖不完, 则每份报纸的积压损失费为 0.30 元; 若不够卖, 则缺一份报纸造成潜在损失的缺货损失费为 0.15 元. 该报童对以往的销售量作了连续一个月的统计, 其记录如表 7.1 所示.

表　7.1

日需求量 D	120	130	140	150	160
频率 P(D)	0.15	0.2	0.3	0.25	0.1

那么, 报童每日应订多少份报纸, 才能使总损失费最小?

假定报童每日订报 Q 份, 并设当日需求量为 D. 则

当 $Q \geq D$ 时, 积压损失费为 $F = 0.30(Q - D)$;

当 $Q < D$ 时, 缺货损失费为 $F = 0.15(D - Q)$.

于是可以将报童订报的决策与相应的总费用如表 7.2 所示.

表　7.2

F \ D (P) / Q	120	130	140	150	160	平均损失总费用
	0.15	0.2	0.3	0.25	0.1	
120	0	1.5	3	4.5	6	2.925
130	3	0	1.5	3	4.5	2.1
140	6	3	0	1.5	3	2.175
150	9	6	3	0	1.5	3.6
160	12	9	6	3	0	6.15

从表中可看出,当报童每日订报 130 份时,平均损失总费用最小,最小损失总费用为2.1 元.

下面建立这一报童问题模型的数学解析式,用求极值的方法求解最小损失总费用.

设平均总费用为 $TF(Q)$,则

$$TF(Q) = \sum_{D \le Q} 0.30(Q - D)P(D) + \sum_{D > Q} 0.15(D - Q)P(D). \qquad (7.1)$$

为求使 $TF(Q)$ 最小的 Q 值,解下列不等式组:

$$TF(Q) - TF(Q - d) \le 0$$
$$TF(Q) - TF(Q + d) \le 0.$$

其中 $d = \min\limits_{Q \ne D} |Q - D| = 10$,且 $Q \pm d \in S = \{120, 130, 140, 150, 160\}$.

上式等价于

$$\sum_{D \le Q-d} 0.30\,P(D) - \sum_{D > Q-d} 0.15\,P(D) \le 0$$
$$\sum_{D \le Q} 0.30\,P(D) - \sum_{D > Q} 0.15\,P(D) \ge 0.$$

即

$$(0.30 + 0.15) \cdot \sum_{D \le Q-d} P(D) - 0.15 \le 0$$
$$(0.30 + 0.15) \cdot \sum_{D \le Q} P(D) - 0.15 \ge 0.$$

故

$$\sum_{D \le Q-d} P(D) \le \frac{1}{3} \le \sum_{D \le Q} P(D). \qquad (7.2)$$

亦即

$$P(120) + \cdots + P(Q - d) \le 0.3333 \le P(120) + \cdots + P(Q).$$

由于 $P(120) = 0.15$ 且 $P(120) + P(130) = 0.35$,因此,$Q = 130$.

可以看到,上述结果与通过列表得到的结果是一致的.

报童问题是一个离散型问题.若考虑相应的连续型问题,则类似于(7.1)式的总费用公式为

$$TF(Q) = 0.30\int_0^Q (Q - x)P(x)d(x) - 0.15\int_Q^{+\infty} (x - Q)P(x)d(x).$$

这里,$P(x)$ 为一定时期内销售量的概率密度.为求总费用的最小值,令

$$\frac{dTF(Q)}{dQ} = 0.$$

得

$$(0.30 + 0.15)\int_0^Q P(x)d(x) - 0.15 = 0.$$

于是

$$\int_0^{Q^*} P(x)d(x) = \frac{1}{3}.$$

该式与(7.2)式非常类似. Q^* 即为使 $TF(Q)$ 最小的 Q.

利用求极值的数学方法求解存储模型,这是解决存储问题的主要思路.尤其对于连续型存储模型,用求极值的方法求解模型就显得更为有效和更为重要.

存储模型广泛应用于工业、商业和物资等部门,在科学解决流通物资的积压与短缺,提高物资和资金的流通速度等方面起着重要的作用.

7.2 存储问题的变量与模型

存储问题的数学模型涉及以下的主要经济变量:

(1) 需求量:某种物资在单位时间内的需求量,以 D 表示,如年需求量、月需求量、日需求量.需求量有时是常量,而在许多情况下则是随机变量,这时它的变化规律应当是能够掌握的.对需求量进行科学地预测和估计是解决存储问题的重要依据.

(2) 批量:为补充存储而供应一批物资的数量称为批量,以 Q 表示.由外部订货供应的批量称为订货批量;由内部生产供应的批量称为生产批量.

(3) 订货点:为补充存储而发出订货时的存储水平,以 R 表示.

(4) 备运期:发出订货的时间与实际收到订货入库的时间的间隔.

(5) 存储费:保管存货的费用,包括存储所占用资金的利息、仓库和场地费用、物资的存储损耗费用、物资的税金、保险费用等,以 C_1 表示.

(6) 订货费:为补充存储而订货所支付的费用,包括准备和发出订货单的费用、货物的堆放和装运的费用等,以 K 表示.

(7) 缺货损失费:发生需求时,存储不能提供而引起的费用,包括利润的损失、信誉的损失、停工待料的损失以及没有履行交货合同的罚款等,以 C_2 表示.

存储费、订货费和缺货损失费构成了库存的总费用,即总费用=存储费+订货费+缺货损失费.使总费用最小是建立和求解存储模型的主要目标.为实现该目标,需要确定批量和订货点,这就是所谓存储决策.批量与订货点即决策变量.因而存储模型的主要形式有:总费用=f(批量)或总费用=f(批量,订货点),即 $F=f(Q)$ 或 $F=f(Q,R)$.

7.3 确定性存储模型

确定性存储模型有着共同的特性,即假定物资的备运期和需求量都是确定的.典型的确定性存储模型为经济订货批量(EOQ)模型.经济订货批量模型是一种确定订货批量大小,使总库存费用最小的数学模型.这里总库存费用为订货费用与存储保管费用之和.对此我们讨论如下两种情况.

7.3.1 不允许缺货的 EOQ 模型

某物资在计划期限内(不妨假设为一年)需求量为 D,一次订货费为 K,该种物资一个单位存储一年的费用为 C_1.由于不允许缺货,故在存储降至零时,物资应及时得到补足.设每批订货量为 Q,一个周期的时间长度(即相邻两次订货的间隔时间)为 t,即 $t=Q/D$,则

$$\text{年订货费为}\quad \frac{KD}{Q},$$

$$\text{年存储费为}\quad \frac{C_1Q}{2},$$

记总库存费用为 $f(Q)$，则

$$f(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{C_1Q}{2}.$$

究竟 Q 取多大，会使总库存费用最小？这是无约束的极值问题. 求 $f(Q)$ 对 Q 的一阶导数

$$\frac{df(Q)}{dQ} = -\frac{KD}{Q^2} + \frac{C_1}{2}.$$

令

$$\frac{df(Q)}{dQ} = 0.$$

得

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{C_1}}.$$

又因为 $f''(Q) = \frac{2KD}{Q^3}$，当 >0 时，$f''(Q) > 0$，故

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{C_1}} \tag{7.3}$$

时，$f(Q)$ 有最小值.

这就是说，当订货批量为 Q^* 时，总库存费用最小. 此时的 Q^* 就是经济订货批量. 这时的总费用，即最小总费用为

$$f(Q^*) = \sqrt{2C_1KD}.$$

我们还进一步得到使总费用最小值的订货时间间隔为

$$t^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{C_1D}}. \tag{7.4}$$

例 1 某物资每月需供应 3000 件，每次订货费为 60 元，每月每件的存储费为 4 元. 若不允许缺货，且一订货就可提货，试问每隔多少时间订购一次，每次应订购多少件？

解 $D = 3\,000$ 件，$K = 60$ 元，$C_1 = 4$ 元.

由(7.3)式，得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\times 60\times 3\,000}{4}} = 300.$$

由(7.4)式，得

$$t^* = \frac{300}{3\,000} = 0.1.$$

如果一个月以 30 天计算，则一个周期的时间长度为 $30\times 0.1 = 3$ 天，故每隔 3 天订货一次，每次订购 300 件.

7.3.2 允许缺货的 EOQ 模型

在这种情况下，允许欠缺某些物资，但要支付一定数额的缺货损失费. 先考虑缺货后不

要求补货的情况. 设在一个周期中缺少单位物资的损失费为 C_2, 一年的需求量为 D, K 与 C_1 都同前. 如图 7.1 所示, 设每批订货量为 Q, 即 $EA = Q$. 记 $GA = Q_S$, 一个周期的时间长度为 $t = GC = \frac{Q_S}{D}$, 则一个周期内的存储费为 $\frac{C_1 Q^2}{2D}$(其中 $\frac{Q^2}{2D}$ 是△EAB 的面积), 一个周期内的缺货损失费为 $\frac{C_2(Q_S - Q)^2}{2D}$(这里 $\frac{(Q_S - Q)^2}{2D}$ 是△BFC 的面积).

图 7.1　允许缺货的情况

年存储费为 $$\frac{C_1 Q^2}{2Q_S},$$

年缺货损失费为 $$\frac{C_2(Q_S - Q)^2}{2Q_S},$$

年订货费为 $$\frac{KD}{Q_S},$$

记总库存费用为 $f(Q, Q_S)$, 则

$$f(Q, Q_S) = \frac{C_1 Q^2}{2Q_S} + \frac{C_2(Q_S - Q)^2}{2Q_S} + \frac{KD}{Q_S}.$$

这是一个二元函数, 要求其极小值, 就要使下列两个偏导数等于零:

$$\frac{f(Q, Q_S)}{Q} = \frac{2C_1 Q}{2Q_S} - \frac{2C_2(Q_S - Q)}{2Q_S} = 0,$$

$$\frac{f(Q, Q_S)}{Q_S} = -\frac{C_1 Q^2}{2Q_S^2} + \frac{2C_2(Q_S - Q)Q_S - C_2(Q_S - Q)^2}{2Q_S^2} - \frac{KD}{Q_S^2} = 0.$$

化简后得方程组

$$(C_1 + C_2)Q = C_2 Q_S$$

$$-C_1 Q^2 + 2C_2 Q_S(Q_S - Q) - C_2(Q_S - Q)^2 - 2KD = 0.$$

解之, 得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KDC_2}{C_1(C_1 + C_2)}}. \tag{7.5}$$

这就是缺货不要补时的经济订货批量.

如果缺货在到货后要补上, 则此时的经济订货批量为

$$Q_S^* = \frac{C_1 + C_2}{C_2} Q^* = \sqrt{\frac{2KD(C_1 + C_2)}{C_1 C_2}}. \tag{7.6}$$

例 2　某物资每月需供应 3000 件, 每次订货费为 60 元, 每月每件的存储费为 4 元. 一个周期中缺一件的缺货损失费为 5 元, 缺货不要补. 问每隔多少时间订购一次, 每次应该订购多少件?

解　由(7.5)式, 得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\times 60\times 3\,000\times 5}{4\times (4+5)}} = \sqrt{50\,000} \approx 224\ .$$

根据 $t^* = \frac{Q_S^*}{D} = \sqrt{\frac{2K(C_1+C_2)}{C_1C_2D}}$, 可得

$$t^* = \sqrt{\frac{2\times 60\times (4+5)}{4\times 5\times 3\,000}} = \sqrt{0.018} \approx 0.134\ .$$

如果一个月以 30 天计算, 则 $30\times 0.134 = 4$ 天, 即每隔 4 天订购一次, 每次订购 224 件.

7.4 随机性存储模型

存储问题中的随机性主要由以下两个因素产生: 第一, 对物资的需求量经常发生随机波动; 第二, 订货的到达时间经常发生随机性的提前或推迟. 下面将给出需求不确定的随机性存储模型.

7.4.1 不允许缺货

由于需求量是随机的, 所以, 可考虑其平均需求量, 而且不允许缺货也只是指在一定置信度下的不允许缺货.

设 D 为年平均需求, 则类似于确定性存储的 EOQ 模型, 可得到相应的最佳批量 Q^* 如下:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{C_1}}\ . \tag{7.7}$$

这里, K 为一次订购费, C_1 为该种物资一个单位存储一年的费用.

为在一定置信度下对不缺货提供安全保证, 可将安全库存量加到正常存货中以提供所希望达到的服务水平(即不缺货的概率). 这时, 有

$$R = l + \beta\sigma. \tag{7.8}$$

式中, R 为订货点, l 和 σ 分别为备运期内的销售量 L 的均值与均方差, β 为安全库存系数, $\beta\sigma$ 为安全库存量.

安全库存系数 β 即为给定置信度 $1-\alpha$ 下的上 100α 百分位点, 其值满足等式 $P(X>\beta) = \alpha$ 可通过查概率分布表得到.

因此, 订货策略为, 当备运期大于零时, 若存储量降低到 R, 则以 Q^* 为订货量进行订货.

例 3 某公司订购一种备件, 一次订货费为 60 元, 年平均需求量为 500 件, 每件年存储费为 40 元, 备运期 8 天, 备运期中的销售量服从均值为 15、均方差为 2 的正态分布. 为使不缺货的概率达到 99.9% 且总费用最小, 问订货点是多少, 每次订多少件?

解 $D = 500$ 件/年, $K = 60$ 元, $C_1 = 40$ 元, 则

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\times 60\times 500}{40}} \approx 39 \text{ 件}\ .$$

根据不缺货的概率达到 99.9%, 查正态分布表得 $\beta = 3$, 订货点为

$$R = 15 + 3\times 2 = 21 \text{ 件}\ .$$

故订货点为 21 件, 每次订货 39 件.

7.4.2 允许缺货

设 D, K, C_1 同前, C_2 为单位缺货损失费, 并设存储量降到 R 时订货, 订货数量为 Q, 备运期中的需求量 x 服从密度为 $f(x)$ 的分布函数 $F(x)$, 则在缺货要补的情况下, 订货刚到之前的平均存储量(平均最小存储量)与订货刚到之后的平均存储量(平均最大存储量)分别为

$$\int_0^R (R - x)f(x)dx \text{ 与 } Q + \int_0^R (R - x)f(x)dx,$$

则年平均存储量为 $$\frac{Q}{2} + \int_0^R (R + x)f(x)dx.$$

年平均存储费为 $$C_1 \frac{Q}{2} + \int_0^R (R - x)f(x)dx.$$

年平均订货费为 $$\frac{KD}{Q}.$$

当备运期中的需求量超过订货点 R 时, 就发生缺货, 因此, 缺货量的均值为

$$\int_R^{\infty} (x - R)f(x)dx.$$

故年平均缺货损失费为

$$\frac{C_2 D}{Q}\int_R^{\infty} (x - R)f(x)dx.$$

于是年总费用 $TF(R, Q)$ 为

$$TF(R, Q) = \frac{KD}{Q} + C_1 \frac{Q}{2} + \int_0^R (R - x)f(x)dx + \frac{C_2 D}{Q}\int_R^{\infty} (x - R)f(x)dx. \quad (7.9)$$

求 $TF(R, Q)$ 的最小值:

$$\frac{TF(R, Q)}{R} = C_1 \int_0^R f(x)dx - \frac{C_2 D}{Q}\int_R^{\infty} f(x)dx = 0. \quad (7.10)$$

$$\frac{TF(R, Q)}{Q} = -\frac{KD}{Q^2} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2 D}{Q^2}\int_R^{\infty} (x - R)f(x)dx = 0. \quad (7.11)$$

由(7.10)得

$$\int_0^R f(x)dx = 1 - \frac{C_1 Q}{C_2 D}.$$

由(7.11)得

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left[K + C_2\int_R^{\infty} (x - R)f(x)dx\right]}{C_1}}.$$

故解得最佳批量 Q^* 与订货点 R^* 满足如下方程组:

$$F(R) = 1 - \frac{C_1 Q}{C_2 D} \quad (7.12)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left[K + C_2\int_R^{\infty} xf(x)dx - R[1 - F(R)]\right]}{C_1}}. \quad (7.13)$$

最佳批量 Q^* 和订货点 R^* 可按以下步骤解出:

(1) 取 $Q_1=\sqrt{\dfrac{2KD}{C_1}}$;

(2) 将 $Q=Q_1$ 代入(7.12)求 $R\backslash-\ 1$;

(3) 将 $R=R_1$ 代入(7.13)求 Q_2;

(4) 将 Q_2 代入(7.12),重复(2)、(3),一直迭代到收敛为止,最后得到的即为最佳值 Q^* 和 R^*.

例 4　某公司购进某种物资,该物资年平均需求量为 1 000 件,每件的年存储费为 2 元,一次订货费为 10 元,缺货损失费每年每件 5 元,备运期的需求量服从[0,200]上的均匀分布,试求最佳批量与最佳订货点.

解　$D=1\,000$ 件,$K=10$ 元,$C_1=2$ 元,$C_2=5$ 元.

由备运期的需求量服从[0,200]上的均匀分布可知,其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{200}.$$

将其代入(7.12)式和(7.13)式.

由(7.12)式,得

$$\int_0^R \frac{1}{200}dx = 1-\frac{Q}{2000}.$$

即
$$R=200-Q/10. \tag{7.14}$$

由(7.13)式,得

$$Q=\sqrt{\frac{2\times 1\,000\left[10+5\int_R^{200}\frac{x}{200}dx-R\left(1-\frac{R}{200}\right)\right]}{2}}.$$

即
$$Q=\sqrt{12.5R^2-5\,000R+510\,000}. \tag{7.15}$$

取　$Q_1=\sqrt{\dfrac{2\times 10\times 1\,000}{2}}=100$ 件,代入(7.14)式,得 $R_1=192$ 件.

将 R_1 代入(7.15)式,得 $Q_2=103.9$.

将 Q_2 代入(7.14)式,得 $R_2=191.7$.

再将 R_2 代入(7.15)式,得 $Q_3=104.2$.

再将 Q_3 代入(7.14)式,得 $R_3=191.7$.

因 R_2 与 R_3 相等,故得到订货点 $R^*=192$ 件,批量 $Q^*=104$ 件.

例 5　某物资年平均需求量为 10 000 吨,备运期的需求量服从以 300 吨为均值、40 吨为均方差的正态分布,一次订货费 $K=70$ 元,每吨年存储费 $C_1=0.6$ 元.

为使不缺货的概率达到 99.9% 且总费用最小,首先可由式(7.7)求得最佳批量

$$Q_0=\sqrt{\frac{2\times 70\times 10000}{0.6}}\approx 1528(\text{吨}).$$

因要保持 99.9% 的服务水平,就要用置信度为 99.9% 的(7.8)式,查正态分布表得 $\beta=3$,于是订货点为

$$R=300+3\times 40=420\ (\text{吨}).$$

故存储量降到 420 吨时订货,每次订货量为 1528 吨.

若缺货,需在到货后补上,每次缺一吨的损失费 $C_2 = 1.50$ 元.这时可由式(7.12)与式(7.13)求得订货点 R 和每次订货的数量 Q.

取 $Q_1 = Q_0 = 1528$,代入式(7.12),得

$$F(R_1) = \frac{15\,000 - 0.6 \times 1\,528}{15\,000} = 0.9389 .$$

根据正态分布表

$$R_1 = 300 + 1.54 \times 40 = 362 .$$

再将 R_1 代入(7.13)式计算,得

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1\,0000\left(70 + 1.5\int_{362}^{\infty} x f(x)\,dx - 362 \times 0.0612\right)}{0.6}}$$

$$= \sqrt{\frac{20\,000 \times (70 + 1.5 \times 1.07)}{0.6}} = 1\,545 .$$

再由(7.12)式,得

$$F(R_2) = \frac{15\,000 - 0.6 \times 1\,545}{15\,000} = 0.9382 .$$

查正态分布表得

$$R_2 = 300 + 1.54 \times 40 = 362 .$$

这时,$R_1 = R_2$,计算已收敛,故得订货点 $R^* = 362$,每次订货量 $Q^* = 1\,545$ 吨.

7.5 存储系统模拟

在研究随机性存储问题时,随着存储系统中随机变量的增加,用数学解析式对系统的特性及其运行规律进行描述的难度明显增加.尤其在多个随机变量的情况下,对存储系统的描述更为复杂.这时,利用计算机对存储系统进行模拟将会更有效果.

对存储系统进行模拟,首先要研究系统中各种事物的属性和所发生的事件,以及描述事物属性的各种变量及其关系.其次要了解其中随机变量的概率分布情况,并借助[0,1]上均匀分布的随机数产生服从这类概率分布的随机变量.通过对事件发生概率的获取,来模拟事件的发生.然后记录模拟结果,为存储决策提供依据.

现考察引言中所述的报童问题,这是最简单的存储系统.对其进行模拟,主要问题在于借助[0,1]上均匀分布的随机数产生服从给定经验分布的日需求量.而[0,1]上均匀分布的随机数在计算机高级语言和一些统计软件或数据库软件中都已提供.因此,下面将给出如何借助[0,1]上均匀分布的随机数产生服从给定经验分布的随机变量的方法.

给定经验分布如下:

$$P\{X = a_j\} = p_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m . \tag{7.16}$$

其中 $0 < p_j < 1$, $\sum p_j = 1$. 令

$$P_0 = 0$$

$$P_r = \sum_{j=1}^{r} p_j, \quad r = 1, 2, \cdots, m ,$$

并设 U 为[0,1]上均匀分布的随机数,定义

$$X = a_r, \quad 当 P_{r-1} \leq U < P_r, r = 1, 2, \cdots, m,$$

则由此定义的 X 即为分布为(7.16)的随机变量.

根据上述方法，利用[0, 1]上均匀分布的随机数产生每日报纸的需求量如表 7.3 所示.

表 7.3

每日需求量	概　率	累　积　概　率	随机数的相关区间
120	0.15	0.15	0.00～0.14
130	0.2	0.35	0.15～0.34
140	0.3	0.65	0.35～0.64
150	0.25	0.90	0.65～0.89
160	0.1	1.00	0.90～0.99

在模拟过程中，计算机对模拟的每一天都产生一个随机数. 例如，若产生的随机数为 0.59，则从表 7.3 查出这一天对应的需求量为 140；若随机数为 0.12，则从表 7.3 查出这一天对应的需求量为 120，等等. 于是，根据引言中给出的报童问题，可编制程序流程图如图 7.2所示.

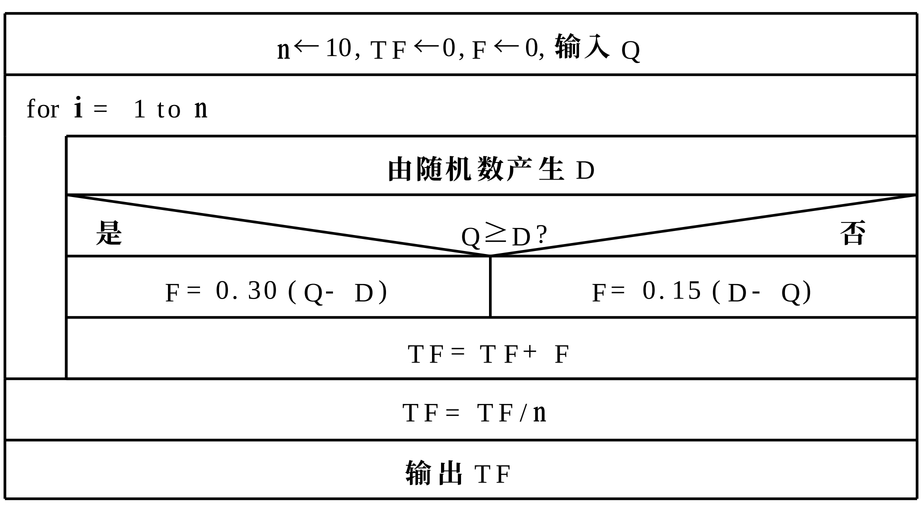

图 7.2　报童问题流程图

取 Q 值分别为 120, 130, 140, 150, 160，模拟 10 天，运行结果如表 7.4 所示，其中 Q = 120 时的运行结果如表 7.5 所示.

表 7.4

订购量 Q	120	130	140	150	160
日平均总费用 TF	3.15	1.80	2.25	3.90	8.70

从表 7.5 可看出，当 Q = 120 时，模拟 10 天的总费用为 31.5 元，每日平均总费用为 3.15 元. 表 7.4 则给出了各个方案下的日平均总费用，从中可以得出，当订购量为 130 时，总费用最小. 这一结果与引言中报童问题的结果相一致.

表 7.5

第 n 天	订购量 Q	随机数 U	需求量 D	损失费 F
1	120	0.34	130	1.50
2	120	0.67	150	4.50
3	120	0.40	140	3.00
4	120	0.82	150	4.50
5	120	0.21	130	1.50
6	120	0.28	130	1.50
7	120	0.89	150	4.50
8	120	0.88	150	4.50
9	120	0.65	140	3.00
10	120	0.62	140	3.00

7.6 应用实例

某公司批发某种器材,根据以往的销售记录,每日需求量的分布如表 7.6 所示.

表 7.6

日需求量(件)	0	1	2	3	4	5
频　率	0.11	0.18	0.21	0.22	0.16	0.12

日需求量的分布比较对称,其均值为 2.5,均方差为 1.52.该器材每年每件的存储费为 20 元,一次订货费为 40 元,缺货损失费为每年每件 16 元.每当存储水平降至订货点 R 时,公司发出订货量为 Q 的订货单.备运期大约为一星期到两星期,平均为 10 天左右.根据统计资料,其分布如表 7.7 所示.

表 7.7

备运期(天)	7	8	9	10	11	12	13
频　率	0.08	0.12	0.18	0.25	0.20	0.10	0.07

考虑到日需求量分布的特征和实际应用的情况,可假定备运期的需求量近似地服从正态分布.由于备运期的平均天数为 10,故可求得备运期需求量分布的均值为 $2.5\times 10=25$,均方差为 $1.52\times\sqrt{10}=5$.按一年 360 天计算,该器材的年平均需求量为 $D=2.5\times 360=900$.由已知,$C_1=20$ 元,$K=40$ 元,$C_2=16$ 元.设总费用为 $TF(R,Q)$,由(7.9)式,有

$$F(R,Q)=\frac{40\times 900}{Q}+20\times\left[\frac{Q}{2}+\int_0^R (R-x)f(x)\,dx\right]+\frac{16\times 900}{Q}\int_R^{\infty}(x-R)f(x)\,dx.$$

取 $Q_1=\sqrt{\dfrac{2\times 40\times 900}{20}}=60$,代入式(7.12),得

$$F(R_1)=\frac{16\times 900-20\times 60}{16\times 900}=0.9167.$$

根据正态分布表, $\beta=1.38$,

$$R_1=25+1.38\times 5=32.$$

再将 R_1 代入(7.13)式计算, 得

$$Q_2=\sqrt{\frac{2\times 900\left(40+16\int_{32}^{\infty}xf(x)\,dx-32\times 0.0833\right)}{20}}$$

$$=\sqrt{\frac{1\,800\times(40+16\times 0.10)}{20}}=61.$$

再由(7.12)式

$$F(R_2)=\frac{16\times 900-20\times 61}{16\times 900}=0.9153.$$

查正态分布表得 $\beta=1.375$.

$$R_2=25+1.375\times 5=32.$$

这时, $R_1=R_2$, 计算已收敛, 故得订货点 $R^*=32$, 每次订货量 $Q^*=61$ 吨. 根据这一策略订货, 年最小总费用为 $TF(R^*, Q^*)=1\,378$ 元, 每个周期中缺货的概率为 $1-0.9153=0.0847$, 即服务水平达到 91.53%.

下面利用计算机模拟解决这一问题.

首先根据表 7.8 和表 7.9 由[0,1]上均匀分布的随机数产生日需求量和备运期这两个随机变量. 然后选定通过模拟比较总费用 $TF(R, Q)$大小的 R 值与 Q 值. 比如, 可选定 $R=31, 32, 33$, $Q=60, 61$, 等等. 每选定一对 R 和 Q, 就可得到相应的总费用的值. 最终选择出使总费用最小的 R^* 与 Q^*.

表 7.8

每日需求量	概　率	累 积 概 率	随机数的相关区间
0	0.11	0.11	0.00～0.10
1	0.18	0.29	0.11～0.28
2	0.21	0.50	0.29～0.49
3	0.22	0.72	0.50～0.71
4	0.16	0.88	0.72～0.87
5	0.12	1.00	0.88～0.99

表 7.9

每日需求量	概　率	累 积 概 率	随机数的相关区间
7	0.08	0.08	0.00 ～ 0.07
8	0.12	0.20	0.08 ～ 0.19
9	0.18	0.38	0.20 ～ 0.37

每日需求量	概　率	累　积　概　率	随机数的相关区间
10	0.25	0.63	0.38 ～ 0.62
11	0.20	0.83	0.63 ～ 0.82
12	0.10	0.93	0.83 ～ 0.92
13	0.07	1.00	0.93 ～ 0.99

同时, 设 S 为当日存储量, HF 为存储费, OF 为订货费, LF 为短缺损失费. 还需假定模拟开始时的初始存储量 S_0, 不妨设 $S_0 = 60$. 模拟天数为 360 天.

图 7.3 即为该存储系统模拟的流程图.

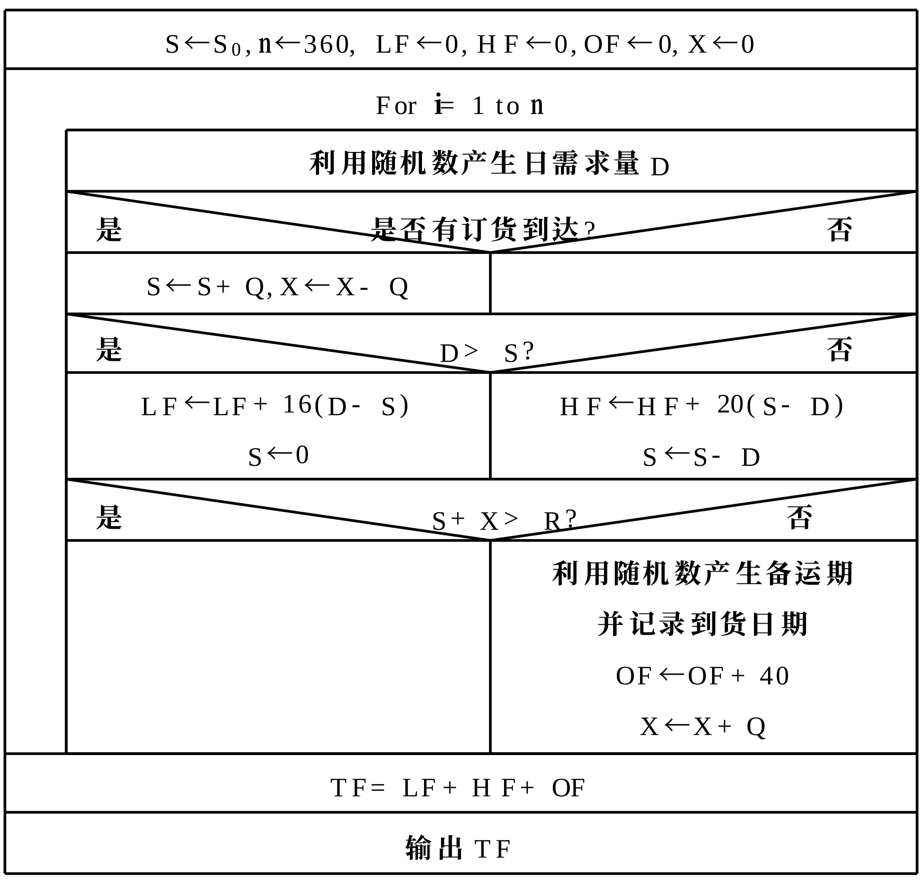

图 7.3　存储系统模拟流程图

取 $Q = 61$, $R = 32$, 对该存储系统进行计算机模拟. 模拟结果为:

存储费 HF = 757.61 元, 订货费 OF = 560 元, 短缺损失费 LF = 45 元.

总费用 TF = 1362.61 元.

习　题

7.1　某工厂每年需要某种备件 400 件, 每件每年的存储保管费为 14.4 元, 每次订购费为 20 元, 不得缺货, 试求经济订货批量.

7.2　某工厂每年需要某种原料 600 公斤, 每次订货费为 900 元, 每月每公斤存储费为 5 元. 若允许缺货, 且每年每公斤缺货损失费为 180 元, 求最优订货量.

7.3　某物资每月需供应 50 箱, 每次订货费为 60 元, 每月每箱的存储费为 40 元. 若不允许缺货, 且一订货就可提货, 试问每隔多少时间订购一次, 每次应订购多少箱? 若一个周期中缺一箱的缺货损失费为 40 元, 缺货不要补. 问每隔多少时间订购一次, 每次应该订购多少箱?

7.4　某食品商店每天进货牛奶,每箱的进货价为 24 元,售价为 30 元.当天如果不能售出,则因牛奶变质而全部损失.根据以往的统计,该商店牛奶需求量的概率分布如表 7.10 所示.试确定每天牛奶的进货数.

表　7.10

需求量(箱)	32	33	34	35
概　率	0.1	0.3	0.5	0.1

7.5　某物资每月平均需求量为 60 箱,一次订货费为 147 元,每箱每月的存储费为 40 元,备运期 5 天.备运期的需求量服从均值为 10 箱,均方差为 2 箱的正态分布.为使不缺货的概率达到 99.9% 且总费用最小,问订货点是多少,每次订多少箱?

7.6　某公司对某种备件的年平均需求量为 800 件,一次订货费为 16 元,存储费为每年每件 4 元,缺货损失费为每年每件 8 元.设备运期的需求量服从[0,200]区间上的均匀分布,试求最佳批量与最佳订货点.

7.7　某企业拟生产一种季节性产品,自产自销,每箱成本为 100 元,售出价格为 200 元,每箱销售后可获利 100 元.如果当天销售不出去,每剩一箱就要损失 60 元.通过统计分析和市场预测,确认当年市场销售情况如表 7.11 所示.

表　7.11

日销售量(箱)	200	210	220	230
概　率	0.3	0.4	0.2	0.1

试根据销售量拟订日生产量并模拟 30 天的销售赢利情况,以确定使日平均赢利最大的最优日生产量.

7.8　某商场经销电烤箱,根据资料记载获得了过去 200 天电烤箱的需求情况及 50 次订货的材料如表 7.12 和 7.13 所示.

表　7.12

日需求量(个)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
发生天数	19	27	42	49	34	17	9	2	1

表　7.13

备运期(天)	4	5	6	7	8	9	10
发生天数	11	7	3	21	5	2	1

已知电烤箱成本 400 元/个,订货费 100 元/次,库存费 0.32 元/天·个,由于缺货造成的经济损失为 100 元/个.现有两个决策方案需要比较,(1)订货点为 10 个,订货量为 25 个;(2)订货点为 15 个,订货量为 25 个.试模拟 30 天的经营情况,确定哪个方案的经济效益好.

第 8 章　决策分析模型

8.1　引　　言

人们在从事各种活动的过程中，经常要为可能采取的行动作出决定，这就是决策. 许多决策问题要受到不确定因素的影响，因而需要作科学的分析. 决策分析即是在合理地分析受不确定因素影响的决策问题时所体现的一系列概念和系统程序，其目的是为了改善决策过程. 例如，某工厂在产品销路很好、市场前景广阔的情况下作出扩建的决策，这是一种确定性决策的问题. 若该厂的产品面临畅销和滞销两种可能状态时，决策者就需要分析不同状态下的收益或损失状况. 例如，在各种状态下扩建与不扩建的收益如表 8.1 所示.

表　8.1

状态 方案	畅销	滞销
扩建	20	- 8
不扩建	8	2

当各个状态发生的概率不清楚时，该问题为不确定性决策问题. 决策者以冒险或保守等不同风格按一定的决策准则作出某种决策. 他可能为获得最大收益 20 万元而进行扩建，也可能因最糟也能得到 2 万元收益而选择不扩建的决定. 若以往的资料表明，畅销与滞销的概率分别为 0.6 和 0.4，则该问题为风险性问题. 决策者将按新的与概率有关的准则行事. 比如，他可能分别计算出扩建与不扩建的期望值，然后以最大期望值作决定. 这时，扩建方案的期望值为 $20\times 0.6+(-8)\times 0.4=8.8$，而不扩建方案的期望值为 $8\times 0.6+2\times 0.4=5.6$. 由于扩建的期望值大于不扩建的期望值，故决策者决定扩建. 本章将主要对不确定性问题和风险性问题进行决策分析.

决策分析模型在经济领域的应用非常广泛. 它首先应用于石油和天然气工业. 在投资分析、产品开发、房地产开发、科学试验、市场营销、可行性研究等方面都有决策分析模型应用的有效成果. 由于决策分析模型以及相应的软件系统得到不断的应用和发展，因而大大地改进了决策者的决策过程.

8.2　决策分析的数学模型

8.2.1　决策问题的基本要素

从以上的讨论可以看出，决策分析所涉及的问题由四个基本要素构成. 这四个基本要素分别是：可能采取的行动方案；影响决策的自然状态；反映效果的收益函数；指导行动的决策准则. 他们的关系可用如下形式表示：

$$\text{Opt } d = f(a, s, q).$$

其中 d 为在一定决策准则下的决策值, a 为决策者可能采取的行动方案; s 为自然界(或社会)可能出现的自然状态. $q = q(a, s)$ 则为自然界(或社会)处于状态 s 时人们选取行动方案 a 所得到的收益.

设 $A = \{a\}$为行动集, $S = \{s\}$为状态集. 当行动集和状态集分别为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$时, 收益函数可取 $m \times n$ 个值 $q_{ij} = q(a_i, s_j)$, 这 $m \times n$ 个值组成如下矩阵:

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \hline a_1 & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ a_2 & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{array}.$$

该矩阵称为收益矩阵.

这四个基本要素及其函数关系定量地描述了一个决策问题, 刻画了决策过程的本质内容, 即在了解和掌握自然状态变化这一影响决策的潜在因素的情况下, 考虑各种可供选择的行动方案, 分析它们可能带来的不同收益, 根据一定的决策准则从中确定最满意的行动方案. 如果这四个基本要素中的任意一个发生变化, 则意味着决策问题发生了变化, 这将导致决策分析模型的改变, 因而其结果也可能发生改变.

8.2.2 不确定性决策模型

在一些决策问题中, 决策者对可能出现的不同自然状态缺乏必要的信息, 无法确定自然状态发生的概率, 这类问题称为不确定性决策问题.

下面分析一个具体的例子.

例 1 某电视机厂面对激烈的市场竞争, 拟制订利用先进技术对机型改型的计划. 现有三个改型方案可供选择: (a_1) 提高图像质量; (a_2) 提高图像质量并增强画面功能; (a_3) 提高图像和音响质量. 根据市场需求调查, 该厂彩电面临高需求(拥有 8% 左右的购买者)、一般需求(拥有 6% 左右的购买者) 与低需求(拥有 4% 左右的购买者) 三种自然状态. 在这三种自然状态下不同的改型方案所获得的收益不一样. 表 8.2 给出了预期收益的情况.

表 8.2 单位: 万元

S / A	高需求 s_1	一般需求 s_2	低需求 s_3
a_1	50	30	20
a_2	80	40	0
a_3	120	20	-40

这是一个不确定性决策问题. 在这个决策问题中, 状态集为 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, 其中 s_1, s_2, s_3 分别表示高需求、一般需求和低需求; 行动集为 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, 其中 a_1, a_2, a_3 分别表示提高图像质量、提高图像质量并增强画面功能、提高图像和音响质量三种改型方案. 收益矩阵为

$$Q = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ 50 & 30 & 20 \\ 80 & 40 & 0 \\ 120 & 20 & -40 \end{array}.$$

在明确了自然状态、行动方案和收益矩阵后,只要给定决策准则,便可作出决策.在该问题中,由于缺乏有关市场需求的进一步的信息,因而不同的决策者根据其主观意识和处理问题的态度而遵循着不同的决策准则.

下面在几种不同的决策准则下求解该决策问题.

(1) 悲观准则

悲观准则又称小中取大准则.该准则反映决策者对决策问题持保守态度,从而为保险起见,对每个方案先找出其最不利状态下的收益,然后从中选取收益最大的方案作为决策方案.可见,在悲观准则下,有

$$d^* = \max_i \min_j \{q_{ij}\} .$$

这就是说,对每个方案 a_i,令 $d_i = \min_j \{q_{ij}\}$,则 $d_k^* = \max_i \{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据悲观准则,对于每个方案 $a_i(i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = \min\{50, 30, 20\} = 20,$$
$$d_2 = \min\{80, 40, 0\} = 0,$$
$$d_3 = \min\{120, 20, -40\} = -40,$$

则

$$d_1^* = \max\{20, 0, -40\} = 20.$$

故方案 a_1 是最优决策方案.

(2) 乐观准则

乐观准则又称大中取大准则.该准则反映决策者对决策问题持乐观态度,因而对每个方案先找出其最大收益,然后从这些最大收益中再选取收益最大的方案作为决策方案.或者说,从收益矩阵 Q 中选取最大收益值所对应的方案为决策方案.

可见,在乐观准则下,有

$$d^* = \max_i \max_j \{q_{ij}\} .$$

这就是说,对每个方案 a_i,令 $d_i = \max_j \{q_{ij}\}$,则 $d_k^* = \max_i \{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据乐观准则,对于每个方案 $a_i(i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = \max\{50, 30, 20\} = 50,$$
$$d_2 = \max\{80, 40, 0\} = 80,$$
$$d_3 = \max\{120, 20, -40\} = 120.$$

则

$$d_3^* = \max\{50, 80, 120\} = 120.$$

故方案 a_3 是最优决策方案.

(3) 适度乐观准则

适度乐观准则是一种介于乐观准则与悲观准则之间的用折衷的方法进行决策的决策准则. 该准则要求决策者根据经验判断为各种可能出现的最大收益确定一个乐观系数 $\alpha(0<\alpha<1)$, 并利用乐观系数对每个行动方案计算折衷值. 然后, 从中选取折衷值最大的方案为最优决策方案.

在适度乐观准则下, 有

$$d^* = \max_i \{\alpha \cdot q_i^* + (1-\alpha) \cdot q_{i^*}\}.$$

其中 $q_i^* = \max_j \{q_{ij}\}$, $q_{i^*} = \min_j \{q_{ij}\}$.

这就是说, 对每个方案 a_i, 令 $d_i = \alpha \cdot q_i^* + (1-\alpha) \cdot q_{i^*}$, 则 $d_k^* = \max_i \{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据适度乐观准则, 给定 $\alpha = 0.6$, 这时对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$, 有

$$d_1 = 0.6 \times 50 + 0.4 \times 20 = 38,$$
$$d_2 = 0.6 \times 80 + 0.4 \times 0 = 48,$$
$$d_3 = 0.6 \times 120 + 0.4 \times (-40) = 56.$$

则

$$d_3^* = \max\{38, 48, 56\} = 56.$$

故方案 a_3 是最优决策方案.

(4) 后悔准则

后悔准则是一种使后悔值最小的准则. 所谓后悔值是指决策者在某种自然状态下本应选取收益最大的方案获得最大收益时选择了其他方案而造成机会损失的损失值. 该准则要求决策者首先计算每个方案的最大损失值, 然后, 从中选取损失值最小的方案为最优决策方案.

在后悔准则下, 有

$$d^* = \min_i \max_j \{q_j^* - q_{ij}\}.$$

其中 $q_j^* = \max_i \{q_{ij}\}$.

这就是说, 对每个方案 a_i, 令 $d_i = \max_j \{q_j^* - q_{ij}\}$, 则 $d_k^* = \min_i \{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据后悔准则, 对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$, 有

$$d_1 = \max\{70, 10, 0\} = 70,$$
$$d_2 = \max\{40, 0, 20\} = 40,$$
$$d_3 = \max\{0, 20, 60\} = 60.$$

则

$$d_2^* = \min\{70, 40, 60\} = 40.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

(5) 等可能性准则

等可能性准则是一种机会均等的准则. 该准则认为各种自然状态发生的可能性在缺乏资料而又没有理由说明哪一个状态发生的可能性更大的情况下应当是相等的. 决策者首先计算每个方案收益的均值, 然后, 从中选取均值最大的方案为最优决策方案.

在等可能性准则下，有

$$d^* = \max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \right\}.$$

这就是说，对每个方案 a_i，令 $d_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$，则 $d_k^* = \max_i \{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据等可能性准则，对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$，有

$$d_1 = (50+30+20)/3 = 33.3,$$

$$d_2 = (80+40+0)/3 = 40,$$

$$d_3 = (120+20-40)/3 = 33.3.$$

则

$$d_2^* = \max\{33.3, 40, 33.3\} = 40.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

例 2　某机械厂打算生产机器部件中一种全新的小器件，这需要有一种新型的设备. 他们可以购买或租借这种设备，也可以通过改造旧设备来解决. 未来市场可能好，也可能坏，其概率未知. 各个不同状态下的利润如表 8.3 所示.

表　8.3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　单位：千元

S / A	好(s_1)	坏(s_2)
购买(a_1)	140	-20
租借(a_2)	95	35
改造(a_3)	100	5

试比较用悲观准则、适度乐观准则($\alpha=0.8$)和后悔准则求解该问题的结果.

解　(1) 根据悲观准则，对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$，有

$$d_1 = \min\{140, -20\} = -20,$$

$$d_2 = \min\{95, 35\} = 35,$$

$$d_3 = \min\{100, 5\} = 5.$$

则

$$d_2^* = \max\{-20, 35, 5\} = 35.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

(2) 根据适度乐观准则($\alpha=0.8$)，对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$，有

$$d_1 = 0.8 \times 140 + 0.2 \times (-20) = 108,$$

$$d_2 = 0.8 \times 95 + 0.2 \times 35 = 83,$$

$$d_3 = 0.8 \times 100 + 0.2 \times 5 = 81.$$

则

$$d_1^* = \max\{108, 83, 81\} = 108.$$

故方案 a_1 是最优决策方案.

(3) 根据后悔准则，对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$，有

$$d_1 = \max\{0, 55\} = 55,$$
$$d_2 = \max\{45, 0\} = 45,$$
$$d_3 = \max\{40, 30\} = 40.$$

则

$$d_3^* = \min\{55, 45, 40\} = 40.$$

故方案 a_3 是最优决策方案.

从以上可以看出,不同的准则可能得出不同的结果.而决策者的气质与经验利用等是影响其遵循某种准则的重要因素,在自然状态有关信息缺乏的情况下,尤其是这样.为了减少人为的决策失误,尽量收集有关自然状态的信息是十分重要的.

8.2.3 风险性决策模型

决策问题的不确定性给决策者的决策带来困难.决策者努力收集有关自然状态的以往信息,以便获得各个自然状态发生的概率.这些以往的信息称为先验信息,由先验信息加工整理得到的概率分布称为先验分布.如果决策者已经具有各自然状态 s_i 发生的概率 $p(s_i)$,则该决策问题为风险性决策.在风险性决策问题中,人们还可能追加新的样本信息来修正原有的先验分布,获得后验分布,以提高决策的可靠性.与不确定性决策一样,风险性决策也会受不同准则的影响而导出不同的结果.

例 3 在例 1 中,决策者通过样本调查得知,出现高需求、一般需求、低需求三种状态的概率分别为 $p(s_1) = 0.3$, $p(s_2) = 0.5$ 和 $p(s_3) = 0.2$,即如表 8.4 所示.

表 8.4　　单位:万元

A \ S / P	高需求 s_1(8%)	一般需求 s_2(6%)	低需求 s_3(4%)
	0.3	0.5	0.2
a_1	50	30	20
a_2	80	40	0
a_3	120	20	-40

现利用几个常用的准则进行决策.

(1) 最大可能准则

最大可能准则要求决策者首先找出概率明显最大的自然状态,然后在这一状态下选取收益最大的方案为最优决策方案.

在最大可能准则下,有

$$d^* = \max_i\{q_{it}\}.$$

其中 t 满足 $p(s_t) = \max_j\{p(s_j)\}$.

这就是说,对每个方案 a_i,令 $d_i = q_{it}$,其中 t 满足 $p(s_t) = \max_j\{p(s_j)\}$,则 $d_k^* = \max_i\{d_i\}$所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据最大可能准则,$p(s_2) = \max\{p(s_j)\}$,且对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = q_{12} = 30,$$

$$d_2 = q_{22} = 40,$$

$$d_3 = q_{32} = 20.$$

则

$$d_2^* = \max\{30, 40, 20\} = 40.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

(2) 期望收益准则

期望收益准则要求决策者首先计算出每个行动方案的期望收益,然后,从中选取期望值最大的方案为最优决策方案.

在期望收益准则下,有

$$d^* = \max_i \left\{ \sum_j q_{ij} p(s_j) \right\}.$$

这就是说,对每个方案 a_i,令 $d_i = \sum_j q_{ij} p(s_j)$,则 $d_k^* = \max_i\{d_i\}$ 所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据期望收益准则,对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = 0.3 \times 50 + 0.5 \times 30 + 0.2 \times 20 = 34,$$

$$d_2 = 0.3 \times 80 + 0.5 \times 40 + 0.2 \times 0 = 44,$$

$$d_3 = 0.3 \times 120 + 0.5 \times 20 + 0.2 \times (-40) = 38.$$

则

$$d_2^* = \max\{34, 44, 38\} = 44.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

(3) 期望损失准则

期望损失准则要求决策者首先计算出由后悔而产生的每个行动方案的期望损失值,然后,从中选取期望值最小的方案为最优决策方案.

在期望损失准则下,有

$$d^* = \min_i \left\{ \sum_j p(s_j) \cdot (q_j^* - q_{ij}) \right\}.$$

其中 $q_j^* = \max_i \{q_{ij}\}$.

这就是说,对每个方案 a_i,令 $d_i = \sum_j p(s_j) \cdot (q_j^* - q_{ij})$,则 $d_k^* = \min_i\{d_i\}$ 所对应的方案 a_k 是最优决策方案.

根据期望损失准则,对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = 0.3 \times 70 + 0.5 \times 10 + 0.2 \times 0 = 26,$$

$$d_2 = 0.3 \times 40 + 0.5 \times 0 + 0.2 \times 20 = 16,$$

$$d_3 = 0.3 \times 0 + 0.5 \times 20 + 0.2 \times 60 = 22.$$

则

$$d_2^* = \min\{26, 16, 22\} = 16.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

(4) **后验期望准则**

后验期望准则要求,决策者在追加样本信息的基础上利用贝叶斯公式求得有关状态的后验分布,然后,将后验分布取代先验分布,求出期望收益最大的方案为最优决策方案.

在后验期望准则下,有

$$d^* = \max_i \sum_j q_{ij} p(s_j | x) .$$

其中 $p(s_j|x)$ 满足贝叶斯公式

$$p(s_j | x) = \frac{p(x | s_j) p(s_j)}{\sum_k p(x | s_k) p(s_k)} .$$

这里, $p(x|s_j)$ 是在给定状态 s_j 下事件 x 发生的概率.

根据后验期望准则所体现的原理,决策者应进行市场调查,追加样本信息.假设决策者现向 40 户打算购买彩电的人发出购买该厂彩电的订单,其中有 3 户回函购买该厂彩电.记这一组抽样试验结果为 x,则试验 x 相当于进行了 40 次独立试验,其中 3 次成功.根据二项分布,计算出

$$p(x|s_1) = C_{40}^3 \times 0.08^3 \times 0.92^{37} = 0.2313,$$
$$p(x|s_2) = C_{40}^3 \times 0.06^3 \times 0.94^{37} = 0.2162,$$
$$p(x|s_3) = C_{40}^3 \times 0.04^3 \times 0.96^{37} = 0.1396.$$

根据贝叶斯公式,由 $0.2313 \times 0.3 + 0.2162 \times 0.5 + 0.1396 \times 0.2 = 0.2054$,得 $s_j (j = 1, 2, 3)$ 的后验概率分别为:

$$p(s_1|x) = \frac{0.2313 \times 0.3}{0.2054} = 0.3378 ,$$
$$p(s_2|x) = \frac{0.2162 \times 0.5}{0.2054} = 0.5264 ,$$
$$p(s_3|x) = \frac{0.1369 \times 0.2}{0.2054} = 0.1358 .$$

这时,对于每个方案 $a_i (i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = 0.3378 \times 50 + 0.5264 \times 30 + 0.1358 \times 20 = 35.398,$$
$$d_2 = 0.3378 \times 80 + 0.5264 \times 40 + 0.1358 \times 0 = 48.04,$$
$$d_3 = 0.3378 \times 120 + 0.5264 \times 20 + 0.1358 \times (-40) = 45.632.$$

则

$$d_2^* = \max\{35.398, 48.04, 45.632\} = 48.04.$$

故方案 a_2 是最优决策方案.

例 4 某工厂根据市场需要决定某新产品的月生产数量.每件成本 30 元,售价 42 元,如果当月销售不完,每件损失 5 元,设每批产品为 1 000 件.根据市场分析,下月需要该产品的概率分布如表 8.5 所示.试分别利用最大可能准则和期望收益准则选择最优生产决策.

表 8.5

需要批数 x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.2	0.5	0.2

解 状态集为 $S=\{0,1,2,3\}$，其中各元素分别表示市场需要产品的批数；行动集为 $A=\{0,1,2,3\}$，其中各元素分别表示工厂月投产的批数. 不同状态下采取不同行动方案的收益如表 8.6 所示.

表 8.6

A \ S (P)	0 (0.1)	1 (0.2)	2 (0.5)	3 (0.2)
0	0	0	0	0
1	-0.5	1.2	1.2	1.2
2	-1.0	0.7	2.4	2.4
3	-1.5	0.2	1.9	3.6

(1) 根据最大可能准则，$p(s_3)=\max\{p(s_j)\}$，且对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$，有

$$d_1=q_{13}=0,$$
$$d_2=q_{23}=1.2,$$
$$d_3=q_{33}=2.4,$$
$$d_4=q_{43}=1.9.$$

则

$$d_3^*=\max\{0,1.2,2.4,1.9\}=2.4.$$

故方案 a_3 是最优决策方案.

(2) 根据期望收益准则，对于每个方案 $a_i(i=1,2,3,4)$，有

$$d_1=0.1\times0+0.2\times0+0.5\times0+0.2\times0=0,$$
$$d_2=0.1\times(-0.5)+0.2\times1.2+0.5\times1.2+0.2\times1.2=1.03,$$
$$d_3=0.1\times(-1.0)+0.2\times0.7+0.5\times2.4+0.2\times2.4=1.72,$$
$$d_4=0.1\times(-1.5)+0.2\times0.2+0.5\times1.9+0.2\times3.6=1.56.$$

则

$$d_3^*=\max\{0,1.03,1.72,1.56\}=1.72.$$

故方案 a_3 是最优决策方案.

按照最大可能准则和期望收益准则进行决策，方案 a_3 是最优决策方案，即产品数量按每月生产两批共 2 000 件.

8.3 信息的价值

当决策者关于自然状态的信息越缺乏时，那么决策过程中主观臆断的成分就越多. 收集和提供相关信息有利于减少决策问题的不确定性，提高决策的科学性. 如果提供的信息能够完全消除不确定性，则这种信息称为完全信息. 决策者常常通过进行试验和抽样获得更多的信息. 在一般情况下这些信息能够减少不确定性，但不能够完全消除不确定性，这种信息称为样本信息. 无论是完全信息，还是样本信息，都具有其价值. 真正的完全信息一般来说是无

法获得的,它的价值不过是样本信息的价值所追求的一个极限.

现考虑前面的例 3.如果决策者掌握了市场需求的完全信息,那么他就能正确地作出决策.因而,在高需求状态下,肯定选取具有最大收益为 120 的方案 a_3;在一般需求状态下,肯定选取具有最大收益为 40 的方案 a_2;在低需求状态下,肯定选取具有最大收益为 20 的方案 a_1.又因为这三种自然状态发生的概率分别为 0.3, 0.5, 0.2.所以,在具有完全信息时最优决策的期望收益为

$$d^{**} = \sum_j \max_i q_{ij} p(s_j) = 0.3\times 120 + 0.5\times 40 + 0.2\times 20 = 60,$$

这是完全最大期望收益.

而在现有信息的实际情况下,利用期望收益准则作出先验最大期望收益为

$$d^{*} = \max_i \sum_j q_{ij} p(s_j) = \max\{34, 44, 38\} = 44.$$

这两者之差 $d^{**} - d^{*} = 60 - 44 = 16$ 就是完全信息期望值,它一方面说明完全信息给决策者带来更大的收益,另一方面说明决策者在现有情况下无论怎样去补充信息,最多能增加 16 万元的收益.这 16 万元恰好是期望损失准则下的最小期望损失值(为什么?).记完全信息期望值为 EVPI,则

$$\text{EVPI} = \text{完全最大期望收益值} - \text{先验最大期望收益值}.$$

即

$$\text{EVPI} = \sum_j \max_i\{q_{ij} p(s_j)\} - \max_i \sum_j q_{ij} p(s_j).$$

EVPI = 16 告诉我们,如果有人能够收集到完全信息,厂方可以为完全信息支付 16 万元.这就是完全信息的价值.它是厂方为追加信息而支付费用的上限.

例 5　投资者考虑把他的一笔钱或者投放到房地产投资中去,或者购买证券.房地产投资有两种方案,所得利润依赖于政府未来城区规划的政策,其前景分别为自然状态 S_1 和 S_2.利润表如表 8.7 所示.

表　8.7

A \ S	S_1	S_2
A_1:房地产 Ⅰ	155 000	35 000
A_2:房地产 Ⅱ	135 000	85 000
A_3:证券	100 000	100 000

投资者认为状态 S_1 的概率为 0.3,而状态 S_2 的概率为 0.7.试分别利用期望收益准则和期望损失准则确定最优决策方案,并给出完全信息的期望值.

解　(1) 根据期望收益准则,对于每个方案 $A_i(i = 1, 2, 3)$,有

$$d_1 = 0.3\times 155\,000 + 0.7\times 35\,000 = 71\,000,$$

$$d_2 = 0.3\times 135\,000 + 0.7\times 85\,000 = 100\,000,$$

$$d_3 = 0.3\times 100\,000 + 0.7\times 100\,000 = 100\,000.$$

则

$$d_2^{*} = d_3^{*} = \max\{71\,000, 100\,000, 100\,000\} = 100\,000.$$

故方案 A_2 与 A_3 是最优决策方案.

根据期望损失准则,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1=0.3\times(155\,000-155\,000)+0.7\times(100\,000-35\,000)=45\,500,$$

$$d_2=0.3\times(155\,000-135\,000)+0.7\times(100\,000-85\,000)=16\,500,$$

$$d_3=0.3\times(155\,000-100\,000)+0.7\times(100\,000-100\,000)=16\,500.$$

则

$$d_2^*=d_3^*=\min\{45\,500,16\,500,16\,500\}=16\,500.$$

故方案 A_2 与 A_3 是最优决策方案.

由最小期望损失值为 16500 可知, EVPI = 16500.

至于方案 A_2 与 A_3 之间最终取哪一个为最优决策方案,还可进一步追加信息来确定. 也可以将各方案的下界差(即期望收益值与最小收益值之差)进行比较. 在期望收益值相同的情况下,可选下界差最小的方案为最优方案. 由于方案 A_2 的下界差为 15 000,而方案 A_3 的下界差为 0,故可选择方案 A_3,即购买证券.

为了提高决策的科学性,只要有可能,追加样本信息是必要的. 但追加样本信息会带来多大价值,为其支付的费用应该多少才合理,这是决策者所关注的问题. 现通过例 6 分析这一问题.

例 6　在例 3 中,决策者为了掌握更多的信息,决定花费 1.5 万元请咨询公司调查该厂彩电的市场销路情况. 调查结果如表 8.8 所示,在高需求状态下,销路好与不好的概率分别为 0.8 和 0.2;在一般需求状态下,销路好与不好的概率各为 0.5;在低需求状态下,销路好与不好的概率分别为 0.3 和 0.7.

表　8.8

X \ S	高需求 s_1	一般需求 s_2	低需求 s_3
销路好 x_1	$p(x_1\mid s_1)=0.8$	$p(x_1\mid s_2)=0.5$	$p(x_1\mid s_3)=0.3$
销路差 x_2	$p(x_2\mid s_1)=0.2$	$p(x_2\mid s_2)=0.5$	$p(x_2\mid s_3)=0.7$

根据所获得的信息,利用贝叶斯公式,可以得到修正后的各自然状态概率.

在信息为销路好时,有

$$p(x_1)=0.8\times0.3+0.5\times0.5+0.3\times0.2=0.55,$$

$$p(s_1\mid x_1)=\frac{0.8\times0.3}{0.55}=0.4364,$$

$$p(s_2\mid x_1)=\frac{0.5\times0.5}{0.55}=0.4545,$$

$$p(s_3\mid x_1)=\frac{0.3\times0.2}{0.55}=0.1091.$$

这时,利用后验概率计算最大期望收益值,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1\mid x_1=0.4364\times50+0.4545\times30+0.1091\times20=37.637,$$

$$d_2\mid x_1=0.4364\times80+0.4545\times40+0.1091\times0=53.092,$$

$$d_3\mid x_1=0.4364\times120+0.4545\times20+0.1091\times(-40)=57.094.$$

其中 $d_i\mid x_1$ 为销路好时第 i 个方案的期望收益. 则

$$d_3^*\mid x_1=\max\{37.637,53.092,57.094\}=57.094.$$

方案 a_3 的期望收益值最大.

在信息为销路差时:

$$p(x_2)=0.2\times 0.3+0.5\times 0.5+0.7\times 0.2=0.45,$$

$$p(s_1|x_2)=\frac{0.2\times 0.3}{0.45}=0.1333,$$

$$p(s_2|x_2)=\frac{0.5\times 0.5}{0.45}=0.5556,$$

$$p(s_3|x_2)=\frac{0.7\times 0.2}{0.45}=0.3111.$$

这时,利用后验概率计算最大期望收益值,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1|x_2=0.1333\times 50+0.5556\times 30+0.3111\times 20=29.555,$$

$$d_2|x_2=0.1333\times 80+0.5556\times 40+0.3111\times 0=32.888,$$

$$d_3|x_2=0.1333\times 120+0.5556\times 20+0.3111\times(-40)=14.664.$$

其中 $d_i|x_2$ 为销路差时第 i 个方案的期望收益. 则

$$d_2^*|x_2=\max\{29.555,32.888,14.664\}=32.888.$$

方案 a_2 的期望收益值最大.

因此,该厂被告知,如果销路好,应选择第三个方案;如果销路差,则应选择第二个方案.

$$\begin{aligned}\text{后验最大期望收益值}&=p(x_1)(d_1^*|x_1)+p(x_2)(d_2^*|x_2)\\&=0.55\times 57.094+0.45\times 32.888\\&=46.2.\end{aligned}$$

前面已计算出先验最大期望收益值为 44. 两者之差表示利用样本信息后选取最优决策的期望收益增加值. 这一增加值称为样本信息期望值,记为 EVSI,则

$$EVSI=\text{后验最大期望收益值}-\text{先验最大期望收益值},$$

即

$$EVSI=\sum_k p(x_k)\left(\max_i\sum_j q_{ij}p(s_j|x_k)\right)-\max_i\sum_j q_{ij}p(s_j).$$

由此可知,

$$EVSI=46.2-44=2.2.$$

因此,样本信息的价值为 2.2 万元. 该厂为获得这些新的信息而花费 1.5 万元咨询费,并没有达到样本信息价值的上限,所以,这些花费是值得的.

8.4 应用实例

某公司计划沿青林湖岸建造一批公寓. 根据资金和设计等方面的因素,该公司提出建造 60, 120, 180 套房等三个建筑方案. 这些公寓的销售收入与该地区的经济发展状况有关. 基于建筑价格和销售额的估计,计算出三个方案在不同状态下的利润如表 8.9 所示.

那么该公司应建多少套公寓为宜呢?

首先,公司决策者依照后悔准则按不确定性问题看待作出决策分析.

根据后悔准则, $q_1^*=150,\ q_2^*=90,\ q_3^*=30.$

表　8.9

X \ S	繁荣(s_1)	一般(s_2)	萧条(s_3)
60 套(a_1)	30	30	30
120 套(a_2)	90	90	0
180 套(a_3)	150	60	-20

对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1=\max\{150-30,90-30,30-30\}=120,$$
$$d_2=\max\{150-90,90-90,30-0\}=60,$$
$$d_3=\max\{150-150,90-60,30-(-20)\}=50,$$

则

$$d_3^*=\min\{120,60,50\}=50.$$

故方案 a_3 是最优决策方案,即应建 180 套.

决策者根据以往的资料和经验,分析了该地区三种经济状态的可能性,得到其先验分布如表 8.10 所示.

表　8.10

S	繁荣(s_1)	一般(s_2)	萧条(s_3)
P	0.2	0.5	0.3

这时,决策者根据风险性决策的期望收益准则作出决策分析.

根据期望收益准则,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1=0.2\times30+0.5\times30+0.3\times30=30,$$
$$d_2=0.2\times90+0.5\times90+0.3\times0=63,$$
$$d_3=0.2\times150+0.5\times60+0.3\times(-20)=54,$$

则

$$d_2^*=\max\{30,63,54\}=63.$$

故方案 a_2 是最优决策方案,即应建 120 套.

上述两种决策分析的结果不相同,决策者为了能获得更多的信息来辅助决策,打算委托咨询公司进行市场调查,以便给出经济环境有利于房地产开发及经济环境不利于房地产开发的有关研究结果. 在委托咨询之前,根据以往市场调查结果表明,在各个不同自然状态下,该地区有利或不利于房地产开发的条件概率 $p(x_i|s_j)$ 如表 8.11 所示.

表　8.11

X \ S	繁荣(s_1)	一般(s_2)	萧条(s_3)
有利(x_1)	0.8	0.6	0.1
不利(x_2)	0.2	0.4	0.9

于是,在有利情况下,有

$$p(x_1)=0.8\times 0.2+0.6\times 0.5+0.1\times 0.3=0.49,$$

$$p(s_1|x_1)=\frac{0.8\times 0.2}{0.49}=0.3265,$$

$$p(s_2|x_1)=\frac{0.6\times 0.5}{0.49}=0.6123,$$

$$p(s_3|x_1)=\frac{0.1\times 0.3}{0.49}=0.0612.$$

利用后验概率计算最大期望收益值,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1|x_1=0.3265\times 30+0.6123\times 30+0.0612\times 30=30,$$

$$d_2|x_1=0.3265\times 90+0.6123\times 90+0.0612\times 0=84.492,$$

$$d_3|x_1=0.3265\times 150+0.6123\times 60+0.0612\times(-20)=84.489,$$

则

$$d_2^*|x_1=\max\{30,84.492,84.489\}=84.492.$$

方案 a_2 的期望收益值最大.

在不利情况下,有

$$p(x_2)=0.2\times 0.2+0.4\times 0.5+0.9\times 0.3=0.51,$$

$$p(s_1|x_2)=\frac{0.2\times 0.2}{0.51}=0.0784,$$

$$p(s_2|x_2)=\frac{0.4\times 0.5}{0.51}=0.3922,$$

$$p(s_3|x_2)=\frac{0.9\times 0.3}{0.51}=0.5294.$$

利用后验概率计算最大期望收益值,对于每个方案 $a_i(i=1,2,3)$,有

$$d_1|x_2=0.0784\times 30+0.3922\times 30+0.5294\times 30=30,$$

$$d_2|x_2=0.0784\times 90+0.3922\times 90+0.5294\times 0=42.354,$$

$$d_3|x_2=0.0784\times 150+0.3922\times 60+0.5294\times(-20)=24.704,$$

则

$$d_2^*|x_2=\max\{30,42.354,24.704\}=42.354.$$

方案 a_2 的期望收益值最大.

所以,无论是处于有利还是不利的经济环境,都应选择第二个方案.

$$\begin{aligned}\text{后验最大期望收益值}&=p(x_1)(d_2^*|x_1)+p(x_2)(d_2^*|x_2)\\&=0.49\times 84.492+0.51\times 42.354\\&=63.\end{aligned}$$

前面已计算出先验最大期望收益值为 63,则

$$EVSI=63-63=0.$$

因此,样本信息的价值等于零.结果表明,委托咨询公司进行市场调查没有必要.

习　题

8.1　给定不同自然状态 $S_j(j=1,2,3,4,5,6)$ 下各个行动方案 $A_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 的收益如表 8.12 所示.

表　8.12

A \ S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	7	9	6	4	10	8
A_2	10	5	7	5	8	4
A_3	4	6	11	9	10	7
A_4	9	4	6	12	9	5
A_5	6	8	5	4	11	9
A_6	10	7	8	10	6	6

试分别利用悲观准则、乐观准则、后悔准则和等可能性准则选择最优决策方案.

8.2　某厂有一种新产品,其推销策略有 A_1, A_2, A_3 三种方案. 已知市场情况也有三种状况:需求量大(S_1)、需求量中等(S_2)和需求量小(S_3),但其发生的概率未知. 经调查分析,得收益矩阵如表 8.13 所示.

表　8.13

收益 \ 状态 \ 方案	需求量大	需求量中等	需求量小
	S_1	S_2	S_3
A_1	50	10	-5
A_2	30	25	0
A_3	10	10	10

试分别用后悔准则与适度乐观准则($\alpha=0.7$)选择最优决策方案.

8.3　某公司设想增加一条新的生产线. 这一设想的成功依赖于经济条件的好坏. 表 8.14 给出各种情况下的效益值.

表　8.14

A \ S	好	一般	坏
新的生产线	48 000	30 000	12 500
现有生产线	35 700	22 000	18 000

设决策者的乐观系数为 α,试讨论 α 在何范围内变化时,用适度乐观准则选取的最优决策方案为增加新的生产线.

8.4　某厂生产一种易变质产品,每件成本 20 元,售价 60 元,每件售出可获利 40 元. 如果当天剩余一件就要损失 20 元. 市场以往的资料表明,日销售量及其概率如表 8.15 所示.

表　8.15

日销售量 S	100	110	120	130
概率 P	0.2	0.4	0.3	0.1

为使利润最大,现根据日销售量制订产品生产计划. 试分别利用最大可能准则与期望收益准则确定最优生产计划.

8.5　某公司正考虑为开发一种新型产品提供资金, 可供选择的方案有三个. 前景有成功、部分成功与失败. 据估计, 成功的概率为 0.35, 部分成功的概率为 0.45, 失败的概率为 0.20. 其利润如表 8.16 所示.

表　8.16

A　S	成功(s_1)	部分成功(s_2)	失败(s_3)
方案 1	20	3	-18
方案 2	15	1	-10
方案 3	10	0	-2

试分别利用期望收益准则和期望损失准则确定最优决策方案, 并求 EVPI 的值.

8.6　某工厂拟采用新技术, 预计其市场反映好的概率为 0.6, 市场反映差的概率为 0.4. 已知利润如表 8.17 所示(单位: 万元).

表　8.17

A　S	市场反映好(s_1)	市场反映差(s_2)
采用新技术(a_1)	80	-30
发展现有技术(a_2)	-40	100

决策者用 2.5 万元请专家进行市场调查, 得到各个自然状态下调查结果的条件概率如表 8.18 所示.

表　8.18

X　S	市场反映好(s_1)	市场反映差(s_2)
销路好(x_1)	0.80	0.10
销路一般(x_2)	0.10	0.75
销路差(x_3)	0.10	0.15

试用后验期望准则作出决策. 花费 2.5 万元的调查费用是否值得?

8.7　某采油计划, 估计钻井成功可收益 1 000 万元, 而钻井失败则损失 400 万元. 估计钻井成功的机会为 30%. 若事先做一次地震测量, 需花费 60 万元. 但地震测量也有误差, 根据历史资料得知, 在实际情况为 B_j 的条件下, 地震测量结果为 A_i 的概率, 即条件概率 $P(A_i|B_j)$ 的数据如表 8.19 所示.

表　8.19

$P(A_i\|B_j)$　B_j　A_i	有　油	无　油
有　油	0.75	0.40
无　油	0.25	0.60

试进行决策分析并选择最优方案.

8.8　某公司考虑生产一种新产品, 决策者对市场销售状态进行预测的结果有三种情况: 销路好、一般、差, 其概率及各种情况下的增加的利润额如表 8.20 所示(单位: 万元).

表 8.20

S/P \ A	好(s_1)	一般(s_2)	差(s_3)
	0.25	0.30	0.45
生产(a_1)	15	1	-6
不生产(a_2)	0	0	0

为了得到更可靠的信息,公司打算花费 0.6 万元请咨询公司代为进行市场调查.在咨询之前,该公司根据以往市场调查情况进行分析,给出了在市场销售状态为已知的条件下市场需求状况好、中、差的概率如表 8.21 所示.

表 8.21

X \ S	好(s_1)	一般(s_2)	差(s_3)
好(x_1)	0.70	0.30	0.10
中(x_2)	0.20	0.50	0.15
差(x_3)	0.10	0.20	0.75

试作出最优决策和计算 EVSI,并回答花费 0.6 万元请咨询公司调查是否合算.

第 9 章　随机服务系统模型

9.1　引　　言

随机服务系统理论是研究由顾客、服务机构及其排队现象所构成的一种排队系统的理论,又称排队论.排队是一种经常遇见的非常熟悉的现象.它每天以这样或那样的形式出现在我们面前.例如,顾客到自选商场购物、乘客乘电梯上班、汽车通过大桥收费站等,往往需要排队等待接受某种服务.这里,商场收款台、电梯、大桥收费站及其服务人员都是服务机构.而乘客和汽车与商店的顾客一样,统称为顾客.在随机服务系统中,各种形式的顾客和提供各种形式服务的服务机构(服务员与服务台)是主要的实体.从表 9.1 可以看出有关随机服务系统实体的一些常见的实例.

表　9.1

顾　客	服务机构	系统服务类型
储户	出纳员或自动柜员机	银行储蓄
飞机	机场跑道	飞机着陆或起飞
电话呼唤	交换台	电话通话
进港货轮	港口码头	卸货或装货
加工工件	工段	工序安排
用户任务	处理机	计算机系统
故障机器	维修工及各种维修设备	机器维护

例如,考察只有一个出纳员工作的储蓄所的情况.这是一个简单的随机服务系统(见图 9.1).在这个系统中,前来存款或取款的顾客按照一定的规律到达储蓄所,若此时出纳员正在服务,则顾客排队等待;若出纳员空闲,则顾客按照先到先服务的规则接受服务.服务完毕后顾客离开该服务系统.

图　9.1

可以看出,在这类系统中,如果要求接受服务的顾客数大大超过服务机构的负荷,则顾客不得不排队等待或取消接受服务.如果要求接受服务的顾客数很少,则服务机构有可能大量空闲.由于顾客的到达时间与服务机构的服务时间在很大程度上呈随机性变化,因此,研究顾客活动与服务机构活动的随机变化规律,实现随机服务系统的系统性能及其运行的最优化,便是随机服务系统模型所要解决的一个主要问题.

随机服务系统模型已广泛应用于各种管理系统.如生产管理、库存管理、商业服务、交通运输、银行业务、医疗服务、计算机设计与性能评价,等等.

9.2 随机服务系统模型的特征

9.2.1 模型结构

随机服务系统的基本结构由四个部分构成:输入过程、服务时间、服务机构和排队规则.

输入过程是指不同类型的顾客按照各种规律来到系统.服务时间是指顾客接收服务的时间规律.服务机构则表明可开放多少服务设备来接纳顾客.排队规则确定到达的顾客按照某种一定的次序接受服务.

1. 输入过程

常见的输入过程有定长输入、泊松输入(或称最简单流)、埃尔朗输入等,其中泊松输入在随机服务系统中的应用最为广泛.所谓泊松输入即满足以下4个条件的输入:

(1) 平稳性:在某一时间区间内到达的顾客数的概率只与这段时间的长度和顾客数有关;

(2) 无后效性:不相交的时间区间内到达的顾客数是相互独立的;

(3) 普通性:在同一时间点上最多到达1个顾客,不存在同时到达2个以上顾客的情况;

(4) 有限性:在有限的时间区间内只能到达有限个顾客,不可能有无限个顾客到达.

可以证明,对于泊松输入,在长度为 t 的时间内有 k 个顾客到达的概率 $P_k(t)$ 遵从泊松分布,即

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

其中 $\lambda > 0$ 为一常数,代表顾客平均到达率.而 λt 则是时间间隔 t 内平均到达的顾客数.

令第 i 个顾客到达的时刻为 T_i($i = 1, 2, \cdots$),$T_0 = 0$,并令相继顾客到达的时间间隔为 $t_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots$,则有

$$P\{t_1 > t\} = P\{\text{在时间区间}[0, t]\text{内到达顾客数为 }0\} = p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

$$\begin{aligned} P\{t_2 > t \mid t_1 = s\} &= P\{\text{在时间区间}(s, s+t]\text{内到达顾客数为 }0 \mid t_1 = s\} \\ &= P\{\text{在时间区间}(s, s+t]\text{内到达顾客数为 }0\} \\ &= p_0(t) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

可见,t_1 与 t_2 都具有均值为 $1/\lambda$ 的负指数分布且它们互相独立.

同样地,对于 $n \geq 2$ 有

$$\begin{aligned} & P\{t_n > t \mid t_1 = s_1, t_2 = s_2, \cdots, t_{n-1} = s_{n-1}\} \\ = & P\{\text{在}(s_1 + \cdots + s_{n-1}, s_1 + \cdots + s_{n-1} + t]\text{内到达顾客数为 }0\} \\ = & p_0(t) = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

于是,可以得到如下结论:相继顾客到达的时间间隔 t_i($i = 1, 2, \cdots$)是独立同分布的随机变量,其分布函数为负指数分布

$$A(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

2. 服务时间

顾客接受服务的时间规律往往也是通过概率分布描述的. 常见的服务时间分布有定长分布、负指数分布和埃尔朗分布. 一般来说, 简单的随机服务系统的服务时间往往服从负指数分布, 即每位顾客接受服务的时间是独立同分布的, 其分布函数为

$$B(x)=\begin{cases}1-e^{-\mu x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中 $\mu>0$ 为一常数, 代表单位时间的平均服务率. 而 $1/\mu$ 则是平均服务时间.

3. 服务机构

服务机构的主要属性是服务台的个数. 其类型有: 单服务台、多服务台. 多服务台又分并联、串联和混合型三种. 最基本的类型为多服务台并联(见图 9.2(a)).

图 9.2

4. 排队规则

排队规则可分为三类: 损失制、等待制、混合制.

(1) 损失制: 顾客到达时, 如果所有服务台都没有空闲, 该顾客就随即从系统消失.

(2) 等待制: 顾客到达时, 如果所有服务台都没有空闲, 他们就排队等待. 等待服务的次序又有各种不同的规则: ①先到先服务, 如排队购物、排队理发等; ②后到先服务, 如分发堆积的物品, 后进仓的先发; ③随机服务, 当服务台得空时, 随机地挑选等待的顾客进行服务, 如电话交换台; ④优先权服务, 如医院处理急症病人.

(3) 混合制: 既有等待又有损失的情况, 如顾客等待时考虑排队的队长、等待时间的长短等因素而决定去留.

9.2.2 模型分类

随机服务系统模型主要可以由输入过程(顾客到达时间间隔分布)、服务时间分布、服务台个数特征来描述. 根据这些特征, 可用符号进行分类, 用以表示不同的模型. 例如, 利用一定的符号规则将上述特征按顺序用符号列出, 并用竖线隔开, 即

输入过程|服务分布|服务台个数

表示输入过程和服务分布的常用符号有:

M —— 输入过程为泊松输入, 或服务时间为负指数分布.

D —— 定长分布.

G —— 服务时间为一般分布, 即一般服务分布.

E_k —— k 阶埃尔朗分布.

例如, M|M|S 表示输入过程为泊松输入、服务时间服从负指数分布、S 个服务台的随机

服务系统模型. $M/G/1$ 则表示泊松输入、一般服务分布、单个服务台的随机服务系统.

9.2.3 模型的主要数量指标

评价和优化随机服务系统, 需要通过一定的数量指标来反映. 建立随机服务系统模型的主要数量指标有三个: 等待时间、忙期与队长.

1. 等待时间

等待时间系指顾客从到达系统时起到开始接受服务时止这一段时间. 显然顾客希望等待时间越短越好. 用 W_q 表示顾客在系统中的平均等待时间. 若考虑到服务时间, 则用 W_s 表示顾客在系统中的平均逗留时间(包括等待时间和服务时间).

2. 忙期

忙期系指服务台连续繁忙的时间长度. 该指标反映服务台的工作强度和利用程度. 用 B 表示忙期的平均长度. 与忙期相应的是闲期, 闲期是指服务台一直空闲的时间长度. 用 I 表示闲期的平均长度.

3. 队长

队长系指系统中的顾客数(包括排队等候的和正在接受服务的所有顾客). 用 L_s 表示平均队长. 若不考虑正在接受服务的顾客, 则将系统中排队等候的顾客数称为队列长. 用 L_q 表示平均队列长.

此外, 为了反映服务效率和服务台的利用率, 还给出一个非常有用的系统性能度量指标——服务强度, 用 ρ表示. 其值为有效的平均到达率与平均服务率之比, 即 $\rho=\lambda/\mu$

9.3 M/M/1 模型

$M/M/1$ 模型是输入过程为泊松输入, 服务时间为负指数分布并具有单服务台的等待制随机服务系统模型. 这是最简单的随机服务系统模型. 为研究方便, 假定系统的顾客源和容量都是无限的, 顾客单队排列, 排队规则是先到先服务.

研究这一模型, 首先需求出系统在任意时刻 t 状态为 n(即系统中有 n 个顾客)的概率 $P_n(t)$. 在初始状态下, $P_n(t)$ 并不稳定. 但当系统已运行无限长的时间以后, 初始状态的影响就会消失, 系统将达到稳定状态, $P_n(t)$亦趋于平稳. 这就是说, 当 $t\to\infty$ 时, $P_n(t)\to P_n$ 且与 t 无关. 此时, 称系统处于统计平衡状态, 并称 P_n 为统计平衡状态下的稳态概率.

利用随机过程的知识可以得出, 在统计平衡状态下, 系统的稳态概率为

$$\begin{cases} P_0 = 1-\rho & \rho<1 \\ P_n = (1-\rho)\rho^n & n = 1,2,\cdots \end{cases} . \tag{9.1}$$

下面将给出系统的几个主要指标.

(1) 在系统中的平均顾客数(平均队长) L_s

$$L_s=\sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}\ (0<\rho<1) .$$

即
$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \tag{9.2}$$

(2) **在队列中等待的平均顾客数(平均队列长)** L_q

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum_{n=1}^{\infty}P_n=L_s-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

即
$$L_q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\rho L_s. \tag{9.3}$$

(3) **顾客在系统中平均逗留时间** W_s

由于顾客在系统中逗留时间服从参数为 $\mu-\lambda$的负指数分布, 所以, 在系统中顾客平均逗留时间为

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}. \tag{9.4}$$

(4) **顾客在队列中平均等待时间** W_q

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}. \tag{9.5}$$

(5) **闲期的平均长度** I

由于顾客到达的时间间隔服从参数为 λ的负指数分布, 所以, 闲期的平均长度为

$$1=\frac{1}{\lambda}. \tag{9.6}$$

(6) **忙期的平均长度** B

$$B=\frac{P(n\geq 1)}{P_0}I=\frac{1-P_0}{P_0}\frac{1}{\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}. \tag{9.7}$$

例 1 **某电脑营业部配有一位专业维修人员, 负责电脑的维修工作. 已知每天平均有** 6 **台电脑前来维修, 每台平均维修时间为** 1 **小时. 维修的电脑按泊松分布到达, 服务时间服从负指数分布, 每天按** 8 **小时计, 试求: ①维修工作空闲的概率; ②营业部有两台受损坏电脑的概率; ③营业部至少有** 1 **台受损坏电脑的概率; ④营业部逗留的受损坏电脑的平均台数; ⑤受损坏电脑在营业部的平均逗留时间; ⑥营业部等待维修的电脑平均台数; ⑦待维修电脑的平均等待时间; ⑧营业部忙期的平均长度.**

解 **由已知,** $\lambda=6/8=0.75$ **台/小时,** $\mu=1$ **台/小时,** $\rho=0.75/1=0.75$.

① **营业部没有维修的电脑的概率为**

$$P_0=1-\rho=1-0.75=0.25.$$

即维修人员有 25% **的时间空闲.**

② **营业部有两台受损坏电脑的概率为**

$$P_2=\rho^2(1-\rho)=0.14.$$

③ **车间里至少有** 1 **台受损坏电脑的概率为**

$$P=P(n\geq 1)=1-P_0=1-(1-\rho)=0.75.$$

即有 75% **的时间, 营业部至少有** 1 **台受损坏电脑.**

④ **营业部逗留的受损坏电脑的平均台数为**

$$L_s=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{0.75}{0.25}=3\,(\text{台}).$$

⑤ **受损坏电脑在营业部的平均逗留时间为**

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{3}{0.75}=4\ (\text{小时}).$$

⑥ 营业部等待维修的电脑平均台数为

$$L_q=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}=\rho L_s=0.75\times 3=2.25\ (\text{台}).$$

⑦ 待维修电脑的平均等待时间为

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{2.25}{0.75}=3\ (\text{小时}).$$

⑧ 营业部忙期的平均长度

$$B=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{1-0.75}=4\ (\text{小时}).$$

9.4 M/M/C 模型

M/M/C ($C\geq 2$) 是多服务台的等待制随机服务系统, 它的各种特征的规定和假设与 M/M/1 模型基本相同. 并假定 C 个服务台并联排列, 各服务台独立工作, 其平均服务率相同, 即 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_C=\mu$. 因此, 该系统的平均服务率为 $C\mu$.

在统计平衡状态下, 服务强度 $\rho=\frac{\lambda}{C\mu}<1$. 此时, 系统的稳态概率为

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C\frac{C\mu}{C\mu-\lambda}\right]^{-1}. \tag{9.8}$$

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n\leq C\\[2ex] \dfrac{1}{C!\,C^{n-C}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n>C\end{cases}. \tag{9.9}$$

由此可得, 系统的主要指标为:

(1) 平均队列长 L_q

$$\begin{aligned}L_q&=\sum_{n=C+1}^{\infty}(n-C)P_n=\sum_{n=C+1}^{\infty}(n-C)\frac{C^C}{C!}\rho^n P_0\\&=\frac{C^C}{C!}P_0\rho^{C+1}\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1}=\frac{(C\rho)^C}{C!(1-\rho)^2}\rho P_0.\end{aligned} \tag{9.10}$$

(2) 平均队长 L_s

$$L_s=L_q+C\rho. \tag{9.11}$$

(3) 顾客在队列中平均等待时间 W_q

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}. \tag{9.12}$$

(4) 顾客在系统中平均逗留时间 W_s

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=W_q+\frac{1}{\mu}. \tag{9.13}$$

同时, 由 $P_C=\frac{(C\rho)^C}{C!}P_0$,

可得

$$L_q=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}P_C,\qquad L_s=C\rho+\frac{\rho}{(1-\rho)^2}P_C,$$

$$W_q=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2}P_C,\qquad W_s=\frac{1}{\mu}+\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)^2}P_C.$$

例 2 某储蓄所有 2 个储蓄柜台, 顾客平均到达率为每小时 14 人, 每个柜台的平均服务率为每小时 10 人. 已知顾客按泊松输入到达, 服务时间服从负指数分布, 试求 P_0, L_q, L_s, W_q, W_s.

解 由已知, $C=2$, $\lambda=14$, $\mu=10$, $\rho=14/(2\times10)=0.7$. 则

① 储蓄柜台空闲的概率 P_0 为

$$P_0=\left[\frac{1}{0!}\times(1.4)^0+\frac{1}{1!}\times(1.4)^1+\frac{1}{2!(1-0.7)}(1.4)^2\right]^{-1}$$

$$=(5.6667)^{-1}=0.1765.$$

② 等待存取款的顾客平均队列长 L_q 为

$$L_q=[2!2\times(1-0.7)^2]^{-1}\times(1.4)^3\times0.1765=1.3453.$$

③ 储蓄所平均顾客数 L_s 为

$$L_s=1.3453+1.4=2.7453.$$

④ 顾客平均等待时间 W_q 为

$$W_q=1.3453/14=0.0961\ (\text{小时}).$$

⑤ 顾客平均等待时间 W_s 为

$$W_s=2.7453/14=0.1961\ (\text{小时}).$$

例 3 某露天矿山, 矿车按泊松流到达, 平均每小时到达 15 辆. 卸车时间服从负指数分布, 平均卸车时间为 3 分钟. 每辆矿车售价 8 万元, 每建设 1 个卸位需投资 14 万元, 试问建设多少个卸位合理?

解 由题设, $\lambda=15$ 辆/小时, $\mu=20$ 辆/小时.

① 若建设 1 个矿山卸位, 则为 M/M/1 模型, 其服务强度 ρ 为

$$\rho=15/20=0.75.$$

卸位空闲概率为

$$P_0=1-\rho=0.25.$$

系统内矿车的平均数为

$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.75}{0.25}=3\ (\text{辆}).$$

② 若建设 2 个卸位时, 则为 M/M/2 模型, 其服务强度 ρ 为

$$\rho=\frac{\lambda}{2\mu}=\frac{15}{2\times20}=0.375.$$

卸位空闲概率为

$$P_0=\left[1+0.75+\frac{1}{2!}(0.75)^2\frac{1}{1-0.375}\right]^{-1}=0.45.$$

所以, 系统内矿车的平均数为

$$L_s=\frac{(2\times0.375)^2}{2(1-0.375)^2}\times0.375\times0.45+\frac{15}{20}=0.87\ (\text{辆}).$$

③ 若建设 3 个矿山卸位时, 则为 M/M/3 模型, 其服务强度 ρ 为

$$\rho=\frac{\lambda}{3\mu}=\frac{15}{3\times 20}=0.25.$$

卸位空闲概率为

$$P_0=\left[1+C\rho+\frac{1}{2!}(C\rho)^2+\frac{(C\rho)^3}{3!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

$$=(1+0.75+0.28+0.09)^{-1}=0.47.$$

所以, 系统内矿车的平均数为

$$L_s=\frac{(3\times 0.25)^3}{3!(1-0.25)^2}0.25\times 0.47+0.75=0.765\text{(辆)}.$$

由上述指标看出, 建设两个卸位比建设 1 个卸位可缩小系统内的矿车数 3- 0.87= 2.13, 即平均可增加 2.13 辆车执行运矿任务, 相当于 14 万元的投资换回 2.13× 8 万= 17.04万元的运输设备. 因此, 建设两个比建设 1 个卸位合理. 而建设 3 个卸位比 2 个卸位缩小系统内的矿车数为 0.87- 0.765= 0.105(辆), 即增加 1 个卸位后平均可增加 0.105 辆车执行运矿任务, 相当于 14 万元的投资只能换回 0.105× 8= 0.84 万元的运输设备, 显然建设 3 个卸位是不合算的. 所以, 该矿山建设 2 个矿山卸位最为合理.

9.5 随机服务系统模拟

所谓随机服务系统模拟, 与存储系统模拟类似, 就是利用计算机对一个客观复杂的随机服务系统的结构和行为进行动态模拟, 以获得系统或过程的反映其本质特征的数量指标结果, 进而预测、分析或评价该系统的行为效果, 为决策者提供决策依据.

由于随机服务系统研究对象行为特征的随机性在许多情况下可以利用适当的理论分布来描述, 因此, 进行计算机模拟的一个重要步骤是利用计算机产生一定理论概率分布的随机变量. 像经验分布的随机数一样, 这些随机变量可以通过[0, 1]上均匀分布的随机数获得.

下面介绍如何借助[0, 1]上均匀分布的随机数利用变换获得其他常用的分布.

1. 一般独立输入或一般服务分布

由逆变换法, 立即可由[0, 1]上均匀分布随机数 u 得到具有一般分布函数 $A(t)$ 的随机数 x, 只要 A 存在逆函数 A^{-1}. 事实上, 取

$$x=A^{-1}(u),\tag{9.14}$$

即可.

2. 负指数分布

负指数分布

$$B(t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\tag{9.15}$$

的逆函数为 $B^{-1}(s)=-\frac{1}{\mu}\ln(1-s)$. 故由式(9.14)得

$$x=-\frac{1}{\mu}\ln(1-u),\quad \text{或}\quad x=-\frac{1}{\mu}\ln u.\tag{9.16}$$

即为具有负指数分布(9.15)的随机数, 其中 u 为[0, 1]上均匀分布的随机数.

3. 泊松输入

输入过程为泊松输入的充分必要条件是: 相继顾客到达间隔 ξ_1, ξ_2, …为相互独立且相同分布的随机变量, 并且其分布函数为负指数分布(9.15). 据此, 只需产生一系列相互独立, 并具有相同负指数分布的随机数 $x_1, x_2, \cdots$, 则 $x_1, x_2, \cdots$ 就是泊松输入中相继顾客到达间隔, 因而 $x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \cdots$ 就是相继顾客到达时刻. 当然, 这些 $x_1, x_2, \cdots$ 都能根据(9.16)产生.

4. 埃尔朗分布 E_k

可以证明: 密度为

$$\frac{\mu(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t},\quad t\geq 0 \tag{9.17}$$

的埃尔朗分布 E_k 的随机变量等于 k 个相互独立的具有相同负指数分布(9.15)的随机变量的和. 因此, 只需根据(9.16)产生 k 个相互独立的随机数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 则 $x=x_1+x_2+\cdots+x_k$ 就是具有埃尔朗分布密度(9.17)的随机数.

5. 正态分布

由中心极限定理可知: 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是相互独立、均匀分布的随机变量, 则对充分大的 n, 随机变量

$$\xi=\sqrt{\frac{12}{n}}\left(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n-\frac{n}{2}\right), \tag{9.18}$$

近似地服从标准正态分布. 一般可取 $n\geq 12$.

再由线性变换

$$\eta=a+\sigma\xi \tag{9.19}$$

即可得到均值为 a, 方差为 σ^2 的正态分布随机变量.

结合(9.18)与(9.19)式, 便得到产生均值为 a, 方差为 σ^2 的正态分布随机数的公式:

$$x=a+\sigma\sqrt{\frac{12}{n}}\left(u_1+u_2+\cdots+u_n-\frac{n}{2}\right). \tag{9.20}$$

式中 u_i, $i=1,2,\cdots,n$ 为相互独立的[0,1]上均匀分布的随机数.

在存储系统模拟中, 模拟的过程是一个单位时间接一个单位时间地连续进行, 如一分钟接一分钟、一天接一天、一年接一年地连续进行. 这种模拟方法称为等步长法. 在随机服务系统模拟中, 将采用一种非等步长步进的方法. 这一方法是以事件的发生推进模拟的进程. 模拟中的每一次步长是相继两个事件出现的间隔时间. 这种模拟方法称为事件步长法. 下面运用事件步长法分析和模拟一个比较典型的随机服务系统.

假定所考察的随机服务系统有 m 个并联的服务台, 顾客按一定的输入过程陆续到来. 当顾客到达时, 如果至少有一个服务台空着, 该顾客就由空着的服务台中号码最小的那个接纳服务. 如果说所有的服务台都已经在进行服务, 则顾客排成一个队, 等待服务台得空后按到达先后次序陆续接受服务. 各个服务台的服务时间相互独立, 各有其分布. 再假定初始时刻所有服务台均空着. 令 L_j 表示第 j 个顾客到达时看到的系统中的顾客数(包括正在服务的和排队等待的), 我们希望求出诸 L_j 的平均值.

假定模拟的总时间为 Time. 在模拟过程中, 需要采用下列存储单元做记录:

A: 正在考察的顾客的到达时刻或下一个顾客的到达时刻;

B_i($i=1, 2, \cdots, m$) : 第 i 个服务台某次服务的开始时刻或结束时刻(当第 i 个服务台正在服务时, 记该次服务结束的时刻; 当第 i 个服务台空闲时, 记入模拟的总时间 Time) ;

C_i($i=1, 2, \cdots, m$) : 第 i 个服务台正在服务时取值为 1, 空闲时取值为 0;

L : 队列长;

TL: 各顾客到达时看到的系统中的队长 $L_1, L_2, \cdots$的累加值, 最后记它们的平均值;

N : 模拟过程中已经考察过的顾客总数;

T : 系统当前模拟时刻.

现列出模拟框图如图 9. 3.

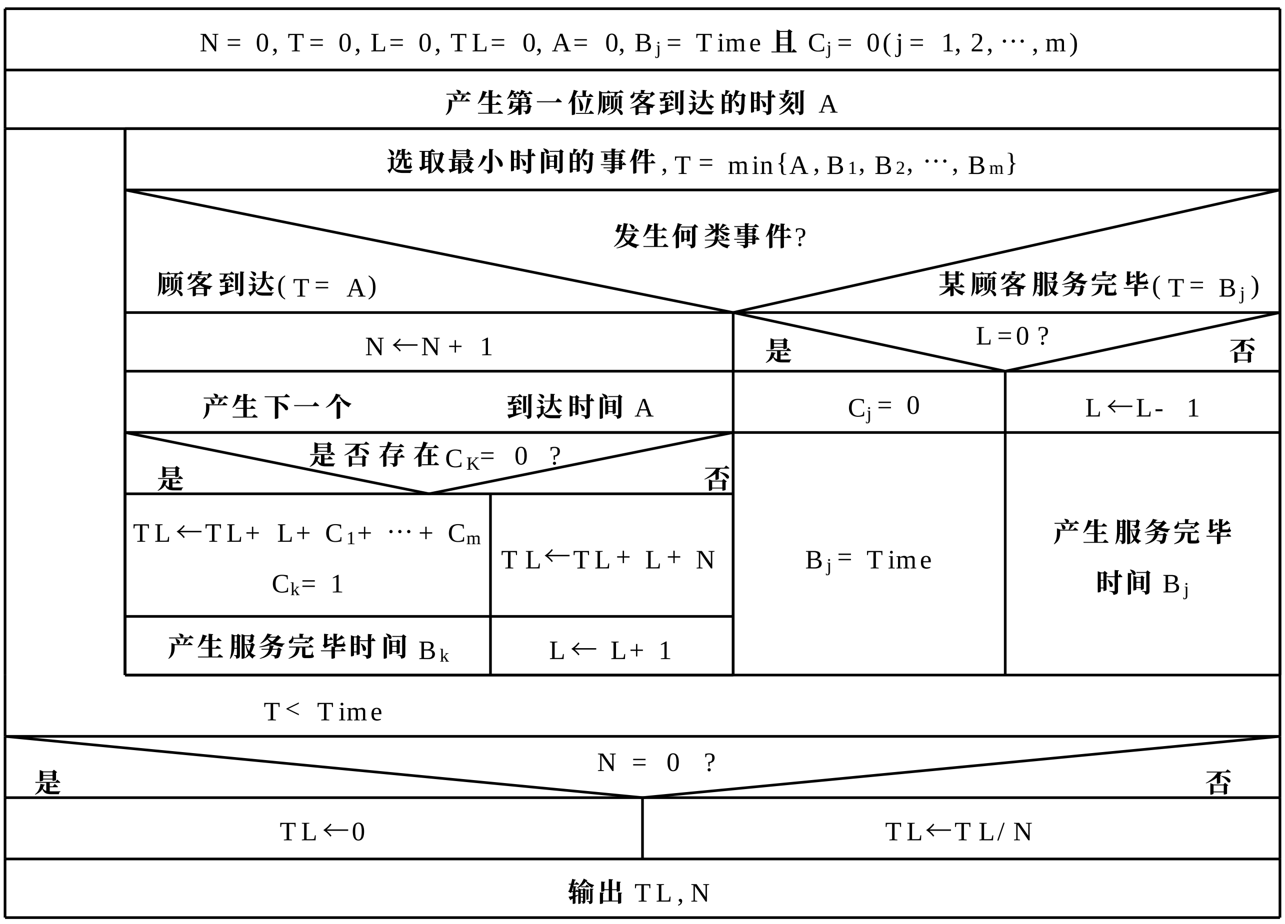

图 9. 3　随机服务系统模拟

9. 6　应 用 实 例

应用实例: 在某露天矿的开采中, 用电铲进行采掘, 然后用卡车将采得的矿石拉到卸场. 设有 n 台电铲同时采掘. 有 m 辆卡车进行运载($m > n$) , 电铲的采掘能力与卡车的载重量都是已知的. 还设卸场有 s 个卸位($s \leq m$) , 可供 s 辆卡车同时卸车.

装运过程以班为单位, 每班一开始, m 辆卡车中的某 n 辆分别由 n 台电铲装车, 其他的 $m - n$ 辆排成一队, 处于待装状态. 当某辆卡车装完驶出后, 待装卡车中队首者即驶到空闲电铲前, 掉转车头(这段时间称为入换时间) , 接受装载, 而刚才已装完驶出的重车则运行到卸场卸载, 抵达卸场后也需要掉转车头, 进行入换, 然后卸装, 卸完后又重新驶回采掘场, 排在待装卡车的队尾, 再次等待装载(见图 9. 4) .

可以看出, 电铲台数、卡车辆数与卸位个数之间需要有一个适当的匹配关系, 否则就会在采掘场或卸场造成忙闲不均的现象, 影响电铲、卡车或卸位的效率的充分发挥.

为简单计, 我们只考虑 1 个电铲($n = 1$)、1 个卸位($s = 1$) 的情形, 在此情形下研究卡

图 9.4 露天矿随机服务系统

车车辆数 m 应该等于多少. 一般情形, 可如法施实.

现将装运过程看作 1 个随机服务系统, 此系统共分四级:

(1) 第Ⅰ级为装车服务系统. 假定相继的服务时间相互独立, 并具有相同的正态分布, 记其均值为 a, 方差为 σ^2(此处及以下关于分布类型的假定都是由实测决定的. 对其他类型的分布问题完全类似处理).

(2) 第Ⅱ级为重车运行服务系统. 此系统包括 m 个服务台, 也就是说, 可以保证所有卡车同时进入重车运行服务系统进行服务, 不需等待. 假定各个服务台的服务时间(重车运行时间)均为常数 r_1.

(3) 第Ⅲ级为卸车服务系统. 此系统只有 1 个服务台. 假定相继的服务台时间相互独立、相同分布, 且为两部分之和, 第一部分为入换时间, 是一常数 C; 第二部分为卸车时间, 是负指数分布, 其均值为 μ^{-1}.

(4) 第Ⅳ级为空车运行服务系统. 此系统包括 m 个服务台. 假定各个服务台的服务时间即空车运行时间与装车前的定长入换时间之和均为常数 r_2.

将 m 辆卡车看作 m 个顾客, 他们依次接受四级服务, 并不断循环运行.

还假定四级系统都是等待制的, 先到先服务, 各级服务时间都相互独立, 对于Ⅱ, Ⅳ两级系统, 由于服务台数目足够供全体顾客同时服务, 因而自然就不存在排队等待现象.

最后, 再对卡车的装载量作如下的假定: 假定每辆车的装载量都相互独立, 并具有相同参数的正态分布, 其均值为 b, 方差为 δ^2.

现在引进刻画系统特征的几个数量指标:

① 电铲效率 f:

$$f \equiv 1 - \frac{F}{T}.$$

其中 T 为考察的总时间(比如为 20 个班, 每班以 6 小时计); F 为在总时间 T 内, 由于没有卡车装载, 而使电铲闲置的时间的总和.

② 每辆卡车的平均效率 u:

$$u \equiv 1 - \frac{U + V}{mT}.$$

其中 U 为在总时间 T 内, 采掘场上所有待装卡车的等待时间的总和, V 为在总时间 T 内, 卸场上所有待卸卡车的等待时间的总和, m 为卡车总数.

③ 平均班产量 q:

$$q \equiv \frac{Q}{H}.$$

其中 Q 为在总时间 T 内,所有卡车卸载量的总和, $H=\frac{T}{6}$ 为总时间 T 折成的总班数. 利用模拟,算出这些数量指标的具体数值,以此为根据,就能决定电铲、卡车、卸位的合适的匹配数目.

以班为单位进行模拟,对每个顾客(卡车),考察它在各级服务系统中服务完毕的时刻,并用两个存储单元作记录.

单元 A[i]中记录第 i 个顾客(i = 1, 2, …, m)在模拟过程中正被考察的时刻. 例如,正考察第 i 个顾客在第 I 系统中服务完毕(装完车),则 A[i]中就送入第 I 系统服务完毕的时刻.

单元 C[i]中记录第 i 个顾客(i= 1, 2, …, m)在模拟过程中正被考察的时刻所处的状态,这里状态有四个可能值;状态 0, 1, 2, 3 分别表示顾客已进入第 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ系统.

再用 5 个单元 J_1, J_2, D, G 与 H.

单元 J_1 中放最小时刻 $\min\limits_{1\le i\le m}(A[i])$.

单元 J_2 中放上述最小时刻对应的顾客的最小号码. 例如,当 $A[3]=A[5]=A[8]=\min\limits_{1\le i\le m}(A[i])$,但 $A[1]\ne\min\limits_{1\le i\le m}(A[i])$, $A[2]\ne\min\limits_{1\le i\le m}A([i])$,则 J_2 中就送入 3.

单元 D 中放第 I 系统的服务台得空,可以开始下一服务的时刻.

单元 G 中放第Ⅲ系统的服务台得空,可以开始下一服务的时刻.

单元 H 中放已经模拟过的班数.

于是可画出模拟框图,如图 9.5 所示.

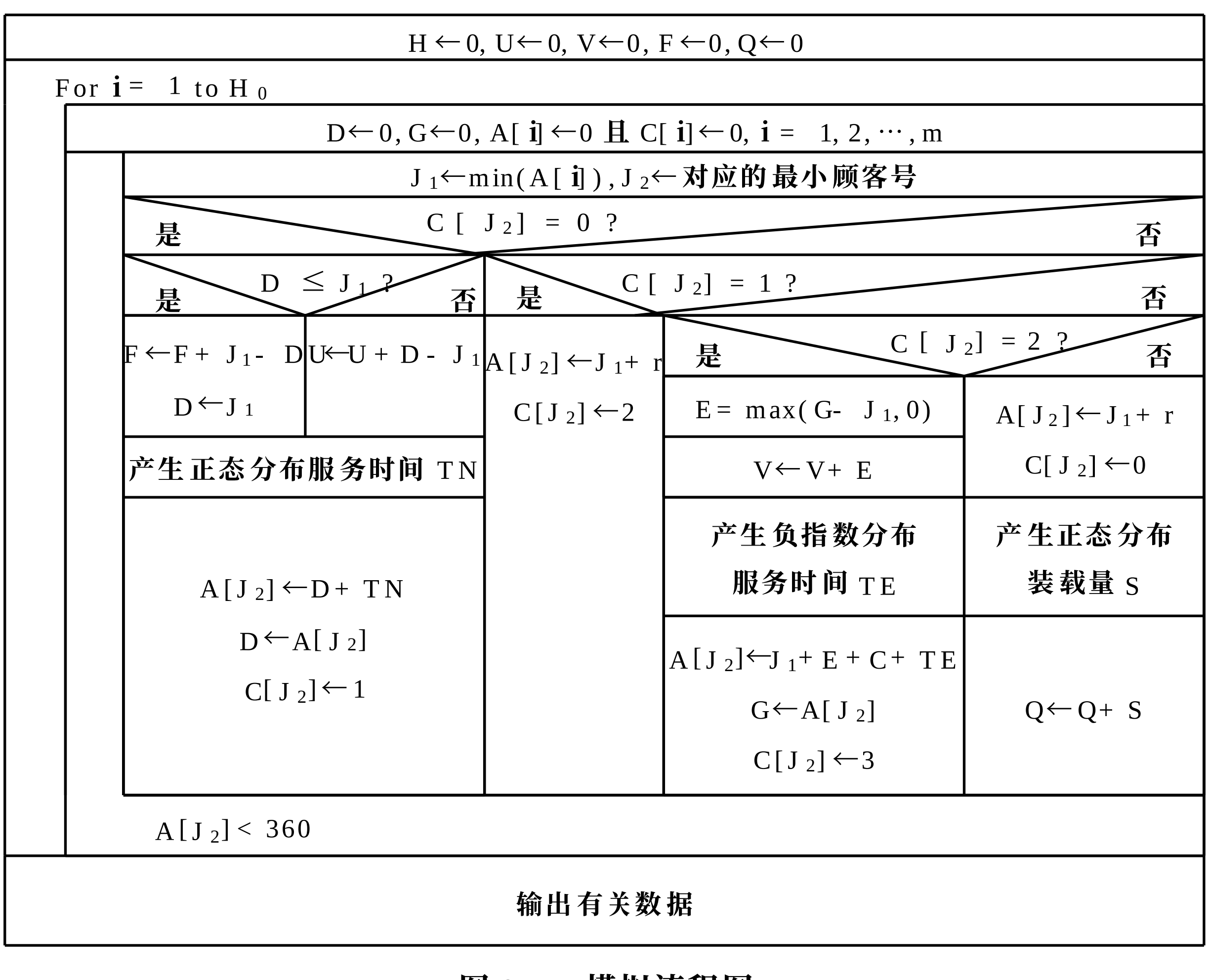

图 9.5 模拟流程图

习　　题

9.1　某修理店只有 1 个修理工, 来修理东西的顾客到达次数服从泊松分布, 平均每小时 4 人. 修理时间服从负指数分布, 平均需 6 分钟. 求: ①修理店空闲时间的概率; ②店内有 3 个顾客的概率; ③店内顾客平均数; ④店内等待顾客平均数; ⑤顾客在店内平均逗留时间; ⑥平均等待修理时间.

9.2　对 $M/M/1$ 的排队模型, 根据下列等式右侧的表达式分别解释 θ的含义:

① $\theta=\lambda/\mu$; ② $\theta=P\{n>0\}$; ③ $\theta=L_s-L_q$; ④ $\theta=W_q/W_s$.

9.3　汽车平均以每 5 分钟一辆的到达率去某加油站加油, 到达过程为泊松过程. 该加油站只有一台加油设备, 加油时间服从负指数分布, 且平均需要 4 分钟. 求: ①加油站内平均汽车数; ②每辆汽车平均等待加油时间; ③汽车等待加油时间超过 2 分钟的概率.

9.4　在 9.2 题中, 若每辆汽车平均等待加油时间减少至 2 分钟以下, 则加油站还需增加几台加油设备? 在增加设备的情况下, 整个加油站没有汽车加油的概率是多少?

9.5　某公用电话站有一台电话机, 打电话的人按泊松分布到达, 平均每小时 24 人, 假定每次电话的通话时间服从负指数分布, 平均为 2 分钟, 求该系统以下各项指标: P_0, L_q, L_s, W_q, W_s. 又若打电话的人到达情况与通话时间的概率分布均不变, 而电话机增加到两台时, 系统的以上各项指标又有什么变化?

9.6　某商店收款台有 3 名收款员, 顾客到达率为每小时 504 人, 每名收款员服务率为每小时 240 人, 设顾客到达为泊松输入, 收款服务时间服从负指数分布. 求解 P_0, L_q, L_s, W_q, W_s.

9.7　设 $\lambda=10$/小时, $\mu=15$/小时, 模拟一个 $M/M/1$ 随机服务系统. 通过模拟求出 L_s 和 L_q.

9.8　模拟有两位营业员工作的储蓄所一天 8 小时的业务情况. 前来办理存款或取款的顾客按照一定的统计规律到达储蓄所(顾客到达的时间间隔服从平均到达为 10 分钟的指数分布). 顾客按先到先服务的规则接受服务. 营业员对每一顾客的服务时间服从均值为 10 分钟、均方差为 2 分钟的正态分布. 通过模拟求出一天之内接受服务的顾客总数以及各顾客到达时看到的系统中顾客平均数(包括正在服务的和排队等待的顾客).

第 10 章　多目标决策模型

10.1　引　　言

前面讨论的模型都只涉及单目标的问题,而在现实活动中,决策的目标却往往有许多个.例如,对企业产品的生产管理,既希望达到高利润,又希望优质和低消耗,还希望减少对环境的污染等.这就是一个多目标决策的问题.又如选购一个好的计算机系统,似乎只有一个目标,但由于要从多方面去反映,要用多个不同的准则来衡量,比如,性能要好,维护要容易,费用要省.这些准则自然构成了多个目标,故也是一个多目标决策问题.一般来说,多目标决策问题有两类.一类是多目标规划问题,其对象是在管理决策过程中求解使多个目标都达到最满意结果的最优方案.另一类是多目标优选问题,其对象是在管理决策过程中根据多个目标或多个准则衡量和得出各种备选方案的优先等级与排序.

多目标决策由于考虑的目标多,有些目标之间又彼此有矛盾,这就使多目标问题成为一个复杂而困难的问题.但由于客观实际的需要,多目标决策问题越来越受到重视,因而出现了许多解决此类问题的方法.一般来说,其基本途径是,把求解多目标问题转化为求解单目标问题.其主要步骤是,先转化为单目标问题,然后利用单目标模型的解法,求出单目标模型的最优解,以此作为多目标问题的解.

化多目标问题为单目标问题的方法大致可分为两类,一类是转化为一个单目标问题;另一类是转化为多个单目标问题,关键是如何转化.这方面已有不少方法.本章介绍几种常用的主要模型和方法.

多目标决策模型的应用很广泛.其主要方面有:国家发展战略规划、地区发展规划、企业经营管理、工程项目管理、交通运输管理、科研管理、环境保护与管理、工程设计与工艺设计、公共事业规划、军事国防事业等.

10.2　多目标决策的数学模型

10.2.1　多目标决策问题的特征

在解决单目标决策问题时,我们的任务是选择一个或一组变量 X,使目标函数 $f(X)$ 取得最大(或最小)值.对于任意两个方案所对应的解,只要比较它们相应的目标值,就可以判定谁优谁劣.但在多目标情况下,问题却不那么单纯了.例如,有两个目标 f_1 和 f_2,希望它们都越大越好.图 10.1 列出在这两个目标下共有 8 个解的方案.其中方案 1 与方案 2无法比较,因为方案 1 的指标 f_2 比方案 2 的高,但方案 1 的指标 f_1 却比方案 2 的低.因而无法直接判断它们的优劣.可是如果拿它们和方案 6 比较,则两个指标都不如方案 6,就这 3 个方案而言,可以淘汰方案 1 与 2.而方案 3 和 4 与方案 6 相比,则由于方案 3 和方案 4 在各项指标上都不比方案 6 好,而且至少有一项指标还比方案 6 差,因此,也可以淘汰掉方案 3 和方案

图 10.1

4. 把这样可以淘汰掉的解称为劣解. 而余下方案 5, 6, 7, 8 这几个方案的特点是, 它们中间的一个与其余任何一个相比, 总有一个指标更优越, 而另一个指标却更差. 像这样的解, 既不会被淘汰掉, 又不是全面优越于其他解, 称之为非劣解(或有效解). 这种非劣解在多目标决策中起着非常重要的作用. 决策者将根据自己的偏好、意愿和一定的最优原则, 从多个非劣解中选择出一个满意解作为其理想的实施方案. 在这里, 满意解就是某种意义下的"最优解".

10.2.2 多目标决策问题的模型结构

多目标决策问题包含有三大要素: 目标、方案和决策者.

在多目标决策问题中, 目标有多层次的含义. 从最高层次来看, 目标代表了问题要达到的总目标. 如确定最满意的投资项目、选择最满意的食品. 从较低层次来看, 目标可看成是体现总目标得以实现的各个具体的目标, 如投资项目的盈利要大、成本要低、风险要小; 目标也可看成是衡量总目标得以实现的各个准则, 如食品的味道要鲜、质量要好、花费要少.

多目标决策问题中的方案即为决策变量, 亦称为多目标决策问题的解. 备选方案即决策问题的可行解. 在多目标决策中, 有些问题的方案是有限可数的, 而有些则是无限可数或不可数的. 方案有其特征或特性, 称之为属性. 方案的属性有两类. 一类即准则, 因而也是目标属性, 如食品的价格等. 一类则与目标属性不同, 但往往与备选方案的约束条件有关, 如食品中维生素 A 的含量等.

决策者则是提出和解决问题并使方案付诸实施的个人或团体. 决策者的愿望、需求和偏好影响着整个多目标决策问题的形成和解决. 决策者的作用是非常重要的.

由于多目标决策问题分为多目标规划问题和多目标优选问题两种类型, 因而其模型结构也可分为两类.

1. 多目标规划问题的模型结构

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为决策变量, 这里, 不同的 x 定义为不同的方案. 方案集(即可行域)为 $X=\{x\in E^n | g_i(x)\geq 0,\ i=1,\cdots,p\}$, 其中 $g_i(x)$ 为第 i 个约束函数. 设 f_j 为第 j 个目标 $(j=1, 2, \cdots, m)$. 于是, 多目标规划问题的模型结构为

$$\operatorname*{opt}_{x\in X} F(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))^T.$$

这里, $m\geq 2$, 且 $x\in X$ 表示决策变量应满足约束集 X.

不妨设多目标规划问题为最大化问题, 即

$$\max_{x\in X} F(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))^T.$$

这时, 解 $x^*\in X$ 在如下各种意义下的定义为:

绝对最优解:若对于任意 $x\in X$,都有 $F(x^*)\geq F(x)$.

有效解:若不存在 $x\in X$,使 $F(x^*)\leq F(x)$.

弱有效解:若不存在 $x\in X$,使 $F(x^*)< F(x)$.

2. **多目标优选问题的模型结构**

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示含有 n 个备选方案的方案组,$f_1,f_2,\cdots,f_m$ 表示 m 个目标属性,$f_i(x_j)$为第 j 个方案在第 i 个属性下的偏好值,则多目标优选问题的模型结构为

$$\max_{x\in X} F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T.$$

也可用多属性效用函数描述该模型结构.设方案的效用 $U(x)$ 是目标属性的函数:$U(x)=U(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.并设 $a_{ij}=f_i(x_j)$,且各个方案的效用函数分别为 $U(x_j)=U(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})$,$j=1,2,\cdots,n$.则有如下多目标优选问题模型结构:

$$\operatorname*{ord}_{x_j\in X} U(x)=(U(x_1),U(x_2),\cdots,U(x_n))^T.$$

其中 ord 表示按照一定的决策规则对备选方案进行比较和排序.

10.3 可化为一个单目标问题的解法

10.3.1 主要目标法

在有些多目标决策问题中,各种目标的重要性程度往往不一样.其中一个重要性程度最高和最为关键的目标,称之为主要目标.其余的目标则为非主要目标.例如,考虑如下多目标决策问题:

$$\begin{aligned}&\max F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^T\\&x\in X\end{aligned}. \tag{10.1}$$

在多目标问题(10.1)中,假定 $f_1(x)$为主要目标,其余 $m-1$ 个目标为非主要目标.这时,希望主要目标达到极大值,并要求其余的目标满足一定的条件,即

$$\max f_1(x)$$

和
$$f_j(x)\geq\alpha_j,\quad j=2,3,\cdots,m.$$

于是,多目标问题(10.1)可转化为如下单目标问题:

$$\begin{aligned}&\max f_1(x)\\&x\in X'\end{aligned}. \tag{10.2}$$

其中 $X'=\{x\mid x\in X,f_j(x)\geq\alpha_j,j=2,3,\cdots,m\}$.

定理 1 单目标问题(10.2)的最优解一定是多目标问题(10.1)的弱有效解.

证明 设 x^* 是(10.2)的最优解,即对于任何 $x\in X'$,都有

$$f_1(x^*)\geq f_1(x). \tag{10.3}$$

因为 $x^*\in X'$,所以 $x^*\in X$.于是 x^* 是问题(10.1)的可行解.

若 x^* 不是(10.1)的弱有效解,则存在某个 $x'\in X$,使

$$f_j(x')>f_j(x^*),\quad j=1,2,\cdots,m. \tag{10.4}$$

因 $x^*\in X'$,所以

$$f_j(x^*)\geq\alpha_j,\quad j=2,3,\cdots,m.$$

于是有

$$f_j(x') \geq \alpha_j,\ j = 2, 3, \cdots, m.$$

这表明 $x' \in X'$, 即 x' 是问题(10.2)的可行解. 由(10.3), 有

$$f_1(x^*) \geq f_1(x'),$$

与(10.4)式矛盾.

例 1 某工厂在一个计划期内生产甲、乙两种产品. 各产品都要消耗 A, B, C 三种不同的资源. 每件产品对资源的单位消耗、各种资源的限量以及各产品的单位价格、单位利润和所造成的单位污染如表 10.1 所示.

表 10.1 生产甲、乙产品的有关数据

	甲	乙	资源限量
资源 A 单位消耗	9	4	240
资源 B 单位消耗	4	5	200
资源 C 单位消耗	3	10	300
单位产品的价格	400	600	
单位产品的利润	70	120	
单位产品的污染	3	2	

假定产品能全部销售出去, 问每期怎样安排生产, 才能使利润和产值都最大, 且造成的污染最小?

解 设 x_1, x_2 分别表示甲、乙两种产品的数量.

该问题有 3 个目标, 即

$$\max f_1(x) = 70x_1 + 120x_2 \text{(利润最大)},$$
$$\max f_2(x) = 400x_1 + 600x_2 \text{(产值最大)},$$
$$\min(-f_3(x)) = 3x_1 + 2x_2 \text{(污染量最小)}.$$

该问题的约束条件为:

$$9x_1 + 4x_2 \leq 240,$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200,$$
$$3x_1 + 10x_2 \leq 300,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

建立该问题的多目标决策模型如下:

$$\begin{aligned} &\max F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T \\ &9x_1 + 4x_2 \leq 240 \\ &4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ &3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}.$$

对于上述模型的 3 个目标, 工厂确定利润最大为主要目标. 另两个目标则通过预先给定的希望达到的目标值转化为约束条件. 经研究, 工厂认为总产值至少应达到 20 000 个单位, 而污染量则应控制在 90 个单位以下, 即

$$f_2(x) = 400x_1 + 600x_2 \geq 20\,000,$$
$$f_3(x) = 3x_1 + 2x_2 \leq 90.$$

由主要目标法得到如下单目标规划问题:

$$\begin{aligned} &\max f_1(x) = 70x_1 + 120x_2 \\ &400x_1 + 600x_2 \geq 20\,000 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 90 \\ &9x_1 + 4x_2 \leq 240 \\ &4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ &3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}.$$

用单纯形法求解, 得 $x_1 = 12.5$, $x_2 = 26.25$, $f_1(x) = 4\,025$. 这时, $f_2(x) = 20\,750$, $f_3(x) = 90$.

10.3.2 线性加权和法

考虑多目标决策问题(10.1), 假定目标 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 具有相同的量纲. 按照一定的规则分别给 f_i 赋以权系数 $w_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, m$), 这里 $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$. 作线性加权和评价函数

$$U(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x).$$

于是求解多目标决策问题(10.1)可转化为求解如下单目标决策问题:

$$\begin{aligned} &\max U(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) \\ &x \in X \end{aligned}. \tag{10.5}$$

不难证明, 问题(10.5)的最优解 x^* 是问题(10.1)的有效解或弱有效解.

定理 2 设 $w_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 且 $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$, 则单目标问题(10.5)的最优解是多目标问题(10.1)的有效解.

证明 设 x^* 是(10.5)的最优解. 若 x^* 不是(10.1)的有效解, 则存在 $x \in X$ 使

$$F(x) \geq F(x^*).$$

由于 $w_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 且上式至少有一个严格不等式, 即 $f_i(x) > 0$, $1 \leq i \leq m$. 有

$$\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x) > \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x^*).$$

这表明 x^* 不是(10.5)的最优解, 矛盾.

类似地, 可以证明如下定理.

定理 3 设 $w_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 且 $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$, 则单目标问题(10.5)的最优解是多目标问题(10.1)的弱有效解.

例 2 某公司计划购进一批新卡车, 可供选择的卡车有如下 4 种类型: A_1, A_2, A_3, A_4. 现考虑 6 个方案属性: 维修期限 f_1, 每 100 升汽油所跑的里数 f_2, 最大载重吨数 f_3, 价格(万元) f_4, 可靠性 f_5, 灵敏性 f_6. 这 4 种型号的卡车分别关于目标属性的指标值 f_{ij} 如表 10.2 所示.

表 10.2　4 种型号卡车的指标值

(f_{ij})	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
A_1	2.0	1 500	4	55	一般	高
A_2	2.5	2 700	3.6	65	低	一般
A_3	2.0	2 000	4.2	45	高	很高
A_4	2.2	1 800	4	50	很高	一般

首先对不同度量单位和不同数量级的指标值进行标准化处理. 先将定性指标定量化:

效益型指标→　很低　低　一般　高　很高

1　3　5　7　9

1　3　5　7　9

很高　高　一般　低　很低　←成本型指标

可靠性和灵敏性指标都属于效益型指标, 见表 10.3.

表　10.3

	可靠性		灵敏性	
	一般	5	高	7
	低	3	一般	5
	高	7	很高	9
	很高	9	一般	5

按以下公式作无量纲的标准化处理.

$$a_{ij} = \frac{99\times \quad f_{ij} - f_j^{**}}{f_j^{*} - f_j^{**}} + 1 .$$

其中 $f_j^{*} = \max_i f_{ij}, f_j^{**} = \min_i f_{ij}$.

变换后的指标值矩阵(a_{ij})如表 10.4 所示.

表　10.4

(a_{ij})	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
A_1	1	1	67	50.5	34	50.5
A_2	100	100	1	100	1	1
A_3	1	42.25	100	1	67	100
A_4	40.6	25.75	67	25.75	100	1

设权系数向量 W= (0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3), 则

$$U(x_1)=\sum_{j=1}^{6}w_ja_{1j}=34,$$

$$U(x_2)=\sum_{j=1}^{6}w_ja_{2j}=40.6,$$

$$U(x_3)=\sum_{j=1}^{6}w_ja_{3j}=57.925,$$

$$U(x_4)=\sum_{j=1}^{6}w_ja_{4j}=40.27.$$

由于

$$U^*=\max U=U(x_3).$$

故最优方案为选购 A_3 型卡车.

10.4　转化为多个单目标问题的解法

10.4.1　字典序法

在解决多目标决策问题时, 如果决策者能够对各个目标作出排序, 那么, 决策时可以按照各个目标的重要性程度依次求出各目标的最优解. 当在某个目标时求得了唯一解, 则不再考虑剩下目标的最优解了, 该唯一解就是所求的多目标问题的有效解. 这就是所谓的字典序法.

例如, 考虑多目标问题(10.1), 不妨设各目标的重要性排序为

$$f_1(x)>f_2(x)>\cdots>f_m(x)$$

则字典序法的求解步骤如下:

第一步: 求解相应于 $f_1(x)$ 的第一个单目标问题

$$\max_{x\in X} f_1(x).$$

设该问题的最优解为 x^*, 且 $f_1^*=f_1(x^*)$. 若 x^* 是唯一的最优解, 则 x^* 就是问题(10.1)的满意解, 停止; 否则, 令 $k=1$, 转第二步.

第二步: 求解相应于 $f_{k+1}(x)$的第 $k+1$ 个单目标问题:

$$\max_{x\in X'} f_{k+1}(x).$$

其中 $X' \triangleq \{x \mid x\in X, f_i(x)=f_i^*, i=1,\cdots,k\}$. 若 $k+1=m$, 则该问题的最优解就是问题(10.1)的满意解, 停止; 否则, 转第三步.

第三步: 设该问题的最优解为 x^*, 且 $f_{k+1}^*=f_{k+1}(x^*)$. 若 x^* 是唯一的最优解, 则 x^* 就是问题(10.1)的满意解, 停止; 否则, 置 $k+1 \to k$, 返回第二步.

很显然, 按上述步骤确定的满意解一定是问题(10.1)的有效解.

例 3　用字典序法求解例 2 中的选购卡车问题. 假设

$$f_6>f_1>f_5>f_2>f_4>f_3,$$

则首先求得相应于 f_6 的单目标问题

$$\max f_6(x)$$
$$x \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

的最优解 $x^* = A_1, A_3$. 然后求得相应于 f_1 的单目标问题

$$\max f_1(x)$$
$$x \in \{A_1, A_3\}$$

的最优解 $x^* = A_1, A_3$. 接着求得相应于 f_5 的单目标问题

$$\max f_5(x)$$
$$x \in \{A_1, A_3\}$$

的最优解 $x^* = A_3$. 由于这时只有唯一的最优解 A_3, 所以, 求解到此结束, A_3 为选中的车型.

10.4.2 步骤法

步骤法又称为 STEM 法. 这是一种交互方法, 其求解过程通过分析者与决策者之间的对话逐步进行, 故称步骤法.

步骤法的基本思想是, 首先需要求出问题(10.1)的一组理想解($f_1^*, f_2^*, \cdots, f_m^*$). 实际上, 这些解 f_i^* ($i = 1, 2, \cdots, m$) 无法同时达到, 但可以当作一组理想的最优值. 以理想解作为一个标准, 可以估计有效解, 然后通过对话, 不断修改目标值, 并把降低要求的目标作为新的约束条件加到原来的约束条件中去重新计算, 直到决策者得到满意的解.

步骤法算法如下:

第一步: 分别求以下 m 个单目标问题的最优解:

$$\begin{aligned} &\max f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j \\ &x \in X \end{aligned} \quad . \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{10.6}$$

设最优解为 x^{i*} ($i = 1, 2, \cdots, m$), 其相应的目标值即理想值为 f_i^* ($i = 1, 2, \cdots, m$), 此最优解处别的目标所取的值用 z_{ki} 表示, 即 $z_{ki} = f_k(x^{i*})$, $k \neq i$, $k = 1, 2, \cdots, m$. 把上述计算的结果列入表 10.5.

表 10.5 支 付 表

x	f_1	f_2	$\cdots$	f_i	$\cdots$	f_m
x^{1*}	f_1^*	z_{21}	$\cdots$	z_{i1}	$\cdots$	z_{m1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x^{i*}	z_{1i}	z_{2i}	$\cdots$	f_i^*	$\cdots$	z_{mi}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x^{m*}	z_{1m}	z_{2m}	$\cdots$	z_{im}	$\cdots$	f_m^*

表 10.5 是一份 $m \times m$ 的支付表. 在表中, 确定每一列的最小值并记第 i 列的最小值为 f_i^m, $i = 1, 2, \cdots, m$.

第二步: 求解

$$
\begin{aligned}
&\min \lambda \\
&\pi_i(f_i^* - f_i(x)) \le \lambda, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\
&x \in X \\
&\lambda \ge 0
\end{aligned}
\tag{10.7}
$$

其中

$$
\pi_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}. \tag{10.8}
$$

这里

$$
\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{f_i^* - f_i^m}{f_i^*} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\right)^{-1/2}, & \text{当 } f_i^* > 0 \\ \dfrac{f_i^m - f_i^*}{f_i^m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2\right)^{-1/2}, & \text{当 } f_i^* \le 0 \end{cases}. \tag{10.9}
$$

在(10.7)式中, $f_i^* - f_i(x)$ 是第 i 个目标的实际值和它的理想值的偏差, π_i 是相应的权系数, λ是目标与理想值的最大加权偏差. 求得的解 x 将使最大加权偏差 λ为最小.

第三步: 将(10.7)式的解 x_0 和相应的目标值 $f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_m(x_0)$ 交给决策者去判断. 决策者把这些目标值与理想值进行比较后, 如果认为其中某些目标值太坏, 另一些目标值可以不那么太好, 可以把比较好的目标值中的某一个修改得差一些, 以使水平太坏的目标得到改善.

当决策者减少了第 j 个目标的值 Δf_j 之后, (10.7)式中的约束条件 X 应改为 X', 即

$$
X' = \begin{cases} X \\ f_j(x) \ge f_j(x_0) - \Delta f_j, \ j = 1, 2, \cdots, k \\ f_i(x) \ge f_i(x_0), \ i \ne j, \ i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}.
$$

在按(10.7)式进行下一次迭代时, 对应于降低了要求的那些目标 $f_j (j = 1, 2, \cdots, k)$的权系数 π_j 应设为零. 这种迭代继续下去, 直到决策者得到满意的解为止.

例 4 某公司考虑生产两种光电太阳能电池: 产品甲和产品乙. 这种生产过程会在空气中引起放射性污染. 因此, 公司经理有两个目标: 极大化利润与极小化总的放射性污染. 已知在一个生产周期内, 每单位甲产品的收益是 1 元, 每单位乙产品的收益是 3 元. 而放射性污染的数量, 每单位甲产品是 1.5 个单位, 每单位乙产品是 1 个单位. 由于机器能力(小时)、装配能力(人时)和可用的原材料(单位)的限制, 约束条件是

$$
\begin{aligned}
0.5x_1 + 0.25x_2 &\le 8 \quad (\text{机器能力}), \\
0.2x_1 + 0.2x_2 &\le 4 \quad (\text{装配能力}), \\
x_1 + 5x_2 &\le 72 \quad (\text{原材料}).
\end{aligned}
$$

这里, x_1, x_2 分别为甲产品和乙产品在一个生产周期内要生产的单位数.

这是有两个目标的决策问题. 令 $f_1(x)$ 为利润, $f_2'(x)$ 为污染, 并令 $f_2(x) = -f_2'(x)$, 则该问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
&\max F(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \\
&x \in X^1
\end{aligned}.
$$

其中 $f_1(x) = x_1 + 3x_2, f_2(x) = -1.5x_1 - x_2$, 且

$$X^1 = \begin{cases} 0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 8 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 4 \\ x_1 + 5x_2 \leq 72 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

首先分别求解如下两个线性规划问题

$$\max f_1(x) = x_1 + 3x_2$$
$$x \in X^1$$

和

$$\max f_2(x) = -1.5x_1 - x_2$$
$$x \in X^1 \quad .$$

得理想解

$$x^{1*} = (7, 13), \quad f_1^* = 46,$$
$$x^{2*} = (0, 0), \quad f_2^* = 0.$$

由此构造支付表(见表 10.6).

表 10.6

x	f_1	f_2
(7, 13)	46	-23.5
(0, 0)	0	0

按照(10.9)式计算得 α= 0.316, α= 0.555. 然后按照(10.8)式计算得 π= 0.363, π= 0.637.

解下列线性规划问题:

$$\min \lambda$$
$$0.363(46 - x_1 - 3x_2) \leq \lambda$$
$$0.637(0 + 3x_1 + 2x_2) \leq \lambda$$
$$x \in X^1$$
$$\lambda \geq 0 \quad .$$

由此求得

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 7.064,$$
$$f_1 = 21.192, \quad f_2 = -7.064.$$

分析者把计算结果交给决策者, 决策者将目标值(21.192, -7.064)与理想值(46, 0)比较, 如果认为 f_2 是满意的, 但利润太低, 并认为污染可接受到 10 个单位. 于是, 约束集修改成

$$X^2 = \begin{cases} X^1 \\ -1.5x_1 - x_2 \geq -10 \\ x_1 + 3x_2 \geq 21.192 \end{cases}.$$

于是进行下一轮迭代. 首先设 $\pi = 0$, 并计算得 $\pi = 1$. 将(10.7)式修改为

$$\begin{aligned}&\min \lambda\\&46 - x_1 - 3x_2 \le \lambda\\&x \in X^2\end{aligned}.$$

由此求得

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 10,$$

$$f_1 = 30, \quad f_2 = -10.$$

决策者把这一结果与前一轮的解及理想值作比较, 认为两个目标值都比较满意, 则迭代可以终止.

10.5 层次分析法

10.5.1 层次分析法的基本原理

层次分析法, 又称 AHP(Analytic Hirrarchy Process) 方法, 是美国运筹学家萨蒂(T. Saaty) 提出的一种多目标、多准则的决策分析方法. 该方法被广泛应用于工程、经济、军事、政治、外交等领域, 解决了诸如系统评价、资源分配、价格预测、项目选择等许多重要问题, 是一种定量分析与定性分析相结合的有效方法. 用层次分析法作决策分析, 首先要把问题层次化. 根据问题的性质和要达到的总目标, 将问题分解为不同的组成因素, 并按照因素间的相互影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合, 形成一个多层次的分析结构模型. 最终把系统分析归结为最低层(如决策方案) 相对于最高层(总目标) 的相对重要性权值的确定或相对优劣次序的排序问题, 从而为决策方案的选择提供依据.

层次分析法大体分六个步骤, 即①明确问题; ②建立层次结构模型; ③构造判断矩阵; ④层次单排序及其一致性检验; ⑤层次总排序; ⑥层次总排序的一致性检验. 对上述步骤分析说明如下:

第一步: 明确问题

为了运用 AHP 进行系统分析, 首先要对问题有明确的认识, 弄清问题范围、所包含的因素及其相互关系、解决问题的目的、是否具有 AHP 所描述的特征.

第二步: 建立层次结构

将问题中所包含的因素划分为不同层次. 例如, 对于决策问题, 通常可以划分为下面几个层次:

最高层: 表示解决问题的目的, 称为目标层.

中间层: 表示采取某种措施或政策实现预定目标所涉及的中间环节, 一般又分为策略层、准则层等.

最低层: 表示解决问题的措施或方案, 称为措施层或方案层.

描述层次递阶结构和各因素从属关系的层次结构图, 如图 10.2 所示.

第三步: 构造判断矩阵

针对上一层次某元素, 对每一层次各个元素的相对重要性进行两两比较, 并给出判断. 这些判断用数值表示出来, 写成矩阵形式, 即所谓的判断矩阵.

图 10. 2　层次结构图

假定 A 层次中元素 A_k 与下一层次元素 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 有联系, 则构造的判断矩阵为以下形式:

A_k	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
B_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
B_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nn}

其中 b_{ij} 表示对于 A_k 而言, B_i 对 B_j 的相对重要性. 通常 b_{ij} 取 1, 2, …, 9 及它们的倒数, 其含义为

1 表示 B_i 与 B_j 相比, 两者重要性相同;

3 表示 B_i 比 B_j 稍重要;

5 表示 B_i 比 B_j 重要;

7 表示 B_i 比 B_j 强烈重要;

9 表示 B_i 比 B_j 极端重要.

它们之间的数 2, 4, 6, 8 及各数的倒数有相应的类似意义. 显然, 对判断矩阵有

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ij} = 1/b_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

因此, 对于 n 阶判断矩阵, 我们仅需对 $n(n-1)/2$ 个元素给出数值.

第四步: 层次单排序及其一致性检验

所谓进行层次单排序, 即把同一层次相应元素对于上一层次某元素相对重要性的排序权值求出来. 其方法是计算判断矩阵 A 的满足等式 $AW = \lambda_{max} W$ 的最大特征根 λ_{max} 和对应的特征向量 W, 这个特征向量即是单排序权值.

可以证明, 对于 n 阶判断矩阵, 其最大特征根 λ_{max} 为单根, 且 $\lambda_{max} \geq n$. λ_{max} 所对应的特征向量均由正数组成. 特别地, 当判断矩阵具有完全一致性时, 有 $\lambda_{max} = n$, 这里, 所谓完全一致性是指对于判断矩阵来说, 存在

$$b_{ij} = b_{ik}/b_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, \cdots, n).$$

为检验判断矩阵的一致性, 需要计算一致性指标

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

此外, 还需要判断矩阵的平均随机一致性指标 RI. 对于 1 至 9 阶矩阵, RI 的值见表 10.7 所示.

表 10.7

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

在这里, 对于 1, 2 阶判断矩阵, RI 只是形式上的, 因为 1, 2 阶判断矩阵总具有完全一致性. 当阶数大于 2 时, 判断矩阵的一致性指标 CI 与同阶平均随机一致性指标 RI 之比称为随机一致性比率, 记为 CR, 当 $CR = CI/RI < 0.10$ 时, 即认为判断矩阵具有满意的一致性, 否则就需要调整判断矩阵, 使其具有满意的一致性.

第五步: 层次总排序

计算同一层次所有元素对于最高层相对重要性的排序权值, 称为层次总排序. 这一过程是最高层次到最低层次逐层进行的. 若上一层次 A 包含 m 个元素 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 其层次总排序权值分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$, 下一层次 B 包含 n 个元素 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 它们对于元素 A_j 的层次单排序权值分别为 $b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj}$ (当 B_k 与 A_j 无关系时, $b_{kj} = 0$), 此时 B 层次总排序权值由表 10.8 给出.

表 10.8 总 排 序 表

层次	A_1	A_2	$\cdots$	A_m	B 层次总排序权重
	a_1	a_2	$\cdots$	a_m	
B_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1m}	w_1
B_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2m}	w_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nm}	w_n

注: $w_i = \sum_{j=1}^{m} a_j b_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

第六步: 层次总排序的一致性检验

这一步骤也是从高到低逐层进行的. 如果 B 层次某些元素对于 A_j 单排序的一致性指标为 CI_j, 相应的平均随机一致性指标为 RI_j, 则 B 层次总排序随机一致性比率为

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j CI_j}{\sum_{j=1}^{m} a_j RI_j}.$$

类似地, 当 $CR < 0.10$ 时, 认为层次总排序结果具有满意的一致性, 否则需要重新调整判断矩阵的元素取值.

10.5.2 层次分析法的计算问题

层次分析法计算的根本问题是如何计算判断矩阵的最大特征根及其对应的特征向量.

一般来说, 计算判断矩阵最大特征根及其对应特征向量, 并不需要追求较高的精确度.

这是因为判断矩阵本身有相当的误差范围. 应用层次分析法给出的层次中各种元素优先排序权值从本质上来说是表达某种定性的概念. 因此, 从实用性来看, 往往希望使用较为简单的近似算法. 下面介绍一种称之为方根法的近似算法.

方根法的步骤如下:

① 计算判断矩阵 B 每一行元素的乘积 M_i

$$M_i = \prod_{j=1}^{n} b_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

② 计算 M_i 的 n 次方根 V_i

$$V_i = \sqrt[n]{M_i}.$$

③ 对向量 $V = (V_1, V_2, \cdots, V_n)^T$ 规一化, 即

$$W_i = \frac{V_i}{\sum_{j=1}^{n} V_j}.$$

则 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_n)^T$ 即为所求的特征向量.

④ 计算判断矩阵的最大特征根 λ_{max}:

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(BW)_i}{nW_i}.$$

式中$(BW)_i$表示向量 BW 的第 i 个分量.

例 5　用方根法求判断矩阵 B(见表 10.9)的最大特征根 λ_{max} 及其对应的特征向量 W:

表　10.9

	b_1	b_2	b_3
b_1	1	1/5	1/3
b_2	5	1	3
b_3	3	1/3	1

解　(1) 计算矩阵每一行元素的乘积 M_i:

$$M_1 = 0.067, \quad M_2 = 15, \quad M_3 = 1.$$

(2) 计算 M_i 的 3 次方根 V_i:

$$V_1 = 0.403, \quad V_2 = 2.446, \quad V_3 = 1.$$

(3) 对向量 $V = (V_1, V_2, V_3)^T$ 规一化:

$$W_1 = 0.105, \quad W_2 = 0.637, \quad W_3 = 0.258.$$

则所求特征向量 $W = (0.105, 0.637, 0.258)^T$.

(4) 计算最大特征根 λ_{max}:

$$\lambda_{max} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(BW)_i}{nW_i} = \frac{0.318}{3\times 0.105} + \frac{1.936}{3\times 0.637} + \frac{0.785}{3\times 0.258} = 3.037$$

例 6　某厂准备购买一台计算机, 希望功能强, 价格低, 维护容易. 现有 A, B, C 三种机型可供选择. 其中 A 的性能较好, 价格一般, 维护需要一般水平; B 的性能最好, 价格较贵, 维护也只需一般水平; C 的性能差, 但价格便宜, 容易维护. 首先构成分析层次, 如图 10.3.

图 10.3　层次结构图

对于三个准则(S_1, S_2, S_3) 关于目标 G 的优先顺序, 根据讨论, 该厂在计算机应用上首先要求功能强, 其次要求易维护, 再次才是价格低. 其判断矩阵如表 10.10 所示.

表　10.10

G	S_1	S_2	S_3
S_1	1	5	3
S_2	1/5	1	1/3
S_3	1/3	3	1

用方根法计算这三个准则关于目标的排序权值如下:

$M_1 = 15,\quad M_2 = 0.0667,\quad M_3 = 1.$

$V_1 = \sqrt[3]{15} = 2.466,\quad V_2 = \sqrt[3]{0.0667} = 0.405,\quad V_3 = \sqrt[3]{1} = 1.$

$W_1 = \dfrac{2.466}{2.466 + 0.405 + 1} = \dfrac{2.466}{3.871} = 0.637,\quad W_2 = \dfrac{0.405}{3.871} = 0.105,\quad W_3 = \dfrac{1}{3.871} = 0.258.$

一致性检验结果为

$$\lambda_{max} = 3.0385,\quad CI = 0.0192,\quad CR = 0.0192/0.58 = 0.0332 < 0.10.$$

同样, 三个方案对于各个准则的判断矩阵以及运算所得的结果分别见表 10.11, 表 10.12, 表 10.13, 表 10.14. 对准则 S_1(功能强) 来说:

表　10.11

S_1	A	B	C	W
A	1	1/4	2	0.1818
B	4	1	8	0.7272
C	1/2	1/8	1	0.0910

$\lambda_{max} = 3.0,\ CI = 0.0,\ CR = 0.0 < 0.10.$

对准则 S_2(价格低) 来说:

表　10.12

S_2	A	B	C	W
A	1	4	1/3	0.2559
B	1/4	1	1/8	0.0733
C	3	8	1	0.6708

$\lambda_{max} = 3.0183,\quad CI = 0.0091,\quad CR = 0.0157 < 0.10.$

对准则 S_3**(易维护)来说:**

表 10.13

S_3	A	B	C	W
A	1	1	1/3	0.1851
B	1	1	1/5	0.1562
C	3	5	1	0.6587

$\lambda_{max} = 3.0290$, $CI = 0.0145$, $CR = 0.0250 < 0.10$.

层次总排序的结果:

表 10.14

	S_1	S_2	S_3	**总排序权值**
	0.637	0.105	0.258	
A	0.1818	0.2559	0.1851	0.1904
B	0.7272	0.0733	0.1562	0.5112
C	0.0910	0.6708	0.6587	0.2984

$CR = 0.0081 < 0.10$.

从以上结果可知,B 型计算机从综合评价来看是最满意的备选机型.

10.5.3 层次分析法的逆序问题

对于给定的决策问题,若其目标为 G**,准则集为** C**,方案集为** P**,则由层次分析法得到的最终结果是方案** P **的各备选方案相对于目标** G **的优先顺序权重以及判断一致性检验.由于最终结果是关于方案集** P **的结果,因而当方案集** P **发生变化时,其层次分析的最终结果也会发生变化并成为变化后的决策问题的最终结果.为研究逆序问题,下面考察一个例子.**

设一决策问题 D**:目标** G **为选择最满意的方案;准则为** c_j, $j = 1, 2, 3$;**备选方案为** p_i, $i = 1, 2, 3$. **已知各准则** c_j($j = 1, 2, 3$)**对于目标** G **的权值** w_j^1 **分别为** $w_1^1 = 0.6$, $w_2^1 = 0.3$, $w_3^1 = 0.1$, **记为** $W^1 = (0.6, 0.3, 0.1)^T$. **各方案** p_i **对于准则** c_j($j = 1, 2, 3$)**的权值** w_{ij}^2($i = 1, 2, 3$)**由矩阵** W^2 **给出:**

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

且各判断矩阵都具有很满意的一致性.则各方案 p_i **对于目标** G **的总排序权值** w_i **可由下式得出:**

$$W = W^2 W^1 = (0.42, 0.36, 0.22)^T.$$

由于 $w_1 = 0.42$, $w_2 = 0.36$, $w_3 = 0.22$, **所以方案** p_1 **最满意**, p_2 **次之.**

现有另一决策问题 D'**,它的目标及准则都与问题** D **相同,其备选方案是** D **中的** p_1 **与** p_2**,且** W^1 **及** p_1 **与** p_2 **对于各准则的相对重要性程度都没有改变.这时,由于方案** p_i **对于准则** c_j($j = 1, 2, 3$)**的权值为** $w_{ij}'^2 = w_{ij}^2 / (w_{1j}^2 + w_{2j}^2)$, $i = 1, 2$. **所以**

$$W'^2 = (w_{ij}'^2) = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.2 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.8 & 0.6667 \end{pmatrix}.$$

于是,各方案 p_j 对于目标 G 的总排序权值 w_j' 由 $W' = W'^{2}W^{1} = (0.49, 0.51)^T$ 得出.

这时,由于 $w_1' < w_2'$,所以方案 p_2 最满意,p_1 次之.

我们看到,问题 D 与 D′ 中方案 p_1 与 p_2 的排序发生了变化,且有 $(w_1 - w_2)(w_1' - w_2') < 0$. 这种现象,称之为逆序现象. 这时,称方案 p_1 与 p_2 对于 D 和 D′ 有逆序. p_1 与 p_2 的逆序现象是问题的方案个数改变后随之可能发生的一种现象. 这一现象反映了两个有联系的不同决策问题 D 与 D′ 最终结果之间的显著变化.

我们的决策问题是选择最满意的方案问题,逆序现象的出现并不表明原决策问题的最终结果出现矛盾,而只是两个有联系的决策问题最终结果差异程度的反映. 但当最优方案与次优方案的最终权值相差不大时,次优方案有被考虑采纳的可能性,这时,利用逆序现象对最优方案与次优方案的权值变化作灵敏度分析是有益的.

现对上面所举的例子进行灵敏度分析. 可以看出,w_3^1 在逆序变化中处于较稳定的状态,所以取 w_1^1 和 w_2^1 进行灵敏度分析.

设 $w_2^1 = \alpha$,则 $w_1^1 = 0.9 - \alpha$,$w_3^1 = 0.1$. 这时

$$w_1 = 0.6(0.9 - \alpha) + 0.1\alpha + 0.3 \times 0.1,$$

$$w_2 = 0.3(0.9 - \alpha) + 0.4\alpha + 0.6 \times 0.1.$$

令 $w_1 = w_2$,得 $\alpha = 0.4$. 又因为 $W' = W'^{2}W^{1}$,故

$$w_1' = 0.6667(0.9 - \alpha) + 0.2\alpha + 0.3333 \times 0.1,$$

$$w_2' = 0.3333(0.9 - \alpha) + 0.8\alpha + 0.6667 \times 0.1.$$

令 $w_1' = w_2'$,得 $\alpha' = 0.2857$.

于是,当 $w_2^1 \geq 0.4$(即 $w_1^1 \leq 0.5$)时,$w_1 \leq w_2$ 且 $w_1' \leq w_2'$,p_2 最满意.

当 $w_2^1 \leq 0.2857$(即 $w_1^1 \geq 0.6143$)时,$w_1 > w_2$ 且 $w_1' \geq w_2'$,p_1 最满意.

当 $0.2857 < w_2^1 < 0.4$(即 $0.5 < w_1^1 < 0.6143$)时,p_1 与 p_2 有逆序.

从以上分析可以看出,虽然有逆序出现,但初始的 $w_2^1 = 0.3$ 与 $\alpha' = 0.2857$ 很接近,而与 $\alpha = 0.4$ 有一定差距. 这说明只要 w_2^1 稍微变小一点(0.0143),则 p_1 可同时成为 D 与 D′ 的最满意方案. 如果要使 p_2 同时成为 D 与 D′ 的最满意方案,则需将 w_2^1 由 0.3 增大到 0.4. 因而在不加入新准则的情况下,无需考虑将方案 p_2 作为最满意的方案.

10.6 应用实例

《2000 年中国的环境》一书对我国 2000 年的经济发展与环境状况的变化,进行了宏观范围的预测. 在预测研究中,以环境战略与国家总的发展战略相协调为指导,确定了今后国民经济计划中环保投资的合理比重. 为确定环保投资比重,考虑了如下几种可供选择的方案:

第一种方案:控制污染和保护环境的资金和措施继续维持在目前的水平上,即按环境保护投资占国民收入的 0.5% 计算.

第二种方案:按逐步提高环境保护投资在国民收入中的比重,1990 年达到 1% 的水平,以后一直保持这一水平计算.

第三种方案:按逐步提高环境保护投资在国民收入中的比重,1990 年达到 1.5% 的水平,以后一直保持这一水平计算.

第四种方案: 1990 年环境保护投资的比重逐步提高到占国民收入的 2.5%, 然后一直保持这一水平. 这样, 到 2000 年, 综合污染指数将下降为 0.78, 环境质量会有较明显提高.

那么, 根据我国的具体情况, 在认识水平和认识手段有限, 基础资料缺乏, 一时还难以直接算出最优环保投资比重的情况下, 通过多方案筛选和多方案比较的方法, 从上述 4 个可行方案中选出最优方案, 并以此作为最优环保投资比重的近似指标值. 下面采用三种方法对最优环保投资比重进行多目标决策研究.

第一种方法:

从环境效益和经济效益两个方面进行综合研究.

(1) 从环境效益来看, 总体模型求得的 2000 年 4 个方案的污染指数见表 10.15.

表 10.15

	0.5%	1%	1.5%	2.5%
综合污染指数	1.87	1.25	0.94	0.78
水污染指数	1.9	1.1	0.92	0.8
大气污染指数	1.56	1.46	0.8	0.57
固体废物污染指数	2.58	2.3	1.71	1.61

0.5% 方案的各项污染指数都最高. 到 2000 年, 无论是水、气、渣的污染情况, 还是综合的环境质量都将比现在情况大大恶化, 这显然是不符合环境目标要求的. 此外, 0.5% 方案的污染损失最大, 治理效益最小. 因此, 从环境效益的角度来看, 它是不可取的. 其他 3 个方案基本可以控制在目前的污染水平上, 或有一定的改善, 是可行的.

(2) 从经济效益来看, 2.5% 方案的环保费用最高, 经济效益最低(见表 10.16).

表 10.16

	0.5%	1%	1.5%	2.5%
每元环保投资提供的治理效益(元)	10.4	8	6.6	4.1
每元环保投资减少的污染损失(元)	—	4.5	4.1	2.8

此外, 2.5% 方案的工农业产值和国民收入也最低. 因此, 从经济效益的角度来看, 2.5% 方案是不可取的.

(3) 环境经济学认为, 评价一项环境规划所需的费用, 不能光看投资, 应该是投资加上损失, 即社会总费用. 按照这种算法, 2000 年 4 个方案的社会总费用为表 10.17 所示.

表 10.17　2000 年 4 个方案的社会总费用

	0.5%	1%	1.5%	2.5%
环保投资(亿元)	72	146	221	371
污染损失(亿元)	1 826	1 174	926	788
总费用(亿元)	1 898	1 320	1 147	1 159

计算表明,1.5%方案的社会总费用最低.根据费用—效益分析的要求,以效益最大或费用最小作为自己的优化目标,则4个方案中,以1.5%方案为最佳.

从环境效益和经济效益两方面综合权衡,0.5%和2.5%方案都是不可取的,而1%和1.5%方案是可行的.那么,这两个方案中哪个更好呢?从经济指标来看,两者的差别较小,国民收入只差2‰,工农业产值只差0.27%,人均消费基金只差0.18%.但从环境指标来看,两者的差异却是明显的,1.5%方案明显优于1%方案.例如:水指数低0.18,气指数低0.66,渣指数低0.59,污染损失21%.因此,从环保和经济两个目标综合考虑,1.5%方案是4个方案中较优的方案.

第二种方法:

采用以下数学公式进行计算:

(1) 列表10.18:

表 10.18

	指标1	…	指标n
方案1	f_{11}	…	f_{1n}
⋮	⋮		⋮
方案m	f_{m1}	…	f_{mn}

列出各个方案中需比较的各个指数.

(2) 对 f_{ij} 进行无量纲标准化:

对指标 j 求

$$\max_{1\le i\le m} f_{ij} = f_j^{*} \quad 与 \quad \min_{1\le i\le m} f_{ij} = f_j^{**}.$$

(3) 计算Y矩阵:

$$y_{ij} = \frac{99\times (f_{ij} - f_j^{**})}{f_j^{*} - f_j^{**}} + 1 \quad (i = 1, \cdots, m).$$

(4) 确定权数P:

对第 j 个指数,有权数 p_j, $\quad \sum p_j = 1.$

(5) 计算各方案评价值Z

$$z_i = \sum_j p_j y_{ij}.$$

按照上述公式,列出 f_{ij} 如表10.19,其中 f_{ij} 为第 i 个方案第 j 个指标的1980,1985,1990,1995和2000年值之和,表示从1980年到2000年这一指标之和.由于需要求出最大评价值的方案,因此,将越小越好的指标(如污染损失)变换为其倒数,为了方便计算,第1,3个指标分别乘以10 000和1 000,得到括号中的数值.方案中2%方案系1.5%和2.5%方案的线性插值.Z值最大者为最优方案.

表 10.19 单位:亿元

方案＼指标	污染损失	治理效益	环保投资	国民收入	工农业总产值
0.5%	4 855.0 (2.0597)	2 422.0	212.7 (4.7015)	42 534	80 484

续表

方案＼指标	污染损失	治理效益	环保投资	国民收入	工农业总产值
1%	3 863. 1 (2. 5886)	2 422. 0	394. 1 (2. 5374)	42 555	80 351
1. 5%	3 283. 0 (3. 0432)	3 016. 6	575. 3 (1. 7382)	42 559	80 221
2. 0%	3 147. 4 (3. 1772)	3 113. 3	755. 2 (1. 3242)	42 500	80 054
2. 5%	3 008. 7 (3. 3237)	3 210. 0	935. 0 (1. 0695)	42 441	79 887

比较困难而又十分重要的问题是确定权数. 每个因素权数的大小取决于它在系统中的地位和作用. 为了从多方面进行评价, 我们确定了 4 组权数方案.

表 10. 20　权数方案表

权数方案	污染损失	治理效益	环保投资	国民收入	工农业总产值
1	0. 1667	0. 1667	0. 1667	0. 25	0. 25
2	0. 15	0. 15	0. 15	0. 35	0. 2
3	0. 2	0. 2	0. 2	0. 2	0. 2
4	0. 1	0. 2	0. 1	0. 3	0. 3

这 5 个权系数分别对应于表 10.20 五个因素, 权数方案 3 给经济因素(国民收入、工农业总产值) 以 0. 4 的权数, 方案 4 给它 0. 6 的权数, 其余两方案分别是 0. 5 和 0. 55, 这反应了对经济因素在环境经济系统中重要性的不同认识, 强调经济因素的同时, 意味着环境因素的相对重要性差一些, 计算结果如表 10.21 所示.

表 10. 21　各种权数计算结果

权　数 方　案	Z				
	(0. 5%)	(1%)	(1. 5%)	(2%)	(2. 5%)
1	61. 8	66. 9	70. 5	51. 7	34. 0
2	63. 5	70. 3	74. 5	52. 1	30. 7
3	56. 2	62. 8	68. 9	54. 1	40. 6
4	64. 0	70. 6	73. 5	51. 8	30. 7

以上 4 种权数方案均表明, 1. 5% 方案是较优方案.

第三种方法:

计算污染损失与环保投资相对于国民收入比重为最小的方案:

即
$$Z=\frac{P+I}{N}\to \min .$$

其中 P 为污染损失, N 为国民收入, I 为环保投资.

这种计算方法考虑了使经济尽快发展, 同时使污染为最小两个目标, 是一种简便的多目标计算方法.

仍采用上一种方法的 f_{ij} 数值. 经过计算, 结果如表 10.22 所示.

表 10.22　污染损失和环保投资占国民收入比重

Z 值 \ 方案	0.5%	1%	1.5%	2%	2.5%
Z	11.91	10.00	9.07	9.18	9.29

因此, 同样也是 1.5% 方案为诸方案中较优方案.

以上三种方法得出了相同的结论, 即 1.5% 方案是较优方案. 我们认为, 这一计算具有模糊性和近似性. 因此, 实际生活中最优环保投资比重应以 1.5% 为中心, 在一个较小的范围内波动, 或者说最优环保投资比重应是一个趋势带或区间, 而不是一个点.

习　　题

10.1　某厂新建一间厂房, 有 3 个方案供选择. 这 3 个方案的资料如表 10.23 所示. 假定 5 个目标的权系数分别为 0.2, 0.1, 0.3, 0.2, 0.2, 试用线性加权和法选择最满意的方案.

表　10.23

目标	单位	方案 I	方案 II	方案 III
1. 投资总额	万元	145.8	119.3	113.5
2. 建成年限	年	5	4	3
3. 年产值	万元	260	196	220
4. 产值利润率	%	12	15	13
5. 环境污染		中等	最轻	轻

10.2　某机械厂为解决大型铸件淬火问题, 提出如下 4 个可能的技术改造方案: 安装双梁行车(A_1); 制做固定行车(A_2); 改造平板车为翻车(A_3); 改造龙门吊车(A_4). 评价方案优劣有五种指标: 投资额; 可靠性; 质量; 操作是否方便; 耗工多少. 各种方案的经济、技术指标的情况以及各指标的权数如表 10.24 所示.

表　10.24

方案 \ 指标	投资	可靠性	质量	操作	耗工
A_1	7.1	好	好	方便	1 500
A_2	4.05	较好	较好	较方便	310
A_3	2.8	差	差	很不方便	325
A_4	0.7	较差	较好	稍麻烦	100
权数	0.3	0.2	0.3	0.15	0.05

试问应取哪一个方案最为合理?

10.3　某工厂为推出一种新产品, 拟定投资 200 万元、50 万元、20 万元 3 个投资方案. 在分析投资风险的基础上, 分别计算了这 3 个方案的期望净现值 U、单位投资期望净现值 K、投资失败率 P、风险损失值 F 和风险盈利值 R 如表 10.25. 试评价这 3 个方案的优劣.

表　10.25

方案 \ 指标	U	K	P	F	R
方案 1	57.99	0.29	0.4052	81.04	34.49
方案 2	132.11	2.64	0.0089	0.445	130.93
方案 3	192.46	9.62	0.0418	0.836	184.42

10.4　在购买飞机的决策问题中, 方案 A_1, A_2, A_3, A_4 的 5 个目标属性的相应值如表 10.26 所示.

表　10.26

方案 \ 属性	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	352	1 400	30	8.5	高
A_2	404	2 500	24	7.8	很高
A_3	316	2 200	26	8.0	一般
A_4	435	1 900	30	8.0	高

假设该问题的目标属性的重要性排序为

$$X_3 > X_5 > X_1 > X_2 > X_4.$$

试确定购买飞机的最优方案.

10.5　某工厂生产 A, B 两种型号的摩托车. A 型车每辆利润为 100 元, B 型车每辆 80 元. 设 A 型车每辆生产的平均时间为 3 小时, B 型车为 2 小时. 工厂每周生产 120 小时, 但尚可加班 48 小时. 在加班时间内生产 A 型车的利润为 90 元, B 型车的利润为 70 元. 设市场每周需要 A, B 两型车各 30 辆以上. 试用步骤法求解, 在尽量满足市场的前提下, 如何安排生产, 才可能使得一方面利润最大, 另一方面加班时间最少?

10.6　已知多目标规划问题如下:

$$\begin{aligned}
&\max Z_1(x) = 100x_1 + 90x_2 + 80x_3 + 70x_4,\\
&\min Z_2(x) = 3x_1 + 2x_4,\\
&\quad x_1 + x_2 \geq 30\\
&\quad x_3 + x_4 \geq 30\\
&\quad 3x_1 + 2x_3 \leq 120\\
&\quad 3x_2 + 2x_4 \leq 48\\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad .
\end{aligned}$$

试用步骤法进行分析决策.

10.7　某部门为评价管理信息系统, 拟订了 3 个评价准则: 信息处理、管理控制、辅助决策. 对于选择满意的管理信息系统而言, 这 3 个准则的判断矩阵如表 10.27 所示. 试计算该判断矩阵的单排序权值, 并作出一致性检验.

表　10.27

满意的管理信息系统	信息处理	管理控制	辅助决策
信息处理	1	1/4	1/2
管理控制	4	1	3
辅助决策	2	1/3	1

10.8　某工厂在超额完成任务后,有一笔留成利润要由领导决定如何使用,以促进生产.可供选择的方案有:作为奖金发给职工(P_1);扩建托儿所(P_2);开办职工学校(P_3);建立俱乐部(P_4);引进新型设备进行技术改造(P_5).衡量这些方案措施可以从下列三方面着眼:是否调动了职工的生产积极性(C_1),是否提高了职工的文化技术水平(C_2),是否改善了职工的物质文化生活状况(C_3).已知各判断矩阵如表10.28~10.31所示,其中A为目标层(合理使用企业留成利润),C为准则层(C_1, C_2, C_3),P为方案层(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5).试用层次分析法对这5种方案进行评价.

表10.28　判断矩阵A-C

A	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/5	1/3
C_2	5	1	3
C_3	3	1/3	1

表10.29　判断矩阵C_1-P

C_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	1	3	5	4	7
P_2	1/3	1	3	2	5
P_3	1/5	1/3	1	1/2	3
P_4	1/4	1/2	2	1	3
P_5	1/7	1/5	1/3	1/3	1

表10.30　判断矩阵C_2-P

C_2	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	1	1/7	1/3	1/5
P_3	7	1	5	3
P_4	3	1/5	1	1/3
P_5	5	1/3	3	1

表10.31　判断矩阵C_3-P

C_3	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1	3	3
P_2	1	1	3	3
P_3	1/3	1/3	1	1
P_4	1/3	1/3	1	1

附　　录

在编写本教材时,我们在 UCDOS 环境下,用 Turbo C 2.0 编写了本书中的部分模型的集成软件,其中包括线性规划模型、一般整数规划、0-1 整数规划、指派问题、运输问题、存储论、排对论和对策论等模型.限于篇幅,我们给出其中线性规划和运输问题模型参考程序.程序实现时未充分考虑程序的优化,只是侧重其功能的实现;它们的输入模块都是接收模型数据到磁盘文件,求解模块先读数据文件、迭代求解并写结果到磁盘文件;这些模块都可单独编译执行.请您在阅读时注意.

此外,考虑到要方便使用者,我们准备在视窗环境下开发相应的系统,在此诚恳邀请您参加开发.

附录 1　线性规划参考程序

(1) 数据输入模块

```
/* lpinput.c* /
# include "stdio.h"
# define vnum 60
# define strnum 20
  FILE * in, * out;
main()
 {
  int i, j;
  float x, y;
  if ((in= fopen("lpinput.dat", "rb+ "))! = NULL)
     {printf("有数据文件 lpinput.dat ! \n"); }
  in= fopen("lpinput.dat","wb+ ");
  printf("请输入约束变量数 m 和约束方程总数 n\n");
  scanf("% f% f", &x, &y);
  fwrite( &x, 4, 1, in); fwrite( &y, 4, 1, in);
  m= (int)x; n= (int) y;
  printf("请输入< = 约束方程数, > = 约束方程数, = 约束方程数\n");
  for (i= 1; i< = 3; i+ + )
        {scanf("% f", &x);
        fwrite( &x, 4, 1, in); }
  printf("请输入函数类型 (0- - MAX; 1- - MIN):");
  scanf("% f", &x);
  if (x! = 1) x= 0;
  fwrite( &x, 4, 1, in);
  printf("\n");
```

```
printf("请输入价值系数(C[j]):\n");
for (i=1;i<=m;i++)
    {scanf("%f",&x);
    fwrite(&x,4,1,in);}
printf("请按行输入 A 矩阵元素 a[i][j],约束类型(0:<=,1:>=,2:=) 和 B 矩阵元素 b[i]:\n");
for (i=1;i<=n;i++)
    {
     for (j=1;j<=m+2;j++)
        {scanf("%f",&x);
         fwrite(&x,4,1,in);}
     }
    fclose(in);
   }
```

(2) 求解模块

```
/* lpsolve.c */
#include "stdio.h"
#include "dos.h"
#define vnum 60
#define strnum 20
FILE *in,*out;
int co,m,n,ii,jj,kk,ll,k,d[strnum],st;
/* ll 迭代次数 */
/* d[]存放基变量的下标*/
int maxminflag;/* maxminflag  存放函数类型 1:MIN;0:MAX*/
int f1flag;/* f1flag  存放无可行解标记 1:是;0:否*/
int wjflag;/* wjflag  存放无界解标记 1:是;0:否*/
int zjflag;/* zjflag  存放是否显示迭代结果记 1:是;0:否*/
float JI[vnum],c[vnum],c1[vnum],cb[strnum];
float b[strnum],b1[strnum],b2[strnum],a[strnum][vnum],al[strnum][strnum],l[strnum];
/* a[][]存放系数矩阵*/
/* al[][]存放基阵的逆阵*/
/* c[]存放变量的价值系数*/
/* c1[]存放第一阶段变量的价值系数*/
/* cb[]存放基变量的价值系数*/
/* l[]存放人工变量的下标*/
main()
{
  int i,j,flag;
  float x,y;
  void oacurs();
  oacurs(0,0,0,0,0);
  if ((in=fopen("lpinput.dat","rb+"))==NULL)
     {printf("无数据文件 lpinput.dat! \n");
```

```
        return;
      }
in= fopen("lpinput.dat","rb+ ");
fread( &x, 4, 1, in); m= (int)x; /*  m 为约束变量个数* /
fread( &x, 4, 1, in); n= (int)x; /*  n 为约束方程总数* /
fread( &x, 4, 1, in); ii= (int)x; /*  ii 为 < =  约束方程数* /
fread( &x, 4, 1, in); jj= (int)x; /*  jj 为 > =  约束方程数* /
fread( &x, 4, 1, in); kk= (int)x; /*  kk 为  =  约束方程数* /
co= m; /*  co 变量总数(包括松弛变量,剩余变量和人工变量数) * /
st= 0; /*  st 人工变量数 * /
fread( &x, 4, 1, in); maxminflag= (int)x;
for(i= 1;i< = m; i+ + )
    fread( &c[i], 4, 1, in);
/*  if (maxminflag> 0)
      for( i= 1; i< = m; i+ + )
         c[i]= -  c[i]; * /
flag= setaij();
if (flag)
      {printf("\nA(i, j)矩阵有错误!!  \n");
        fclose(in);
        exit(0);
      }
for(i= 1;i< = n; i+ + )
      for( j= 1;j< = n; j+ + )
          {if(i= = j) al[i][j]= 1;
      else al[i][j]= 0; }

danxunxin();
}

int setaij() /*  给 a(i, j)赋值并化为标准型* /
    {
      int i, j, s, rgv, flag; /* rgv :人工变量下标* /
      float x;
      flag= 0;
      rgv= m+ n-  kk;
      for (i= 1;i< = vnum;i+ + )
            c1[i]= 0;
      for (i= 1;i< = n;i+ + )
         {for(j= 1;j< = m; j+ + )
               fread(&a[i][j], 4, 1, in);
               fread(&x, 4, 1, in);
               s= (int)x;
```

```
            switch((int)s)
            {
                case 0:   /* 为 <= 约束的处理* /
                      for(k= m+ 1; k< = 3* m; k+ + )
                      a[i][k]= 0;
                      co= co+ 1;
                  a[i][co]= 1; c[co]= 0; d[i]= co;
                  break;
              case 1: /*  为 > =  约束的处理* /
                     for(k= m+ 1; k< = 3* m; k+ + )
                  a[i][k]= 0;
                co= co+ 1; a[i][co]= - 1; c[co]= 0; c1[co]= 0;
                rgv= rgv+ 1; st= st+ 1;
                a[i][rgv]= 1; c[rgv]= - ma; c1[rgv]= 1;
                d[i]= rgv; l[st]= rgv;
                break;
              case 2: /*  为 =  约束的处理* /
                    for(k= m+ 1; k< = 3* m; k+ + )
                  a[i][k]= 0;
              rgv= rgv+ 1; st= st+ 1;
              a[i][rgv]= 1; c[rgv]= - ma; c1[rgv]= 1; d[i]= rgv; l[st]= rgv;
              break;
              default: {flag= 1; }
         }
         fread( &b[i], 4, 1, in);
         b2[i]= b[i];
    }
    co= co+ st;
    if ((ii+ jj+ kk! = n)©©rgv! = (m+ n+ jj))
         flag= 1;
    return(flag);
}

result() /* 输出结果* /
    {int i, j, zbf;
     float y;
     out= fopen("lpout.dat", "w+ ");
     printf("\n  最优解和目标函数最优值为: \n");
     fprintf(out, "  最优解和目标函数最优值为: \n");
     y= 0;
     for (i= 1; i< = m; i+ + )
     {zbf= 0;
     for (j= 1; j< = n; j+ + )
```

```
            if (i= = d[j]) {zbf= 1;break;}
        if (zbf)
            {y= y+ b[j]* cb[j];
             printf("        x%d= %-  6.3f\n", i, b[j]);
             fprintf(out, "        x%d= %-  6.3f\n", i, b[j]);
            }
        else
            { printf("        x%d= 0\n", i);
             fprintf(out, "        x%d= 0\n", i);
            }
        }
      if (maxminflag)
      {printf("        MIN Z= %-  6.3f\n ", y);
       fprintf(out, "        MIN Z= %-  6.3f\n", y);}
      else
        {printf("        MAX Z= %-  6.3f\n", y);
      fprintf(out, "        MAX Z= %-  6.3f\n", y);}
      fclose(out);
    }

setcb() /* 设置初始化基阵 CB* /
   {int i, j;
    for (i= 1;i< = n;i+ + )
        {j= d[i];cb[i]= c[j];}
   }

setcb1() /* 设置第一阶段初始化基阵 CB1* /
   {int i, j;
    for (i= 1;i< = n;i+ + )
        {j= d[i];cb[i]= c1[j];}
   }

setcb2() /* 设置第二阶段初始化基阵 CB2* /
   {int i, j;
    for (i= 1;i< = n;i+ + )
        {j= d[i];cb[i]= c[j];}
   }

thigma1() /* 求检验数* /
    {int i, j;float x;
      for( i= 1; i< = co;i+ + )
        {x= 0;
        for(j= 1; j< = n;j+ + )
```

```
        x= x+ a[j][i]* cb[j];
         x= c1[i]- x;
         JI[i]= x;
        }
    }


thigma2() /* 求检验数* /
    {
    int i,j;float x;
      for(i= 1;i< = co- st;i+ + )
        {x= 0;
        for(j= 1;j< = n;j+ + )
        x= x+ a[j][i]* cb[j];
        x= c[i]- x;
        JI[i]= x;
        }
    }

int p11()/*      * /
   {int i,j,b;
   b= 0;
   for(j= 1;j< = n;j+ + )
       if (a[j][k]> 0) {b= 1;break;}
   if (b) change1();
}

p12()
    {int i,j,s;float y;

      y= 0;
      for(i= 1;i< = n;i+ + )
        {y= y+ b[i]* cb[i] ;}
      s= 0;
      for(i= 1;i< = n;i+ + )
      for(j= 1;j< = n;j+ + )
            if(d[i]= = l[j]) s= 1;
      if ((y> 0)©©(s= = 1))
      {printf("      无可行解！ \n");
           out= fopen("lpout.dat","w+ ");
      fprintf(out,"      无可行解\n");
      fclose(out);
      f1flag= 1;}
```

```
    }

int p21()/*     */
{int i,j,b;
   b=0;
   if (JI[k]>0)
         for(j=1;j<=n;j++)
         {if (a[j][k]>0) b=1;}
if (b) change();
else {printf("    无界解\n");
          out=fopen("lpout.dat","w+");
          fprintf(out,"    无界解\n");
          wjflag=1;
          fclose(out);}
}

int p22()
    {int i,j,s;
      for (i=1;i<=n;i++)
            {j=d[i]; JI[j]=1;}
      s=0;
      for (i=1;i<=co;i++)
          if (JI[i]==0) s=1;
          if (s) {printf("    无穷多最优解\n");
             result();}
      else {printf("    有唯一最优解\n");result();}
}

int p31()/*     */
{int i,j,b;
   b=0;
   if (JI[k]<0)
         for(j=1;j<=n;j++)
      if (a[j][k]>0){b=1;break;}
if (b) change();
else {printf("    无界解\n");
          out=fopen("lpout.dat","w+");
          fprintf(out,"    无界解\n");
          wjflag=1;
          fclose(out);}
}
```

```
int p32( )
    {int i, j, s;
     for (i= 1; i< = n; i+ + )
           {j= d[i]; JI[j] = 1; }
     s= 0;
     for (i= 1; i< = co; i+ + )
         if (JI[i] = = 0) s= 1;
         if (s) {printf("      无穷多最优解\n");
            result(); }
     else {printf("      有唯一最优解\n"); result(); }
}

zjjg1(zjflag, co) /* 显示第一阶段中间结果* /
int zjflag, co;
   {int i, j;
    if (zjflag= = 0) return;
    printf("                    ");
    for(i= 1; i< = co; i+ + )
         printf("%- 7. 3f", c1[i]);
    printf("\n");
    printf("CB    XB   b      ");
    for (j= 1; j< = co; j+ + )
         printf("X%- 6d", j);
   printf("\n");
   for (i= 1; i< = n; i+ + )
         {printf("%- 5. 1f X% 1d %- 5. 1f", cb[i], d[i], b[i]);
             for (j= 1; j< = co; j+ + )
             printf("%- 7. 3f", a[i][j]);
             printf("\n");
         }
    printf("                    ");
    for (j= 1; j< = co; j+ + )
         printf("%- 7. 3f", JI[j]);
    printf("\n");
    wait( );
   }

zjjg2(zjflag, co) /* 显示第二阶段中间结果* /
int zjflag, co;
   {int i, j;
    if (zjflag= = 0) return;
    printf("                    ");
```

```
  for(i= 1;i< = co;i+ + )
      printf("%-  7.3f",c[i]);
  printf("\n");
  printf("CB    XB   b      ");
  for (j= 1;j< = co;j+ + )
      printf("X%-  6d",j);
  printf("\n");
  for (i= 1;i< = n;i+ + )
      {printf("%-  5.1f X%1d %-  5.1f",cb[i],d[i],b[i]);
         for (j= 1;j< = co;j+ + )
         printf("%-  7.3f",a[i][j]);
        printf("\n");
      }
  printf("                      ");
  for (j= 1;j< = co;j+ + )
      printf("%-  7.3f",JI[j]);
  printf("\n");
  wait();
 }

int proce1()
 {int i,j;float y;
  setcb1();
  thigma1();
  zjjg1(zjflag,co);
  do
    {
      k= 1;
      y= JI[1];
      for(i= 2;i< = co;i+ + )
    if( y> JI[i])   { y= JI[i]; k= i;}
    if (y< 0)
    {p11();thigma1();
         printf("      第%2d次迭代\n",ll);
    ll= ll+ 1;
    zjjg1(zjflag,co);}
    else p12();
    }
  while (y< 0);
  /* printf("      第%2d次迭代\n",ll);
  zjjg1(zjflag,co);ll= ll+ 1;* /
 }
```

```
proce2( )
   {int i; float y;
    setcb2( );
    wjflag= 0;
    thigma2( );
    zjjg2( zjflag, co-  st);
    do
       {
         k= 1;
         y= JI[1];
         for(i= 2; i< = co-  st; i+ + )
       if( y< JI[i])    { y= JI[i]; k= i; }
       if (wjflag= = 0)
      {if (y> 0)
              {p21( );
               if (wjflag) break;
               thigma2( );
               printf("       第% 2d 次迭代\n", ll);
               zjjg2(zjflag, co-  st); ll= ll+ 1;
              }
       else p22( ); }
       else
       {break; };
       }
    while (y> 0);
    /* printf("       第% 2d 次迭代\n", ll);
    zjjg2(zjflag, co-  st); ll= ll+ 1; * /
   }


proce3( )
   {int i; float y;
    setcb2( );
    wjflag= 0;
    thigma2( );
    zjjg2( zjflag, co-  st);
    do
       {

         k= 1;
         y= JI[1];
         for(i= 2; i< = co-  st; i+ + )
       if( y> JI[i])    { y= JI[i]; k= i; }
```

```
    if (wjflag= = 0)
   {if (y< 0)
         {p31();
            if (wjflag) break;
          thigma2();
            printf("      第% 2d 次迭代\n", ll);
          zjjg2(zjflag, co- st); ll= ll+ 1; }
    else p32(); }
    else
    {break; };
    }
  while (y< 0);
  /* printf("      第% 2d 次迭代\n", ll);
  zjjg2(zjflag, co- st); ll= ll+ 1; * /
  }

danxunxin()
  {
   ll= 1;
   f1flag= 0;
   zjflag= 0;
   printf("显示中间迭代结果 ? (1- - 是; 0- - - 否): ");
   scanf("% d", &zjflag);
   if (zjflag! = 1) zjflag= 0;
   if (st! = 0)
     {printf("\n 第一阶段迭代......\n");
      if (zjflag) printf("     本阶段初始表:\n");
      proce1(); }
   if ((f1flag= = 0)&&(maxminflag= = 0))
     {printf("\n 第二阶段迭代......\n");
      if (zjflag) printf("     本阶段初始表:\n");
      proce2(); }
   if ((f1flag= = 0)&&(maxminflag= = 1))
     {printf("\n 第二阶段迭代......\n");
      if (zjflag) printf("     本阶段初始表:\n");
      proce3(); }
  }

change1() /* 迭代* /
  { int j, i, p; float x, y, x1;
    y= ma;
    for(i= 1; i< = n; i+ + )
      {if (a[i][k]> 0)
```

```
            { x= (b[i]/a[i][k]);
                if (x< y)
                    { y= x;p= i;}
            }
            }
        d[p]= k;    x= a[p][k];
        for(i= 1;i<= co;i++)
            a[p][i]= a[p][i]/x;
        for (i= 1;i<= n;i++)
        al[p][i]= al[p][i]/x;
        b[p]= b[p]/x;
        for(j= 1;j<= p- 1;j++)
            { x= a[j][k];
                for(i= 1;i<= co;i++)
                a[j][i]= a[j][i]- a[p][i]* x;
                for(i= 1;i<= n;i++)
                al[j][i]= al[j][i]- al[p][i]* x;
            b[j]= b[j]- b[p]* x;
          }
        for(j= p+ 1;j<= n;j++)
            { x= a[j][k];
        for (i= 1;i<= co;i++)
            a[j][i]= a[j][i]- x* a[p][i];
        for (i= 1;i<= n;i++)
            al[j][i]= al[j][i]- al[p][i]* x;
            b[j]= b[j]- b[p]* x;
        }
      cb[p]= c1[k];
    lpy();
}

change() /* 迭代* /
    { int j,i,p;float x,y,x1;
      y= ma;
      for(i= 1;i<= n;i++)
        {if (a[i][k]> 0)
        { x= (b[i]/a[i][k]);
        if (x< y)
                { y= x;p= i;}
        }
        }
     d[p]= k;    x= a[p][k];
    /*  x1= a[p][k];* /
```

```
      for( i= 1; i< = co; i+ + )
         a[ p] [ i] = a[ p] [ i] / x;
      for (i= 1; i< = n; i+ + )
      al[ p] [ i] = al[ p] [ i] / x;
      b[ p] = b[ p]/ x;
      for( j= 1; j< = p- 1; j+ + )
            { x= a[ j] [ k] ;
               for( i= 1; i< = co; i+ + )
            a[ j] [ i] = a[ j] [ i] - a[ p] [ i]* x;
               for( i= 1; i< = n ; i+ + )
               al[ j] [ i] = al[ j] [ i] - al[ p] [ i]* x;
            b[ j] = b[ j] - b[ p]* x;
      }
      for( j= p+ 1; j< = n; j+ + )
          { x= a[ j] [ k] ;
             for( i= 1; i< = co; i+ + )
               a[ j] [ i] = a[ j] [ i] - x* a[ p] [ i] ;
                  for( i= 1; i< = n; i+ + )
                  al[ j] [ i] = al[ j] [ i] - al[ p] [ i]* x;
       b[ j] = b[ j] - b[ p]* x;
          }
    cb[ p] = c[ k] ;
}

lpy()
   {int i, j; float y;
    printf("        影子价格为:\n");
    /* for ( i= 1; i< = n; i+ + )
          {printf("%- 6.3f", cb[ i]) ;
    for (j= 1; j< = n; j+ + )
              printf("   %- 7.3f", al[ i] [ j]) ;
    printf("\n") ;
          }
   * /
   for (i= 1; i< = n; i+ + )
          {y= 0;
   for (j= 1; j< = n; j+ + )
               y= y+ cb[ j]* al[ j] [ i];
   printf("                      y%1d= %- 6.3f\n", i, y) ;
          }
   }
```

附录 2　运输模型参考程序

(1) **输入数据**

```
# include "stdio.h"
main()
{ int i, j, mw, nl;
  float a[20], b[20], c[20][20];
    FILE * fp;
  if ((fp= fopen("trin.dat","wb"))= = NULL)
   { printf("trin.dat 不能找到! \n        正在创建...\n");
    creat("trin.dat","ab+ ");
    printf("请重新输入模型\n");
    exit(0);
   }
  printf("产地数 = ");
  scanf("%d", &mw);
  fwrite(&mw, 2, 1, fp);
  printf("\n 销地数 = ");
  scanf("%d", &nl);
  fwrite(&nl, 2, 1, fp);
  printf("\n 输入各产地产量\n");
 for(i= 0; i< mw; i+ + )
  {scanf("%f", &a[i]);
   fwrite(&a[i], 4, 1, fp);
  }
  printf("\n 输入各销地销量\n");
 for(i= 0; i< nl; i+ + )
  {scanf("%f", &b[i]);
   fwrite(&b[i], 4, 1, fp);
  }
 printf("\n 输入运输价格系数\n");
 for(i= 0; i< mw; i+ + )
  for(j= 0; j< nl; j+ + )
  {scanf("%f", &c[i][j]);
   fwrite(&c[i][j], 4, 1, fp);
  }
 fclose(fp);
}
```

(2) **求解模块**

```
# include "stdio.h"
int mw, nl, fw[20][20], f, unsc, bb;
```

```
int ib[20], jb[20], ie, je, il, jl, ll;
float a[20], b[20], a1[20], b1[20];
float c[20][20], x[20][20], min, max;
main()
{ int i, j, k, il, jl, unsc, kk, ii, jj;
        FILE * fp;
    if ((fp= fopen("trin.dat", "rb"))= = NULL)
      { printf("数据文件 trin.dat 找不到! \n");
        exit(0);
       }
    fread(&mw, 2, 1, fp);
       fread(&nl, 2, 1, fp);
   ie= 0;
   for(i= 0; i< mw; i+ + )
    { fread(&a[i], 4, 1, fp);
      a1[i]= a[i];
    ie= ie+ a[i];
    }
   je= 0;
   for(i= 0; i< nl; i+ + )
    { fread(&b[i], 4, 1, fp);
    b1[i]= b[i];
    je= je+ b[i];
    }
   max= 0;
   for(i= 0; i< mw; i+ + )
   { for(j= 0; j< nl; j+ + )
      {   fread(&c[i][j], 4, 1, fp);
       fw[i][j]= 0;
       x[i][j]= - 1;
       if (c[i][j]> max)
          max= c[i][j];
       }
   }
   fclose(fp);
ll= 0;
if (ie< je)
    {ll= 1;
      mw+ + ;
      for (j= 0; j< nl; j+ + )
      {c[mw- 1][j]= 0;
       fw[mw- 1][j]= 0;
       a[mw- 1]= je- ie;
```

```
       x[mw-1][j]=-1;
      }
    }
    else
       if (ie>je)
       {ll=2;
         nl++;
         for (j=0;j<mw;j++)
         { c[j][nl-1]=0;
      fw[j][nl-1]=0;
      x[j][nl-1]=-1;
      b[nl-1]=ie-je;
         }
      }
   k=0;
for(kk=0;kk<mw+nl-1;kk++)
{
   min=max;
   for(i=0;i<mw;i++)
   for(j=0;j<nl;j++)
    if ((c[i][j]<=min)&&(a[i]!=0)&&(b[j]!=0))
    {
      min=c[i][j];
      ii=i;
      jj=j;
    }
   if (a[ii]<b[jj])
      { x[ii][jj]=a[ii];
         ib[k]=ii;
         jb[k]=jj;
         k++;
         b[jj]=b[jj]-a[ii];
         a[ii]=0;
      }
    else
      { if (a[ii]>b[jj])
      { x[ii][jj]=b[jj];
            ib[k]=ii;
            jb[k]=jj;
            k++;
            a[ii]=a[ii]-b[jj];
            b[jj]=0;
      }
```

```
            else
          { x[ii][jj]= b[jj];
            ib[k]= ii;
            jb[k]= jj;
            k++;
            a[ii]= 0;
            b[jj]= 0;
           if (kk< mw+ nl- 2)
           { j= 0;
            for(i= 0;i< nl;i++)
            if ((x[ii][i]== - 1)&&(b[i]!= 0))
              { x[ii][i]= 0;
                 ib[k]= ii;
                 j= 1;    jb[k]= i;
                 i= nl;
                 k++;kk++;
              }
            if (j== 0)
              for(i= 0;i< mw;i++)
               if ((x[i][jj]== - 1)&&(a[i]!= 0))
                 { x[i][jj]= 0;
                    ib[k]= i;
                    jb[k]= jj;
                    i= mw;
                    k++;kk++;
                 }

           }
          }
      }
   } prin();
     uv();
   }
   uv()
{ float u[20],v[20],uv[20][20],jg,check;
   int ug[20],vg[20],i,j,k,fx,bh;
         il= 0; jl= 0; unsc= 1;
    for(i= 0;i< mw;i++)
    ug[i]= 0;
    for(j= 0;j< nl;j++)
    vg[j]= 0;
    ug[0]= 1;
    u[0]= 0;
```

```
for(i=0;i<mw;i++)
for(j=0;j<nl;j++)
  if (x[i][j]!=-1)
    { if ((ug[i]==1)&&(vg[j]==0))
  { v[j]=c[i][j]-u[i];
        vg[j]=1;
    }
      else
    if ((ug[i]==0)&&(vg[j]==1))
      { u[i]=c[i][j]-v[j];
        ug[i]=1;
       for(k=0;k<nl;k++)
        if (x[i][k]!=-1)
         { if ((ug[i]==1)&&(vg[k]==0))
           { v[k]=c[i][k]-u[i];
          vg[k]=1;
           }
         }
      }
        }
    check=1;
  for(i=0;i<mw;i++)
  for(j=0;j<nl;j++)
  { fw[i][j]=0;
   uv[i][j]=c[i][j]-u[i]-v[j];
   if ((uv[i][j]<check)&&(x[i][j]==-1))
    { check=uv[i][j];
      il=i;
      jl=j;
    }
  }
   i=il;j=jl;
   unsc=1;bh=0;
  if ((check<0)&&(unsc)&&(jl<nl-1))
     {bhl(i,++j,1,bh);
  --j;
     }
  if ((check<0)&&(unsc)&&(il<mw-1))
    { bhl(++i,j,2,bh); --i; }
  if ((check<0)&&(unsc)&&(jl>0))
   {  bhl(i,--j,3,bh); ++j; }
  if ((check<0)&&(unsc)&&(il>0))
     bhl(--i,j,4,bh);
```

```
    if (check= = 0)
  {
   printf("   本问题有无穷多最优解,此解只是其中之一! \n");}
  exit(0); }

bhl(i,j,fx,bh)
int i,j,fx,bh;
{ int numb,id,jd,k;
  for(k= bh;k< bb;k+ + )
    { id= ib[k];
      jd= jb[k];
      fw[id][jd]= 0;
    }
  bb= bh;
  if ((i= = il)&&(j= = jl)&& (fx! = 0))
    {bb= bh;
   unsc= 0;
    return;
    }
  else
    if ((x[i][j]= = - 1)©©(fw[i][j]= = 1))
      switch(fx)
      {
       case 1:  if (j< nl- 1)
             bhl(i,+ + j,1,bh);
             - - j;
             break;
       case 2:  if (i< mw- 1)
             bhl(+ + i,j,2,bh);
             - - i;
             break;
       case 3:  if (j> 0)
             bhl(i,- - j,3,bh);
             + + j;
             break;
       case 4:  if (i> 0)
             bhl(- - i,j,4,bh);
             + + i;
             break;
       defaut:  printf("方向错误 ! \n");
      }
      else
      {
```

```
if ((fx! = 3)&&(j< nl- 1)&&(unsc))
        { if ((fx! = 1)&&(fw[i][j]= = 0))
         { ib[bh]= i;
        jb[bh]= j;
         fw[i][j]= 1;
         bh+ + ;
         bb= bh;
            }
            else
        if ((fw[i][j]= = 1)&&(fx= = 1))
           { fw[i][j]= 0;
              bh- - ;
           }
         bhl(i,+ + j, 1, bh);
         - - j;
        }
      if ((fx! = 4)&&(i< mw- 1)&&(unsc))
     { if ((fx! = 2)&&(fw[i][j]= = 0))
         { ib[bh]= i;
        jb[bh]= j;
         fw[i][j]= 1;
         bh+ + ;
         bb= bh;
            }
            else
        if ((fw[i][j]= = 1)&&(fx= = 2))
           { fw[i][j]= 0;
              bh- - ;
           }
  bhl(+ + i, j, 2, bh);
     - - i;
     }
   if ((fx! = 1)&&(j> 0)&&(unsc))
   { if ((fx! = 3)&&(fw[i][j]= = 0))
   { ib[bh]= i;
   jb[bh]= j;
   fw[i][j]= 1;
   bh+ + ;
   bb= bh;
        }
        else
  if ((fw[i][j]= = 1)&&(fx= = 3))
           { fw[i][j]= 0;
```

```
                    bh--;
                  }
        bhl(i,--j,3,bh);
         ++j;
        }
           if ((fx!=2)&&(i>0)&&(unsc))
           { if ((fx!=4)&&(fw[i][j]==0))
              { ib[bh]=i;
             jb[bh]=j;
              fw[i][j]=1;
              bh++;
              bb=bh;
              }
           else
        if ((fw[i][j]==1)&&(fx==4))
                  { fw[i][j]=0;
                    bh--;
                  }
        bhl(--i,j,4,bh);
         ++i;
           }
   }
if (unsc==0)
   {   min=je;
    for(k=0;k<bb;k++)
       { i=ib[k];
          j=jb[k];
          if (x[i][j]<min)
          { min=x[i][j];
       id=i;
       jd=j;
          }
          k++;
       }
      numb=0; min=x[id][jd];
    for(k=0;k<bb;k++)
       { i=ib[k];
          j=jb[k];
          if (k%2==0)
       { x[i][j]=x[i][j]-min;
          if ((x[i][j]==0)&&(numb==0))
                { x[i][j]=-1;
                  numb++;
```

```
                }
            }
          else
            x[i][j]= x[i][j]+ min;
            }
      x[il][jl]= min;
      prin();
        uv();
     }
}
prin()
   { int i,j;    float jg;
     jg= 0;
    if (ll= = 1)
            { printf("产 <   销\n");
            for (i= 0;i< mw;i+ + )
          { for(j= 0;j< nl+ 1;j+ + )
            { if (i= = 0)
                  if (j= = 0)
                     printf("             ");
                    else
                    printf("销地%d    ",j);
                else
                  if (j= = 0)
                  printf("产地%d",i);
                    else
                    if (x[i- 1][j- 1]! = - 1)
                    { printf(" %4.2f ",x[i- 1][j- 1]);
                  jg= jg+ c[i- 1][j- 1]* x[i- 1][j- 1];
                    }
                    else
                    printf("    - -      ");
                }
            printf("\n");
                }
               for (j= 0;j< nl;j+ + )
          { min= 0;
          for(i= 0;i< mw- 1;i+ + )
              if (x[i][j]! = - 1)
               min= min+ x[i][j];
            if (min< b1[j])
            printf("销地%d 供应不足,还需 %f\n",j+ 1, b1[j]- min);
          }
```

```
}
 else
 if (ll= = 2)
 {printf("产 >  销\n");
 for (i= 0;i< mw+ 1;i+ + )
{ for(j= 0;j< nl;j+ + )
 { if (i= = 0)
       if (j= = 0)
          printf("           ");
         else
         printf("销地%d   ", j);
      else
            if (j= = 0)
          printf("产地%d", i);
         else
         if (x[i- 1][j- 1]! = - 1)
        { printf(" %4.2f ",x[i- 1][j- 1]);
          jg= jg+ x[i- 1][j- 1]* c[i- 1][j- 1];
         }
         else
         printf("   - -     ");
     }
 printf("\n");            }
 for (i= 0;i< mw;i+ + )
{ min= 0;
for(j= 0;j< nl- 1;j+ + )
   if (x[i][j]! = - 1)
    min= min+ x[i][j];
 if (min< a1[i])
 printf("产地%d 剩余 %f\n",i+ 1, a1[i]- min);
}
}
    else
      if (ll= = 0)
    for (i= 0;i< mw+ 1;i+ + )
{ for(j= 0;j< nl+ 1;j+ + )
 { if (i= = 0)
        {if (j= = 0)
          printf("           ");
         else
         printf("销地%d   ", j);
        }
      else
```

```
    {if (j= = 0)
        printf( "产地% d", i);
       else
       {if ( x[i- 1][j- 1]! = - 1 )
        {printf(" % 4. 2f ", x[i- 1][j- 1]);
        jg= jg+ c[i- 1][j- 1]* x[i- 1][j- 1]; }
       else
       printf("    - -    ");
    } } }
    printf("\n");
    }
printf("\n     总运输价格是: % 7. 4f\n", jg);
}
```

参 考 文 献

1. 程理民, 张亚光主编. 运筹学 I. 北京: 科学技术文献出版社, 1998
2. 吴江. 经济数学模型及其应用. 南昌: 江西高校出版社, 1995
3. 滕传琳主编. 管理运筹学. 北京: 中国铁道出版社, 1986
4. 运筹学教材编写组编. 运筹学. 北京: 清华大学出版社, 1990
5. 张莹编著. 运筹学基础. 北京: 清华大学出版社, 1995
6. [美] S. P 勃雷达兰, A. C 哈克斯, T. L 曼内蒂著. 翟立林等译. 应用数学规划. 北京: 机械工业出版社, 1983
7. 魏国华, 傅家良, 同仲良编著. 实用运筹学. 上海: 复旦大学出版社, 1987
8. 高鸿祯著. 经济管理中的决策方法. 上海: 上海人民出版社, 1990
9. 中山大学, 四川大学, 西北大学, 武汉大学, 湘潭大学编. 运筹学 —— 经济管理决策方法. 成都: 四川大学出版社, 1989
10. 张维迎著. 博弈论与信息经济学. 上海三联书店, 上海: 上海人民出版社, 1996
11. L. R. Foulds. Optimization Techniques. Springer-Verlag New York Inc., 1981
12. 罗伯特. E. 拉森等. 动态规划原理. 北京: 清华大学出版社, 1984
13. 马仲蕃等. 数学规划讲义. 北京: 中国人民大学出版社, 1981
14. 左军. 多目标决策分析. 杭州: 浙江大学出版社, 1991
15. 赵焕臣等. 层次分析法 —— 一种简易的新决策方法. 北京: 科学出版社, 1986
16. A. 乔伊科奇等. 多目标决策分析及其在工程和经济中的应用. 北京: 航空工业出版社, 1987
17. 曲格平. 2000 年中国的环境, 1989
18. 徐光辉. 随机服务系统. 北京: 科学出版社, 1984
19. 徐钟济. 蒙特卡罗方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1985
20. Hamdy A. Taha. 运筹学. 上海: 上海人民出版社, 1985
21. 张雪野等. 经营决策方法. 上海: 华东师范大学出版社, 1996
22. R. H. 约翰逊等. 管理的数量方法. 南京: 江苏人民出版社, 1984
23. 李书涛. 决策支持系统原理与技术. 北京: 北京理工大学出版社, 1996
24. Hans G. Daellenbach. Introduction to Operations Research. Allyn and Bacon, 1978
25. 黄洁纲. 存储论原理及其应用. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1984
26. 李向东. 运筹学 —— 管理科学基础. 北京: 北京理工大学出版社, 1990
27. 胡运权. 运筹学基础及应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1990
28. 卢向华等. 运筹学教程. 北京: 高等教育出版社, 1992
29. 中山大学等. 运筹学. 成都: 四川大学出版社, 1989
30. 卢国华编著. 运筹学教程. 北京: 高等教育出版社, 1992
31. 蓝伯雄等编著. 管理数学(下) —— 运筹学. 北京: 清华大学出版社, 1997
32. 黄学忠著. 经济信息与管理. 北京: 人民出版社, 1985
33. 胡运权主编. 运筹学习题集. 北京: 清华大学出版社, 1995
34. 盛昭瀚等. 最优化方法基础教程. 南京: 东南大学出版社, 1992