

高等学校教学参考书

# 普通物理学

(第五版)

## 思考题分析与拓展

胡盘新 孙 疆 黄颂翔 编

高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

普通物理学(第五版)思考题分析与拓展 胡盘  
新、孙 疆、黄颂翔编 .—北京:高等教育出版社 .  
2004 .11

ISBN 7 - 04 - 015565 - 6

.普... . 胡... 孙... 黄... .普通物  
理学 - 高等学校 - 解题 .O4 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 092157 号

策划编辑	刘 伟	责任编辑	王文颖	封面设计	李卫青
责任绘图	黄建英	版式设计	王艳红		
责任校对	王效珍	责任印制			

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: www .hep .edu .cn
总 机	010 - 58581000		http: www .hep .com .cn

经 销 新华书店北京发行所  
排 版 高等教育出版社照排中心  
印 刷

开 本	850 × 1168 1/32	版 次	年 月 第 1 版
印 张	8 .625	印 次	年 月 第 次印刷
字 数	220 000	定 价	12 .00 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

物料号:15565 - 00

## 内容简介

本书是为配合程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第五版)而编写的配套辅导书。本书按各章顺序对全部思考题在普通物理的范围内进行了尽可能详细的分析,除了主教材的思考题外还挑选了若干师生有兴趣的问题以专题的形式进行了拓展讨论。本书有助于学生掌握基本概念和基本规律,培养自学的能力和科学的思想方法,也有助于一线教师通过“讨论式教学”提高实际教学效果。

本书适合于高等学校工科各专业,特别是使用程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第五版)的师生作为参考书。

# 前 言

本书是程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第五版)的配套辅导书,对主教材中的全部思考题在普通物理的范围内,进行了尽可能详细的解答。

在物理课的学习过程中,不仅要求学生解答计算题,还要求解答思考题。这不仅能使学生自我检测对基本概念和基本规律的掌握情况,还能启发学生正确运用基本规律来解释物理现象和有关问题,这对训练和培养学生科学的思想方法以及分析问题和解决问题的能力是有一定帮助的。编写本书的目的是帮助学生在过程中能够正确地思考问题,避免得出错误的结论。

为了拓展学生的思路,除了主教材的思考题外,本书还挑选了若干学生在课余提出的或感兴趣的问题,以专题的形式作了较详细的解答。希冀学生能举一反三,积极思考,提出问题,从而提高教学效果。

本书由胡盘新、孙韃疆、黄颂翔主编。黄颂翔编写第一章至第七章;孙韃疆编写第八章至十八章,并对全书统稿;胡盘新教授审阅了全书。在编写本书的“专题讨论”时,从参阅的有关文献资料中得到很多启发和教益,在此向所有作者致以诚挚的谢意。本书为“高等教育百门精品课程教材建设计划”中,“大学物理课程立体化系列教材建设”项目(上海交通大学)之一,得到了“上海交通大学国家工科物理教学基地”、上海大学物理系的大力支持。高等教育出版社胡凯飞、刘伟同志为本书的出版付出了大量的劳动,在此也一并表示感谢。

由于编者的学识有限,难免有错误和不妥之处,恳请读者和同行、专家不吝赐教。

编者

2004年2月

# 目 录

第一章	质点的运动 .....	1
第二章	牛顿运动定律 .....	12
第三章	运动的守恒定律 .....	21
第四章	刚体的转动 .....	31
第五章	相对论基础 .....	37
第六章	气体动理论 .....	44
第七章	热力学基础 .....	54
第八章	真空中的静电场 .....	65
第九章	导体和电介质中的静电场 .....	73
第十章	恒定电流和恒定电场 .....	87
第十一章	真空中的恒定磁场 .....	95
第十二章	磁介质中的磁场 .....	106
第十三章	电磁感应和暂态过程 .....	112
第十四章	麦克斯韦方程组 电磁场 .....	127
第十五章	简谐振动和电磁振荡 .....	133
第十六章	机械波和电磁波 .....	148
第十七章	波动光学 .....	162
第十八章	早期量子论和量子力学基础 .....	190
专题讨论	.....	201
1.	雨中快跑能少淋雨吗 .....	201
2.	地球卫星受阻后的动能会增大吗 .....	204
3.	荡秋千的力学 .....	206
4.	参考系与机械能守恒定律及其他 .....	207

5 . 质点的角动量和刚体定轴转动的角动量 .....	211
6 . 列车会被雷电击中吗 .....	216
7 . 孪生子效应 .....	219
8 . 最概然速率不对应最概然动能 .....	221
9 . 单位时间内有多少分子碰撞了单位壁面 .....	223
10 . 多方过程的热容量和热力学特征 .....	225
11 . 冰箱可以替代空调降温吗 .....	230
12 . 关于电势零点的选择 .....	233
13 . 静电场系统的能量 .....	239
14 . 磁悬浮列车 .....	243
15 . 电磁感应的两个公式一致吗 .....	246
16 . 如何通过地震波了解地球内部的构造 .....	254
17 . 界面反射和“半波损失” .....	255
18 . 日光照射下薄膜的干涉 .....	260
19 . 望远镜和显微镜的分辨率 .....	263
20 . 光电效应中一个电子能吸引多个光子吗 .....	266

# 第一章 质点的运动

1 - 1 回答下列问题：

- (1) 一物体具有加速度而其速度为零,是否可能?
- (2) 一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度,是否可能?
- (3) 一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率,是否可能?
- (4) 一物体具有沿  $x$  轴正方向的加速度而有沿  $x$  轴负方向的速度,是否可能?
- (5) 一物体的加速度大小恒定而其速度的方向改变,是否可能?

答：位矢、位移、速度和加速度都是描述物体机械运动的基本物理量,具有相对性、瞬时性和矢量性等基本性质.位矢随时间的变化关系  $r(t)$  是物体的运动方程,  $r(t)$  对时间的变化率是速度  $v(t)$ ,  $v(t)$  对时间的变化率是加速度  $a(t)$ .因此,  $r(t)$ 、 $v(t)$  和  $a(t)$  在物体的一般运动中都应理解为是时间  $t$  的矢量函数,即它们的大小和方向都可随时间变化.判断这些概念时需注意函数、某时刻的函数值以及该时刻函数的变化率之间的区别;矢量函数的变化率既包括矢量大小的变化,也包括矢量方向的变化.所以,

(1) 一物体在某时刻的  $a \neq 0, v = 0$  是可能的.表明物体在某时刻虽处于静止状态,但其速度的变化率不为零.例如:竖直上抛物体在达到最高点时,弹簧振子在位移的最大或最小值处时,均有速度为零而加速度不为零的状态.

(2) 一物体在运动过程中始终保持速度的大小  $|v| = v$  不变,而方向随时间变化是可能的,匀速率的曲线运动就是这种情况.例如:作匀速率圆周运动的物体,其速度的大小恒定而方向不



断变化 .

(3) 速度是矢量 .恒定的速度意味着速度的大小、方向均不变;这只能是匀速率的直线运动 .所以,具有恒定的速度并有变化的速率的运动是不可能存在的 .

(4) 物体沿  $x$  轴(一维直线)运动时,位矢、位移、速度和加速度只有两个方向,矢量可作标量处理,其方向由标量的正负来表示 .因此,  $v < 0$  而  $a > 0$  是可能的,表明物体的运动速度沿  $x$  轴负方向,但其加速度沿  $x$  轴正方向 .例如:作匀减速直线运动的物体,其加速度方向与速度方向相反 .

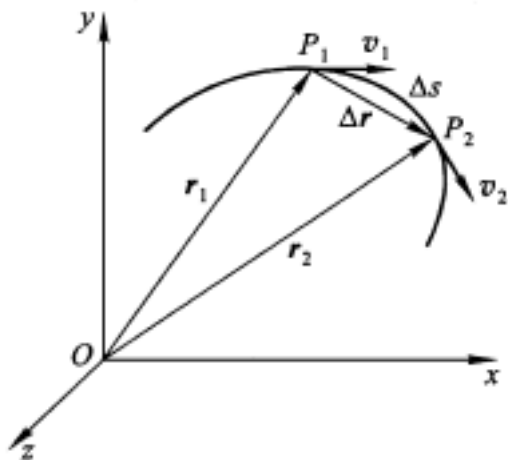
(5) 同(2)的分析,是可能的 .例如,作抛体运动的物体,具有大小、方向恒定的重力加速度而速度方向却随时间改变 .又如,在水平面内作匀速率圆周运动的物体,具有恒定的法向加速度,大小不变,但速度的方向却处处沿圆周的切线方向,不断在变化 .

### 1 - 2 回答下列问题:

(1) 位移和路程有何区别?在什么情况下两者的量值相等?在什么情况下并不相等?

(2) 平均速度和平均速率有何区别?在什么情况下两者的量值相等?瞬时速度和平均速度的关系和区别是怎样的?瞬时速率和平均速率的关系和区别又是怎样的?

答:(1) 位移  $r$  是矢量,路程  $s$  是标量 .如题 1 - 2 图所示,质点在平面内沿曲线从  $P_1$  运动到  $P_2$  的位移为  $r = r_2 - r_1$ ,大小为由  $P_1$  到  $P_2$  的割线的长度,方向由  $P_1$  指向  $P_2$ ,是描述质点在  $t$  时间内空间位置变化的物理量,是一矢量;质点在  $t$  内所经路径的长度为路程  $s$ ,图中表示为割线  $\overline{P_1 P_2} = |r|$  对应的弧长,是一正值标量 .矢量的加减运算遵循“平行四边形法则”,标量则遵循“代数法则” .曲线运动中,位移的大小  $|r|$  一般与路程不相等,但在  $\lim_{t \rightarrow 0} |r| = |dr|$  时,  $|dr| = ds$  两者相等 .此外,在运动



题 1 - 2 图

方向不变的直线运动中,质点位移的大小与路程相等 .

(2) 平均速度  $\bar{v} = \frac{r}{t}$  是矢量, 平均速率  $\bar{v} = \frac{s}{t}$  是标量 . 平均速度  $\bar{v}$  反映一段时间间隔  $t$  内质点完成位移  $r$  的快慢程度, 其方向是位移  $r$  的方向, 大小  $|\bar{v}| = \frac{|r|}{t}$ , 是单位时间内质点完成位移的大小; 而平均速率  $\bar{v}$  是单位时间内质点所经历的路程, 通常情况下两者的量值不相等, 即  $|\bar{v}| \neq \bar{v}$ . 典型的例子就是质点在完成一个圆周运动时的  $\bar{v} = 0$ , 而  $\bar{v} \neq 0$ . 只有在运动方向不变的直线运动中, 平均速度在量值上才与平均速率相等 .

瞬时速度  $v$  和平均速度  $\bar{v}$  都是矢量 . 瞬时速度  $v$  反映质点在  $t \rightarrow 0$  瞬时完成位移  $dr$  的快慢程度, 是平均速度  $\bar{v}$  在  $t \rightarrow 0$  时的极限, 其方向沿  $r$  在  $t \rightarrow 0$  时的极限方向, 即运动轨迹的切线方向 . 一般曲线运动中  $v \neq \bar{v}$ , 仅在匀速直线运动中  $v = \bar{v}$  .

瞬时速度的大小称为速率,  $v = |v| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$ , 平均速率  $\bar{v} = \frac{s}{t}$ , 它们都是标量 . 由  $v = \lim_{t \rightarrow 0} |\bar{v}| = \lim_{t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s}{t}$  可见, 瞬时速率、平均速度的大小在  $t \rightarrow 0$  时的极限和平均速率  $\bar{v}$  在  $t \rightarrow 0$

时的极限三者是相等的。

1 - 3 回答下列问题：

(1) 有人说：“运动物体的加速度越大，物体的速度也越大”，你认为对不对？

(2) 有人说：“物体在直线上运动前进时，如果物体向前的加速度减小，物体前进的速度也就减小”，你认为对不对？

(3) 有人说：“物体加速度的值很大，而物体速度的值可以不变，是不可能的”，你认为如何？

答：物体运动的速度和加速度都是矢量，有大小和方向，在一般运动情况下，它们都是随时间变化的矢量函数。某时刻物体所具有的加速度是速度函数在该时刻的时间变化率，只要速度的大小和方向两者或其中之一在该时刻有变化，物体即具有一定大小和方向的加速度。

(1) 运动物体的加速度很大，说明物体运动速度的变化率很大，但运动的速度不一定很大，甚至可以为零。例如：弹簧振子在最大位移处时，加速度最大，而振子的速度却为零。所以，“运动物体的加速度越大，物体的速度也越大”的说法是错误的。

(2) 物体作直线运动时，向前运动的加速度减小，表明向前运动速度的变化率在减小，即速度函数随时间变化曲线的斜率在变小，但向前运动的速度却是增大的。物体向前运动的加速度减小为零时，物体作匀速直线运动，前进的速度并不减小。所以，“物体在直线上运动前进时，如果物体向前的加速度减小，物体前进的速度也就减小”的说法也是错误的。

(3) 物体加速度的值很大，而物体速度的值可以不变，是可能的。因为速度的值不变，表明物体作匀速率运动，并不说明物体的运动方向不变。所以，作匀速率运动的物体可以有很大的加速度值。例如：作匀速率圆周运动的物体，加速度值  $a_n = \frac{v^2}{R}$  正比于恒定

速率的平方 .

1 - 4 设质点的运动方程  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , 在计算质点的速度和加速度时, 有人先求出

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

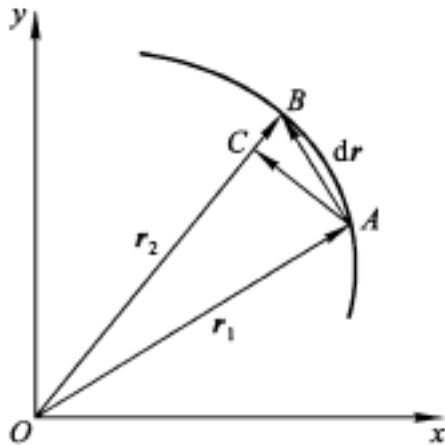
然后根据  $v = \frac{dr}{dt}$  及  $a = \frac{d^2 r}{dt^2}$

而求得结果; 又有人先计算速度和加速度的分量, 再合成求得结果, 即

$$v = \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} \quad \text{及} \quad a = \sqrt{\left[\frac{d^2 x}{dt^2}\right]^2 + \left[\frac{d^2 y}{dt^2}\right]^2}.$$

你认为哪一种正确? 两者差别何在?

答: 计算速度和加速度的大小, 后者的方法是正确的. 前者的错误在于没有正确理解速度和加速度的定义, 没有正确理解速度和加速度的矢量性.



题 1 - 4 图

质点在  $Oxy$  平面内作曲线运动时, 矢径  $r = x(t)i + y(t)j$  随时间变化,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  是  $t$  时刻矢径  $r$  的大小. 质点的速度

$v = \frac{dr}{dt}$ , 其大小为速率  $v$ ,

$$v = |v| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dy}{dt} \right]^2},$$

它不等于位置矢量  $r$  的大小随时间的变化率

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{x^2 + y^2} \right],$$

即  $|dr| = dr$ .

速度  $v$  的方向沿轨迹切向, 也就是  $dr$  的方向, 除直线运动外, 一般并不沿位置矢量  $r$  的方向.

例如, 在圆周运动中, 如以圆心为坐标原点, 则任意时刻位置矢量的大小, 等于圆周的半径, 都有  $dr = d\left[ \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0$ , 但任意时刻的  $|dr| \neq 0$ .

所以,  $\frac{dr}{dt}$  给出的是位置矢量大小的时间变化率,  $v =$

$$\sqrt{\left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dy}{dt} \right]^2} \text{ 才是速度的大小.}$$

同样,  $Oxy$  平面内质点的速度为  $v = v_x(t)i + v_y(t)j$ , 加速度  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$  为速度  $v$  对时间的变化率.  $a$  的大小为

$$a = \left| \frac{dv}{dt} \right| = \sqrt{\left[ \frac{dv_x}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dv_y}{dt} \right]^2} = \sqrt{\left[ \frac{d^2x}{dt^2} \right]^2 + \left[ \frac{d^2y}{dt^2} \right]^2}.$$

而  $\frac{d^2r}{dt^2}$  只是位置矢量的模对时间的二次变化率.

$a$  的方向是  $dv$  的方向, 而非  $v$  的方向, 更非  $r$  的方向.

对于以圆心为坐标原点的质点的圆周运动,  $r = \text{常数}$ ,  $\frac{dr}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ . 若由此认为作圆周运动质点加速度的大小  $a = 0$ , 显然是错误的.

用平面极坐标描述质点的平面运动时, 位置矢量  $r$  的大小和方向用极径  $r$  和极角  $\theta$  表示. 质点运动的速度  $v$  和加速度  $a$  也都

可表示为沿径向的和垂直于径向的两个分量的叠加,

即  $v = v_r(t) e_r + v(t) e$  和  $a = a_r(t) e_r + a(t) e$  .

其中  $v_r = \frac{dr}{dt}$ ,  $a_r = \frac{d^2 r}{dt^2}$  .

所以,前者求出的只是速度  $v$  和加速度  $a$  的径向分量 .

1 - 5 试回答下列问题:

(1) 匀加速运动是否一定是直线运动? 为什么?

(2) 在圆周运动中,加速度方向是否一定指向圆心? 为什么?

答: 加速度是速度的时间变化率,它的方向指向速度变化的极限方向,而速度的方向总是沿轨迹的切向.因此,在质点的一般运动中,加速度的方向不同于速度的方向,不沿轨迹的切向 .

(1) 匀加速运动意味着质点在运动过程中加速度的大小是常数,而方向恒定不变.比如重力加速度  $g$ ,在一定条件下可看作是大小和方向都不变的常矢量.质点以  $g$  所作的匀加速运动轨迹可以是直线,也可以是抛物线.作匀加速直线运动时,质点的速度  $v$  及其增量  $dv$  都沿直线,加速度  $a$  的方向自然沿同一直线;作抛体运动时,速度  $v$  的方向总是沿抛物线的切向,而其增量  $dv$  的方向始终与  $g$  一致 .

所以,匀加速运动的轨迹不一定是直线 .

(2) 在匀速率圆周运动中,质点运动速度的大小不变,加速度只反映速度方向的变化率,在自然坐标系中,表示为法向加速度,指向圆心.但在变速率圆周运动中,质点运动速度的大小和方向都有变化,除法向加速度外,还有切向加速度  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,合加速度的方向不再指向圆心 .

1 - 6 对于物体的曲线运动有下面两种说法:

(1) 物体作曲线运动时,必有加速度,加速度的法向分量一定

不等于零。

(2) 物体作曲线运动时速度方向一定在运动轨迹的切线方向,法向分速度恒等于零,因此其法向加速度也一定等于零。

试判断上述两种说法是否正确,并讨论物体作曲线运动时速度、加速度的大小、方向及其关系。

答:加速度的产生,是由于质点的运动速度发生了变化。无论是速度  $v$  的大小还是  $v$  的方向,只要发生了变化都会产生加速度。用自然坐标系可直接反映出产生加速度的这两个因素,即

$$a = a_n + a_t = \frac{v^2}{\rho} e_n + \frac{dv}{dt} e_t .$$

切向加速度  $a_t$  反映速度大小的变化,而法向加速度  $a_n$  则反映了速度方向的变化。

(1) 正确。物体作曲线运动时,  $v$  的方向时刻在变,因此一定有加速度,加速度的法向分量一定不为零。

(2) 错误。物体作曲线运动时,  $v$  沿轨迹的切线方向,方向时刻在变。因此,法向加速度  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  一定不为零。

1 - 7 一个作平面运动的质点,它的运动方程是  $r = r(t)$ ,  $v = v(t)$ , 如果

(1)  $\frac{dr}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} \neq 0$ , 质点作什么运动?

(2)  $\frac{dv}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} \neq 0$ , 质点作什么运动?

答: (1) 质点作平面运动时,  $\frac{dr}{dt} = 0$  表明质点在运动过程中, 它的矢径  $r$  的大小保持不变;  $\frac{dv}{dt} \neq 0$  表明质点运动的速度不为零, 即矢径  $r$  的方向在变化。因此质点作圆周运动。

(2)  $\frac{dv}{dt} = 0$  表明质点在运动过程中速度  $v$  的大小保持不变;

$\frac{d v}{d t} \neq 0$  表明质点运动的加速度不为零, 即速度  $v$  的方向在变化 .  
因此质点作匀速率曲线运动 .

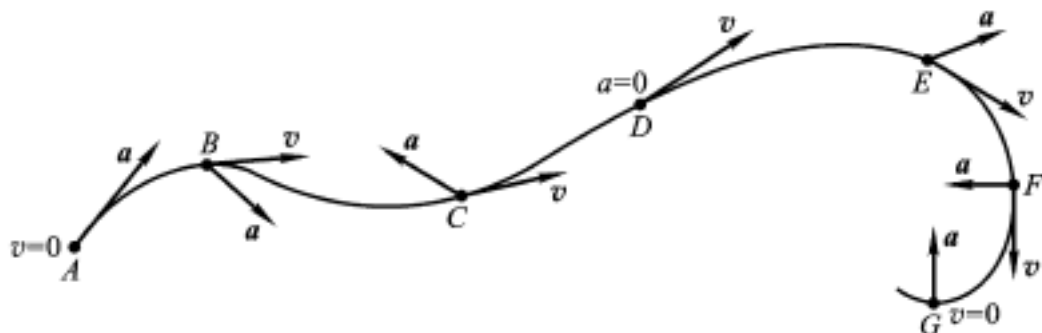
1 - 8 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直 ?  
任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直 ?

答: 在匀速率圆周运动中, 速度  $v$  的大小不变, 质点的加速度为法向加速度, 其方向与速度方向相垂直, 指向圆心 . 在变速率圆周运动中, 速度  $v$  的大小也随时间变化, 质点的加速度不但有法向分量, 还有切向分量 . 因此, 加速度的方向不垂直于速度方向, 不指向圆心 .

在匀速率曲线运动中, 只要速度方向有变化, 加速度只能有法向分量, 一定与沿曲线切向的速度方向垂直, 并指向质点所在处曲线的曲率中心; 在变速率曲线运动中, 加速度一定不与速度方向垂直, 但一定指向轨迹的凹侧 .

1 - 9 一质点沿轨道  $ABCDEFGG$  运动, 试分析图中各点处的运动, 把答案填入下表 .

各点情况	A	B	C	D	E	F	G
运动是否可能	是	是	是	是	否	是	是
速度将增大还是减小	增大	增大	减小	不变		不变	
速度方向将变化否	否	是	是	否		是	



题 1 - 9 图

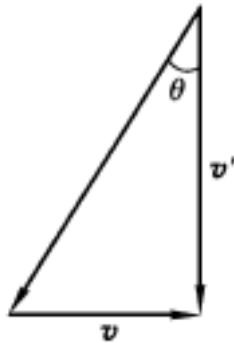


1 - 10 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一石子,此石子能否落入人的手中?如果石子抛出后,火车以恒定的加速度前进,结果又将如何?

答:匀速前进的火车可视作相对地面运动的惯性系.水平方向上,相对火车静止的所有物体相对地面具有与火车相同的水平运动速度.在车上竖直上抛的石子相对火车没有水平运动速度,因此,石子抛出后一定能落入人的手中.地面观察者对石子运动的描述为斜抛运动,但因为石子运动速度的水平分量与火车相同,因而能够落入车上那人的手中.

如果石子抛出后,火车以恒定的加速度前进,那么火车成为非惯性系.在空中的石子相对火车有了水平运动速度,将回不到车上人的手中.地面观察者对石子运动的描述仍为斜抛运动,但因为石子运动速度的水平分量与火车的不同,因而不能落入车上那人的手中.

1 - 11 装有竖直遮风玻璃的汽车,在大雨中以速率  $v$  前进,雨滴则以速率  $v'$  竖直下降,问雨滴将以什么角度打击遮风玻璃?



题 1 - 11 图

答:根据伽利略速度合成定律:  $v_{\text{雨对地}} = v_{\text{雨对车}} + v_{\text{车对地}}$ , 有

$$v_{\text{雨对车}} = v_{\text{雨对地}} - v_{\text{车对地}} = v_{\text{雨对地}} + (-v_{\text{车对地}}),$$

$$v_{\text{雨对车}} = \sqrt{v_{\text{雨对地}}^2 + v_{\text{车对地}}^2},$$

与竖直间夹角  $= \arctan \frac{v_{\text{车地}}}{v_{\text{雨地}}} = \frac{v}{v}$  .如题 1 - 11 图所示 .

1 - 12 一斜抛物体的水平初速度是  $v_0$  ,它在轨迹的最高点处的曲率半径是多大 ?

答: 物体在斜抛运动中, 加速度恒为  $g$  .斜抛物体在轨迹的最高点处有

$$v_y = 0, \quad v = v_x = v_0 .$$

由法向加速度  $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2}{r} = g$

可知, 轨迹的最高点处的曲率半径为

$$= \frac{v_0^2}{g} .$$

## 第二章 牛顿运动定律

2 - 1 回答下列问题：

- (1) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同？
- (2) 物体受到几个力的作用，是否一定产生加速度？
- (3) 物体运动的速率不变，所受合外力是否为零？
- (4) 物体的运动速度很大，所受合外力是否也很大？

答：力是物体之间的相互作用，它使物体的运动状态发生变化或使物体发生形变；力是矢量，有大小和方向，力对物体作用的效果还与其作用点的位置有关。根据牛顿运动定律，物体所受的合外力方向与物体获得的加速度的方向相同。而物体的运动方向一般是指它的速度方向。所以，

(1) 不是。在质点作曲线运动时，速度方向沿轨迹曲线的切向，而加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一侧。合外力的方向也总是指向轨迹曲线凹的一侧。因此，一般情况下合外力与同一时刻速度的方向是不同的。

(2) 不一定。力是矢量，物体受到几个力的作用时，若合外力的矢量和为零，则物体将保持原来的运动状态不变，不产生加速度。

(3) 不是。速度是矢量，物体运动的速率不变，但速度的方向还是可能改变的，也即所受合外力不为零。例如物体作匀速率圆周运动，具有法向加速度，它受到法向力，即向心力作用。

(4) 不是。力是使物体运动状态改变的原因。物体受到合外力作用后产生加速度。某时刻物体所具有的加速度是其速度矢量在该时刻的时间变化率（包括大小和方向的变化率），并不决定于速度矢量本身在该时刻的量值。物体的运动速度很大，并不表示其速

度的时间变化率很大 .因此,加速度不一定很大,即物体所受合外力不一定很大 .

2 - 2 物体所受摩擦力的方向是否一定和它的运动方向相反?试举例说明 .

答:两个相互接触的物体沿接触面有相对运动或有相对运动趋势时,在两个物体接触面的公切面上产生一对阻止相对运动的力,称为摩擦力 .摩擦力的方向与物体间相对运动趋势的方向相反,不一定与物体的运动方向相反 .例如:运动中的货车上装载着的物体,受到车厢底板对其的摩擦力,其方向与货车运动的方向相同,从而使物体随车一起运动 .人在地面能够向前行走,也受到地面对人的向前的摩擦力作用 .

2 - 3 用绳子系一物体,在竖直平面内作圆周运动,当物体达到最高点时,(1)有人说:“这时物体受到三个力:重力、绳子的拉力以及向心力”;(2)又有人说:“因为这三个力的方向都是向下的,但物体不下落,可见物体还受到一个方向向上的离心力和这些力平衡着” .这两种说法对吗?

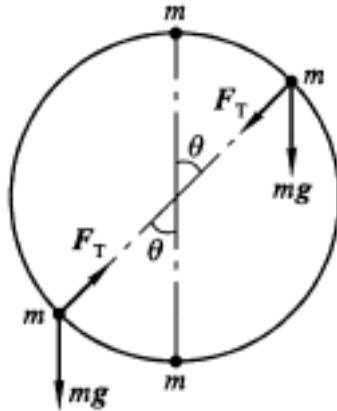
答:这两种说法都不对 .

用绳子系着的物体,在竖直平面内作圆周运动时,始终只受重力和绳子拉力的作用 .这两个力的合力对物体作用的效果,使其能在竖直平面内作圆周运动 .在最高点时,这两个力的合力指向圆心 .所谓向心力仅是以力的效果来命名的力的一种称谓,其本质仍是惯性参考系中的真实力,是指向圆心的合力,或合力指向圆心的分量 .所谓离心力,是向心力的反作用力,作用在其他物体上 .

需注意的是,在转动的非惯性参考系中,所有物体都会受到的“惯性离心力”属惯性力之一,与上述“离心力”是两个不同的概念 .

2 - 4 绳子的一端系着一金属小球,另一端用手握着使其在

竖直平面内作匀速圆周运动,问球在哪一点时绳子的张力最小?在哪一点时绳子的张力最大?为什么?



题 2 - 4 图

答: 在任意位置, 对小球的受力分析如题 2 - 4 图所示. 运用牛顿运动定律, 有

$$F_T + mg = ma_n e_n$$

在最高点,

$$F_T + mg = ma_n,$$

$$F_T = ma_n - mg. \quad \text{绳子的张力最小.}$$

在最低点,

$$F_T - mg = ma_n,$$

$$F_T = ma_n + mg. \quad \text{绳子的张力最大.}$$

2 - 5 在弹簧测力计的下面挂着一个物体, 如题 2 - 5 图所示, 试判别下列两种情况下, 测力计所指出的读数是否相同? 如果不同, 则在哪种情况下读数较大?

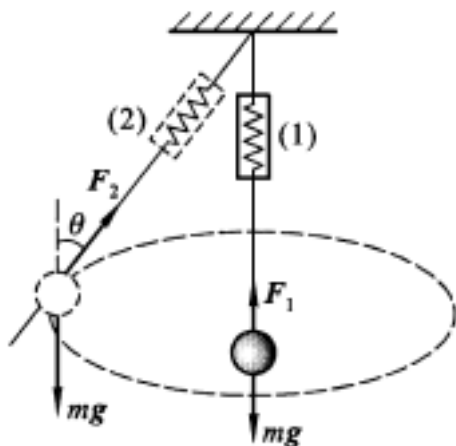
- (1) 物体竖直地静止悬挂;
- (2) 物体在一水平面内作匀速圆周运动.

答: 情况(2)的读数较大. 对物体的受力分析如图所示.

对情况(1), 有  $F_1 - mg = 0, \quad F_1 = mg.$

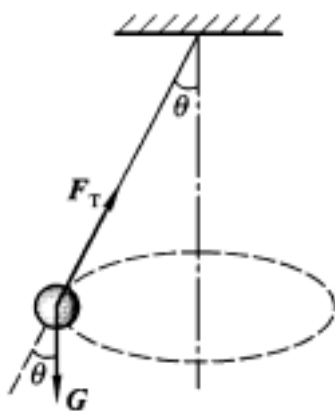
对情况(2), 有  $F_2 \cos \theta - mg = 0,$   
 $F_2 \sin \theta = ma_n = mr \omega^2,$

即  $F_2 = \sqrt{(mg)^2 + (ma_n)^2} = mg \sqrt{1 + \left[\frac{r}{g}\right]^2} \quad mg, F_2 > F_1 .$



题 2 - 5 图

2 - 6 如题 2 - 6 图所示, 一个用绳子悬挂着的物体在水平面上作匀速圆周运动, 有人在重力的方向上求合力, 写出  $F_T \cos \theta - G = 0$ , 另有人沿绳子拉力  $F_T$  的方向求合力, 写出  $F_T - G \cos \theta = 0$ . 显然两者不能同时成立, 试指出哪一个式子是错误的, 为什么?



题 2 - 6 图

答: 物体受重力和绳子拉力的共同作用, 在水平面内作匀速圆周运动. 因此, 物体受合力  $F$  的方向在水平面内指向圆心.

前一式是物体所受合力在垂直方向的分量表达式,但仅凭此式并不能求得合力  $F$ . 缺少的方程是:在水平面内,有

$$F = F_T \sin \theta = m a_n .$$

从而可以求得  $F = F_T \sin \theta = G \tan \theta$  .

后一式是错误的. 物体的加速度  $a$  在水平面内,在绳子拉力  $F_T$  的方向上  $a$  的分量不为零,即

$$F_T - G \cos \theta = 0 .$$

2 - 7 一物体可否只具有机械能而无动量? 一物体可否只有动量而无机械能? 试举例说明.

答: 机械能是系统作机械运动的动能和势能的总和. 动能与物体相对参考系的运动速度有关, 势能则属于保守力系统, 一物体具有的势能, 是相对势能零点而言的.

若取保守力系统, 物体相对参考系静止, 那么物体的动能为零, 物体的动量也为零. 该系统的机械能就是物体相对系统势能零点所具有的势能. 所以, 一物体可以有机械能而无动量. 例如: 一质量为  $m$  的物体(例如一气球)静止在相对于地面为  $h$  的高处, 此时对于物体和地球系统, 具有的机械能为重力势能, 其值为  $mgh$ . 由于此时物体静止, 故其动量为零.

在保守力系统中, 若一物体运动至某一位置时所具有的动能值, 恰等于该位置相对势能零点所具有的负的势能值, 则该物体的机械能为零, 而因物体具有动能, 因而动量不为零. 所以, 一物体也可以有动量而无机械能. 例如: 物体自离地面高为  $h$  处自由下落, 取物体和地球为系统, 并取下落处为重力势能零点. 初始时刻系统的机械能  $E_0 = 0$ , 下落至地面时, 物体具有速度的大小为  $v$ , 动能为  $\frac{1}{2} m v^2$ , 动量的大小为  $m v$ , 系统的机械能为  $E = \frac{1}{2} m v^2 - mgh = E_0 = 0$  .

2 - 8 两质量不等的物体具有相等的动能,哪个物体的动量较大?两质量不等的物体具有相等的动量,哪个物体的动能较大?

答:设两物体的质量和速度的大小分别为  $m_1$ 、 $v_1$  和  $m_2$ 、 $v_2$ , 且  $m_1 > m_2$  .

(1) 动能相等时,有  $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ ,

即有 
$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_1 > v_1,$$

动量的大小分别为  $p_1 = m_1 v_1$      $p_2 = m_2 v_2$ ,

可得 
$$p_2 = m_2 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_1 = m_1 v_1 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} < p_1 .$$

质量大的物体动量值较大 .

(2) 动量相等时,有  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ ,

即有 
$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 > v_1,$$

动能分别为  $E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ ,     $E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ ,

可得 
$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 \left[ \frac{m_1}{m_2} v_1 \right]^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_1}{m_2} > E_{k1} .$$

质量小的物体动能较大 .

2 - 9 用锤压钉,很难把钉压入木块,如用锤击钉,钉就很容易进入木块,这是为什么?

答:用锤压钉,当锤对钉子的压力小于钉子所受到的阻力时,是不易把钉子压入木块的.而当锤子以速度  $v$  击打钉子时,很容易将钉子击入木块.其原因可用动量定理来解释.

设锤子以速度  $v$  击打钉子,在很短的  $t$  时间内,因受到钉子的平均冲力  $F$  作用而停止运动.对锤子应用动量定理,有  $F t =$

$m v = m v$ ,  $F = \frac{m v}{t}$ .可见,击打前锤子的速度  $v$  越大,作用的时

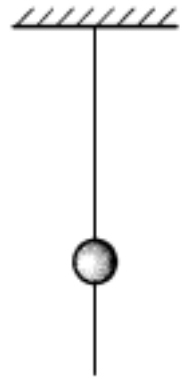


间  $t$  越小, 平均冲力  $F$  就越大. 根据牛顿第三定律, 锤子给予钉子的平均冲力  $F = -F$ , 这是远大于用锤压钉所能给予钉子的作用力, 因而钉子就很容易进入木块.

2 - 10 如图所示, 用线把球挂起来, 球下系一同样的细线. 拉球下细线, 逐渐加大力量, 哪段细线先断? 为什么? 如用较大力量突然拉球下细线, 哪段细线先断? 为什么?

答: 不论何种拉法, 细线之所以断, 是因其所受拉力大于它所能承受的极限张力.

缓慢地加大力量拉球下的细线时, 拉力通过重球均匀地作用于球上方的细线, 而上方的细线除受拉力外, 还受球对它的作用力(大小等于球的重力). 因此在逐渐加大拉力的过程中, 球上方细线中的张力因率先达到极限而先被拉断.



题 2 - 10 图

用较大力量突然拉下面细线, 意味着作用力较大而作用时间较短, 该拉力就是冲力. 冲力通过细线首先作用于重球, 但由于重球惯性很大, 动量改变极小, 在冲力尚未通过重球的位移传递给球上之细线前, 球下细线所受冲力已大于其所能承受的张力之极限, 因此先断.

2 - 11 有两只船与堤岸的距离相同, 为什么从小船跳上岸比较难, 而从大船跳上岸却比较容易?

答: 取人和船为系统作分析. 为说明方便, 对人和船都以质点近似, 不计水的阻力, 并假定人以水平速度跳出. 在水平方向系统的动量守恒, 有

$$0 = m_{人} v_{人} + m_{船} v_{船},$$

得 
$$v_{人} = -\frac{m_{船}}{m_{人}} v_{船} \quad \text{或} \quad v_{船} = -\frac{m_{人}}{m_{船}} v_{人} .$$

可见,人从船向岸跳时,船离岸运动;人从大船起跳时因  $m_{\text{船}} \gg m_{\text{人}}$ ,可获得较大的对岸速度  $v_{\text{人}}$ ,而大船因  $v_{\text{船}} \approx 0$ ,几乎不动.因而从大船跳上岸比较容易.

2 - 12 一物体沿粗糙斜面下滑.试问在这过程中哪些力作正功?哪些力作负功?哪些力不作功?

答:物体沿粗糙斜面下滑时的受力有:重力、滑动摩擦力、斜面的支持力.

合力的功为

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 G \cos \alpha_1 ds + \int_1^2 F_f \cos \alpha_2 ds + \int_1^2 F_N \cos \alpha_3 ds,$$

其中,重力  $G$  与物体的位移  $d\mathbf{r}$  间的夹角  $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ ,所以重力作正功.

滑动摩擦力  $F_f$  与物体位移  $d\mathbf{r}$  间的夹角  $\alpha_2 = \pi$ ,因与物体位移反向,所以滑动摩擦力作负功.

斜面的支持力  $F_N$  因与物体位移相互垂直  $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ ,所以斜面的支持力不作功.

2 - 13 外力对质点不作功时,质点是否一定作匀速运动?

答:根据质点的动能定理  $A = \Delta E_k$  可知,合外力对质点作功为零时,质点的动能保持不变.有两种情况:

(1) 若合外力  $F = 0$ ,则质点将保持原来的运动状态不变,动能自然不变.此即牛顿第一定律.原来静止的将仍然保持静止;原来作匀速直线运动的,将继续作保持原有速度的大小和方向不变的匀速直线运动.

(2) 若合外力  $F$  与质点的位移  $d\mathbf{r}$  始终垂直,则合外力对质点不作功.如:用细绳连接着的小球在光滑水平面内的圆周运动,拉力不作功;垂直进入均匀磁场的点电荷所作的圆周运动,磁场力

不作功 此时的质点所作的是匀速率圆周运动,其动能虽然不变,但速度方向不断改变,即动量时时在变 .

2 - 14 两个相同的物体处于同一位置,其中一个水平抛出,另一个沿斜面无摩擦地自由滑下,问哪一个物体先到达地面? 到达地面时两者的速率是否相等?

答: 如图所示,取平抛物体为 A,下滑物体为 B. 设两物体离地面高度为  $h$ , A 的水平速度为  $v_0$ , 斜面长为  $l$ .

$$\text{对 A, 有 } h = \frac{1}{2} g t^2, \quad mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2,$$

式中  $t$  和  $v$  分别为 A 到达地面所用时间和速率. 可解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

$$\text{对 B, 有 } l = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2, \quad mgh = \frac{1}{2} m v^2,$$

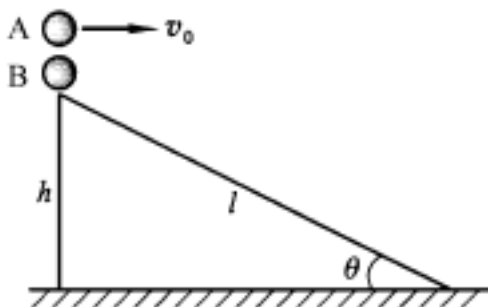
式中  $t$  和  $v$  分别为 B 到达地面所用时间和速率. 并且

$$h = l \sin \theta.$$

$$\text{可解得 } t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} > t,$$

$$v = \sqrt{2gh} < v.$$

即平抛物体 A 先到达地面, 并且到达地面时的速率比自由下滑物体 B 的大.



题 2 - 14 图

## 第三章 运动的守恒定律

3 - 1 非保守力作功总是负的,对吗?举例说明之。

答:如果力所作的功与物体所经历的中间路径有关,或者物体循闭合路径运行一周时,力所作的功不为零,这种力称作非保守力。摩擦力、粘滞力、化学力等作的功都具有这样的特征,它们都是非保守力。

但是,像摩擦力这类非保守力作功,并非总是负的。它的功可以增大物体的动能,作正功,比如传送带对物体的静摩擦力的功,使物体的动能获得大于零的增量;它的功也可以将物体机械运动的能量转化为原子或分子无规热运动的能量(热能),即作负功,比如滑动摩擦力做功,使物体机械运动的动能减小,因此也将摩擦力称为耗散力。通过非保守力作功,也可以把其他形态的能量,如化学能、电磁能、生物能、核能等转化为机械能而作正功,比如通过蓄电池驱动电机所获得的机械功、静止的爆竹爆炸后,朝四处飞散的碎片的动能等都来自于化学能,在这些过程中,非保守力作功大于零。

所以,认为非保守力作功总是负的,这样的看法是不全面的。

3 - 2 为什么重力势能有正负,弹性势能只有正值,而引力势能只有负值?

答:势能概念源于保守力系统,是空间位置的函数。相对于势能零点,在保守力场中一定位置处的物体具有确定的势能值,势能零点的选择具有一定的任意性。

当保守力函数的形式确定时,其势能函数的形式也就随之确

定了,选择不同的势能零点时,物体在某处的势能值相对地增减一个常数.质点在位置  $A$  的势能值,可表示为在保守力  $F$  作用下将它从位置  $A$  移动到势能零点  $P_0$  所作的功:

$$E_{pA} = \int_A^{P_0} F \cdot dr$$

对空间另一确定点  $P$ ,上式可表示为

$$E_{pA} = \int_A^{P_0} F \cdot dr = \int_A^P F \cdot dr + \int_P^{P_0} F \cdot dr = \int_A^P F \cdot dr + E_p,$$

式中,  $E_p = \int_P^{P_0} F \cdot dr$  为一常数.

若以  $P$  为势能零点,则  $A$  的势能值相应地为

$$E_{pA} = \int_A^P F \cdot dr = E_{pA} - E_p.$$

可见势能零点的不同选择,对质点在位置  $A$  的势能值仅影响一个常量  $E_p$ ,并不影响保守力对质点在空间两点间移动时所作功的大小,即不影响空间两点间的势能之增量.因此,根据所研究问题的需要,可按处理方便、形式简洁的原则来选取势能零点.

此外,从物体所受保守力  $F$  和系统势能  $E_p(r)$  的关系,

$F = -\frac{E_p(r)}{r} e_r$  可知,力  $F$  指向势能函数下降的方向,  $E_p(r)$  若有极小值,则该处的  $F = 0$ ,这是系统的一个稳定平衡位置.这时,在  $E_p(r)$  函数上添加或减去任一常数,并不影响对这一位置的确定,因此,  $F = 0$  的位置常被选为势能零点.

综上所述,由于势能零点选择的任意性,非但重力势能的值可有正负,弹性势能和引力势能的值也可有正负.但在习惯上,为便于处理,对这些势能零点的选择,常使重力势能可取正负,弹性势能取正值,而引力势能取负值.

以下分别进行讨论.

重力势能函数  $E_p(y) = mgy$ ,是位置  $y$  的线性函数,若选定  $y$  轴上  $y$  为重力势能零点,则物体在  $y_A$  的重力势能为

$$E_{pA} = E_{pA} - E_p = mgy - mgy = mg(y - y)$$

$$y = y - y \begin{cases} > 0, & E_{pA} > 0, \\ < 0, & E_{pA} < 0. \end{cases}$$

相对于选定的  $y$ ,  $y_A$  的重力势能可能为正值,也可能为负值.在小范围内,如在实验室,我们可以取桌面  $y = 0$  为重力势能零点,或者取地面为重力势能零点,当所研究的问题牵涉到较大范围时,常取海平面为重力势能零点.

弹性势能函数  $E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$ ,是位置  $x$  的二次抛物型函数,极小值在  $x = 0$  处.取弹性力  $F = 0$  的弹簧原长处为  $x$  轴坐标原点,也为弹性势能零点,是最为方便、自然和习惯的选择.当弹簧伸长或被压缩  $x$  时,相应的弹性势能恒为正值.

若将弹性势能零点选在弹簧伸长(或缩短)的某一长度  $x$  处,则当弹簧的伸长(或缩短)为  $x_A$  时,弹性势能为

$$E_{pA} = E_{pA} - E_p = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k(x_A^2 - x^2).$$

当  $|x| < |x_A|$  时,  $E_{pA} > 0$ ,反之,则小于零.

所以,若所选的弹性势能零点不在抛物型势能函数的极小值时,  $x_A$  处的弹性势能并非只有正值,也可有负值.

质量为  $m$  的物体在质量为  $m_0$  的物体的引力场中运动,两者质心间距为  $r$  时,其间引力势能函数为  $E_p(r) = -G \frac{mm_0}{r}$ ,为双曲型函数.  $r$  时,  $E_p$  自然趋于零.所以取距  $m_0$  (或  $m$ ) 为无穷远处作为势能零点时,在距  $m_0$  (或  $m$ ) 有限距离的空间范围内的引力势能均为负.

若选距  $m_0$  为  $r$  处为引力势能零点,则  $m$  在  $r_A$  处的引力势能  $E_{pA}$ ,根据前述讨论,可表示为  $E_{pA} = E_{pA} - E_p = -G \frac{m_0 m}{r_A} +$

$G \frac{m_0 m}{r}$  . 当  $r_A < r$  时,  $E_{pA} < 0$ , 反之, 则大于零 . 可见, 引力势能可有正值, 也可有负值 .

设  $m$  为地球质量,  $r = R$  为地球半径, 取地面为引力势能零点时, 距地面高度为  $h$  处物体  $m$  的引力势能为

$$E_{pA} = - G \frac{m m}{R + h} + G \frac{m m}{R},$$

$$h \ll R \text{ 时, } E_{pA} = m \left[ G \frac{m}{R^2} \right] h = mgh .$$

所以, 可把地球表面附近的引力势能称为重力势能 .

### 3 - 3 回答下列问题:

(1) 重力势能是怎样认识的? 又是怎样计算的? 重力势能的量值是绝对的吗?

(2) 引力势能是怎样认识的? 又是怎样计算的? 引力势能的量值是绝对的吗?

(3) 重力是引力的一个特例 . 你能从引力势能公式推算出重力势能的公式吗?

(4) 物体在高空中时, 势能到底是正值还是负值?

答: 详见上题解答 .

地球表面附近的引力势能称为重力势能 .

重力势能是质点在重力场中的势能 . 在质点距地面高度变化不大的情况下, 质点所受重力为常数, 即大小为  $g$  不变, 方向不变 . 通常选地面上的重力势能为零 . 于是, 质点  $m$  在距地面高度为  $h$  处的重力势能为  $E_p = mgh$  .

如果质点距地面的高度  $h$  变化很大, 则质点所受的重力不是常数(一般说来, 大小不等, 方向也不相同), 质点的势能应考虑为距地心  $r$  处的引力势能,

$$E_p = - G \frac{m m}{r} = - mg \frac{R^2}{R + h}, \quad \text{其中 } g = G \frac{m}{R^2} .$$

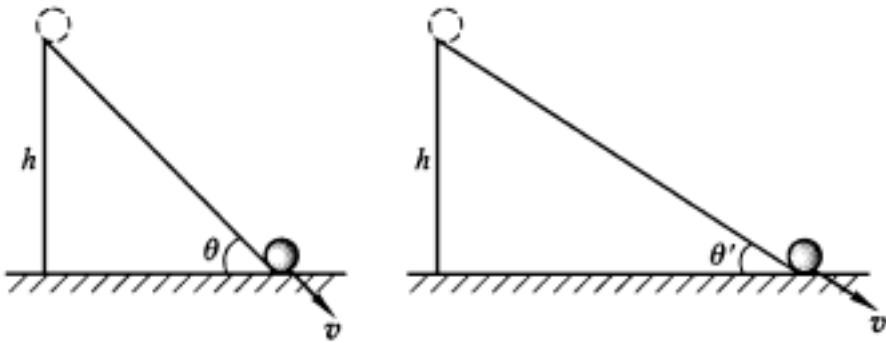
这时若以地面为势能零点来计算的话,是不方便的(参见上题)。

相对势能零点的不同选择,引力(重力)势能可有正值,也可有负值(参见上题)。

3 - 4 两个质量相等的小球,分别从两个高度相同、倾角不同的光滑斜面的顶端由静止滑到底部,它们的动量和动能是否相同?

答:动量和动能都是量度物体机械运动的物理量.动量  $p = mv$  是矢量,沿速度  $v$  的方向;动能  $E_k = \frac{1}{2} mv^2$  是正值标量,它们的量值都与参考系有关。

如图所示,小球从光滑斜面滑下时,速度方向沿着斜面,因此,两球到达底部时的动量方向不同.两小球从高度  $h$  相同的斜面滑下时,取小球、光滑斜面和地球为系统.因机械能守恒  $mgh = \frac{1}{2} mv^2$ ,所以两球的动能相同,动量的量值也相等。



题 3 - 4 图

3 - 5 能否利用装在小船上的风扇启动空气使小船前进?

答:假定风扇固定在小船上.当船上的风扇持续地向船尾启动空气时,风扇同时也受到了空气的反作用力.该反作用力是向着船头、通过风扇作用于船身的.根据动量定理可知,该力持续作用



于船身的效果,使船向前运动的动量获得增量.若该作用力大于船向前运动时所受的阻力,小船就可向前运动.

若将风扇转向船头搅动空气,则将使小船后退.

3 - 6 在地面的上空停着一气球,气球下面吊着软梯,梯上站着一个人.当这人沿软梯往上爬时,气球是否运动?

答:取人、气球和软梯为系统来分析.当人相对软梯静止时,系统所受重力和浮力的合力为零.垂直方向上,系统的动量为零并守恒,系统的质心将保持原有的静止状态不变.当人沿软梯往上爬时,人与软梯间的相互作用力是内力,而内力不改变系统的总动量,系统所受合外力仍为零,系统的质心位置仍保持不变,总动量也不变.所以,根据动量守恒定律可知,当人沿软梯往上爬时,气球和软梯将向下运动.

3 - 7 在匀速圆周运动中,质点的动量是否守恒?角动量呢?

答:质点动量守恒的条件是:质点所受到的合外力为零.在匀速圆周运动中,质点的速度大小不变但方向始终在变,具有向心加速度,质点受到的合外力不为零,因此,它的动量不守恒.

质点角动量守恒的条件是:质点所受的合外力对空间某一确定点的力矩为零时,质点对该点的角动量守恒.在匀速圆周运动中,由于质点所受到的合外力指向圆心,合外力对圆心的力矩为零,因此,质点对圆心的角动量守恒.

作匀速圆周运动的质点,对除圆心外的其他点的角动量是不守恒的.

3 - 8 有人说:“质心是质量集中之处,因此在质心处必定要有质量”,这话对吗?

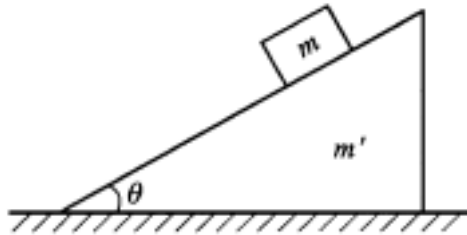
答:这话不对.质心是表征物体系统质量分布的一个几何点.质心的位置在平均意义上表示质量分布的中心.质心所在处不一

定有质量分布.例如:质量均匀分布的细圆环,其质心在环心,但质量却均匀分布于细圆环上.

物体的质心和重心是两个不同的概念.重心是地球对物体各部分引力的合力(即重力)的作用点.不受重力,也就无所谓重心,在失重环境中,重心自然失去意义,而质心是有意义的.对于地球上体积不太大的物体,重心和质心的位置可认为是重合的.

3 - 9 物体  $m$  被放在斜面  $m$  上,如把  $m$  与  $m$  看成一个系统,问在下列何种情形下,系统的水平方向分动量是守恒的?

- (1)  $m$  与  $m$  间无摩擦,而  $m$  与地面间有摩擦;
- (2)  $m$  与  $m$  间有摩擦,而  $m$  与地面间无摩擦;
- (3) 两处都没有摩擦;
- (4) 两处都有摩擦.



题 3 - 9 图

答:系统水平方向分动量守恒的条件是:系统在水平方向所受到的合外力为零.所以,

(1)  $m$  与  $m$  间无摩擦时,相互作用的支持力是成对内力,不影响系统的总动量; $m$  和  $m$  所受重力以及地面对  $m$  的支持力在垂直方向,是外力,合外力不为零,因此系统在垂直方向的分动量不守恒;地面对  $m$  的摩擦力沿水平方向,与  $m$  的运动方向相反,故系统在水平方向所受到的合外力也不为零,在水平方向的分动量也不守恒.

(2) 对系统而言,  $m$  与  $m$  间的相互作用力是成对内力,不影

响系统的总动量 地面对  $m$  的摩擦力为零,说明系统在水平方向所受合外力为零,因此,系统的水平方向分动量守恒.

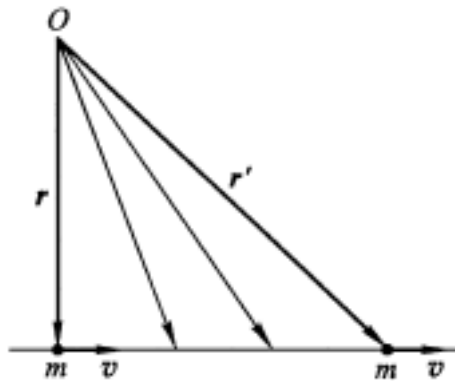
(3) 由(2)可知,系统的水平方向分动量守恒.

(4) 由(1)和(2)的讨论可知,系统在水平方向的分动量不守恒.

3 - 10 质点的动量守恒与角动量守恒的条件各是什么?质点的动量与角动量能否同时守恒?试说明之.

答:质点的动量守恒条件是:质点所受到的合力为零;角动量守恒的条件是:质点在运动过程中所受到的合力对某参考点的合力矩为零.

动量和角动量是两个从不同角度描述物体运动的物理量.动量守恒和角动量守恒是两个彼此独立的基本规律,不能互相替代.就一个具体的物理过程而言,质点的动量可以守恒而角动量不守恒,或者反之;但也可以同时守恒,或者都不守恒.例如:在惯性系中作匀速直线运动的一个质点,如图所示,其动量守恒;对空间除该直线轨迹外的任一参考点  $O$ ,有确定的角动量,对该点的角动量也守恒.



题 3 - 10 图

3 - 11 对于变质量系统,能否应用  $F = \frac{d}{dt}(mv)$ ? 为什么?

答:所谓“变质量系统”是指研究对象(或主体)的质量在运动过程中不断增加或减少的物体系统.比如:火箭因喷射气体,质量不断减少;雪球因滚动而质量越来越大;雨滴在下落过程中因不断积聚水汽而质量不断增大等.

就总体而言,如火箭和所有喷射物,雨滴和凝聚其上的所有水汽,它们的总质量是不变的.这属于质点组的动力学问题,牛顿第二定律  $F = \frac{d}{dt}(mv)$  可以用来分析质点组内各质点的运动,其中的  $mv$  应理解为各质点动量的矢量和,即质点组系统的总动量.为便于区别,这里不妨将其表示为

$$p = mv = \sum m_i v_i, \text{ 即 } \frac{d}{dt} \sum m_i v_i = F.$$

但是,“变质量系统”研究的并不是质点组内所有质点的运动,而是其中主体部分的运动规律.因此,“变质量系统”就其本质来说,是质量随时间变化的质点(主体)的动力学问题.

将牛顿第二定律的微分形式  $F = \frac{dp}{dt}$  或  $Fdt = dp$  应用于系统运动的微小过程即元过程,则该元过程中系统的总质量就是  $(m + dm)$ ,  $m$  为  $t$  时刻以速度  $v$  运动的主体的质量,  $dm$  为该时刻以速度  $u$  运动的附加质量.最后得到关于主体的运动方程是

$$\frac{d}{dt}(mv) = F + \frac{dm}{dt}u.$$

其物理意义是:主体的动量变化率为主体所受外力和附加物增添或带走之动量的矢量和.这也就是关于主体的动量定理.

初看起来,上式与前述  $\frac{d}{dt}(mv) = F$ , 或  $\frac{d}{dt} \sum m_i v_i = F$  形式不同,似乎多了一项.但由上述分析可知,前者的  $mv = \sum m_i v_i$  既包括主体,也包括附加物,总质量不变;而后者的  $mv$  仅属主体,且质

量随时间而变.两者都是牛顿方程,只是研究对象有所不同罢了.

3 - 12 质点在有心力场中的运动具有什么性质?

答:有心力的方向始终指向或背向一个给定点,即力心.若质点在运动过程中仅受有心力的作用,则因有心力对力心的力矩为零,质点对力心的角动量守恒;又由于有心力是保守力,可以引进势能概念,因此在有心力场中运动时,系统的机械能也守恒.

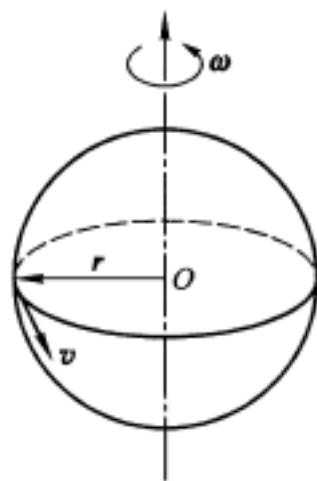
## 第四章 刚体的转动

4 - 1 火车在拐弯时所作运动是不是平动？

答：刚体作平动时，固联其上的任一条直线，在各时刻的位置（方位）始终保持彼此平行。若将火车的车厢看作刚体，当火车作直线运行时，车厢上的各部分具有平行的运动轨迹、相同的运动速度和加速度，选取车厢上的任一点都可代替车厢整体的运动，这就是火车的平动。但当火车拐弯时，车厢上各部分的速度和加速度都不相同，即固联在刚体上的任一条直线，在各时刻的位置不能保持彼此平行，所以火车拐弯时的运动不是平动。

4 - 2 地球自西向东自转，它的自转角速度矢量指向什么方向？试作图说明。

答：地球自西向东自转，自转轴在南北极的连线上。根据右手螺旋法则可知，地球自转角速度矢量的方向沿自转轴由南极指向北极方向，如题 4 - 2 图所示。



题 4 - 2 图

4 - 3 假定一次内部爆炸在地面上开出巨大的洞穴，它的表面被向外推出。这对地球绕自身轴的转动和绕太阳的转动有何影响？

答：地球绕自身轴的转动过程，可看作是不受外力矩，自转角动量守恒的过程，即  $L = J \omega = \text{常量}$ ， $J$  是地球绕自身轴的转动惯

量,与地球质量相对自转轴的分布有关.若地球表面因爆炸而有质量被外推,即远离自转轴时,转动惯量将变大.由地球自转角动量守恒的关系可知,地球自转的角速度将减慢.

地球对自转轴的转动惯量发生变化时,不会对绕太阳的公转周期发生明显的影响.这是由于地球绕太阳公转的平均半径远大于地球的平均半径(约一万倍),考虑公转问题时,将地球作为质点,即不考虑其形状、结构以及质量分布等来处理,已可获得足够的精确度的缘故.因此,即使地球表面发生某些质量分布的变化,也不至于影响将其处理为质点的物理模型.

4 - 4 对静止的刚体施以外力作用,如果合外力为零,刚体会不会运动?

答:对静止的刚体施以外力作用,当合外力为零,即  $F_i = ma_c = 0$  时,刚体的质心将保持静止.但合外力为零并不表明所有的外力都作用于刚体的同一点.所以,对某一确定点刚体所受合外力的力矩  $M = \sum M_i = \sum r_i \times F_i$  不一定为零.由刚体的转动定律  $M = J \frac{d\omega}{dt}$  可知,刚体将发生转动.比如,置于光滑水平面上的匀质杆,对其两端施以大小相同、方向相反,沿水平面且垂直于杆的两个作用力时,杆所受的外力的合力为零,其质心虽然保持静止,但由于受合外力矩不为零,将作绕质心轴的转动.

4 - 5 如果刚体转动的角速度很大,那么(1)作用在它上面的力是否一定很大?(2)作用在它上面的力矩是否一定很大?

答:由刚体的定轴转动定律  $M = \sum r_i F_i \sin \theta_i = J \frac{d\omega}{dt}$  可知,刚体受对轴的合外力矩正比于绕定轴转动角速度的时间变化率.因此,刚体转动的角速度很大,并不意味着转动角速度的时间变化率也很大,所以,

(1) 刚体定轴转动的角速度  $\omega$  很大,与其受力  $F_i$  没有直接关系.对于刚体的一般运动,所受合外力使刚体的质心产生加速

度,即改变刚体的平动状态 .

(2) 刚体定轴转动的角速度 很大,与其受到对定轴的力矩  $M$  的大小也没有直接关系 .合外力矩使刚体产生角加速度,改变刚体的转动状态 .

4 - 6 为什么在研究刚体转动时,要研究力矩的作用?力矩和哪些因素有关?

答:一个静止的刚体能够获得平动的加速度而运动起来的原因是,相对它的质心而言,所受的合外力不为零 .一个静止的刚体相对某一转轴,能够获得角加速度而转动起来的原因是,刚体所受到的外力对转轴的合外力矩  $M_i$  不为零 .因此,刚体的转动是与其受到的相对转轴的合外力矩密切相关的 .取  $z$  轴为刚体转动的固定轴时,对转动有贡献的合外力矩是  $M_z = \sum M_{iz}$ ,其中  $M_{iz} = F_i r_i \sin \theta_i$ ,  $F_i$  是作用在刚体上的第  $i$  个外力在转动平面内的分量,而  $r_i$  是由转轴( $z$  轴)到  $F_i$  的作用点的距离,  $\theta_i$  是  $r_i$  和  $F_i$  间由右手定则决定的夹角 .所以,对  $z$  轴的力矩不但与各外力在转动平面内分量的大小  $F_i$  有关,还与  $F_i$  的作用线与  $z$  轴的垂直距离(力臂)  $d_i = r_i \sin \theta_i$  的值有关 .

4 - 7 试证:匀质细棒在光滑平面上受到一对大小相等、方向相反的力作用时,不管力作用在哪里,它的质心加速度总是零 .

答:匀质刚性细棒可看作在运动中保持相对位置不变的质点系,其质心遵守运动定律  $\sum_i F_i = m a_c$  .当该棒受到大小相等方向相反的作用力时,质心所受合力与各个力的作用点无关,加速度总为零 .

4 - 8 在计算物体的转动惯量时,能把物体的质量集中在质心处吗?



答：物体的转动惯量是物体转动中惯性大小的量度。影响转动惯量的因素有：物体的总质量、物体质量的分布以及转轴的位置。同一物体对质心轴和对任意轴的转动惯量是不同的。所以，在计算物体的转动惯量时，不能简单地把物体的质量看作集中在质心处。

4 - 9 两个同样大小的轮子，质量也相同。一个轮子的质量均匀分布，另一个轮子的质量主要集中在轮缘。问：

(1) 如果作用在它们上面的外力矩相同，哪个轮子转动的角加速度较大？

(2) 如果它们的角加速度相等，作用在哪个轮子上的力矩较大？

(3) 如果它们的角动量相等，哪个轮子转得快？

答：质量相等、大小相同的轮子，由于质量分布情况的不同而使得它们对同一转轴的转动惯量不同。由转动惯量的定义  $J = \int r^2 dm$  可知，质量主要集中在轮缘的轮子，其转动惯量较大。由定轴的转动定律  $M = J\alpha$  和角动量  $L = J\omega$ ，可知：

(1)  $M$  相同时，物体所获得的角加速度大小与转动惯量成反比，故质量均匀分布的轮子转动的角加速度较大；

(2) 角加速度相等时，转动惯量大的轮子上作用的力矩也大，故质量主要集中在轮缘的轮子受到的力矩较大；

(3) 两轮的角动量相等时，两轮的角速度与它们的转动惯量成反比，故质量均匀分布的轮子转动的角速度较大，转得较快。

4 - 10 一个转动着的飞轮，如不供给它能量，最终将停下来。试用转动定律解释这个现象。

答：一个转动着的飞轮，如不供给它能量，最终必将停下来，这是由于飞轮在转动过程中受到各种对转轴的阻力矩做功的缘故。根据动能定理  $A = E_k$  可知，阻力矩的功使飞轮的转动动能

减小,使它最终停下来.

4 - 11 将一个生鸡蛋和一个熟鸡蛋放在桌上分别使其旋转,如何判定哪个是生的,哪个是熟的?为什么?

答:可根据两者旋转情况的不同来加以判别.

熟鸡蛋内部凝结成固态,可近似为刚体.使它旋转起来后,对质心轴的转动惯量可以认为是不变的常量,鸡蛋内各部分相对转轴有相同的角速度.因桌面对质心轴的摩擦力矩很小,所以熟鸡蛋转动起来后,其角速度的减小非常缓慢,可以稳定地旋转相当长的时间.

生鸡蛋内部可近似为非均匀分布的流体.使它旋转时,内部各部分状态变化的难易程度不相同,会因内摩擦而使鸡蛋晃动,转动轴不稳定,转动惯量也不稳定.使它转动的动能因内摩擦等因素的耗散而不能维持,使转动很快停下来.

4 - 12 两个同样的小孩,分别抓住跨过定滑轮绳子的两端,一个用力往上爬,另一个不动,问哪一个先到达滑轮处?如果小孩质量不相等,情况又将如何?(滑轮和绳子的质量可以忽略.)

答:将两个小孩、定滑轮、绳子取为系统.设两小孩的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ,定滑轮的半径为  $R$ .对定滑轮的轴,系统所受外力矩是两小孩所受重力的力矩的代数和(以顺时针方向为正).

即

$$M_{\text{外}} = \frac{dL}{dt} = m_2 gR - m_1 gR. \quad (1)$$

设两小孩以相对地面的速率  $v_1$ 、 $v_2$  沿绳向上运动,对定滑轮的轴,系统的角动量为(以顺时针方向为正).即

$$L = m_1 v_1 R - m_2 v_2 R. \quad (2)$$

两小孩质量相等时,  $m_1 = m_2$ .由(1)式可知,

$$M_{\text{外}} = 0.$$

故系统对定滑轮轴的角动量守恒,即  $L = L_0 = L_1 = \dots = \text{常数}$ .

由(2)式可知,任何时刻都有  $v_1 = v_2$  .即质量相等的两小孩应同时到达滑轮处,与谁在用力谁不用力无关 .

两小孩质量不等,  $m_1 \neq m_2$  时,  $M_{\text{外}} \neq 0$  .系统对定滑轮轴的角动量不守恒 .由(1)式可知,  $m_1 < m_2$  时,  $\frac{dL}{dt} > 0$ , 系统的角动量与假定正方向一致, 即质量为  $m_1$  的小孩先达滑轮处;  $m_1 > m_2$  时,  $\frac{dL}{dt} < 0$ , 质量为  $m_2$  的小孩先达滑轮处 .

结论是:质量小的小孩将先到达滑轮顶部,与谁在用力谁不用力无关 .

## 第五章 相对论基础

5 - 1 相对论中运动物体长度缩短与物体线度的热胀冷缩是否是一回事？

答：“热胀冷缩”是与物体温度有关的，涉及分子微观热运动的基本热学现象，与物体的宏观运动速度无关。

“长度收缩”是指在相对物体运动的惯性系中测量物体沿运动方向的长度时，测得的长度（运动长）与物体的运动速度有关，总是小于固有长度或静长的情况，这是由狭义相对论所得到的重要结论，与物体的具体组成和结构无关，是普遍的时空性质的反映。

因此，相对论的运动物体长度缩短与物体线度的热胀冷缩不是一回事。

5 - 2 有一枚以接近于光速相对于地球飞行的宇宙火箭，在地球上的观察者将测得火箭上的物体长度缩短，过程的时间延长，有人因此得出结论说：火箭上观察者将测得地球上的物体比火箭上同类物体更长，而同一过程的时间缩短。这个结论对吗？

答：在狭义相对论中，“长度收缩”和“时间膨胀”都是相对的。若以火箭和地球为相对运动的惯性参考系，则火箭上的观察者同样会测得相对地球静止物体的长度缩短，而地球上同一地点先后发生两事件的时间间隔变长。

所以，上述结论是错误的。

5 - 3 化学家经常说：“在化学反应中，反应前的质量等于反应后的质量。”以 2 g 氢与 16 g 氧燃烧成水为例，注意到在这个反

应过程中大约放出了 25 J 的热量,如果考虑到相对论效应,则上面的说法有无修正的必要?

答:根据狭义相对论的质能关系可知,在物质系统的变化过程中,静止质量的变化都与相应的能量变化相联系.

2 g 氢与 16 g 氧合成为水,并放出 25 J 的热量.其对应静质量的变化为

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{25}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} = 2.8 \times 10^{-16} \text{ kg} \approx 0.$$

因此可以认为:反应前后,系统的总质量守恒,包括反应过程中放出的热量,总能量守恒.所以,化学家的说法不必修正.

由于化学反应涉及的是电力,远小于核力.系统静质量的变化并不明显.在核反应中,必须考虑相对论的质能关系.

#### 5 - 4 下面两种论断是否正确?

(1) 在某一惯性系中同时、同地发生的事件,在所有其他惯性系中也一定是同时、同地发生的.

(2) 在某一惯性系中有两个事件,同时发生在不同地点,而在对该系有相对运动的其他惯性系中,这两个事件却一定不同时.

答:(1) 在一个惯性系中同时、同地发生的事件,本质上就是一个事件.因而,有

$$x = 0, \quad t = 0,$$

根据洛伦兹变换关系可知:  $x = 0, \quad t = 0.$

在所有其他惯性系中也一定是同时、同地发生的.

(2) 对惯性系 K 中同时发生在不同地点的两个事件,有

$$t = 0, \quad x \neq 0,$$

在相对运动的其他惯性系 K' 中,有

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0,$$

在惯性系  $K$  中这两个事件一定不同时 . 因此 , 同时性是相对的 .

5 - 5 两只相对运动的标准时钟 A 和 B, 从 A 所在惯性系观察 , 哪个钟走得更快 ? 从 B 所在惯性系观察 , 又是如何呢 ?

答 : 根据“时间膨胀”或“原时最短”的结论可知 , 从 A 所在惯性系观察 , 相对静止的时钟 A 所指示的时间间隔是原时 , 它走得“快”些 ; 而时钟 B 给出的时间间隔是运动时 , 因“时间膨胀”而走得“慢”些 . 同理 , 从 B 所在惯性系观察时 , 相对静止的时钟 B 给出的是原时 , 它走得“快”些 ; 而时钟 A 给出的是运动时 , 因“时间膨胀”而走得“慢”些 .

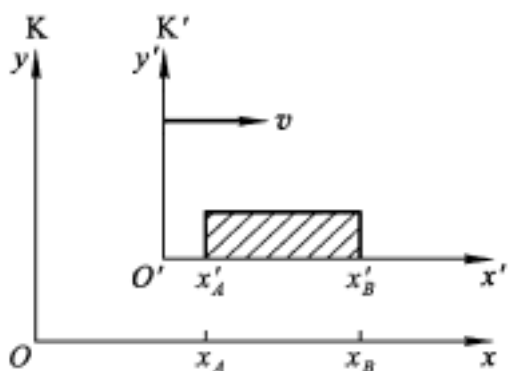
5 - 6 洛伦兹变换与伽利略变换的本质差别是什么 ? 如何理解洛伦兹变换的物理意义 ?

答 : 洛伦兹变换也称洛伦兹 - 爱因斯坦变换 , 是狭义相对论中关于不同惯性系之间物理事件的时空坐标变换的基本关系式 . 在洛伦兹变换关系中 , 长度和时间都是相对量 , 反映的是相对论的时空观 .

伽利略变换是经典力学中关于不同惯性系之间物理事件的时空坐标变换的关系式 . 在伽利略变换关系中 , 长度和时间都是绝对量 , 反映的是经典力学的绝对时空观 .

洛伦兹变换的特点是 : (1) 空间和时间与物质运动密切相关 ; (2) 时间间隔随惯性系不同而异 ; (3) 在不同的惯性系中 , 相同两点的空间间隔不同 . 从狭义相对论的两个基本原理可推导得出洛伦兹变换式 ; 得出反映相对论时空观的一些重要结论 , 如同时性的相对性、长度收缩、时间膨胀等 ; 在  $v \ll c$  时 , 洛伦兹变换过渡到伽利略变换 , 即经典力学包含在相对论力学的低速近似中 .

5 - 7 长度的量度和同时性有什么关系 ? 为什么长度的量度和参考系有关系 ?



题 5 - 7 图

答：如题 5 - 7 图所示，设一物体相对惯性系 K 静止，而 K 系相对惯性系 K 以  $v$  沿  $x$  轴运动。在 K 系中测量物体沿  $x$  轴的长度  $x = x_B - x_A$  时，由于相对静止，因而对坐标值  $x_B$  和  $x_A$  的测量没有时间限制， $x$  是“固有长度”。但在 K 系中测量以  $v$  沿  $x$  轴运动的物体在运动方向的长度时，必须同时，即同时测量运动物体的两端在 K 系中的坐标值  $x_A$  和  $x_B$ 。否则，若在测量了  $x_A$  后再去测量  $x_B$  的话，在此时间间隔内，物体将运动到一个新的位置，其坐标值之差  $x = x_B - x_A$  就不是在 K 系中对物体真正长度的测量值了。

根据洛伦兹坐标变换关系，

$$x = \frac{x' - v t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

由于在 K 系中测量  $x_A$  和  $x_B$  必须同时，因此  $t = 0$  .

故有

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ,$$

即

$$x = x' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} < x' .$$

可见，在 K 系中测得运动物体的长度  $x$  小于物体的“固有长度”  $x'$ ，这就是“长度收缩”效应。“长度收缩”效应与物体的相对

运动速度即 K 系相对 K 系的运动速度有关,  $v$  可与光速  $c$  相比拟时, 该效应明显, 而在  $v \ll c$  时, 则可认为物体的长度与运动无关, 即回到经典的时空观; “长度收缩”效应是相对的, 在 K 系中测量相对 K 系静止物体的长度时, 同样有“长度收缩”效应; “长度收缩”效应和“时间膨胀”都是由狭义相对论得出的关于空间和时间的性质, 都具有相对性, 所以, 对它们的量度必然与参考系有关。

5 - 8 在相对论中, 对动量定义  $p = mv$  和公式  $F = \frac{dp}{dt}$  的理解, 与在牛顿力学中的有何不同? 在相对论中,  $F = ma$  一般是否成立? 为什么?

答: 在相对论中, 粒子相对惯性系 K 的动量定义为  $p = mv$ , 形式上与牛顿力学中的定义相同, 但因物体的质量随运动速度变化, 当粒子相对 K 系的运动速度为  $v$  时, 运动质量  $m =$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ 因此, K 系中的动量为 } p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

牛顿力学中, 认为物体的质量与运动无关, 在任何惯性系中的动量均为  $p = m_0 v$  .

在相对论中, 粒子在惯性系 K 中所受的力定义为动量对时间的变化率, 即

$$F = \frac{dp}{dt},$$

由相对论的动量, 得

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right] .$$

相对论中的力与物体运动速度的变化率不成简单正比关系。

在  $v \ll c$  时, 上述相对论的力的表达式过渡为经典力学的牛顿第二定律:



$$F = \frac{dp}{dt} = m_0 a .$$

在牛顿力学中,因质量与运动无关,故力与物体运动速度的变化率成正比关系 .

此外,相对论否定超距作用,同时性是相对的,因此,牛顿力学中关于作用与反作用力的论断在相对论中不成立 .

由上述讨论可知,  $F = ma$  在相对论中不再成立 .

### 5 - 9 什么叫质量亏损 ? 它和原子能的释放有何关系 ?

答: 质能关系  $E = mc^2$  又称质能等效性,表明质量的变化和能量的改变是相互联系着的.若质点的总能量增加  $E$ ,则其质量将增加  $m$ ,两者的关系为  $E = mc^2$ .在一物理过程中,若质点的质量有一微小的变化  $m$ ,则质点的能量将发生  $c^2$  倍于  $m$  的变化,因而,  $E$  将是一个非常大的值 .

在原子核反应中,例如轻的原子核发生聚变反应后,其静止质量小于反应前的静止质量,静止质量的减少  $m$  被称为质量亏损,与之相应,有大量的能量被释放出来.这就是氢弹的制造原理.在重原子核的裂变反应中,静质量也会减少,因而也能放出大量的能量.这就是原子弹和核反应堆的原理 .

### 5 - 10 相对论的能量与动量的关系式是什么 ? 相对论的质量与能量的关系式是什么 ? 静止质量与静止能量的物理意义是什么 ?

答: 相对论的动量和能量关系为  $E^2 = m^2 c^4 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ , 其中,  $E$  是物体的总能量,相对论的质量与能量的关系式为  $E = mc^2$ .质能关系是原子能利用的重要理论依据之一 .

$m_0 c^2$  称为物体的静止能量或固有能量,  $m_0$  是物体的静止质量.  $m_0 c^2$  和  $m_0$  分别是物体速度为零或在物体自身的静止参考系中测得的能量和质量 .

自然界所有静止能量和静止质量为零的粒子,运动速度必为光速 .

总能量与静止能量之差即为物体的动能,  $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$  .

## 第六章 气体动理论

6 - 1 试解释气体为什么容易压缩,却又不能无限地压缩 .

答: 分子间存在着相互作用力 .当分子的间距较大时,相互间有微弱的吸引作用;随着间距逐渐减小,吸引力逐渐加强;当间距小到一定范围时,相互间将强烈排斥,阻止分子进一步靠拢 .

气体分子的间隔较大,相互作用较弱,因而较容易被压缩,压缩气体的结果使分子的间距有所减小;由于分子本身有一定的体积,若继续压缩,使分子的间距进一步减小,则分子间的斥力将迅速增大,同时物质的存在形态也将发生转变,比如气相转为液相,进而可能转变为固相等,压缩物质所需的能量也迅速增大 .因此对于气体来说是不可能被无限地压缩的 .

6 - 2 气体在平衡状态时有何特征? 这时气体中有分子热运动吗? 热力学中的平衡与力学中的平衡有何不同?

答: 一定量的化学纯气体,在没有外界影响的条件下,内部各部分的温度、压强不随时间发生宏观变化,从而气体的体积也不随时间变化的状态,称为气体的平衡状态 .温度、压强和体积是描述气体状态的三个宏观参量 .

气体处于平衡状态时,描述气体状态的三个宏观参量( $p$ 、 $V$ 、 $T$ )不随时间变化 .但从微观上看,构成气体的分子仍在不停地运动,或者说,气体的微观状态随时间不断地变化着 .因此,气体平衡状态的实质,是气体分子永不停息的热运动的平均效果,在没有外界影响的条件下,不随时间变化的状态 .

气体的热动平衡状态,是对系统内大量质点(分子)热运动的

统计平均效果而言的,一般情况下,不用考虑系统整体有无运动.力学中的平衡状态则是指系统整体(可以是一个质点,也可以是质点组)所受合外力以及合外力矩为零的状态.两者截然不同.

6 - 3 对一定量的气体来说,当温度不变时,气体的压强随体积的减小而增大;当体积不变时,压强随温度的升高而增大.就微观来看,它们是否有区别?

答:由  $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$  可知,对一定量的理想气体,当温度  $T$  不变时,分子热运动的平均平动动能  $\bar{\epsilon}$  不变,压强  $p$  随体积  $V$  的减小而增大,是由于单位体积内的分子数  $n$  增加,导致单位时间内对单位器壁的冲量作用增加,从而使压强增大.

对同样的理想气体,当体积  $V$  不变时,单位体积内的分子数  $n$  保持不变,压强  $p$  随温度  $T$  的升高而增大,是由于分子热运动的平均平动动能  $\bar{\epsilon}$  增大,导致对单位器壁的冲量作用增强,从而使压强增大.

6 - 4 如果气体由几种类型的分子组成,写出混合气体的压强公式.

答:设  $n$  组分的化学纯气体分子组成混合理想气体系统时,内部不发生化学反应.当系统处于平衡状态时,各组分气体的温度  $T$  相同,占据相同的体积  $V$ ,各组分气体均满足状态方程:

$$p_i = \frac{m_i}{M_i} \frac{RT}{V} = n_i kT,$$

式中,  $m_i$  和  $M_i$  分别为第  $i$  组分气体的质量和摩尔质量;  $p_i$  为第  $i$  组分单独存在时对器壁的压强;  $n_i$  为第  $i$  组分单位体积的分子数.

根据力的叠加原理可知,混合理想气体对器壁的压强为各组分气体单独存在时对器壁的压强之和.即

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n n_i kT = nkT,$$

其中

$$n = \sum_{i=1}^n n_i .$$

上述混合理想气体的压强公式也称为道尔顿分压定律 .

6 - 5 对汽车轮胎打气,使达到所需要的压强 .问在夏天和冬天,打入轮胎内的空气质量是否相同?为什么?

答:假设空气为理想气体,由理想气体压强公式  $p = nkT$  可知,轮胎内空气的压强不变,即  $p = 0$  时,轮胎内的气温和分子数密度的关系为

$$\frac{n}{n} = - \frac{T}{T},$$

式中的  $T$  和  $n$  可看作是一年的平均气温和在平均气温下轮胎内气体分子数密度 .

夏天的气温较平均气温高,  $T > 0$ , 使上式成立, 应有  $n < 0$  . 即夏天打入轮胎内空气的质量应该少些 .从微观角度看,夏天的空气分子热运动较为剧烈,达到轮胎所需压强的分子数较冬天的要少 .

6 - 6 试用气体的分子热运动说明为什么大气中氢的含量极少?

答:地球是太阳系中适合生命存在的极不寻常的绿色星球 .地球大气的成分在经历了几十亿年各种复杂的物理、化学和生物演变过程后,  $H_2$  和 He 的含量极少,主要是  $N_2$  和  $O_2$  .根据当代宇宙学的知识,在地球形成之初的原始大气中,含有大量的氢和氦 .目前,虽然还不能对地球大气的所有问题都给出解释,但可以认为逃逸是使  $H_2$  含量极少的原因之一 .

气体分子都有一定的质量而受地球的引力作用,然而它们的

热运动,可使速率较大者挣脱地球的引力束缚而逃离地球.假定原始大气是处于一定平衡状态的混合理想气体系统,并服从麦克斯韦速率分布律.由方均根速率  $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  可知,在同样的温度下,  $H_2$  的质量较小因而具有较大的方均根速率,  $N_2$  和  $O_2$  等气体的质量较大则方均根速率较小.方均根速率只是气体速率分布的一个特征量,大量分子的速率大于或远大于其方均根速率.所以氢气较容易从地球表面逃逸.在大气高层,温度较高的散逸层中,气体十分稀薄,分子相互碰撞的概率很小,氢气更容易逃逸.

事实上,地球大气有昼夜、季节的温度变化,也不可能均匀分布.以上只是一个粗略的解释.

6 - 7 回答下列问题:

- (1) 气体中一个分子的速率在  $v \sim v + \Delta v$  间隔内的概率是多少?
- (2) 一个分子具有最概然速率的概率是多少?
- (3) 气体中所有分子在某一瞬时速率的平均值是  $\bar{v}$ , 则一个气体分子在较长时间内的平均速率应如何考虑?

答: (1) 根据麦克斯韦速率分布率,速率在  $v \sim v + \Delta v$  间隔内的分子数占总分子数的百分比为

$$\frac{N}{N} = 4 \left[ \frac{m}{2kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ - \frac{mv^2}{2kT} \right] v^2 \Delta v = f(v) \Delta v,$$

此即气体中某个分子的速率处在  $v \sim v + \Delta v$  间隔内的概率.

(2) 最概然速率  $v_p$  是在某一温度的平衡状态下,系统内大量分子最可能具有的速率.这是对大量分子的速率分布所作的统计规律的一个特征值,它只对大量分子整体有意义.对一个分子,讨论它具有某一确定速率的概率是没有意义的.

(3) 气体宏观的平衡状态是气体分子永不停息的热运动的平均效果,是在没有外界影响的条件下,不随时间变化的状态.其实

质是热动平衡,对应着大量瞬息万变的、出现概率最高的微观状态.在对宏观状态进行一次瞬时测量的过程中,系统对应着各种不同的微观状态.因此,从统计的角度看,在较长时间内对一个分子的某物理量,测量所得不同的数值作统计平均的结果,与在平衡状态下,某一瞬时对所有分子的该物理量的测量数值作的统计平均值应该是相同的.

所以,一个气体分子在较长时间内的平均速率同样是  $\bar{v}$ .

6 - 8 气体分子的最概然速率、平均速率以及方均根速率各是怎样定义的?它们的大小由哪些因素决定?各有什么用处?

答:最概然速率  $v_p$  是平衡状态下,气体分子速率分布函数的极大值所对应的速率.若将气体分子的速率划分为一个个相等的小区间,则  $v_p$  所在区间内的分子数占总分子数的百分比为最大,也即在平衡状态下,气体分子的速率以取  $v_p$  的可能性为最大.

平均速率  $\bar{v}$  是在平衡状态下,大量分子速率的算术平均值,即

$$\bar{v} = \frac{\sum_i n_i v_i}{\sum_i n_i},$$

对连续分布函数,有

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN}{\int_0^{\infty} dN} = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

方均根速率  $\sqrt{\overline{v^2}}$  定义为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 f(v) dv}.$$

$v_p$ ,  $\bar{v}$  和  $\sqrt{\overline{v^2}}$  是反映在平衡状态下,大量分子系统速率分布函数的三个统计值,在理想气体的麦克斯韦速率分布情况下,它们都

正比于热力学温度反比于分子质量。

三种速率对于不同的问题有各自的应用:在讨论气体处于不同温度的平衡态或温度相同但分子质量不同时的速率分布,常用到最概然速率;在计算分子的平均自由程、气体分子间的碰撞频率时,常用到平均速率;而在计算分子的平均平动动能时,则需用到方均根速率。

6 - 9 在同一温度下,不同气体分子的平均平动动能相等。因氧分子的质量比氢分子的为大,则氢分子的速率是否一定大于氧分子的呢?

答:“在同一温度下,不同气体分子的平均平动动能相等。”这是对大量气体分子系统成立的统计规律,对个别分子并不成立。所以,不能认为温度相同时,因氧分子的质量比氢分子的大,而氢分子的速率一定大于氧分子的。

从气体分子的速率分布函数来看,由于氢分子的质量小于氧分子的质量,在同一温度的平衡状态下,氢分子的  $v_p$ 、 $\bar{v}$  和  $\sqrt{v^2}$  都大于氧分子的,这同样是对大量气体分子系统的三个统计规律,个别分子的速率完全可以在  $0 \sim \infty$  间取任何值。因此,不能对个别分子的速率作比较。

6 - 10 如盛有气体的容器相对于某坐标系从静止开始运动,容器内的分子速度相对于这坐标系也将增大,则气体的温度会不会因此升高呢?

答:容器内气体的温度是大量分子无规则热运动的平均效果,是表征容器内气体平衡状态的宏观参量。若因容器的运动而破坏了容器内气体的平衡状态,则无温度可言。在容器一般运动的情况下(比如直线运动),由于气体分子的频繁碰撞,总能维持平衡状态,所有分子的热运动叠加了一个整体定向运动的速度,这并未增



加或减少分子间的碰撞机会.因此,容器内气体的温度不会变化(通过取相对容器静止的参考系,可证明这一结论).

但当容器突然停止运动时,大量分子定向运动的动能将通过与器壁以及分子间的碰撞而转换为热运动的能量,会使容器内气体的温度有所升高.

6-11 速率分布函数的物理意义是什么?试说明下列各量的意义:

$$(1) f(v)dv; \quad (2) Nf(v)dv; \quad (3) \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv;$$

$$(4) \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv; \quad (5) \int_{v_1}^{v_2} v f(v)dv; \quad (6) \int_{v_1}^{v_2} Nv f(v)dv.$$

答:速率分布函数  $f(v)$  表示在  $v$  附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比.对某个分子,则表示其速率出现在  $v$  附近单位速率区间内的概率.

(1)  $f(v)dv = \frac{dN}{N}$  表示速率在  $v \sim v + dv$  间隔内的分子数占总分子数的百分比;对某个分子而言,表示其速率出现在  $v \sim v + dv$  区间内的概率.

(2)  $Nf(v)dv = dN$  表示速率在  $v \sim v + dv$  间隔内的分子数.

(3)  $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{N_1}{N} = \frac{N_2}{N}$  表示速率在  $v_1$  到  $v_2$  间隔内的分子数占总分子数的百分比.

(4)  $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv = \frac{N_2}{N_1} dN = N$  表示速率在  $v_1$  到  $v_2$  间隔内的分子数.

(5)  $\int_{v_1}^{v_2} v f(v)dv = \frac{N \int_{v_1}^{v_2} v f(v)dv}{N}$  表示速率在  $v_1$  到  $v_2$  间隔

内分子的速率之和对所有分子的平均值 .

$$(6) \int_{v_1}^{v_2} N v f(v) dv \text{ 表示速率在 } v_1 \text{ 到 } v_2 \text{ 间隔内的分子速率}$$

总和 .

### 6 - 12 何谓起伏现象 ?

答: 起伏也称“涨落”, 指系统处于热动平衡状态时, 测得的某宏观量的数值在其平均值附近作无规则的微小变动的现象 . 由于系统内的大量粒子, 比如分子、原子、电子等的热运动而引起的涨落现象也称为热力学涨落 .

从统计的意义看, 系统所处的宏观平衡状态所对应的微观状态的分布, 是包含微观状态数目最多的一种分布 . 这种分布出现的概率最大, 因此, 平衡状态所对应的分布也称为最概然分布 . 起伏现象就是对这种分布的偏离, 它的大小是随机的, 服从一定的概率分布 .

6 - 13 一定质量的气体, 保持容器的容积不变 . 当温度增加时, 分子运动更趋剧烈, 因而平均碰撞次数增多, 平均自由程是否也因此而见小呢 ?

答: 对一定质量的气体, 容积不变时, 单位体积内的分子数不变, 由  $p = nkT$  可知,  $\frac{p}{T}$  为常量, 即温度增加时, 压强也增大 . 由平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2} n d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2} d^2 p}$  可知, 平均自由程将不变 .

6 - 14 平均自由程与气体的状态以及分子本身的性质有何关系 ? 在计算平均自由程时, 什么地方体现了统计平均 ?

答: 平均自由程  $\bar{\lambda}$  与气体的宏观状态参量温度、压强有关, 也与微观物理量分子的有效直径有关 . 推导时, 利用了麦克斯韦速率

分布律中平均相对速率与算术平均速率的关系： $\bar{v}_r = \sqrt{2} \bar{v}$ ，得出分子的平均碰撞次数，进而得出分子的平均自由程。因此，平均自由程  $\bar{\lambda}$  是在平衡状态下，对大量气体分子的热运动在连续两次碰撞间所经过路程的一个统计平均值。

6 - 15 分子热运动与分子间的碰撞，在迁移现象中各起什么作用？哪些物理量体现了它们的作用？

答：粘滞现象、热传导现象和扩散现象统称为迁移现象，也称输运现象，这是一种非平衡态过程。

用定性半定量的初级气体动理论来解释输运现象，可以认为：粘滞现象是流速分布不均匀引起的动量传递，形成“动量流”，即作用力；热传导现象是温度分布不均匀引起的热量传递，形成“热流”；扩散现象是密度分布不均匀引起的质量传递，形成“质量流”。总而言之，输运现象是因某个宏观参量分布不均匀引起相应物理量的迁移，形成某种“流”。从微观上看，某物理量  $A$  的迁移是靠分子热运动来输运的，而输运过程中物理量  $A$  的交接，则靠碰撞。分子的热运动和分子间的碰撞的合效果，起着“搅拌”作用。

在有关规律中，气体分子的算术平均速率  $\bar{v}$  体现了热运动的作用，而气体分子的平均自由程  $\bar{\lambda}$  则体现了分子间碰撞的作用，交换相应的物理量（动量、热量或质量）。

6 - 16 在推导迁移现象的宏观规律时，有人认为：既然分子的平均自由程是  $\bar{\lambda}$ ，则在  $S$  两侧 A、B 两部分的分子通过  $S$  面前最后一次碰撞应发生在与  $S$  相距  $\frac{\bar{\lambda}}{2}$  处，这样才能保证通过  $S$  面的分子无碰撞地通过  $\bar{\lambda}$  的路程。你是否同意这样的看法？说明理由。

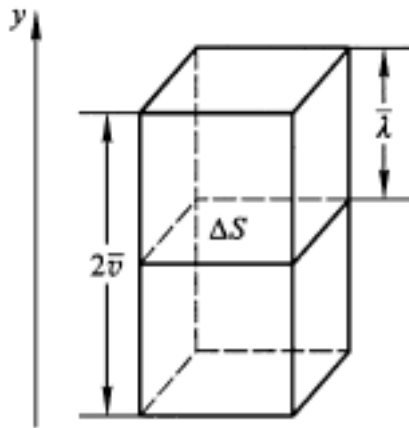
答：迁移现象所涉及的系统，整体上虽然处于非平衡状态，不能用统一确定的参量来描述，但若将系统划分成很多很小的区域，

则可近似认为每一个宏观小微观大的小区域内的分子都处于平衡态。关注这些小区域，假定各小区域内分子的运动是各向同性的，并且以平均速率  $\bar{v}$  运动。这样考虑的目的是可以比较方便地用确定的参量(包括  $\bar{v}$  和  $\bar{Z}$ )来研究迁移现象。

根据“小区域平衡态”的概念，在  $S$  两侧的 A 和 B 就是两个相邻的小区域，两部分气体分子的宏观参量虽不同，但可通过各自与对方分子的一次碰撞来“交接”相应的物理量，并被“同化”。通过每两个相邻小区域间分子的碰撞和“同化”，进而使整个系统从非平衡状态过渡到最终的平衡状态。

上述物理模型和图像实际上也已给出了“小区域”的大小。如题 6 - 16 图所示，在  $S$  面一侧的小区域内，已与本区域内其他分子作最后一次碰撞，沿  $y$  轴穿过  $S$ ，并与对方分子作首次碰撞的所有分子，均匀分布在底面为  $S$ ，高为  $\bar{\lambda}$  的柱体内。

所以，若取柱体的高为  $\bar{\lambda}/2$ ，将遗漏掉 A 和 B 各一半的分子数。



题 6 - 16 图

## 第七章 热力学基础

7 - 1 怎样区别内能与热量？下面哪种说法是正确的？

(1) 物体的温度越高,则热量越多 .

(2) 物体的温度越高,则内能越大 .

答:内能与热量是两个不同的概念,应该注意它们的区别和联系 .

内能是由热力学系统状态所决定的能量 .从微观的角度看,内能是系统内粒子动能和势能的总和 .关于内能的概念,应注意以下几点:

(a) 内能是态函数,是用宏观状态参量(比如  $p$ 、 $T$ 、 $V$ )描述的系统状态的单值函数,对于理想气体,系统的内能是温度  $T$  的单值函数;

(b) 内能的增量只与确定的系统状态变化相关,与状态变化所经历的过程无关;

(c) 系统的状态若经历一系列过程又回到原状态,则系统的内能不变;

(d) 通过对系统做功或者传热,可以改变系统的内能 .

热量是由于系统之间存在温度差而传递的能量 .从微观的角度看,传递热量是通过分子之间的相互作用完成的 .对系统传热可改变系统的内能 .关于热量,应注意以下几点:

(a) 热量是过程量,与功一样是改变系统内能的一个途径,对某确定的状态,系统有确定的内能,但无热量可言;

(b) 系统所获得或释放的热量,不仅与系统的初、末状态有关,也与经历的过程有关,过程不同,系统与外界传递热量的数值

也不同;

(c) 在改变系统的内能方面,传递热量和作功是等效的,都可作为系统内能变化的量度.

所以,(1)是错误的.温度是状态量,是分子平均动能大小的标志.“温度高”表示物体处在一个分子热运动的平均效果比较剧烈的宏观状态,无热量可言.热量一定与过程相联系.(2)对理想气体是正确的.对一般热力学系统,内能是分子热运动的动能与势能之和,即内能并非只是温度的单值函数.

7-2 说明下列过程中热量、功与内能变化的正负:

(1) 用气筒打气; (2) 水沸腾变成水汽.

答:(1) 用气筒打气时,气筒内的气体被压缩,达到一定的压力时,才冲开阀门向外排气.以气筒内的气体为研究对象.由于压缩气体的过程进行得较快,气体尚未与外界交换热量就已被压缩,而可近似为绝热过程,因此,  $Q=0$ . 由热力学第一定律  $Q = E + A$  可知,系统体积的增量  $V < 0$ ,  $A < 0$ , 对外作负功;  $E > 0$ , 系统的内能增加.

(2) 将水沸腾成同温度水汽的过程中,取水汽为研究对象,并近似为理想气体.当系统体积的增量  $V > 0$  时,  $A > 0$ , 对外作正功; 因水汽的温度不变  $T = 0$ , 故系统的内能不变  $E = 0$ ; 根据热力学第一定律,有  $Q > 0$ , 即水汽在等温膨胀过程中需从热源吸取热量.

7-3 为什么气体热容的数值可以有无穷多个?什么情况下,气体的摩尔热容是零?什么情况下,气体的摩尔热容是无穷大?什么情况下是正值?什么情况下是负值?

答: 气体热容  $C = \frac{dQ}{dT}$  的物理意义是: 气体在没有化学反应和相变的条件下,温度升高 1 K 所需吸收的热量.热量  $dQ$  是过程

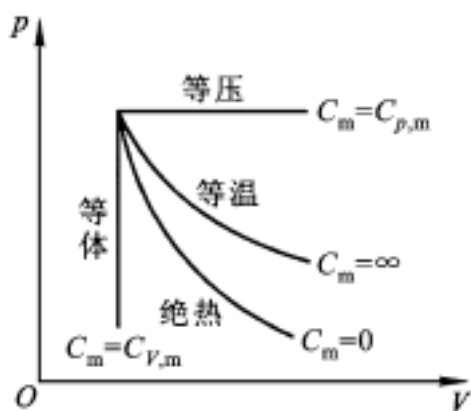
量,而气体在确定的两个平衡状态之间,可能经历的过程理论上可有无穷多个.因此,气体温度升高 1 K 所需吸收热量,即热容  $C$  的数值也可以有无穷多个.气体的摩尔热容指 1 mol 气体的热容.如题 7 - 3 图所示:

对绝热过程,因  $dQ = 0$ ,故气体的摩尔热容  $C_m = 0$ ;

对等温过程,因  $dT = 0$ ,故气体的摩尔热容  $C_m = \infty$ ;

对等压过程,气体的摩尔热容  $C_{p,m} > 0$ ;

对等体过程,气体的摩尔热容  $C_{v,m} > 0$ ;



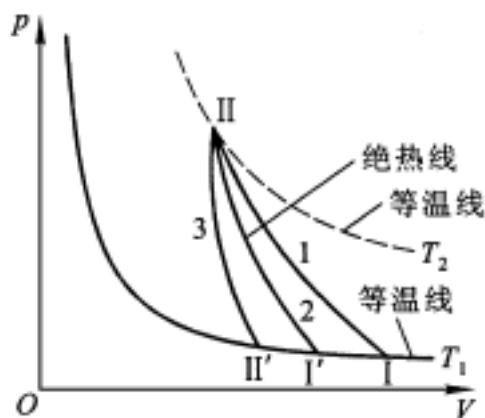
题 7 - 3 图

当气体经历多方过程时,若多方指数  $1 < n < \gamma$ ,则将出现多方负热容,即系统升温时,反而要放热.

7 - 4 一理想气体经图示的过程,试讨论其摩尔热容的正负:

(1) 过程 \_\_\_\_\_ ; (2) \_\_\_\_\_ (沿绝热线); (3) \_\_\_\_\_ .

答:在图示的三个过程中,系统初、末状态的温度变化都相同,因此内能的增量也都相同,即有  $E_1 = E_2 = E_3 > 0$ ;在三个过程中,系统初、末状态的体积变化不同,比较  $p - V$  图上过程曲线下的面积,有  $|A_1| > |A_2| > |A_3|$ ,都是外界对系统作正功;过程(2)是绝热过程,  $Q_2 = 0$ .根据上述特征,利用热力学第一定律,



题 7 - 4 图

可得出过程(1)和(3)是吸热还是放热,以及摩尔热容的正负.

过程(2)( )是绝热过程,  $Q_2 = 0$ .

根据热力学第一定律  $Q = E + A$ , 得  $E_2 = -A_2, A_2 < 0$ .

并且,有  $E_1 = E_2 = E_3 = -A_2$ .

在过程 中,系统吸热  $Q_1 = E_1 + A_1 = -A_2 + A_1 < 0$ ,  
为放热过程.

在过程 中,系统吸热  $Q_3 = E_3 + A_3 = -A_2 + A_3 > 0$ ,  
为吸热过程.

所以:

(1) 过程( )中,外界压缩气体作的功,使气体的内能增大,同时放出热量.此过程的摩尔热容为负.

(2) 过程( )中,外界绝热压缩气体作的功全部转变为气体内能的增加.绝热过程的摩尔热容为零.

(3) 过程( )中,气体被外界压缩的同时也吸收热量,使气体的内能增大.此过程的摩尔热容为正.

7 - 5 对物体加热而其温度不变,有可能吗?没有热交换而系统的温度发生变化,有可能吗?



答：物体系统的热力学过程遵守热力学第一定律  $Q = E + A$  .

在理想气体的等温膨胀过程中,系统的温度保持不变  $T = 0$ , 因而  $E = 0$ , 由热力学第一定律:  $Q = A$ , 从热源吸收的热量全部用来对外界做功 .

在理想气体的绝热压缩或膨胀过程中,系统与外界无热量交换,  $Q = 0$ , 由热力学第一定律:  $E = -A$  .外界压缩气体作的功全部转化为气体内能的增量, 或者, 气体膨胀过程中对外界作的功都以气体内能的减少为代价, 因而气体的温度也随之发生变化 .

7 - 6 为什么卡诺循环是最简单的循环过程? 任意可逆循环需要多少个不同温度的热源?

答：在卡诺循环中, 工作物质只需要两个热源, 循环过程由两个可逆的等温过程和两个可逆的绝热过程构成, 工作物质仅在两个等温过程中与热源交换热量 . 这是在所有可能的循环中, 所需热源数最少的、最简单的、理想化的循环 .

一个任意的可逆循环, 总可以细分为许多微小的卡诺循环过程 . 每一个微小卡诺循环都对应两个有微小温差的热源, 整个可逆循环也就对应着需要许多个有微小温差的热源 . 细分的微小卡诺循环数越多, 越接近实际的任意可逆循环, 但所需热源数也越多; 若无限细分, 则所需热源数为无限 . 这也正说明了卡诺循环是最简单的循环过程 .

7 - 7 有两个可逆机分别用不同热源作卡诺循环, 在  $p - V$  图上, 它们的循环曲线所包围的面积相等, 但形状不同, 如题 7 - 7 图所示, 它们吸热和放热的差值是否相同? 对外所作的净功是否相同? 效率是否相同?

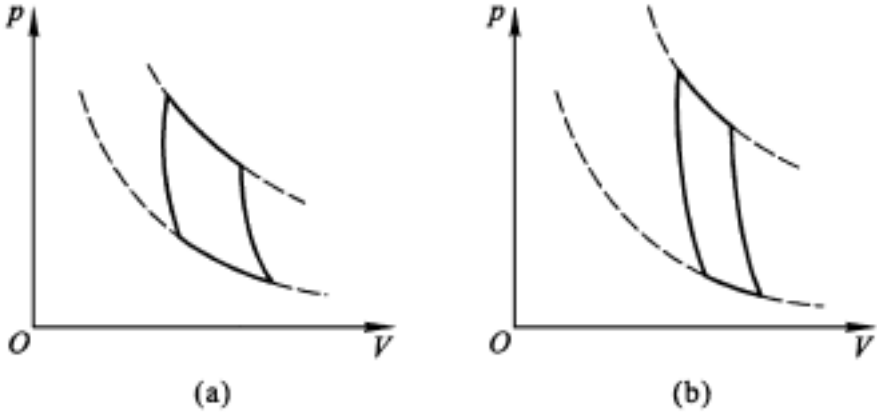
答：对于一个循环过程,  $E = 0$  . 在  $p - V$  图上, 循环曲线所包围的面积  $A$  是系统对外所作的净功, 根据热力学第一定律, 它也是在循环中系统的净吸热, 即吸热和放热的差值 . 所以这两个循

环有：

吸热和放热的差值是相同的；

对外所作的净功是相同的。

从循环曲线的不同形状可见，它们在工作于高温热源时的吸热过程中，所吸收的热量  $Q_{\text{吸}}$  是不同的。由循环效率  $\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}}$  可知，这两个可逆卡诺机的效率并不相同。

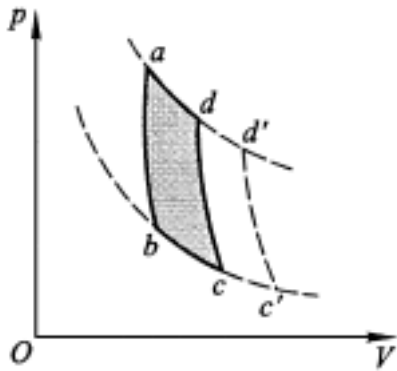


题 7 - 7 图

从可逆卡诺机的效率  $\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  可直接判断：两循环曲线表示的高低热源的温度差 ( $T_2 - T_1$ ) 不同，因而它们的效率不同。

7 - 8  $p - V$  图中表示循环过程的曲线所包围的面积，代表热机在一个循环中所作的净功。如题 7 - 8 图所示。如果体积膨胀得大些，面积就大了（图中面积  $S_{abcd} > S_{abcd}$ ），所作的净功就多了，因此热机效率也就可以提高了。这种说法对吗？

答：这种说法不对。根据热机的效率  $\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}}$ ，在一个循环过程中，若所作的净功多了，而在吸热过程中，所吸收的热量  $Q_{\text{吸}}$  也可能多了，则效率未必可以提高。工作于两个相同热源间的一切可



题 7 - 8 图

逆卡诺热机的效率相同  $\left[ = 1 - \frac{T_2}{T_1} \right]$ , 也即  $A$  与  $Q_{\text{吸}}$  的比值不变 .

7 - 9 有一可逆的卡诺机, 它作热机使用时, 如果工作的两热源的温差越大, 则对于做功就越有利 . 当作制冷机使用时, 如果两热源的温差越大, 对于制冷是否也越有利? 为什么?

答: 对于制冷机, 人们关心的是从低温热源吸取的热量  $Q_2$  要多, 而外界必须对制冷机作的功  $A$  要少, 故定义制冷系数  $w =$

$\frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$  制冷系数可以大于 1, 且越大越好 . 对卡诺制冷机,

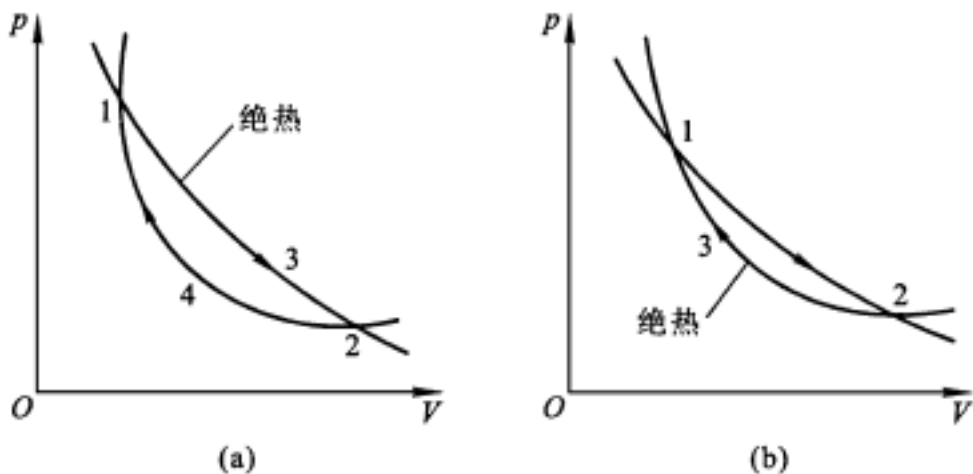
有  $w_{\text{卡}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$  . 由此可见, 若两热源的温差越大, 则制冷系数

越小, 从低温热源吸取相同的热量  $Q_2$  时, 外界对制冷机作的功  $A$  就要增大, 这对制冷是不利的; 制冷温度  $T_2$  越低, 制冷系数越小, 对制冷也是不利的 .

7 - 10 一条等温线与一条绝热线能否相交两次, 为什么?

答: 不能 . 可用反证法说明: 设一条等温线与一条绝热线能相交于 1、2 两点, 如题 7 - 10 图(a)和(b)所示 .

(1) 如题 7 - 10 图(a)所示, 可构成一正循环 1 3 2 4 1 .



题 7 - 10 图

在该循环中对外作正功(所围面积),只有等温放热而无吸热,这显然是违反热力学第一定律的.

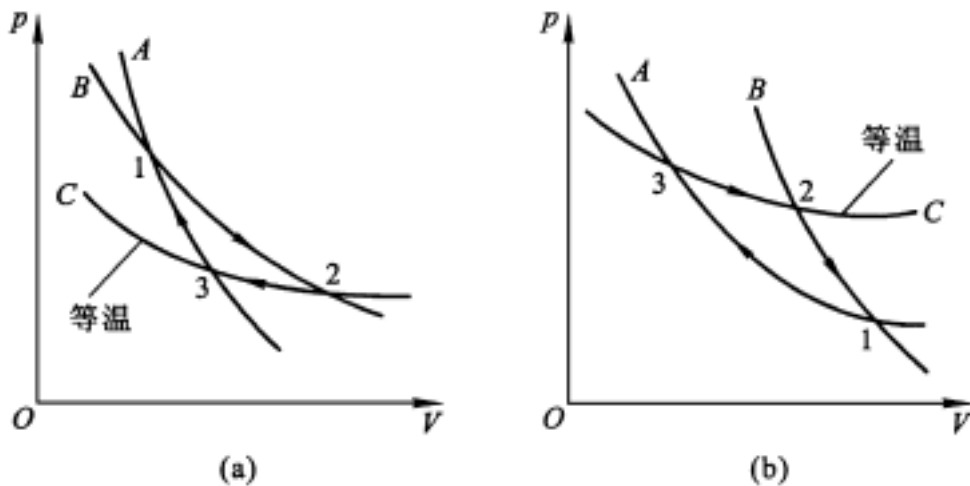
(2) 如题 7 - 10 图 (b) 所示,可构成一正循环,该循环对外作正功(所围面积),只从单一热源吸热,这显然是违背热力学第二定律的.

7 - 11 两条绝热线与一条等温线能否构成一个循环,为什么?

答:不能.可用反证法说明:设两条绝热线  $A$ 、 $B$  相交于点 1,与另一条等温线  $C$  分别相交于点 3、2,1 2 3 1 构成一个正循环,如题 7 - 11 图(a)和(b)所示.

(1) 如题 7 - 11 图(a)所示,该正循环对外作正功,而只在状态 2 到状态 3 的过程中等温放热,即既不吸热又对外作有用功,显然违反热力学第一定律.

(2) 如题 7 - 11 图(b)所示,该正循环对外作正功,而只在状态 3 到状态 2 的过程中等温吸热,成为从单一热源吸热对外作有用功的热机,显然违背热力学第二定律.



题 7 - 11 图

7 - 12 从理论上如何计算物体在始末状态之间进行不可逆过程所引起的熵变？

答：从理论上计算物体在始末状态之间进行不可逆过程所引起的熵变时，可任意设计一个连接初、末态的可逆过程，其熵变为  $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ 。之所以可以这样做，是由熵函数的性质所决定的。理由如下：

(1) 熵是系统的状态函数，对于确定的平衡状态，对应有确定的熵值；

(2) 对于确定的初、末平衡态，两态间的熵变是确定的，与所经历的过程无关；

(3) 理论上可有无穷多个可逆过程连接确定的初、末两平衡态，因此为计算熵变所设计的可逆过程是任意的；

(4) 对于确定的初、末两平衡态间，可逆过程的熵变总是大于不可逆过程的熵变。

7 - 13 在日常生活中，经常遇到一些单方向的过程，如：(1) 桌上热餐变凉；(2) 无支持的物体自由下落；(3) 木头或其他燃料

的燃烧.它们是否都与热力学第二定律有关?在这些过程中熵变是否存在?如果存在,则是增大还是减小?

答:一切与热有关的自然现象都与热力学第二定律有关,由熵增加原理可知,在封闭系统中发生的任何不可逆过程,都将导致整个系统的熵增加.

上述三个单方向过程都是可以在封闭系统中自发进行的不可逆过程,因此(1)中的热餐和周围环境,(2)中的物体和地球,(3)中的燃料和周围环境等,所有涉及整个系统的熵将增加.

从能量退化的角度看,熵增加意味着系统能量中成为不可用能量的部分在增大.所以,(1)中热餐的熵是减少的;(2)中物体的熵是增大的;(3)中木头或燃料的熵是增大的.

7 - 14 一杯热水放在空气中,它总是冷却到与周围环境相同的温度,因为处于比周围温度高或低的概率都较小,而与周围同温度的平衡却是最概然状态,但是这杯水的熵却是减小了,这与熵增加原理有无矛盾?

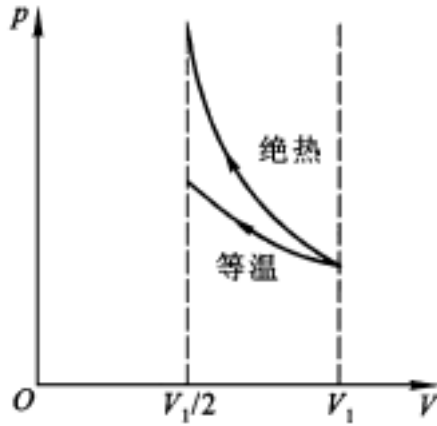
答:熵增加原理的适用前提是封闭系统或绝热过程.若将这杯热水与周围环境作为一个封闭系统,则随着水温降低这一不可逆过程,最终整个系统将处于某一温度的平衡状态,系统的总熵,即水的熵变与环境的熵变之和是增加的.

所以,这与熵增加原理没有矛盾.

7 - 15 一定量的气体,初始压强为  $p_1$ , 体积为  $V_1$ , 今把它压缩到  $\frac{V_1}{2}$ , 一种方法是等温压缩, 另一种方法是绝热压缩. 问哪种方法最后的压强较大? 这两种方法中气体的熵改变吗?

答: 在  $p - V$  图上, 绝热过程曲线的斜率较之等温过程曲线的斜率为陡, 表明从相同的初始状态将气体压缩到相同的末态体积时, 若经绝热过程, 则气体末态的压强较大.

$p - V$  图上所表示的过程都是可逆过程, 而可逆的绝热过程是等熵过程, 熵变为零. 可逆等温压缩过程, 则气体的熵将减少.



题 7 - 15 图

7 - 16 判别下面说法是否正确?

(1) 功可以全部转化为热, 但热不能全部转化为功.

(2) 热量能从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体.

答: (1) 在一个理想的可逆过程中, 功可以全部转化为热, 热也能全部转化为功. 比如理想气体的等温膨胀和等温压缩过程. 然而, 企图通过一个循环过程, 将热完全转化为功, 则将成为从单一热源取热并作功, 效率为 1 的热机. 这违反了热力学第二定律的开尔文表述, 是不可能的. 所以上述说法是不全面的.

(2) 热量从高温物体传到低温物体, 这是可以自发进行的过程, 热量虽不可能自动地从低温物体传到高温物体, 但却可利用循环工作的制冷机, 将它从低温物体传向高温物体. 因此上述说法也是不全面的.

## 第八章 真空中的静电场

8 - 1 一个金属球带上正电荷后,该球的质量是增大、减小还是不变?

答:一个原电中性的金属球若失去一些电子,即呈现带等量正电荷状态,失去电子的同时,也失去了电子的质量,该球的质量是减小的.

8 - 2 判断下列说法是否正确,并说明理由.

(1) 电场中某点场强的方向就是将点电荷放在该点处所受电场力的方向.

(2) 电荷在电场中某点受到的电场力很大,该点的场强  $E$  一定很大.

(3) 在以点电荷为中心,  $r$  为半径的球面上,场强  $E$  处处相等.

答:以试探电荷所受的力与试探电荷所带电量之比,来定义电场强度  $E$ ,须注意试探电荷必须满足的两个“足够小”条件:所带电量必须足够小,不至于引入后影响场源电荷所激发场的分布;线度必须足够小,小到一个点,以使其所受电场力和所带电量的比值,确实反映空间这一点电场的性质.所以,

(1) 不正确.点电荷未必满足试探电荷“所带电量必须足够小”条件,若该点电荷的带电量足够小,并所带电荷量  $q > 0$ ,则该点电荷所受电场力的方向就是电场中该点场强的方向.

(2) 不正确.若该电荷量足够小,并带电体的体积小小到只占空间一个点的位置,那么该点电荷在电场中某点受到的电场力很大



时,可以说这一点处的场强  $E$  一定很大.

(3) 不正确.真空或均匀各向同性介质中的一个点电荷所激发的电场强度  $E$  在空间的分布具有球对称性:在以点电荷为中心,  $r$  为半径的球面上,虽然场强  $E$  的大小处处相等,但其方向则处处沿矢径,即球面上  $E$  的方向处处不同.

8 - 3 根据点电荷的场强公式  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ ,当所考察的场点和点电荷的距离  $r \rightarrow 0$  时,场强  $E \rightarrow \infty$ ,这是没有物理意义的,对这个似是而非的问题应如何解释?

答:当场点和带电体  $q$  的距离  $r \rightarrow 0$  时,对于所考察的场点而言,带电体  $q$  作为点电荷模型处理的前提已不成立.因此,在这种情况下,点电荷的场强公式是不适用的.

8 - 4 在一个带正电的金属球附近,放一个带正电的点电荷  $q_0$ ,测得  $q_0$  所受的力为  $F$ .试问  $F/q_0$  是大于、等于还是小于该点的场强?如果金属球带负电,则又如何?

答:参见 8 - 2 题.静电平衡时,金属球(导体)所带电荷只能分布于表面.真空或均匀各向同性介质中的孤立带电金属球,其表面电荷均匀分布.因此,球外空间的场强分布具有与球面同心的球对称性.

若引入点电荷  $q_0$  的电量不是足够小,则  $q_0$  激发的场将明显地改变原来金属球的静电平衡状态,球上的电荷将重新分布,导致场分布的变化,这就是静电感应现象.金属球带正电时,靠近  $q_0$  一侧的正电荷将减少,  $F/q_0$  小于该点原来的场强;金属球带负电时,  $F/q_0$  则将大于该点原来的场强.若  $q_0$  的电量足够小,可看作试探电荷时,比值  $F/q_0$  就是该点场强的大小,  $F$  的方向就是该点场强的方向.

8 - 5 点电荷  $q$  如果只受电场力的作用而运动, 电场线是否就是点电荷  $q$  在电场中运动的轨迹?

答: 电场线是为了能形象地描述电场强度在空间的分布而引用的直观图像. 均匀电场的电场线表示为一组等间隔的平行有向直线段. 静止的点电荷  $q$  在均匀电场中只受电场力作用而运动时的轨迹是直线, 与电场线重合. 非均匀电场的电场线为一组非均匀分布的有向曲线.  $q$  在非均匀电场中某点处运动时, 受电场力而获得的加速度在该点电场线的切线方向. 加速度方向一般不同于速度方向. 因此, 在非均匀电场中, 电场线一般不会与  $q$  的运动轨迹重合.

8 - 6 在正四边形的四个顶点上, 放置四个带相同电荷量的同号点电荷, 试定性地画出其电场线.

答: 根据场强的叠加原理, 可得出各处电场线的切线方向(合场强方向), 进而可描述出空间电场线的分布. 描绘电场线时应注意对称中心处的场强为零, 没有电场线通过(图略).

8 - 7 如果在高斯面上的  $E$  处处为零, 能否肯定此高斯面内一定没有净电荷? 反过来, 如果高斯面内没有净电荷, 能否肯定面上所有各点的  $E$  都等于零?

答: 如果在高斯面上的  $E$  处处为零, 则  $\oint_S E \cdot dS = q_{\text{内}} = 0$ ;  $q_{\text{内}} = 0$ . 因此可以肯定此高斯面内一定没有净电荷, 即电荷的代数和为零. 反过来, 如果高斯面内没有净电荷, 则可以肯定“穿进”此高斯面的电场线与“穿出”此高斯面的电场线相等, 但不能肯定面上所有各点的  $E$  为零.

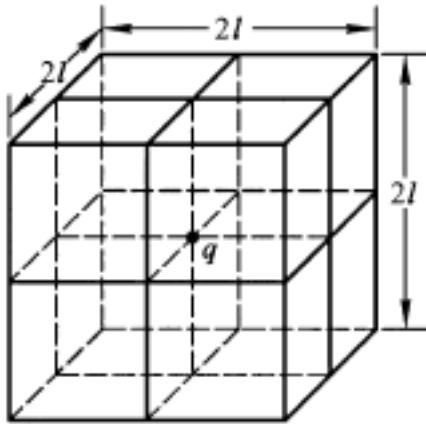
8 - 8 在高斯定理  $\oint_S E \cdot dS = q_{\text{内}}$  中, 在任何情况下电场强

度  $E$  是否完全由该电荷  $q$  产生 ?

答: 否 . 高斯定理中的  $E$  是空间所有电荷在高斯面上  $dS$  处激发的合场强, 既包括分布于高斯面外的所有电荷在  $dS$  处激发的场强, 也包括高斯面所包围电荷在  $dS$  处激发的场强, 是它们相叠加的矢量和 . 高斯定理指明: 闭合曲面上各点处的合场强  $E$  对整个闭合曲面  $S$  的积分, 仅与该闭合曲面所包围的电荷量  $q$  有关, 即通过闭合曲面的电场线是由闭合曲面内的电荷发出或终止的 .

8 - 9 (1) 一点电荷  $q$  位于一立方体的中心, 立方体边长为  $l$  . 试问通过立方体一面的  $E$  通量是多少 ?

(2) 如果把这个点电荷放到立方体的一个角上, 这时通过立方体每一面的  $E$  通量各是多少 ?



题 8 - 9 图

答: (1) 若以点电荷  $q$  为中心, 以  $\frac{\sqrt{3}}{2}l$  (点电荷到立方体顶角的距离) 为半径作一闭合球面, 由高斯定理可知, 通过此闭合球面的  $E$  通量 (电场线数) 为  $\frac{q}{\epsilon_0}$  . 由点电荷场强的球对称分布可知, 这些电场线在球面上均匀分布, 且都由立方体的六个面穿出 (或穿

进) .所以,通过立方体一面的  $E$  通量为  $\frac{q}{6 \epsilon_0}$  .

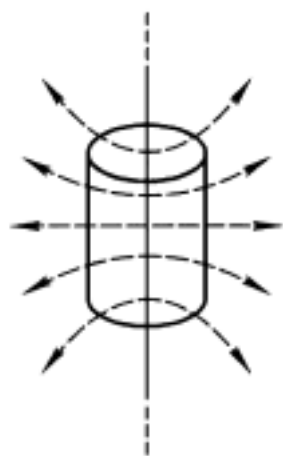
(2)  $q$  位于立方体的一个角上时,可将 8 个同样的立方体堆积起来,成为一个大立方体,使  $q$  位于其中心,如题 8 - 9 图所示 . 由与(1)同样的分析可知,通过大立方体每一面的  $E$  通量为  $\frac{q}{6 \epsilon_0}$ , 而大立方体的每一个面含有四个小立方体面,因此,通过小立方体一面的  $E$  通量为  $\frac{q}{24 \epsilon_0}$  .

8 - 10 一根有限长的均匀带电直线,其电荷分布及所激发的电场有一定的对称性,能否利用高斯定理算出场强来 ?

答: 否 .利用高斯定理的积分形式

$$E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0} \text{ 求 电 场 强 度 } E, \text{ 要 求 带 电 体}$$

及其激发的电场强度在空间的分布具有很强的对称性:在所取的整个高斯面  $S$  上或其部分面积上的  $E$ ,处处与  $dS$  平行,且面上各  $dS$  处  $E$  的大小不随  $dS$  而变;或者各  $dS$  处  $E$  的方向处处与  $dS$  垂直,使通过该部分面积的  $E$  通量为零 .在这种情况下,通过  $S$  面的  $E$  通量可由下列过程



题 8 - 10 图

$$E \cdot dS = \int_S E \cdot dS = E \int_S dS = ES$$

完成,进而利用高斯定理求得  $E$  .

一段有限长均匀带电直线的电荷分布及其激发的电场固然具有轴对称性,如题 8 - 10 图所示,但当取一同轴的封闭圆柱面作为高斯面时可以发现,对于该面上各点处的场强  $E$  并不具备上述利用高斯定理求  $E$  的条件 .就是说,对这个封闭圆柱面,高斯定理成立,但不能利用它求出场强 .当取其他具有轴对称的封闭曲面时,

同样会发现,或者面上各处的  $E$  不平行或垂直于面法线,或者面上各处  $E$  的大小不等.所以,对于一段有限长均匀带电直线,找不到合适的高斯面来求出它的场强.

8 - 11 静电场强度沿一闭合回路的积分  $E \cdot dl = 0$ ,表明了电场线的什么性质?

答:上述线积分为零,表明静电场的电场线不闭合.表明:在静电场空间,移动单位正电荷沿闭合回路  $L$  一周时,静电场力所作的功为零.  $E \cdot dl = 0$  作为反映静电场基本性质的方程之一,说明静电场是保守场(无旋场).反映静电场基本性质的另一方程,高斯定理  $E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$  则表明静电场是有源场,静电场的电场线总是从正电荷发出,终止于负电荷.这两个方程,完整地描述了静电场的基本性质.

8 - 12 比较下列几种情况下  $A$ 、 $B$  两点电势的高低.

- (1) 正电荷由  $A$  移到  $B$  时,外力克服电场力作正功;
- (2) 正电荷由  $A$  移到  $B$  时,电场力作正功;
- (3) 负电荷由  $A$  移到  $B$  时,外力克服电场力作正功;
- (4) 负电荷由  $A$  移到  $B$  时,电场力作正功;
- (5) 电荷顺着电场线方向由  $A$  移动到  $B$ ;
- (6) 电荷逆着电场线方向由  $A$  移动到  $B$ .

答:静电场中  $A$ 、 $B$  两点间的电势差,在数值上等于将单位正电荷从  $A$  点移动到  $B$  点时电场力所作的功,即

$$V_A - V_B = \frac{A_{AB}}{q_0} = \int_A^B E \cdot dl.$$

- (1) 电场力对正电荷作负功,  $V_A < V_B$ ;
- (2) 电场力对正电荷作正功,  $V_A > V_B$ ;

- (3) 电场力对负电荷作负功,  $V_A > V_B$  ;
- (4) 电场力对负电荷作正功,  $V_A < V_B$  ;
- (5) 电场力对正电荷作正功,  $q_0 > 0, V_A > V_B$  ;
- (6) 电场力对负电荷作正功,  $q_0 < 0, V_A < V_B$  .

8 - 13 一人站在绝缘地板上,用手紧握静电起电机的金属电极,同时使电极带电产生  $10^5$  V 的电势.试问此人是否安全?这时,如果另一人去接触已带电的电极,是否安全?为什么?

答:在地板始终可靠绝缘的前提下,一人用手紧握金属电极,人体与电极的电势同时升至  $10^5$  V,人体是安全的.但另一人去接触已带电的电极或接触与带电电极等电势的人时,是非常危险的.这是由于他们的电势不相等,会有电流通过人体,导致“触电事故”.

8 - 14 (1) 已知电场中某点的电势,能否计算出该点的场强?

(2) 已知电场中某点附近的电势分布,能否计算出该点的场强?

答:电场强度与电势梯度的关系为:  $E = - \frac{dV}{dn} e_n$  .

(1) 相对电势零点,电场空间确定点的电势具有确定的数值.已知某点的电势值而不知电势在该点附近的分布,是不能求出该点等势面沿法线方向的变化率的,也即不能求出该点的场强.

(2) 已知电场中某点附近的电势分布,可以利用该点处电势分布函数的梯度,计算出该点的场强.

8 - 15 根据场强与电势梯度的关系分析下列问题.

- (1) 在电势不变的空间,电场强度是否为零?
- (2) 在电势为零处,场强是否一定为零?

(3) 场强为零处,电势是否一定为零?

(4) 在均匀电场中,各点的电势梯度是否相等?各点的电势是否相等?

答:电场强度与电势梯度的关系为  $E = - \frac{dV}{dn} e_n$  .

(1) 在电势不变的空间,电场强度必为零,即  $V = C, E = 0$  .  
如:均匀带电球面内部、处于静电平衡状态的导体内部等 .

(2) 电场空间某点  $P$  的电势  $V_P = 0$ , 并不意味着电势在  $P$  的变化率  $\left. \frac{dV}{dn} \right|_P$  为零,因而电场强度  $E_P$  不一定为零 .比如:两个等量异号点电荷中垂面上各点的电势均为零,但各点的电场强度并不为零 .

(3) 电场空间某点  $P$  的场强为零,表明电势分布函数在  $P$  点处为极大、极小值或常数,可以为零也可以不为零 .比如:两个等量同号点电荷连线中点的电场强度一定为零,但该点的电势可以为零也可以不为零 .

(4) 均匀电场中,各点的电势梯度相等,即电势分布函数沿等势面法向的变化率相等 .除等势面外,空间各点的电势不相等 .

## 第九章 导体和电介质中的静电场

9 - 1 将一电中性的导体放在静电场中,在导体上感应出来的正负电荷量是否一定相等?这时导体是否是等势体?如果在电场中把导体分开为两部分,则一部分导体上带正电,另一部分导体上带负电,这时两部分导体的电势是否相等?

答:将电中性的导体引入静电场后,导体内的正负电荷将与电场发生相互作用而改变分布,同时改变空间电场的分布.

静电感应并没有改变导体的电中性状态.所以,在导体上感应出来的正负电荷量一定相等.这是电荷守恒定律的必然结果.

处于静电平衡状态的导体,不再有带电粒子宏观的定向运动.此时的导体是等势体,表面为等势面.

将处于静电平衡状态的导体分开为两部分,则意味着原来的静电平衡状态被破坏.一部分导体将带正电,而另一部分导体将带负电.重新达到新的静电平衡状态时,两部分导体的电势不再相等,但每部分仍是等势体.

9 - 2 一个孤立导体球带有电荷量  $Q$ ,其表面附近的场强沿什么方向?当我们把另一带电体移近这个导体球时,球表面附近的场强将沿什么方向?其上电荷分布是否均匀?其表面是否等电势?电势有没有变化?球内任一点的场强有无变化?

答:静电平衡状态下,带电孤立导体球的电荷量  $Q$  均匀分布于表面,表面附近的场强垂直于表面,大小为  $E_0 = \frac{Q}{4\pi R^2}$  ( $R$  为导体球半径).球表面附近的场强呈球对称分布,  $Q > 0$  时,沿面法

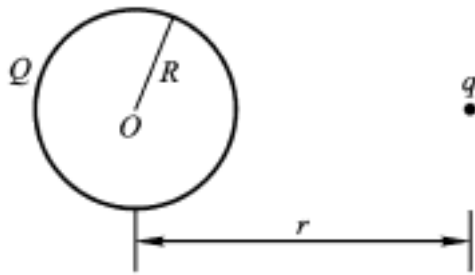


向向外;  $Q < 0$  时, 沿面法向向内(参见题 8 - 4) .

把另一带电体移近这个导体球, 并达到新的静电平衡状态时, 球表面附近的场强  $E$  为各带电体的电荷激发场强的矢量和,  $E$  仍然垂直于表面, 大小为一, 但不为常数, 呈非均匀分布. 导体球表面仍为等电势面, 但不同于带电孤立导体球时的电势. 球内任一点的场强无变化, 仍为零.

若另一带电体所带电荷量  $q > 0$ , 由电势的叠加原理可知, 导体球的电势将升高. 如题 9 - 2 图所示, 在半径为  $R$ , 带电量为  $Q$  的孤立导体球附近放置一个距球心为  $r$  ( $r > R$ ) 的点电荷  $q > 0$

时, 导体球的电势为  $V_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} > \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  .



题 9 - 2 图

### 9 - 3 如何能使导体

- (1) 净电荷为零而电势不为零;
- (2) 有过剩的正或负电荷, 而其电势为零;
- (3) 有过剩的负电荷而其电势为正;
- (4) 有过剩的正电荷而其电势为负.

答: (1) 在电中性导体空腔内放置带电体, 或将电中性导体置于其他有限大的带电体附近时, 导体的净电荷为零, 相对无限远处, 其电势不为零.

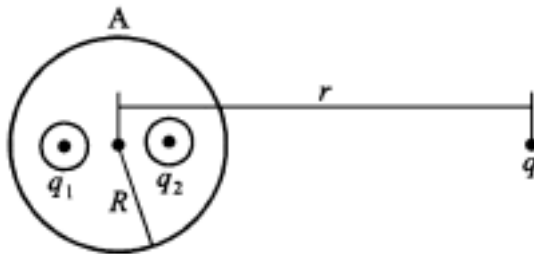
(2) 将情况(1)的中性导体接地, 可使其带电并电势为零. 当

带电体的电荷量  $Q > 0$  时, 导体带等量负电荷, 反之, 则带等量正电荷 .

(3) 当情况(1)的导体或导体空腔带电荷量  $q < 0$ , 带电体的电荷量  $Q > 0$ , 并  $|q| < Q$  时, 导体有过剩的负电荷而其电势为正 .

(4) 当情况(1)的导体或导体空腔带电荷量  $q > 0$ , 带电体的电荷量  $Q < 0$ , 并  $q < |Q|$  时, 导体有过剩的正电荷而其电势为负 .

9 - 4 如图所示, 在金属球 A 内有两个球形空腔, 此金属球上原来不带电, 在两空腔中心各放置一点电荷  $q_1$  和  $q_2$ , 求金属球 A 的电荷分布 此外, 在金属球外很远处放置一点电荷  $q$  ( $r \gg R$ ), 问  $q_1$ 、 $q_2$  各受力多少 ?



题 9 - 4 图

答: 金属球外没有其他电荷, 并处于真空中时, 由导体的静电平衡条件可知, 金属球形空腔仍保持电中性, 但正负电荷发生重新分布:  $q_1$  所在空腔内壁分布有  $-q_1$ ;  $q_2$  所在空腔内壁分布有  $-q_2$ ; 金属球 A 的外表面将均匀分布有  $(q_1 + q_2)$  的电荷, 电荷面密度为  $\sigma = \frac{q_1 + q_2}{4\pi R^2}$ , 这就是静电感应现象 . 金属球内部场强为零, 没有任何电场线穿过, 这就是静电屏蔽效应 . 此时,  $q_1$  和  $q_2$  将只受各自所在空腔内壁感应负电荷的作用, 由对称性可知, 它们所受合力均为零 .  $q_1$  和  $q_2$  在金属球外的场强则可等效为球心处电荷量为  $(q_1 + q_2)$  的点电荷的场强 .

当金属球外很远处放置一点电荷  $q$  ( $r \gg R$ ), 并金属球处于新的静电平衡状态时, 金属球 A 外表面的电荷面密度不再为常数,  $(q_1 + q_2)$  将重新分布, 使其表面附近的场强垂直于表面, 内部场强仍为零, 空腔内壁感应负电荷的分布不变. 所以,  $q$  对  $q_1$  和  $q_2$  的作用被导体所屏蔽,  $q_1$  和  $q_2$  间仍无相互作用力. 金属球 A 与  $q$  之间的相互作用力, 考虑到条件:  $r \gg R$ , 可以按两点电荷间的库仑力处理, 大小为

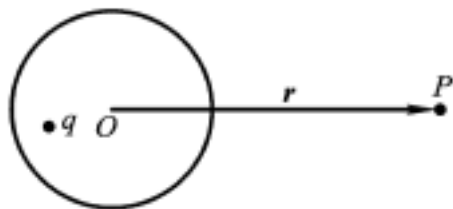
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2)q}{r^2} .$$

9 - 5 离点电荷  $q$  为  $r$  的  $P$  点的场强为  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ , 现将点电荷用一金属球壳包围起来, 分别讨论  $q$  在球心或不在球心时  $P$  点的场强是否改变? 若改用金属圆筒包围电荷,  $P$  点的场强是否改变? (只讨论  $P$  点在金属球壳及在金属圆筒外的情况.)

答: 点电荷  $q$  激发的电场强度在空间的分布具有球对称性. 当  $q$  在金属球壳的球心时, 金属球壳内外表面将感应出等量异号均匀分布的电荷. 它们激发的电场在空间的分布同样具有球对称性. 由场的叠加原理可知, 球壳外  $P$  点的场强不变. 或者说,  $q$  发出的电场线全部终止于球壳内表面的感应负电荷上,  $P$  点的场强可等效为球壳外表面的感应正电荷  $q$  全部集中在球心时的点电荷在  $P$  点的场强.

当  $q$  不在金属球壳的球心时, 球壳内表面的感应负电荷将不再球对称分布, 而球壳外表面的感应正电荷仍然均匀分布,  $P$  点的场强仍可等效为球壳外表面的  $q$  全部集中在球心时的点电荷在  $P$  点的场强. 但这种改变如果是由于变动了球壳相对于  $P$  点的位置所致, 则此时球心到  $P$  点的矢径应改为  $r$ ,  $P$  点的场强将改变. 若球壳不动而仅移动  $q$ , 则  $P$  点场强不变, 如题 9 - 5 图所示.

若改用金属圆筒包围电荷, 无论  $q$  是否处于圆筒的中轴线上, 上述结论均不成立, 即  $P$  点的场强都会改变. 原因是静电平衡



题 9 - 5 图

时金属圆筒上的感应电荷分布不再具有球对称性 .

9 - 6 一带电导体放在封闭的金属壳内部,

(1) 若将另一带电导体从外面移近金属壳, 壳内的电场是否会改变? 金属壳及壳内带电体的电势是否会改变? 金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变?

(2) 若将金属壳内部的带电导体在壳内移动或与壳接触时, 壳外部的电场是否会改变?

(3) 如果壳内有两个带异号等值电荷的带电体, 则壳外的电场如何?

答: 在所有带电导体发生的“移动”或“接触”过程前后, 导体系统均能很快达到静电平衡状态. 所以,

(1) 将另一带电导体从外面移近金属壳, 将影响金属壳外表面的电荷分布, 而壳内的电场不会改变. 金属壳及壳内带电体的电势会改变. 金属壳和壳内带电体间的电势差不会改变.

(2) 将金属壳内部的带电导体在壳内移动时, 会改变金属壳内部的电场分布, 但壳外表面的电荷分布没变, 因此, 外部的电场分布不会改变. 将金属壳内部的带电导体与壳接触后, 带电导体所带电荷量将全部分布到金属壳外表面, 所以金属壳内、外空间的电场分布都会改变, 内部场强变为零.

(3) 壳内有两个带异号等值电荷的带电体时, 壳外的电场为零.

9 - 7 (1) 一导体球上不带电,其电容是否为零?

(2) 当平行板电容器的两极板上分别带上同号等值电荷时,其电容值是否改变?

(3) 当平行板电容器的两极板上分别带上同号不等值电荷时,其电容值是否改变?

答: 电容器具有储存电荷、储存电能的性能,电容量  $C$  是表征这种能力大小的物理量.  $C$  只与导体系统的大小、形状以及导体间的介质有关,与系统是否带电无关. 因此,

(1) 否. 孤立导体球可视为与无限远处大导体构成的电容器.

(2) 否.

(3) 否.

9 - 8 有两个彼此远离的金属球,一大一小,所带电荷同号等量,问这两个球的电势是否相等? 其电容是否相等? 如果用一根细导线把两球相连接,是否会有电荷流动?

答: 两个带电金属球相距很远,可认为彼此无相互作用,都是孤立导体球.

因所带电荷量相同,但大小即半径不同,则它们相对无限远处电势是不同的,分别为

$$V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{和} \quad V_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (R > r).$$

两个孤立导体球电容器的电容量也不同,分别为

$$C_R = \frac{q}{V_R} = 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{和} \quad C_r = \frac{q}{V_r} = 4\pi\epsilon_0 r \quad (R > r).$$

用一根细导线把两球相连接时,由于两球间存在电势差,将会有电荷流经导线,直到两球所带电荷量使两球等电势,即达到静电平衡状态为止.

此时两球各带的电荷量可由电势相等和电荷守恒得出,即

$$\frac{q_R}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_r}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad q_R + q_r = 2q,$$

$$q_R = 2 \frac{R}{R+r} q, \quad q_r = 2 \frac{r}{R+r} q.$$

9 - 9 有一个平板电容器,保持板上电荷量不变(充电后切断电源),现在使两极板间的距离  $d$  增大.试问:两极板的电势差有何变化?极板间的电场强度有何变化?电容是增大还是减小?

答:平板电容器极板的面积  $S$  和它们的间距  $d$  通常都满足:  $\sqrt{S} \propto d$ , 边缘效应可忽略.静电平衡时,极板上的电荷分布可认为是均匀的,内部是均匀电场.假定两极板间是真空.保持板上电荷量  $q$  不变,增大极板间的距离  $d$  时,内部均匀场的场强不变,大小为  $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ ;两极板间的电势差变大,为  $U = Ed = \frac{q}{\epsilon_0 S} d$ ;电容减小,为  $C = \frac{q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ .

9 - 10 平板电容器如保持电压不变(接上电源),增大极板间距离,则极板上的电荷、极板间的电场强度、平板电容器的电容有何变化?

答:参照上题分析.保持两极板间的电势差  $U$  不变而增大间距  $d$  时,内部场强  $E$  将变小,极板上的电荷量  $q$  变小,电容量  $C$  减小.

9 - 11 一对相同的电容器,分别串联、并联后连接到相同的电源上,问哪一种情况用手去触及极板较为危险?说明其原因.

答:人体触及带电体时,因存在电势差,带电体通过人体与大地或其他导体形成电流回路.当通过人体的电流值超过安全电流值时,会因电击而引起人体伤害或致命,这就是“触电”事故;若通过人体的电流值虽未超过安全电流值,但通电时间较长,也会因电流的热效应等对人体造成伤害,甚至导致死亡.所以,用手去触及

带电电容器极板的危险来自通过人体的放电电流及其维持的时间,即与所触及的电容器所储存的电场能量有关。

两个相同的电容器,串联或并联后的等效电容器的电容量不同,与电动势相同的电源相连接后,两个电容器组所储存的电场能量是不同的。

串联时,等效电容器的电容量  $C_1$  小于单个电容器的电容量  $C$  本题中  $C_1 = C/2$ 。

并联时,等效电容器  $C_2$  极板上的电荷量为各电容器极板上的电荷量之和,所以,等效电容器的电容量  $C_2$  大于单个电容器的电容量  $C$  本题中  $C_2 = 2C$ 。

串联时,电容器组储存的电能为  $W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{4} C U^2$ 。

并联时,电容器组储存的电能为  $W_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2 = C U^2 = 4 W_1$ 。

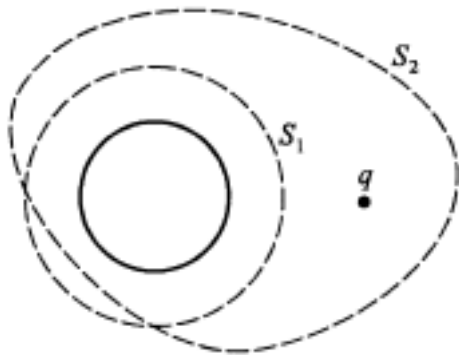
可见,用手去触及并联的电容器  $C_2$  的极板时较为危险。

9 - 12 在一均匀电介质球外放一点电荷  $q$ ,分别作如图所示的两个闭合曲面  $S_1$  和  $S_2$ ,求通过两闭合曲面的  $E$  通量、 $D$  通量。在这种情况下,能否找到一合适的闭合面,可应用高斯定理求出闭合曲面上各点的场强?

答:电介质球在球外点电荷  $q$  激发的非均匀电场  $E_0$  中被极化,由于电介质是均匀的,因此,球体内无电荷体密度,表面出现极化电荷,这些极化电荷同样将激发电场强度  $E$ ,球内及球外空间的场强为两者的矢量和:  $E = E_0 + E$ 。

电介质是各向同性介质时,球内的  $D$  和  $E$  同方向,  $D = E = (E_0 + E)$ 。

对  $S_1$  面,高斯定理成立,因  $S_1$  面未包围自由电荷  $q$ ,而包围



题 9 - 12 图

的极化电荷等值异号,故通过  $S_1$  面的  $E$  通量、 $D$  通量均为零。 $S_1$  虽是与介质球同心的球面,但  $S_1$  面上的  $E_0$ 、 $E$  都不具备与  $S_1$  面相同的球对称性,因此是不能利用高斯定理求出  $S_1$  面上各点的场强的。

对任意闭合曲面  $S_2$ ,高斯定理成立。 $S_2$  面包围自由电荷  $q$ , 包围的极化电荷等值异号,故通过  $S_2$  面的  $E$  通量为  $E = \frac{q}{\epsilon_0}$ ,  $D$  通量为  $D = q$  对  $S_2$ ,同样不能利用高斯定理求场强。

由于自由电荷  $q$  激发的  $E_0$ 、极化电荷的分布及其激发的  $E$  不具备很好的对称性分布,因此,不存在可利用高斯定理求场强的合适的闭合曲面。

9 - 13 (1) 将平行板电容器的两极板接上电源以维持其间电压不变,用相对电容率为  $\epsilon_r$  的均匀电介质填满极板间,极板上的电荷量为原来的几倍? 电场为原来的几倍?

(2) 若充电后切断电源,然后再填满介质,情况又如何?

答: (1) 在充满介质过程中,电容器的两极板始终与电源连接.两极板间的电场强度大小仍为  $E = E_0 = \frac{U}{d}$ ,  $E_0$  为充满介质前



两极板间场强的大小,即  $\frac{E}{E_0} = 1$  .

在充入均匀电介质的过程中,由于电介质的极化,两极板间的场强和电势差都有减小的趋势,而电源向电容器充电,以维持电源的电极和与之相连接的电容器极板(导体系统)间的静电平衡状态.最后,极板上的电荷量增为原来的  $\epsilon_r$  倍,即  $\frac{Q}{Q_0} = \epsilon_r$  ( $Q_0$  为充满介质前极板上的电荷量)时,充电过程结束,系统处于静电平衡状态.

根据电容器电容量的定义  $C = \frac{Q}{U}$ ,可知,  $C = \frac{Q}{U} = \epsilon_r \frac{Q_0}{U} = \epsilon_r C_0$ .即充入电介质后,电容器的电容量是充入电介质前的  $\epsilon_r$  倍.

(2) 在保持电容器极板上的电荷量  $Q_0$  不变的情况下充入均匀电介质时,由于电介质的极化,介质内的场强和电势差都将变小.充满介质、并达到静电平衡状态时,极板间的场强变为  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ ,  $E_0$  为充介质前极板间场强的大小,即  $\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\epsilon_r}$  .

根据电容器电容量的定义  $C = \frac{Q}{U}$  可知,  $C = \frac{Q_0}{Ed} = \epsilon_r \frac{Q_0}{E_0 d} = \epsilon_r C_0$ .由此可知,在保持极板上的  $Q_0$  不变的情况下充入电介质后,电容器的电容量仍是充入电介质前的  $\epsilon_r$  倍.

9 - 14 在球壳形的均匀电介质中心放置一点电荷  $+q$ ,试画出电介质球壳内外的  $E$  和  $D$  线的分布.在电介质球壳内外的场强和没有介质球壳时是否相同?为什么?

答:球壳形的均匀、各向同性电介质中心放置一点电荷  $+q$  时,由点电荷  $+q$  激发的场强  $E_0$  以及均匀分布于电介质内外两球面上的负、正极化面电荷激发的场强  $E$ ,具有同心的球对称性.球形介质表面是等势面.电介质内的  $D = E$  和电介质外的  $D =$

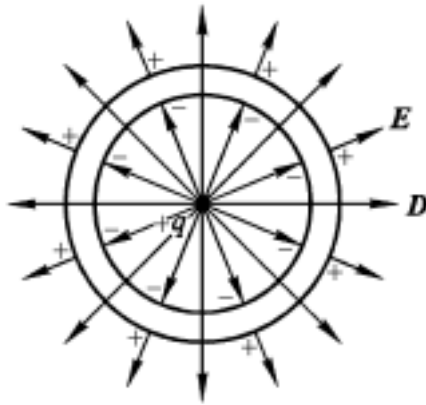
。  $E$ ，它们的分布同样具有同心的球对称性。

在这样的情况下，可以作过考察点  $P$  的同心球面，并利用高斯定理求出电介质球壳内外的  $D$ ，进而求出  $E$ 。由高斯定理可知：

有电介质球壳时，在整个空间： $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ ，随矢径  $r$  连续变化。而  $E$  随矢径  $r$  的变化是不连续的，在电介质球壳内： $E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ；在电介质球壳外： $E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 。

没有电介质球壳时，在整个空间： $E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ，随矢径  $r$  连续变化。

根据上述图像可画出电介质球壳内外的  $E$  和  $D$  线的分布，如题 9 - 14 图所示。由图可见， $D$  线起于正自由电荷终于负自由电荷； $E$  线起始于所有正电荷（自由电荷和极化电荷），终止于所有负电荷（自由电荷和极化电荷）。



题 9 - 14 图

所以，由于在电介质球壳的内外表面分布有极化电荷，其内外的场强和没有介质球壳时是不相同的。

9 - 15 (1) 一个带电的金属球壳里充填了均匀电介质，球外

是真空,此球壳的电势是否为  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ? 为什么?

(2) 若球壳内是真空,球壳外充满无限大均匀电介质,这时球壳的电势为多少? ( $Q$  为球壳上的自由电荷,  $R$  为球壳半径,  $\epsilon_r$  为电介质的相对电容率.)

答:真空中,处于静电平衡状态的带电导体球壳内的场强为零,电荷均匀分布在表面.球外的场强分布和将导体球壳所带电荷量  $Q$  集中于球心时的点电荷的电场分布相同.

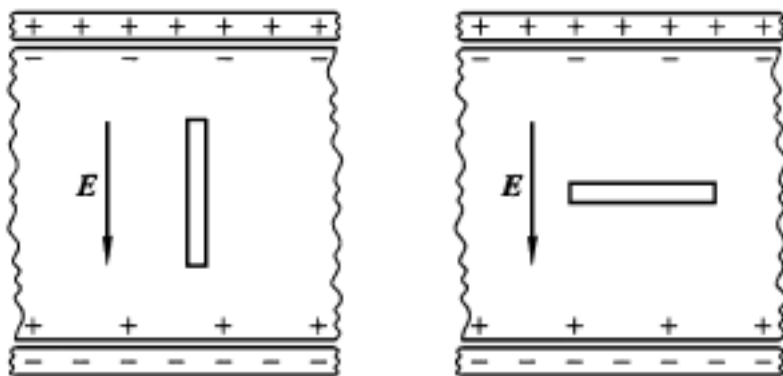
(1) 球壳外是真空时,球壳的电势是

$$V_R = \int_R^\infty E_1 \cdot dl = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} .$$

(2) 球壳外充满均匀电介质时,球壳的电势是

$$V_R = \int_R^\infty E_2 \cdot dl = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} .$$

9 - 16 平行板电容器两极板间充满均匀电介质后电介质中的场强为  $E$ ,若



题 9 - 16 图

(1) 在电介质中挖一针状小空腔,空腔垂直极板面;

(2) 在电介质中挖一平行于极板面的扁平圆柱形空腔.

则两种情况下空腔中心点的  $E$  和  $D$  与电介质中的  $E$  和  $D$  的

关系如何？

答：平行板电容器两极板间充满均匀电介质后，电介质的两表面均匀分布有等量异号的极化电荷，是等势面。电场中任意点的场强  $E$  为极板上自由电荷的场强和电介质表面极化电荷场强的矢量和，电位移矢量为  $D = \epsilon_0 E + P$ 。假定平行板电容器的边缘效应可以忽略。

(1) 垂直于极板面的针状小空腔内，合场强  $E$  为三部分电荷分布激发场强的矢量和：极板上的自由电荷的场强  $E_0$ ，极板平行的电介质表面极化电荷的场强  $E_1$ ，小空腔上下两端电介质表面极化电荷的场强  $E_2$ 。其中， $E_0$ 、 $E_1$  方向相反，都可视为等量异号平面电荷分布的场强，大小分别为  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  和  $-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ， $E_2$  的方向与  $E_1$  相反，大小可以忽略。所以，针状小空腔内的合场强为

$$E = E_0 + E_1 = E_0$$

针状小空腔内无电介质， $P = 0$ ，所以

$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0$$

(2) 平行于极板面的扁平圆柱形空腔内，合场强  $E$  同样为三部分电荷分布激发场强的矢量和。其中， $E_0$ 、 $E_2$  方向相同而与  $E_1$  方向相反，且都可视为等量异号平面电荷分布的场强，大小分别为

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad E_1 = E_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

所以  $E = E_0 + E_1 + E_2 = E_0$ ， $D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0$ 。

9 - 17 为什么点电荷系统的相互作用能的公式  $W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$  中有因子  $\frac{1}{2}$ ，而点电荷在外电场中的电势能公式  $W = qV$  中没有这个因子？

答：点电荷系统的相互作用能  $W = \frac{1}{2} \sum q_i V_i$  中的  $V_i$  为除

$q_i$  外,其他电荷在  $q_i$  处的电势,而  $q_i V_i$  将系统内每两个点电荷间的相互作用能计算了两次,因此,在点电荷系统的相互作用能公式中有因子  $\frac{1}{2}$ . 在  $W = qV$  中,  $V$  同样为除  $q$  外其他源电荷或带电体在  $q$  处的电势,  $qV$  即为  $q$  与该电场系统的相互作用能.

9 - 18 真空中两个点电荷  $q_1$ 、 $q_2$  在空间激发的合场强  $E = E_1 + E_2$ , 两点电荷系的静电场能为

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E \cdot E dV \\ &= \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 dV \\ &\quad + \int_V \epsilon_0 E_1 \cdot E_2 dV . \end{aligned}$$

(1) 说明上式相加的三项能量的物理意义;

(2)  $q_1$ 、 $q_2$  之间相互作用能是指哪一项?

(3) 将  $q_1$  或  $q_2$  从给定位置移到另一位置,电场力作功改变静电场能又是指哪一项?

答:(1) 相加的三项表示由点电荷  $q_1$  和  $q_2$  激发的、分布在同一空间的静电场的总能量. 其中,第一项和第二项分别是  $q_1$  和  $q_2$  单独存在时分布于整个空间的静电能,第三项是  $q_1$ 、 $q_2$  之间的相互作用能.

(2)  $q_1$ 、 $q_2$  之间的相互作用能是第三项.

(3) 将  $q_1$  或  $q_2$  从给定位置移到另一位置,电场力作功对应电荷间相互作用能的变化,因此,改变静电场能的应为第三项.

# 第十章 恒定电流和恒定电场

10 - 1 电流是电荷的定向移动而形成的,在电流密度  $\neq 0$  的地方,电荷的体密度  $\rho$  是否可能等于零?

答:可能.对一段流有稳恒电流的均匀导体,单位体积内的正、负电荷数相等,即电荷的体密度  $\rho = 0$ ,而电流密度  $\neq 0$ .

如将欧姆定律的微分形式  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  代入稳恒电流条件  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  的微分形式  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ ,可得  $\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0$ ,因  $\sigma \neq 0$ ,所以  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . 式中,  $\rho = 0$ ,  $\sigma \neq 0$ ,所以有  $\rho = 0$ .

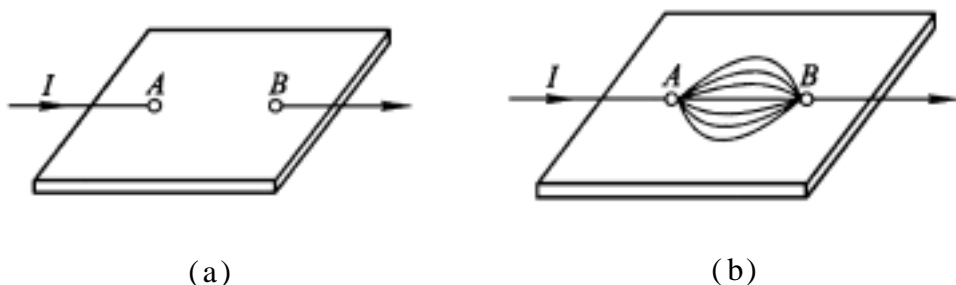
10 - 2 如果通过导体中各处的电流密度不相同,那么电流能否是恒定的?为什么?

答:可以.作一个包围一段导体的闭合曲面  $S$ ,对该曲面,若满足  $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ ,即单位时间内,流进该曲面的电荷量和流出该曲面的电荷量相等,那么虽然通过导体中各处的电流密度不同,但通过导体的电流是恒定的.

10 - 3 一金属板(如题 10 - 3 图(a))上  $A$ 、 $B$  两点如与直流电源连接,电流是否仅在  $AB$  直线上存在?为什么?试说明金属板上电流分布的大致情况.

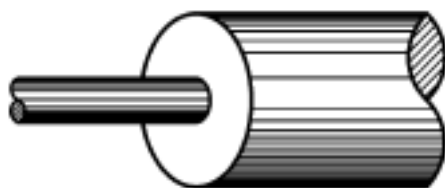
答:金属板上  $A$ 、 $B$  两点与直流电源连接时有电势差  $U$ ,板上电流的分布可用电流线描述,由  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  可知,电流线与电场线重合.金属板是均匀导体时,  $\sigma$  为常数,在板上画出  $A$ 、 $B$  两点间的

等势线, 依据  $E = -\frac{U}{n} e_n$  画出电场线, 即为金属板面内电流分布的图像(题 10 - 3 图(b)). 因此, 电流分布在金属板平面内, 并非仅分布在  $AB$  直线上.



题 10 - 3 图

10 - 4 两截面不同的铜杆串接在一起(如图), 两端加有电压  $U$ , 问通过两杆的电流是否相同? 两杆的电流密度是否相同? 两杆内的电场强度是否相同? 如两杆的长度相同, 两杆上的电压是否相同?



题 10 - 4 图

答: 根据串联电路的特点, 通过两杆的电流相同. 由于两杆的截面不同, 因此垂直通过单位截面的电流即电流密度是不同的. 根据欧姆定律的微分形式可知, 两杆内的电场强度也是不相同的. 两杆的长度相同时, 由  $R = \frac{l}{S}$  可知两杆的电阻是不同的, 因此各段的分压不同.

10 - 5 一铜线外涂以银层, 两端加上电压后在铜线和银层中通过的电流是否相同? 电流密度是否相同? 电场强度是否相同?

答: 在铜线和银层材料以及截面都为均匀并且长度相同的前提下, 两端加上电压后, 相当于两个电阻的并联. 在铜线和银层中的电场强度相同, 两种材料的电导率不同, 由欧姆定律的微分形式可知, 两者的电流密度不同, 此外, 两者的截面积通常不相同, 一般说来在铜线和银层中通过的电流不相同.

10 - 6 电源中存在的电场和静电场有何不同?

答: 电源中存在两种电场: 非静电性电场和恒定电场. 非静电性电场与静电场的不同之处在于: 静电场由静止电荷激发, 场的分布不随时间变化; 非静电性电场的场强为单位正电荷所受非静电性力, 电源的类型不同, 非静电性力所对应的非静电性电场也不同. 静电场的方向总是由电势高处指向电势低处, 而非静电性场强总是由电源的低电势端通过电源内部指向其高电势端处, 在电源外部, 不存在非静电性场强. 静电场是保守场, 非静电性电场不是保守场.

驱使电荷运动的恒定电场与静电场的分布都不随时间变化, 都是有势场. 但恒定电场由不随时间变化的电荷分布激发, 而电荷本身随时间运动. 静电场由静止电荷激发, 电荷本身不随时间运动.

10 - 7 电源的电动势和端电压有什么区别? 两者在什么情况下才相等?

答: 电源电动势是表征电源性质的物理量, 定义为: 将单位正电荷从电源的负端  $B$  经电源内部, 移到电源正端  $A$  时非静电性

力作的功, 即 
$$E = \int_B^A E_k \cdot dl.$$

电源电动势的大小反映电源内非静电性力作功能力的强弱, 与外电路(负载)情况以及电源是否与外电路连接无关.



电源的端电压即为电源正负两端间的电势差,表示将单位正电荷从电源的正端  $A$  沿任意路径(内电路或外电路)移到电源负端  $B$  时,静电场或恒定电场力所作的功.即  $U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B E \cdot dl$ .电势差表明静电场或恒定电场是保守场.

因此,电源的电动势和端电压是两个完全不同的概念.

电源内部有内电阻(内阻),当电源与外电路连接构成回路时,内阻上有电压降落,此时电源的电动势和端电压在数值上不相等;当电源与外电路开路时,内阻上的电压降落为零,此时电源的电动势和端电压在数值上相等.

一电动势为  $E$  的电源与电阻为  $R$  的负载连接时,电源的端电压为

$$U_{AB} = V_A - V_B = E - Ir_i .$$

其中  $r_i$  为电源内阻.

10 - 8 焦耳 - 楞次定律可写成  $P = I^2 R$  和  $P = \frac{U^2}{R}$  两种形式,从前式看热功率正比于  $R$ ,从后式看热功率反比于  $R$ ,两种说法是否矛盾?

答:  $P = I^2 R$  表明在通过电阻  $R$  的电流  $I$  一定时,热功率正比于  $R$ ;  $P = \frac{U^2}{R}$  表明在电阻  $R$  上的电压降落  $U$  一定时,热功率反比于  $R$ .两种说法并不矛盾,只是各自的前提条件不同.由欧姆定律  $U = IR$  可知,它们完全等价.

10 - 9 电灯的钨丝断后再碰上接入电路中,电灯比原来的亮还是比原来的暗?为什么?

答:参照上题.灯丝的电阻正比于它的长度,因此,  $U$  不变时,  $R$  变小,  $P$  变大.电灯应该比原来的亮.

10 - 10 一长为  $l$  截面积为  $S$  的铅线熔化后重新制成长为  $2l$  截面积为  $\frac{1}{2}S$  的铅线,问:

(1) 铅线的电阻率是增大、减小还是保持不变?

(2) 铅线的电阻是增大、减小还是保持不变?

答: (1) 铅线的电阻率与材料的形状无关,当温度不变时其电阻率不变.

(2) 铅线的电阻与制成的电阻器的形状有关,不考虑温度的影响时,电阻值为  $R = \frac{l}{S}$ . 由此可得  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} = 4$ . 重新制成的电阻之值是原来的 4 倍.

10 - 11 将电压  $U$  加在一根导线的两端,设导线的截面半径为  $r$ ,长度为  $l$ . 试分别讨论下列情况对自由电子漂移速率的影响.

(1)  $U$  增至原来的两倍;

(2)  $r$  不变,  $l$  增至原来的两倍;

(3)  $l$  不变,  $r$  增至原来的两倍.

答: 自由电子的平均漂移速率与导体内某点处单位体积内的自由电子数  $n$ 、电流密度 的关系为  $v = \frac{I}{en} = \frac{I}{enS}$ ,  $S = \pi r^2$  为导线的截面积.

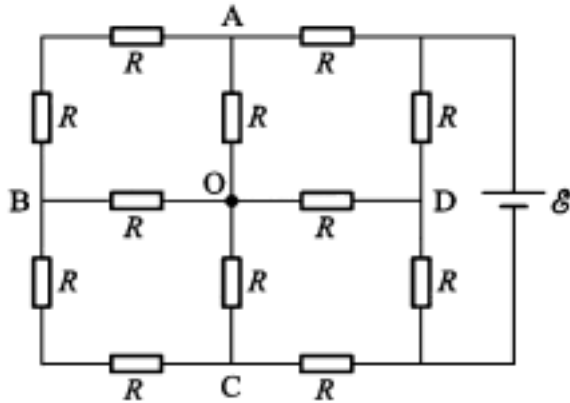
(1)  $S$ 、 $l$  保持不变,则  $R$  不变.  $U$  增至原来的两倍时,由  $U = IR$  可知,  $I$  也增至原来的两倍,故  $v$  也增至原来的两倍.

(2)  $S$ 、 $U$  不变,  $l$  增至原来的两倍时,由  $R = \frac{l}{S}$  可知,  $R$  增至原来的两倍,由  $U = IR$  可得  $I$  减小为原来的  $\frac{1}{2}$ ,故  $v$  也减小为原来的  $\frac{1}{2}$ .

(3)  $l$ 、 $U$  不变,  $r$  增至原来的两倍时,  $S$  为原来的 4 倍,由  $R$

$= \frac{l}{S}$  可知,  $R$  为原来的  $\frac{1}{4}$ , 而由  $U = IR$  可得  $I$  增大为原来的 4 倍, 故 璋不变 .

10 - 12 如图所示, 证明节点 O 的电势是相邻四个节点电势的平均值:  $V_O = \frac{V_A + V_B + V_C + V_D}{4}$  .

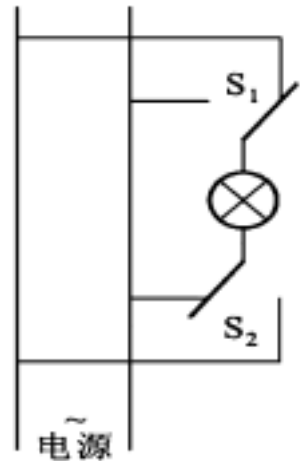


题 10 - 12 图

答: 根据电路的对称性可看出,  $V_B = V_D$  . 因此, BO 和 OD 之间可以作为短路也可以作为开路来处理 . 这样, 简化电路后, 即可证得  $V_O$  .

10 - 13 在两层楼道之间安装一盏电灯, 试设计一个电路, 使得在楼上和楼下的住户都能开关这盏电灯 (用单刀双掷开关) .

答: 在楼上和楼下各装一个与电灯串联后再并联于电源两端的单刀双掷开关, 即可实现目的 . 见图 10 - 13 图 .



题 10 - 13 图

10 - 14 为什么在室温时金属不容易发射电子？

答：金属中的自由电子若能脱离金属，必须具备大于金属逸出功的动能。根据经典的金属电子理论，金属中自由电子在室温下的热运动能量，可依据  $\overline{\epsilon} = \frac{3}{2} kT$  估算，其值小于  $0.1 \text{ eV}$ ，而金属逸出功的数量级约为  $1 \text{ eV}$ 。可见，室温时金属内的绝大部分电子不具备大于金属逸出功的动能，所以室温时的金属不容易发射电子。

10 - 15 如果选择两种逸出功和电子密度差别都非常大的金属 A 和 B，让它们互相接触，是否就可以作为具有几伏电动势的永远不会耗竭的电源呢？

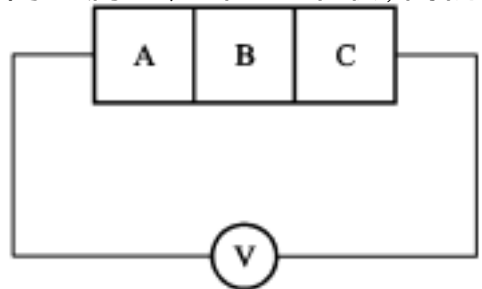
答：两种逸出功和电子密度差别都非常大的金属 A 和 B 接触并达到平衡状态后，在接触界面区域可以形成电势差即接触电势差。这种接触电效应在半导体中同样存在，比如 PN 结。

在同一温度下，若使这两种金属构成闭合回路，或利用其他金属与它们构成闭合回路，整个回路都将不会有电流流动。因为不同金属的接触处都存在这种效应，对整个回路而言，各接触处的电势差的代数和为零。

所以，是不可能利用接触电效应作为永远不会耗竭的电源的，这也不符合能量守恒与转换定律。

10 - 16 把三种温度相同的不同金属 A、B 和 C 串联，问能否用灵敏的电压表按图示的接法测出它们之间的接触电势差？

答：参照上题。用电压表测量时，必须将电压表与三种金属 A、B 和 C 串联构成回路。在相同的温度下，包括导线在内的各种



题 10 - 16 图

金属的接触面之间都存在接触电势差,对整个回路而言,所有电势差的代数和为零,因此不会有电流流动,电压表中也就没有电流流过,因此无法测量。

# 第十一章 真空中的恒定磁场

11 - 1 我们为什么不把作用于运动电荷的磁力方向定义为磁感应强度  $B$  的方向？

答：磁感应强度  $B$  是定量描述磁场空间各点特性的基本物理量，其地位与电场中的电场强度  $E$  相当。磁场空间确定点  $P$  的磁感应强度  $B_P$  有确定的大小和方向，与该点是否有运动电荷无关。

运动电荷  $q$  在  $P$  点所受磁场力  $F$  的大小和方向不仅与其电荷量  $q$  的正、负有关，还与其运动速度  $v_P$  的大小和方向有关。若把运动电荷所受磁力的方向定义为  $P$  点的磁感应强度的方向，则  $B_P$  的方向将随  $v_P$  方向的不同而变化，使  $B_P$  没有确定的方向。

可见，由于运动电荷所受的磁场力的规律较之静电场对试探电荷的作用力有所不同，通常不把作用于运动电荷的磁力方向定义为磁感应强度  $B$  的方向。

11 - 2 一正电荷在磁场中运动，已知其速度  $v$  沿着  $x$  轴方向，若它在磁场中所受力有下列几种情况，试指出各种情况下磁感应强度  $B$  的方向。

- (1) 电荷不受力；
- (2)  $F$  的方向沿  $z$  轴方向，且此时磁力的值最大；
- (3)  $F$  的方向沿  $-z$  轴方向，且此时磁力的值是最大值的一半。

答：由运动电荷在磁场中受洛伦兹力  $F = qv \times B$  可知，

- (1)  $B$  沿  $x$  轴正方向或反方向，即  $B = Bi$  或  $B = B(-i)$  时， $F = 0$ ；

(2)  $B$  沿  $y$  轴正方向, 即  $B = B_j$  时,  $F = F_{\max} k$ , 其值最大;

(3)  $B = B_x i + B_y (-j)$ , 且  $B_x = B_y = \frac{B}{2}$  时,

$$F = qv \times B = -\frac{1}{2} qBk = -\frac{1}{2} F_{\max} .$$

11 - 3 (1) 一带电的质点以已知速度通过某磁场的空间, 只用一次测量能否确定磁场?

(2) 如果同样的质点通过某电场的空间, 只用一次测量能否确定电场?

答: (1) 带电质点  $q$  以速度  $v$  通过磁场空间  $P$  点时, 所受磁场力  $F = qv \times B$  与电荷量  $q$  的正负、运动速度  $v$  以及  $v$  与该点  $B$  的夹角有关. 虽然  $v$  的大小相同, 但其方向不同,  $F$  也不同, 因此只用一次测量不能确定  $P$  点磁场.

(2) 若该带电的质点可以满足试验电荷的两个条件(参见第八章), 则不论其速度的大小和方向如何, 它通过电场中场强为  $E$  的点时, 受到的电场力为  $qE$ , 由电场的定义式, 用一次测量可以确定空间该点的场强  $E$ .

11 - 4 如果一带电粒子作匀速直线运动通过某区域, 是否能断定该区域的磁场为零?

答: 带电粒子在某区域中作匀速直线运动, 表明粒子在该区域受合力为零. 不能据此断定该区域的磁场为零. 若该区域中除磁场外, 不存在其他任何对带电粒子可能有作用力的场, 也不能断定该区域的磁场为零. 根据  $F = qv \times B$ , 当  $v$  平行于  $B$  时,  $F = 0$ .

11 - 5 为什么当磁铁靠近电视机的屏幕时会使图像变形?

答: 磁铁的磁场使扫描电子束受力, 从而偏离原来的运动轨迹使图像变形、变色.

11 - 6 证明穿过以闭合曲线  $C$  为边界的任意曲面  $S_1$  和  $S_2$  的磁通量相等 .

证:如题 11 - 6 图所示,取以  $C$  为边界的底面为  $S_1$  (白色面) 与  $S_2$  构成闭合曲面  $S$  .

$$S = S_1 + S_2 .$$

由磁场的高斯定理:  $\oint_S B \cdot dS = 0,$

即 
$$\oint_S B \cdot dS = \oint_{S_1} B \cdot dS + \oint_{S_2} B \cdot dS = 0,$$

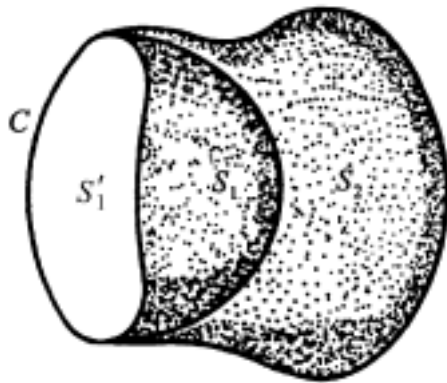
可得 
$$\oint_{S_2} B \cdot dS = - \oint_{S_1} B \cdot dS .$$

再取  $S_1$  与  $S_1'$  构成闭合曲面  $S$  ,  $S = S_1 + S_1'$  .

同样有 
$$\oint_S B \cdot dS = \oint_{S_1} B \cdot dS + \oint_{S_1'} B \cdot dS = 0,$$

可得 
$$\oint_{S_1'} B \cdot dS = - \oint_{S_1} B \cdot dS .$$

所以  $\oint_{S_1} B \cdot dS = \oint_{S_1'} B \cdot dS$  . 得证 .



题 11 - 6 图

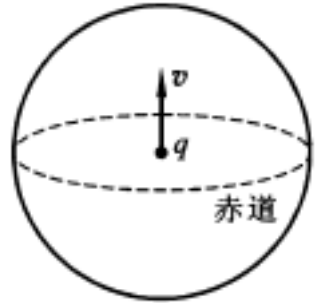
11 - 7 在载有电流  $I$  的圆形回路中,回路平面内各点磁感应强度的方向是否相同?回路内各点的  $B$  是否均匀?



答：根据毕奥 - 萨伐尔定律，用右手螺旋关系可以判定：载流圆形回路平面内各点的磁感应强度  $B$  方向相同，都垂直于回路平面，但回路平面内各点  $B$  的大小不同，即  $B$  的分布非均匀。

11 - 8 一个半径为  $R$  的假想球面中心有一运动电荷。问：

- (1) 在球面上哪些点的磁场最强？
- (2) 在球面上哪些点的磁场为零？
- (3) 穿过球面的磁通量是多少？



答：运动电荷在其周围空间激发磁感

应强度的规律为  $B = \frac{\mu_0}{4} \frac{q v \times r}{r^3}$ 。由运动电荷所在位置指向考察点(场点)。

题 11 - 8 图

(1) 在以  $v$  为轴线，垂直于  $v$  的球面赤道上的磁场最强；

(2) 在  $v$  的连线上，球面的两极磁场为零；

(3) 磁场线闭合，因此穿过球面的磁通量为零。

11 - 9 长螺线管中部的磁感应强度是  $\mu_0 nI$ ，边缘部分轴线上是  $\frac{\mu_0 nI}{2}$ ，这是不是说螺线管中部的磁感应线比边缘部分的磁感应线多？或说在螺线管内部某处有  $\frac{1}{2}$  磁感应线突然中断了？

答：磁感应线是闭合的，永远不中断。无限长密绕螺线管内部的磁感应强度大小是  $B = \mu_0 nI$ ，表示通过该螺线管内部、垂直于磁感应强度  $B$  的单位面积的磁感应线的条数为  $\mu_0 nI$ 。半无限长密绕螺线管端口处的磁感应线呈现以轴线为对称中心向四周发散的状态。因此，在端口处附近，垂直于磁感应线的面是个曲面。垂直通过该曲面上单位面积的磁感应线数自然少于内部。

端口处轴线上  $B$  的大小为  $\frac{\mu_0 nI}{2}$ ，说明垂直通过该处单位面积

的磁感应线数为内部的 $\frac{1}{2}$  .

11 - 10 用安培环路定理能否求出有限长的一段载流直导线周围的磁场 ?

答: 与题 8 - 10 的考虑方式相类似 . 利用安培环路定理

$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I$  求磁感应强度  $B$  的分布, 要求电流及其激发的磁感应强度在空间的分布具有很强的对称性 . 使得在所取的整个积分回路  $L$  上, 或其部分回路上的  $B$ , 处处与  $dl$  平行, 且回路上各  $dl$  处  $B$  的大小不随  $dl$  而变; 或者各  $dl$  处  $B$  的方向处处与  $dl$  垂直, 使该部分回路上的  $B \cdot dl$  处处为零 .

在这种情况下, 利用安培环路定理:  $\oint_L B \cdot dl = \int_L B dl =$

$B \int_L dl = BL = \mu_0 I$ , 可求得  $B$  .

此外, 本章所讨论的安培环路定理仅适用于恒定电流 . 有限长的一段载流直导线是整个闭合回路的一部分, 其周围的磁场只能是整个闭合回路内各段恒定电流激发磁场的矢量和 . 这时, 安培环路定理  $\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I$  仍然成立, 但不具备可以用来求空间磁感应强度  $B$  的分布所要求的对称性, 或者说, 找不到一个能满足上述要求的、合适的回路  $L$  . 因此, 用安培环路定理不能求出有限长的一段载流直导线周围的磁场 .

所以, 对于求有限长一段载流直导线在其周围激发的磁感应强度  $B$  的问题, 只能利用毕奥 - 萨伐尔定律 .

11 - 11 为什么两根通有大小相等方向相反电流的导线扭在一起能减小杂散磁场 ?

答: 两根紧靠在一起的、大小相等方向相反的电流, 在空间任

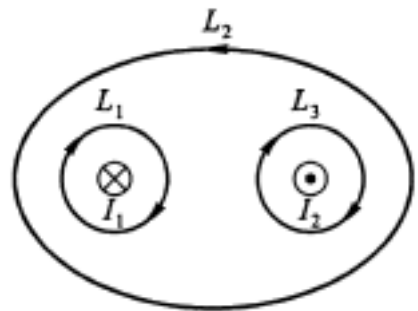
一点激发的磁感应强度  $B_1$  和  $B_2$  大小近似相同, 方向近似相反, 它们的合场强  $B = B_1 + B_2$  趋于零.

11 - 12 设题 11 - 12 图中两导线中的电流  $I_1$ 、 $I_2$  均为 8 A, 试分别求如图所示的三条闭合线  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  的环路积分  $B \cdot dl$  值. 并讨论:

(1) 在每个闭合线上各点的磁感应强度  $B$  是否相等?

(2) 在闭合线  $L_2$  上各点的磁感应强度  $B$  是否为零? 为什么?

答: 根据闭合回路包围电流的正、负的规定:



题 11 - 12 图

对  $L_1$ :  $\int_{L_1} B \cdot dl = \mu_0 I_1$ ;

对  $L_2$ :  $\int_{L_2} B \cdot dl = \mu_0 (I_2 - I_1) = 0$ ;

对  $L_3$ :  $\int_{L_3} B \cdot dl = \mu_0 I_2$ .

(1) 空间任一点的磁感应强度  $B$  是由电流  $I_1$  和  $I_2$  各自在该点激发的  $B_1$  和  $B_2$  的矢量和, 即  $B = B_1 + B_2$ . 空间磁场呈非均匀分布. 各闭合回路上各点的空间位置不同, 因此各点的  $B$  不相等.

(2) 对  $L_2$ : 由(1)的说明可知, 各点的磁感应强度  $B$  不为零, 各点处的  $B \cdot dl$  不为零, 但对整个闭合回路  $L_2$ , 各点处  $B \cdot dl$  的代数和为零.

11 - 13 一电荷  $q$  在均匀磁场中运动, 判断下列的说法是否正确, 并说明理由.

(1) 只要电荷速度的大小不变, 它朝任何方向运动时所受的

洛伦兹力都相等。

(2) 在速度不变的前提下, 电荷量  $q$  改变为  $-q$ , 它所受的力将反向, 而力的大小不变。

(3) 电荷量  $q$  改变为  $-q$ , 同时其速度反向, 则它所受的力也反向, 而大小则不变。

(4)  $v$ 、 $B$ 、 $F$  三个矢量, 已知任意两个矢量的大小和方向, 就能确定第三个矢量的大小和方向。

(5) 质量为  $m$  的运动带电粒子, 在磁场中受洛伦兹力后动能和动量不变。

答: 运动电荷  $q$  在均匀磁场  $B$  中所受洛伦兹力为  $F = qv \times B$ ,  $F$  的方向垂直于  $v$  和  $B$  构成的平面, 满足右手螺旋关系, 大小为  $F = qvB \sin \theta$ ,  $\theta$  是  $v$  和  $B$  间小于  $180^\circ$  的夹角。

(1) 错. 仅当  $q$  在垂直于  $B$  的平面内, 以不变速率运动时 ( $\theta = 90^\circ$ ),  $F$  的大小不变。

(2) 对。

(3) 错。

(4) 对. 由于电荷量  $q$  已确定, 已知  $v$ 、 $B$ 、 $F$  三个矢量中的任意两个矢量的大小和方向, 可以确定第三个矢量的大小和方向。

(5) 错. 运动带电粒子在均匀磁场中受洛伦兹力通常作螺旋运动 ( $\theta \neq 0, 180^\circ$ ). 由于洛伦兹力不作功, 所以动能不变, 而动量 (方向) 时时在变化。

11 - 14 一束质子发生了侧向偏转, 造成这个偏转的原因可否是 (1) 电场? (2) 磁场? (3) 若是电场或是磁场在起作用, 如何判断是哪一种场?

答: 带电粒子在电磁场中运动时, 受到的作用力为  $F = qE + qv \times B$ . 当电场和磁场都是稳恒场时, 带电粒子受到的电场力沿  $E$  的切线方向, 磁场力垂直于  $v$  和  $B$  构成的平面. 所以, 电场力和磁场力都可使质子束发生侧向偏转。

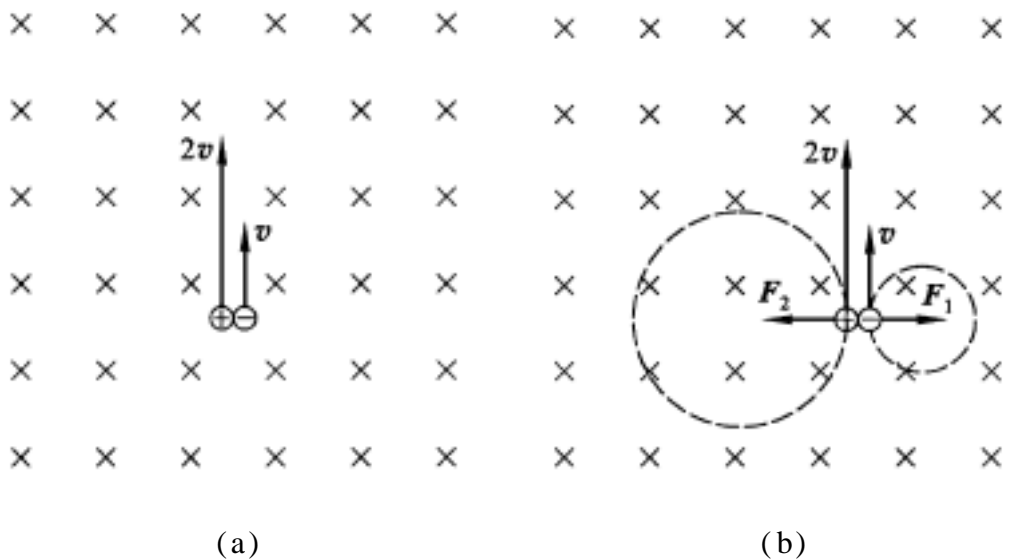
若是磁场力使质子束发生侧向偏转,质子束的轨迹通常为圆弧或螺旋线.洛伦兹力对运动的带电粒子不作功,因此,发生侧向偏转质子束的动能不变.

若是电场力使质子束发生侧向偏转,则偏转轨迹通常为抛物线.电场力对运动的带电粒子做功,因此,发生侧向偏转质子束的动能将发生变化.

11 - 15 如题 11 - 15 图(a)所示,一对正、负电子同时在同一点射入一均匀磁场中,已知它们的速率分别为  $2v$  和  $v$ ,都和磁场垂直.指出它们的偏转方向.经磁场偏转后,哪个电子先回到出发点?

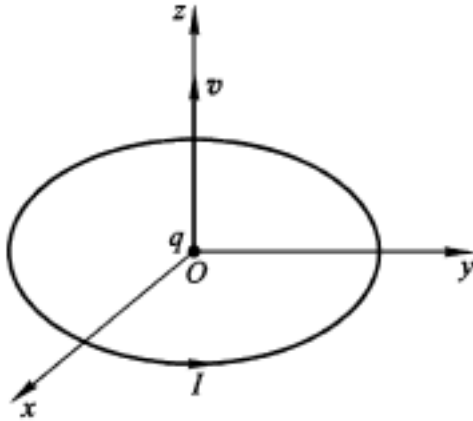
答:由图可见正、负电子的速度  $v \perp B$ ,由洛伦兹力  $F = qv \times B$  可知,速率为  $2v$  的正电子受力方向向左,使其作逆时针的匀速率圆周运动,而速率为  $v$  的负电子受力方向向右,使其作顺时针的匀速率圆周运动.两电子的轨道半径不同,速率大者半径也大,速率小者半径也小(正电子的轨道半径是负电子的 2 倍),但运动周期相同,所以它们将同时回到出发点.

正、负电子的运动轨道如题 11 - 15 图(b)所示.



题 11 - 15 图

11 - 16 如题 11 - 16 图所示,一载流圆形线圈放置在  $Oxy$  平面内,电流流向如图,另一带正电荷的粒子以速度  $v$  沿  $z$  轴方向通过线圈中心,试讨论作用在粒子和载流线圈上的力.



题 11 - 16 图

答: 参见题 11 - 7 .载流圆电流轴线上的  $B$  沿  $z$  轴正方向,运动电荷的速度  $v$  与  $B$  平行 .由  $F = qv \times B$  可知,  $F = 0$  .运动电荷不受力 .

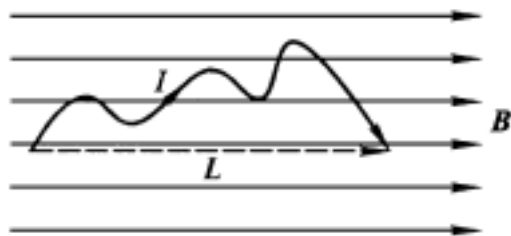
参见题 11 - 8,运动电荷在载流圆线圈各电流元处激发的  $B$  与电流元  $Idl$  处处平行,根据电流元受磁场力  $dF = Idl \times B$  可知,各电流元不受力,因此,作用在载流线圈上的力  $F = 0$  .

11 - 17 一个弯曲的载流导线在均匀磁场中应如何放置才不受磁力的作用 ?

答: 一段弯曲的载有恒定电流的导线在均匀磁场中受安培力可表示为

$$F = \int_L Idl \times B = I \left[ \int_L dl \right] \times B = IL \times B,$$

式中  $\left[ \int_L dl \right] = L$ ,表明弯曲导线各有向线元的矢量和等于从导线头至尾的有向直线段  $L$  .



题 11 - 17 图

由以上讨论可知, 要使  $F = 0$ , 只需使  $L \parallel B$  即可, 如题 11 - 17 图所示 .

11 - 18 在一均匀磁场中, 有两个面积相等、通有相同电流的线圈, 一个是三角形, 一个是圆形 . 这两个线圈所受的磁力矩是否相等? 所受的最大磁力矩是否相等? 所受磁力的合力是否相等? 两线圈的磁矩是否相等? 当它们在磁场中处于稳定位置时, 由线圈中电流所激发的磁场方向与外磁场的方向是相同、相反还是相互垂直?

答: 载流线圈在磁场中所受的磁力矩为  $M = p_m \times B$ ,  $p_m = ISe_n$  为线圈的磁矩 .

两个线圈的面积相等、通过的电流相同, 因此磁矩  $p_m$  的大小相同 .

两线圈所受的磁力矩  $M$  是否相同, 取决于磁矩  $p_m$  与均匀磁场  $B$  的方位是否相同 . 若两线圈的  $p_m$  与均匀磁场  $B$  的夹角均为  $= \frac{\pi}{2}$ , 则所受磁力矩最大且相等 .

载流线圈在均匀磁场中所受磁力的合力恒为零 .

线圈在均匀磁场中处于稳定位置是指: 线圈所取的方位, 使其所受的磁力矩为零, 即  $p_m$  与  $B$  的夹角  $= 0$  或  $= \pi$  .

$= 0$  时为稳定平衡位置, 由线圈中电流所激发的磁场方向与

外磁场的方向相同,即  $p_m$  与  $B$  的夹角  $= 0$  .

$= \pi$  时为非稳定平衡位置,由线圈中电流所激发的磁场方向与外磁场的方向相反,即  $p_m$  与  $B$  的夹角  $= \pi$  .



## 第十二章 磁介质中的磁场

12 - 1 有两根铁棒,其外形完全相同,其中一根为磁铁,而另一根则不是,你怎样辨别它们?不准将任一根棒作为磁针而悬挂起来,亦不准使用其他仪器.

答:铁棒作为铁磁质,磁化后即成为磁铁.磁铁两极的磁场最强,中间部分最弱.若将无磁性的铁棒 A 的一端接近磁铁 B 的磁极, A 将被磁化而与 B 相互吸引,从而无法分辨.若将 A 的一端接近 B 的中间部分,由于磁铁的中间部分磁性最弱,不会有明显的磁相互作用;而若将磁铁 B 的一端接近 A 的中间部分,则由于 A 被磁化而将发生明显的相互吸引现象.这样便可确定 B 是磁铁.

12 - 2 试解释为什么磁铁能吸引如铁钉之类的铁制物体?

答:无磁性的铁钉处在磁铁的非均匀磁场中会被磁化而成为小磁铁,其磁矩顺着磁铁磁场的取向.铁钉靠近磁铁一端的磁极与磁铁的磁极相反,相互作用为引力;远离磁铁一端的磁极与磁铁的磁极相同,相互作用为斥力.引力大于斥力,所以磁铁能吸引如铁钉之类的铁制物体.

12 - 3 试说明  $B$  与  $H$  的联系与区别.

答:描述磁场空间的分布: $B$  是基本物理量, $H$  是引入的辅助物理量.它们都满足场强的叠加原理:

$$B = B_i, \quad H = H_i;$$

$B$  线和  $H$  线: 都是闭合线.

$H$  的定义式: 
$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

表明  $H$  与场源电流、磁介质的磁化电流都有关,是普遍适用的基本关系式.

环路定理: 
$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I_i .$$

$I_i$  为穿过环路的所有电流(含磁化电流)的代数和,即磁感应强度的环流积分决定于环路所包围的传导电流和磁化电流.

$$\oint_L H \cdot dl = I_i .$$

$I_i$  为穿过环路的所有传导电流的代数和,即磁场强度的环流积分只决定于环路所包围的传导电流.

$B$  和  $H$  关系: 
$$H = \frac{B}{\mu_0} - M .$$

真空中: 
$$B_0 = \mu_0 H ;$$

各向同性、线性磁介质内部:  $B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$ ,  $\mu_r$  为常数;

铁磁质内部,若形式上仍表示为  $B = \mu H$ ,则  $\mu$  不为常数.

12 - 4 下面的几种说法是否正确,试说明理由.

(1) 若闭合曲线内不包围传导电流,则曲线上各点的  $H$  必为零.

(2) 若闭合曲线上各点的  $H$  为零,则该曲线所包围的传导电流的代数和为零.

(3) 不论抗磁质与顺磁质,  $B$  总是和  $H$  同方向.

(4) 通过以闭合回路  $L$  为边界的任意曲面的  $B$  通量均相等.

(5) 通过以闭合回路  $L$  为边界的任意曲面的  $H$  通量均相等.

答: (1) 错.在  $H$  的安培环路定理中,环路上的  $H$  不但与环路内、外的传导电流有关,也与空间所有磁介质的磁化电流有关.环路不包围传导电流,只能说明  $H$  对此环路的环流为零,并不说

明曲线上各点的  $H$  必为零。

(2) 对 .环路上各点的  $H$  为零, 则整个环路  $H$  的环流必为零, 根据  $H$  的安培环路定理, 可以确定该环路所包围的传导电流的代数和为零。

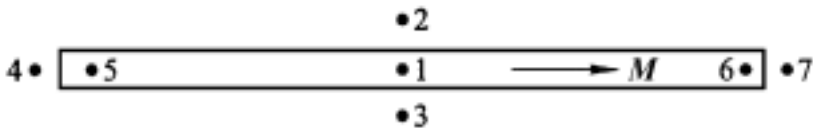
(3) 抗磁质与顺磁质都是弱磁质,  $|M| \ll |B|$ 。当抗磁质与顺磁质都是各向同性磁介质时, 由  $H = \frac{B}{\mu_0} - M$  可以认为弱磁介质内部的  $B$  和  $H$  同方向。

本结论有别于铁磁质, 参见题 12 - 5。

(4) 对 .参见题 11 - 6 证明。

(5) 错 .参见题 12 - 5。

12 - 5 一细长磁棒沿轴向均匀磁化, 磁化强度为  $M$ , 如图所示 .分别求图中所标各点的磁场强度  $H$  和磁感应强度  $B$ 。



题 12 - 5 图

答: 细长磁棒在空间的  $B$  和  $H$  的分布规律是:  $H = \frac{B}{\mu_0} - M$ 。

沿轴向均匀的细长磁棒的磁化强度  $M$  为常矢量, 因而其磁化电流以面电流的形式分布于表面 .磁化面电流的线密度  $s$  (单位长度的磁化面电流) 在数值上与磁化强度  $M$  的大小相等, 磁棒内  $M$  的方向与磁化面电流成右手螺旋关系 .所以, 细长磁棒在空间各点处的磁感应强度分布, 用单位长度的电流为  $s$  的细长螺线管来近似, 是合理的。

$$B_1 = \frac{\mu_0 s}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad \mu_0 s = \mu_0 M,$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - M = 0;$$

$$B_2 = B_3 = 0,$$

$$H_2 = H_3 = \frac{B_2}{\mu_0} - M = 0, \text{其中磁棒外的 } M = 0;$$

$$B_4 = B_5 = B_6 = B_7 = \frac{\mu_0 M}{2}, \text{细长螺线管端口处};$$

$$H_4 = H_7 = \frac{B_4}{\mu_0} - M = \frac{M}{2} - 0 = \frac{M}{2}, \text{磁棒外的 } M = 0;$$

$$H_5 = H_6 = \frac{B_5}{\mu_0} - M = \frac{M}{2} - M = -\frac{M}{2}, \text{端口处}.$$

从以上的结果可见,在本问题涉及的永磁体内,  $B$  与  $H$  反向或近似反向,这在各向同性非铁磁质中是不可能出现的.在永磁体外,  $B$  与  $H$  同方向.

12 - 6 如果一闭合曲面包围条形磁棒的一个磁极,问通过该闭合曲面的磁通量是多少?

答:根据磁场的高斯定理,对任何闭合曲面,有  $\oint_S B \cdot dS = 0$ .

条形磁棒的磁感应线连续,或者说条形磁棒的磁场分布类似于有限长载流螺线管的磁场分布,通过包围其一端的闭合曲面的磁通量为零.

12 - 7 为什么蹄形磁铁比条形磁铁产生的磁场强?

答:从磁铁的形状看,蹄形磁铁两极比条形磁铁的两极靠得近,两磁极间的磁感应强度比条形磁铁的强;从磁路概念看,蹄形磁铁比条形磁铁的磁阻小,两磁铁内部的磁场强度相同时,蹄形磁铁两极间的磁通比条形磁铁的强.

12 - 8 在空气和铁磁质的边界面上,为什么在空气一侧的磁

感应线一般近似垂直于边界面。

答：根据磁场的边值关系，在空气和铁磁质的边界面上，磁感应强度的法向分量连续；磁场强度的切向分量连续。若以下标 1 表示空气，以下标 2 表示铁磁质，应有  $\frac{B_{1t}}{\mu_0} = \frac{B_{2t}}{\mu_0 \mu_r}$ 。通常，铁磁质的相对磁导率远大于 1，即  $\mu_r \gg 1$ ，所以有  $B_{1t} \approx 0$ 。也即在空气一侧的磁感应线一般近似垂直于边界面。

12 - 9 在强磁铁附近的光滑桌面上的一枚铁钉由静止释放，铁钉被磁铁吸引，试问当铁钉撞击磁铁时，其动能从何而来？

答：在强磁铁附近存在较强的磁场，磁场的能量储于磁场空间。铁钉被磁铁吸引并撞击磁铁的动能，来自磁场在吸引铁钉的过程中对铁钉所作的功。归根结底，铁钉所获得的动能来自磁场。

12 - 10 试比较并说明顺磁质与铁磁质的磁化曲线。

答：顺磁质的磁导率为稍大于 1 的常量。在  $B - H$  坐标系中，其磁化曲线在较大范围内是过坐标原点的、斜率稍大于 1 的直线。表明随着外磁场的加强，顺磁质内部的分子磁矩  $p_m$  与外磁场方向一致的程度也随之线性加强。外磁场进一步加强，而顺磁质内部的分子磁矩  $p_m$  已经全部转到与外磁场一致的方向，不能进一步对外磁场做出响应，此时，顺磁质的磁化曲线将出现“饱和”状态，即随着  $H$  的增大， $B$  几乎不再增大。

铁磁质的磁导率不是常量，在  $B - H$  坐标系中，其磁化曲线也不呈现简单的函数关系。原始的、未曾被磁化过的铁磁质被外磁场磁化时，其初始磁化曲线从  $B - H$  坐标原点开始，随着外磁场的加强，经历一段非线性的初始磁化曲线达到磁饱和状态；随着外磁场的减弱，磁化曲线并不沿原磁化路径返回；外磁场为零时，铁磁质内留有“剩磁”；外磁场反向并达到某“矫顽力”时，“剩磁”退为零……外磁场的大小和方向反复变化多次后，铁磁质的磁化曲线

趋于一稳定的闭合曲线,即磁滞回线.铁磁质的磁滞现象需由磁畴理论来解释.

# 第十三章 电磁感应和暂态过程

13 - 1 如题 13 - 1 图所示,在下列各情况下,线圈中是否会产生感应电动势?何故?若产生感应电动势,其方向如何确定?

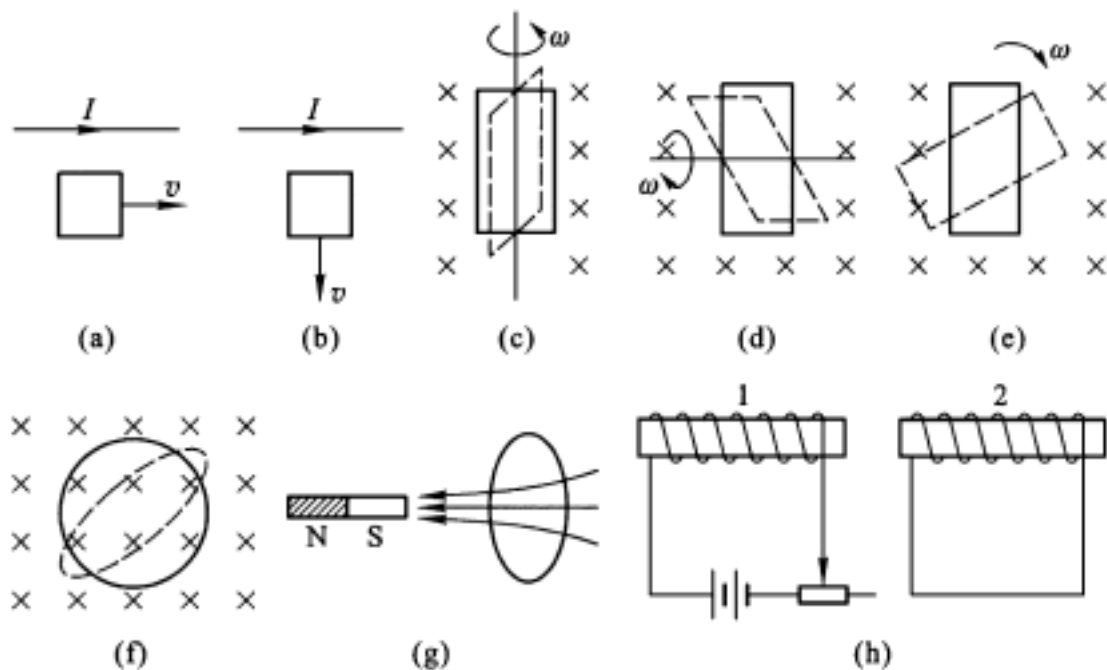
(1) 线圈在载流长直导线激发的磁场中平动,图(a)、(b);

(2) 线圈在均匀磁场中旋转,图(c)、(d)、(e);

(3) 在均匀磁场中线圈变形,图(f),从圆形变成椭圆形;

(4) 在磁铁产生的磁场中线圈向右移动,图(g);

(5) 两个相邻近的螺线管 1 与 2,当 1 中电流改变时,试分别讨论在增加与减少的情况下,2 中的感应电动势,图(h)。



题 13 - 1 图

答：根据法拉第电磁感应定律可知，当通过导体回路的磁通量发生变化时，在回路中就会产生电动势。方向可由楞次定律确定。所以，

(1) 图(a)  $\frac{d}{dt} = 0, E = 0;$

图(b)  $\left| \frac{d}{dt} \right| < 0, E \neq 0, \text{ 顺时针} .$

(2) 当线圈由实线位置转到虚线位置时，

图(c)  $\left| \frac{d}{dt} \right| < 0, E \neq 0, \text{ 顺时针};$

图(d)  $\left| \frac{d}{dt} \right| < 0, E \neq 0, \text{ 顺时针};$

图(e)  $\frac{d}{dt} = 0, E = 0 .$

(3) 图(f)  $\left| \frac{d}{dt} \right| < 0, E \neq 0, \text{ 顺时针};$

(4) 图(g)  $\left| \frac{d}{dt} \right| < 0, E \neq 0, \text{ 从右向左看为顺时针} .$

(5) 图(h) 触点右移时， $I_1$  减小， $\left| \frac{d I_1}{dt} \right| < 0, E_1 \neq 0,$

顺时针；触点左移时， $I_1$  增大， $\left| \frac{d I_1}{dt} \right| > 0, E_1 \neq 0, \text{ 逆时针} .$

13 - 2 将一磁铁插入一个由导线组成的闭合电路线圈中，一次迅速插入，另一次缓慢地插入。问

(1) 两次插入时在线圈中的感生电荷量是否相同？

(2) 两次手推磁铁的力所作的功是否相同？

(3) 若将磁铁插入一不闭合的金属环中，在环中将发生什么变化？

答：两次插入磁铁，线圈中磁通量的变化相同，但磁通量随时间的变化率不同。



(1) 由电流定义  $I = \frac{dq}{dt}$  和  $I = \left| \frac{E}{R} \right| = \frac{1}{R} \frac{d}{dt}$  可得

$$q = \frac{1}{R} \cdot$$

$R$  为线圈的电阻。所以,两次插入的速度不同,但在线圈中通过导线某截面的感生电荷量相同。

(2) 手推磁铁的力所作功的大小等于感应电动势在这段时间内所作的功。

$$\text{由} \quad dA = \frac{1}{R} (E)^2 dt = \frac{1}{R} \left[ \frac{d}{dt} \right]^2 dt = \frac{d}{dt} dq$$

可见在整个过程中,通过导线某截面的感生电荷量  $q$  相同。所以,手推磁铁的力所作功的大小正比于磁感应通量的时间变化率,即正比于两次插入的速度。

(3) 若将磁铁插入一不闭合的金属环中,则环中有电动势,但不形成感生电流,手也不会感到阻力。

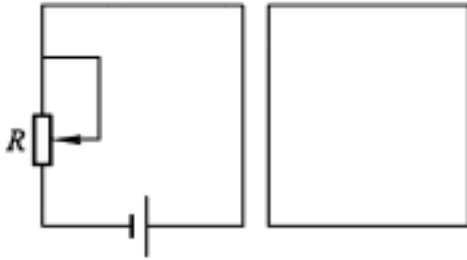
13 - 3 让一块很小的磁铁在一根很长的竖直铜管内下落,若不计空气阻力,试定性说明磁铁进入铜管上部、中部和下部的运动情况,并说明理由。

答:磁铁进入铜管上部时,铜管中将产生感应电流,该电流随着磁铁下落速度的增大而增大,感应电流的磁场对下落磁铁的阻力也越来越大。竖直铜管足够长时,可在管内某处使磁铁所受的重力和阻力的合力为零。以后,磁铁以恒定速率即收尾速率下落。到达铜管的下部即将离开铜管时,由于磁铁在管内的磁感应强度减小,感应电流的磁场对磁铁的阻力将小于磁铁所受重力,因而磁铁将加速离开铜管。

13 - 4 如果我们使题 13 - 4 图中左边电路中的电阻  $R$  增加,则在右边电路中感应电流的方向如何?

答:如果左边电路中的电阻  $R$  增加,则电路中的电流减小,

穿过右边电路的磁通量也减少,因而右边电路中将出现顺时针的感应电流。

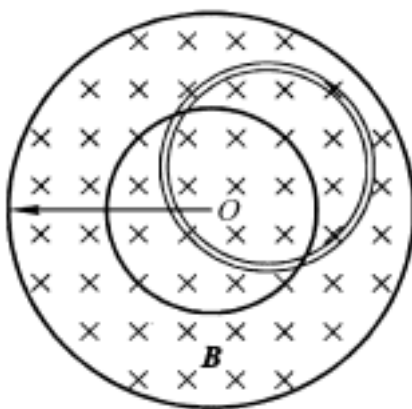


题 13 - 4 图

13 - 5 将尺寸完全相同的铜环和木环适当放置,使通过两环内的磁感应通量变化量相等.问这两个环中的感生电动势及感生电场是否相等?

答:当两环完全重叠地置于磁场空间,并单位时间内通过两环的磁感应通量的增量相等时,在导体回路(铜环)中会产生感应电流,相应的电动势由法拉第电磁感应定律  $E = - \frac{d}{dt}$  给出.在作为绝缘体的木环中不会产生感应电流,因而没有电动势.为什么通过两个环的磁通量的变化率相同,电动势却不同呢?从麦克斯韦关于感生电场强度  $E$  和  $-\frac{B}{t}$  的关系可知,由于空间磁场的变化,在两个环上各点处的感生电场是相同的,但感生电场作用于绝缘体内受束缚电荷的非静电性力不能驱动电荷而作功,因此木环内没有电动势,也无感生电流。

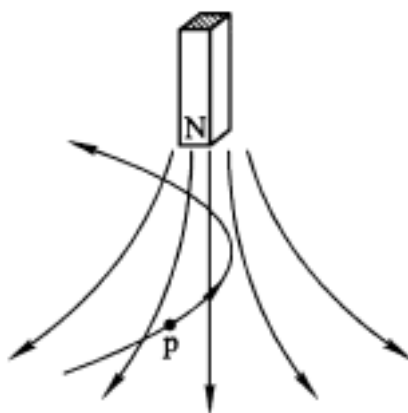
若将两个相同的铜环放在同一个变化的均匀磁场中,并使通过环的磁感应通量的变化率相同,当它们所处的位置不同时,两环上各点处感生电场的大小也不一定相等.比如,将两环共面地置于圆柱形区域内的均匀磁场中,环面法向平行于磁感应强度方向.将一环置于磁场区域中心,另一环则偏心放置,如题 13 - 5 图所



题 13 - 5 图

示 . 当磁感应强度随时间变化时 , 该磁场空间内的感生电场的大小正比于  $r$  , 呈轴对称分布 , 两环上各点处感生电场的大小并不相等 .

13 - 6 如图所示 , 一质子通过磁铁附近发生偏转 , 如果磁铁静止 , 质子的动能保持不变 , 为什么 ? 如果磁铁运动 , 质子的动能将增加或减少 , 试说明理由 .



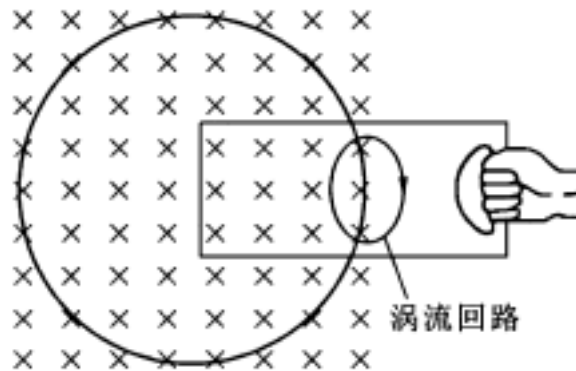
题 13 - 6 图

答 : 磁铁静止时 , 质子在稳恒的非均匀磁场中运动 , 所受洛伦

兹力总是垂直于其速度方向,洛伦兹力不作功.所以,质子的动能保持不变.

磁铁运动时,质子除受到其所在处磁场的洛伦兹力外,还受到由该处磁场变化激发的涡旋电场力.涡旋电场力可使质子获得切向加速度,改变其运动速率.所以,质子的动能将增加或减少.

13 - 7 铜片放在磁场中,如题 13 - 7 图所示.若将铜片从磁场中拉出或推进,则受到一阻力的作用,试解释这个阻力的来源.

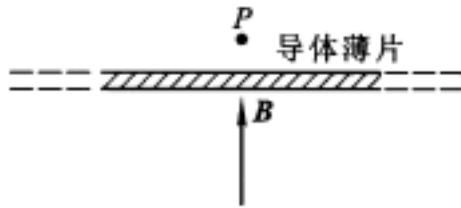


题 13 - 7 图

答:将铜片从磁场中拉出时,通过铜片的磁感应通量将减少,在铜片内形成闭合的感应电流,即所谓涡流,其电流线如图所示,磁场对该感应电流的作用力向左为阻力.同理,将铜片推进磁场时,也会受到相同性质的阻力.

13 - 8 有一导体薄片位于与磁场  $B$  垂直的平面内,如题 13 - 8图所示.如果  $B$  突然变化,在  $P$  点附近  $B$  的变化不能立即检查出来,试解释之.

答:根据电磁感应定律, $B$  突然发生变化时,将在其周围空间激发起涡旋电场.涡旋电场又将在导体薄片内形成涡电流.由楞次定律可知,涡电流的磁通总是阻碍原磁通的变化.设涡电流在  $P$



题 13 - 8 图

点的磁场为  $B$  ,根据场强的叠加原理,  $P$  点处的合场强应为  $B + B$  .若  $B$  是突然增强的,则  $B$  与其反向,因此  $P$  点及其附近的合场强不能立即反映出  $B$  的突然增强.反之亦然.

若  $B$  按周期性或其他规律持续变化,则因  $P$  点的磁感应强度是两者的矢量和,合场强与原磁场  $B$  是有区别的.

13 - 9 如题 13 - 9 图所示,一均匀磁场被限制在半径为  $R$  的圆柱面内,磁场随时间作线性变化.问图中所示闭合回路  $L_1$  和

$L_2$  上每一点的  $-\frac{B}{t}$  是否为零? 感生电场  $E$  是否为零?  $E \cdot dl$  和

$E \cdot dl$  是否为零? 若回路是导线环,问环中是否有感应电流?

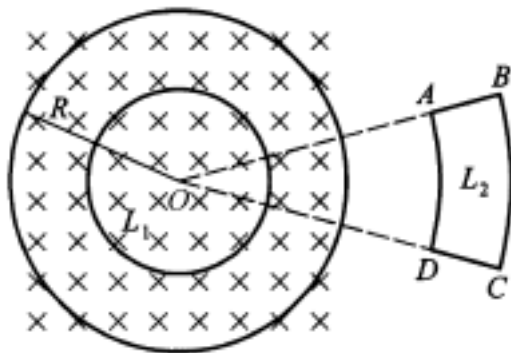
$L_1$  环上任意两点的电势差是多大?  $L_2$  环上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  点的电势是否相等?

答:圆柱形区域内的均匀磁场随时间变化时,它激发的感生电场分布于整个空间,具有轴对称性.

闭合回路  $L_1$  在磁场区域内,回路上各点的  $B = 0, \frac{B}{t} = 0$ ;  $L_2$

在磁场区域之外,回路上各点的  $B = 0, \frac{B}{t} = 0$ .

回路  $L_1$  上各点感生电场  $E_1$  的大小为  $E_1 = -\frac{r_1}{2} \frac{dB}{dt}$ ,  $r_1$  为轴



题 13 - 9 图

线到  $L_1$  的距离,  $\frac{dB}{dt} > 0$  时,  $E_1$  的正方向取为顺时针, 垂直于  $r_1$ ; 回路  $L_2$  虽在磁场区域外, 但各点的感生电场  $E_2$  并不为零, 大小为  $E_2 = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$ ,  $r$  为轴线到  $L_2$  上各点的距离,  $E_2$  的正方向也取为顺时针, 垂直于  $r$ .

$$\text{对 } L_1: \int_{L_1} E_1 \cdot dl = - \int_{S_1} \frac{dB}{dt} \cdot dS = - \frac{dB}{dt} \pi R^2 \neq 0. \text{说明回路 } L_1$$

中有电动势. 若回路  $L_1$  是由均匀导体构成的, 因环上各点处  $E_1$  的大小相同, 所以电动势均匀分布于整个环上, 环上会有感应电流. 但因为环上没有电荷的堆积分布, 不存在静电场或恒定电场, 因此环上任意两点间无电势差.

对  $L_2$ : 因所围面积内的磁感应通量为零, 可得  $\int_{L_2} E_2 \cdot dl = 0$ . 表明对整个回路  $L_2$  而言, 电动势为零, 所以, 回路内没有感应电流. 但在  $L_2$  各段上的电动势并不都为零. 在  $DC$  和  $AB$  段,  $E_2$  和  $dl$  处处垂直, 因此,  $E_2 \cdot dl$  处处为零. 在  $DA$  和  $BC$  段则由

$$\int_{L_2} E_2 \cdot dl = \int_D^A E_2 \cdot dl - \int_C^B E_2 \cdot dl = 0,$$

可得

$$E_{DA} = E_{CB} = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} .$$

是  $DA$  和  $BC$  两段弧长对圆柱轴线的张角 . 所以, 若  $\frac{dB}{dt} > 0$ , 则环上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  点的电势为

$$V_A = V_B > V_D = V_C, \quad U_{AD} = U_{BC} = \frac{R^2}{2} \frac{dB}{dt} .$$

13 - 10 如题 13 - 10 图(a)所示, 当导体棒在均匀磁场中运动时, 棒中出现稳定的电场  $E = vB$ , 这是否和导体中  $E = 0$  的静电平衡的条件相矛盾? 为什么? 是否需要外力来维持棒在磁场中作匀速运动?

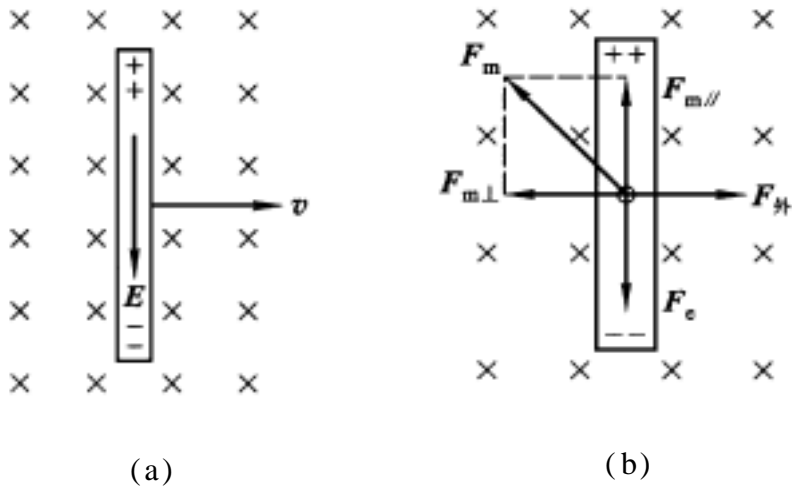
答: 在均匀磁场中运动的导体棒中出现的稳定电场  $E = vB$  与在静电平衡条件下导体中的合场强  $E = 0$ , 是导体在两种不同的平衡状态下的宏观表现 . 稳定电场是指稳定分布电荷激发的电场, 电荷本身在运动 . 静电场则由静止电荷激发 .

磁场中运动导体棒内的正负电荷受洛伦兹力分量的作用而堆积于棒的两端(如题 13 - 10 图(b)所示), 它们激发的电场遵循库仑定律, 当棒内电荷所受电场力  $F_e$  与洛伦兹力沿棒的分量  $F_m$  的合力为零时, 棒两端的电荷分布稳定, 这时棒内的电场强度大小为  $E = vB$  . 同时, 洛伦兹力垂直于棒的另一分量  $F_m$  与使棒运动的外力  $F_{外}$  的大小相等、方向相反, 棒在均匀磁场中作匀速直线运动 . 可见, 棒中出现稳定电场  $E = vB$  的前提是外力与棒受到的磁场力相平衡 .

导体棒中出现稳定电场时, 导体不是等势体, 导体表面不是等势面, 形成回路时导体内可以有电流 .

当导体棒被置于静电场中, 并处于静电平衡状态时, 感应电荷出现在导体的表面, 感应电荷的电场与外电场的叠加, 使导体内的合场强  $E = 0$  . 处于静电平衡状态下的导体是等势体, 导体表面是

等势面,导体内不可能有电荷的宏观定向运动,即不可能有电流。



题 13 - 10 图

13 - 11 用电阻丝绕成的标准电阻要求没有自感,问怎样绕制方能使线圈的自感为零,试说明其理由。

答: 由  $E = \left| \frac{d}{dt} \right| = L \left| \frac{dI}{dt} \right|$ , 可知  $L = \left| \frac{d}{dI} \right|$ . 要使一回路没有自感, 绕制的线圈必须使通过回路自身的总磁感应通量不随电流而变化。

为此, 可采用双线密绕法。即把导线从中点折成双线, 并排密绕于线圈架。通电流时, 两股导线中的电流大小相等, 流向相反, 从而使通过线圈平面的总磁感应通量近似为零, 随电流(时间)的变化率也近似为零。这样就可得到自感趋于零的线圈。

13 - 12 两螺线管 A、B, 其长度与直径都相同, 都只有一层绕组, 相邻各匝紧密相靠, 绝缘层厚度可忽略。螺线管 A 由细导线绕成, 螺线管 B 则由粗导线绕成。问:

- (1) 哪个螺线管的自感较大?
- (2) 哪个螺线管的时间常数较大?

答: 假定两螺线管的长度  $m$  直径, 内部的磁感应强度分布都



可近似为均匀。

(1) 长直螺线管的自感系数为  $L = \mu_0 n^2 V$ , 体积  $V = Sl = \frac{D^2}{4} l$  A、B 两管的长度与直径都相同, 因此体积相同。但 A 管由细导线绕成, 而 B 管由粗导线绕成, 单位长度的匝数  $n_A > n_B$ , 所以,  $L_A > L_B$ 。

(2) 螺线管的时间常数  $\tau = \frac{L}{R}$ , 其中  $L = \mu_0 n^2 V$ ,  $R = \frac{l}{S}$ , 为导线的电阻率,  $l$  为导线总长度,  $S$  为导线截面积。若设螺线管直径为  $D$ , 导线直径为  $d$ , 可得到

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 D d}{16},$$

正比于导线直径  $d$ 。所以, 螺线管 B 的时间常数较大。

13 - 13 在一个线圈(自感为  $L$ , 电阻为  $R$ )和电动势为  $E$  的电源的串联电路中, 当开关接通的那个时刻, 线圈中还没有电流, 自感电动势怎么会最大?

答: 开关接通时刻, 虽然线圈中还没有电流,  $I = 0$ 。但电流的变化率  $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0}$  最大。所以, 开关接通时刻的自感电动势最大, 但数值上不会超过电源电动势。

13 - 14 自感电动势能不能大于电源的电动势? 暂态电流可否大于稳定时的电流值?

答: 当  $LR$  电路与电源接通或断开时, 电路中都会出现自感电动势。

与直流电源  $E$  接通后的暂态电流为  $I = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0 (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ 。

接通时  $t = 0$ , 自感电动势为  $E \Big|_{t=0} = -L \frac{dI}{dt} \Big|_{t=0} = -E e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = -E$ .

所以, 接通时的自感电动势不可能大于电源的电动势, 暂态电流  $I \Big|_{t=0} = 0$ .

将电流已达稳态的  $LR$  电路与电源断开, 并且没有其他电流通路时,  $\frac{dI}{dt} \Big|_{t=0}$  很大, 自感电动势可能远大于电源的电动势, 甚至将电键两端间的空气击穿, 形成电流通路.

由于电磁惯性的存在, 与电源断开时  $LR$  电路的暂态电流不可能为零. 暂态电流由对电路中的分布电容的充电电流或气体放电电流构成, 很快消失为零. 若气体放电通道的阻值很小, 则瞬时的暂态电流值可能大于稳定时的电流值.

13 - 15 有两个半径相接近的线圈, 问如何放置方可使其互感最小? 如何放置可使其互感最大?

答: 将两个线圈互相垂直地放置时, 其互感最小. 因为当一线圈通以一定电流时, 它的磁感应强度通过另一垂直放置的线圈平面的磁感应通量最小. 由互感系数定义可知, 此时的互感系数最小.

若将两线圈同轴地套合在一起, 则当一线圈通以一定电流时, 它的磁感应线几乎完全通过另一线圈, 即通过另一线圈的磁感应通量最大. 所以, 同轴套合放置时, 两线圈间的互感系数最大.

13 - 16 两个螺线管串联相接, 两管中任何时候通有相同的恒定电流, 试问两螺线管之间有没有互感存在? 解释之.

答: 互感系数  $M$  与两螺线管的形状、相对位置以及周围介质等因素有关, 回路周围没有铁磁质时, 与它们是否通有电流无关.

在两个螺线管串联相接,并建立起恒定电流的同时,在空间也建立了能量为  $W_m = \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 \pm \frac{1}{2} M I^2$  的磁场.其中  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ , 耦合系数  $0 \leq k \leq 1$ .当两螺线管的串联使通电流后各自的磁感应强度互相加强时,上式中的互感能项(第三项)为正,反之则为负.紧密耦合时  $k=1$ ;无耦合时  $k=0$ .

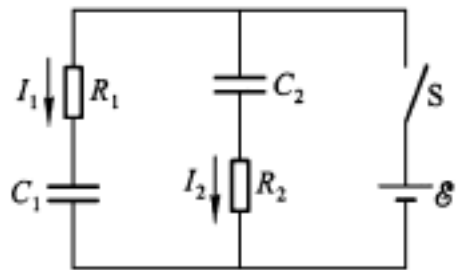
所以,除两螺线管互为垂直或相隔无限远放置外,一般来说它们之间总会有一定的互感.

13 - 17 如图所示,设  $C_1$  和  $C_2$  上的初始电压为零.问当开关 S 闭合瞬间及到达稳定时,电容器  $C_1$  和  $C_2$  上的电压  $U_1$  与  $U_2$  各等于多少?在两种情况下,两支路上的电流  $I_1$  和  $I_2$  各等于多少?

答:开关 S 闭合前,  $C_1$  和  $C_2$  都不带电,极板间的电势差  $U_{10}$  与  $U_{20}$  均为零.闭合瞬间,这种状态不能突变.

当  $t=0$  时,该电路为两电阻的并联电路.所以

$$I_1 = \frac{E}{R_1}, I_2 = \frac{E}{R_2}.$$



题 13 - 17 图

到达稳定状态,即  $t \rightarrow \infty$  时,充电电流  $I_1 = I_2 = 0$ ,电容器极板间的电势差即为电源电动势:

$$U_1 = U_2 = E.$$

13 - 18 如图所示电路中,已知  $E=10 \text{ V}$ ,  $R_0 = 10 \Omega$ ,  $R = 40 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ H}$ .求在下列情况时,电路中的  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$  各等于多少.

- (1) 当开关 S 刚接通;
- (2) S 接通后很长时间;

(3) 电流达稳定值后,再断开 S 时和断开后很长时间 .

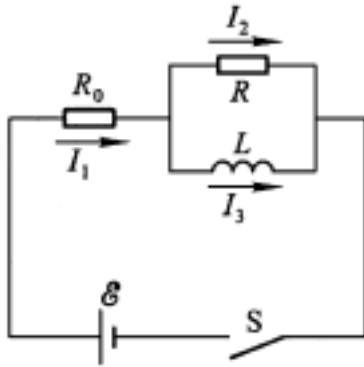
答: (1) 开关 S 刚接通时,由于自感的作用,

$$I_3 \Big|_{t=0} = I_{30} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \Big|_{t=0} = 0 .$$

所以 
$$I_{10} = I_{20} = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{10}{10 + 40} \text{ A} = 0.2 \text{ A} .$$

(2) S 接通后很长时间,电路达稳态 .此时  $\frac{dI_3}{dt} \Big|_{t=}$  = 0, 自感电动势为零 .而 L 为无电阻的电感器,此时为短路 .所以

$$I_2 = 0, \quad I_1 = I_3 = \frac{E}{R_0} = \frac{10}{10} \text{ A} = 1 \text{ A} .$$



题 13 - 18 图

(3) 电流达稳定值  $I_1 = I_3 = \frac{E}{R_0} = 1 \text{ A}$  后再断开 S 时, L 上的自感电动势与 R 构成回路 .此时  $I_1 = 0, I_2 = - I_3 \Big|_{t=0} = - \frac{E}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t} \Big|_{t=0} = - \frac{E}{R_0} = - 1 \text{ A}$ , “ - ”说明  $I_2$  流向与图示相反,也说明 L 上的电流不会突变 .

断开后很长时间,  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$  .

13 - 19 在螺绕环中,磁能密度较大的地方是在内半径附近,

还是在外半径附近？

答：磁能密度为  $w_m = \frac{B^2}{2\mu}$ 。螺绕环内的磁感应强度非均匀分布， $B = \frac{\mu NI}{2r}$ 。所以，磁能密度较大的地方是在内半径附近。

13 - 20 磁能的两种表式  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$  和  $W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$  的物理意义有何不同？式中  $V$  是均匀磁场所占体积。

答： $W_m = \frac{1}{2} LI^2$  表示一个自感为  $L$  的回路，通有恒定电流  $I$  时，其周围空间磁场的能量与该回路内的恒定电流  $I$  密切相关。

$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V$  表示磁感应强度为  $B$  的均匀磁场所占据的空间体积为  $V$  时，该磁场的能量与空间的磁感应强度  $B$  密切相关。

当  $B$  的空间分布为非均匀时， $W_m = \int_V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV$ 。

在由恒定电流激发的恒定磁场情况下，电流与磁场不可分割。磁能的上述两种表达式是等效的，由前一表达式可以导出后一表达式。但是，在非稳恒情况下，磁场可以脱离电流而由变化的涡旋电场激发。磁场的能量与磁感应强度  $B$  密切相关，磁场的能量分布在磁场空间的观点更正确地反映了客观事物的本质。因此，关于磁场能量的后一表达式是更为普适的。

# 第十四章 麦克斯韦方程组 电磁场

14 - 1 什么叫做位移电流？什么叫做全电流？位移电流和传导电流有什么不同？位移电流和位移电流密度的表式是怎样得到的？

答：位移电流是麦克斯韦继提出变化的磁场产生涡旋电场的假设后，提出的又一个新的假设，即变化的电场也视为一种电流，也产生磁场，这就是位移电流。位移电流定义为通过电场空间某截面电位移通量的时间变化率：

$$I_d = \frac{d D}{d t} .$$

全电流指位移电流与传导电流之和  $I = I_c + I_d$ 。广义地看，运流电流（电子束、加速器中的正负离子流）和含有两种以上载流子的电离气体、电解液、等离子体以及半导体中的电流等都包含在全电流的概念之中。

全电流总是连续的。

位移电流和传导电流的不同之处在于：

(1) 传导电流由导体内部电荷的宏观定向运动形成，而位移电流的本质是电场和电介质的极化随时间的变化率（有介质时还与极化电荷的微观运动有关），因此位移电流与电荷的宏观移动无直接关系。

(2) 传导电流存在于导体中，而位移电流可存在于真空、介质和导体中。在任何空间，变化的电场，都可表示为对应的位移电流。

(3) 传导电流引起的热效应遵从焦耳 - 楞次定律。而位移电流在真空中没有热效应，在电介质中，与介质极化的变化相对应的位移电流虽有热效应，但不遵从焦耳 - 楞次定律。

在把恒定电流情况下成立的安培环路定理推广到非稳恒情况时,出现与电荷守恒定律相矛盾的情况.为使安培环路定理在普遍情况下也能适用,麦克斯韦不但提出位移电流的假设,还假设它在磁效应方面也和传导电流等效,按同一规律在周围空间激发涡旋磁场.由这一思想出发,导出了位移电流和位移电流密度的表示式:

$$I_d = \frac{dD}{dt} \quad \text{和} \quad j_d = \epsilon_0 \frac{E}{t} + \frac{P}{t}.$$

14 - 2 位移电流密度的方向是否与电位移  $D$  的方向平行?

答:位移电流密度  $j_d$  的方向与电位移  $D$  对时间的变化率方向一致.当  $D$  增强时,  $j_d$  与  $D$  同方向,如电容器的充电过程;当  $D$  减弱时,  $j_d$  与  $D$  反方向,如电容器的放电过程.

14 - 3 一电容器与交变电源相联结,在电容器极板间的位移电流是超前还是落后于电源的电动势?

答:设平板电容器极板间的电势差与交变电源电动势同相变化,并设平板电容器极板面积为  $S$ ,极板间距为  $d$ ,极板间为真空.电容器极板间的电势差可设为

$$U = U_0 \cos \omega t = E_0 d \cos \omega t.$$

极板间电位移矢量大小为

$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 \cos \omega t,$$

通过极板间某  $S$  面的电位移通量为

$$\Phi_D = DS = \epsilon_0 \frac{U_0 S}{d} \cos \omega t,$$

位移电流大小为

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = -\epsilon_0 \frac{U_0 S}{d} \sin \omega t = \epsilon_0 \frac{U_0 S}{d} \cos \left[ \omega t + \frac{\pi}{2} \right].$$

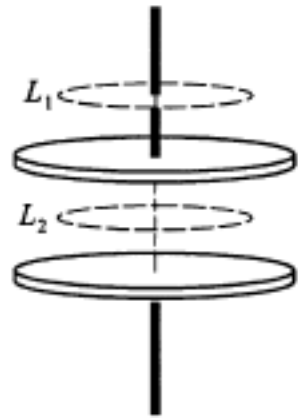
由结果可见,位移电流的相位超前于电源的电动势  $\frac{\pi}{2}$ .

14 - 4 电容器极板间的位移电流与联结极板的导线中的电流大小相等,然而在极板间的磁场越靠近轴线中心越弱,而传导电流的磁场越靠近导线越强,为什么?

答:为便于讨论,设电容器是半径为  $R$  的圆平行板电容器,忽略边缘效应,导线沿电容器轴线延伸到无穷远,其中通有非恒定电流.已知:  $I_d = \frac{D}{t} R^2 = I_c$ .

全电流的磁场具有轴对称的空间分布,并满足  $\oint_L H \cdot dl = \int_S \left[ \frac{D}{t} + \right] \cdot dS$ .

以离开轴线距离  $r (r < R)$  为半径分别作两个相同的圆形回路  $L_1$  和  $L_2$ :  $L_1$  在导线外;  $L_2$  在极板间,如题 14 - 4 图所示.根据安培环路定理,两回路  $L_1$  和  $L_2$  所围面积虽然相同,但由于回路所包围全电流的量值不同,因此离轴线距离同为  $r$  处的  $H$  值不同,导线外磁场强度的大小反比于  $r$ ; 极板间则正比于  $r$ .



题 14 - 4 图

进一步分析表明:在似稳情况下,平行板电容器内无旋的位移电流不激发磁场,该处的磁场完全由传导电流按毕奥 - 萨伐尔定律的规律激发.

14 - 5 证明  $\epsilon_0 \frac{dE}{dt}$  具有电流的量纲.

证:在国际单位制(SI)中,

$$\dim \epsilon_0 = \dim \frac{q^2}{Fr^2} = \frac{(IT)^2}{MLT^{-2}L^2} = I^2 L^{-3} M^{-1} T^4,$$



$$\dim E = \dim ES = \dim \frac{FS}{q} = \frac{MLT^{-2}L^2}{IT} = ML^3 I^{-1} T^{-3},$$

$$\dim \frac{dE}{dt} = I.$$

得证 .

14 - 6 试分析麦克斯韦方程组的不对称性,并说明这种不对称性的物理内容 .

答: 将麦克斯韦方程组中:  $\oint_S D \cdot dS = q = \int_V \rho dV$  (1)

和  $\oint_S B \cdot dS = 0$  (2)

作比较,可发现(2)式的等号右边不存在“磁荷”项,表明磁感应线是无头无尾的闭合线 .

将  $\oint_L E \cdot dl = - \int_S \frac{dB}{dt} \cdot dS$  (3)

和  $\oint_L H \cdot dl = \int_S \left[ \frac{D}{t} + \dots \right] \cdot dS$  (4)

作比较,可发现(3)式多一“-”号而少一“磁流”项 .

“-”号表明:  $E$  与  $-\frac{B}{t}$  呈左旋关系,而  $H$  与  $\left[ \frac{D}{t} + \dots \right]$  呈右旋关系;不出现“磁流”项表明: 不存在单独“磁荷” .

麦克斯韦方程组的这些“不对称性”,深刻体现了电磁场的统一性和相对性 .

14 - 7 静电场中的高斯定理  $\oint_S E \cdot dS = q = \int_V \rho dV$

和使用于真空中电磁场时的高斯定理  $\oint_S E \cdot dS = q = \int_V \rho dV$

$\rho dV$  在形式上是相同的,但理解上述两式时有何区别 ?

v

答：静电场的高斯定理中的  $E$  是由静止电荷激发的合场强，是保守场。

在适用于真空中电磁场情况的高斯定理中的  $E$  是由电荷激发的电场和由变化磁场激发的电场的合场强，其中变化磁场激发的电场是涡旋场，不是保守场。

14 - 8 对于真空中恒定电流的磁场， $B \cdot dS = 0$ ，对于一般的电磁场又碰到  $B \cdot dS = 0$  这个式子，在这两种情况下，对  $B$  矢量的理解上有哪些区别？

答：真空中恒定电流磁场的高斯定理中的  $B$ ，是由电荷作定向运动形成的恒定电流所激发的磁感应强度。对于一般电磁场也成立的磁场的高斯定理中的  $B$ ，由全电流激发。无论何种情况，磁感应线都是闭合的涡旋线，对任意闭合曲面  $S$ ， $B$  线的净通量为零。

14 - 9 怎样理解电磁场的物质性和电磁场量的相对性。

答：电磁场是物质存在的一种特殊形态。与一般的物质形态（实物）相比较，其物质性有以下共同特点：

(1) 与任何实物一样，是不依赖于人们的意识而存在，且能为人们的意识所反映的客观实在。

(2) 与任何实物一样，具有一定的质量、能量、动量和动量矩。

(3) 与组成任何实物的基本粒子一样，也具有粒子性。电磁场的基本粒子是光子；另一方面，实物的粒子也具有光子同样的波动性。

(4) 与在实物内进行的一切过程一样，在电磁场内进行的一切过程都服从质量转换和守恒定律、能量转换和守恒定律以及动量和动量矩守恒定律。

电磁场量的相对性表明：

电场和磁场不是彼此间无联系的、独立的两种场； $E$  和  $B$  在不同的惯性参考系中的量值不同，可以互相变换；它们所满足的麦克斯韦方程组，在洛伦兹变换下保持不变，说明电磁场是统一的整体；电磁场量  $E$  和  $B$  是描述电磁场所需的分量（共六个分量），是相对的；电磁规律在所有的惯性系中都是等同的、绝对的。

# 第十五章 简谐振动和电磁振荡

15 - 1 试说明下列运动是不是简谐振动：

- (1) 小球在地面上作完全弹性的上下跳动 .
- (2) 小球在半径很大的光滑凹球面底部作小幅度的摆动 .
- (3) 曲柄连杆机构使活塞作往复运动 .
- (4) 小磁针在地磁的南北方向附近摆动 .

答：简谐振动的运动学特征是：振动物体的位移(角位移)随时间按余弦或正弦函数规律变化；动力学特征是：振动物体所受的合力(合力矩)与物体偏离平衡位置的位移(角位移)成正比而反向 .

从能量角度看,物体在系统势能最小值附近小范围的运动是简谐振动 所以：

- (1) 不是简谐振动 .小球始终受重力,不满足上述线性回复力特征 .
- (2) 是简谐振动 .小球只有在“小幅度”摆动时才满足上述特征 .
- (3) 不是简谐振动 .活塞所受的力与位移成非线性关系,不满足上述动力学特征 .
- (4) 是简谐振动 .小磁针只有在“小幅度”摆动时才满足上述特征 .

15 - 2 简谐振动的速度和加速度在什么情况下是同号的？在什么情况下是异号的？加速度为正值时,振动质点的速率是否一定在增加？反之,加速度为负值时,速率是否一定在减小？

答：简谐振动物体速度的相位超前加速度  $\pi/2$ ，加速度与位移反向。利用旋转矢量法分析，图像更为直观。

当振动物体沿位移的正方向向平衡位置运动时，对应的旋转矢量位于第一象限，振动物体的速度和加速度同号，都为负；当振动物体沿位移的负方向向平衡位置运动时，对应的旋转矢量位于第三象限，振动物体的速度和加速度同号，都为正。

加速度为正值时，对应的旋转矢量位于第二象限和第三象限。当物体由平衡位置沿位移的负方向运动（第二象限）时，振动物体的速率在减小；当物体沿位移的负方向向平衡位置运动（第三象限）时，振动物体的速率在增大。

加速度为负值时，对应的旋转矢量位于第一象限和第四象限。当物体由平衡位置沿位移的正方向运动（第四象限）时，振动物体的速率在减小；当物体沿位移的正方向向平衡位置运动（第一象限）时，振动物体的速率在增大。

### 15 - 3 分析下列表述是否正确，为什么？

(1) 若物体受到一个总是指向平衡位置的合力，则物体必然作振动，但不一定是简谐振动。

(2) 简谐振动过程是能量守恒的过程，因此，凡是能量守恒的过程就是简谐振动。

答：(1) 正确。当该合力的方向总是指向平衡位置，并且其大小总是正比于位移的大小时，物体所作的周期运动是简谐振动；当该合力的方向总是指向平衡位置，但合力的大小并不仅仅正比于位移的大小时，物体所作的振动就不一定是简谐振动，比如阻尼振动、受迫振动等。

(2) 不正确。简谐振动是一种无阻尼的理想的可逆过程，振动过程中没有机械能的耗散，能量是守恒的。而有阻尼的振动，总能量虽守恒，但振动的机械能并不守恒。

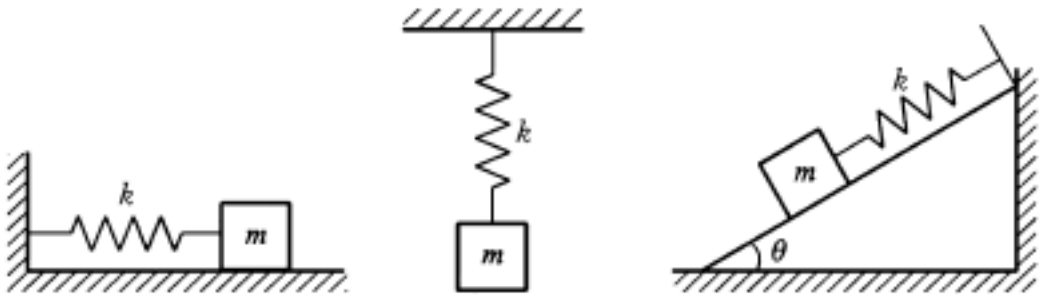
15 - 4 一劲度系数为  $k$  的弹簧和一质量为  $m$  的物体组成一振动系统,若弹簧本身的质量不计,弹簧的自然长度为  $l_0$ ,物体与平面以及斜面间的摩擦不计.在如题 15 - 4(a) 图所示的三种情况中,振动周期是否相同.

答:对如题 15 - 4(a) 图所示的三种情况分别对  $m$  作受力分析可知:振动系统的平衡位置不同,振动周期相同(系统固有性质

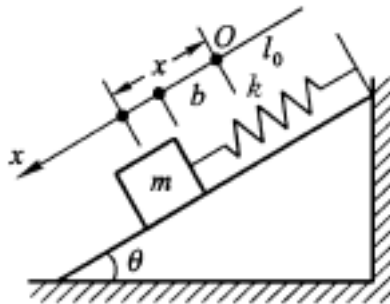
不变,  $= \sqrt{\frac{k}{m}}$ ).

以图示斜面上的弹簧振子为例作受力分析.取坐标  $Ox$  沿斜面向下为正,坐标原点取在弹簧原长处,设连接物体后弹簧的净伸长量为  $b$ ,  $t$  时刻物体的位移为  $x$ .如题 15 - 4(b) 图所示,有

$$mg \sin \theta - kb = 0, \quad mg \sin \theta - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$



(a)



(b)

题 15 - 4 图

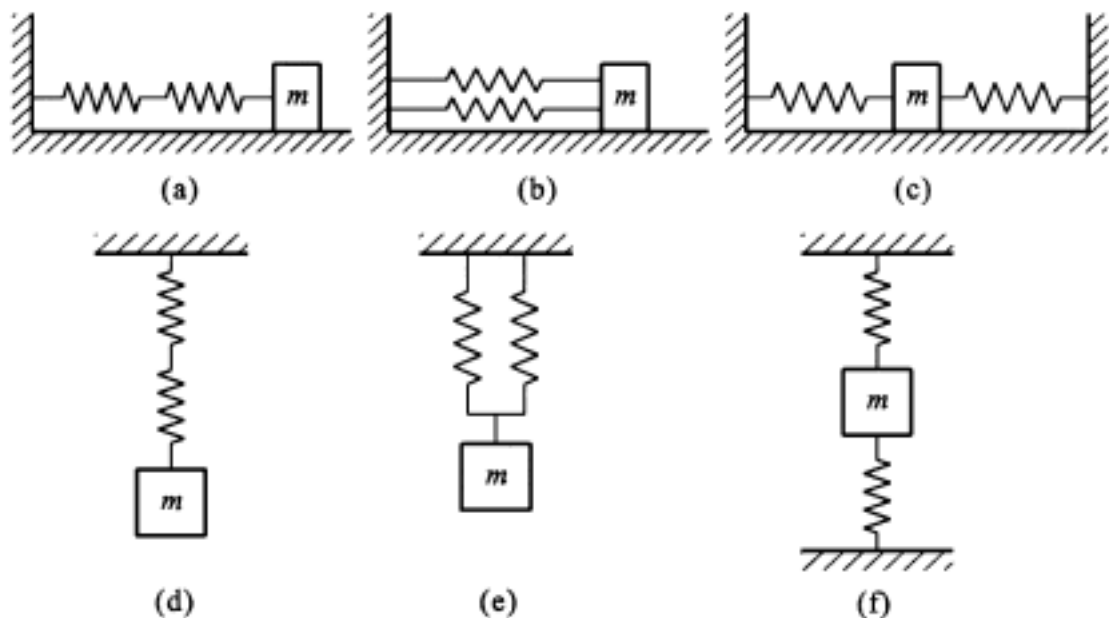
得 
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - b) = -\omega^2(x - b),$$

其中  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , 为振动的角频率. 令  $x = x - b$ , 即有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

可见, 斜面上弹簧振子系统的平衡位置相对弹簧的原长有一平移  $b$ , 而作简谐振动的角频率不变.

15 - 5 两个劲度系数均为  $k$  的相同弹簧, 按题 15 - 5 图所示的不同方式连接一质量为  $m$  的物体, 组成一振动系统. 试分析物体受到沿弹簧长度方向的初始扰动后是否作简谐振动. 如是简谐振动, 比较它们的周期.



题 15 - 5 图

答: 图示各系统受到沿弹簧长度方向的初始扰动后是否作简谐振动, 可根据对系统作动力学的受力分析所得到的微分方程来判断. 若不计物体与平面间的摩擦和空气的阻尼, 各弹簧的弹性力

都满足胡克定律,则各系统振动的机械能守恒,物体偏离位置后的运动都是简谐振动。

设各振子的惯性质量均为  $m$ , 不计弹簧的质量, 不同连接方式的等效单个弹簧的劲度系数为  $k$ 。对图示各系统作物体偏离平衡位置时的受力分析, 可得到各系统的  $k$ 。

图(a)  $f = f_1 = f_2 = -k \frac{x}{2} = -k x$ , 得  $k = \frac{k}{2}$  其中  $x$  为弹簧的伸长量。

图(b)  $f = f_1 + f_2 = -kx - kx = -2kx$ , 得  $k = 2k$ 。

图(c)  $f = f_1 + f_2 = -kx - kx = -2kx$ , 得  $k = 2k$ 。

图(d)  $f = f_1 = f_2 = -k \frac{x}{2} = -kx$ , 得  $k = 2k$  其中  $x = (x - b)$ ,  $b$  为弹簧连接  $m$  后的净伸长量,  $kb = mg$ 。

图(e)  $f = f_1 + f_2 = -kx - kx = -2kx$ , 得  $k = 2k$ 。

图(f)  $f = f_1 + f_2 = -kx - kx = -2kx$ , 得  $k = 2k$ 。

15 - 6 三个完全相同的单摆, 在下列各种情况, 它们的周期是否相同? 如不相同, 哪个大, 哪个小?

(1) 第一个在教室里, 第二个在匀速前进的火车上, 第三个在匀加速水平前进的火车上。

(2) 第一个在匀速上升的升降机中, 第二个在匀加速上升的升降机中, 第三个在匀减速上升的升降机中。

(3) 第一个在地球上, 第二个在绕地球同步卫星上, 第三个在月球上。

答: (1) 教室和匀速运动的火车都可认为是较好的惯性参考系, 匀加速水平运动的火车则是非惯性参考系。单摆的运动周期与惯性系的相对运动无关, 但在非惯性参考系中应用牛顿运动定律分析摆球的受力来求得单摆的运动周期时, 须附加惯性力。因此, 在匀加速水平运动火车上单摆的运动周期将不同于教室里的和匀



速运动火车上的单摆运动周期。

在教室里的第一个和在匀速前进的火车上的第二个单摆的周期  $T$  相同, 都为  $T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$ 。

设火车相对地面惯性系的加速度为  $a$ ,  $a$  的方向与  $g$  的方向垂直。处于匀加速水平前进火车中的第三个单摆在平衡时, 有  $f - ma = f - m \sqrt{a^2 + g^2} = 0$ 。式中  $f$  为摆球受到摆线的拉力的大小, 其方向沿  $a$  方向, 因  $a = \sqrt{a^2 + g^2}$ , 所以, 周期  $T = 2 \sqrt{\frac{l}{a}}$  将变小。

(2) 匀速上升的升降机是惯性参考系, 所以第一个单摆的周期  $T$  不变。

匀加速上升的升降机是非惯性参考系, 惯性力向下, 与重力加速度方向相同。第二个单摆在平衡时, 有

$$f - mg - ma = f - m(g + a) = 0,$$

因  $g = g + a$ , 所以, 周期  $T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$  将变小;

匀减速上升的升降机也是非惯性参考系, 惯性力向上, 与重力加速度方向相反。第三个单摆在平衡时, 有

$$f - mg + ma = f - m(g - a) = 0,$$

因  $g = g - a$ , 所以, 周期  $T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$  将变大。

(3) 在地球上的单摆的周期为  $T_e = 2 \sqrt{\frac{l}{g_e}}$ ,  $g_e = G \frac{m_e}{r_e^2}$ 。  $m_e$ 、 $r_e$  分别为地球的质量和半径,  $g_e$  为地球表面重力加速度的大小。

在月球上的单摆的周期为  $T_m = 2 \sqrt{\frac{l}{g_m}}$ ,  $g_m = G \frac{m_m}{r_m^2}$ 。  $m_m$ 、 $r_m$  分别为月球的质量和半径,  $m_m = 0.012 m_e$ ,  $r_m = 0.273 r_e$ ,  $g_m = 0.16 g_e$ , 所以  $T_m = 2.5 T_e > T_e$ 。

设同步卫星在距地心半径为  $r$  的圆轨道上绕地球飞行, 并且具有与地球自转角速度相同的角速度. 卫星的飞行速率应满足

关系:  $v^2 = G \frac{m_e}{r}$ , 即  $r^3 = G \frac{m_e}{\omega^2}$ ;  $r$  处的重力加速度  $g_r$  为  $g_r = G \frac{m_e}{r^2}$ . 代入有关数据可估算得  $r = 4.2 \times 10^4$  km,  $g_r = 0.023 g_e$ . 所以, 同步卫星上单摆的周期  $T_s = 6.6 T_e > T_e$ .

综上所述, 三个单摆周期的关系为:  $T_s$  (卫星上)  $>$   $T_m$  (月球上)  $>$   $T_e$  (地球上).

15 - 7 在上题中, 如把单摆改为悬挂着的弹簧振子, 其结果又如何?

答: 参照上题分析. 弹簧振子的周期  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,  $m$  为振子质量, 与参考系的运动无关,  $k$  为轻弹簧的劲度系数.

(1) 三个弹簧振子的周期相同, 第三个弹簧振子沿  $a$  方向振动, 平衡位置不在弹簧原长处.

(2) 三个弹簧振子的周期相同, 因参考系的加速度不同, 它们的平衡位置不同.

(3) 三个弹簧振子的周期相同, 因重力加速度大小不同, 它们的平衡位置不同.

15 - 8 在单摆实验中, 如把摆球从平衡位置拉开, 使悬线与竖直方向成一小角, 然后放手任其摆动. 若以放手之时为记时起点, 试问此角是否就是振动的初相位? 摆球绕悬点转动的角速度是否就是振动的角频率?

答: 单摆系统作简谐振动时, 其角位移 随时间作周期性变化, 可表示为

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0).$$

式中  $A$  是角位移的最大值的绝对值, 即振幅, 而  $\phi_0$  是谐振动的初相位,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  是单摆系统的固有角频率, 其中  $l$  是摆长.

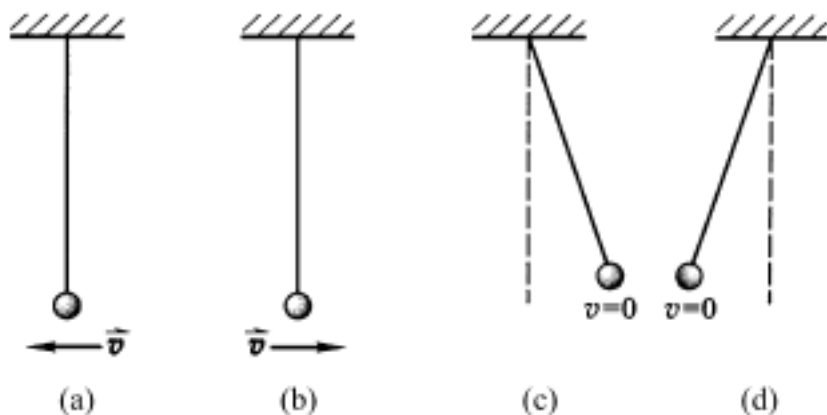
本问题中,  $t = 0$  时, 摆球由静止释放, 即摆球角速度的初始值  $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , 角位移的初始值  $\theta|_{t=0} = \theta_0$ . 利用旋转矢量法可以判断: 单摆谐振动的振幅  $A = \theta_0$  (设  $\theta_0 > 0$ ), 初相位  $\phi_0 = 0$ . 简谐振动表达式为

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\text{rad}).$$

所以, 把摆球从平衡位置拉开并静止释放的小角  $\theta_0$  不是振动的初相位而是谐振动的振幅, 摆球绕悬点转动的角速度是  $\frac{d\theta}{dt}$ , 而振动的

角频率是  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

15 - 9 周期为  $T$ 、最大摆角为  $\theta_0$  的单摆在  $t = 0$  时分别处于如题 15 - 9 图所示的状态. 若以向右方向为正, 写出它们的振动表达式.



题 15 - 9 图

答：图(a) 摆球在平衡位置向角位移 的负方向运动,对应的初相位为 $\frac{\pi}{2}$ ,所以

$$= A_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right];$$

图(b) 摆球在平衡位置向角位移 的正方向运动,对应的初相位为 $\frac{3\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ ,所以

$$= A_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right];$$

图(c) 摆球在角位移 正方向的最大值,对应的初相位为0,所以

$$= A_0 \cos \frac{2\pi}{T} t;$$

图(d) 摆球在角位移 负方向的最大值,对应的初相位为 $\pi$ ,所以

$$= A_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T} t + \pi\right].$$

15 - 10 有两个摆长不同的单摆作简谐振动,设  $l_A = 2 l_B$ . 把这两单摆向右拉开一个相同的小角度 , 然后释放任其自由摆动 . (1) 这两单摆在刚释放时相位是否相同? (2) 当单摆 B 到达平衡位置并向左运动时, 单摆 A 大致在什么位置和向什么方向运动? A 比 B 的相位超前还是落后? 超前或落后多少? (3) 自释放后, A、B 经过多长时间后以相反的相位相遇? A、B 经过多长时间后以同相位相遇?

答：作简谐振动单摆的周期为  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , 因  $l_A = 2 l_B$ , 所以  $T_A = \sqrt{2} T_B$  .

(1) 两单摆的初始状态相同, 故两简谐振动系统的初相位相

同. 设角位移向右为正, 并以释放之时为计时起点, 则初相位均为 0.

(2) 单摆 B 由右向左运动到平衡位置时, 需时  $t = \frac{T_B}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} T_A$ , 单摆 B 的相位变化了  $\frac{\pi}{2}$ , 而单摆 A 的相位变化为  $\frac{\pi}{4}$ , 小于 B 的相位变化.  $t$  时刻, 单摆 A 由右向左运动, 尚未到达平衡位置. 随着时间的推移, A 的相位将越来越落后于 B 的相位.

(3) 设 A、B 以相反的相位相遇, 需时为  $t_1$ , 有

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \omega t_1,$$

可得  $t_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} T_A = (\sqrt{2}+1) \sqrt{\frac{l_A}{g}}$ .

同理, 设 A、B 以同相位相遇, 需时为  $t_2$ , 则有

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2\pi t_2,$$

可得  $t_2 = (\sqrt{2}+1) T_A = 2(\sqrt{2}+1) \sqrt{\frac{l_A}{g}}$ .

15 - 11 物体作简谐振动的  $x - t$  图如题 15 - 11 图所示. 分别写出这些简谐振动的表达式.

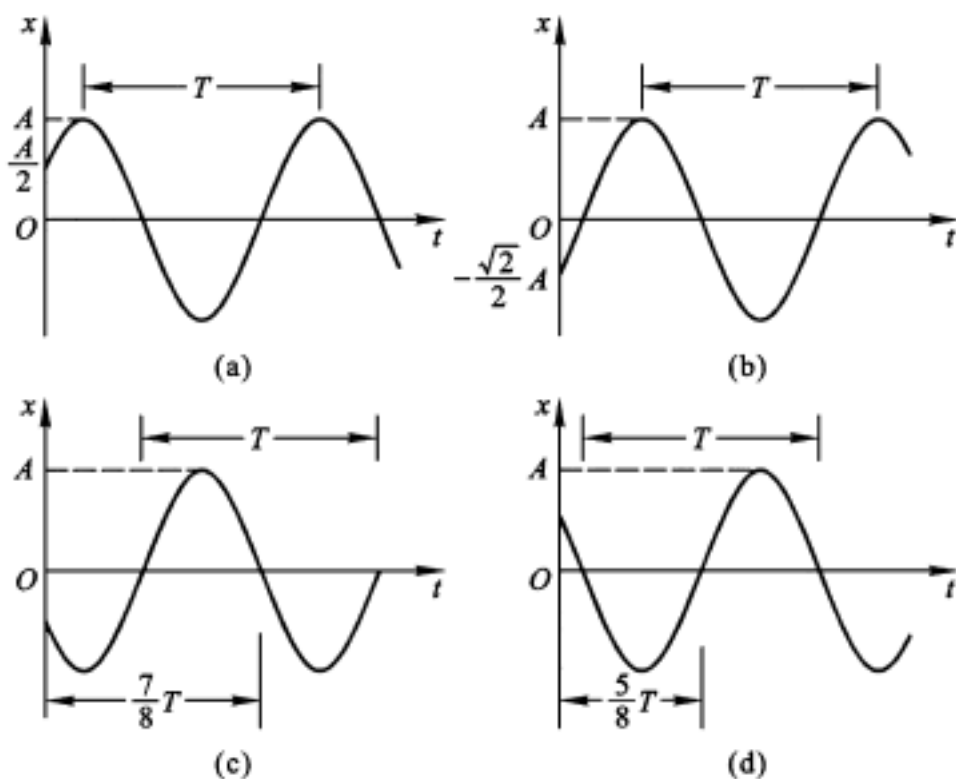
答: 振动曲线已给出振幅  $A$  和周期  $T$ , 根据某时刻的振动状态可得到振动初相位, 从而写出这些简谐振动的表达式.

图(a)

$$t = 0, \quad x_0 = \frac{A}{2}, \quad v_0 > 0. \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{3}.$$

$$x = A \cos\left[\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right].$$

图(b)



题 15 - 11 图

$$t = 0, \quad x_0 = -\frac{A}{2}, \quad v_0 > 0. \quad \phi_0 = -\frac{2}{3}.$$

$$x = A \cos\left[\frac{2}{T}t - \frac{2}{3}\right].$$

图(c)

$$t = \frac{7}{8}T, \quad x\Big|_{t=\frac{7}{8}T} = 0, \quad v\Big|_{t=\frac{7}{8}T} < 0. \quad \Big|_{t=\frac{7}{8}T} = \frac{\pi}{2},$$

$$\Big|_{t=\frac{7}{8}T} = \frac{2}{T} \frac{7}{8}T + \phi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_0 = -\frac{5}{4}.$$

$$x = A \cos\left[\frac{2}{T}t - \frac{5}{4}\right].$$

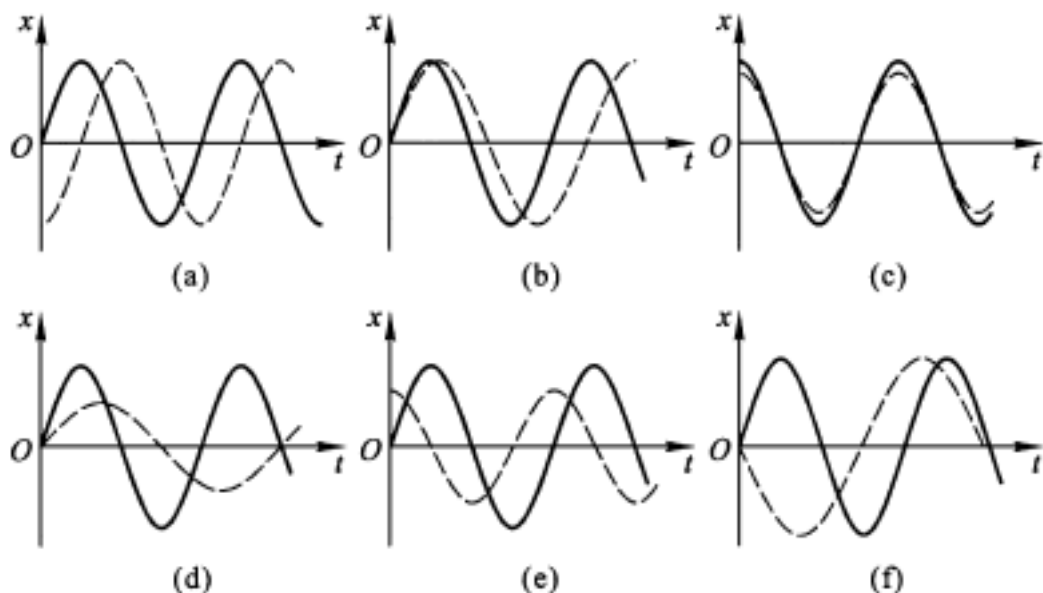
图(d)

$$t = \frac{5}{8}T, \quad x\Big|_{t=\frac{5}{8}T} = 0, \quad v\Big|_{t=\frac{5}{8}T} > 0. \quad \Big|_{t=\frac{5}{8}T} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\left|_{t=\frac{5}{8}T} = \frac{2}{T} \frac{5}{8} T + \phi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{4} .$$

$$x = A \cos\left[\frac{2}{T}t - \frac{\pi}{4}\right] .$$

15 - 12 对于频率不同的两个简谐振动,初相位相等,能否说这两个简谐振动是同相的?如题 15 - 12 图中各图内的两条曲线表示两个简谐振动,试说明其频率、振幅、初相位三个量中哪个相等,哪个不相等.



题 15 - 12 图

答: 频率不同的两个简谐振动系统的初相位相等,仅反映两系统的初始状态相同,它们不可能同相振动(参见题 15 - 10 的解答).在旋转矢量图上,表现为两矢量以某重合的方位开始,以不同的角速度绕  $x$  轴的原点逆时针旋转,两矢量间的夹角即两振动的相位差将随时间而变化.

图(a) 频率相同;振幅相同;初相位不同.

图(b) 频率不同;振幅相同;初相位相同.

图(c) 频率相同;振幅不同;初相位相同 .

图(d) 频率不同;振幅不同;初相位相同 .

图(e) 频率相同;振幅不同;初相位不同 .

图(f) 频率不同;振幅相同;初相位不同 .

15 - 13 有两个钟摆,都由一个圆盘系于一轻杆构成,除了圆盘与杆之间的连接方法不同外,其他都一样,其中一摆,杆固定在圆盘上,而另一个摆则用滚珠轴承使圆盘可绕杆端自由转动,问两个摆哪个周期长些?为什么?

答:钟摆由圆盘和轻杆构成.当杆与圆盘固定连接时,钟摆相当于复摆,绕杆端的轴转动;当杆与圆盘用滚珠轴承连接时,圆盘相对杆端的轴作平动,圆盘的质量集中在与杆的连接点上,钟摆相当于单摆.

单摆的周期为  $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$  其中,  $l$  为轻杆的长度.

复摆的周期为  $T = 2\sqrt{\frac{J}{mgh}}$  其中,  $J$  为复摆对转轴的转动惯量;  $m$  为复摆的质量,也即圆盘的质量;  $h$  为复摆的质心到转轴的距离,不计杆的质量时,  $h = l$ .

设圆盘半径为  $R$ ,质量为  $m$ .绕杆端轴的转动惯量  $J$  可利用平行轴定理求出:

$$J = \frac{1}{2} mR^2 + ml^2 .$$

所以  $T = 2\sqrt{\frac{J}{mgh}} = 2\sqrt{\frac{(R^2/2l) + l}{g}} > T$ .

杆与圆盘固定连接时,钟摆(复摆)的周期长些.

若考虑杆有一定的质量,则两种钟摆都是复摆.不同的连接方式,对于杆端轴的转动惯量  $J$  不同,因而具有不同的振动周期.

设杆长为  $l$ ,质量为  $m_1$ ,圆盘半径为  $R$ ,质量为  $m_2$ .



杆固定在圆盘上时,绕杆端轴的转动惯量为

$$J_1 = \frac{1}{3} m_1 l^2 + \left[ \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 l^2 \right] .$$

圆盘用滚珠轴承与杆连接时,圆盘相对摆的转轴作平动,并不转动.此时,绕杆端轴的转动惯量为

$$J_2 = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 l^2 < J_1 .$$

复摆的周期为  $T = 2 \sqrt{\frac{J}{(m_1 + m_2) gh}}$ , 两种复摆的  $h$  相同, 而  $J_1 > J_2$  所以, 考虑有质量的杆时, 仍然是与圆盘固定连接的钟摆的周期长些.

15 - 14 在电梯中并排悬挂一弹簧振子和一单摆, 在它们的振动过程中, 电梯突然从静止开始自由下落. 试分别讨论两个振动系统的运动情况.

答: 对于弹簧振子, 电梯突然自由下落时, 弹簧振子同时自由下落. 相对电梯, 悬挂的弹簧振子处在非惯性系中, 振子除受弹性力外, 还受到重力和惯性力, 但后两者的合力为零. 因此, 振子将以弹簧的原长为平衡位置作简谐振动, 频率不变.

对于单摆, 电梯突然下落时, 摆线对摆球的拉力为零, 摆球只受重力, 不能作简谐振动. 若突然下落时摆球正处于最高点(速度为零), 将相对电梯静止并随之一起自由下落; 若摆球正以某速度  $v$  运动, 则应作以  $v$  为初速的斜抛运动.

15 - 15 弹簧振子的无阻尼自由振动是简谐振动, 同一弹簧振子在简谐策动力持续作用下的稳态受迫振动也是简谐振动, 这两种简谐振动有什么不同?

答: 无阻尼自由振动(简谐振动)的振幅由  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  可

见, 决定于系统的初始状态  $x_0$  和  $v_0$ , 振动周期由  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  可知, 决定于系统本身的固有性质.  $\omega_0$  是简谐振动系统的固有角频率.

弹簧振子在简谐策动力持续作用下的稳态受迫振动的振幅由

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

可见, 不再由系统的初始状态  $x_0$  和  $v_0$  决定, 而依赖于振子的性质、阻尼的大小和简谐策动力的特征.

稳态受迫振动的振动频率也不决定于系统本身的固有性质, 而由简谐策动力的频率

$$\omega = \frac{1}{T} = 2\pi\nu$$

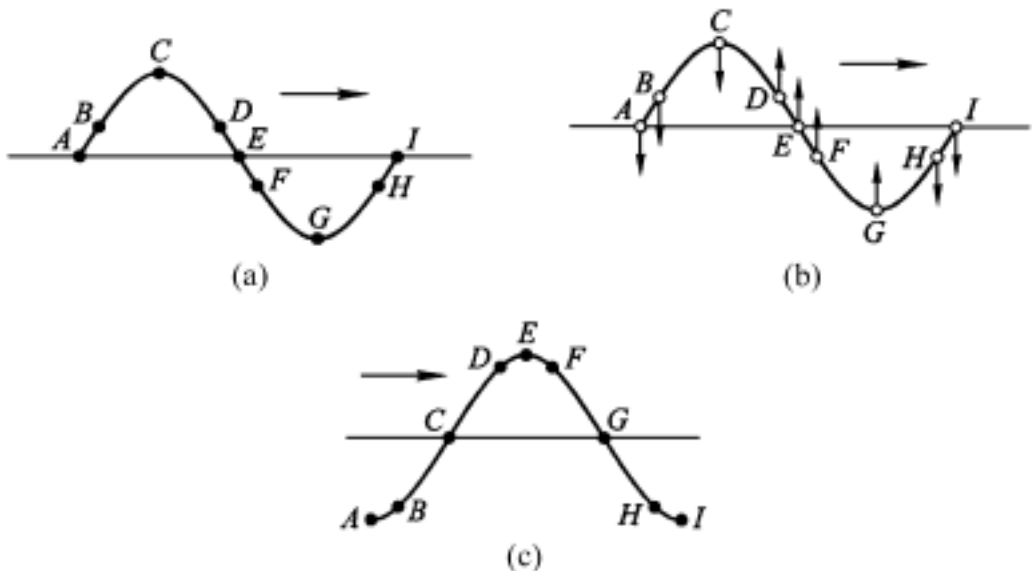
决定.

## 第十六章 机械波和电磁波

16 - 1 设某一时刻的横波波形曲线如题 16 - 1 图(a)所示, 水平箭头表示该波的传播方向, 试分别用矢号表明图中 A、B、C、D、E、F、G、H、I 等质点在该时刻的运动方向, 并画出经过  $T/4$  后的波形曲线 .

答: 波形曲线表示的是某一时刻波线上所有质点偏离平衡位置的振动位移的分布图 将波形曲线沿波的传播方向平移, 就是下一时刻波线上质点偏离平衡位置的位移分布, 据此可确定各质点的运动方向, 如题 16 - 1 图(b)所示 .

简谐波的波形在空间平移一个波长时, 各质点完成一次完整振动 因此, 画出经过  $T/4$  后的波形曲线, 只需将波形曲线沿波的传播方向平移  $\lambda/4$  即可, 见题 16 - 1 图(c) .



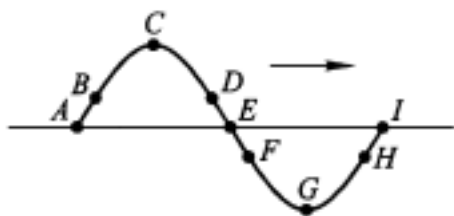
题 16 - 1 图

16 - 2 试判断下列几种关于波长的说法是否正确:

- (1) 在波传播方向上相邻两个位移相同点的距离 .
- (2) 在波传播方向上相邻两个运动速度相同点的距离 .
- (3) 在波传播方向上相邻两个振动相位相同点的距离 .

答: 波线上相邻两个振动状态(相位)相同点的间距为一个波长, 如题 16 - 2 图中的  $A$  和  $I$  点 .

(1) 错 . 如题 16 - 2 图中的  $B$  和  $D$  点是波线上相邻两个位移相同的质点, 它们的振动相位并不相同 . 在旋转矢量图上, 对应  $B$  和  $D$  点振动状态的两个旋转矢量, 在位移轴上的投影点相同, 但对应振动速度的方向不同 . 所以这两个质点的振动相位不同, 它们的空间间隔不是一个波长 .



题 16 - 2 图

(2) 错 . 理由同(1) . 如题 16 - 2 图中的  $B$  和  $H$  点是波线上相邻两个运动速度相同的质点, 在旋转矢量图上, 它们对应的两个旋转矢量, 处于两个不同的象限, 相应的位移是不同的 . 因此这两个质点的振动相位不同, 它们的空间间隔不是一个波长 .

(3) 对 . 如题 16 - 2 图中的  $A$  和  $I$  点是波线上相邻两个振动相位完全相同的质点 . 不但它们的位移相同, 运动速度也相同 . 在旋转矢量图上, 表示两个质点振动状态的振幅矢量处于同一方位, 相位差为  $2\pi$  . 因此两个质点的空间间隔为一个波长 .

16 - 3 根据波长、频率、波速的关系式  $u = \lambda f$ , 有人认为频率高的波传播速度大, 你认为对否?

答: 否 . 弹性波在连续介质中的传播速度取决于介质的性质和状态, 如固体、液体的形变模量和密度以及气体的体变模量和气体的状态等 . 在给定的非色散介质中, 弹性波相位的传播速度(即波速)是一定的, 与频率无关 . 由  $u = \lambda f$  可知, 波的频率越高在介

质中的波长越短 .

介质对于电磁波的传播不是必要的 . 介质中电磁波相位的传播速度与介质的介电常量和磁导率  $\mu$  有关 . 当  $\epsilon$  和  $\mu$  为常数 (非色散介质) 时, 相速度  $u$  与频率无关 . 真空中电磁波的相位传播速度即为光速  $c$  . 比值  $\frac{c}{u} = n$ ,  $n$  为介质的折射率 .

16 - 4 当波从一种介质透入另一介质时, 波长、频率、波速、振幅各量中, 哪些量会改变? 哪些量不会改变?

答: 参照上题 . 简谐波在连续介质中传播时, 介质中各质点振动的频率是由波源决定的 . 当简谐波从一种介质透射到另一种弹性介质时, 波的频率不会改变 . 两种介质的性质不同, 简谐波在其中传播的相速不同, 由  $u = \frac{c}{n}$  可知, 在两种介质中的波长也是不同的 . 当波从一种介质透射到另一介质时, 在它们的界面, 伴随有波 (能量) 的反射 . 频率一定时, 波的能量正比于振幅的平方 . 所以透射波的振幅小于入射波的振幅 .

16 - 5 为什么说  $y = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  是平面简谐波的表式? 波动表式  $y = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  中,  $\frac{x}{u}$  表示什么?  $\phi_0$  表示什么? 如果把上式改写成  $y = A \cos \left[ t - \frac{x}{u} + \phi_0 \right]$ , 则  $\frac{x}{u}$  表示什么? 式中  $x = 0$  的点是否一定是波源?  $t = 0$  表示什么时刻?

答: 波的传播过程也是能量的传递过程 . 频率一定时, 波的能量正比于振幅的平方 . 简谐波的表达式  $y = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  中的振幅  $A$  是常数 . 表明  $t$  时刻距坐标原点为  $x$  处波面上各质点的振动能量与  $t = 0$  时刻坐标原点处波面上各质点的振动能量是

相同的. 根据能量守恒定律可知, 这两个波面只能是平面, 并且波在其中传播的介质不吸收波的能量.

平面简谐波的表达式中,  $\frac{x}{u} = t$  表示坐标原点处质点的振动相位以  $u$  传播到  $x$  处所需要的时间,  $\phi_0$  则为坐标原点处质点的振动初相位.

$-\frac{x}{u}$  表示  $x$  处质点相对于坐标原点  $x=0$  处质点振动的相位之差, 前面的“-”号则表示  $t$  时刻  $x$  处质点的振动相位是落后于坐标原点处质点振动的相位的.

在平面简谐波的表达式  $y = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$  中,  $x=0$  的点不一定是波源. 若  $x=0$  处是波源, 则应注意: 在  $x$  轴上波源两侧波的传播方向相反,  $x$  的不同定域范围对应不同的简谐波表达式; 若为简谐点波源, 则波的表达式还应以球面简谐波表示.

平面简谐波表达式中,  $t=0$  是对  $x$  轴上所有质点的振动开始计时的时刻. 而  $t=0$  时刻的平面简谐波表达式则给出了开始计时时刻,  $x$  轴上所有质点偏离平衡位置的位移的分布图像, 也即波动曲线.

16 - 6 波的传播是否介质质点“随波逐流”? “长江后浪推前浪”这句话从物理上说, 是否有根据?

答: 波的传播是介质中质点振动状态(相位)的传播过程, 质点本身并不随波移动, 仅在各自的平衡位置附近振动. 因此介质中的质点“随波逐流”的说法是错误的. 而“长江后浪推前浪”这句话, 从波传播能量和波的形成来看虽颇为形象, 但本质上不具备“相位的传播”和“质点本身并不随波移动”的特征, 因此用这句话来描述波动也是不确切的.

16 - 7 利用  $\lambda$ 、 $\omega$ 、 $T$ 、 $\nu$ 、 $u$ 、 $k$  间的关系, 变换波的各种表式:

$$y = A \cos 2 \left[ \frac{t}{T} - \frac{x}{u} \right]$$

$$y = A \cos ( t - kx )$$

$$y = A \cos k( x - ut )$$

答：设坐标原点处质点振动的初相位  $\phi_0 = 0$ ，沿  $x$  轴正方向传播的平面简谐波的表达式可写为

$$y = A \cos \left[ t - \frac{x}{u} \right]. \quad (*)$$

利用关系式： $\omega = 2\pi/T$ ， $k = 2\pi/\lambda$ ， $u = \lambda/T$

可得(\*)式为  $y = A \cos 2 \left[ \frac{t}{T} - \frac{x}{u} \right]$ .

利用关系式  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， $\omega = 2\pi/T$ ， $uT = \lambda$

可得(\*)式为  $y = A \cos ( t - kx )$ .

利用  $\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = u$ ， $\cos(-) = \cos$

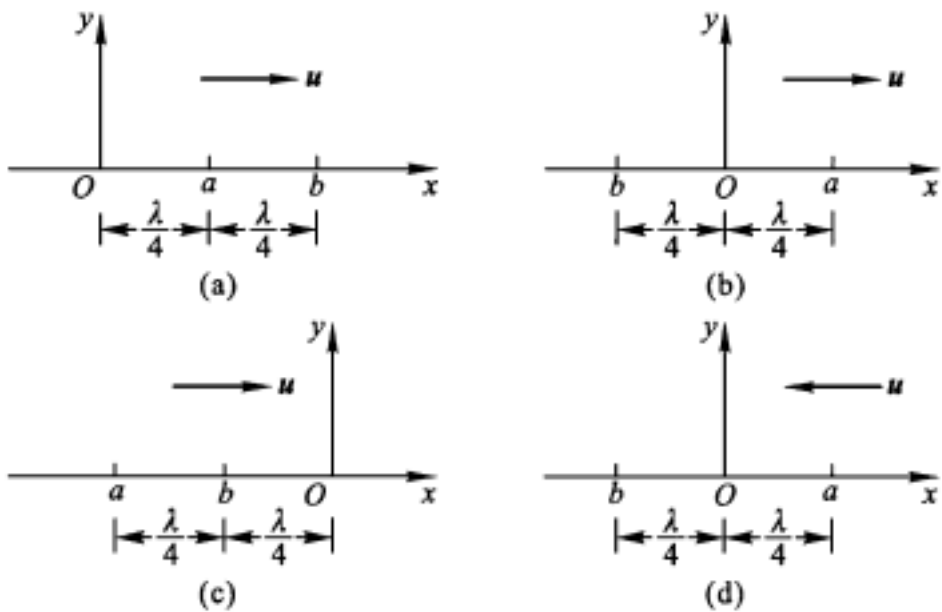
可得(\*)式为  $y = A \cos k( x - ut )$ .

16 - 8 若一平面简谐波在均匀介质中以速度  $u$  传播，已知  $a$  点的振动表式为  $y = A \cos \left[ t + \frac{x}{2} \right]$ ，试分别写出在题 16 - 8 图所示的坐标系中的波动表达式以及  $b$  点的振动表式。

答：已知波线上  $a$  点的振动规律和波的传播速度(大小、方向)，求在给定坐标系中的波动表达式，可先根据  $a$  点的振动规律写出坐标原点( $O$ 点)处质点的振动规律(在时间上的超前或落后)，然后依据波的传播方向写出波动表达式。

将  $b$  点的坐标值代入波动表达式，得到的就是  $b$  点的振动表达式。

图(a)  $O$  点的振动超前于  $a$  点  $\frac{T}{4}$ 。



题 16 - 8 图

$O$  点振动表式为

$$y(O, t) = A \cos \left[ \left( t + \frac{T}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right],$$

波动表达式为

$$y(x, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2} \right] = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \right],$$

$b$  点振动表式  $\left[ x_b = -\frac{\lambda}{2} \right]$  为

$$y(x_b, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{-\lambda/2}{u} \right) + \right] = A \cos t.$$

图(b) 波动表达式与图(a)相同 即

$$y(x, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) + \right],$$

$b$  点振动表式  $\left[ x_b = -\frac{\lambda}{4} \right]$  为

$$y(x_b, t) = A \cos \left[ \left( t + \frac{-\lambda/4}{u} \right) + \right] = A \cos \left[ t + \frac{3\pi}{2} \right].$$



图(c)  $O$  点的振动落后于  $a$  点  $\frac{T}{2}$  .

$O$  点振动表式为

$$y(O, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{T}{2} \right) + \frac{T}{2} \right],$$

波动表达式为

$$y(x, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right] = A \cos \left[ \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{T}{2} \right],$$

$b$  点振动表式  $\left[ x_b = -\frac{1}{4} \right]$  为

$$y(x_b, t) = A \cos \left[ \left( t + \frac{1}{4u} \right) - \frac{T}{2} \right] = A \cos t .$$

图(d) 传播方向沿  $x$  轴反方向 . $O$  点的振动落后于  $a$  点  $\frac{T}{4}$  .

$O$  点振动表式为

$$y(O, t) = A \cos \left[ \left( t - \frac{T}{4} \right) + \frac{T}{4} \right],$$

波动表达式为

$$y(x, t) = A \cos \left[ \left( t + \frac{x}{u} \right) - \frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right] = A \cos \left[ t + \frac{x}{u} \right],$$

$b$  点振动表式  $\left[ x_b = -\frac{1}{4} \right]$  为

$$y(x_b, t) = A \cos \left[ t - \frac{1}{4u} \right] = A \cos \left[ t - \frac{T}{4} \right] .$$

16 - 9 (1) 在波的传播过程中, 每个质元的能量随时间而变, 这是否违反能量守恒定律 ?

(2) 在波的传播过程中, 动能密度与势能密度相等的结论, 对非简谐波是否成立 ? 为什么 ?

答: (1) 否 . 波的传播过程是能量的传播过程, 每个质元通过所含大量质点的以相位联系的振动来周期性地接收、放出波的能

量,起传递能量的作用.这不违反能量守恒定律.

(2) 否.对简谐波而言,动能密度正比于单位体积介质内所有质点振动速度的平方,势能密度正比于介质的相对形变量的平方.非简谐波可以看成是若干个频率、振幅不同的简谐波之和,即级数和.它对坐标  $x$  的变化率的平方  $\left[ \frac{y}{x} \right]^2$  以及对时间变化率的平方  $\left[ \frac{y}{t} \right]^2$  都有非线性效应.所以,对非简谐波而言,介质内动能密度与势能密度相等的结论,是不成立的.

16 - 10 (1) 两简谐声波,一在水中,一在空气中,其强度相等,两者声压振幅之比为多少?

(2) 若声压振幅相等,其强度之比为多少?

答: 简谐声波的强度可表示为

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho}.$$

其中  $p_m = \rho u A \omega$  为声压振幅.比值为

$$\frac{I_{\text{空气}}}{I_{\text{水}}} = \frac{(p_{m\text{空气}})^2 (\rho_{\text{水}})}{(p_{m\text{水}})^2 (\rho_{\text{空气}})},$$

式中  $\frac{(\rho_{\text{水}})}{(\rho_{\text{空气}})} = \frac{1 \times 10^3 \times 1430}{1.293 \times 331} = 3.34 \times 10^3$ .

(1) 两简谐声波强度相等时,声压振幅之比为

$$\frac{p_{m\text{空气}}}{p_{m\text{水}}} = \sqrt{\frac{(\rho_{\text{空气}})}{(\rho_{\text{水}})}} = 1.73 \times 10^{-2} \text{ n l}.$$

(2) 两简谐声波声压振幅相等时,其强度之比为

$$\frac{I_{\text{空气}}}{I_{\text{水}}} = \frac{(\rho_{\text{水}})}{(\rho_{\text{空气}})} = 3.34 \times 10^3 \text{ m l}.$$

16 - 11 两简谐声波的声强级差 1 dB,问:

(1) 它们的强度之比如何?

(2) 声压幅之比如何？

答：(1) 简谐声波的声强级为  $I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$  .

由 
$$I_L = 1 = 10 \left[ \lg \frac{I}{I_0} - \lg \frac{I_0}{I_0} \right],$$

可得 
$$\frac{I}{I_0} = 10^{0.1} = 1.26 .$$

(2) 设两简谐声波在同种介质中传播，声强可表示为

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho u} .$$

由 
$$I_L = 1 = 10 \left[ \lg \frac{I}{I_0} - \lg \frac{I_0}{I_0} \right] = 20 \lg \frac{p_m}{p_m}$$

可得 
$$\frac{p_m}{p_m} = 10^{0.05} = 1.12 .$$

16 - 12 有两列简谐波在同一直线上，向相同方向传播，它们的波速为  $u_1$  和  $u_2$ ，频率为  $\nu_1$  和  $\nu_2$ ，振幅为  $A_1$  和  $A_2$ ，在原点  $x=0$  处的振动初相位为  $\phi_{10}$  和  $\phi_{20}$ ，写出下列几种情况下合成波的表式，并说明它们的特点。

(1)  $A_1 = A_2$ ，其他各量相同；

(2)  $\nu_1 = \nu_2$ ，其他各量相同；

(3)  $\phi_{10} = \phi_{20}$ ，其他各量相同；

(4)  $u_1 = -u_2$ ，其他各量相同。

答：设两列向  $x$  轴正方向传播的简谐波为

$$y_1 = A_1 \cos \left[ 2\pi \nu_1 \left( t - \frac{x}{u_1} \right) + \phi_{10} \right],$$

$$y_2 = A_2 \cos \left[ 2\pi \nu_2 \left( t - \frac{x}{u_2} \right) + \phi_{20} \right]$$

它们的合成波满足： $y = y_1 + y_2$  .

(1) 为两列同振动方向、同频率、任一时刻都同相位、不同振

幅的相干波合成 .

$$y = y_1 + y_2 = (A_1 + A_2) \cos \left[ 2 \pi \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right]$$

仍为简谐波,振幅为分振幅之和 .

(2) 为两列同振动方向、同初相位、同振幅、不同频率的波的合成 .

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= 2A \cos \left[ \left( \omega_2 - \omega_1 \right) t - \left( \frac{2\pi}{u_2} - \frac{2\pi}{u_1} \right) x \right] \cdot \\ &\quad \cos \left\{ \left[ \left( \omega_2 + \omega_1 \right) t - \left( \frac{2\pi}{u_2} + \frac{2\pi}{u_1} \right) x \right] + \phi \right\} \\ &= 2A \cos \left[ \left( \omega_2 - \omega_1 \right) t - Ax \right] \cos \left[ \left( \omega_2 + \omega_1 \right) t - Bx + \phi \right] . \end{aligned}$$

式中,  $A = \left[ \frac{2\pi}{u_2} - \frac{2\pi}{u_1} \right]$ ,  $B = \left[ \frac{2\pi}{u_2} + \frac{2\pi}{u_1} \right]$ , 均为常数 .

当两频率较为接近时,在波线上任一处质点的振动都是拍振动 .

(3) 为两列同振动方向、同振幅、同频率、不同初相位的相干波的合成 .

$$y = y_1 + y_2 = A \cos \left[ 2 \pi \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right] .$$

式中,  $A = 2A \left| \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right|$ ,

$$= \arctan \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin(\phi_2 - \phi_1)}{\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_2 - \phi_1)}, \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} .$$

当  $\phi_1 - \phi_2 = \pm 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  时,合成波的振幅为  $2A$ , 同(1)的情况 .

当  $\phi_1 - \phi_2 = \pm (2k+1)\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  时,同一直线上的两简谐波合成后使所有质点静止 .

(4) 为两列同振动方向、同振幅、同频率、同初相位但传播方向相反的相干波的合成 形成驻波:

$$y = y_1 + y_2 = 2 A \cos 2\pi \frac{x}{u} \cos \left[ 2\pi \left( t + \frac{x}{u} \right) \right].$$

16 - 13 两列简谐波叠加时,讨论下列各种情况:

(1) 若两波的振动方向相同,初相位也相同,但频率不同,能不能发生干涉?

(2) 若两波的频率相同,初相位也相同,但振动方向不同,能不能发生干涉?

(3) 若两波的频率相同,振动方向也相同,但相位差不能保持恒定,能不能发生干涉?

(4) 若两波的频率相同、振动方向相同、初相位也相同,但振幅不同,能不能发生干涉?

答:参照上题.两列简谐波在空间相遇时,都满足叠加原理,是否能发生干涉现象,则需根据相干条件判断.

(1) 两波的振动方向相同,初相位也相同,但频率不同时,介质中各质点的合振动仍为两个分振动的合成,两波仍满足叠加原理,但叠加后的合成波在空间不能形成稳定的加强和减弱分布,因此不会出现波的干涉现象.参照上题(2).

(2) 两波的频率相同,初相位也相同,但振动方向不同时,若将其中一个波的振动按另一波的振动方向可分解为平行和垂直的两个分量,则两个平行振动的叠加可产生波的干涉现象,但干涉条纹的可见度因存在垂直的振动分量而下降.若两波的振动方向互相垂直,则不产生干涉.

(3) 两波的频率相同,振动方向也相同,但两波在空间相遇处的振动相位差不能保持恒定时,对每个瞬时在相遇区域内各质点振动的叠加虽有确定的加强和减弱的分布,但在一段可观察的时间间隔内,因各质点的振动相位差时刻在变化,致使在两波相遇区域内各质点振动加强和减弱的分布也时刻在变化,得不到稳定的分布,因此就观察不到稳定的加强和减弱的干涉现象.单一频率的

自然光源较难实现干涉,原因就在于此。

(4) 两波的频率相同、振动方向相同、初相位也相同,但振幅不同时,可以发生干涉现象。但因干涉减弱处的合振动不为零,将影响干涉条纹的可见度。

16 - 14 (1) 为什么有人认为驻波不是波?

(2) 驻波中,两波节间各个质点均作同相位的简谐振动,那么,每个振动质点的能量是否保持不变?

答:(1) 驻波可被看作是特殊形态的合成波,是由两列沿相反方向传播的相干波因叠加而形成的干涉现象。驻波与行波有共同的特征:各质点振动位移的分布形成波形曲线,波形随时间变化,具有时空周期性。驻波相对于行波的特殊之处在于:驻波既不传播振动状态,也不传播能量,即驻而不行。所以有人认为驻波不是波,而是质量的一种集体振动状态。

(2) 驻波中,两波节间各个质点以不同的恒定振幅作同相位的简谐振动,一波节两侧各个质点作简谐振动的相位相反。就单个质点而言振动能量是守恒的,但各质元在振动过程中的能量不断变化,如:波节处质元的动能始终为零,其势能则随着两侧质元振动引起的相对形变的变化而不断变化;波腹处质元的动能不断变化,其势能则始终为零。各质元间不断交换能量,但总能量始终停留在驻波所在的范围内,并不传播出去。

16 - 15 我国古代有一种称为“鱼洗”的铜面盆,如题 16 - 15 图所示。盆底雕刻着两条鱼。在盆中盛水,用手轻轻摩擦盆边两环,就能在两条鱼的嘴上方激起很高的水柱。试从物理上解释这一现象。

答:鱼洗,也称汉洗。对形状一定的鱼洗,沿盆壁在周环和盆深方向上存在着特定的数个振动模式。用湿手持续摩擦盛水鱼洗的两环时,可使某一模式得到激发,形成驻波。鱼嘴上方正是盆壁



题 16 - 15 图

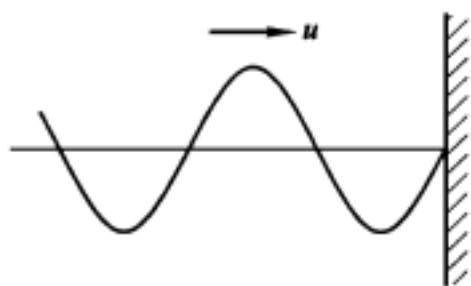
驻波的波腹处, 振幅最大. 盆中之水受激振动从而跳出水面激起水柱.

从鱼洗的精巧构思、制作工艺及其所表现出的奇特现象, 可见我国古人对驻波现象及其规律的透彻理解和驾驭的能力.

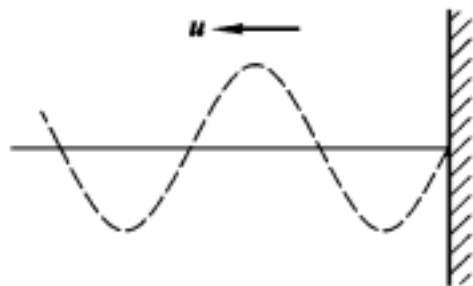
有兴趣的读者可参看严燕来等主编的《大学物理拓展与应用》(北京: 高等教育出版社, 2002) 一书.

16 - 16 一平面简谐波向右传播, 在波密介质面上发生完全反射, 在某一时刻入射波的波形如题 16 - 16(a) 图所示. 试画出同一时刻反射波的波形曲线, 再画出经  $T/4$  时间后的入射波和反射波的波形曲线 ( $T$  为波的周期).

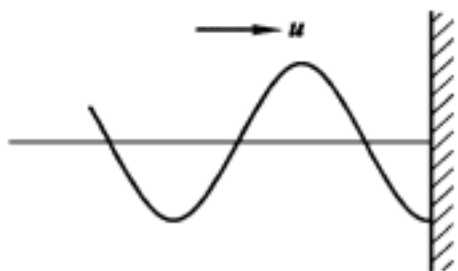
答: 平面简谐波由波疏介质传向波密介质, 并发生完全反射时, 在波密介质中没有透射波, 可认为入射波的能量没有损失地被反射, 因此反射波的振幅不变. 在反射面上, 入射波和反射波引起振动的合振幅始终为零, 表明在反射点的入射波和反射波引起振动的相位始终相反, 即存在“半波损失”. 同一时刻反射波的波形曲线见题 16 - 6(b) 图. 经  $T/4$  时间后的入射波和反射波的波形曲线分别见题 16 - 6(c) 图和题 16 - 6(d) 图.



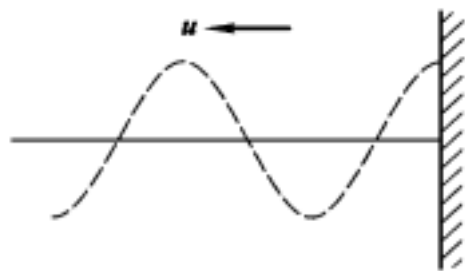
(a)



(b)



(c)



(d)

题 16 - 16 图



# 第十七章 波动光学

## 一、光的干涉

17 - 1 为什么两个独立的同频率的普通光源发出的光波叠加时不能得到光的干涉图样？

答：普通光源发出光波的特点是：包含有大量断断续续、有限长的光波列。两个独立光源发出的光波之间不存在确定的、稳定的相位差。光振动方向、光振动频率、光振动的初相位是完全随机的。普通光源总有一定的线度，包含了大量独立的发光点。当两个这样的普通光源发出的光波在空间相遇而叠加时，即使它们的频率相同，有同方向的振动分量，但由于在叠加点光振动相位差的完全随机性，不能形成稳定的光振动加强和减弱现象，因而就不能得到光的干涉图样。

17 - 2 试讨论两个相干点光源  $S_1$  和  $S_2$  在如下的观察屏上产生的干涉条纹：

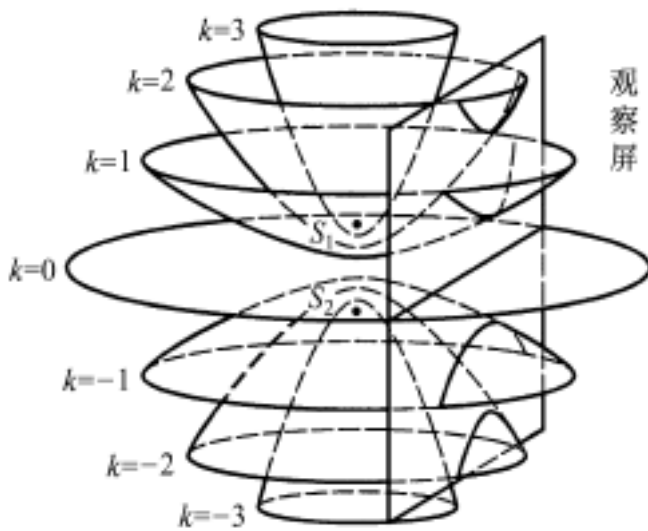
- (1) 屏的位置垂直于  $S_1$  和  $S_2$  的连线。
- (2) 屏的位置垂直于  $S_1$  和  $S_2$  连线的中垂线。

答：设相干点光源  $S_1$  和  $S_2$  以及观察屏都处在同一介质中，并且  $S_1$  和  $S_2$  的初相位相同。

(1) 由相干点光源发出的光波，在垂直于  $S_1$  和  $S_2$  的连线的观察屏上各点处叠加时，两光振动的相位差均为零，即光程差为零。因此，整个观察屏是光振动加强的平面，不出现明暗相间的干涉

条纹 .

(2) 由相干点光源发出的光波,在垂直于  $S_1$  和  $S_2$  连线中垂线的观察屏上各点处叠加时,两光振动的相位差随叠加点在屏上位置不同而不同.两个同相相干点光源发出的光波,在空间各点处的光程差为常数的点的轨迹,是以  $S_1$  和  $S_2$  的连线为轴线,以  $S_1$  和  $S_2$  为焦点的一组双叶旋转双曲面.该曲面与观察屏的交线,就是屏上的干涉图样如题 17 - 2 图所示.在近轴和远场近似条件下,观察屏上的干涉条纹呈现等间隔分布的特征 .



题 17 - 2 图

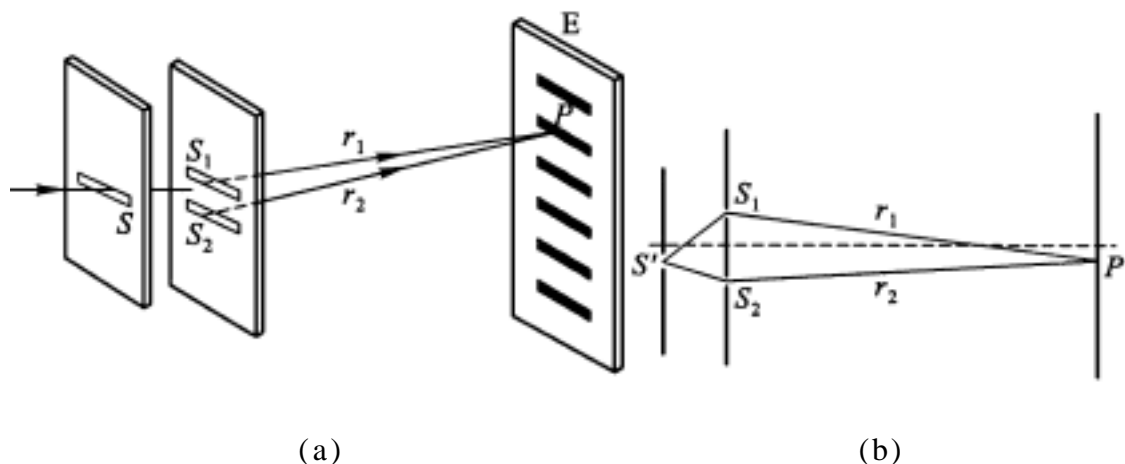
17 - 3 在题 17 - 3 图示的杨氏双缝实验中,试描述在下列情况下干涉条纹如何变化:

- (1) 当两缝的间距增大时;
- (2) 当双缝的宽度增大时;
- (3) 当线光源  $S$  平行于双缝移动时;
- (4) 当线光源  $S$  向双缝屏移近时;
- (5) 当线光源  $S$  逐渐增宽时 .

答: 在图 17 - 3 (a) 所示的杨氏双缝实验装置中, 设  $S$  是单色

线光源,  $S_1$  和  $S_2$  是同相的相干缝光源 .

(1) 当  $S_1$  和  $S_2$  (单色相干线光源) 的间距  $d$  增大时, 屏上相邻两明(暗)条纹的间距  $x = \frac{D}{d}$  变小 .



题 17 - 3 图

(2) 当双缝的宽度  $a$  增大时, 光场内的光能将增大, 干涉条纹的亮度增加, 但单缝衍射中央明区的范围将变小, 该范围内的条纹数会减少.  $D \ll d$ , 且  $d \gg a$  为整数时, 屏上本该出现的某些级次的干涉明条纹, 会因衍射光强在该处为极小而消失, 出现“缺级”现象 .

(3) 单色线光源  $S$  平行于双缝移动至某一处  $S'$  时(如题 17 - 3 图(b)所示), 对屏上确定点  $P$  而言,  $S$  经由  $S_1$  和  $S_2$  到  $P$  点的光程差  $\Delta = (S'S_1 + r_1) - (S'S_2 + r_2)$  也相应地发生变化, 即在  $S$  移动的过程中, 屏上的干涉条纹将会作相应的平移, 光源向下(或向上)移动时, 条纹向反方向平移. 当  $\Delta = m\lambda$ ,  $m$  为单色线光源  $S$  的可相干最大光程差(波列长度)时, 屏上  $P$  点及其以后各点处因不存在恒定的光振动的相位差, 都不会出现干涉现象 .

(4) 当线光源  $S$  向双缝屏移近时, 对屏上干涉条纹的位置分布并无影响, 但明条纹的光强则因通过  $S_1$  和  $S_2$  的光强的变化而发生相应的变化 .

(5) 当线光源  $S$  有一定的宽度, 实际是带光源时, 可将其视作由无数独立的、互不相干的线光源并列而成. 考虑带光源是单色的, 参照本题(3)的分析可知, 屏上由各线光源形成的干涉条纹分布相同, 但位置上并不重合. 屏上某  $P$  点, 若对带光源中心  $S$  的光程差为  $\delta$ , 是第  $k$  级亮条纹中心; 而对带光源上某  $S_1$  的光程差为  $\delta + r_1$ , 是第  $k$  级暗条纹中心, 则  $S$  和  $S_1$  对  $P$  点的光程差之差应为

$$\begin{aligned} &= (\delta + r_1) - \delta = [(S S_1 + r_1) - (S S_2 + r_2)] - [(S S_1 + r_1) - (S S_2 + r_2)] \\ &= [S S_1 - S S_2] - [S S_1 - S S_2] \\ &= S S_1 - S S_2 = \frac{D^2}{2} \end{aligned}$$

此时, 屏上各线光源干涉光强的非相干叠加导致条纹消失, 或者说干涉条纹的可见度为零.  $S$  到双缝的距离一定时,  $2SS$  是单色带光源能够产生干涉现象的最大宽度.

当带光源离双缝屏很远时, 这种影响并不明显, 但当带光源向双缝屏移近时, 这种影响将突现出来, 使屏上干涉条纹的可见度迅速降低, 直至消失.

17 - 4 在杨氏双缝实验中, 如有一条狭缝稍稍加宽一些, 屏幕上的干涉条纹有什么变化? 如把其中一条狭缝遮住, 将发生什么现象?

答: 将杨氏双缝的一条狭缝稍稍加宽时, 通过两缝的光强是不同的, 两缝各自的单缝衍射中央明区的宽度也不相同. 参见上题分析, 在屏上叠加点, 两光振动的振幅不同. 干涉相消处(暗条纹)的光强不等于零, 干涉条纹的可见度下降.

若把其中一条狭缝遮住, 则成为单缝衍射装置, 屏上将出现单缝衍射的光强分布.

17 - 5 为什么刚吹起的肥皂泡(很小时)看不到有什么彩色? 当肥皂泡吹大到一定程度时, 会看到有彩色, 而且这些彩色随着肥

皂泡的增大而改变.试解释此现象,当肥皂泡大到将要破裂时,将呈现什么颜色?为什么?

答:吹起的肥皂泡作为空气中的薄膜,当它的厚度  $e$  使其上下表面的反射光满足相干条件时,就形成干涉现象.在日光照射下,对一定厚度的薄膜,并非所有波长的可见光都能被加强.因此,从吹起的肥皂泡表面见到的是被反射的不同波长的、不同干涉强度的可见光成分的非相干叠加所形成的彩色.这种彩色随着膜厚的变化(肥皂泡被吹大)、观察角度(膜法线与反射光线夹角)的变化而改变.至于从刚吹起的肥皂泡表面看不到这种现象,那是由于膜的厚度太大,超过了日光的相干长度.

当肥皂泡大到将要破裂时,膜的厚度趋于零,对于各种波长的光,反射光都满足干涉相消条件.因此从反射方向看,什么颜色都不呈现,只能是黑色的.

17 - 6 为什么窗玻璃在日光照射下我们观察不到干涉条纹?

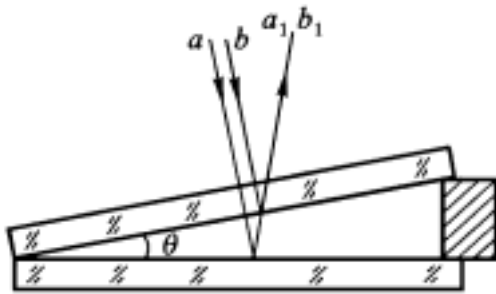
答:详见上题分析.因窗玻璃太厚,日光在它上下表面反射或透射光的光程差远大于日光的可相干长度,所以观察不到干涉现象.

17 - 7 在如题 17 - 7 图所示的劈尖干涉实验装置中,如果把上面的一块玻璃向上平移,干涉条纹将怎样变化?如果向右平移,干涉条纹又怎样变化?如果将它绕接触线转动,使劈尖角增大,干涉条纹又将怎样变化?

答:利用劈尖干涉实验装置可观察等厚干涉条纹,即同一条干涉条纹所对应的薄膜厚度的光程差相同.

把上面的一块玻璃向上平移时,每一条纹原来所对应的薄膜的厚度都向左平移,因而所有的干涉条纹都保持间隔不变地向左平移,原棱边处则相继呈现明暗交替变化.

如果保持空气劈的夹角 不变,把上面的一块玻璃向右平

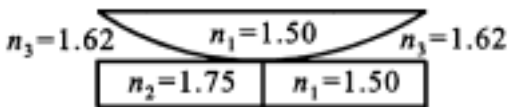


题 17 - 7 图

移,则棱边仍为暗条纹,并且所有的干涉条纹都保持间隔不变地向右平移。

增大劈尖角时,保持接触的棱边仍为暗条纹,但相邻两明(暗)条纹的间隔变小。

17 - 8 在牛顿环实验装置中,如果平玻璃由冕牌玻璃 ( $n_1 = 1.50$ ) 和火石玻璃 ( $n_2 = 1.75$ ) 组成.透镜用冕牌玻璃制成,而透镜与平玻璃间充满二硫化碳 ( $n_3 = 1.62$ ),如题 17 - 8 图 (a) 所示.试说明在单色光垂直照射下反射光的干涉图样是怎样的,并大致将其画出来。



(a)

(b)

题 17 - 8 图

答: 牛顿环装置的透镜与平玻璃间的夹层形成气体劈尖,从

该劈尖的上下表面反射或透射的光是相干光,可形成明暗交替的、内疏外密的呈同心圆分布的等厚干涉条纹.某一条纹的明暗情况既与该条纹所对应的气体劈的厚度有关,也与光波在气体劈两表面反射或透射时,是否发生“半波损失”有关.

单色光垂直照射在如题 17 - 8 图(a)所示牛顿环实验装置时,装置两侧二硫化碳薄膜所处的界面环境并不相同,左侧上下表面的反射光因在反射时均有“相位突变”,而其光程差不再含“半波损失”项,右侧上表面的反射光在反射时有“相位突变”,而下表面的反射光在反射时没有“相位突变”,因此其光程差含有“半波损失”项.所以,干涉图样的特点除明暗交替、内疏外密、同心圆分布外,左右两侧呈互补分布,即中心接触斑点呈左明右暗,由此外推,每一同心圆环状条纹都由明暗各半的半圆环构成.反射光干涉图样的定性分布见图 17 - 8 图(b).

17 - 9 牛顿环和迈克耳孙干涉仪实验中的圆条纹均是从中心向外由疏到密的明暗相间的同心圆,试说明这两种干涉条纹不同之处,若增加空气薄膜的厚度,这两种条纹将如何变化?为什么?

答:在牛顿环和迈克耳孙干涉仪实验中都可观察到呈现明暗交替、内疏外密、同心圆分布等特点的干涉条纹.但它们分属不同的干涉类型,不同之处在于:牛顿环为等厚干涉,实验装置中使用单色平行光垂直入射,观察反射光或透射光;干涉条纹的级次为内低外高;增加空气薄膜的厚度时,所有的干涉条纹均向内收缩.而呈同心圆分布的迈克耳孙干涉条纹为等倾干涉,实验装置中使用单色面光源,观察反射光;干涉条纹的级次为内高外低;增加空气薄膜的厚度时,所有的干涉条纹均向外扩展.

17 - 10 在加工透镜时,经常利用牛顿环快速检测其表面曲率是否合格.将标准件(玻璃验规)G 覆盖在待测工件 L 之上,如图所示.如果光圈(牛顿环的俗称)太多,工件不合格,需要进一步

研磨,究竟磨边缘还是磨中央,有经验的工人师傅只要将验规轻轻下压,观察光圈的变化,试问他是怎样判断的。

答:若待测工件 L 合格,则 L 与 G 之间将无间隙,也就没有光圈出现;若 L 的曲率半径  $R$  太小,则 L 与 G 的接触点不会因轻压而变化,始终为暗斑,这时需要磨中央;若 L 的曲率半径  $R$  太大,则 L 与 G 之间除边缘保持接触外,中间部分形成空气膜层,轻压 G 后,不但中心斑点的明暗会变化,而且所有光圈将向外扩展,但边缘始终为暗条纹,这时需要磨边缘。

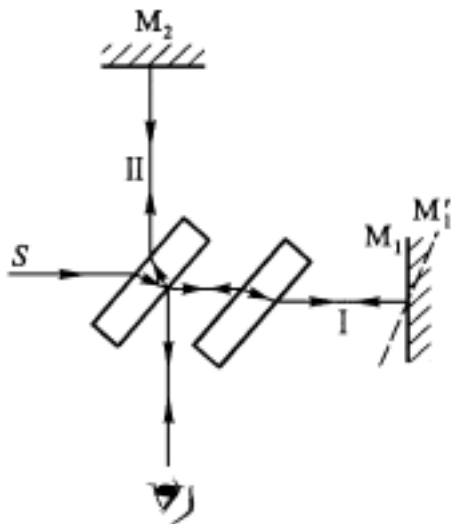
如题 17 - 10 图所示情况,上左图中 L 的曲率半径  $R$  太小,光圈中央为暗斑,光圈很多,且下压验规时,中央暗斑无变化;上右图中的 L 经研磨,曲率半径  $R$  已稍有增大,但仍未符合要求,其光圈中央仍为暗斑,圈数有所减少。所以该透镜需继续研磨。

题 17 - 10 图

17 - 11 用迈克耳孙干涉仪观测等厚条纹时,若使其中一平面镜  $M_2$  固定,而另一平面镜  $M_1$  绕垂直于纸面的轴线转到  $M_1'$  的位置,如题 17 - 11 图所示,问在转动过程中将看到什么现象?如果将平面镜  $M_1$  换成半径为  $R$  的球面镜(凸面镜或凹面镜),球心恰在光线



上,球面镜的像的顶点与  $M_2$  接触,此时将观察到什么现象?



题 17 - 11 图

答: 参照 17 - 7 题 .当  $M_1$  处在与  $M_2$  垂直的位置时,其像与  $M_2$  平行,相干光来自空气膜的两平行表面 .光程差满足加强条件时,视场为均匀亮度,反之则为全暗;当  $M_1$  转到  $M_1'$  位置过程中,空气劈的夹角 不断增大,除  $M_1$  和  $M_1'$  的交线处保持为亮条纹外,两侧对称分布的明暗相间的平行条纹将向交线处收缩,相邻条纹间隔变小 .

将  $M_1$  换成半径为  $R$  的球面镜,而球面镜的像的顶点与  $M_2$  接触时,该迈克耳孙干涉仪演变为牛顿环实验装置,将观察到同心圆分布的牛顿环 .

## 二、光的衍射

17 - 12 (1) 为什么无线电波能绕过建筑物,而光波却不能?

(2) 为什么隔着山可以听到中波段的电台广播,而电视广播却很容易被高大建筑物挡住?

答: 波在均匀介质中沿直线传播,在传播过程中受障碍物限制而偏离直线传播的现象称为衍射(或称绕射) .衍射现象是一切波动

的普遍特征.衍射现象明显与否与障碍物的大小及波长有关,当障碍物的尺度与波长可比拟或小于波长时,才有明显的衍射现象.

(1) 在电磁波谱中,无线电波的波长分布在  $10^4 \text{ m} \sim 10^{-4} \text{ m}$  范围内,可见光波长的数量级仅为  $10^{-7} \text{ m}$ .可见建筑物的尺度在无线电波长范围内,因而衍射现象明显,而光波的波长远小于建筑物的尺度,因而衍射现象不明显,不能绕过建筑物.

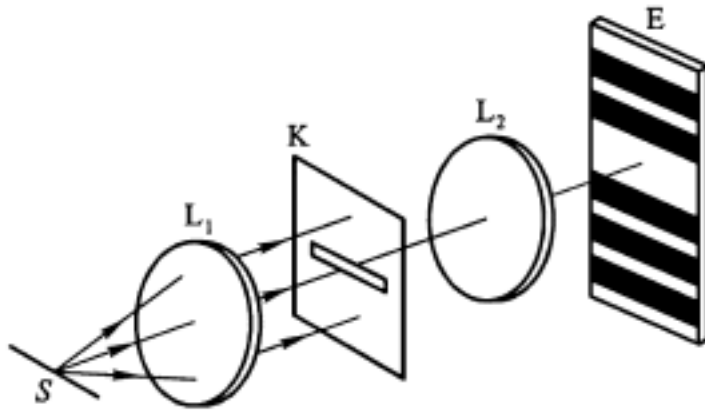
(2) 无线电波中,按波长可分为长波(波长大于  $10^3 \text{ m}$ )、中波( $10^2 \sim 10^3 \text{ m}$ )、短波( $1 \sim 10^2 \text{ m}$ )和微波( $10^{-4} \sim 1 \text{ m}$ )四个波段.电视节目和微波通信处在厘米波段.隔着山可以听到中波段的电台广播,是因为山的大小与中波波长可比拟,而高大建筑物的尺度远大于厘米数量级,电视节目和微波通信对它的衍射不明显,即电视广播被高大建筑物挡住.

17 - 13 一人持一狭缝屏紧贴眼睛,通过狭缝注视遥远处的一平行于狭缝的线状白光光源,这人看到的衍射图样是菲涅耳衍射还是夫琅禾费衍射?

答:遥远处的光源、狭缝屏和紧贴的眼睛构成了衍射装置.遥远处光源入射于狭缝屏的光可视为平行光.根据人眼的简化模型,晶状体是透镜,而视网膜则是透镜的焦平面.经瞳孔衍射的光波,其平行分量经晶状体后会聚于视网膜成衍射像.所以,这人看到的衍射图样是夫琅禾费衍射.

17 - 14 在如题 17 - 14 图所示的单缝夫琅禾费衍射实验中,试讨论下列情况衍射图样的变化:

- (1) 狭缝变窄;
- (2) 入射光的波长增大;
- (3) 单缝垂直于透镜光轴上下平移;
- (4) 线光源  $S$  垂直于透镜光轴上下平移;
- (5) 单缝沿透镜光轴向观察屏平移.



题 17 - 14 图

答：单缝夫琅禾费衍射图样的特点是：中央明条纹最宽，其宽度是其他明条纹的两倍；中央明条纹最亮，集中了入射光能的绝大部分，两侧其他明条纹的间隔近似相等而光强衰减迅速；中央明条纹范围： $-\lambda < a \sin \theta < \lambda$ ；屏上中央明条纹宽度正比于波长而反比于单缝宽度  $x = 2 \frac{f \lambda}{a}$ 。

由以上分析可知：

(1) 狭缝  $a$  变窄而入射光波长不变时，中央明条纹的宽度将变宽。

(2) 入射光的波长增大而  $a$  不变时，中央明条纹的宽度将变宽。

(3) 单缝垂直于透镜光轴上下平移而其他不变时，根据透镜成像规律可知，单缝夫琅禾费衍射图样的位置、光强分布不变。

(4) 置于透镜  $L_1$  物方焦平面上的单色线光源  $S$  垂直透射光轴上下平移而其他不变时，经透镜  $L_1$  后成为斜入射于单狭缝的单色平行光。这将使单缝夫琅禾费衍射图样的位置发生相应的上下平移而光强分布不变。

(5) 单缝沿透镜光轴向观察屏方向平移而其他不变时，装置的夫琅禾费衍射条件没有改变，因此单缝夫琅禾费衍射图样的位置、光强分布都不变。

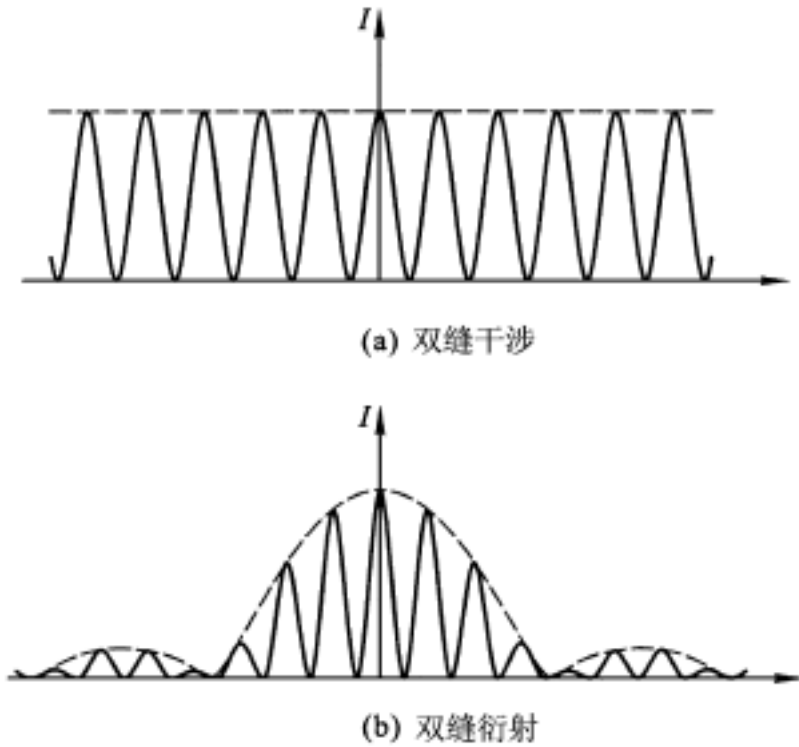
17 - 15 在双缝实验中,怎样区分双缝干涉和双缝衍射?

答:干涉和衍射现象的本质,都是波的相干叠加,使光场的能量重新分布,形成稳定的加强和减弱分布的图像.从这个意义看,干涉和衍射并没有本质上的区别,只是参与叠加的对象有所不同.习惯上,把有限几束相干光的叠加称为干涉,而把无穷多子波的相干叠加称为衍射.

在杨氏双缝实验中,每一缝光束都存在衍射,两个衍射光场间存在干涉,干涉和衍射的作用是同时存在的.在讨论双缝干涉时,为了强调两个相干缝光束间的干涉,将  $S_1$  和  $S_2$  作“两个平行狭缝”处理,这意味着不考虑缝的宽度,也即假定  $a \rightarrow 0$ .在这种情况下,每条缝的单缝衍射零级明纹范围都很大,在观察屏上的光强都近似为  $I_0$ ,并且均匀分布(当然,光能很小).双缝的干涉区处在两个相同的单缝零级衍射的重叠区域内,它们是相干的,在屏上各点处的相位差取决于两缝至屏上相遇处的光程差.因此,观察屏上的光能因两个单缝零级衍射间的干涉而发生重新分布,出现干涉条纹,光强按  $I = 4 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$  规律变化.屏上各级主极大中心的光强相等,均为  $4 I_0$ ;各级主极大中心的间隔  $x$  相等.这也称为双缝干涉的光强分布,其特点是等光强、等间隔,如题 17 - 15 图(a)所示.

实际的双缝总有一定的缝宽,设两个缝的宽度  $a$  相同,各自单缝衍射的光强分布也相同,在满足夫琅禾费衍射条件时,屏上这两个相同的光强分布在位置上也完全重叠.但是,屏上的光强不再是中央明纹的“一统天下”,在其两侧分布有其他明暗条纹,并且光强迅速衰减.这两个单缝衍射光场间干涉的结果,同样使重叠区域内的光能发生重新分布,在单缝衍射光强的各明条纹范围内出现干涉条纹.观察屏上光强分布的特点是:各级主极大中心的光强因受单缝衍射光强的调制,不再相等,其包络为单缝衍射的光强分布;各级主极大中心的间隔仍为  $x$ ,等间隔分布.这称为双缝衍射的光强分布,如题 17 - 15 图(b)所示.

应该注意,当  $d/a$  为整数比时,双缝衍射也会出现“缺级”现象,即在单缝衍射暗条纹处的主极大不存在;缝宽  $a$  很小时,双缝衍射趋向于双缝干涉的等光强、等间隔分布.



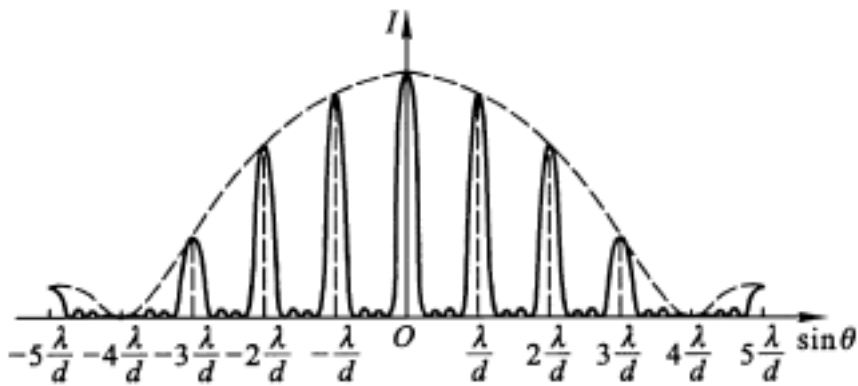
题 17 - 15 图

17 - 16 光栅衍射图样的强度分布具有哪些特征? 这些特征分别与光栅的哪些参数有关?

答: 光栅衍射图样是在黑暗背景上出现明而细的条纹. 由题 17 - 16 图可见, 其特征为:

(1) 由缝间干涉所决定的主极大很细、很亮, 相邻两主极大之间的暗区很宽, 光栅常数  $(a + b) = d = \frac{1}{N}$  越小, 此特征越明显;

(2) 光栅衍射图样的包络受单缝衍射调制, 透光缝宽度  $a$  越小, 单缝衍射图样的中央明纹范围越大, 包络越平坦, 调制作用越小;



题 17 - 16 图

(3) 相邻两主极大之间有  $N - 1$  个极小,  $N - 2$  个次极大, 缝数  $N$  越大, 暗区越宽;

(4) 存在“缺级”现象, 当  $\frac{a+b}{a} = \frac{d}{a}$  为整数时, 在缝间干涉为主极大的位置上, 因单缝衍射为极小而不出现主极大;

(5) 平行白光入射时形成光栅光谱, 光栅光谱的色分辨本领与光谱级次及实际光照缝数  $N$  有关, 色分辨本领:  $R = kN$  .

17 - 17 如果光栅中透光狭缝的宽度与不透光部分的宽度相等, 将出现怎样的衍射图样 ?

答:  $a = b$  时, 有  $\frac{a+b}{a} = 2$  . 在光栅衍射图样中, 因为缺级, 所有偶数级次的主极大均不会出现 .

17 - 18 光栅衍射光谱和棱镜光谱有何不同 ?

答: 光栅和棱镜在光谱仪中都是分光元件 .

光栅光谱有一系列的级次, 每一级次对应应有正负两套光谱, 零级光谱因各重合而不能分光, 所以, 光栅光谱的能量利用率较低, 而棱镜光谱只有一套零级光谱, 相对强度较大 .

在低级次的光栅光谱中, 波长为 的衍射光与相应的衍射角

有近似的正比关系,即低级次光栅光谱的角色散率——近似为常数.这样的光谱称为匀排光谱.棱镜的角色散率——随波长的增加而降低,光谱中的  $\lambda$  与  $\Delta\lambda$  成非线性关系,即不是匀排光谱.所以,光栅光谱更易于实现自动化和计算机控制.

光栅的色分辨本领  $R = kN$ ,  $k$  为谱线级次,  $N$  为光栅被入射光实际照射的缝数.光栅常数  $d = a + b$  一定时,谱线的级次越高,或被入射光照射的光栅宽度  $Nd$  越大,则光栅对谱线的分辨本领越高.棱镜的色分辨本领  $R = b \frac{dn}{d\lambda}$ , 与材料色散率  $\frac{dn}{d\lambda}$  和棱镜底边宽度  $b$  有关.对于受光照宽度为  $Nd = b$  的光栅,其色分辨本领比底边宽度同为  $b$  的棱镜大得多.

17 - 19 一台光栅摄谱仪备有三块光栅,它们分别为每毫米 1 200 条、600 条、90 条.

(1) 如果用此仪器测定 700 ~ 1 000 nm 波段的红外线的波长,应选用哪一块光栅?为什么?

(2) 如果用来测定可见光波段的波长,应选用哪一块?为什么?

答:光栅摄谱仪利用衍射光栅作为色散元件,其主要特点是色散率和色分辨率较高.为保证在测定范围内的光栅光谱为匀排光谱,通常取级次  $k = 1$ .并且,在一级光谱内不能出现较短波长的高级次的谱线.据此可选择适合不同波段的光栅.

根据光栅方程  $d \sin \theta = k \lambda$ , 取  $k = 1$ , 最大波长的可测量角最大为  $\sin \theta = 1$ , 得  $\lambda_m = d$ .

$k = 2$  的最小波长谱线的最小可测量角只能是  $\sin \theta = 1$ , 得

$$\lambda_m = \frac{d}{2}.$$

所以,光栅的测量范围是  $m < \lambda < m$  或  $\frac{d}{2} < \lambda < d$  .

三块光栅的光栅常数分别为

$$d_1 = \frac{1 \times 10^{-3}}{1200} \text{ m} = 833 \text{ nm}, \quad \frac{d_1}{2} = 417 \text{ nm};$$

$$d_2 = \frac{1 \times 10^{-3}}{600} \text{ m} = 1667 \text{ nm}, \quad \frac{d_2}{2} = 833 \text{ nm};$$

$$d_3 = \frac{1 \times 10^{-3}}{90} \text{ m} = 1.11 \times 10^4 \text{ nm}, \quad \frac{d_3}{2} = 5.56 \times 10^3 \text{ nm} .$$

由计算结果可知:

(1) 测定 700 ~ 1 000 nm 波段的红外线的波长,应选用第二块光栅;

(2) 测定 400 ~ 760 nm 波段的可见光的波长,应选用第一块光栅 .

17 - 20 题 17 - 20 图所示为单色光通过三种不同衍射屏在屏幕上呈现的夫琅禾费衍射强度分析曲线 .试指出这些图对应的各是什么衍射屏?说明图(a)和(b)所示两衍射屏的有关参数的相对大小 .

答:参照题 17 - 20 图(a)的特征有:单缝衍射光强图样的包络;相邻两主极大之间有两个极小和一个次极大;第三级及其整数倍的主极大缺级 .所以,图(a)呈现的是三缝夫琅禾费衍射图样,有

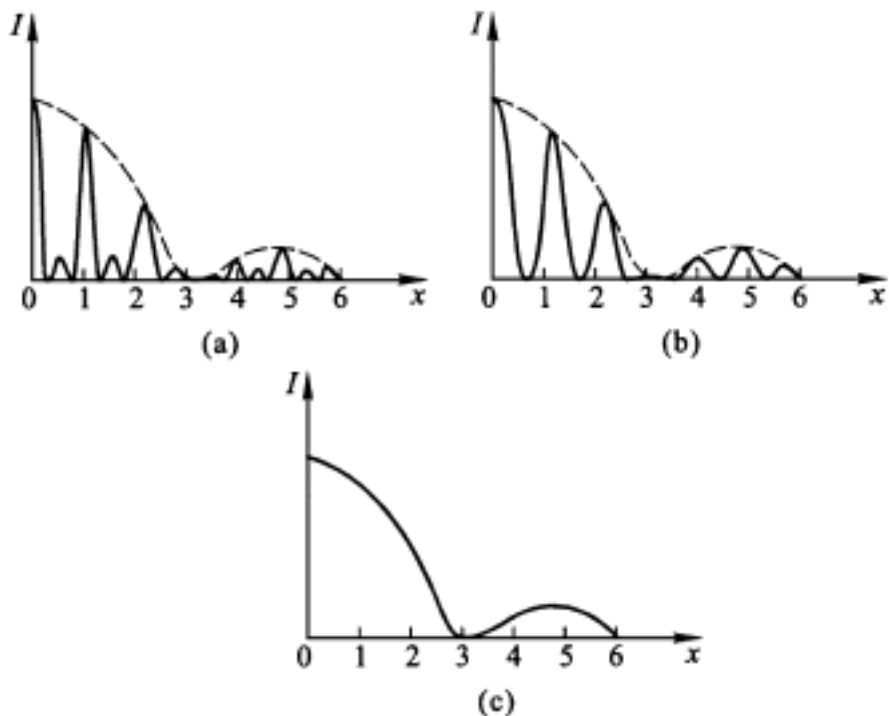
$$\frac{a+b}{a} = \frac{d}{a} = 3, \quad b = 2a .$$

图(b)的特征与图(a)基本相同,但相邻两主极大之间仅有一极小 .所以,图(b)呈现的是双缝夫琅禾费衍射图样,同样有

$$\frac{a+b}{a} = \frac{d}{a} = 3, \quad b = 2a .$$

图(c)是单缝夫琅禾费衍射光强图样,缝宽为  $a$  .



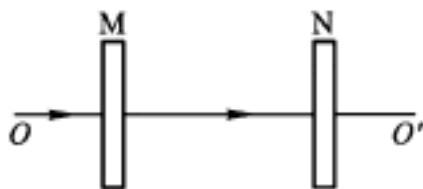


题 17 - 20 图

### 三、光的偏振

17 - 21 如题 17 - 21 图(a)所示, M 为起振偏器, N 为检偏振器. 今以单色自然光垂直入射. 若保持 M 不动, 将 N 绕  $OO'$  轴转动  $360^\circ$ , 转动过程中通过 N 的光强怎样变化? 若保持 N 不动, 将 M 绕  $OO'$  轴转动  $360^\circ$ , 则转动过程中通过 N 的光强又怎样变化? 试定性画出光强对转动角度的关系曲线.

答: 自然光垂直通过 M 后成为线偏振光, 光振动方向与 M 的偏振化方向一致, 不考虑 M 的吸收, 则线偏振光的强度为自然光光强的一半. N 绕  $OO'$  轴转动  $360^\circ$  过程中, 有两次偏振化方向与 M 一致, 有两次相垂直. 所以, 通过 N 的

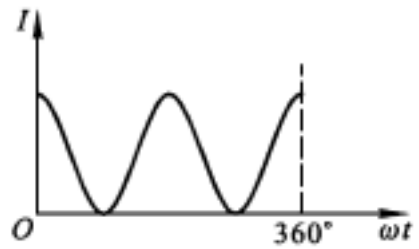


(a)  
题 17 - 21 图

光强在一周期内呈两明两暗的变化。

保持 N 不动, 将 M 绕  $OO$  轴转动  $360^\circ$  时, 通过 M 出射的线偏振光的偏振方向也随之转动。在 M 转动  $360^\circ$  的一个周期内通过 N 的光强同样可有两明两暗的变化规律。

设  $t = 0$  时, M 和 N 的偏振化方向一致, N (或 M) 绕  $OO$  轴转动  $360^\circ$  过程中保持 M (或 N) 不动, 通过 N 的光强变化规律见图 17 - 21 图 (b)。



(b)

题 17 - 21 图

17 - 22 上题中, 若使 M 和 N 的偏振化方向相互垂直, 则通过 N 后的光强为零。若在 M 和 N 之间插入另一偏振片 C, 它的方向和 M 及 N 均不相同, 则通过 N 后的光强如何?

若将偏振片 C 转动一周, 试定性画出光强对转动角度的关系曲线。

答: 设 M 的偏振化方向在竖直方向, N 与其垂直置于水平方向,  $t = 0$  时 C 的偏振化方向与 N 平行, 并开始以  $\omega$  绕  $OO$  轴匀角速逆时针转动。t 时刻 C 和 N 的夹角为  $\omega t$ 。

设自然光光强为  $I_0$ , 通过 M 后的光强为  $I_M$ ,  $I_M = \frac{1}{2} I_0$ 。

根据马吕斯定律, 通过 C 的光强为  $I_C = I_M \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \omega t \right] = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \omega t$ 。

$$\begin{aligned} \text{通过 N 的光强为 } I_N &= I_C \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t \\ &= \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\omega t = \frac{1}{16} I_0 (1 - \cos 4\omega t) \end{aligned}$$

通过 N 后, 光强变化的频率为  $4\omega$ 。

当  $t = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  时, 光强最大, 为  $\frac{1}{8} I_0$ ;

当  $t = k\frac{\pi}{2}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  时, 光强最小, 为零.

光强对转动角度的关系曲线, 见题 17 - 22 图.



题 17 - 22 图

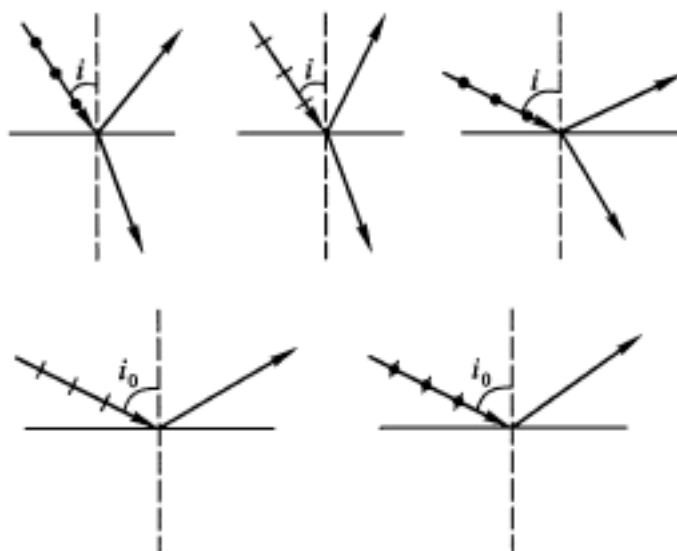
17 - 23 在如题 17 - 23 图(a)所示的各种情况中, 以非偏振光或偏振光由空气入射到水面时, 折射光和反射光各属于什么性质的光? 在图中所示的折射光线和反射光线上用点和短线把振动方向表示出来. 把不存在的反射线或折射线划掉. 图中  $i_0 = \arctan n$ ,  $n$  为水的折射率.  $i = i_0$ .

答: 见题 17 - 23 图(b).

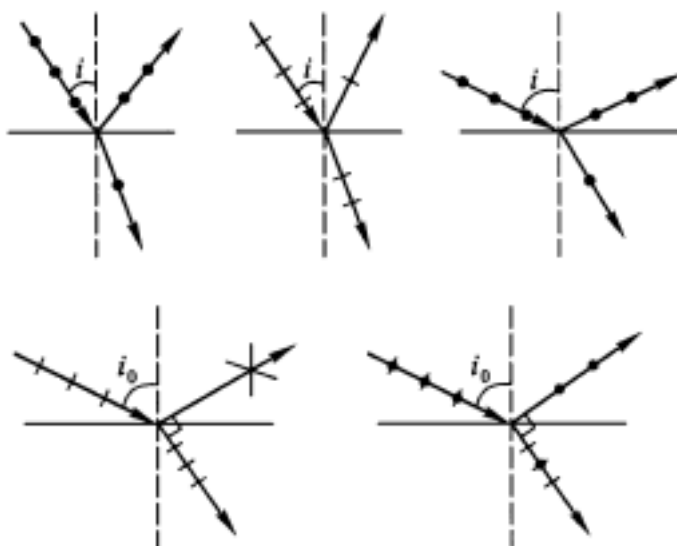
17 - 24 若从一池静水的表面上反射出来的太阳光是完全偏振的, 那么太阳在地平线之上的仰角是多大? 这种反射光的电矢量的振动方向如何?

答: 设仰角是  $\theta$ , 则太阳光的入射角是  $i = \frac{\pi}{2} - \theta$ . 反射光是完全偏振的, 说明  $i$  是布儒斯特角. 根据布儒斯特定律  $\tan i = n$ , 可得  $i = 53^\circ$ ,  $\theta = 37^\circ$ .

反射光的电矢量的振动方向垂直于入射面(或反射面).



(a)



(b)

题 17 - 23 图

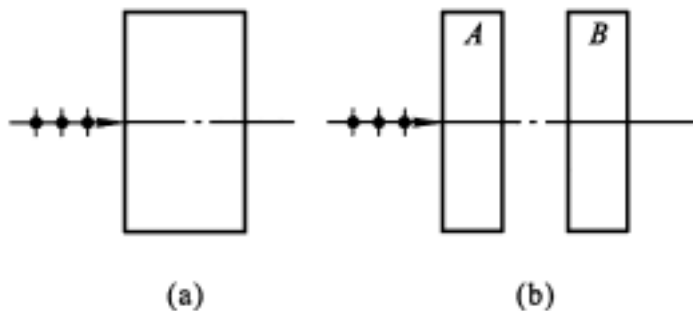
17 - 25 据测金星表面反射的光是部分偏振光, 这样可以推测金星表面覆有一层具有镜面特性的物质, 例如水或由水滴、冰晶等组成的小云层. 其根据是什么?

答: 光是电磁波, 在不同介质的界面发生折射和反射时, 光的偏振态和相位将发生相应的变化. 菲涅耳公式给出了这种变化关

系的详尽描述,其中也包含了布儒斯特定律。

因此,根据金星表面的反射光是部分偏振光这一事实,依据菲涅耳公式,推测金星表面覆有一层具有镜面特性的物质是合理的。

17 - 26 如题 17 - 26 图(a)所示,一束非偏振光通过方解石(与光轴成一定的角度)后,有几束光线射出来?如果把方解石切割成厚度相等的 A、B 两块,并平移开一点,如图(b)所示,此时通过这两块方解石有多少条光线射出来?如果把 B 块绕光线转过一角度,此时将有几条光线从 B 块射出来?为什么?



题 17 - 26 图

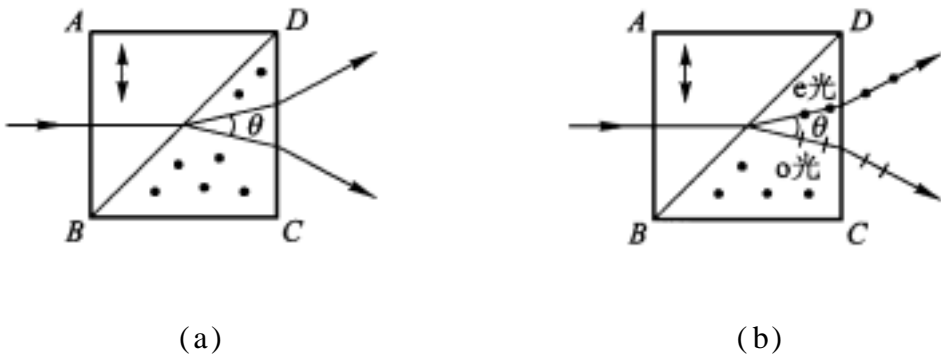
答:如图(a)所示,一束非偏振光垂直入射于光轴与其表面成一定角度的方解石表面后,在方解石内部将形成 o 光和 e 光。o 光的传播方向不变,e 光将偏离原传播方向。所以,会有两束光线射出来。

如图(b)所示,把方解石切割成厚度相等的 A、B 两块,平移开一点,并保持 A、B 两块的光轴方向平行时,由 A 出射的 o 光仍垂直入射于 B,并保持传播方向不变地射出来;由 A 出射的 e 光以一倾斜角度入射于 B 后,以与在 A 中相同的传播方向传播,在 B 的后表面,以其传播方向所具有的 e 光折射率,按折射定律确定的角度折射出来(假设 e 光在 A、B 的后表面都不发生全反射)。所以,通过这两块方解石后的光束仍为两束。

把  $B$  块绕光线转过一角度, 其光轴也随之转过了一个角度. 这时, 垂直入射于  $B$  块的  $o$  光和斜入射于  $B$  块的  $e$  光的光振动方向均按  $B$  块的光轴再分解为  $o$  光和  $e$  光. 因而出射光变为四束, 两束为  $o$  光, 两束为  $e$  光.

17 - 27 如题 17 - 27 图 (a) 所示, 棱镜  $ABCD$  是由两个  $45^\circ$  方解石棱镜所组成, 棱镜  $ABD$  的光轴平行于  $AB$ , 棱镜  $BCD$  的光轴垂直于图面. 当非偏振光垂直于  $AB$  入射时, 试说明为什么  $o$  光和  $e$  光在第二个棱镜中分开成夹角, 并在图中画出  $o$  光和  $e$  光的波面和振动方向.

答: 非偏振光垂直于  $AB$  入射后, 在棱镜  $ABD$  内形成  $o$  光和  $e$  光, 对应不同的折射率和传播速度, 但沿同一方向传播. 对于  $BD$  面, 它们都成为斜入射光线. 进入棱镜  $BCD$  后, 原来的  $o$  光成为  $e$  光, 原来的  $e$  光成为  $o$  光, 分别对应不同的波面. 这样, 在第二个棱镜中的  $o$  光和  $e$  光的传播方向不再一致而形成夹角. 如题 17 - 27 图 (b) 所示.



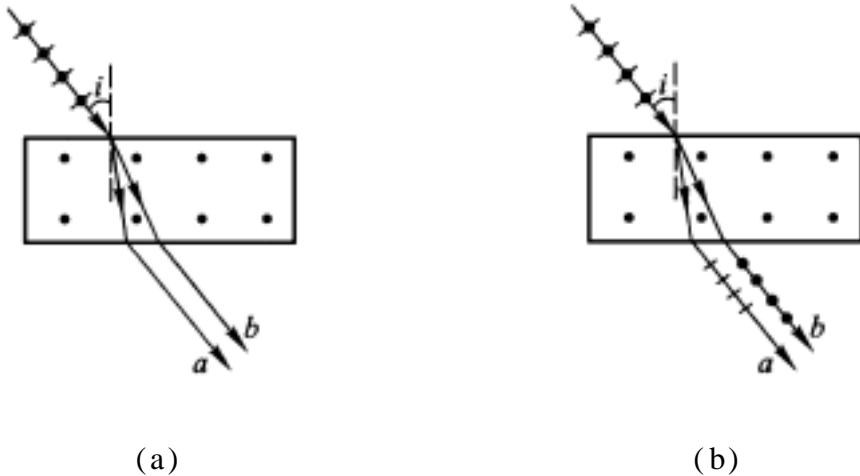
题 17 - 27 图

17 - 28 如题 17 - 28 图 (a) 所示, 一束自然光入射到方解石晶体上, 经折射后透射出晶体. 对这晶体来说, 试问: (1) 哪一束是  $o$  光? 哪一束是  $e$  光? 为什么? (2)  $a$ 、 $b$  两束光处于什么偏振态?

分别画出它们的光矢量振动方向。(3) 在入射光束中放一偏振片, 并旋转此偏振片, 出射光强有何变化?

答: (1) 根据方解石晶体对 o 光和 e 光不同的主折射率 ( $n_o > n_e$ ), 可确定斜入射自然光在晶体内形成的 o 光和 e 光的波面, 及其传播方向, 并确定 o 光和 e 光的主平面。所以,  $a$  是 o 光,  $b$  是 e 光。

(2) 它们都是线偏振光,  $a$ (o 光) 的振动方向垂直于它的主平面(晶体内  $a$  的传播方向和光轴构成的平面),  $b$ (e 光) 的振动方向平行于它的主平面(晶体内  $b$  的传播方向和光轴构成的平面)。在图示情况下, 晶体内两主平面不重合, 如题 17 - 28 图(b) 所示。



题 17 - 28 图

(3) 在入射光束中放一偏振片后, 入射光成为线偏振光。当线偏振光的光矢量在入射面内时, 在晶体内只激发 o 光; 当线偏振光的光矢量垂直于入射面内时, 在晶体内只激发 e 光; 当线偏振光的光矢量取其他方向时, 晶体内既有 o 光, 也有 e 光; 旋转偏振片时, 出射光强出现上述情况的周期变化。

17 - 29 (1) 一束光可能是 (a) 自然光; (b) 线偏振光; (c) 部分偏振光。如何用实验来判断这束光是哪一种光。

(2) 一光束可能是 (a) 自然光; (b) 线偏振光; (c) 圆偏振光 . 你如何用实验来判断这束光是哪一种光 .

答: (1) 用偏振片 M 迎着入射光束, 并以入射光束为轴旋转一周, 若出射光强无变化, 则入射光为自然光; 若出射光强出现两明两零变化, 则入射光为线偏振光; 若出射光强出现两明两暗 (最小光强不为零), 则入射光为部分偏振光 .

(2) 用偏振片 M 迎着入射光束, 并以入射光束为轴旋转一周, 若出射光强出现两明两零变化, 则入射光为线偏振光; 若出射光强无变化, 则入射光可能是自然光也可能是圆偏振光, 此时需在 M 前放置  $1/4$  波片, 继续旋转偏振片, 若出射光强仍无变化, 则入射光是自然光; 若出射光强出现两明两零变化, 则入射光为圆偏振光 .

17 - 30 用自然光源以及起偏器和检偏器各一件, 如何鉴别下列三种透明片: 偏振片、半波片和  $1/4$  波片 .

答: 自然光入射于起偏器 M 后成为线偏振光, 以此作鉴别用光束 .

依次将各透明片迎着线偏振光旋转, 出射光强出现两明两零者为偏振片 .

分别将余下的两透明片置于起偏器 M 和检偏器 N 中间, 若透明片上有标记 (偏振化方向或光轴方向), 将该标记方向与 M 的偏振化方向成  $45^\circ$  角放置, 然后旋转 N .

若出射光强无变化, 则该透明片是  $1/4$  波片 .

若出射光强出现两明两零变化, 并且极大光强出现在与透明片标记相垂直的方向上, 则该透明片是半波片 .

若透明片上无标记, 则上述操作需反复进行以确定出射光的状态 .

17 - 31 试说明偏振光干涉装置中偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  和双折射晶

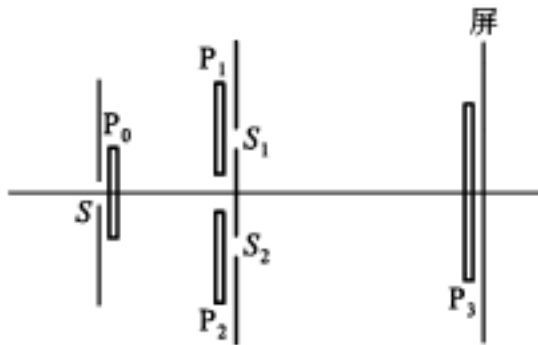


片 C 各元件的作用,为什么缺少任一元件就观察不到干涉效应?

答:偏振光干涉装置中偏振片  $P_1$  使入射的自然光成为线偏振光;双折射晶片 C 使入射的线偏振光分解为两束光振动频率相同、振动方向不同、相互间有相位差的线偏振光;偏振片  $P_2$  使上述两束光振动在  $P_2$  方向上的分量相叠加而干涉.由上述分析可知,偏振光干涉同样需满足:光振动方向相同,频率相同,在叠加点有恒定的相位差的相干条件.因此,  $P_1$ 、 $P_2$  和 C 三者缺一不可.

17 - 32 如题 17 - 32 图(a)所示的菲涅耳 - 阿喇果实验.在杨氏双缝干涉实验中,  $S$  为单色自然光源.

(1) 如果在  $S$  后放置偏振片  $P_0$  (如图,但没有  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ ) 干涉条纹有何变化?



(a)

题 17 - 32 图

(2) 如果在  $S_1$  和  $S_2$  处再分别加偏振片  $P_1$  和  $P_2$ , 它们的偏振化方向互相垂直且都与  $P_0$  的偏振化方向成  $45^\circ$  角, 屏上的光强分布如何?

(3) 在屏前再放偏振片  $P_3$ , 其偏振化方向与  $P_0$  平行, 这时屏上的干涉条纹与(1)中的情形有何不同?

(4) 在(3)中的布置, 如将  $P_0$  转过  $90^\circ$  而偏振化方向与  $P_3$  垂

直,干涉条纹有何变化?

(5) 在(3)中的布置,将  $P_0$  撤去,屏上的光强分布情况如何?

答:假定所有的偏振片都是理想的,不考虑对光能的吸收以及因厚度而引起的相位变化,并取光强和光振动振幅平方的比例系数为 1,即  $I = A^2$  .

在杨氏双缝干涉实验中,屏上光强分布为  $I = 4 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$ ,其中  $I_0$  为每一缝光束单独在屏上  $P$  点的光强(自然光).  $\delta$  为  $P$  点处由两个缝发出光波的相位差.

(1)  $S$  后放置偏振片  $P_0$  而没有  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  时, $P_0$  吸收一半光强,屏上光强分布变为

$$I = 4 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 2 I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

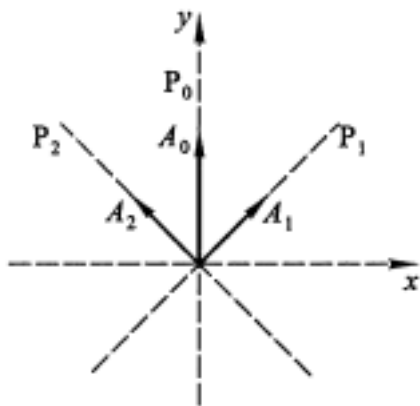
其中  $I_0 = \frac{I_0}{2}$  .屏上干涉条纹的位置、相邻明(暗)条纹的间隔和光强分布形式不变.

(2) 在  $S_1$  和  $S_2$  处再分别加偏振化方向互相垂直且都与  $P_0$  成  $45^\circ$  角的  $P_1$  和  $P_2$  时,两光振动方向互相垂直,振幅相同  $A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_0$ ,两光强相同,均为  $I_1 = I_2 = A_1^2 = \frac{A_0^2}{2} = \frac{I_0}{4}$ ,其中  $A_0^2 = \frac{I_0}{2}$ ,如题 17 - 32 图(b)所示.屏上各点合成光的光强和偏振态将由这两束光在各处的光程差决定:

=  $\pm k$  时,仍为线偏振光,偏振方向平行于  $y$  轴,光强为  $I = (\sqrt{A_1^2 + A_2^2})^2 = \frac{I_0}{2}$  .

=  $\pm (2k + 1) \frac{\pi}{4}$  时,为圆偏振光,光强为  $I = I_1 = I_2 = \frac{I_0}{4}$  .

=  $\pm (2k + 1) \frac{\pi}{2}$  时,又为线偏振光,偏振方向平行于  $x$  轴,光



(b)

题 17 - 32 图

强为  $I = \frac{I_0}{2}$  .

光程差为其他时,为椭圆偏振光 .

所以,在屏上原杨氏双缝光强分布的相邻两明纹之间,将依次出现线偏、椭圆偏、圆偏、椭圆偏、线偏等各种偏振光,光强也有所不同,但不会出现暗条纹 .

(3) 在屏前再放偏振化方向与  $P_0$  平行的  $P_3$  时,投射到屏上的是两振动方向相同的线偏振光 . 它们的振幅、光强都相同,为

$$A_{1y} = A_{2y} = A_0 \cos 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{A_0}{2}$$

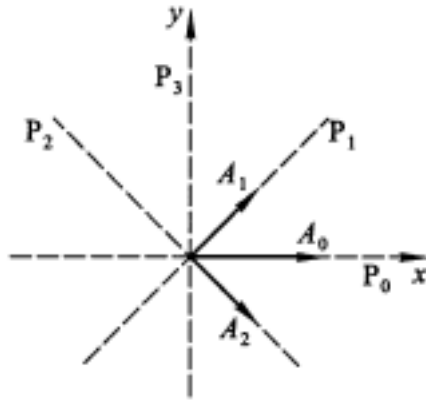
和

$$I_{1y} = I_{2y} = A_{1y}^2 = \frac{I_0}{8} .$$

屏上的光强为  $I_y = 4 I_{1y} \cos^2 \frac{\pi}{2} = \frac{I_0}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2}$ , 仍为杨氏双缝干涉条纹,与(1)的分布相同,但最大光强与(1)的比值为  $\frac{4 I_{1y}}{4 I_0} = \frac{1}{4}$  .

(4) 将(3)中的  $P_0$  转过  $90^\circ$  而偏振化方向与  $P_3$  垂直时,投射到屏上的沿  $y$  轴的两线偏振光间有附加的相位差 , 它们的振幅、光

强相等,与(3)中表示的相同,如题 17 - 32 图(c)所示.屏上的光强分布:



(c)

题 17 - 32 图

$$I_y = 4 I_{1y} \cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{I_0}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2},$$

为杨氏双缝干涉条纹,其中  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ ,  $\theta = d \sin \theta$ . 所以,在屏上关于  $S_1$  和  $S_2$  的对称中心处是暗条纹. 与(3)的光强相比较可知,除明暗条纹中心的位置互换外,其他均相同.

(5) 在(3)中的布置,将  $P_0$  撤去的话,则通过  $P_1$  和  $P_2$  出射的线偏振光的光振动方向互相垂直,强度均为  $\frac{I_0}{2}$ ,相互之间无确定的相位关系,经  $P_3$  后它们的光强均为  $\frac{I_0}{4}$ . 屏上的光强为两个单缝衍射光强的非相干叠加,最大光强为  $I = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} = \frac{I_0}{2}$ .

# 第十八章 早期量子论和 量子力学基础

18 - 1 两个相同的物体 A 和 B, 具有相同的温度, 如 A 物体周围的温度低于 A, 而 B 物体周围的温度高于 B. 试问: A 和 B 两物体在温度相同的那一瞬间, 单位时间内辐射的能量是否相等? 单位时间内吸收的能量是否相等?

答: 单位时间内从物体表面单位面积辐射出的各种波长的总辐射能, 称为物体的辐出度  $M(T)$ .  $M(T)$  只是热力学温度的函数. 对于不同的物体, 特别是在其表面情况 (如粗糙程度等) 不同时, 该函数形式是不同的. 若 A 和 B 两物体相同, 包括它们的表面情况也完全相同, 则在相同温度时的辐出度是相同的.

A 和 B 两物体在具有相同温度的那一瞬间, 它们与各自的环境并不处于热平衡状态. A 物体的温度高于环境温度, 其辐射能大于吸收能; 而 B 物体的温度低于环境温度, 其辐射能小于吸收能. 两者的辐出能相同, 所以, 单位时间内 B 物体从外界吸收的能量大于 A.

18 - 2 绝对黑体和平常所说的黑色物体有何区别? 绝对黑体在任何温度下, 是否都是黑色的? 在同温度下, 绝对黑体和一般黑色物体的辐出度是否一样?

答: 绝对黑体 (黑体) 是理想化的物理模型. 绝对黑体在任何温度下, 对于来自外界的任何波长的辐射能的吸收比恒等于 1, 反射比恒等于零. 自然界并不存在真正的黑体. 实验中用不透明材料制成开有小孔的空腔作为绝对黑体的近似, 小孔的行为就和黑体表面一样. 平常所说的黑色物体的吸收比总是小于 1, 反射比总是

大于零的,如果吸收比等于 1,即没有反射,也就看不见黑色物体了.所以,黑色的物体不能等同于黑体.

绝对黑体不反射来自外界的能量,从这个意义说,它是“黑”的,犹如白天看远处建筑物的窗户是黑色的,因为进入窗户的光线很少能被反射出来.但这并不是说绝对黑体的颜色就是黑色的.绝对黑体的颜色由其自身在一定温度下的辐射能量按波长的分布决定.温度很低时,黑体辐射的能量很少,辐射能的峰值波长远大于可见光波长,此时呈黑色;随着绝对黑体温度的升高,辐射能逐渐增强,峰值波长向短波长方向移动,在可见光范围内,即可由暗红 红 黄 蓝 紫……变化.从冶炼炉小孔辐射出光的颜色来判断炉膛温度就是这个道理.

在同温度下,绝对黑体比一般黑色物体可吸收更多的辐射能,它的辐出度也比一般黑色物体大.

18 - 3 你能否估计人体热辐射的各种波长中,哪个波长的单色辐出度最大?

答:利用绝对黑体的辐出度按波长的分布规律进行估算.设正常人体体温为 37 (即 310 K),根据维恩位移定律:

$$T_m = b \quad (b = 2.897 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K})$$

可得 
$$\lambda_m = \frac{b}{T} = 9.345 \times 10^{-6} \text{ m},$$

此波长处于红外波段.

18 - 4 有两个同样的物体,一个是黑色的,一个是白色的,且温度也相同,把它们放在高温的环境中,哪一个物体温度升高较快?如果把它们放在低温环境中,哪一个物体温度降得较快?

答:两物体处在高温环境中时,都处于吸收大于辐射状态.因黑色物体的吸收本领大于白色物体,因此,黑色物体温度升高

较快。

当两物体处在低温环境中时,都处于辐射大于吸收状态。因黑色物体的辐射本领大于白色物体,因此,黑色物体温度降得较快。

18 - 5 若一物体的温度(绝对温度数值)增加一倍,它的总辐射能增加到多少倍?

答:根据斯特藩 - 玻耳兹曼定律,绝对黑体的总辐射度(总辐射能)为

$$M_0(T) = T^4,$$
$$\frac{T_2}{T_1} = 2, \quad \frac{M_2}{M_1} = \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^4 = 2^4 = 16.$$

即绝对黑体的温度增加一倍时,它的总辐射能将增至原来的16倍。

18 - 6 在光电效应的实验中,如果:(1)入射光强度增加1倍;(2)入射光频率增加1倍,按光子理论,这两种情况的结果有何不同?

答:爱因斯坦用光子概念应用于光电效应时,认为一个光子的能量只能传递给金属中的单个电子,作用过程满足能量守恒定律,即  $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$ 。在弱光情况(线性光学)下,该方程所成功解释的光电效应也称为外光电效应。

单色光光强可用光子数表示为  $I = Nh$ 。N为光子数。所以:

(1)在保持入射光颜色(频率)不变的条件下,光强I增加1倍。即单位时间内垂直入射于阴极K的单位面积的光子数N增加1倍,其结果是逸出金属的光电子数也增加1倍,即光电流增加1倍。

(2)在保持入射光强度(光子数)不变的条件下,入射光频率

增加 1 倍 . 即与电子作用的每个光子的能量增加 1 倍 , 其结果是逸出金属的光电子数  $N$  不变 , 只是逸出金属后的光电子的最大初动能增大 .

18 - 7 已知一些材料的逸出功如下: 钽 4 .12 eV, 钨 4 .50 eV, 铝 4 .20 eV, 钡 2 .50 eV, 铯 2 .30 eV . 试问: 如果制造在可见光下工作的光电管, 应取哪种材料 ?

答: 可见光波长范围 (按能量从低到高排列) 可取为 (760 ~ 400) nm, 对应的光子能量, 由  $h\nu = h\frac{c}{\lambda}$  可知, 在 (1 .64 ~ 3 .11) eV 范围内 . 根据爱因斯坦光电效应方程, 在可见光下可发生光电效应的材料应满足:  $h\nu - A \geq 0$  . 所以, 应取钡和铯 .

18 - 8 在彩色电视研制过程中, 曾面临一个技术问题: 用于红色部分的摄像管的设计技术要比绿、蓝部分困难, 你能说明其原因吗 ?

答: 摄像管利用能在可见光波段发生光电效应的金属材料做阴极, 实现彩色图像的光电转换 . 由上题的分析可知, 在传统金属材料中, 缺乏逸出功小于红光光子能量的材料 . 因此, 需要研制新的阴极材料, 以满足在整个可见光波段的光电效应 .

电子获得光子能量后可逸出金属表面的效应称为外光电效应 . 相对应地, 半导体等材料在光照下, 会在内部激发出电子和空穴对 (载流子) 而改变材料的导电性能, 但载流子并不逸出 . 这种效应被称为内光电效应 .

现在, 数码摄像机、扫描仪的使用已非常普及, 其核心元器件是 CCD, 即半导体电荷耦合器件 (Charge - Coupled Device) . 这是利用半导体的内光电效应, 将光信号转换成表面电荷后经排序处理为电流信号的光传感器 . 若将连续变化的电信号转换成数字信号, 经运算处理后还原再现图像, 即为数码摄像 (扫描) 技术 . CCD



器件能对包括可见光的较大波长范围内的光强做出响应.彩色图像的摄制,是通过 R - G - B 三种滤光镜将来自物体发光点的信息分解至排列有序的对应的三个像素,然后经硬件或软件将它们组合还原成彩色图像来实现的.

18 - 9 光子在哪些方面与其他粒子(譬如电子)相似?在哪些方面不同?

答:光子和其他实物粒子(譬如电子)的相似之处在于:都具有波粒二象性,即都具有一定的质量、动量和能量以及与之对应的频率和波长;在与其他物质相互作用而交换其能量和动量过程中都遵守能量守恒定律和动量守恒定律.

光子和其他实物粒子(譬如电子)的不同之处在于:光子的静止质量为零且电中性,其他实物粒子(譬如电子)的静止质量不为零,电子带有电荷;光子和电子的自旋不同,分别服从不同的统计分布规律.

18 - 10 用频率为  $\nu_1$  的单色光照射某光电管阴极时,测得饱和电流为  $I_1$ ;用频率为  $\nu_2$  的单色光以与  $\nu_1$  的单色光相等强度照射时,测得饱和电流为  $I_2$ .若  $I_2 > I_1$ ,  $\nu_1$  和  $\nu_2$  的关系如何?

答:参照 18 - 6 题.饱和光电流正比于入射光光强.两种单色光的光强相同,应有  $N_1 h \nu_1 = N_2 h \nu_2$ .光电效应的一个光子对应一个电子,因此饱和电流  $I$  与光子数  $N$  有关系:  $\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2} > 0$ , 所以  $\nu_1 > \nu_2$ .

18 - 11 用频率为  $\nu_1$  的单色光照射某光电管阴极时,测得光电子的最大动能为  $E_{k1}$ ;用频率为  $\nu_2$  的单色光照射时,测得光电子的最大动能为  $E_{k2}$ ,若  $E_{k1} > E_{k2}$ ,  $\nu_1$  和  $\nu_2$  哪一个大?

答：对同一个光电管的阴极材料，其逸出功与入射光的频率等无关，是个常数。根据爱因斯坦关系式，有  $h\nu_1 - E_{k1} = h\nu_2 - E_{k2}$ ，因  $E_{k2} - E_{k1} = h(\nu_2 - \nu_1) < 0$ ，所以  $\nu_2 < \nu_1$ 。

### 18 - 12 用可见光能否观察到康普顿散射现象？

答：X 射线经物质散射后，散射光谱中含有波长变长的谱线，而用可见光的话，是否也有这种波长变长并可分辨的散射谱线，这是问题的症结所在。

可以先从能量的角度入手分析：X 射线光子的能量在  $10^4$  eV 以上，可见光光子的能量小于 3.1 eV，而散射物质中的电子束缚能约为  $10 \sim 10^2$  eV，电子热运动的能量约为  $10^{-2}$  eV。

由于入射的 X 射线光子能量远大于散射物质中电子的能量，因此把与光子碰撞之前的电子近似看作是静止和自由的，这种假定是合理的。由此模型得出了康普顿效应的规律：

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

散射角  $\theta$  一定时，波长的增量  $\Delta\lambda$  与物质基本无关。谱线  $\lambda_0$  的宽度由入射的 X 射线的单色性决定，而谱线  $\lambda$  的宽度通常由电子的热运动等因素引起，但因这些因素的能量远低于 X 射线光子的能量，所以谱线  $\lambda$  的宽度并不大。因此， $\lambda_0$  和  $\lambda$  两谱线是易于分辨的。

对入射的可见光光子而言，其能量并未达到可将物质中的电子近似看作是静止、自由的程度，因此，上式原则上对可见光失效。

若考虑可见光光子与能量、动量与其相差不大的自由电子相碰撞，则由于碰撞前电子的相对运动（或多普勒效应），散射光子的波长可以变长，也可以变短。这将使散射谱线  $\lambda$  的宽度变得很宽，且中心波长几乎与  $\lambda_0$  重合。此外，相对可见光光子的能量，散射物质中的绝大多数电子不能被视为是自由的，它们受原子或散射物

质表面的束缚 . 可以发生散射波的波长发生变化的, 只是极少数可视为自由的电子, 因而谱线 的强度也很弱 . 对物质内极大多数受束缚的电子, 只能产生波长不变的经典散射, 即散射谱中谱线 的强度会很强 .

综上所述, 用可见光来观察时, 康普顿散射谱的分布: 的宽度很大, 中心谱线与 靠得很近, 且 的强度与谱线 的强度相差悬殊 . 这样的散射谱是难以分辨的, 所以不宜用可见光来观察康普顿散射效应 .

18 - 13 光电效应和康普顿效应都包含有电子与光子的相互作用, 这两过程有什么不同 ?

答: 光电效应和康普顿效应都通过光和物质的相互作用过程揭示了光具有粒子性的一面 . 光电效应揭示了光子能量与频率的关系, 康普顿效应则进一步揭示了光子动量与波长的关系 .

两者的区别源于产生这两效应的能量范围大不相同 . 光电效应中光子的波长在光学范围, 能量的数量级是几个 eV, 金属中电子逸出功的数量级是 1 eV . 在线性光学范围内的光电效应中, 入射光子能量大于或等于逸出功时, 一个电子吸收一个光子, 电子和光子系统的能量守恒, 而因电子受束缚, 系统的动量不守恒; 康普顿效应中的光子在 X 射线波段, 具有  $10^4$  eV 数量级的能量, 相对来说电子逸出功和电子热运动的能量等都可忽略, 原子的外层电子可看作是自由的、静止的 . 所以, 康普顿效应反映的是高能光子和低能自由态电子间的弹性碰撞问题, 系统的能量和动量都守恒 .

可见, 光电效应和康普顿效应虽然同为光子和电子的相互作用, 但是它们发生的概率是与光子的能量有关的 . 一般说来, 发生光电效应的概率随着光子能量的增大而迅速减小 .

18 - 14 在康普顿效应中, 什么条件下才可以把散射物质中

的电子近似看成静止的自由电子？

答：参见上两题。当散射物质中原子最外层电子（价电子）所受的束缚能相对入射光子的能量可以忽略不计时，该电子可近似为静止的自由电子（X射线光子的能量约为  $10^4 \sim 10^5$  eV，散射物质中电子束缚能约为  $10 \sim 10^2$  eV）。入射光子与自由电子碰撞散射的结果，对应波长变长的谱线。入射光子与原子中束缚得很紧的内层电子碰撞散射情况，对应波长不变的谱线。

18 - 15 在康普顿效应中，反冲电子获得的能量总是小于入射光子的能量，这是否意味着入射光的光子分成两部分，其中的一部分被电子吸收。这与光子的粒子性是否矛盾？

答：参见上几题。在康普顿效应中，高能光子与散射物质中的自由电子或束缚微弱的电子之间的弹性碰撞是指：一个自由电子吸收一个入射光子后，发射一个散射光子，当光子向某方向散射时，电子受到反冲而获得一定的动能和动量的过程。在整个过程中遵循能量守恒定律和动量守恒定律。碰撞前，入射光子的能量和动量转换为反冲电子和散射光子的能量和动量。因而散射光子的能量小于入射光子的能量，它的频率变小而波长变长。

被散射的是整个光子而不是它的一部分。若认为入射光的光子可分成两部分，其中的一部分被电子吸收。这与光子具有确定的能量和动量的粒子性相矛盾，也不符合弹性碰撞过程中必须满足的动量守恒定律。

所以，在康普顿效应中，一个电子吸收的是一个光子的整体，放出的是另一个光子的整体，光子是不可分割的。

18 - 16 (1) 氢原子光谱中，同一谱系的各相邻谱线的间隔是否相等？(2) 试根据氢原子的能级公式说明当量子数  $n$  增大时能级的变化情况以及能级间的间距变化情况。

答：(1) 氢原子光谱的里德伯方程为  $\tilde{\nu} = R \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right] = T(k) - T(n)$ ，同一  $k$  值、不同  $n$  值 ( $n > k$ ) 给出同一谱系各谱线的波数。同一谱系  $k$  内相邻谱线  $n$  和  $n+1$  的间隔为

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{k, n+1} - \tilde{\nu}_{k, n} &= \tilde{\nu}_{k, n+1} - \tilde{\nu}_{k, n} = T(k) - T(n+1) - [T(k) - T(n)] \\ &= R \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right], \end{aligned}$$

其中  $n+1 - n = 1$ ,  $n > k$ 。当  $n$  很大时，有  $\tilde{\nu}_{k, n+1} - \tilde{\nu}_{k, n} \approx R \frac{2}{n^3}$ 。例如，当  $n = 30$  时， $\tilde{\nu} = 812.6 \text{ m}^{-1}$ ； $n = 350$  时， $\tilde{\nu} = 0.5 \text{ m}^{-1}$ 。可见，同一谱系的各相邻谱线的间隔随  $n$  增大而急剧减小。

(2) 氢原子的能级公式可表示为  $E_n = -\frac{|E_1|}{n^2}$ ，其中  $|E_1| = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$ 。 $E_n < 0$  表明氢原子处于第  $n$  个束缚态。随着量子数  $n$  的增大  $E_n$  迅速增大， $n \rightarrow \infty$  时， $E_n \rightarrow 0$ 。能级间隔为

$$E = E_{n+1} - E_n = \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] |E_1|,$$

当  $n$  很大时， $E$  按  $E = \frac{2}{n^3} |E_1|$  规律随量子数  $n$  增大而迅速减小。例如，当  $n = 30$  时  $E = 1 \text{ meV}$ ； $n = 350$  时  $E = 6.3 \times 10^{-4} \text{ meV}$ 。在量子数很大的情况下，非常小的能量间隔可近似看作是连续分布的，这也是对应原理所要求的。

18 - 17 由氢原子理论可知，当氢原子处于  $n = 4$  的激发态时，可发射几种波长的光？

答：可发射  $4 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 1$ ，共 6 种波长的光。

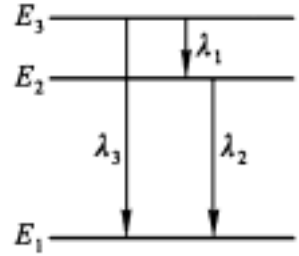
18 - 18 如图所示，被激发的氢原子跃迁到低能级时，可发射

波长为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  的辐射 .问三个波长之间的关系如何 ?

答: 根据氢原子光谱的里德伯方程

$$\frac{1}{\lambda} = R \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right]$$

可得到  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  三波长间的关系为  $\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$  .



题 18 - 18 图

18 - 19 设实物粒子的质量为  $m$ , 速度为  $v$  .由德布罗意公式

$$h = mc\lambda, \quad \lambda = \frac{h}{mv},$$

得  $\lambda = \frac{h}{mv}$  .

根据  $\lambda = \frac{h}{mv}$  ,

得  $v = \frac{h}{m\lambda}$  .

显然以上的结论是错误的, 试问错误的根源何在 ?

答: 产生以上错误的原因在于混淆了实物粒子的运动速度  $v$  和平面简谐波相位传播速度  $u$  这两个不同概念之间的区别 .

在量子力学的理论体系中, 一个实物粒子是用与之相联系的由无数平面简谐波叠加而成的波包来描述的 .每一平面简谐波都以相位的传播速度运动,  $u = \frac{c}{\lambda}$  , 也称相速度 .单个相速度是观测不到的, 由  $u = \frac{c}{\lambda} = \frac{c^2}{v} > c$  可见, 单个相速度可以超过光速 .但粒子的速度, 即波包的移动速度  $v$  (也称群速度) 总小于光速  $c$  .

18 - 20 为什么说不确定度关系与实验技术或仪器的改进无关 ?

答: 不确定度关系是微观粒子波粒二象性所决定的一个基本

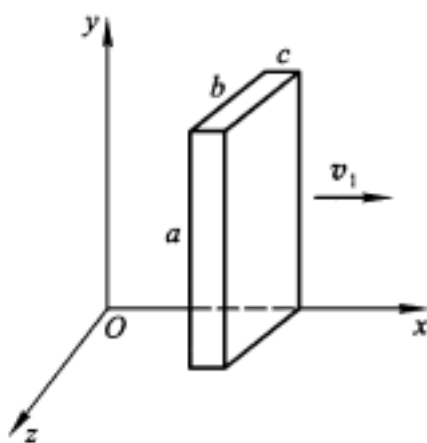
关系 .它不是由于测量仪器的缺陷或测量方法不完善所造成的 .无论怎样改善测量仪器和测量方法 ,测量的准确度都不可能逾越不确定关系所给出的限度 .

# 专题讨论

## 1. 雨中快跑能少淋雨吗

人们在雨中行走时,为少淋雨自然都会加快步伐.这是直接来源于生活的经验.然而,当用简单的物理模型,将这经验总结为规律时,有所启示也不乏趣味之处.仔细推敲“淋雨”问题,有一定的复杂性,本文尝试用运动学知识进行简化讨论.

设  $t$  时间内落在人体表面积上的雨滴数为  $N$ , 以其量值的多少表示“淋雨量”的大小.假定雨滴在地面附近的空中均匀分布,单位体积的雨滴数  $n$  为常数,雨滴以平均的收尾速度  $v_0$  下落.将行人表示为一个高为  $a$ 、宽为  $b$ 、厚度为  $c$  的矩形体,在雨中以速度  $v_1$  作匀速直线运动,如 Z-1 图所示.



Z-1 图



## 一、在无风的雨中行走

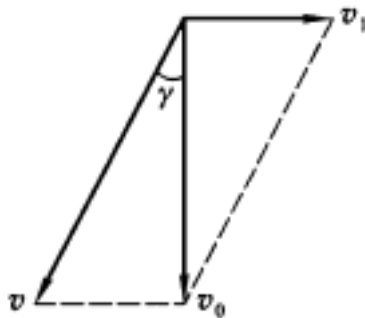
无风时,雨滴以  $v_0$  垂直落下.人对地以速度  $v_1$  作匀速直线运动,在位移  $x$  的过程中,淋雨的时间为

$$t = \frac{x}{v_1},$$

根据运动的相对性,有  $v_{\text{雨对人}} = v_{\text{雨对地}} + v_{\text{地对人}}$ ,

即  $v = v_{\text{雨对人}} = v_{\text{雨对地}} - v_{\text{人对地}} = v_0 - v_1$ .

其中  $v$  为雨对人的速度,如 Z-2 图所示,  $\gamma$  为  $v$  与竖直方向间的夹角.



Z-2 图

Z-1 图中,矩形上表面面积为  $S_1 = bc$ ,前表面面积为  $S_2 = ab$ ,单位时间内的淋雨量分别为

$$n_1 = nS_1 v \cos \gamma \quad \text{和} \quad n_2 = nS_2 v \sin \gamma,$$

$t$  时间内的淋雨量分别为  $N_1 = nS_1 v \cos \gamma \cdot \frac{x}{v_1} = nS_1 x \cot \gamma$

和  $N_2 = nS_2 v \sin \gamma \cdot \frac{x}{v_1} = nS_2 x$ ,

人的位移为  $x$  时的总淋雨量为上述两项之和:

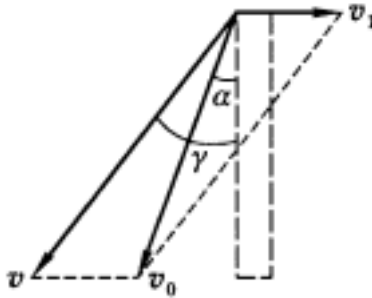
$$N = N_1 + N_2 = nS_1 x \cot \gamma + nS_2 x. \quad (1)$$

式中用到  $\frac{v_1}{v} = \sin \gamma$ .

当  $x$  一定时, 上式中的第二项为一常数. 表明人体前表面接触到的这部分雨滴数与人的行走速度  $v_1$  无关. 这是均匀分布在长为  $x$ , 截面为  $S_2$  的体积内的雨滴数, 被人体前表面扫过而粘附其上的. 第一项为上表面接触到的雨滴数, 当  $x$  一定时, 行走速度  $v_1$  越大, 则  $N_1$  越大而  $\cot \alpha$  越小. 显然, 人跑得越快, 头顶部淋到的雨越少. 撑伞行走时, 将伞前倾可以有效地减少前表面的淋雨量.

## 二、在顶风的雨中行走

雨滴以  $v_0$  与竖直方向成  $\alpha$  角下落的情况如 Z-3 图所示. 由图可知,  $t$  时间内人体头顶部的淋雨量为



Z-3 图

$$N_1 = n S_1 v \cos \alpha \quad \frac{x}{v_1} = n S_1 v_0 \cos \alpha \quad \frac{x}{v_1} .$$

前表面的淋雨量为  $N_2 = n S_2 v \sin \alpha \quad \frac{x}{v_1} = n S_2 (v_1 + v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_1} .$

位移为  $x$  时的总淋雨量为上述两项之和, 可以得到

$$N = N_1 + N_2 = n v_0 (S_1 \cos \alpha + S_2 \sin \alpha) t + n S_2 x, \quad (2)$$

上式中的第二项为一常数. 与前述相同, 同样表明人体前表面接触到的这部分雨滴数与在雨中行走速度无关. 第一项则与在雨中行走所用时间成正比. 显然, 人跑得越快, 头顶部淋到的雨(与  $S_1 \cos \alpha$  相关)越少, 也可减少前表面的淋雨量(与  $S_2 \sin \alpha$  相关).

### 三、在顺风的雨中行走

雨滴以  $v_0$  与竖直方向成  $\alpha$  角下落,从人的背后飘来时,情况如 Z-4 图所示.这时只需将(2)式中的  $v_1$  以  $(v_1 - v_0 \sin \alpha)$  代入,可得位移为  $x$  时的总淋雨量:

$$N = N_1 + N_2 = n \left[ S_1 v_0 \cos \alpha \frac{x}{v_1} + S_2 (v_1 - v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_1} \right] \\ = n v_0 S_1 \cos \alpha \cdot t - n v_0 S_2 \sin \alpha \cdot t + n S_2 x. \quad (3)$$

由(3)式可见,第一项为人体头顶部的淋雨量,与雨中行走时间成正比,快跑可减少这部分淋雨量;第二项与第三项之和为

$$n S_2 x - n v_0 S_2 \sin \alpha \cdot t = n S_2 (v_1 - v_0 \sin \alpha) t,$$

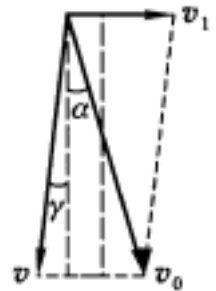
其值由人的行走速度  $v_1$  与雨对地速度的水平分量  $v_0 \sin \alpha$  之差决定.有三种情况:

1.  $(v_1 - v_0 \sin \alpha) < 0$ , 即人的行走速度小于雨对地速度的水平分量.在这种情况下,打到人体后表面的雨滴数,其数量为均匀分布在截面为  $S_2$ 、长为  $(v_1 - v_0 \sin \alpha) t$  体积内的雨量.

2.  $(v_1 - v_0 \sin \alpha) > 0$ , 即人的行走速度大于雨对地速度的水平分量.在这种情况下,有雨滴打到人体前表面,其数值为均匀分布在截面为  $S_2$ 、长为  $(v_1 - v_0 \sin \alpha) t$  体积内的雨量.

3.  $(v_1 - v_0 \sin \alpha) = 0$ , 即人的行走速度等于雨对地速度的水平分量.在这种情况下,打到人体前后表面的雨滴数为零.

显然,这是淋雨量最少的一种方式.总淋雨量仅为头顶部的那部分,即(3)式的第一项.



Z-4图

## 2. 地球卫星受阻后的动能会增大吗

根据动能定理,合外力对质点作负功后,质点的动能将减小.

因此地球卫星若在运动过程中受到各种原因的轻微摩擦作用后,其运动的速率似乎也将越来越小.但实际情况正与此相反,卫星在返回过程中受到轻微摩擦作用后,其动能不但不会减小,反而因速率的变大而增加了危险性.

用以下的简化模型可以初步说明形成这种运动趋势的原因.

设地球  $M$  不动,卫星  $m$  在万有引力作用下绕地球作半径为  $r$  的圆周运动,其速率为

$$v^2 = \frac{Gm}{r}, \quad (1)$$

两边微分,得 
$$2v dv = -\frac{Gm}{r^2} dr, \quad (2)$$

卫星具有机械能为 
$$E = -G \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} mv^2.$$

由功能原理,在  $dt$  时间内摩擦力等耗散力的功等于卫星机械能的增量,即

$$dA = d\left[-G \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} mv^2\right] = G \frac{mM}{r^2} dr + mvdv, \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式,得 
$$dA = -2mvdv + mvdv = -mvdv. \quad (4)$$

由于 
$$dA < 0,$$

所以有 
$$dv > 0.$$

可见,地球卫星在运动过程中受到各种原因的耗散作用后,运动速率的增量大于零.说明卫星的动能非但没有减小,反而增大了.

这似乎不可思议,其实(2)式已经道出了其中原委.由于卫星的速率增大,导致其轨道半径减小,卫星-地球系统的势能减小了.(4)式又告诉我们:系统总机械能的增量小于零,其中动能的增量占势能的减少量的一半.因此,耗散力的作用,使卫星总机械能的减少全部体现在势能的减少上.损失的势能中有一半转化为热,另一半则转化为动能.

### 3. 荡秋千的力学

读者一定都有过荡秋千的经历吧。人在秋千踏板上有规律地站起和下蹲,能使秋千越荡越高。人和秋千的机械能从何而来呢?

如果忽略空气阻力,将秋千的踏板和人作为一个质点组系统,不难从动力学的角度分析这个问题。

在荡秋千的过程中,质点系统所受到的外力有重力和吊绳的拉力。重力是保守力,绳的拉力在秋千的运动过程中处处与踏板的运动方向垂直而不做功。如果将踏板上的的人视为相对静止的质点,则秋千如同单摆,在重力和拉力的作用下作等幅摆动,机械能守恒而绝对不会越摆越高。正是由于人在踏板上作有规律的下蹲和起立运动,才能使秋千荡起来。可见,秋千之所以能够持续摆动,而且越摆越高,关键在于人的内力在恰当的时候、恰当的位置作了功,这是质点组系统内力的功。

会荡秋千的人具有这样的经验:当秋千处在最高位置时,人应下蹲,而当秋千处在最低位置时应当站起。

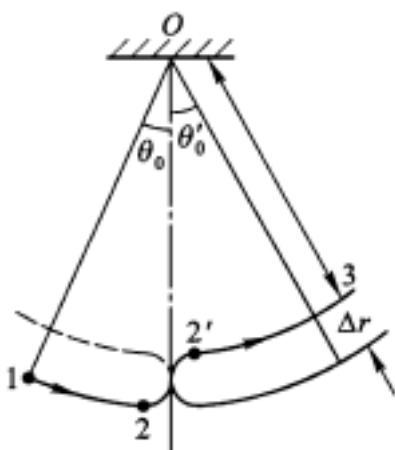
以秋千的踏板为参考系,分析在秋千摆动的半个周期内,质点组内力的功,注意这是非惯性系。如 Z-5 图所示,设秋千的悬挂点为  $O$ ,至人处于下蹲状态的质心距离为  $r_1$ ,处于站立状态的质心距离为  $r_2$ 。当人由下蹲状态从高处往下摆时,质心由位置 1 向 2 运动。在接近 2 时,人开始站起,质心移到 2,然后继续向位置 3 运动。在这过程中,相对  $O$  质心距离的改变量为

$$r = r_1 - r_2 .$$

当秋千处在最低位置 2 时,惯性离心力与重力方向相同,人站起的过程中,内力要克服重力和惯性离心力作功,有

$$A_1 = mg \int_{r_1}^{r_2} r - \frac{1}{2} m \omega^2 r dr$$

$$= mg r + \frac{1}{2} m v^2 (r_1^2 - r_2^2) .$$



Z - 5 图

当秋千处在最高位置 3 时， $v = 0$ ，惯性离心力为零，人在此处蹲下的过程中，内力作负功：

$$A_2 = - mg r \cos \theta_0 .$$

在半个周期内，内力所作的总功为

$$A = A_1 + A_2 = mg r (1 - \cos \theta_0) + \frac{1}{2} m v^2 (r_1^2 - r_2^2) .$$

上式中， $r > 0$ ， $(1 - \cos \theta_0) > 0$ ， $(r_1^2 - r_2^2) > 0$ ，所以有  $A > 0$  .

在一次下蹲和起立的过程中，内力作的功大于零，这就是人在秋千上得以越荡越高的原因，人的内力的功转化成了荡秋千的机械能 .

## 4. 参考系与机械能守恒定律及其他

质点的动能，在不考虑相对论效应情况下，由质点速度的大小决定。对不同的参考系，动能及其增量的量值不同。这样，就引出了与动能概念相关联的问题：外力对质点作功的量值、质点的动能定

理、质点系统的动能定理、功能原理以及机械能守恒定律等,在不同的参考系中表现形式如何?量值上有否变化?在运用有关规律时,需注意哪些问题?

由于牛顿运动定律只在惯性系中成立,因此,以下讨论只限于惯性系.

### 一、不同参考系中的功和动能定理

功被定义为:力在质点运动路径上的积累效果.简而言之:力对空间的积累效果.因此,考虑不同参考系中的功,就需考察力和空间与参考系的关系.

在所有的惯性参考系中,物体间的相互作用不变.因此,一个质点所受到的力,在不同的惯性系中是相同的.但质点在力的作用下发生的位移却是与参考系有关的,因而在不同的惯性系中力所作的功应该有所不同.

以  $K$  和  $K'$  两个惯性参考系为例.设  $K'$  相对  $K$  沿  $x$  轴正方向以速度  $u$  作匀速直线运动,  $t=0$  时,两坐标原点重合.作用在质点上的力为  $F$ .

$dt$  时间间隔内,  $K$  系中质点的位移可写为  $dr = dr' + u dt$ ,

$F$  做功为 
$$A = \int_L F \cdot dr,$$

在  $K'$  系中,  $F$  的功为 
$$\begin{aligned} A' &= \int_{L'} F \cdot dr' = \int_L F \cdot dr - \int_t F \cdot u dt \\ &= A - \int_t F \cdot u dt, \end{aligned}$$

可见,除  $F$  垂直于  $u$  的情况,在通常情况下,功的量值与惯性参考系的相对运动有关.

在非惯性参考系中,质点除受到真实力外,还应考虑惯性力.因此,功的量值更不相同.

在  $K$  系中质点的动能定理为 
$$A = \int_L F \cdot dr = E_k - E_{k0},$$

其中 
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

在 K 系中, 
$$A = \int_L F \cdot dr = \int_L m \frac{dv}{dt} \cdot dr$$

$$= \int_{v_0}^v m v \cdot dv = E_k - E_{k0} ,$$

其中 
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

显然,质点的动能定理在所有的惯性系中都成立,即与惯性系的选取无关,但动能及其增量在不同的惯性系中的量值不同.

由上述对质点的动能定理的讨论,不难推广到质点系统,并可得到如下结论:

1. 质点系统的动能定理:

$$A = A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = \int_L F_i \cdot dr_i = E_{ki} - E_{k0i}$$

$$= E_k - E_{k0}$$

在所有的惯性系中都成立,与惯性系的选取无关.

2. 在不同的惯性系中,质点系统总动能的量值因惯性系的不同选择而异,系统总动能增量的量值也因惯性系的不同选择而不同.

3. 作用于质点系统的所有外力的功和系统内质点间相互作用内力的功,在量值上都与惯性系的选择有关.

## 二、不同参考系中的势能、机械能和功能原理

质点系统的势能是由系统内质点间相互作用的保守力所决定的能量.它只与系统内质点间的相对位置有关.确定了系统的势能零点后,质点在某位置所具有的势能值也就唯一地确定了,与参考系的选择无关.系统势能的增量只与系统内质点间相对位置的变化有关,它给出了系统内质点间相互作用保守力作功的量值,因而也与参考系的选择无关.



质点系统的机械能是系统内所有质点的动能和相互作用势能之和。对于不同的惯性参考系,机械能的量值自然因动能的不同而不同。

综合上述讨论,可作如下小结:

物理量和规律	对不同的惯性参考系
功	量值不同
动能及其增量	量值不同
动能定理: $A = A_{\text{外}} + A_{\text{内}} = E_k - E_{k0}$	规律成立,量值不同
势能及其增量	相同
机械能: $E = E_k + E_p$	量值不同
功能原理: $A = A_{\text{外}} + A_{\text{内非保}} = E - E_0$	规律成立,量值不同

### 三、机械能守恒定律

对一系统,当  $A_{\text{外}} + A_{\text{内非保}} = 0$  时,系统的机械能  $E = E_0 = \text{常量}$ 。这就是机械能守恒定律。然而,由于功在不同的惯性系中有不同的量值,就会出现这样的情况:在惯性系  $K$  中,  $A_{\text{外}}$  和  $A_{\text{内非保}}$  之和为零,系统的机械能守恒;而在惯性系  $K'$  中,  $A_{\text{外}}$  和  $A_{\text{内非保}}$  之和不为零,系统的机械能不守恒。这是在运用机械能守恒定律时需要特别注意之处,否则容易导致错误的结果。

以下的例题可以说明这一点:

**例** 地面上有一作匀速直线运动的车厢,其中有一个固定的光滑斜面,有一质点  $m$  自斜面顶端无初速地滑下,设车厢速度为  $u$ ,分别以车厢和地面为参考系讨论此质点机械能是否守恒。

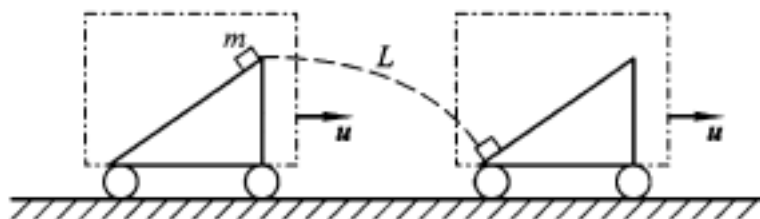
**解:** 由于车厢相对地面作匀速直线运动,因此车厢也是一个惯性参考系。取质点  $m$  和地球为系统。

以车厢为参考系,分析质点  $m$  的受力。重力  $mg$  竖直向下,是保守内力;斜面对质点的作用力  $F_N$ ,是外力,但与质点沿斜面的位移方向垂直,不作功。所以,系统的机械能守恒:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2,$$

式中  $h$  是斜面的高度,  $v$  是质点  $m$  滑到斜面下端时相对车厢速度的大小.

以地面为参考系时, 质点  $m$  的受力情况不变, 但质点的位移有所不同. 质点不再作直线运动, 而是沿曲线  $L$  运动. 如 Z - 6 图所示, 显然  $F_N$  与  $L$  不再垂直, 所以在质点自斜面顶端运动到底边的过程中, 外力  $F_N$  要作功, 因而系统的机械能不守恒.



Z - 6 图

综上所述, 在运用动能定理、功能原理以及机械能守恒定律时, 应该注意动能定理和功能原理在所有的惯性系中都成立, 但具体各项的量值将随参考系而异; 对机械能守恒定律, 则需特别注意其守恒条件因参考系而异, 在某惯性系中机械能守恒, 并不意味着在所有的惯性系中机械能都可以守恒.

## 5. 质点的角动量和刚体定轴转动的角动量

质点的角动量  $L$  是矢量, 这是相对确定的参考点定义的物理量. 用角动量的概念可以方便地描述质点相对某一参考点的运动. 在刚体的定轴转动中, 由于我们着重考察刚体对固定轴 ( $z$  轴) 的转动问题, 因此用刚体对参考点的角动量  $L$  的分量  $L_z$ , 来描述刚体绕  $z$  轴的转动, 相应的规律也用标量形式表示, 比如  $L_z = J$ ,

$M_z = \frac{dL_z}{dt}$  等. 这样处理的好处是可以使初学者较为容易地理解刚体定轴转动的主要特征及其规律. 但应明确, 这些不是描述刚体转动的普遍规律, 即使是在刚体定轴转动的情况下, 也只表示角动量沿转轴的一个分量及其遵循的运动方程, 更不能随意地把  $L_z = J \dot{\theta}$  推广为  $L = J \dot{\theta}$ .

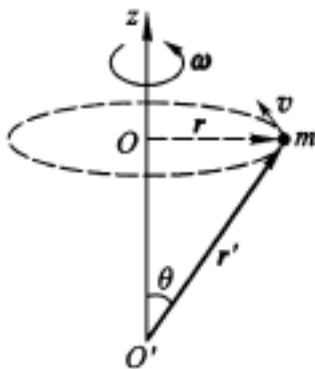
质点的角动量定义为

$$L = r \times p = r \times m v, \quad (1)$$

式中  $r$  是由参考点指向质点位置的矢径,  $p$  为质点在  $r$  处的动量.  $L$  的方向垂直于  $r$  和  $p$  所构成的平面. 并由右手螺旋法则决定.

考察一个质量为  $m$  的质点, 在平面内作半径为  $r$ 、角速度为  $\omega$  的圆周运动. 如 Z-7 图所示. 由于

$$v = \omega \times r,$$



Z-7 图

代入质点角动量的定义式(1), 有

$$L = r \times m v = r \times m (\omega \times r),$$

利用矢量的叉积运算规则:

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B), \quad (2)$$

可得到质点对圆心  $O$  的角动量为

$$L = m r^2 \omega - m r (r \cdot \omega). \quad (3)$$

因为  $r$  垂直于  $\omega$ , 上式第二项为零, 所以有

$$L = m r^2 \omega, \quad (4)$$

即质点对圆平面内圆心  $O$  的角动量  $L$  的方向与质点绕圆心转动的角速度  $\omega$  的方向相同。

若考虑另一个在垂直于圆平面且过圆心的轴线上的  $O$  点, 如 Z-7 图所示, 以  $O$  为参考点时的角动量由 (3) 式可得

$$L = m r^2 \omega - m r r \cos \theta \omega, \quad (5)$$

显然,  $L \neq L$ . 质点的角动量是相对确定的参考点定义的, 相对不同的参考点, 质点角动量  $L$  的量值和方向都不同. 通常情况下, 质点角动量  $L$  的方向与  $\omega$  的方向不相同。

考察刚体绕固定的  $z$  轴转动, 如 Z-8 图所示. 刚体上每一质元  $dm$  都在各自的转动平面内, 以与轴的垂直距离  $r_l$  为半径作圆周运动. 各质元相对轴的角速度相同. 某一瞬时刚体对轴上某点  $O$  的角动量为各质元对该点角动量的矢量和, 可表示为

$$L = \int r \times v \, dm,$$

式中  $r$  为由  $O$  指向质元  $dm$  的矢径. 由于  $v = \omega \times r$ , 利用矢量的叉积运算规则 (2) 式, 可写为

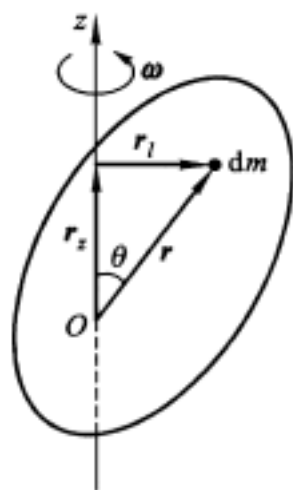
$$L = \int [r^2 \omega - (r \cdot \omega) r] \, dm.$$

由图 Z-8 可知  $r = r_z + r_l$ ,  $r^2 = r_z^2 + r_l^2$ ,  $r \cdot \omega = r \cos \theta \omega$ ,

于是有  $L = \int r^2 \omega \, dm - \int (r \cdot \omega) r \, dm$

$$= \int (r_z^2 + r_l^2) \omega \, dm - \int r \cos \theta \omega (r_z + r_l) \, dm$$

$$= \int r_z^2 \omega \, dm + \int r_l^2 \omega \, dm - \int r \cos \theta \omega r_z \, dm - \int r \cos \theta \omega r_l \, dm$$



Z-8 图

$$r \cos \theta \, r_l \, dm .$$

上式第三项中  $r_z$  的方向与  $\omega$  的方向相同, 因此有

$$- r \cos \theta \, r_z \, dm = - r_z^2 \, dm ,$$

与第一项大小相同而方向相反, 于是上式为

$$\begin{aligned} L &= r_l^2 \, dm - r \cos \theta \, r_l \, dm \\ &= r_l^2 \, dm - r_z \, r_l \, dm \\ &= \left[ r_l^2 \, dm \right] - \left[ r_z \, r_l \, dm \right] \\ &= J_z \, \omega + \left[ - r_z \, r_l \, dm \right] \\ &= L_z + L_l . \end{aligned}$$

由此可知, 刚体绕  $z$  轴转动时, 任意时刻对轴上  $O$  点的角动量  $L$  都有两个分量, 其中之一为

$$L_z = J_z \, \omega = \left[ r_l^2 \, dm \right] \omega , \quad J_z = r_l^2 \, dm ,$$

这是刚体角动量  $L$  沿  $z$  轴的分量, 与角速度的大小  $\omega$  成正比, 与角速度  $\omega$  的方向相同, 比例系数就是刚体对  $z$  轴的转动惯量  $J_z$ . 另一分量  $L_l$  的方向沿  $-r_l$  垂直于  $\omega$ . 这表明, 在刚体绕定轴转动的情况下, 角动量  $L$  的方向通常不与  $\omega$  相同.

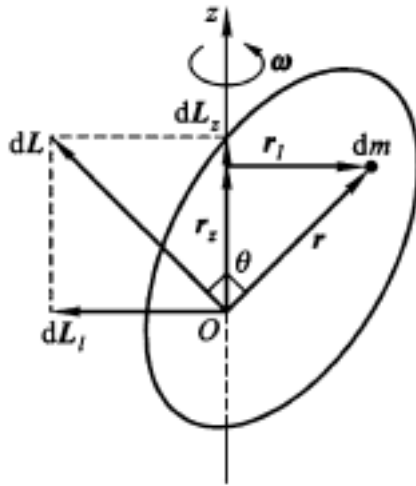
$$\text{由} \quad L_l = \left[ - r_z \, r_l \, dm \right]$$

可见,  $L_l$  的大小虽也正比于角速度的大小  $\omega$ , 但比例系数

$$- r_z \, r_l \, dm$$

是一矢量, “ $-$ ”号表明  $L_l$  的方向随着刚体的转动, 时时处处都垂直于  $\omega$ , 沿  $r_l$  的反方向, 指向  $z$  轴. 某瞬时质元  $dm$  对  $O$  的角动量如 Z-9 图所示. 比例系数  $\left[ - r_z \, r_l \, dm \right]$  的大小由各质元相对  $z$

轴的分布决定,不随时间变化.



Z - 9 图

所以,当刚体绕  $z$  轴转动的角速度  $\omega$  一定时,  $L$  的大小不随时间而变,但方向随时间而变.当  $\omega$  增加若干倍时,  $L$  的大小也增加若干倍,但  $L$  与  $\omega$  间的夹角保持不变.

当  $z$  轴是刚体质量分布的对称轴时,

$$L_l = \left[ - r_z r_l dm \right] = 0,$$

于是有

$$L = L_z = J_z \omega,$$

这时,刚体的角动量  $L$  和角速度  $\omega$  的方向相同.这种情况下的  $z$  轴称为刚体的惯量主轴,  $J_z$  则称为主转动惯量.

当刚体绕固定的惯量主轴转动时,惯量主轴过质心,此时刚体对对称轴的转动惯量,也即对质心轴的转动惯量  $J_c$ . 这时有

$$L = J \omega = J_c \omega,$$

其大小等于主转动惯量与角速度的乘积,即

$$L = J_c \omega.$$

综合上述讨论,可以有如下结论:

1. 无论是对质点,还是对刚体,角动量的普遍定义都是相对参考点的.对一定的角速度  $\omega$ ,角动量  $L$  的方向通常不与其相同.

2. 刚体在定轴转动时角动量  $L$  的方向一般不与  $\omega$  相同 .

$L_z = J \omega$  或  $M_z = \frac{dL_z}{dt}$  等表式, 只是  $L$  及其遵循规律的分量式, 所谓对轴的角动量  $L_z$  实质是  $L$  沿转轴的一个分量 .

3. 仅当固定的  $z$  轴是刚体质量分布的对称轴时, 刚体绕轴转动时的角动量  $L$  才与角速度  $\omega$  同方向 . 这时刚体的转动处于“动平衡”状态, 质心轴即惯量主轴, 不受侧向力 .

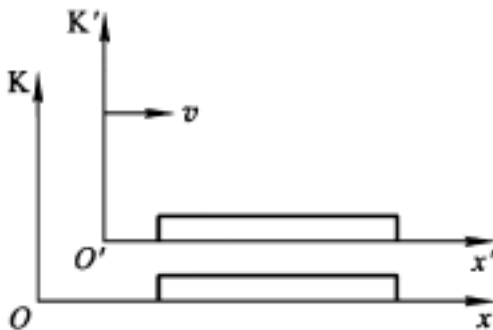
4. 当刚体的转轴由质心轴转移为其他平行于质心轴的新轴时, 虽由平行轴定理可以计算相对新轴的转动惯量, 但刚体的角动量  $L$  不再平行于新轴, 而与角速度  $\omega$  成一定的夹角 .

5. 在通常的定轴转动情况下, 转轴都因  $L_l$  的存在而受到轴承对它作用的约束反力, 只是我们未加以讨论罢了, 并不是说它不存在 .

## 6. 列车会被雷电击中吗

根据狭义相对论的“动尺缩短”效应, 在如 Z - 10 图所示的惯性系  $K$  和  $K'$  中, 互相测量对方参考系中相对静止的米尺时, 都会得出对方的尺变短了的结论 .

设想有这样一个理想实验, 该给出怎样的答案 ?



Z - 10 图

一列车静止时和一山底隧道有相同的长度  $l_0$  .当列车以很快的速度匀速运行,恰好完全进入隧道时,处于隧道中垂线的山顶上,有人看到在隧道的进口和出口处同时发生了雷击,但未见列车被击中 .

列车上的旅客真的不会遇到列车受雷击这件事吗 ?

按照“动尺缩短”效应,在隧道参考系  $K$  中观测时:隧道长度  $l_0$  是固有长度,列车是运动的,其长度为  $l$ ,  $l < l_0$ ,列车比隧道短,未被击中是  $K$  系观测的事实 .而若在列车惯性参考系  $K'$  中观测的话,列车的长度是固有长度  $l_0$ ,隧道则是运动的,应该测得隧道的长度为  $l$ ,同样有  $l < l_0$ ,即隧道比列车短 .这样看来列车上的旅客应该观测到列车被雷击的事件,因此,将与  $K$  系中的观测事实相矛盾,这可能吗 ?

问题在于  $K'$  中的旅客在考虑长度测量的相对性时忽视了相对论的另一最基本的概念:“同时”的相对性 .这里涉及了两个“同时”问题:雷击事件对  $K$  系是同时的,对  $K'$  系不同时,也就是说在列车上观测的两个雷击不可能同时;在列车上测量隧道的长度必须同时,即必须对  $K$  系同时,而此“同时”对  $K'$  系又不同时 .

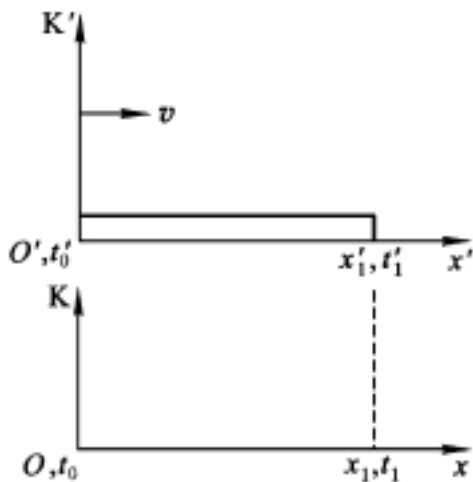
设  $K$  系中,隧道的进口和出口处的时空坐标为  $(O, t_0)$ 、 $(x_1, t_1)$ ,在  $K'$  系中,列车车尾的时空坐标为  $(O', t'_0)$ ,车头处的时空坐标为  $(x'_1, t'_1)$ ,如 Z - 11 图所示 .取列车的车尾恰好进入隧道的时刻为两参考系的计时起点,即  $t_0 = t'_0 = 0$  .根据洛伦兹坐标变换式,有

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ &= \frac{v}{c} .\end{aligned}$$

式中

与此同时,在列车上( $K'$ 系)对隧道进行长度测量,因必须同时,要求





Z - 11 图

$$t_1 = t_0 = 0,$$

得  $x_1 = x'_1 \sqrt{1 - \beta^2}$ , 即

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

表明在列车的车尾恰好进入隧道时, 车头在隧道出口外, 列车在隧道出口外的长度为

$$l = l_0 - l = l_0 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}),$$

车头在隧道出口外运动的时间为

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l_0}{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

另一方面, 对 K 系中在隧道的进口和出口处的雷击事件, 同时发生在  $t_0 = t_1 = 0$  时刻, 即车尾恰好进入隧道的时刻. 这在 K 系中并不同时. 根据洛伦兹变换式, 出口处雷击事件发生的时刻为

$$t = - \frac{vx_1}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{vl_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} < 0.$$

式中的“-”号表明, 在 K 系测得隧道出口处的雷击早于隧道入口处发生.

在隧道的出口处发生雷击的时刻, 列车车头是在隧道内还是

在隧道外？只要比较  $|t|$  和  $t$  的大小不难得出结论：由于  $|t| > t$ ，由此可知，在隧道出口处发生雷击时，列车车头尚在隧道中，此时列车车尾虽然还在隧道的入口外，但那里的雷击尚未发生，而当车尾恰好进入隧道时，入口处发生了雷击。所以，列车上的旅客也不会观测到列车被雷击中。

## 7. 孪生子效应

狭义相对论的“时间膨胀效应”或“运动钟变慢效应”告诉我们：先后发生在惯性系  $K$  中同一地点、有因果关系的两事件的时间间隔  $t$ ，与另一相对作匀速直线运动的惯性系  $K'$  中测得的时间间隔  $t'$  不同，

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < t,$$

式中， $v$  为两惯性系间的相对运动速度， $c$  为真空中的光速。

这就是说，在  $K$  系中某事件的发生、发展及至消亡的时间历程，在  $K'$  系观测者看来变慢了。由于“时间膨胀效应”是相对的，反过来， $K'$  系观测者也会得出发生在  $K$  系中某事件的时间历程变慢的结论。于是，产生了一个似是而非的疑难：假设有两个孪生子甲和乙，甲乘高速飞船到远方宇宙空间去旅行，乙则留在地球上。可以预测一下，假定若干年后飞船返回地球，当孪生子重新会面时，他们将会有怎样的反应呢？地球上的乙会认为：甲处于运动参考系中，他的生命过程进行得较慢，甲应该比自己年轻。而甲则会认为：乙才是运动的，他的生命过程进行得较慢，乙应该比甲年轻。甲和乙究竟谁更年轻些呢？相遇时比较的结果应该是唯一的。当然，这只是一个假想的实验，然而面对这两种矛盾的预测结果，狭义相对论似乎遇到了无法解释的难题。这就是曾经引起激烈争论的所谓孪生子“佯谬”问题。

事实上,早在 1905 年爱因斯坦在他的第一篇关于相对论的论文中,就已阐明了飞船上的甲将比地球上的乙年轻的观点.遗憾的是,这一观点并未为同时代的物理学者所普遍接受.近几十年来,随着对相对论的理论和有关实验的不断深入理解和探索,对所谓“孪生子”问题的认识也已逐步趋于一致:“孪生子”并不存在,确切地说,应该称为“孪生子效应”.理由如下:

1. 根据狭义相对论对参考系的约定,甲不能给出乙比甲年轻的结论.狭义相对论是关于惯性系的理论,甲要回到出发点必须有变速运动过程.如果甲的飞船是作匀速直线运动的惯性系,则不可能再回到出发点,他一定是有去无回.若是转了一个圈子回来,相对于乙的惯性系,甲是在作变速运动,不是惯性系.狭义相对论的结论对甲不适用,因而甲是得不出乙比甲年轻的结论的.

2. 根据狭义相对论的时间膨胀和同时性的相对性,可以得出甲比乙年轻的结论.设想一个甲相对于乙作变速运动的加速—匀速—减速,然后反向加速—匀速—再减速的过程,使甲最终与乙处于相同的惯性系,可以进行比较.运用狭义相对论的时间膨胀和同时的相对性,分析甲所经历的几个不同惯性系,假定从一个惯性系进入另一惯性系时的加速过程极短,不难得出结论:不论是从甲来预测还是从乙来预测,都是飞船上的甲要年轻些.根据广义相对论,得出的结论相同.

综合上述讨论,可以将结论总结为:谁相对于整个宇宙作更多的变速运动,谁就更年轻,谁也就活得更长久.

3. 实验的验证.1966 年用  $\mu$  子做了一个类似于孪生子旅游的实验,让  $\mu$  子沿一直径为 14 m 的圆环运动,再回到出发点,这同甲的旅行方式是一样的.实验结果表明,旅行中的  $\mu$  子的确比未旅行的  $\mu$  子寿命更长.1975 年到 1976 年间,马里兰大学的一个研究小组用精确度极高的原子钟乘飞机进行了测量,发现铯原子钟在两次航程中显示了时间延缓效应,实验结果与广义相对论的理论计算比较,在实验误差范围内相符.

因此可以说, 孪生子“佯谬”并不存在, 这是一种客观存在的效应, 应称为孪生子“效应”。

## 8. 最概然速率不对应最概然动能

在麦克斯韦速率分布律中, 气体分子热运动的最概然速率  $v_p$  表示: 在温度为  $T$  的平衡状态下, 气体分子中最可能具有的速度值, 从相同的速率间隔来看,  $v_p$  表示在速率为  $v_p$  附近单位速率间隔内, 分子出现的概率最大。由于  $v_p$  所对应的分子动能可表示为

$$= \frac{1}{2} m v_p^2 . \quad (1)$$

这是否可称为分子的最概然动能  $\epsilon_p$  呢?

顾名思义, 分子的最概然动能应为: 在温度为  $T$  的平衡状态下, 气体分子中最可能具有的动能值, 从相同的动能间隔来看, 在动能为  $\epsilon_p$  附近单位动能间隔内, 分子出现的概率最大。

由麦克斯韦速率分布不难得到气体分子的动能分布为

$$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{\epsilon}{kT}\right],$$

令  $\frac{d}{d\epsilon} f(\epsilon) = 0$ , 得到最概然动能为

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} kT, \quad (2)$$

将  $v_p^2 = \frac{2kT}{m}$  代入(1)式, 可得

$$= kT . \quad (3)$$

显然, (2)式表示的是分子的最概然动能, 它与(3)式所表示的最概然速率所对应的分子动能不相等。

对于处在平衡状态的同一个人气体系统, 为什么从速率分布, 即从相同的速率间隔来看, 在速率为  $v_p$  附近单位速率间隔内, 动能

为  $\frac{1}{2} m v_p^2 = kT$  的分子出现的概率最大, 而从动能分布, 即从相同的动能间隔来看, 在动能为  $\epsilon_p$  附近单位动能间隔内, 却是动能为  $\epsilon_p = \frac{1}{2} kT$  的分子出现的概率最大呢?

问题在于“相同的速率间隔”和“相同的动能间隔”不是一回事. 一个物理量的统计分布规律是与相应的统计间隔相联系的. 速率分布律与单位速率间隔相联系, 而动能分布律则与单位动能间隔相对应. 上述两种分布的“间隔”是不相等的.

$$\text{由动能} \quad \epsilon = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{可得其间隔} \quad d\epsilon = m v d v = \sqrt{2 m \epsilon}^{\frac{1}{2}} d v,$$

$$\text{即} \quad \frac{d\epsilon}{d v} = \sqrt{2 m \epsilon}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

可见, 两种分布的“间隔”不但不相等, 而且也不是简单的线性关系. 因此, 动能分布律与速率分布律的函数曲线也就不是简单的放大或缩小的关系.

动能  $\epsilon_p = \frac{1}{2} kT$  对应的速率为  $v = \sqrt{\frac{kT}{m}} < v_p$ , 表明取相同速率间隔时,  $v_p$  附近速率间隔内的分子数最多; 但考虑相同动能间隔内的分子数时, 速率在  $v$  附近的分子数所占的速率间隔  $d v$ , 大于速率在  $v_p$  附近的分子数所占的速率间隔  $d v_p$ .

$$\text{由} \quad d\epsilon = m v d v,$$

$$\text{取相同的动能间隔 } d\epsilon \text{ 时, 有 } m v d v = m v_p d v_p,$$

$$\text{得} \quad \frac{d v}{d v_p} = \frac{v_p}{v} = \sqrt{2}.$$

由于在速率分布中占据的速率间隔不同, 因此其中的分子数自然也不同. 它们的分子数之比为

$$\frac{d N}{d N_p} = \frac{f(v) d v}{f(v_p) d v_p} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2e^{-1}} \sqrt{2} = \sqrt{\frac{e}{2}} > 1.$$

## 9. 单位时间内有多少分子碰撞了单位壁面

在推导理想气体的压强公式和讨论经典理论对迁移现象的解释时,都涉及单位时间内有多少分子碰撞或越过了某一单位面积的问题.有用系数为 $\frac{1}{6}$ 的,也有用 $\frac{1}{4}$ 的,孰是孰非?在做出判断之前,先简单地回顾一下这两个系数是如何得出的:

1. 根据平衡态气体各向同性的性质,分子速度的分布应与方向无关,满足关系:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

因此认为处于平衡态的气体分子,分别沿上、下、前、后、左、右六个方向运动的分子数各占总数的 $\frac{1}{6}$ .据此,可以导出理想气体的压强公式.

设单位体积内的分子数为 $n$ ,每个分子以平均速率 $\overline{v}$ 运动,其中沿 $x$ 轴正方向或反方向运动的分子应各占总分子数的 $\frac{1}{6}$ . $d t$ 时间内,垂直撞击与 $x$ 轴垂直的单位面积的分子数 $d n$ ,分布在以单位面积为底,长为 $\overline{v} d t$ 的圆柱体内:

$$d n = \frac{1}{6} n \overline{v} d t,$$

设每个分子的质量为 $m$ ,与器壁的一次弹性撞击,动量的变化是 $2 m \overline{v}$ ,则单位时间内垂直作用于器壁单位面积上的力,即压强为

$$p = \frac{2 m \overline{v} d n}{d t} = 2 \frac{1}{6} n m \overline{v^2} = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}.$$

在讨论经典理论对迁移现象的解释时,同样假定了宏观小微观大局域内的分子处于平衡态,各向同性并以平均速率 $\overline{v}$ 运动,

从而认为单位时间内垂直越过单位面积的分子数为  $\frac{1}{6} n \bar{v}$ , 得到粘度系数为  $\eta = \frac{1}{3} n m \bar{v} \lambda$  的结果。

2. 考虑沿某一方向运动分子的速率并非都是  $\bar{v}$ , 而是有一定的分布。根据麦克斯韦假定: 在热平衡态下分子速度任一分量的分布应与其他分量的分布无关, 即速度三个分量的分布是彼此独立的, 有

$$f(v_x, v_y, v_z) = g(v_x) g(v_y) g(v_z),$$

$$g(v_i) = \left[ \frac{m}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[ -\frac{mv_i^2}{2kT} \right] \quad (i = x, y, z).$$

$dt$  时间内, 垂直撞击与  $x$  轴垂直的单位面积的分子数  $dn$ , 分布在以单位面积为底, 长为  $v_x dt$  的圆柱体内:

$$\begin{aligned} dn &= [ng(v_x)dv_x] v_x dt \\ &= ndt \left[ \frac{m}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^{v_x} v_x \exp\left[ -\frac{mv_i^2}{2kT} \right] dv_x \\ &= ndt \frac{kT}{m} \left[ \frac{m}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$J = \frac{dn}{dt} = n \frac{kT}{m} \left[ \frac{m}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}} = n \frac{1}{4} \left[ \frac{8kT}{m} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} n \bar{v}.$$

这是个研究分子蒸发和凝结以及泻流现象的重要公式。

对同样的问题, 怎么会有不同的结果呢?

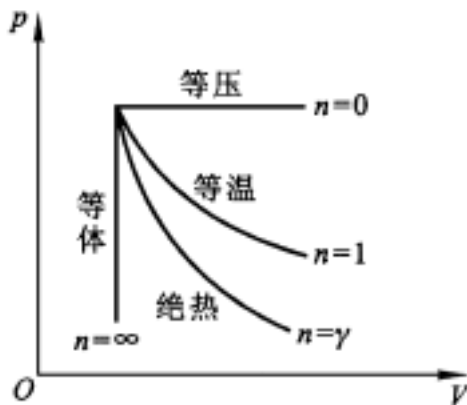
仔细分析不难看出: 两者所给出的定量的数值结果虽然稍有差异, 但在数量级上是基本相同的; 两者的定量结果与实验值虽然都有一定的甚至较大的偏离, 但所反映的规律或趋势是可信的; 两者虽然都取了相当简单的初级理论模型, 但所取模型的精细或粗糙程度是不同的。比如, 这两个模型都未考虑分子间的相互作用, 未考虑分子的实际大小, 未考虑能量分布的离散性等等, 但前者假

定所有分子都以速率  $\bar{v}$  运动,而后者考虑了速率分布,显然模型的精细程度是不同的。

定性、半定量初级理论的一大优点就在于其物理图像清晰、简明。建立在不同粗糙程度上的模型,得出不同的系数是很自然的事,但模型所反映的最本质的物理特征是相同的,其结论从定性的趋势和数量级的大小上看是正确的。这种好处的代价是牺牲一些理论的严密性和定量结果的准确性。在上述问题的讨论过程中,实际上已体现了初级理论的这一特点。或者说,如果我们把握了研究问题的思想方法和所取物理图像间的区别,那么对系数是  $\frac{1}{6}$  还是  $\frac{1}{4}$  这一问题的来由也就自然清楚了。

## 10. 多方过程的热容量和热力学特征

理想气体的状态发生变化时,如果在  $p - V$  图上的过程曲线满足方程:  $pV^n = \text{常量}$ ,则该过程常被称为多方过程,  $n$  为多方指数。多方过程包含了理想气体的三个等值过程和绝热过程。如 Z - 12 图所示:



Z - 12 图



等压过程有:  $p = \text{常量}$ , 对应多方过程中  $n = 0$ ;

等温过程有:  $pV = \text{常量}$ , 对应多方过程中  $n = 1$ ;

等体过程有:  $dV = 0$ , 对多方过程方程求微分, 可有  $n =$  ;

绝热过程有:  $pV^\gamma = \text{常量}$ , 对照可知  $n =$  .

若将绝热过程称为等熵过程的话, 则上述四个过程都可称为等值过程, 都是多方过程在  $n$  取不同数值时的特例. 这些典型等值过程的物理特征可分别表示为

$$dp = 0 \quad (\text{等压过程}),$$

$$dT = 0 \quad \text{或} \quad dE = 0 \quad (\text{等温过程}),$$

$$dV = 0 \quad \text{或} \quad dA = 0 \quad (\text{等体过程}),$$

$$dS = 0 \quad \text{或} \quad dQ = 0 \quad (\text{绝热过程}).$$

那么, 多方过程更为一般的物理特征体现在何处?

将热力学第一定律应用于理想气体的一个准静态过程, 若取该过程的摩尔热容为  $C_m = \frac{dQ}{dT} = \text{常量}$ , 则一定有  $\left[ 1 - \frac{R}{C_m - C_{V,m}} \right]$  也是常量, 令其为多方指数  $n$ , 即可得到多方过程的方程. 同时可得到多方过程的摩尔热容为

$$C_m = \frac{dQ}{dT} = C_{V,m} \left[ \frac{-n}{1-n} \right],$$

将四个典型等值过程对应的  $n$  值代入(1)式, 有

$$C_m |_{n=0} = C_{p,m} = C_{V,m} \quad (\text{等压过程}),$$

$$C_m |_{n=1} = C_{T,m} = \quad (\text{等温过程}),$$

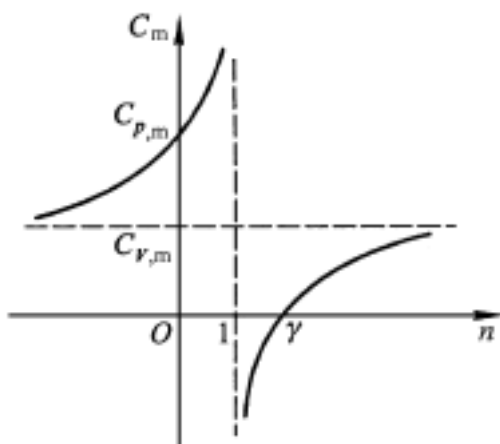
$$C_m |_{n=\infty} = C_{V,m} = \frac{R}{-1} \quad (\text{等体过程}),$$

$$C_m |_{n=\infty} = C_{Q,m} = 0 \quad (\text{绝热过程}).$$

式中 
$$= \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} .$$

显然, 在过程中的摩尔热容保持不变, 可认为是多方过程的物理特征.

物质系统的温度变化所需要吸收的热量, 不仅与物质的结构有关, 而且与状态变化所经历的过程有关. 对不同的多方过程, 多方指数  $n$  不同, 其摩尔热容也应具有不同的定值. 由四个等值过程的多方指数可知,  $n$  的取值遍及整个实数范围. 若以  $n$  为横坐标, 以  $C_m$  为纵坐标, 可得到摩尔热容随多方指数  $n$  的变化趋势, 如 Z - 13 图所示. 值得注意的是, 在  $C_m > 0$  区域内的各多方过程, 系统在所经历各微元过程中都表现出吸热升温或放热降温的特征, 而在  $C_m < 0$  区域内的各多方过程, 则都表现出吸热降温或放热升温的特征. 与此同时, 随着过程的进行, 系统的宏观参量  $p$  和  $V$  也有相应的变化. 因此, 多方过程可以描述物质热力学状态可能发生的较为多样的变化过程, 反映出物质的诸如“冷胀热缩”、“吸热降温”、“压强变大体积也变大”等热力学特征.



Z - 13 图

为了便于说明, 以  $p - V$  图上的等压线、等体线、等温线和绝热线为界, 把经历多方过程的前后, 理想气体的初、末状态分为互相对应的 4 组 8 个区域, 如 Z - 14 图所示, 这 4 组分别为 1 和 5, 2 和 6, 3 和 7, 4 和 8. 设 1 mol 理想气体由某区域内的某一初态, 由多方过程经状态  $a$ , 至另一对应区域内的某一末状态. 过程曲线在

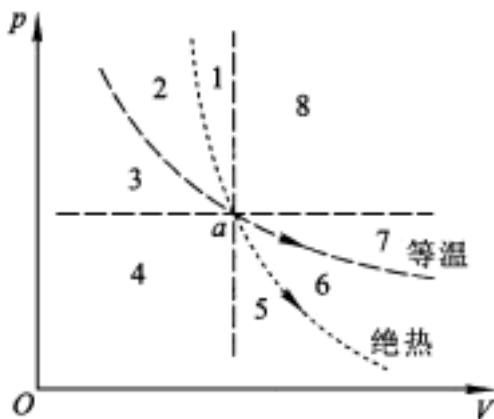
$$a \text{ 的斜率为 } \left. \frac{dp}{dV} \right|_a = -n \frac{p_a}{V_a} .$$

下面以微元过程的  $dV > 0, dA > 0$  为例说明:

1. 在 1 a 5 的多方过程中:  $dT < 0, n < 1, C_m > 0$ .

$$\text{系统吸热: } dQ = C_{V,m} \left[ \frac{-n}{1-n} \right] dT < 0;$$

$$\text{内能增量: } dE = C_{V,m} dT < 0.$$



Z - 14 图

系统在该元过程中, 体积膨胀, 压强下降, 对外作正功, 同时又向外界放热, 系统温度降低. 表现出物质“放热膨胀降温降压”即“冷胀热缩”的性质. 系统能量的输出来源于内能的减少.

2. 在 2 a 6 的多方过程中:  $dT < 0, 1 < n < \infty, C_m < 0$ .

$$\text{系统吸热: } dQ = C_{V,m} \left[ \frac{-n}{1-n} \right] dT > 0;$$

$$\text{内能增量: } dE = C_{V,m} dT < 0.$$

系统在该元过程中, 体积膨胀, 压强下降, 对外作正功, 同时从外界吸热, 系统温度降低. 表现出物质“吸热膨胀降温降压”的性质. 由于系统对外作功大于从外界的吸热, 因此系统内能减少.

3. 在 3 a 7 的多方过程中:  $dT > 0, 0 < n < 1, C_m > 0$ .

$$\text{系统吸热: } dQ = C_{V,m} \left[ \frac{-n}{1-n} \right] dT > 0;$$

$$\text{内能增量: } dE = C_{V,m} dT > 0.$$

系统在该元过程中,体积膨胀,压强下降,对外作正功,同时从外界吸热,系统温度升高.表现出物质“吸热膨胀升温降压”的性质.由于系统对外做功小于从外界的吸热,因此系统内能增大.

4. 在 4 a 8 的多方过程中:  $d T > 0, n < 0, C_m > 0$ .

$$\text{系统吸热: } d Q = C_{v,m} \left[ \frac{-n}{1-n} \right] d T > 0;$$

$$\text{内能增量: } d E = C_{v,m} d T > 0.$$

系统在该元过程中,体积膨胀,压强增大,对外作正功,同时从外界吸热,系统温度升高.表现出物质“吸热膨胀升温升压”即“体积越大压强越大”的性质.由于系统吸收的热量远大于对外做功,因此系统内能也增大.

若将上述四个微元过程反向进行,即  $d V < 0, d A < 0$ ,则相应的结论也都相反,在这些反向进行的多方过程中, $n$ 不变, $d T$ 的正负相反.

由上述讨论可知,多方过程的确是较四个等值过程更为一般的过程.

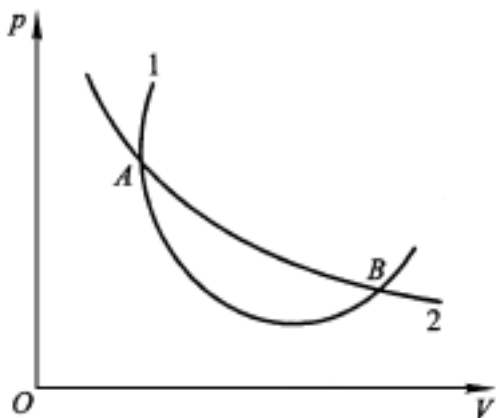
应该指出,若将以上结论推广为:任意热力学过程都是多方过程,这样的说法是不妥当的.利用 Z - 15 图所示的两过程曲线可予以说明:设有一任意过程曲线 1 与等温线 2 相交于  $p - V$  图上  $A、B$  两点.若认为任意过程 1 就是多方过程,则  $A、B$  两点应同时满足:

$$p_A V_A = p_B V_B \quad \text{和} \quad p_A V_A^n = p_B V_B^n,$$

$$\text{可得} \quad V_A = V_B, \quad p_A = p_B,$$

即  $A、B$  两点重合.表明多方过程与等温过程曲线只能有一个交点,图中的曲线 1 不是多方过程,它只是一个任意过程.

此外还应明确,理想气体多方过程的摩尔热容“在过程中保持不变”的特征,仍然是经典理论范畴内的结论.然而,通过对理想气体多方过程的讨论,可以为研究一般情况下实际气体的实际过程提供有益的思考线索.



Z - 15 图

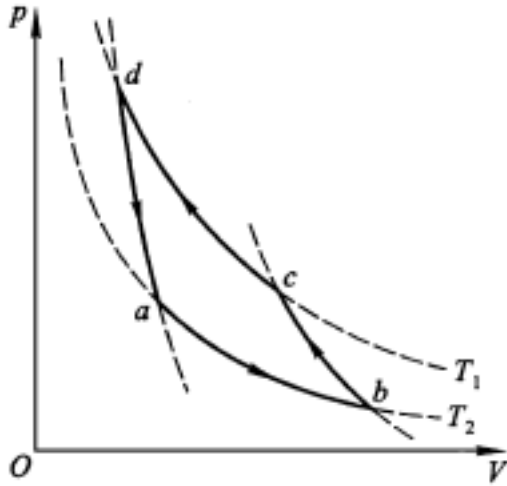
## 11. 冰箱可以替代空调降温吗

冰箱可以制冷,使储存于冰箱内的食物在低温环境下保持一定的新鲜度.那么,打开冰箱门能否使房间温度降低呢?在影视作品中确有淘气的小孩做这样的事而受到大人斥责的情节,斥责的理由从物理学的角度来看成立吗?

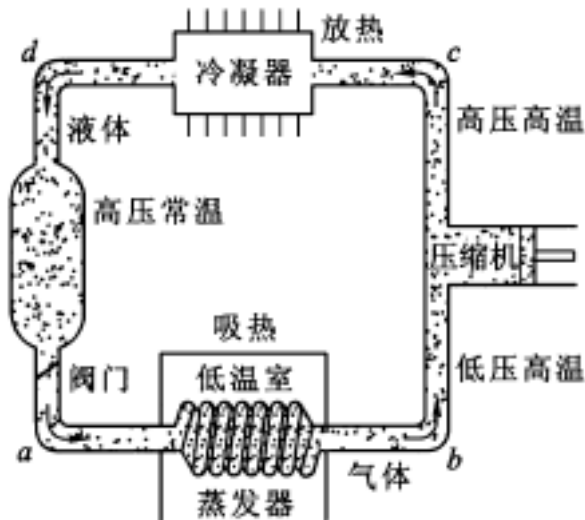
热力学的知识告诉我们,冰箱是使工作物质(制冷剂)作逆循环的设备.与空调器相同,是一种制冷机.

理想的制冷机是卡诺冷机,所作的循环是卡诺逆循环过程,如 Z - 16 图所示.任何实际制冷机的循环过程都应尽可能地接近卡诺冷机的循环过程.家用制冷机的结构原理如 Z - 17 图所示,其工作物质所经历的实际过程虽不是卡诺循环,但对照 Z - 16 图,有助于对 Z - 17 图所示循环过程的理解:处于液体状态的工作物质(即热力学系统)被汽化后,从 Z - 17 图中的  $a$  点出发,在低温低压区(蒸发器和低温冷冻室)膨胀吸热,带走这区域内和置于其中的物质的热量,使低温室的温度降低,这就是制冷作用;此过程中,系统(汽态)本身由于吸热而温度有所升高,至  $b$  点;而后经压

压缩机做功,系统的压强增大,温度进一步升高(高于环境温度),至  $c$  点;然后经冷凝器,在其中向外界(环境)放出热量,系统本身则温度降低,由汽态凝结为液态,至  $d$  点;处于高温常压(相对低温区而言)液体状态的工作物质可以流回到储液罐,从而完成系统的整个循环过程。



Z - 16 图



Z - 17 图

若以  $A$  表示压缩机对系统所作的功(此功可由电能做功完成),以  $Q_2$  表示系统通过蒸发器从低温冷冻室吸取的热量,以  $Q_1$  表示系统通过冷凝器向室内环境放出的热量,则冰箱的制冷系数可表示为

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2},$$

在工作物质的一个循环过程中,向室内环境放出的热量为

$$|Q_1| = A + Q_2 = A(1 + w).$$

假定一冰箱的制冷系数  $w = 5$ ,即意味着若电能做功  $A = 1 \text{ J}$  时,冰箱可从冷冻室吸取的热量  $Q_2 = 5 \text{ J}$ ,同时向室内环境放出  $Q_1 = 6 \text{ J}$  的热量.

把冰箱门打开,情况会怎样呢?电能做功  $A = 1 \text{ J}$  时,冰箱可从整个室内而不是从冷冻室吸取热量  $Q_2 = 5 \text{ J}$ ,这固然应使房间的温度降低,然而由于起散热作用的冰箱冷凝器也在室内,并同时向室内放出了  $Q_1 = 6 \text{ J}$  的热量,室内温度显然不会降低.况且如此方式运行时,冰箱冷冻室永远达不到预设的温度要求,压缩机将超负荷运转,也是十分不利的.所以,企图用打开冰箱门的方式替代空调是不行的.

当然,正常使用的冰箱在工作物质的一个循环过程中,使冷冻室达到预设低温的同时,仍然会向室内放出  $6 \text{ J}$  的热量(按上述假定),这也正是通常要求将冰箱置于通风处的道理.

从另一角度看,用制冷机的工作方式取暖,不但有效而且是非常经济的,这就是热泵型空调机.若将制冷机的蒸发器置于室外,而将冷凝器置于室内,仍按上述数据估算:耗费  $1 \text{ J}$  的电能,制冷机将从室外的大气环境中吸取  $5 \text{ J}$  的热量,向室内放出  $6 \text{ J}$  的热量,使室内温度提高.而若以电加热的方式取暖,同样的情况则需要  $6 \text{ J}$  的电能.所以,在达到同样室内温度的条件下,用热泵型空调机取暖比用电加热取暖方式省电.

## 12. 关于电势零点的选择

静电场的环流定理  $\oint_L E \cdot dl = 0$  表明静电场是保守场,与万有引力、重力、弹性力等做功的特点相同,静电力做功也与路径无关,可以引入“电势”来描述场的空间分布.由于电势  $V(r)$  是场空间位置  $r$  的标量函数,较之用电场强度矢量  $E(r)$  来描述场的分布,有其便利之处.

我们知道:静电场空间某点  $P$  的电势是相对电势零点的,脱离这一前提,孤立地讲“ $P$  点的电势”是无意义的.从原则上看,静电场电势零点的选择具有任意性,对于不同的电势零点, $P$  点的电势函数值不同;但电势零点选择的任意性,并不影响  $P$  点与电场中任一确定点间的电势差,有物理意义的是“电势差”.

在理论计算和实际问题中,对电势零点的取法常有一些“约定”,比如:对分布于有限区域的电荷系统,取无穷远处为电势零点;对无限连续分布的电荷系统,一般不能取无穷远处为电势零点;通常,取大地为电势零点……这些“约定”与电势零点选择的任意性有无矛盾?对于既有无限分布又有有限分布的电荷系统,其电场空间的电势零点又该如何确定?

对于上述问题的考虑,应该注意:(1) 在静电场中,一旦选定电势零点后,电场空间各点有唯一确定的电势值;(2) 电势零点作为确定电场空间某  $P$  点电势的一个参考点,对它的选取通常总是希望使  $V_P$  的表达式具有最简单、自然的形式;(3) 理想模型的适用条件.

### 一、电势零点的选择具有“任意性”的依据

静电场空间  $P$  点的电势,根据定义



$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl,$$

$P_0$  为电势零点. 当电势零点从  $R_0$  转移到某  $P_0$  点时, 有

$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl = \int_P^{P_0} E \cdot dl + \int_{P_0}^{P_0} E \cdot dl = \int_P^{P_0} E \cdot dl + V_0.$$

相对  $P_0$ ,  $P$  点的电势为

$$V_P = V_P - V_0 = \int_P^{P_0} E \cdot dl.$$

由于电势零点的变化,  $P$  点的电势改变一个常量  $V_0$ ,

$$V_0 = \int_{P_0}^{P_0} E \cdot dl.$$

可见,  $P$  点的电势为相对量, 随电势零点的变化而改变.

根据电场强度矢量  $E$  和电势梯度的关系

$$E = - \frac{V}{n} e_n = - \frac{(V - V_0)}{n} e_n$$

可知, 电势零点的改变并不影响对静电场的分布的描述.

由于  $P_0$  是静电场空间的任意点, 因此可以说电势零点的选择具有任意性.

## 二、对理论模型的某些‘附加限制’

实际的带电体总有一定的线度, 电荷也只能分布在有限的空间范围内. 电场空间任一确定点的电势与无限远处的电势之差是一确定的常数  $V_0$ . 因此可以选该确定点为电势零点, 也可选无限远处的电势为零. 最简单、自然的做法就是令  $V_0 = 0$ . 即, 对于实际的带电体, 取无限远处为电势零点是既合理又很自然的选择.

然而, 当我们讨论两类理想化的物理模型时, 这种电势零点选择的任意性将会受到因模型而产生的某种附加限制.

比如, 对于点电荷电场:

取无限远处为电势零点时, 距点电荷  $r$  处  $P$  点的电势为

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r};$$

若取距点电荷  $r_0$  处的  $P$  点为电势零点时,  $P$  点的电势为

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right];$$

但若取点电荷自身处  $r=0$  为电势零点, 则将有  $V_P = \infty$ , 导致发散的结果, 使空间各点处的电势没有确定的函数值.

又如, 对电荷均匀分布的无限大带电体(线、面)的电势零点, 不能取在无限远处, 否则也将导致空间电势值发散的结果.

对于均匀带电无限长直线,

$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_0 - \ln r),$$

若取  $r_0 = 1$  处为电势零点, 自然有  $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 = 0$ , 则  $P$  点的电势为

$$V_P = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r.$$

对于均匀带电无限大平板,

$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl = \int_r^{r_0} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (r_0 - r),$$

若取  $r_0 = 0$  处为电势零点, 则  $P$  点的电势为

$$V_P = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r.$$

在上面两例中, 若取  $r_0 = \infty$  为电势零点, 则空间各点的  $V_P$  都没有确定的数值.

以上三例都是理想化的带电系统, 电势零点的选择都具有某种限制性. 这种限制性是意味着“电势零点的选择具有任意性”原则有某些例外, 还是来源于物理模型本身呢? 答案是后者. 对“点电荷”模型, 在  $r_0 \rightarrow 0$  情况下, 模型成立的前提已不复存在; 对“无限大带电体”模型, 同样是在考察范围的尺度远小于带电体线度时的近似和抽象, 当考察范围的尺度超出该限制时, “无限大带电体”

模型也随之失效。

任何物理模型都有其成立的前提和条件,取定了带电体的物理模型,那么,随之附带的关于电势零点选取限制条件也就同时被确定了:“电势零点的选择具有任意性”这一原则仍然具有普遍适用性。

从上述讨论,可作如下总结:因静电场的场强矢量  $E$  的大小是空间位置  $r$  的函数,若将其表示为  $E = Kr^{-n}$ ,则对于均匀带电大平板的场强大小  $n = 0$ ;对于均匀带电长直线的场强大小  $n = 1$ ;对于点电荷的场强大小  $n = 2$ ;对于电偶极子的场强大小  $n = 3$ .....取无限远处为电势零点时,电场空间  $P$  点的电势可表示为

$$V_P = \int_r \frac{K}{r^n} dr = \frac{K}{(-n+1)r^{n-1}} \Big|_r = \begin{cases} \text{发散} & (\text{当 } n = 1), \\ \text{收敛} & (\text{当 } n > 1). \end{cases}$$

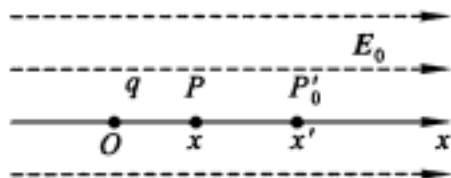
由上式可知,对于点电荷、电偶极子、电四极子以及所有可用它们的组合表示的、在有限范围分布的电荷系统,它们的场强大小,都满足  $n > 1$ ,上述积分收敛,都可以取无限远处为电势零点.反之,则应考虑取除去“无限远”的其他点为电势零点。

### 三、零点电势不同的组合系统的电势

对零点电势不同的组合系统,比如点电荷和无限大带电平板组合系统,或者带电导体球和无限大带电平板组合系统,零点电势的限制条件不同.对于这样的系统,电势零点该如何取呢?

根据前面的讨论可知:当系统涉及理想化的物理模型时,也附带了模型对电势零点选择的限制条件.当系统涉及多个理想化物理模型时,这种限制条件既不应增加,也不应减少;电势零点选择的任意性原则具有普遍适用性.除受限制处不能被选作电势零点外,其他任何处都可以.至于选在何处较为方便、自然并可使电势表达式比较简洁,则可根据问题而各显神通,并不是唯一的。

以下,通过均匀外电场  $E_0$  中放置一个点电荷  $q$ ,求系统的电势为例予以说明。



Z - 18 图

这是两个理想模型的组合:点电荷和无限大均匀带电平板的组合系统.系统的电势零点既不能取在点电荷处也不能取在无限远处.为简便起见,如图所示,取坐标轴  $Ox$ ,使点电荷  $q$  位于  $x$  轴上原点处.设  $P_0$  为电势零点,则  $x$  轴上  $P$  点的电势可表示为

$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl = \int_P^{P_0} E \cdot dl + V_0,$$

这里,  $E$  是合场强,  $\int_P^{P_0} E \cdot dl$  是  $x$  轴上  $P$  和  $P_0$  间的电势差,  $V_0$  为  $P_0$  和电势零点间的电势差.  $P$  点的电势为

$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^{P_0} E \cdot dl + V_0 \\ &= (E_0 x - E_0 x) + \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \right] + V_0 \\ &= \left[ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - E_0 x \right] + \left[ E_0 x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} + V_0 \right], \end{aligned}$$

显然,若令常数  $E_0 x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} + V_0 = 0$ ,

则  $P$  点的电势为  $V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - E_0 x$ .

这是  $P$  点相对电势零点  $P_0$  的电势差,亦即在图示坐标系下  $P$  点电势的最简表达式.

令  $V_0 = 0$ ,即取  $P_0$  为电势零点,则由  $E_0 x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} = 0$ ,可得  $P_0$  的坐标值为

$$x = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$$

#### 四、“接地”和“取无限远处为电势零点”的等效性问题

在需要静电屏蔽的场合,通常将地球视为不带电的、曲率半径为无限大的导体球,并取地球电势为零。“接地”使导体空腔的电势  $V_{\text{地}} = 0$ ,以隔离空腔内外因场强分布和电势分布的变化而引起的相互影响。“接地”有如此作用,隐含的前提是:地球的电势是稳定的.此外,实际带电体的线度、电荷分布的范围都是有限的,理论上,这种带电系统的电势零点自然地都应取在无限远处(现在应考虑在地球外),即  $V_{\infty} = 0$ .那么  $V_{\text{地}}$  和  $V_{\infty}$  间有无电势差?  $V_{\text{地}} = V_{\infty} = 0$  的依据何在?

让我们回到电势的定义表达式来考虑这个问题:

$$V_P = \int_P^{P_0} E \cdot dl = \int_P^{P_0} E \cdot dl + \int_{P_0}^{P_0} E \cdot dl = \int_P^{P_0} E \cdot dl + V_0,$$

$$V_0 = \int_{P_0}^{P_0} E \cdot dl.$$

由于实际带电体或导体空腔的尺度都远小于地球的尺度,把它们视为一个点,用  $P$  表示,地球作为不带电的大导体球,取其相对  $P$  的远端为  $P_0$ ,而无限远处为  $P_{\infty}$ .这样,问题就归结为:取地球的电势为零时,在  $P$  的带电多或少或接地情况下的  $V_0$  是否都趋于零.

当地球表面在  $P$  的所在区域感应出电荷时,“当地”的场强正比于“当地”的感应电荷面密度,即  $E_P \propto \sigma_P$ ,而等量异号的感应电荷分布在极大范围的远端,其面密度  $\sigma_{P_0} \propto \frac{1}{r^2}$ ,因而  $E_{P_0} \propto \frac{1}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}$ ,故  $V_0 \propto \int_{P_0}^{P_0} E \cdot dl \propto \int_{P_0}^{P_0} \frac{1}{r^2} dr \propto 0$ .这相当于点电荷置于无限大导体板表面极近处的情况,点电荷带电量的多少,并不影响上述电荷分布的图像,所以,  $V_{\text{地}}$  和  $V_{\infty}$  间的电势差  $V_0$  是趋于零的.当  $P$  是导体空腔并接地时,  $P$  上的因腔内或腔外其他带电体感应出的电荷流入地球,  $V_0$  应有所变化,但因地球的

尺度总远大于地球上任何带电体的尺度,故仍有  $\rho_0 = 0$ ,因而仍有  $V_0 = 0$ ,  $V_{\text{地}} = V = 0$ ,这就是“接地”的道理。

当研究地球本身的带电情况以及地球在太空范围内的电势分布问题时,上述物理模型已不成立,当然也就不能简单地认为  $V_{\text{地}} = V$  了。

### 13. 静电场系统的能量

在静电问题中,电荷及其激发的电场都不随时间变化,电场总是伴随着电荷而存在。由于“场的观点”和“超距作用观点”具有一致性,因此在表示静电场的能量时,存在两种观点:把静电能表示为电荷的相互作用能,认为静电能为电荷所具有;将静电能通过场中某点的场强来表示,意味着静电能定域于电场中,为静电场所具有。这两种观点在静电问题中具有等价性,因此可以根据需要而采用不同的观点来讨论问题。这固然有其便利之处,但涉及静电能、相互作用能(电势能)和固有能(自能)等既有联系又有区别的物理量,容易产生混淆,影响对有关规律的正确理解。

宏观静电系统的能量涉及如下一些概念和规律:

点电荷间的相互作用能

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i; \quad (1)$$

电荷连续分布带电体系统的静电能

$$W = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_L dL, \\ \frac{1}{2} \int_S dS, \\ \frac{1}{2} \int_V dV; \end{cases} \quad (2)$$

## 静电场的能量

$$W = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V DE dV \quad (3)$$

或 
$$W = W_{\text{自}} + W_{\text{互}} . \quad (4)$$

为讨论这些规律间的联系和区别,试从概念间的联系和区别入手:

1. 静电能 带电系统内各带电体的固有能(自能)和各带电体之间的相互作用能之和 .

2. 固有能(自能) 外力将分散的微电荷元从无穷远处聚集为“连续带电体”时所作的功,或者,将“连续带电体”分割为无限多个微电荷元,并将它们分散至无限远处的过程中,相互间的静电力所作的功.这等于一个连续带电体上各电荷元间总的相互作用能.若考虑上述电荷元的“分散”或“聚集”过程,构成了包括几个“连续带电体”的系统,比如平板电容器,则系统的自能实际包括各连续带电体的自能和连续带电体之间的互能,即为系统的静电能 .

3. 相互作用能(电势能) 带电系统内各带电单元间的相互作用能,不包括各单元的自能.这里需注意:

(1) “相互”的意思与如何划分带电单元有关,划分方式不同,所表示的相互作用能也不同.比如有  $q_1$ 、 $q_2$  和  $q_3$  三个带电体,将它们各自作为一个单元的话,系统的静电能应为三者的自能和它们之间的互能之和;也可以把  $q_1$ 、 $q_2$  划为一个单元,把  $q_3$  划为另一个单元,则系统的静电能为两个单元的自能和它们之间的互能之和.显然,分法不同,各单元的自能和相互作用能是不同的,但系统的总静电能应该是相同的 .

(2) 点电荷与外电场的相互作用能就是点电荷在电场中的电势能  $W = qU$ . 这里不用系数  $\frac{1}{2}$  是因为没有重复算两次,  $U$  是除点电荷  $q$  外其他的源电荷在  $q$  所在点的电势.当然,这里并不包括点电荷  $q$  的自能,也未包括其他的源电荷作为一个单元的自能 .

(3) 电荷系统内,带电体在相对移动的过程中若保持自能不变(形状、电荷分布不变),则系统静电能的变化量等于系统内带电体之间相互作用能的变化量。

静电场能:静电场具有的能量,储存于整个静电场空间。这是用场的观点表达的静电能,只要空间的电场强度  $E$  不为零,该处就有电场的能量。所以,静电场能的表达式推广到交变电磁场情况时,仍然有效。

综上所述,在静电场中有:总静电能 = 自能 + 互能 = 总电场能。

在具体运用有关规律时,应注意哪些联系和区别呢?

1. 表达式(2)虽由表达式(1)导出,但所蕴含的物理意义不完全相同:

(a) 式(1)中的  $V_i$  是除  $q_i$  外,其他电荷在  $q_i$  处产生的电势,而式(2)中的  $V$  是所有电荷在该点产生的电势,  $dq$  在自身处的电势可以忽略不计。

(b) 式(1)反映的是点电荷间的相互作用能,即点电荷系统的总静电能(不含点电荷的自能),也即式(4)中的  $W_{\text{互}}$ 。而若将式(2)运用于单个连续带电体,它表示连续带电体上所有电荷元之间的相互作用能,即该带电体的自能;若将式(2)运用于数个连续带电体系统,则既包括每个带电体的自能,也包括各带电体间的相互作用能,即式(4)所表达的两项能量。

(c) 在式(1)和式(2)所表示的总静电能中都未计入点电荷和电荷元  $dq$  的自能。

利用式(2),虽可计算一个孤立带电体的总静电能,但若该带电体是点电荷,将出现场能发散,趋于无限大的困难,这是至今尚未妥善解决的问题。

表达式(2)反映的是连续带电系统宏观的静电能。电荷被看作连续分布,这实际是宏观意义上的平均效应。微观的看,电荷电量是量子化的,基本单元是电子电量,虽然电子的固有能(自能)至今尚不清楚,但其自能应有一确定的量值。



如果考虑到点电荷和电荷元  $dq$  的自能应有一确定的量值,这相当于在总静电能上附加一个常量.只要在所讨论的问题中这种微观的电荷状态不发生改变,则附加的常量也不会改变,不影响对静电力的功的计算——它只与总静电能的变化有关.

2. 由于“场的观点”和“超距作用观点”在静电问题中的一致性,式(2)和式(3)是等价的.

用式(2)和式(3)计算静电场的总能量,结果相同.教材第二册例题 9-9 利用两种计算方法求均匀带电球体静电能,得到的结果相同,正说明了这一点.但若电场随时间变化,则式(2)失去意义,而式(3)仍然有效.

3. 带电体的固有能恒大于零,而带电系统的相互作用能则可正可负.

带电体的静电固有能(自能)表现为带电体或带电体系统的电场对电荷具有作功的能力,用式(2)和式(3)都可得到这个能量恒为正.带电系统的相互作用能则反映作为带电单元的自能不变,而考察带电单元间的相互作用能量.若注视某个单元而将其他带电单元都视作场源电荷的话,相互作用能就表现为单个带电体在外电场中的电势能.

4. 点电荷系统处于外电场中时,表示孤立点电荷系统总静电能的式(1)应添加点电荷系统与外电场的相互作用能.设  $n$  个点电荷处在电势为  $V_0(x, y, z)$  的外电场中,则静电场的总能量除  $n$  个点电荷的相互作用能外,还包括  $n$  个点电荷与外电场的电势能.即

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i + \sum_{i=1}^n q_i V_{0i} .$$

为便于理解带电体系统的静电能与构成该系统的各带电单元间相互作用能之间的一般关系,试举下例说明.

设系统由两带电体组成,它们分别带电荷为  $Q_1$  和  $Q_2$ ,对电势零点的电势分别为  $V_1$  和  $V_2$ .则空间任一点的电势为

$$V = V_1 + V_2,$$

由关系式(2), 得

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{q_1, q_2} V dq = \frac{1}{2} \int_{q_1} (V_1 + V_2) dq_1 + \frac{1}{2} \int_{q_2} (V_1 + V_2) dq_2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \int_{q_1} V_1 dq_1 + \frac{1}{2} \int_{q_2} V_2 dq_2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \int_{q_1} V_2 dq_1 + \frac{1}{2} \int_{q_2} V_1 dq_2 \right] \\ &= W_{\text{自}} + W_{\text{互}}. \end{aligned}$$

对于平板电容器系统:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q, \quad U = V_1 - V_2, \quad V_1 = -V_2 = \frac{1}{2} U, \\ W &= \left[ \frac{1}{2} V_1 Q_1 + \frac{1}{2} V_2 Q_2 \right] + \left[ \frac{1}{2} V_2 Q_1 + \frac{1}{2} V_1 Q_2 \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} V_1 Q_1 + \frac{1}{2} V_2 Q_2 \right] + \left[ \frac{1}{2} V_2 Q_1 - \frac{1}{2} V_2 Q_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) Q_1 + 0 \\ &= \frac{1}{2} QU. \end{aligned}$$

对于平板电容器系统这个特例, 两极板的相互作用能为零, 式(2)反映的是带电系统的总静电能, 与用式(3)计算所得一致.

## 14. 磁悬浮列车

磁悬浮列车作为一种高速轨道交通工具, 已经在上海投入商业运营. 被誉为“地面飞行器”、“超低空飞机”的磁悬浮列车, 是如何“腾空而起”, 又是如何“飞行”的呢?

磁悬浮列车的概念最早由美国的火箭工程师罗伯特·戈达德 (Robert Goddard) 于 1909 年提出, 距今已有近百年的历史. 由于这种想法距离当时的现实过于遥远, 一直被认为是一种科幻式的想

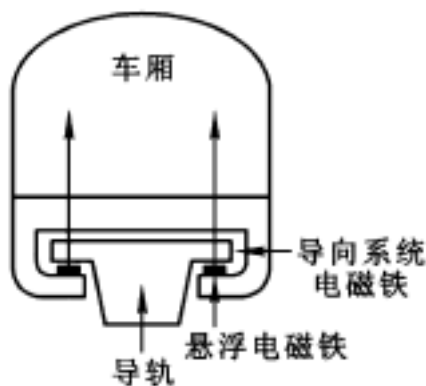
像而已。随着科技水平的提高和经济实力的增强,20世纪70年代前后,为提高交通运输能力以适应经济发展的需要,德国、日本等发达国家相继开始进行磁悬浮运输系统的研究开发工作,都取得了令世人瞩目的进展。目前,国际上把磁浮列车列为高科技产品,是因为实现它的悬浮、推进等系统的正常安全运行,需要复杂的自动控制系统,更离不开电子技术、电磁器件、直线电机、机械结构、计算机、材料以及系统分析等多学科的高科技成果的支撑和应用。

从物理学原理来看,磁悬浮列车的三大系统:悬浮系统、推进系统和导向系统功能的实现,都利用了“同性相斥”、“异性相吸”的基本磁现象和电磁感应的基本原理。其中磁悬浮系统的设计,主要有两大方向:以德国为代表的,利用常导的电磁型(EMS, Electro Magnetic System),或称吸力型、常导型方式;以日本为代表的,利用超导电感型(EDS, Electro Dynamic System),或称斥力型、超导型方式。

磁悬浮列车的所有动力可以说都来源于导轨绕组。将电供至导轨线圈,利用线圈磁极与列车磁极的作用将列车浮起并对列车导向,从而取消了轮轨;利用电机原理,在导轨上形成滑动的磁场,对列车进行牵引或制动(也可利用涡流使列车减速),从而取消了受电弓。磁悬浮列车与导轨间无接触的不带燃料的飞行,从根本上克服了传统轮轨铁路的主要困难。

在EMS系统中,磁浮列车环抱着它的T字形导轨。沿T型导轨的下方和两翼,铺设有提供推力的直线电机绕组(定子)和导向绕组,在车厢下方的对应位置则装有磁体,如Z-19图所示。通电时,导轨绕组磁极与车厢磁铁相吸,把列车悬浮起来;通过与车厢下部两侧的导向磁铁相吸,使车厢两侧与导轨保持一定的侧向间隔。这种方式悬浮力的大小与车速无关,无需车轮,悬浮高度约1cm。车厢在水平和垂直方向的无接触支撑和无接触导向,都由高精度控制调整系统保证。出于安全考虑,也设有应急备用车轮。

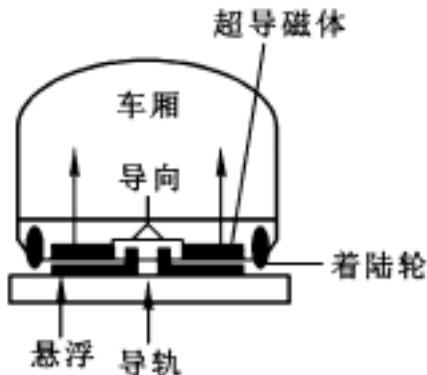
在EDS系统中,车厢上装载的超导磁体,在列车高速运行时,



Z - 19 图 EMS

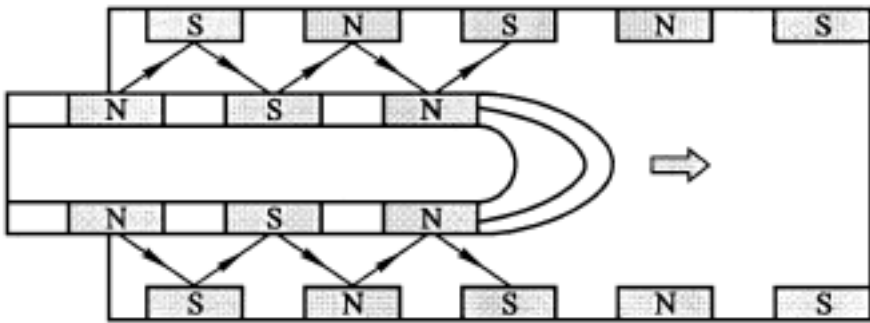
由于电磁感应作用,在 U 字形导槽及其两侧墙面上的驱动和导向绕组中产生感生电流,感生电流的磁场和超导磁铁的磁极“同性相斥”,使车厢悬浮,并与导槽保持一定的侧向间隔。Z - 20 图示意性地给出与 EMS 悬浮结构的差别。这种方式的悬浮力与运行速度有关,速度愈大,排斥力也愈大,当速度达 80 km/h 以上时,车厢脱离导轨表面,悬浮高度可达数十厘米,因悬浮是自稳定的,故无须任何主动控制。但当列车低速运行时,感生电流的磁场并不能提供足够强的磁场力使列车悬浮,因而需要车轮支撑。

磁浮列车的运行原理基本相同,类似于传统电机的工作原理。相当于把圆形电动机的定子和转子分别切开后铺到导轨和列车上,构成能驱动磁浮列车前进的直线电机。因此,直线电机就像展



Z - 20 图 EDS

开了的电动机,它的“转子”就是悬浮列车,不作旋转运动,而是直线运动.犹如滑动一张纸下的磁铁时可使纸面上的另一块磁铁运动起来那样,当导轨绕组中通有调幅调频的交变电流时,在导轨与车厢磁体气隙间形成一个平移磁场,作用于车厢磁体形成对车厢的推力.如 Z - 21 图所示.当车厢磁体受到相反方向的作用力时,列车便减速运行.根据不同的减速要求,可通过改变导轨绕组磁场的极性,产生与车厢磁体极性相斥的力;也可利用车厢磁体通过闭合的导轨绕组时产生的涡流,即利用楞次定律来阻碍列车的运行.



Z - 21 图

驱动磁浮列车前进的直线电机可有直线感应电机和直线同步电机两种形式.对于直线感应电机驱动方式,平移磁场在车厢的电磁绕组中产生感生电流,感生电流磁场的极性与导轨绕组平移磁场的极性相反,从而对车厢产生电磁推力;直线同步电机则与车厢的直流磁场间直接形成电磁推力.

磁浮列车技术除上述目前较为成熟的电磁型、电动型外,还有永磁式半悬浮型、推力与悬浮结合型等.

上海磁悬浮系统采用的是 EMS 技术.

## 15. 电磁感应的两个公式一致吗

电磁感应的两个公式:法拉第电磁感应定律的数学表达式

$$E = - \frac{d}{dt} \quad (1)$$

和感生电动势及动生电动势的表达式

$$E = \int E \cdot dl + \int v \times B \cdot dl \quad (2)$$

都是求电动势的常用公式。在很多问题中,利用这两公式计算可以得出相同的结果,它们是一致的。但也有用式(2)能解决的问题,而纯粹用式(1)解决不了的“例外”。就是说,这两个公式有不一致之处,适用范围有所不同,它们的一致性是有条件的。从历史发展的过程看,这两个公式分别形成于不同的理论发展阶段,对电磁感应现象本质的揭示,存在层次和深度上的差异,出现这种情况是不难理解的。

式(1)也称为“通量法则”,特点是形式简单,集电磁感应过程的“感生”和“动生”两种现象于一身。通常情况下,利用通量法则能直接求出总的电动势,而不用区分磁通量的变化是由于导体的运动引起的,还是由于磁场变化引起的。它概括了电磁感应过程两种形式的共同特征:通过一闭合回路的磁通量发生变化时,在回路内就会产生电动势。但“通量法则”仅适用于闭合回路,否则磁通量在这里没有确定的意义。式中的  $\Phi$  是某时刻通过闭合回路所围面积的磁通量,  $\frac{d\Phi}{dt}$  则是该时刻磁通量的瞬时变化率。由  $\Phi = \int_S B \cdot dS$  可

知,  $\frac{d\Phi}{dt}$  既与闭合回路内  $B$  的瞬时变化率有关,也与组成回路各线元的瞬时运动速度有关。对于回路非闭合的情况,比如:在恒定磁场中的一段运动导体,总可通过添加虚构线元,构成闭合回路,从而使式(1)适用。但对于非恒定磁场中的一段运动导体,仍借用添加线元的方法,若不用感生电场概念,纯粹由式(1)恐怕难以解决问题。也就是说,有通量法则的“例外”。

式(2)的特点是物理意义明确。导体相对磁场运动时,因切割磁力线而产生动生电动势,非静电性力是洛伦兹力;因磁场随时间

变化而在回路中产生感生电动势,非静电性力是感生电场力.它是  
以麦克斯韦和洛伦兹的电磁理论为依据,从本质上解释电磁感应  
现象的数学表达式.在导线上各点处,感生电场  $E$  和  $(v \times B)$  都有  
确定的值.因此,式(2)既适用于闭合回路也适用于非闭合回路,都  
可由它得到确定的电动势值.

对于线形闭合回路,式(1)和式(2)具有等效性.证明如下:

磁通量 是磁感应强度  $B$  和空间坐标的函数,在电磁感应问  
题中这两者都可假定是时间  $t$  的连续可导函数.对于线形闭合回  
路,式(1)可表示为

$$E = - \frac{d}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS. \quad (1.1)$$

根据麦克斯韦方程,感生电场和变化磁场的关系为

$$\int_L E \cdot dl = - \frac{dB}{dt} \cdot dS,$$

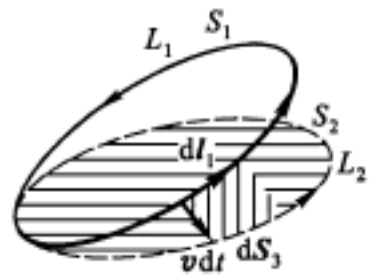
因此,式(2)可表示为

$$E = - \int_S \frac{B}{t} \cdot dS + \int_L v \times B \cdot dl, \quad (2.1)$$

式(1)和式(2)等效时,应有

$$\frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS = \int_S \frac{B}{t} \cdot dS - \int_L v \times B \cdot dl. \quad (3)$$

如 Z - 22 图所示,取  $t$  时刻的线形闭  
合回路为  $L_1$ ,  $t + \Delta t$  时刻回路变为  $L_2$ ,  
两回路的绕行方向均如图标示,所围  
面积  $S_1$  和  $S_2$  的法线正方向都与  $L_1$  和  
 $L_2$  的绕行方向构成右手螺旋关系.在



Z - 22 图

$\Delta t$  时间间隔内,磁感应强度  $B$  的分布  
(时间和空间的矢量函数)由  $B_1$  变为  
 $B_2$ .  $t$  时刻通过  $L_1$  所围面积  $S_1$  的磁通量为

$$\Phi_1 = \int_{S_1} B_1 \cdot dS_1,$$

$t + \Delta t$  时刻通过  $L_2$  所围面积  $S_2$  的磁通量为

$$\Phi_2 = \int_{S_2} B_2 \cdot dS_2,$$

对于足够小的时间间隔  $\Delta t$ , 可将  $B_2$  表示为

$$B_2 = B_1 + \frac{dB_1}{dt} \Delta t,$$

则  $\Phi_2$  可写为

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \left[ B_1 + \frac{dB_1}{dt} \Delta t \right] \cdot dS_2 = \int_{S_2} B_1 \cdot dS_2 + \frac{dB_1}{dt} \Delta t \int_{S_2} dS_2,$$

所以

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} B_1 \cdot dS_2 - \int_{S_1} B_1 \cdot dS_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{dB_1}{dt} \Delta t \cdot dS_2}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_1} B_1 \cdot dS_1}{\Delta t}. \quad (4)$$

如图所示, 由  $L_1$  在  $\Delta t$  时间内扫过的侧面积  $S_3$  和  $S_1$ 、 $S_2$  可构成闭合曲面  $S$  对该闭合曲面, 运用磁场的高斯定理, 应有

$$\int_S B_1 \cdot dS = \int_{S_1} B_1 \cdot dS_1 - \int_{S_2} B_1 \cdot dS_2 + \int_{S_3} B_1 \cdot dS_3 = 0,$$

于是, 式(4)中等号右边第一项为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} B_1 \cdot dS_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_1} B_1 \cdot dS_1 + \int_{S_3} B_1 \cdot dS_3}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

由于  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $S_2 \rightarrow S_1$ , 故式(4)等号右边第二项为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_2} \frac{dB_1}{dt} \Delta t \cdot dS_2}{\Delta t} = \int_{S_1} \frac{dB_1}{dt} \cdot dS_1, \quad (4.2)$$



将式(4.1)和式(4.2)代入式(4),有

$$\frac{d}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_3} B_1 \cdot dS_3}{t} + \int_{S_1} \frac{B_1}{t} \cdot dS_1, \quad (4.3)$$

由于面元  $dS_3 = v dt \times dl$ ,  $t \rightarrow 0$  时,  $L_2 \rightarrow L_1$ , 曲面  $S_3$  被挤缩为闭合回路  $L_1$ , 于是上式第一项变为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_3} B_1 \cdot dS_3}{t} = \int_{L_1} B_1 \cdot (v \times dl),$$

利用矢量变换公式  $a \cdot (b \times c) = -b \times a \cdot c$ , 该项又可写为

$$\int_{L_1} B_1 \cdot (v \times dl) = - \int_{L_1} v \times B_1 \cdot dl,$$

所以, 式(4.3)为  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS = \int_S \frac{B}{t} \cdot dS - \int_L v \times B \cdot dl$ .

这样, 便证明了式(3)成立, 也即对于线形闭合回路, 式(1)和式(2)是一致的.

在对实际问题的处理中, 如何使式(1)和式(2)取得一致, 关键在于对式(1)的理解和处理方法所遵循的原则. 归纳起来, 需注意以下几点:

1. 适用条件: 线形闭合回路, 毋庸置疑. 没有线形闭合回路, 式(1)中的  $\int_S B \cdot dS$  便没有确定的意义.

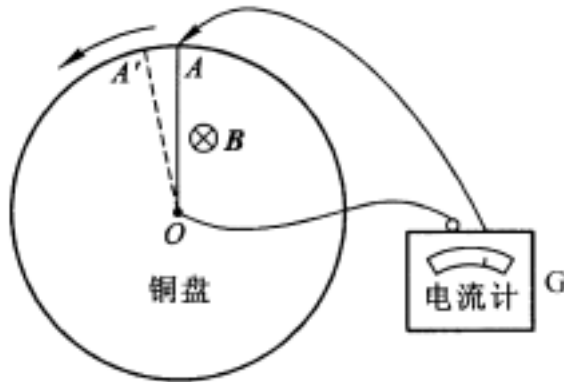
2. 线形闭合回路的构成原则. 对于磁场中的一段运动导体, 或大块导体, 虽可通过添加虚构的线段使回路闭合, 但当回路中包含大块导体而不是线形回路, 或回路在运动过程中有发生断裂的情况时, 若要用式(1)计算, 并能得到与式(2)一致的正确结果, 选好线形闭合回路至关重要. 选取的原则是: 恒定磁场; 添加的虚构线段与附着在导体实体上的线段构成闭合的线形回路.

3. 瞬时性和连续性原则. 通量法则中的  $\frac{d}{dt}$  是线形闭合回路

在某时刻的瞬时变化率.当取定的闭合线形回路发生变化时,回路的线元  $dl$  随回路的变化而连续运动,这对应着构成回路一部分的材料本身或物质的实际运动,而不是几何意义上的变化,更不允许突然改换回路.

费曼曾经用以下两例说明通量法则遇到的困惑:

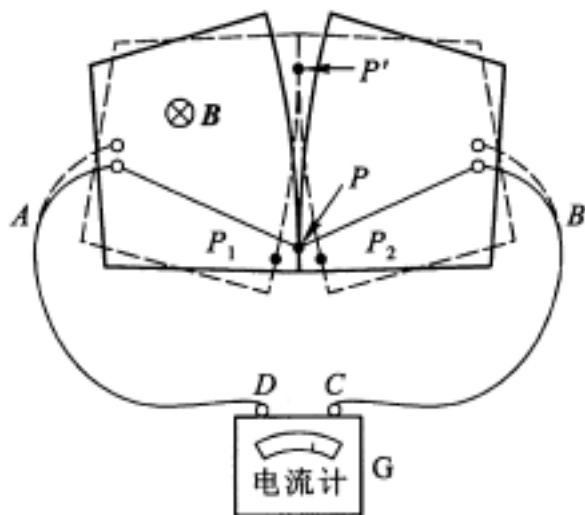
如 Z - 23 图所示,对于在垂直于恒定磁场  $B$  内转动的导电圆盘,取线元  $OA$  附着在圆盘上随之运动,并与电流计构成线形闭合回路.  $t$  时刻的回路构成为  $GOAG$ ,  $t + \Delta t$  时刻,连续地变为  $GOA'AG$ . 因为  $\frac{d}{dt} \neq 0$ , 所以  $E \neq 0$ . 由式 (1) 得到的结果和由式 (2) 得到的动生电动势一致. 若取线元  $OA$  不动, 将导致错误结果.



Z - 23 图

如 Z - 24 图所示,对于在垂直于恒定磁场  $B$  内相互接触的两块平行铜板,接触边弧线曲率很大. 两板相互作微小角度往复碾转时,接触点由  $P$  变到  $P'$ . 取附着在铜板上的线元,  $t$  时刻为  $AP_1 P_2 B$ , 与电流计构成线形闭合回路.  $t + \Delta t$  时刻应取为  $AP_1 P_2' B$ . 其中  $P_1 P_2'$  为添加的虚构的、静止的线段. 对这样取定的闭合线形回路,由于两板相互间微小角度的运动而引起的  $\frac{d}{dt} \neq 0$ , 因而  $E \neq 0$ . 这与实际相符,也与用式 (2) 判断的结果一致. 若取回路随接触点

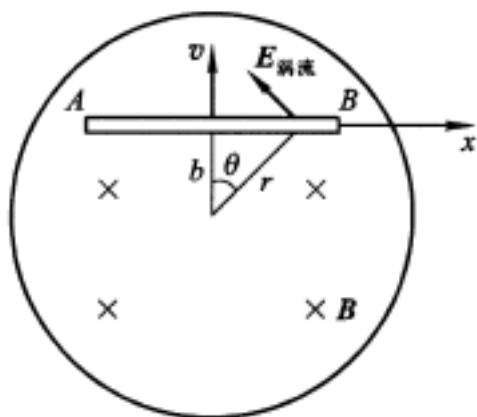
而变化,比如,  $t$  时刻为  $AP_1P_2B$ ,  $t + \Delta t$  时刻为  $AP'B$ . 则回路所围面积的变化很大,将得出电动势  $E$  很大的结论. 显然,问题出在回路的选择,违反了“附着在导体上的线元  $dl$  随回路的变化而连续运动,对应物质的实际运动”的原则,这样得出的结果与实际情况也是不相符合的.



Z - 24 图

在上述两例中,通过正确地选取线形闭合回路的方法,使通量法则尽可能与式(2)保持了一致,但都只是对恒定磁场情况. 在非恒定磁场情况下,通量法则也总能与式(2)保持一致吗? 回答是否定的. 考虑以下通量法则的“例外”:

如 Z - 25 图所示,圆柱形区域内有均匀磁场  $B$ , 长度为  $l$  的导体棒横卧其中. 当磁场以  $-\frac{B}{t}$  的变化率随时间变化, 而导体棒以速度  $v$  垂直于棒也垂直于  $B$  运动时, 如何由纯粹的通量法则来求出棒上的电动势? 或者说, 如何来虚构闭合的线形回路, 而不用感生电场概念, 并且不会有多算的电动势? 在这里, 前述的回路构成原则已不再适用, 通量法则的式(1)遇到了困难, 出现了超出其范畴的“例外”.



Z - 25 图

而由式(2.1) 
$$E = \int_L E \cdot dl + \int_L v \times B \cdot dl = E_{\text{感}} + E_{\text{动}},$$

解此问题简单且方便: 
$$E_{\text{动}} = vBl, \quad E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{B}{t},$$

$$\int_L E_{\text{感}} \cdot dl = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_{\text{感}} \cos \theta \, dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{r}{2} \frac{B}{t} \frac{b}{r} \, dx = \frac{bl}{2} \frac{B}{t},$$

总电动势为 
$$E = \frac{bl}{2} \frac{B}{t} + vBl.$$

以上讨论告诉我们:如果说,对于在恒定磁场中的运动导体,尚有办法通过巧妙的添加虚构线段的办法,使通量法则的式(1)与式(2)保持一致的话,那么,在非恒定磁场情况下,这种一致性将难以继续保持.费曼指出:当通量法则遇到困难时,就必须回到基本定律中去.那就是麦克斯韦方程和洛伦兹力公式:

变化的磁场产生感生电场为 
$$\nabla \times E = - \frac{B}{t},$$

电荷受广义电磁场力为 
$$F = q(E + v \times B),$$

以上两式是对电磁感应定律在更高层次上的描述,也可认为是电磁感应定律的近代版本.

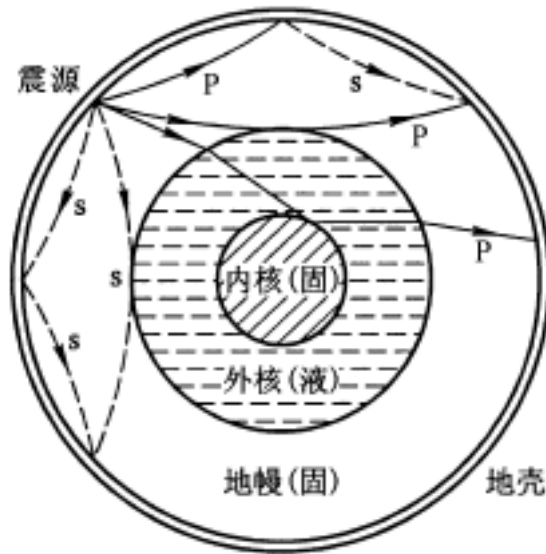
## 16. 如何通过地震波了解地球内部的构造

研究地震波是人类了解地球结构的最主要手段之一。

天然地震大多由地下岩石的构造活动和火山爆发引起。震源正上方地表处称为震中。在短暂的作用下,地球介质可以看作弹性体。地震时一部分能量以弹性波的形式传播出去,如果地震仪和震源靠得足够近,最早接收到的将是纵波,也称 p 波(primary wave),稍迟可接收到横波,也称 s 波(secondary wave),最后是沿地表传播的、使地表发生明显扭曲和上下运动的表面波。除此之外,8 级左右的大地震还会引起整个地球的自由振荡。通过对它们的研究都可推断地球的内部构造。

地球内部的地质环境有各种不同的结构,是不均匀、各向异性的,而且压强、密度以及压缩性都随深度而变化。因此,p 波和 s 波的波速也都随深度而变化,于是它们的传播方向不会沿直线传播——存在一种变化的折射率,使 p 波和 s 波沿曲线行进。固体物质一般都存在着显著的各向异性,比如岩石。因此,p 波和 s 波在同样深度下,向不同方位传播时的传播速度也不相同;在各种不同结构的层面上,p 波和 s 波都会发生反射和折射,比如,在 2900 km 的深度上,p 波的波速会骤然减小,而 s 波的波速却突然消失,据此可以推测:地球内部这个深度以下是液态的地核(core),p 波经折射进入其中,而 s 波(横波)则不能传入其中,该深度以上部分是地幔(mantle),在地核内,距地表约 5000 km 之下,尚有一个可传播 s 波的固态内核,如 Z - 26 图所示。

利用分布在地球各处的地震监测网站记录的位移对时间的变化曲线,根据声学理论,可以分析出震中位置以及地球振动模式等信息。比如,由于 p 波和 s 波的波速分别对应固态物质体变模量和切变模量,具有不同的波速。离开震源越远,这两种波到达的时间



Z - 26 图 地震波与地球内部结构

差越大,根据时间差可以判断震源和地震仪的间距.又如,利用在不同地点的地震仪对多次地震所做的大量记录,可以分析不同类型的波在每一深度处的速率,从而得到每一深度的弹性性质,了解地球振动的模式等.

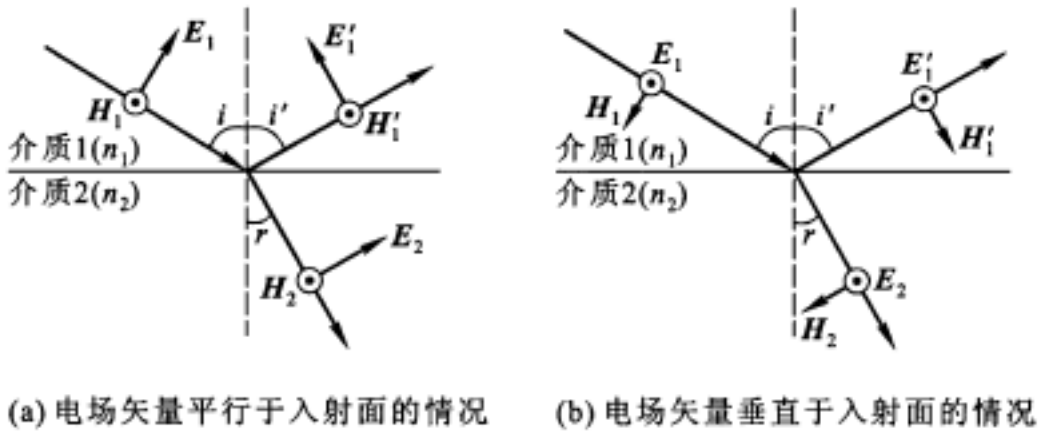
通过对天然的和人工的地震来获取有关地球内部地质状况的信息,这是当今广泛研究的课题.

## 17. 界面反射和“半波损失”

光从光疏介质射向光密介质表面被反射时,在界面反射处,反射光的相位在一定情况下,相对入射光会发生突变,这现象也称为“半波损失”.维纳实验和洛埃得镜实验都证实了这一现象.

反射光的“半波损失”与入射角的大小有无关系?在薄膜的干涉中,如何判断两束相干光的光程差中是否需附加“额外程差  $\pm 2$ ”项?这些都是学习中常碰到的问题.

光波是电磁横波,在两种均匀、各向同性介质分界面上发生的反射和折射现象都满足电磁场的叠加原理及其边界条件.若将界面两侧的入射场、反射场和折射场的  $E$ 、 $H$  矢量按入射面分解为垂直(s)和平行(p)两分量,分别用  $E_s$ 、 $E_p$  和  $H_s$ 、 $H_p$  表示,并设定在界面入射处这三个场的  $E_p$  和  $E_s$  的正方向,如 Z - 27 图 (a) 和 (b) 所示.运用电磁场的边界条件,可以分别得到关于 s、p 两分量的入射场与反射场、入射场与折射场复振幅间的关系,这就是菲涅耳公式(参见教材第三册 123 页).



Z - 27 图

设自然光以入射角  $i$  由折射率为  $n_1$  的介质入射于折射率为  $n_2$  的介质表面,如反射角为  $i$ ,在  $n_2$  介质中的折射角为  $r$ .与反射有关的菲涅耳公式可表示为

$$r_s = \frac{|E_{s1}|}{|E_{s1}|} e^{-i\phi_s} \quad \text{和} \quad r_p = \frac{|E_{p1}|}{|E_{p1}|} e^{-i\phi_p} .$$

由这两式得到反射场 s、p 两分量的实振幅比和它们相位的突变情况 Z - 28 图给出的  $\phi_p$ 、 $\phi_s$  分别表示反射场在界面入射处的 s、p 振动分量的相位超前入射场相应分量的变化情况.

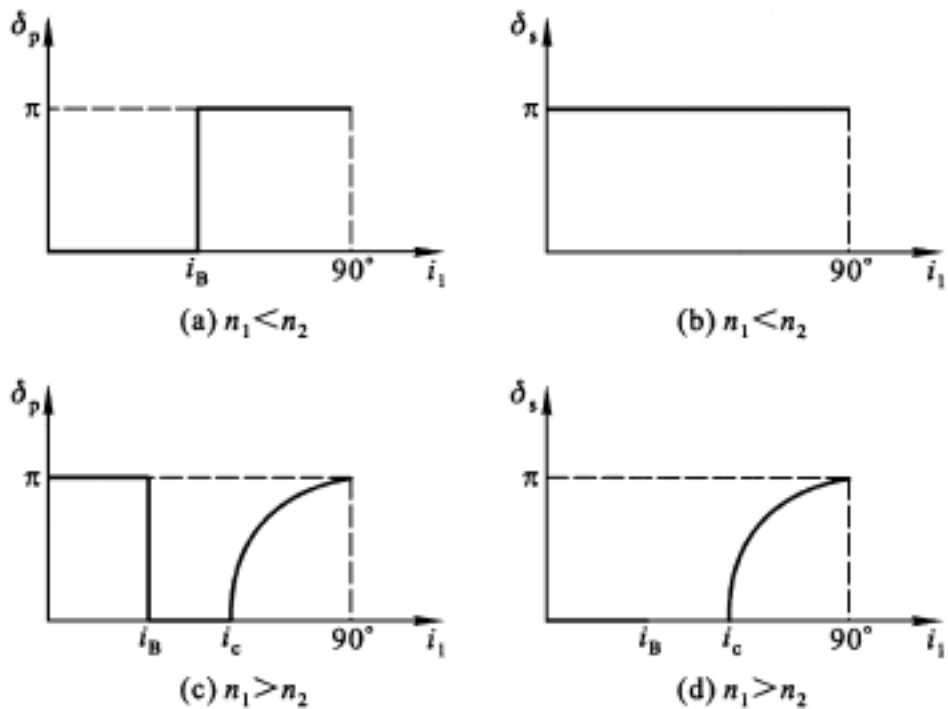
Z - 28 图中的曲线是理解和解释“半波损失”问题的重要依据,需注意以下几点(参照 Z - 27 图讨论):

1. 反射光在界面处发生“半波损失”,指的是实际的两个场分

量  $E_{s1}$  和  $E_{p1}$  相对入射场的  $E_{s1}$  和  $E_{p1}$  在界面处都反向, 即  $E_1$  与  $E_1$  反向, 或位相发生 突变时, 有“ 半波损失 ”.

比如, 在  $n_1 < n_2$  条件下, 当入射角  $i = 0$  或  $i = 90^\circ$ , 即正入射或掠射时, 反射光的  $E_1$  都与  $E_1$  反向, 有“ 半波损失 ”, 分别对应维纳实验和洛埃得镜实验的解释 .

2.  $\delta_p$  和  $\delta_s$  等于零或等于  $\pi$ , 仅表示相对设定场分量的正方向而言, 是同向或反向的, 并不一定表示实际场分量是同向或反向的. 如  $n_1 < n_2, i = 0$  时的  $\delta_p = 0$ , 表示  $E_{p1}$  与设定正方向同向, 由 Z - 28 图(a)可见, 该设定正方向在  $i = 0$  时, 与入射的  $E_{p1}$  反向, 即实际的场分量  $E_{p1}$  发生了  $\pi$  的相位突变;  $\delta_s = \pi$ , 则表示  $E_{s1}$  与设定正方向反向, 也即相对  $E_{s1}$  发生了  $\pi$  的相位突变. 此时有“ 半波损失 ”.



Z - 28 图

(a)、(b)  $n_1 < n_2$  (外反射) 时的相位改变

(c)、(d)  $n_1 > n_2$  (内反射) 时的相位改变



3. 对于一般斜入射情况,入射场与反射场的 p 分量成一定的角度,这时可讨论  $r_p$  和  $r_s$  随入射角的变化情况,但笼统地比较它们的相位没有实际的意义,也不能简单地给出反射光有无“半波损失”的结论。

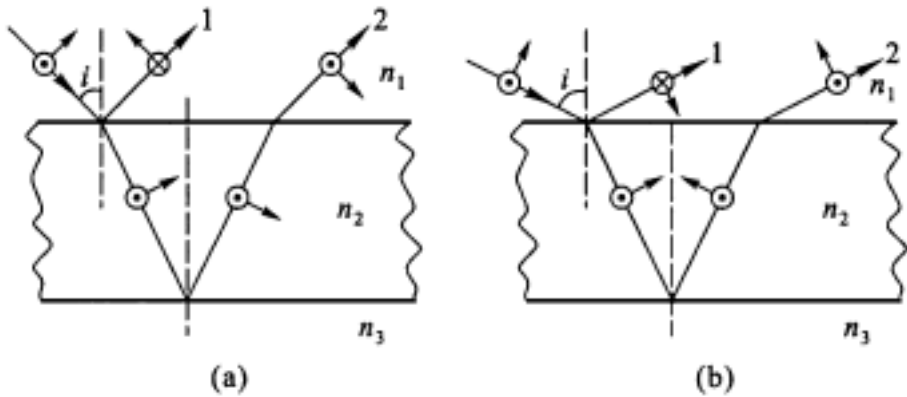
比如,在  $n_1 < n_2$  条件下,当入射角  $i$  由 0 经布儒斯特角  $i_B$  增到  $90^\circ$  时,  $r_p$  在  $i_B$  处由 0 突变到  $\pi$ ,而  $r_s$  始终是  $\pi$ ,如 Z - 28 图(a)、(b)所示.这表明在  $0 < i < i_B$  范围内,即使不考虑两个 p 分量的夹角,反射光也没有发生相位突变(正入射除外);而在  $i_B < i < 90^\circ$  范围内,  $r_p$  和  $r_s$  两者虽都有相位突变,但两个 p 分量间的夹角直到  $i$  趋于  $90^\circ$  才接近  $\pi$ ,此时认为反射光有“半波损失”才是合理的.这也说明了即使是在光由光疏介质到光密介质反射情况下,也不能认为反射光一定会发生“半波损失”。

当  $n_1 > n_2$ ,即光由光密介质到光疏介质反射的情况,仅考虑  $r_p$  和  $r_s$  的变化时,如 Z - 28 图(c)、(d)所示:在  $0 < i < i_B$  范围内,  $r_s$  为 0,  $r_p$  为  $\pi$ ,它表示反射的 p 分量与 Z - 27 图设定的正方向相反,而与入射场  $E_{p1}$  的指向在同一侧(不完全一致,有夹角),反射光没有相位变化;随着  $i$  的继续增大,在  $i_B < i < i_c$  范围内( $i_c$  为全反射的临界角),  $r_p$  和  $r_s$  都没有相位变化;当  $i > i_c$  时出现全反射,由于  $r$  出现虚数,相位的变化如 Z - 28 图所示,虽较复杂,但仍没有  $\pi$  的相位变化。

4. 光从薄膜介质层的上下两平行或近似平行的界面反射后,二光束相遇时的光程差中是否需添加“半波损失”项,即额外程差  $\pm \lambda/2$ ,应由两界面所涉及的三种介质的折射率  $n_3$ 、 $n_2$ 、 $n_1$  和入射角  $i$  来决定。

对于薄膜而言,即使是斜入射,从两界面反射的两光束中,电矢量的 s、p 分量也都可以近似认为是平行或反平行的,因此比较它们的相位是有实际意义的.薄膜干涉的“额外程差  $\pm \lambda/2$ ”指的就是这二束反射光束的实际场分量相互间是否都反向的问题,这是

有别于对单界面反射时,对“半波损失”的界定的.如 Z - 29 图(a)、(b)所示,其中 1 和 2 两光束的实际场分量(p 和 s 分量)都反向,这种情况下,反射光的光程差中应附加“额外程差  $\pm 2$ ”.



Z - 29 图

综上所述,可以得到如下结论:

1. 界面反射可能发生“半波损失”所对应的入射角为正入射  $i = 0$  和掠射  $i = 90^\circ$  情况.斜入射时,需根据实际情况具体分析实振幅和相位变化,不宜作有否“半波损失”的定论.

2. 薄膜有两个界面,涉及三种介质  $n_3$ 、 $n_2$  和  $n_1$ .当薄膜处在同一介质中,即  $n_3 = n_1$  时,无论是  $n_2 < n_1$  还是  $n_2 > n_1$ ,两反射光束的光程差中都应添加额外程差  $\pm 2$ ;对于  $n_3 > n_2 > n_1$  和  $n_3 < n_2 < n_1$  的情况,两反射光束的光程差中无需添加额外程差  $\pm 2$ .

对于三种介质间的关系为  $[n_3 > n_2, n_2 < n_1; n_3 > n_1]$ ,  $[n_3 > n_2, n_2 < n_1; n_3 < n_1]$  和  $[n_3 < n_2, n_2 > n_1; n_3 > n_1]$  以及  $[n_3 < n_2, n_2 > n_1; n_3 < n_1]$  等诸情况的分析比较复杂,都存在一定范围的入射角使得上下界面的反射光之间不存在“半波损失”,也存在一定范围的入射角使得上下界面的反射光之间存在“半波损失”.不能简单地依据光是从“光疏到光密”或“光密到光疏”来下定论.在上下界面均不发生全反射的条件下,两反射光束 1 和 2 间需附加额外程差  $\pm 2$  的折射率条件和入射角范围列表如下:

反射光束需附加额外程差  $\pm 2$  的条件

折射率条件		入射角范围	
$n_3 < n_2$ $n_2 > n_1$	$n_3 > n_1$	$0 \leq i < i_{1B}, i_{2B} \quad i < 90^\circ$	
	$n_3 < n_1$	$n_3 < n_1$	$0 \leq i < i_{2B}$
		$n_3 = n_1$	$0 \leq i < i_{2B}$
		$n_3 > n_1$	$0 \leq i < i_{2B}, i_{1B} \quad i < i_{2c}$
$n_3 > n_2$ $n_2 < n_1$	$n_3 > n_1$	$0 \leq i < i_{1B}, i_{2B} \quad i < i_{1c}$	
	$n_3 < n_1$	$0 \leq i < i_{2B}, i_{1B} \quad i < i_{1c}$	

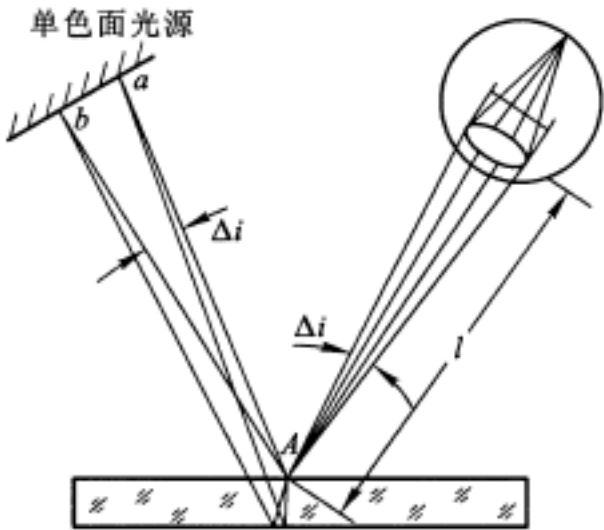
表中,  $i_{1B}$  和  $i_{2B}$  分别为上下两界面的布儒斯特角,  $i_{1c}$  和  $i_{2c}$  分别为上下两界面的临界角,  $i_c = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$  .

## 18. 日光照射下薄膜的干涉

阳光照射下的肥皂泡会呈现五彩缤纷的色彩, 而从洁净的窗玻璃上却看不到这种色彩, 这是为什么? 问题看似简单, 却涉及薄膜的分振幅干涉中非单色扩展光源的时、空相干性、观察方法等诸方面的问题, 仔细分析并非三言两语可以解决的, 但通过定性的分析和估算, 大致可给出一个粗略的描述 .

首先分析光源空间相干性的影响 . 在薄膜的分振幅干涉中, 相干光由膜的上下表面的反射光形成 . 膜厚均匀 (如理想的窗玻璃) 时, 两相干光束平行, 干涉条纹定域在无限远处 . 入射角相同, 光程差就相同, 故为等倾干涉 . 干涉条纹与光源位置无关, 因此不存在光源的空间相干性问题, 在大的单色面光源照射下, 不仅不会使条纹模糊而只会增加条纹的亮度 . 膜厚不均匀但两表面夹角很小 (如肥皂泡膜) 时, 两相干光束不平行, 干涉条纹定域在薄膜表面附近 . 平行光束照射时, 膜厚相同处的光程差相同, 故为等厚干涉 . 在单

色面光源照射下,光源上不同位置的点光源  $a$  和  $b$  在膜上同一位置  $A$ (厚度为  $e$ ) 以  $i$  和  $(i + \Delta i)$  入射时(如 Z - 30 图所示),对应有各自的光程差和各自的干涉条纹.所以干涉条纹与点光源位置有关,即与光源的线度有关(空间相干性).当面光源较大时,面上各点的干涉条纹因相互不相干地重叠而变得模糊,会使可见度下降.对厚度一定的薄膜,用人眼观察时,因实际可进入人眼瞳孔的光线只对应大面积光源中的极小一部分,瞳孔限制了影响可见度的光源宽度,从而可减缓可见度的下降.人眼观察肥皂泡和水面的油膜当属这种情况,彩色则是非单色面光源照射薄膜时出现的干涉现象,也称为薄膜色.



Z - 30 图

用理想的单色面光源照射劈形介质膜,人眼可以观察到干涉现象时,对应膜的最大厚度的数量级是多少呢?现作估算如下:设  $i$  为面光源上  $a$  和  $b$  两点通过膜上  $A$  点反射,能进入人眼瞳孔光线的角宽度,如 Z - 30 图所示.在入射角不很大条件下(比如  $i = 10^\circ$  时),要求  $i > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{e}}$  (《光学原理》第七章, M. 玻恩, E. 沃尔夫著).取人眼的明视距离  $l = 25 \text{ cm}$ ,瞳孔直径  $D = 0.25 \text{ cm}$ ,则眼睛

的视角为  $i = \frac{D}{l} = 1 \times 10^{-2} \text{ rad}$ . 当  $n = 1.50$ ,  $\lambda = 550 \text{ nm}$  时, 估算值为  $e = \frac{n}{(2 - i)^2} \lambda = 2.0 \text{ mm}$ . 表明在理想的单色面光源照射下, 用眼睛可观察干涉条纹时, 薄膜的最大厚度可达毫米的数量级. 事实上这正是由于眼睛的视角很小, 视场只对应单色面光源的很小部分, 才可以在膜的厚度不很薄时, 还可获得高可见度的条纹.

生活经验告诉我们, 在日光照射下, 从厚度为  $2 \text{ mm}$  左右的透明介质片 (比如窗玻璃) 上并不能看到因干涉而形成的彩色, 肥皂泡上若能出现这种彩色, 则其厚度远小于毫米数量级. 那么, 在日光照射下的薄膜表面可形成干涉色的最大厚度是多少呢? 为此, 再从光源的时间相干性作一估算: 由于用眼睛观察时, 实际只对应面光源上的很小部分, 因此将光源设为非单色点光源是合理的. 设太阳光中可见光的波谱是连续谱, 波长范围为  $(400 \sim 760) \text{ nm}$ , 取人眼最敏感的黄绿光  $\lambda = 550 \text{ nm}$  为中心波长, 取  $\Delta\lambda = 150 \text{ nm}$ , 则由  $\Delta l = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$  可估算出日光的相干长度 (波列长度) 的数量级,  $\Delta l = \frac{550^2}{150} \text{ nm} = 2 \mu\text{m}$ . 观察薄膜上黄绿光的干涉现象时, 光程差应满足  $\Delta l \sim 2en$ . 取  $n = 1.50$ , 膜厚约为  $e = \frac{\Delta l}{2n} = 0.7 \mu\text{m}$ . 这是个比较可信的结果: 用眼睛观察日光照射下的薄膜时, 能否观察到干涉现象, 考虑的主要因素是光源的时间相干性.

由以上讨论可知, 在日光照射下, 当膜的厚度 (不论均匀与否) 大于微米数量级时, 将观察不到干涉现象; 膜厚为微米数量级时, 以某倾角入射的光波中, 若某波长的反射 (或透射) 光满足干涉加强条件, 可观察到该光波的条纹或颜色 (膜厚均匀时); 满足干涉相消条件时, 不出现该光波的干涉现象. 因此在薄的肥皂泡膜的表面可出现不同波长、不同级次的干涉条纹的非相干叠加而呈现的彩色. 随着肥皂泡的增大、膜厚的继续减小, 满足干涉加强或减弱条

件的倾角和光波波长都将发生变化,肥皂泡所呈现的彩色也会随之改变.

当肥皂泡大到将要破裂时,膜的厚度趋向于零,无论对于什么波长的光,反射光都满足干涉相消条件,因此什么颜色都不呈现,从反射方向看只能是黑色的.

## 19. 望远镜和显微镜的分辨率

平行光通过光阑或障碍物后,在透镜的焦平面上形成夫琅禾费衍射的光强分布.无论是望远镜、显微镜还是其他利用透镜成像的光学系统,包括人眼,都不可避免地存在这种夫琅禾费圆孔衍射现象.正因为如此,几何光学中的一个理想像点,实际上都是有一定半径的艾里斑.

不考虑实际光学成像系统的像差和欠缺以及人眼的差异等因素,两个强度相等、波长相同、非常靠近的非相干点光源经过理想光学系统衍射后,形成的两个艾里斑是否可分辨,与光学系统的分辨率或分辨本领密切相关.当然,物体经光学系统所成的像通常是为人眼所接收和分辨的,因此,人眼应该是普通光学仪器的“终端”.

人眼恰可分辨时,两物点的间距以及对瞳孔中心的角距离是多少呢?取标准人眼模型的数据进行估计:瞳孔直径为  $d$ ,晶状体(透镜)焦距为  $f$ ,眼球内液体折射率为  $n$ ,空气折射率为  $n = 1$ .设两不相干物点对瞳孔中心的角距离为  $\theta$ ,在眼内折射光线的角距离为  $\theta'$ .根据折射定律,有

$$n \sin \theta' = \sin \theta,$$

因两物点的角距离很小,故有

$$\theta' = n \theta.$$

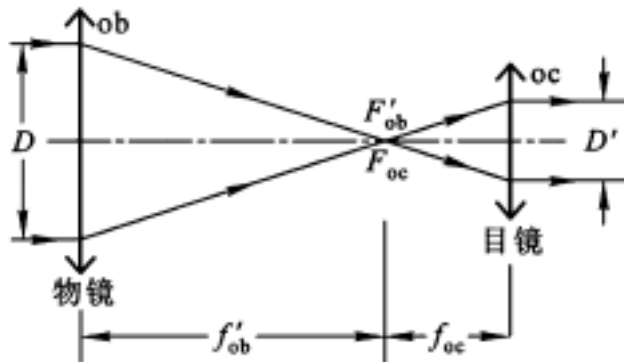
根据圆孔的夫琅禾费衍射和瑞利判据,恰可分辨时,应满足

$$= n = 1.22 \frac{n}{d} = 1.22 \frac{1}{d},$$

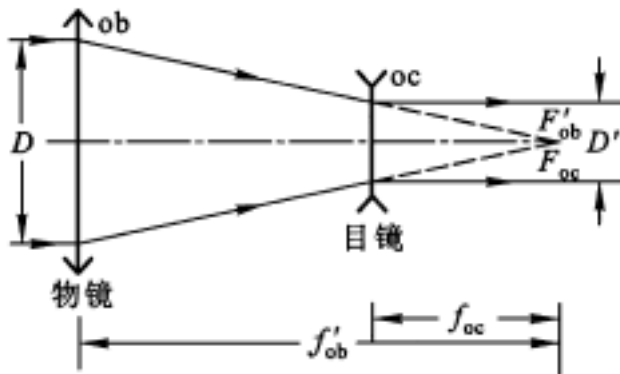
式中  $\lambda$  和  $\lambda'$  分别为光在空气和在眼内的波长。

在光照充足的情况下,可取  $d = 2.5 \text{ mm}$ , 并取对人眼最敏感的波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$  时, 可得人眼恰可分辨时的角距离是  $1'$ 。所以, 正常人眼在明视距离为  $l = 25 \text{ cm}$  处, 恰可分辨两物点的最小线距离约为  $y = l \theta = 0.1 \text{ mm}$ 。

望远镜是通过放大视角来观察远处物体的光学仪器。Z - 31 图所示的两种望远镜, 虽然结构有所不同, 但从它们的光路安排可见, 主要特点都是物镜像方焦点和目镜的物方焦点重合。无论哪种望远镜, 都是“无焦系统”: 来自远方物体的平行光束, 经望远镜的角放大后, 出射光仍然是平行光。望远镜物镜的直径为  $D$  时, 对远处两不相干物点恰可分辨的角距离为



(a) 开普勒望远镜



(b) 伽利略望远镜

Z - 31 图

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

该角距离的倒数被定义为望远镜的分辨本领,即

$$R = \frac{1}{\theta_R} = \frac{D}{1.22 \lambda}.$$

定义望远镜的有效放大本领为

$$M = \frac{\theta_R}{\theta},$$

其中,  $\theta_R$  是恰可分辨的两物点经望远镜后所成两像点(艾里斑中心)对人眼的张角,人眼在轻松状态下恰可分辨这两像点时,应有

$$\theta = \theta_R,$$

所以

$$M = \frac{\theta_R}{\theta} = \frac{R}{R} = \frac{D}{d}.$$

由上式可知,如果所选用望远镜的放大倍数(物镜与目镜直径之比)小于  $M$ ,由于人眼分辨能力的限制而不能分辨远处不相干的两物点;若所选用望远镜的放大倍数远大于  $M$ ,则像虽可放得很大,但得到的只是放大的艾里斑,即模糊的像.所以,通常选用望远镜的放大倍数略大于有效放大倍数  $M$  即可.

显微镜同样是人们熟悉的光学仪器,与望远镜不同,它的观察对象是位于物镜前方近焦点处的细小物体  $y$ .显微镜光学系统的设计安排,如 Z-32 图所示,先将两物点的间距  $y$  经物镜放大为  $y'$ ,再由目镜将  $y'$  放大至人眼能轻松分辨的线度  $y''$ (在明视距离或无穷远处),其中物镜的衍射为圆孔的夫琅禾费型.

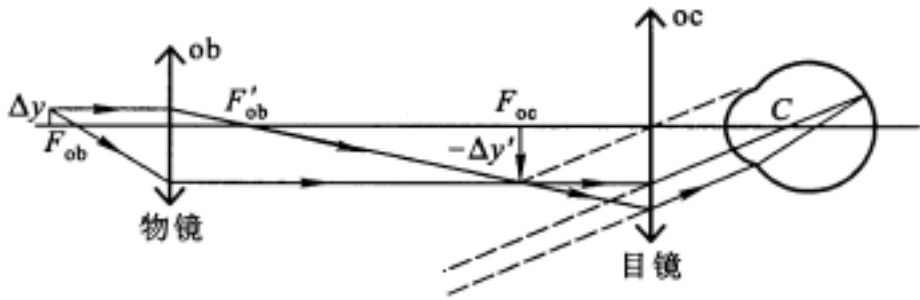
根据几何光学非近轴成像系统所遵循的正弦定理,物镜的物、像方各物理量应满足:

$$n' y' \sin u' = n y \sin u,$$

式中带撇的为像方物理量,  $n = 1$ ,  $u$  为物镜的出射光线与系统主光轴的夹角.恰可分辨时,有

$$y' = 0.61 \frac{\lambda}{\sin u'}.$$





Z - 32 图 显微镜

对应物镜前方细小物体的最小线度为

$$y = \frac{n y \sin u}{n \sin u} = 0.61 \frac{\lambda}{N.A.} = 0.61 \frac{\lambda}{N.A.} .$$

$N.A. = n \sin u$  称作物镜的数值孔径 .

显微镜的分辨本领定义为  $y$  的倒数, 即  $R = \frac{1}{y} = \frac{N.A.}{0.61 \lambda}$  .

显微镜的有效放大倍数  $M$  可定义为: 人眼在轻松状态下恰可分辨的间距  $y_0$  与对应两物点的间距  $y$  之比值, 即

$$M = \frac{y_0}{y} = \frac{y_0 \cdot N.A.}{0.61 \lambda} .$$

在明视距离下, 人眼恰可分辨的最小线度约为  $y_0 = 0.1 \text{ mm}$ , 取  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , 代入上式可得,  $M \approx 300 N.A.$  . 通常取显微镜的放大本领 (物镜的横向放大率  $\times$  目镜的放大本领) 范围为  $(500 \sim 1000) N.A.$  , 若过小, 显微镜的分辨本领未得到充分发挥, 过大则无助于提高像的清晰程度, 反而会引入更多的像差等欠缺 .

## 20. 光电效应中一个电子能吸引多个光子吗

金属表面在光的照射下释放电子的现象, 称为光电效应 (外光电效应), 释放的电子称为光电子 . 光电效应满足能量守恒方程:

$$h\nu = \frac{1}{2} m v_m^2 + A, \text{ 式中 } A \text{ 为金属的逸出功, } \frac{1}{2} m v_m^2 \text{ 为逸出金属后}$$

电子的最大动能.由方程可知,入射光子的能量应大于或等于逸出功,即  $h\nu \geq A$ ,入射光子的红限频率为  $\nu_0 = \frac{A}{h}$ .

一个电子一次吸收一个能量大于或等于逸出功的光子能量  $h\nu$  后,才能逸出金属表面成为光电子.这也称为单光子效应.

那么,当光子能量低于  $h\nu_0$  时,金属中的自由电子能否从入射光中吸收两个或  $n$  个(多光子)光子的能量  $nh\nu$  而产生光电效应呢?如果这种多光子吸收效应是可能的,则光电效应方程应改写为  $nh\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$ ,式中  $n$  是一个电子吸收的光子数.

回答是肯定的.

事实上,在提出光量子假设的论文中,爱因斯坦已估计到强光下产生多光子过程的可能性,量子力学原理也并没有限定原子每一次吸收跃迁只能吸收一个光子,一次可以同时吸收二个、三个、四个乃至更多个,只是发生这些吸收跃迁的几率比起只吸收一个光子的几率小得多.根据计算得到的结果,当光束的光子通量密度达到每秒每平方厘米面积的光子数目为  $10^{24}$  个时,便可以观察到双光子吸收现象.这是一种非线性效应,在使用普通光源情况下,一个电子同时吸收两个光子的几率几乎为零.随着 1960 年激光器的出现,光强已可轻而易举地达到能够实现多光子过程的水平.从 1964 年到 1975 年间,已陆续实现了钠膜材料中的一个电子同时吸收两个光子、金和银中的一个电子同时吸收三个光子、钨材料中的一个电子同时吸收四个光子乃至金和镍的一个电子同时吸收五个光子的光电效应.为了避免金属表面因大密度光子流入射使材料的温度上升,发射热电子流而淹没光电子流的情况,在这些实验中,都使用短脉冲激光束.

强光作用下产生非线性光电效应(外光电效应)的规律可表达为:

- (1) 光电流与入射光强的  $n$  次幂成正比,而限于线性关系.
- (2) 入射光强决定能否产生  $n$  光子光电效应,由  $nh\nu =$

$\frac{1}{2} m v_m^2 + A$ 可知,入射光强仍将影响光电子的最大动能。

(3) 红限频率在多光子吸收情况下失去原有的意义。红色、甚至红外的激光都有可能使一些金属产生光电效应。

多光子吸收现象同样也存在于强光脉冲照射下的半导体材料。按照玻尔的原子跃迁理论,原子每次只能吸收一个能量相当于原子两个能级间隔能量差的光子。对于能量小于原子能级间隔的光子,原子对它不吸收。物质相对这种频率的光辐射,自然表现为“光学透明”。但是,如果原子一次能够同时吸收掉两个乃至更多个能量小于能级间隔的光子,那么,相对这种频率的光辐射,原来表现为“光学透明”的物质就有可能因吸收光子而变为“光学不透明”。典型的例子是硫化镉(半导体),它的导带与价带间的能量间隔(禁带宽度)是  $4 \times 10^{-19}$  J,红光光子的能量是  $2.5 \times 10^{-19}$  J ~  $2.7 \times 10^{-19}$  J,小于禁带宽度,不能发生吸收跃迁。因此,硫化镉对红光是光学透明的。按理硫化镉对红色的红宝石激光也是光学透明的。然而,在用高功率红宝石激光照射时,硫化镉晶体片不仅吸收这种红色光,而且吸收非常强烈,并且还发出绿色的荧光。显然,硫化镉吸收了两个光子的能量  $5.1 \times 10^{-19}$  J,使价带的电子发生向导带的跃迁。而当导带电子向价带跃迁并放出光子时,该光子的能量对应禁带宽度,为绿色。这样的现象,在用高功率激光束对其他半导体材料、晶体材料以及染料等做的实验中,都被发现。由此,双光子吸收被正式确认。这种吸收过程显示的吸收系数比普通的单光子吸收过程大得多。事实上,只要两个光子的能量之和与介质的能级间的能量差接近,就会实现双光子吸收,实验上也早就观察到两个不同频率(颜色)的光子同时产生双光子吸收的现象。

双光子吸收现象在精确的原子分子物理过程的测量研究中是很有价值的。