目　　录

第一编　同伦论基础

引　言

诱使代数拓扑产生的思想源泉是一种主要在十九世纪后半叶发展起来的观念，这就是函数的许多性质在“形变”之下保持不变．例如复分析中 Cauchy 定理和残数计算断言复积分对曲线连续形变的不变性．真正的起点大概是 Abel 积分的 Riemann 理论．就是在这里曲面连通性的重大意义才被公认．建议有兴趣的读者在学习代数拓扑时去查阅一下 Felix Klein 对 Riemann 理论的讲述．[80]．

首先系统地考虑给空间赋以数值不变量问题的是 Poincare．在研究中，他发现了曲线可形变为另一曲线和曲线界定一较大空间之间的不同．前一概念导致引进同伦和基本群，而后者则导致同调论．

将这些思想发展成为一种数学理论是复杂的．不过，指导这种发展的想法却很易描述．构造一些函子，即：对于每个拓扑空间 X，确定一个群 $F(X)$，对每个映射 $f: X\to Y$（除有特别声明外，拓扑空间之间的“映射”总指“连续映射”），确定一个同态 $F(f)$: $F(X)\to F(Y)$，满足：

(1) 若 $Y=X$ 且 $f=$ 恒等映射，则 $F(f)=$ 恒等同态；

(2) 若 $g: Y\to Z$，则 $F(gf)=F(g)F(f)$．

例：设有拓扑空间与映射的一个图表：问题是求 f' 使 $pf'=f$．应用函子 F，我们看出有解的一个必要条件是 $F(f)$ 将 $F(Y)$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

映入 $F(X)$ 的子群 $F(p)(F(E))$ 以后我们将看到在某些情形，此条件也是充分的(6.1).

例：设 $f: X \to Y$ 为一同胚．于是，根据函子的性质，$F(f^{-1})$ 是 $F(f)$ 的逆，从而 $F(f)$ 是一同构．这样，X 和 Y 同胚的一个必要条件(通常不是充分的)是 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 为同构的群．对于给定的具有类似拓扑性质的两个空间，要证明它们不同胚，通常这是最容易的方法．

例：设 $i: A \to X$ 是子空间 A 到 X 内的包含映射，我们的问题是求一映射 $r: X \to A$ 使得 ri 是 A 到自身的恒等映射(这样的映射 r 称为 X 到 A 上的收缩)．如果这样的 r 存在，根据函子的性质，$F(r)F(i)$ 应等于 $F(A)$ 上的恒等变换，从而 $F(i)$ 将 $F(A)$ 同构地映到 $F(X)$ 的一个子群上．因此，如果我们已知道 $F(X)$ 是平凡群而 $F(A)$ 不是平凡群，这样的收缩就不可能存在，这恰是证明 Brouwer 不动点定理的方法(4.11 和 15.7).

读者还可以构作更多的例子去说明这种观点的有效性.

1 第一编的内容安排

在第一编中，我们论述基本群以及与它密切相关的覆盖空间．构造基本群函子的几何思想是道路的同伦．粗略地说，道路的同伦是保持端点不动的一个形变，两条道路可以定义合成，只要其中一条的终点与另一条的始点相同．熟知的代数性质，如结合性，不再保持，但在同伦的意义下可以保持．结果在同伦等价类上得到一个群结构，称为基本群．这种群并不只是拓扑不变量，而是在更大的

一类映射即同伦等价之下保持不变，这些内容将在第2节和第3节中加以论述.

为了利用基本群，我们必须能够计算它．有两种主要的计算途径：Seifert-Van Kampen 定理和利用覆盖空间．前者在本书中应用的形式叙述在(4.12)中，其它教程中有一些便于应用的极好叙述，因此，详细叙述我们不再重复．我们对圆周的基本群的讨论是覆盖空间理论的一个范例．关于覆盖空间的提升定理(6.1)，除了有用以外，它还是融合代数和几何的一个典型例子，这就给这个课题增添了一种特殊的风趣．最后第一编以借助圈空间对高维同伦群进行简短讨论作为结束.

2 道路的同伦

考虑平面内一复变函数 f 绕一闭曲线 C(如单位圆周)积分的问题．例如，我们有：

$$\int_C z\,dz = 0^{(*)}$$

$$\int_C \frac{dz}{z} \neq 0$$

那么，它们之间有何不同？我们知道 C 在 z 的解析域(即整个平面)之内可以“缩成一个点”，从而绕 C 的积分便等于在一个点的积分，即等于0．与此相反，在 $1/z$ 的解析域内，C 就不能“缩成一个点”.

更明确一些，设 σ，τ 是空间 X 中的两条道路(即单位闭区间 I 到 X 内的映射)，有着共同的端点(即 $\sigma(0)=\tau(0)=x_0$，$\sigma(1)=\tau(1)=x_1$)，如果存在映射 $F: I\times I \to X$，使得

(*) 原文误作 $\int_C z\,dz=1$——译者.

(1) $$F(s,\ 0)=\sigma(s)\quad 对所有\ s,$$

(2) $$F(s,\ 1)=\tau(s)\quad 对所有\ s,$$

(3) $$F(0,\ t)=x_0\quad 对所有\ t,$$

(4) $$F(1,\ t)=x_1\quad 对所有\ t,$$

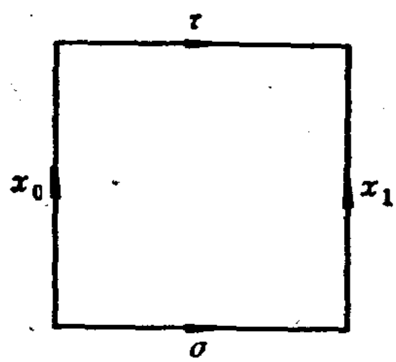
我们说 σ 和 τ 保持端点不动同伦，记作

$$\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

而映射 F 则叫做 σ 到 τ 的同伦。对于每个 t，显然 $s\to F(s,\ t)$ 是从 x_0 到 x_1 的一条道路 F_t，并且 $F_0=\tau$，$F_1=\tau$，我们用

$$F_t\colon \sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

来表示。以图表示就是



特别是，如果 σ 是 x_0 处的一条闭路（即 $x_1=x_0$），而 τ 是 x_0 处的常值道路，亦即对所有 s，$\tau(s)=x_0$，如果有 $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$，那么我们就说"$\sigma$ 可以缩成一点"或者说 σ 是零伦的。

于是 Cauchy 定理的正确叙述是：对于 f 的解析域 X 中零伦的（更一般的，零调的）所有闭路 C，总有

$$\int_C f(z)dz=0.$$

不难证明，同伦关系 $\simeq$ 具有下述性质：

(1) $$\sigma\simeq\sigma\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

(2) $$\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)\Rightarrow\tau\simeq\sigma\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

(3) $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$ 且 $\tau\simeq\rho\ \mathrm{rel}(0,\ 1)\to\sigma\simeq\rho\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$

因此我们可以考虑从 x_0 到 x_1 的道路 σ 关于等价关系 $\simeq$ 的同伦类 $[\sigma]$.

如果 σ 是从 x_0 到 x_1 的道路，τ 是从 x_1 到 x_2 的道路，我们如下定义一条从 x_0 到 x_2 的道路 $\sigma\tau$，它是先沿 σ 运动，然后沿 τ 运动而得到的一条道路．确切地说，就是

$$\sigma\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t) & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ \tau(2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

(4) $\sigma\simeq\sigma'\mathrm{rel}(0,\ 1)$ 且 $\tau\simeq\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)\Rightarrow\sigma\tau\simeq\sigma'\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)$

证明：若

$$F_{t:}\ \sigma\simeq\sigma'\,\mathrm{rel}(0,\ 1)$$
$$G_{t:}\ \tau\simeq\tau'\mathrm{rel}(0,\ 1)$$

则 $F_tG_{t:}\ \sigma\tau\simeq\sigma'\tau'\mathrm{rel}(0,$ □

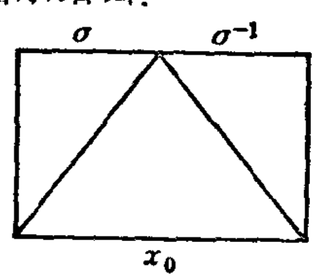
这样，我们可明确地在 σ 的类的右边乘上 τ 的类．当然，这时总是假定 σ 的终点等于 τ 的始点．

(2.1) **定理** 设 $\pi_1(X,\ x_0)$ 为 X 中 x_0 处闭路同伦类的集合，如果按如上方式定义 $\pi_1(X,\ x_0)$ 中的乘法，则 $\pi_1(X,\ x_0)$ 成为群，且群的单位元是 x_0 处常值道路的同伦类，类 $[\sigma]$ 的逆元是闭路 σ^{-1} 的类，而 σ^{-1} 定义为

$$\sigma^{-1}(t)=\sigma(1-t)\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

（即沿 σ 返回的道路）

证明：我们来证明 $\sigma\sigma^{-1}\simeq x_0$，这里 x_0 又表示点 x_0 处的常值道路．此同伦由下面的图示给出：



也就是说，定义 $F(s, t)$ 为

$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma(2s) & 0\leqslant 2s\leqslant t\\ \sigma(t) & t\leqslant 2s\leqslant 2-t\\ \sigma^{-1}(2s-1) & 2-t\leqslant 2s\leqslant 2\end{cases}$$

显然这些函数分别在每个三角形上连续，并且在这些三角形的交上一致，因此，根据一个初等的论证，F 在整个正方形上连续.

关于乘法满足结合律(在同伦的意义下)的证明以及 x_0 的类为单位元的证明都可以类似地进行:

令
$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{t+1}{4}\\ \tau(4s-t-1) & \dfrac{t+1}{4}\leqslant s\leqslant \dfrac{t+2}{4}\\ \omega\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & \dfrac{t+2}{4}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

则 $(\sigma\tau)\omega\simeq\sigma(\tau\omega)\,\mathrm{rel}(0, 1)$

令
$$F(s, t)=\begin{cases}\sigma\left(\dfrac{2s}{t+1}\right) & 0\leqslant s\leqslant \dfrac{t+1}{2}\\ x_0 & \dfrac{t+1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

则 x_0 处的常值道路是基本群的单位元. □

$\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间有无关系？无疑，当 x_0 和 x_1 属于 X 的不同道路连通分支时，它们之间确无关系. 不过，我们有下述结果:

(2.2)命题 设 α 是从 x_0 到 x_1 的一条道路，那么由 $[\sigma]\to[\alpha^{-1}\sigma\alpha]$ 定义的映射是群 $\pi_1(X, x_0)$ 到群 $\pi_1(X, x_1)$ 上的一个同构 α_*

证明: α_* 显然是一个同态，并且 $(\alpha^{-1})_*$ 是它的逆(这里 α^{-1} 是(2.1)中定义的道路). □

(2.3)**推论** 若 X 为道路连通空间，则群 $\pi_1(X, x_0)$ 在同构

的意义下与点 x_0 的选取无关.

在此情形下，$\pi_1(X, x_0)$ 通常简记为 $\pi_1(X)$ 并称作 X 的**基本群**.

我们希望 π_1 能成为从空间到群的一个函子，但是，由于在一般情况下 $\pi_1(X, x_0)$ 确与基点 x_0 有关，要想得到一个函子就必须将基点加入我们的范畴. 因此，我们定义**带基点的拓扑空间范畴**，它的对象是偶 (X, x_0)，它的射是满足 $f(x_0)=y_0$ 的映射 $f: X \to Y$. 对于每个这样的 f，可以得到一个导出同态：

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

它由 $f_*[s]=[f\circ s]$ 来定义. 容易验证定义是明确的且 f_* 确为同态. 此外，还不难验证

(1) $\quad Y=X$ 且 $f=$ 恒等映射 $\Rightarrow f_*=$ 恒等同态；

(2) $\quad$ 若 $g: (Y, y_0)\to(Z, z_0)$，则 $(gf)_*=g_*f_*$

这样一来，我们就可以谈论从带基点的拓扑空间范畴到群范畴的**基本群函子**了.

3 映射的同伦

由于道路是 I 到 X 内的映射，我们可试用任意空间 Y 代替 I 来定义同伦. 这时当然不再有端点. 不过，我们可以用一个子空间 $A\subset Y$ 代替集合 $\{0, 1\}$.

设有映射 $f, g: Y \to X$，满足 $f|A=g|A$，如存在映射 $F: Y\times I \to X$ 使得

(1) $\quad$ 对所有的 $y\in Y$，$F(y, 0)=f(y)$，

(2) $\quad$ 对所有的 $y\in Y$，$F(y, 1)=g(y)$，

(3) $\quad$ 对所有的 $y\in A$，$t\in I$，$F(y, t)=f(y)=g(y)$，

我们便说 $f\simeq g \text{ rel } A$

当 A 为空集时，则简记为

$$f\simeq g$$

于是，我们又得到一个等价关系.

例 1 设 $X=Y=\boldsymbol{R}^n$，f 为恒等映射，g 为常值映射 0，那么

$$F(x,\ t)=tx$$

定义一个从 g 到 f 的同伦.

如果 X 上的恒等映射同伦于 X 到其中某一点的常值映射，我们就说空间 X 是**可点缩的**.

(3.1)**练习题** X 是可点缩的当且仅当对任何空间 Y，Y 到 X 的任何两个映射都同伦. 又可点缩空间是道路连通的.

例 2 欧几里德空间中的每个凸子集 X 是可点缩的. 这是因为，若 $f_1,\ f_2$: $Y\to X$，我们定义一个同伦如下：

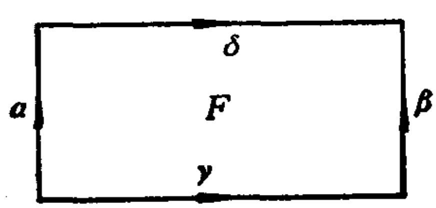
$$F(y,\ t)=tf_1(y)+(1-t)f_2(y)\quad y\in Y,\ t\in I.$$

一个道路连通空间，当它的基本群是平凡群时，称为**单连通空间**

(3.2)**命题** 可点缩空间是单连通空间.

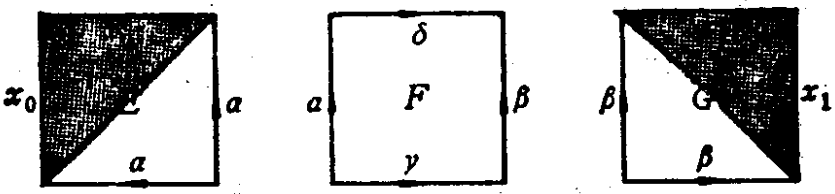
证明：命题并不十分显然，因为，尽管点 x_0 处的每条闭路 σ 作为映射都同伦于常值道路，但是我们并不知道它们是否相对于 $(0,\ 1)$ 同伦.

(3.3)**引理** 已知 F：$I\times I\to X$，令 $\alpha(t)=F(0,\ t)\beta(t)=F(1,\ t)$，$\gamma(s)=F(s,\ 0)$，$\delta(s)=F(s,\ 1)$，用图表示



则 $\delta\simeq\alpha^{-1}\nu\beta\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$.

证明：用并置下面三个正方形的办法来进行证明.



其中 $x_0=\delta(0)$, $x_1=\delta(1)$,并且

$$E(s,\ t)=\begin{cases} x_0 & s\leqslant t \\ \alpha(1+t-s) & s\geqslant t\end{cases}$$

$$G(s,\ t)=\begin{cases} \beta(t+s) & 1-s\geqslant t \\ x_1 & 1-s\leqslant t\end{cases}$$

□

现在,如果 X 可以点缩,我们可以得到这样一个 F,其中 $\delta=\sigma$, $\gamma=x_0$ 且 $\alpha=\beta$(因为 σ 给出圆周到 X 内的一个映射,它同伦于取值 x_0 的常值映射). 从而 σ 是零伦的.

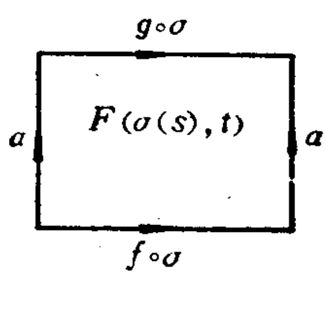
(3.4) **推论** 设 $f,\ g\colon Y\to X$ 是同伦的两个映射,同伦为 $F\colon Y\times I\to X$, 且 $y_0\in Y$, $x_0=f(y_0)$, $x_1=g(y_0)$, 又 α 是 x_0 到 x_1 的由

$$\alpha(t)=F(y_0,\ t)\quad t\in I$$

定义的道路,那么我们有一个可交换的三角形:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ & \pi_1(X,x_1) \end{tikzcd}$$

证明: 对于 y_0 处的任意闭路 σ,我们有[*]



□

[*] 图中 $\sigma(s)$ 原文误为 $\sigma(t)$——译者.

(3.5) **推论** 在上述条件下，f_* 为同构当且仅当 g_* 为同构.

一个映射 $f: Y\to X$ 叫做一个**同伦等价**，如果存在映射 f': $X\to Y$ 使得

$$ff'\simeq X \text{ 上的恒等映射},$$
$$f'f\simeq Y \text{ 上的恒等映射}.$$

如果这样的 f 存在，我们就说 X 和 Y 是同伦等价的空间. 例如，X 是可点缩的当且仅当 X 同伦等价于一个单点.

(3.6) **推论** 如果 f 是一个同伦等价，那么对于所有的 $y_0\in Y$，$f_*: \pi_1(Y, y_0)\to\pi_1(X, f(y_0))$ 是一个同构.

这是因为根据上面的推论，$f_*f'_*$ 和 f'_*f_* 都是同构. □

于是，道路连通空间的基本群是一个**同伦不变量**(更是一个拓扑不变量). 同伦等价关系较之拓扑等价关系要粗糙一些. 例如，最初等的同伦等价是一个收缩——把空间的一部分缩成一个点. 对于代数拓扑来说，同伦等价概念的重要性在于这样的事实：将代数和空间相联系的构造往往导出同伦不变的结构. 此外，对同伦型的认识还是着手处理有关拓扑型的更细致的问题的一个基础.

练习题 将你喜爱的字母表中的字母按照同伦型和拓扑型分类.

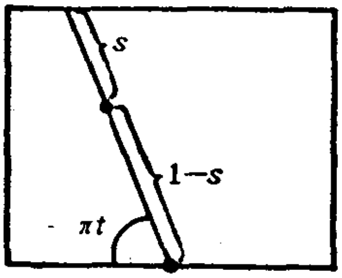
(3.7) **练习题** 设 X 为道路连通空间，则下列论断等价：

(1) X 为单连通空间；

(2) 单位圆周 S' 到 X 内的每个映射可扩张成单位闭圆盘 E^2 到 X 内的映射.

(3) 如果 σ, τ 是 X 内具有相同始点和相同终点的道路，那么 $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0, 1)$.

提示：要证明(1)⇔(2)，可把 E^2 视为将点 $(s, t)\in I\times I$ 映到点 $te^{2\pi is}$ 而得到的 $I\times I$ 的商空间. 要证明(1)⇔(3)，可应用如下图所示的正方形的变换



(3.8)**练习题** 设 $CX = X\times I/X\times\{0\}$ 为 X 上的锥，经由 $x\mapsto(x, 1)$ 将 X 视为 CX 的子空间。推广(3.7)(2)证明 $f: X\to Y$ 零伦当且仅当 f 可扩张为 $\bar{f}: CX\to Y$.

(3.9)**练习题** 设 Y 可缩成一点 y_0，证明由 $f(x)=(x, y_0)$ 定义的 $f: X\to X\times Y$ 和投影 $p: X\times Y\to X$ 是一对同伦等价.

(3.10)**练习题** 设 $f, g: S^n\to S^n$ 是对所有 $x\in S^n$ 满足 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不对径的两个映射，证明 $f\simeq g$. 如果此外还存在 $x_0\in S^n$ 使得 $f(x_0)=g(x_0)$，证明 $f\simeq g \operatorname{rel} x_0$.

(3.11)**练习题** 设 X 和 Y 具有同一同伦型，证明 X 和 Y 的弧分支成一一对应.

(3.12)**练习题** 设 X 为道路连通空间，并且每个 $f: S^1\to X$ 零伦，但不必保持基点全不动，证明 $\pi_1(X, x_0)=0$.

4 圆周的基本群

我们借助直线 $\boldsymbol{R}$ 来研究圆周 S^1，可以证明闭路的同伦类完全由它"缠绕"的圈数所确定. 这里，当"缠绕"的方向与 S^1 的已知定向相反时，圈数为负值.

确切地说，S^1 是绝对值为 1 的复数构成的群. 我们有一连续同态 $\phi: \boldsymbol{R}\to S^1$（$\boldsymbol{R}$ 作为加群），定义为

$$\phi(x)=e^{2\pi ix}\quad x\in\boldsymbol{R}$$

容易证明 ϕ 是开映射，因此，ϕ 把直线上的开区间$\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$同

胚地映到 $S'-\{-1\}$ 上，令 ψ 为 $\phi|(-\frac{1}{2},+\frac{1}{2})$ 的逆映射．我们需要两个关键的引理．

(4.1) **提升引理** 若 σ 是 S^1 中以 1 为始点的道路，则在 $\boldsymbol{R}$ 中存在唯一的道路 σ' 以 0 为始点，并且满足 $\phi\circ\sigma'\simeq\sigma$.

(4.2) **覆盖同伦引理** 若 τ 也是 S^1 中以 1 为始点的一条道路，且

$$F: \sigma\simeq\tau \operatorname{rel}(0,\ 1)$$

则存在唯一的 $F': I\times I\to\boldsymbol{R}$ 使得

$$F': \sigma'\simeq\tau' \operatorname{rel}(0,\ 1)$$
$$\phi\circ F'=F$$

证明：我们同时证明这两个引理．设 Y 为 I 或 $I\times I$，f: $Y\to S^1$ 为 σ 或 F，$0\in Y$ 或者为 0 或者为 $(0,\ 0)$．因为 Y 为紧空间，f 一致连续，从而存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$|y-y'|<\varepsilon\Rightarrow|f(y)-f(y')|<1;$$

特别是，对于这样的 y 和 y'，$f(y)\neq-f(y')$，于是 $\psi(f(y)/f(y'))$ 有定义，我们可以求得足够大的 N 使得对所有 $y\in Y$ 总有 $|y|<N\varepsilon$．设

$$\begin{aligned} f'(y)=&\psi\left(f(y)\Big/f\left(\frac{N-1}{N}y\right)\right)\\ &+\psi\left(f\left(\frac{N-1}{N}y\right)\Big/f\left(\frac{N-2}{N}y\right)\right)\\ &+\cdots+\psi\left(f\left(\frac{1}{N}y\right)\Big/f(0)\right)\end{aligned}$$

则 $f': Y\to\boldsymbol{R}$ 连续，$f'(0)=0$，且 $\phi\circ f'=f$.

假如我们还有 $f'': Y\to\boldsymbol{R}$，$f''(0)=0$ 和 $\phi\circ f''=f$，则 $f'-f''$ 将是 Y 到 ϕ 的核即 $\boldsymbol{Z}$ 内的（连续）映射．由于 Y 是连通的，从而 $f'-f''$ 为常值映射，因此 $f'=f''$.

在 $Y=I\times I, f=F, f'=F'$ 的情形，可以看出 $F': \sigma'\simeq\tau'$ [(*)]. 事实上，同伦是相对于(0, 1)的同伦，因为在 $0\times I$ 上 $\phi\circ F'=F=1$，所以 $F'(0\times I)\subset \boldsymbol{Z}$，再由连通性，$F'(0\times I)=0$. 类似的，$F'(1\times I)$是常值.（另一个证明见 5.1—5.3）. □

(4.3) **推论** σ' 的终点仅与 σ 的同伦类有关.

用 $\chi[\sigma]=\sigma'(1)$ 定义一个映射 χ: $\pi_1(S^1, 1)\to\boldsymbol{Z}$. 上面的推论说明此映射的意义是明确的. χ 是一个同态，因为对于$[\sigma]$, $[\tau]\in\pi_1(S^1, 1)$，设 $m=\sigma'(1)$, $n=\tau'(1)$，且 τ'' 是 $\boldsymbol{R}$ 中由 $\tau''(s)=\tau'(s)+m$ 定义的从 m 到 $m+n$ 的道路，则 $\phi\circ\tau''=\tau$, $\sigma'\tau''$[(**)]是 $\sigma\tau$ 的以 0 为始点的提升，终点为 $m+n$. 因此，

$$\chi([\sigma][\tau])=\chi([\sigma])+\chi([\tau]).$$

χ 是满同态：对给定的 n，定义 $\sigma'(s)=ns$. 如果 $\sigma=\phi\circ\sigma'$，则 $\chi([\sigma])=n$.

χ 是单同态：设 $\chi([\sigma])=0$，从而 σ' 是 $\boldsymbol{R}$ 中在 0 处的闭路，因 $\boldsymbol{R}$ 可以点缩，故 $\sigma'\simeq 0 \operatorname{rel}(0, 1)$. 再应用 ϕ，有 $\sigma\simeq 1 \operatorname{rel}(0, 1)$，从而$[\sigma]=1$. 这就证明了下面的定理.

(4.4) **定理** $\pi_1(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$

附注 在这个证明中，只用到 S^1 为一拓扑群($\boldsymbol{R}$ 模以 $\boldsymbol{Z}$ 的商群)，$\boldsymbol{R}$ 为一单连通拓扑群及 $\boldsymbol{Z}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的离散子群这些性质. 因此，完全相同的讨论可给出下述更为一般性的结论.

(4.5) **定理** 若 G 为单连通拓扑群，H 为 G 的离散正规子群，则

$$\pi_1(G/H, 1)\cong H$$

有一个细节需要验证：我们必须在 G 中找出 1 的一个开邻域 V，使得它在 ϕ: $G\to G/H$ 之下与 G/H 中 1 的一个开邻域同胚，从而可像前面那样应用 ψ. 因为 H 是离散的，1 有开邻域 U 满足 $U\cap H=\{1\}$，由映射$(g_1, g_2)\to g_1g_2^{-1}$ 的连续性，存在 1 的开

[(*)] 原文误为 $\sigma\simeq\tau$——译者. [(**)] 原文误为 $\sigma'\tau'$——译者.

邻域 $V\subset U$ 使得 $g_1, g_2\in V\Rightarrow g_1g_2^{-1}\in U$，于是 V 即为所求. □

(4.6) **练习题** 连通拓扑群的离散正规子群是中心子群，从而 $\pi_1(G/H)$ 为交换群.

(4.7) **推论** 环面的基本群为 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$.

因为环面与 $S^1\times S^1$ 同胚，从而是与 $(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})/\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ 同构的拓扑群. □

这个结果还可以用另一方法推导如下:

(4.8) **命题** 已知空间 X, Y, $x_0\in X$, $y_0\in Y$，则

$$\pi_1(X\times Y, (x_0, y_0))\cong\pi_1(X, x_0)\times\pi_1(Y, y_0).$$

证明: 此同构可如下得到. 令

$$\begin{tikzcd} & X\times Y \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

均为投影，它们导出同态

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X\times Y, (x_0, y_0)) \arrow[dl, "(p_X)_*"'] \arrow[dr, "(p_Y)_*"] & \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

从而有 $\pi_1(X\times Y, (x_0, y_0))$ 到 $\pi_1(X, x_0)\times\pi_1(Y, y_0)$ 的同态 $((p_X)_*, (p_Y)_*)$. 这个同态是同构，因为它有逆: 对 x_0 处的闭路 σ 和 y_0 处的闭路 τ，偶 $([\sigma], [\tau])$ 在此逆之下的像为 (x_0, y_0) 处的闭路 (σ, τ) 的同伦类，这里

$$(\sigma, \tau)(t)=(\sigma(t), \tau(t)) \quad 对所有 t\in I$$

证明的细节留给读者作为练习，并请验证这个同构对 (X, Y) 是函子同构. □

作为定理的一个应用和代数拓扑方法的一个例子，我们证明下面的定理

(4.9) **定理** 圆周不是单位闭圆盘的收缩核.

这意味着不存在 E^2 到 S^1 上的映射 f 使得它在 S^1 上的限制是恒等映射. 假如有这样的 f 存在，令 $i: S^1 \to E^2$ 为包含映射，则 $fi=$ 恒等映射，应用基本群函子可得：

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1,1) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "1"'] & & \pi_1(E^2,(1,0)) \arrow[dl, "f_*"] \\ & \pi_1(S^1,1) & \end{tikzcd}$$

但这等于说 $\boldsymbol{Z} \to 0 \to \boldsymbol{Z}$ 为恒等同态，这显然不可能. □

注意 事实上，并不存在满足 $fi \simeq$ 恒等映射的映射 $f: E^2 \to S^1$. 因为，否则 $f_* i_*$ 将是同构(据 3.5)，但这是不可能的.

(4.10) **练习题** 证明圆周是闭圆盘去掉原点之后的强形变收缩核(空间 X 的子空间 A 称作 X 的**强形变收缩核**，如果存在同伦 $F_t: X \to X$，使得 $F_0 = X$ 上的恒等映射，且对所有 t，$F_t | A = A$ 上的恒等映射，而 F_1 为 X 到 A 的一个映射).

(4.11) **推论** 闭圆盘到自身的任何连续映射具有不动点.

这是 Brouwer 不动点定理在 $n=2$ 时的情形. 此定理可对所有的 n 加以证明. (练习题：对 $n=1$ 时进行证明.) 假设 $f: E^2 \to E^2$ 没有不动点，对任意 $x \in E^2$，用直线连接 x 和 $f(x)$，沿 $f(x)$ 到 x 的方向延长直线与 S^1 交于点 $r(x)$，则 r 是 E^2 到 S^1 的一个收缩，这是一个矛盾. □

(4.12) **练习题** 设空间 X 是其两个开集 U 和 V 的并，$U \cap V$ 非空且道路连通，又 U, V 均单连通，证明 X 单连通. (这是 Van Kampen 定理的特殊情形，该定理是说：$\pi_1(X)$ 是 $\pi_1(U)$ 与 $\pi_1(V)$

的“融合和”. 参阅 Crowell 和 Fox[16]或者 Massey[67].)

有时,对 $X=U\cup V$, U, V 开于 X 中,$U\cap V$ 非空且弧连通,我们要使用 Seifert-Van Kampen 定理的下述特殊情形:

a) 若 $U\cap V$ 单连通,则 $\pi_1(X)$ 是 $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ 的自由积.

b) 若 U 单连通, 则 $\pi_1(X)$ 是 $\pi_1(V)$ 模以包含 $\pi_1(U\cap V)$ 在包含映射 $U\cap V\to V$ 的导出同态之下的象的最小正规子群的商群.

(4.13) 练习题 当 $n\geqslant 2$ 时, n 维球面 S^n 单连通.

(4.14) 练习题 证明:每个 3×3 阶正实值方阵有一个具有正特征值的特征向量. 提示:考虑三角形

$$T=\{x+y+z=1;\ x,\ y,\ z\geqslant 0\}$$

及由合成相伴线性变换和到 T 上的中心射影得到的 T 的自映射,再应用(4.11).

附注 线性代数中的其它一些结果也有着拓扑证明,第 16 节中的材料可以用来证明 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 的每个可逆线性变换都有一个一维不变子空间.

(4.15) 练习题 设 $A\subset X$ 是一个收缩核, $\pi_1(A)$ 是 $\pi_1(X)$ 的正规子群,证明 $\pi_1(X)\cong\pi_1(A)\times\pi_1(X)/\pi_1(A)$. 并参看练习题(12.12)中的图,证明弧 b 表示的圆周不是 Klein 瓶的收缩核. 提示:应用(4.12)(b)计算 Klein 瓶的基本群.

5 覆 盖 空 间

我们已经看到, 确定 $\pi_1(S^1)$ 的技巧可以推广到任何拓扑群,只要它可以表示成单连通拓扑群模以一个离散子群而得到的商群. 现在,我们又要推广到没有群结构的空间 X. 而这样的 X 必须可以表成某个单连通空间 $\widetilde{X}$ 的商空间,并且商映射 $\widetilde{X}\to X$ 的

纤维是离散的.

定义 $E \xrightarrow{p} X$ 称为 X 的一个覆盖空间，如果每个 $x \in X$ 都具有一个开邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是 E 中开集 S_i 的不交并，且每个 S_i 都由 p 同胚地映到 U 上. 这样的 U 叫做**被均匀覆盖的**，而 S_i 叫做 U 上的叶.

作为定义的直接结果，我们有：

(1) 每个点 x 上的纤维 $p^{-1}(x)$ 离散；

(2) p 为局部同胚；

(3) p 把 E 映满 X，X 具有从 E 得到的商拓扑.

条件(2)告诉我们 X 和 E 具有相同的局部性质，如 X 是局部连通的当且仅当 E 也是，等等.

我们证明下述与(4.1)和(4.2)相似的定理以说明这个定义正抓住了 $\boldsymbol{R} \to S^1$ 的实质(只是为了更一般，不再假定 E 单连通).

(5.1) **唯一提升定理** 设 $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ 是一带基点的覆盖空间，$(Y, y_0) \xrightarrow{f} (X, x_0)$ 为任一映射. Y 为连通空间. 如果存在映射 $(Y, y_0) \xrightarrow{f'} (E, e_0)$ 使得 $pf' = f$，那么映射 f' 唯一.

证明：假设 f''：$(Y, y_0) \to (E, e_0)$，$pf'' = f$. 令

$$A = \{y \in Y \mid f'(y) = f''(y)\}$$

$$D = \{y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y)\}$$

则 Y 是 A 和 D 的不交并，且 $y_0 \in A$. 我们来证明这两个集合都是开集，从而根据 Y 的连通性，D 是空集.

对 $y_1 \in Y$，设 U 是 $f(y_1)$ 的被 p 均匀覆盖的一个邻域，如果 $y_1 \in A$，则 $f'(y_1) = f''(y_1)$ 在 $p^{-1}(U)$ 的某一叶 S 之内. 从而 $f'^{-1}(S) \cap f''^{-1}(S)$ 是 y_1 的包含在 A 内的开邻域. 如果 $y_1 \in D$，则 $f'(y_1)$ 在某个叶 S_1 之内，而 $f''(y_1)$ 在另一叶 S_2 之内；从而 $f'^{-1}(S_1) \cap f''^{-1}(S_2)$ 是 y_1 的包含在 D 内的开邻域. □

(5.2)**道路提升定理** 设$(E, e_0)\xrightarrow{p}(X, x_0)$如上，如果$\sigma$是$X$中始点为$x_0$的道路，则在$E$中存在以$e_0$为始点的唯一道路$\sigma'_{e_0}$，使得$p\sigma'_{e_0}=\sigma$.

证明 σ'_{e_0}的唯一性可由上面的定理得到.

情形1. 整个空间X是被均匀覆盖的. 若e_0在叶S内，且ψ是同胚$p|S$的逆$X\to S$，则$\sigma'_{e_0}=\psi\circ\sigma$就是所需求的提升.

一般情形：由覆盖空间的定义和I的紧性，我们可将I用$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$划分，使得σ把每个闭区间$[t_i, t_{i+1}]$映入$\sigma(t_i)$的一个被均匀覆盖的邻域. 由情形1我们可以提升$\sigma|[0,t_1]$为映射σ_1: $[0, t_1]\to E$，并且$\sigma_1(0)=e_0$. 应用归纳法，假定可提升$\sigma|[0, t_i]$为映射σ_i: $[0, t_i]\to E$，且满足$\sigma_i(0)=e_0$. 那么由情形1，我们可以提升$\sigma|[t_i, t_{i+1}]$为映t_i到$\sigma_i(t_i)$的一个映射；将此映射和σ_i结合，得到σ_{i+1}，最后，$\sigma_n=\sigma'_{e_0}$. □

(5.3)**覆盖同伦定理** 设$(E, e_0)\xrightarrow{p}(X, x_0)$如上. (Y, y_0)为任一空间，f: $(Y, y_0)\to(X, x_0)$为具有提升f': $(Y, y_0)\to(E, e_0)$的映射. 那么，对于所有$y\in Y$满足$F(y, 0)=f(y)$的任一同伦$F: Y\times I\to X$，均可提升为对所有$y\in Y$满足$F'(y, 0)=f'(y)$的同伦$F': Y\times I\to E$.

(5.4)**推论** 若σ, τ是X中以x_0为始点的道路，且$\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0, 1)$，则

$$\sigma'_{e_0}\simeq\tau'_{e_0}\quad \mathrm{rel}(0, 1)$$

特别是，σ'_{e_0}和τ'_{e_0}具有相同的终点.

证明：我们分几步证明上述定理.

1. 如果整个X被均匀覆盖，结论显然。

2. 由覆盖空间的定义和I的紧性，对于每个$y\in Y$，我们可求得一个开邻域N_y和I的一个划分$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$(有赖

于 y)，使得F 映 $N_y\times[t_i,\ t_{i+1}]$到 $F(y,\ t_i)$的一个被均匀覆盖的邻域之内. 由第1步，以及如前所述的归纳过程，我们可以在 $N_y\times I$ 上把 F 提升为映射 F': $N_y\times I\to E$，对于所有的 $y'\in N_y$ 有 $F'(y',\ 0)=f'(y')$成立.

3. 在第2步中，$N_y\times I$ 上和 $N_{y'}\times I$ 上的提升在$(N_y\cap N_{y'})\times I$ 上一致，从而可以粘接它们得到所要求的在 $Y\times I$ 上 F 的提升 F'. 这是因为，对于 $y_1\in N_y\cap N_{y'}$，我们可以得到 $F|y_1\times I$ 的两个提升，它们在点$(y_1,\ 0)$处一致，而根据唯一提升定理($y_1\times I$ 连通!)这两个提升相同. □

(5.5) **推论** $p_*: \pi_1(E,\ e_0)\to\pi_1(X,\ x_0)$为单同态.

如果 σ' 是 e_0 处的闭路，并且 $p\circ\sigma'\simeq x_0\operatorname{rel}(0,\ 1)$，则这个同伦的提升给出同伦 $\sigma'\simeq e_0\operatorname{rel}(0,\ 1)$ (因为 $\sigma'=(p\circ\sigma')'_{e_0}$). □

注意 当 σ 是 x_0 处的闭路时，它的以 e_0 为始点的提升 σ'_{e_0} 未必是 e_0 处的闭路(以 $X=S^1$ 为例). 不过，它的终点必是纤维 $p^{-1}(x_0)$中的一点，且由于此点仅依赖于 σ 的同伦类，我们可以定义 $\pi_1(X,\ x_0)$在纤维 $p^{-1}(x_0)$上的一个作用如下：对所有 $e\in p^{-1}(x_0)$，$[\sigma]\in\pi_1(X,\ x_0)$令

$$e\cdot[\sigma]=\sigma'_e(1)$$

(一个群 G 在一个集合 S 上的一个作用是指 $S\times G$ 到 S 的一个映射$(s,\ g)\to s\cdot g$，满足

$$\text{对所有 } s\in S,\quad s\cdot 1=s$$

$$\text{对所有 } s\in S,\ g,\ g'\in G,\ s\cdot(gg')=(s\cdot g)\cdot g'.)$$

另外，点 $e_0\in p^{-1}(x_0)$的稳定子是 $\pi_1(X,\ x_0)$ 的子群 $p_*\pi_1(E,\ e_0)$. 因为 σ 提升为 e_0 处的闭路当且仅当 σ 是 e_0 处闭路的 p_* 像. (一般地说，$s_0\in S$ 的稳定子是 G 的子群 $G_{s_0}=\{g\in G|s_0\cdot g=s_0\}$). 又，如果 E 是道路连通的，则 $\pi_1(X,\ x_0)$的作用是可迁的(一般地说，就是对所有的 $s,\ s'\in S$，存在 $g\in G$ 使得 $s\cdot g=s'$)，因为从 e 到

e' 的一条道路可表成 σ'_e，而 σ 是它的射影．因此，当 e 跑遍 $p^{-1}(x_0)$ 时，所有的各个子群 $p_*\pi_1(E,\ e)$ 彼此共轭（即若 $s_0\cdot g=s_1$，则 $G_{s_0}=gG_{s_1}g^{-1}$）．

(5.6) 推论 设 E 是道路连通空间，则映射 $[\sigma]\to e_0\cdot[\sigma]$ 导出所有傍系 $p_*\pi_1(E,\ e_0)[\sigma]$ 之集和纤维间的一一对应．特别是，当 $p^{-1}(x_0)$ 有限时，纤维中的点数等于子群 $p_*\pi_1(E,\ e_0)$ 的指数．

(5.7) 练习题 若 E 道路连通，则所有纤维等势．

对于一个覆盖空间 $E\xrightarrow{p}X$，它的所谓覆盖变换群 G 是 E 的保持纤维的所有自同胚 ϕ 形成的群：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad p\phi=p$$

(5.8) 定理 已知覆盖空间 $(E,\ e_0)\xrightarrow{p}(X,\ x_0)$ 具有覆盖变换群 G．如果 E 是单连通和局部道路连通空间，则 G 和 $\pi_1(X,\ x_0)$ 标准同构．

这个定理使我们达到了用单连通覆盖空间刻画基本群的目的．

证明． 设 $\phi\in G$．因 E 单连通，从 e_0 到 $\phi(e_0)$ 的所有道路都相对于 $(0,\ 1)$ 同伦（据 3.7），从而，如果 σ' 是这样的一条道路，则 $\pi_1(X_1,\ x_0)$ 中元 $[p\circ\sigma']$ 仅与 e_0 和 $\phi(e_0)$ 有关，我们用 $\chi(\phi)$ 记之．显然 χ 是一同态 $G\to\pi_1(X_1,\ x_0)$．现在 $\phi(e_0)=e_0\cdot\chi(\phi)$，所以 $\chi(\phi)=1$ 蕴含 ϕ 使 e_0 不动．但是，对于连通覆盖空间，覆盖变换由它在一点上的作用唯一确定（唯一提升定理——ϕ 提升 p!）；因此，具有不动点的覆盖变换只能是恒等映射，于是 χ 是单同态．

我们应用局部道路连通性的条件证明 χ 是满同态．设 $[\sigma]\in\pi_1(X,\ x_0)$，对任意的 $e\in E$，令 τ' 为从 e_0 到 e 的一条道路，$\tau=$

$p\circ\tau'$，则 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 是 $x=p(e)$ 处的闭路，定义

$$\phi(e)=e\cdot[\tau^{-1}\sigma\tau]$$

因 E 单连通，ϕ 只与 $[\sigma]$ 有关．取 $e=e_0$，我们可以看出 $\chi(\phi)=[\sigma]$，剩下的只要能证明 ϕ 连续就行了．注意，对任意点 $e_1\in E$，如果 τ' 是 e_1 到 e 的道路，$\tau=p\circ\tau'$，则 $\phi(e)$ 是道路 $\tau'_{\phi(e_1)}$（τ 的经过 $\phi(e_1)$ 的提升）的终点．现在，$x_1=p(e_1)$ 有一道路连通开邻域 U 被均匀覆盖，e_1 在 U 上的某一叶 S_1 之内，$\phi(e_1)$ 在某一叶 S_1' 之内．对于 $e\in S_1$，我们可以用 S_1 中一条道路 τ' 连接 e_1 到 e，于是 $\tau'_{\phi(e_1)}$ 是 S_1' 中一条道路，从而它的终点 $\phi(e)$ 在 S_1' 内．由于 $\phi(e_1)$ 具有 S_1' 型的任意小邻域，因此 ϕ 连续． □

(5.9) **练习题** 仅假设 E 连通且局部道路连通，设 N 是 $\pi_1(X, x_0)$ 中 $p_*\pi_1(E, e_0)$ 的正规化子．修改上述讨论以便求得一个 N 到 G 上的核为 $p_*\pi_1(E, e_0)$ 的同态．又如果 $N=\pi_1(X, x_0)$，即 $p_*\pi_1(E, e_0)$ 是一正规子群，则称覆盖空间为**正规的**．证明覆盖空间为正规的当且仅当 G 在纤维 $p^{-1}(x_0)$ 上的作用可迁．

(5.10) **练习题** 已知空间 E 是连通且局部道路连通的．G 是由 E 的自同胚构成的一个群，且是**纯不连续的**（即对任意 $e\in E$，存在开邻域 V 使得对 G 中所有 $g\neq 1$，总有 $V\cap g(V)=\phi$）．再设 $X=E/G$ 为**轨道空间**，p: $E\to X$ 为将每个 e 映到它的轨道 Ge 的映射．证明 $E\xrightarrow{p}X$ 为一覆盖空间，G 是它的覆盖变换群，对所有 $e_0\in E$，$p_*\pi_1(E, e_0)$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的正规子群．（注意，在 Hausdorff 空间上无不动点地进行作用的任何有限群纯不连续）．

这个练习题说明：如果我们知道 X 的一个单连通覆盖空间 E 和它的覆盖变换群，那么，就不仅知道 $\pi_1(X)\cong G$，而且还知道 X 就是 E/G（在同胚的意义下）．

(5.11) **例** n 维射影空间 $\boldsymbol{P}^n$ 定义为 S^n 迭合对径点而得到的

商空间. $S^n \to \boldsymbol{P}^n$ 的覆盖变换群仅由恒等映射和对径映射组成(因为 S^n 连通, $n>0$), 且当 $n \geqslant 2$ 时 S^n 单连通, 所以我们有

$$\pi_1(\boldsymbol{P}^n) \cong \boldsymbol{Z}/2 \quad n \geqslant 2$$

(练习题: 证明 $\boldsymbol{P}^1 \approx S^1$(同胚))

(5.12) **练习题** 证明 $n \geqslant 2$ 时 $\pi_1(\boldsymbol{P}^n)$ 是由合成映射 $[pg]$ 生成的, 这里 $g: I \to S^n$ 为满足 $g(0) = -g(1)$ 的任意连续映射, $p: S^n \to P^n$ 如(5.11)中所定义. 提示: 应用(5.1)和(5.8).

关于基本群和覆盖空间的详细介绍见 W. S. Massey[67].

6 提升准则

在本节中, 除非另有声明, 所涉及的空间都是连通且局部道路连通的

(6.1) **定理** 设有

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "f'"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

其中 p 为覆盖空间映射, f 为任意映射, 那么存在 f 的提升 f' $(pf' = f)$ 当且仅当

$$f_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(E, e_0)$$

证明: 必要性可由 π_1 的函子性质得到. 反之, 我们定义 f' 如下: 对任意 $y \in Y$, 取 y_0 到 y 的一条道路 σ, 则 $f\sigma$ 是 x_0 到 $f(y)$ 的道路, 令

$$f'(y) = (f\sigma)'_{e_0}(1)$$

题设说明这不依赖于σ的选取．另外，我们还可以消除对y_0的依赖性：对任意$y_1\in Y$，设$e_1=f'(y_1)$，τ是y_1到y的任一道路，则

$$f'(y)=(f\tau)'_{e_1}(1)$$

这是因为存在从y_0到y_1的道路σ_1，并且

$$(f(\sigma_1\tau))'_{e_0}=(f\sigma_1)'_{e_0}(f\tau)'_{e_1}.$$

要证明f'在y_1处的连续性，只须取τ整个在y_1的一个适当邻域内（Y是局部道路连通的）．请对照(5.8)的证明． □

(6.2)**练习题**　在(6.1)中，设$f\colon Y\to X$也是一个覆盖空间，并且f'存在，则$f'\colon Y\to E$是一个覆盖空间．（首先证明当$U\subset X$是被p和f均匀覆盖的道路连通开集时，$p^{-1}(U)$和$f^{-1}(U)$的叶都是道路连通分支．）

(6.3)**练习题**　设$p\colon E\to X$为覆盖空间，X为连通且局部道路连通空间，E是不连通空间。若C是E的连通分支（从而道路连通）．则$p|C\colon C\to X$是一个覆盖空间．

(6.4)**推论**　若Y单连通，则提升f'总存在．

(6.5)**推论**　若$(E,\ e_0)\xrightarrow{p}(X,\ x_0)$，$(E',\ e'_0)\xrightarrow{p'}(X,x_0)$都是$X$的单连通覆盖空间，则存在唯一的同胚$\phi\colon\ (E'e'_0)\to(E,\ e_0)$使得$p\phi=p'$.

此推论由(6.4)和(5.1)可立得．

$(X,\ x_0)$的两个覆盖空间称作**等价的**，如果存在如(6.5)中的同胚ϕ.我们已经证明当$(X,\ x_0)$具有覆盖空间$(\widetilde{X},\ \tilde{x}_0)\to(X,\ x_0)$且$\widetilde{X}$单连通时，$(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$在等价的意义下唯一，我们称它是$(X,x_0)$的**万有覆盖空间**，因为在(6.2)和(6.4)的意义下所有其它覆盖空间都“在它的下面”．

一般说来，万有覆盖空间未必存在，因为X与$\widetilde{X}$局部同胚，从而X中的所有“小”闭路可缩成一点．于是$\widetilde{X}$存在的一个必要

条件是：对任意 $x\in X$，存在一个邻域 U 使得 U 中以 x 为基点的任何闭路可在 X 中缩成一点(在闭路收缩的过程中，也可能跑出 U 外)．具有这种性质的空间 X 叫做**半局部单连通空间**．

(6.6)例 对于任意的 $n>0$，设 C_n 是中心为$\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$而半径为 $\frac{1}{n}$ 的圆周，且

$$X=\bigcup_n C_n$$

则 X 没有万有覆盖空间，因为上述条件在原点处不满足．

(6.7)定理 设 X 是半局部单连通空间(当然是连通和局部道路连通的)，则 X 有万有覆盖空间．

(6.8)推论 每个连通流形有万有覆盖空间(也是一个流形)．

回想 X 是一个 n 维流形，是指它的每个点具有一个与 $\boldsymbol{R}^n$ 中开球同胚的开邻域．

证明(定理 6.7)：取 $x_0\in X$，考虑 X 中以 x_0 为始点的所有道路．若 $\alpha(1)=\beta(1)$ 且 $\alpha\simeq\beta\ \mathrm{rel}\,(0,\ 1)$，则记作 $\alpha\sim\beta$．设$\langle\alpha\rangle$是 α 所在的等价类．令 $\widetilde{X}$ 为所有$\langle\alpha\rangle$的集合且 $p\langle\alpha\rangle=\alpha(1)$．

把形如$\langle\alpha,\ V\rangle$的集合取作 $\widetilde{X}$ 上的一个拓扑的基，其中 V 是 $p\langle\alpha\rangle$的开邻域，$\langle\alpha,\ V\rangle$由所有$\langle\alpha\beta\rangle$组成，$\beta$ 是 V 中以 $\alpha(1)$ 为始点的道路．如果$\langle\alpha''\rangle\in\langle\alpha,\ V\rangle\cap\langle\alpha',\ V'\rangle$，则$\langle\alpha'',\ V\rangle=\langle\alpha,\ V\rangle$且$\langle\alpha'',\ V\cap V'\rangle\subset\langle\alpha,\ V\rangle\cap\langle\alpha',\ V'\rangle$，从而它们形成一个基．又，$p$ 是连续开映射，因为 $p\langle\alpha,\ V\rangle$是 V 的包含 $p\langle\alpha\rangle$的道路分支．

对于 $x\in X$，取它的道路连通开邻域 V，使得 V 中以 x 为基点的任何闭路可在 X 中缩到 x．则 V 可被均匀覆盖：$p^{-1}(V)$是满足 $p\langle\alpha\rangle\in V$ 的$\langle\alpha,\ V\rangle$的不交并，并且显然 $p\langle\alpha,\ V\rangle=V$．如果 $p\langle\alpha\beta\rangle=p\langle\alpha\beta'\rangle$，则 β 和 β' 具有共同的终点．由此，根据 V 的选取，$\beta\simeq\beta'\,\mathrm{rel}\,(0,\ 1)$，从而$\langle\alpha\beta\rangle=\langle\alpha\beta'\rangle$．

设 $\tilde{x}_0$ 是 x_0 处常值道路 c 所在的类，则从任何点$\langle\alpha\rangle\in\widetilde{X}$ 到 $\tilde{x}_0$

可用一条道路连接(从而 $\widetilde{X}$ 道路连通). 其实,令

$$\alpha_s(t)=\alpha(st)\quad s,\ t\in I$$

容易验证 $s\to\langle\alpha_s\rangle$是 $\widetilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到$\langle\alpha\rangle$的一条道路 $\tilde{\alpha}$, 而且 $\tilde{\alpha}$ 是 α 的提升.

最后,设 τ 是 $\widetilde{X}$ 中 $\tilde{x}_0$ 处的一条闭路,且 $\alpha=p\circ\tau$, 根据提升的唯一性,$\tau=\tilde{\alpha}$,特别是,$\tilde{\alpha}$ 是一条闭路,故$\langle\alpha\rangle=\tilde{\alpha}(1)=\tilde{x}_0=\langle c\rangle$. 从而 $\alpha\sim c$,即 τ 零伦. 因此 $\widetilde{X}$ 单连通. □

(6.9) **推论** 在同样的假设之下,对于 $\pi_1(X,\ x_0)$的每个子群 H,总存在一个覆盖空间

$$(E,\ e_0)\xrightarrow{p}(X,\ x_0)$$

使得 $H=p_*\pi_1(E,\ e_0)$,并且在等价的意义下它是唯一的.

因为,设 $\widetilde{X}\to X$ 为万有覆盖空间,G 是它的覆盖变换群,H' 是在同构 $G\cong\pi_1(X,\ x_0)$之下与 H 对应的 G 的子群. 于是可取 $E=\widetilde{X}/H'$(以及适当的 p). (见(5.10))

(6.10) **练习题** 当 $\widetilde{X}$ 存在时, X 的覆盖空间的理论完全类似于域的 Galois 理论, $\widetilde{X}$类似于域的可分代数闭包,覆盖变换群类似于Galois 群. 例如,在

$$\begin{array}{c} H\left[\begin{array}{c}(E,\ e_0)\\ \downarrow\\ (F,\ f_0)\end{array}\right.\\ K\left[\begin{array}{c}\\ \downarrow\\ (X,\ x_0)\end{array}\right.\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right]G$$

中, G, H, K 表示覆盖变换群, 如果三个覆盖空间都是正规的(5.9),则 $K\cong G/H$. (对于 Riemann 曲面,这种类似不只是形式上的,参阅 Chevalley[13]最后一章).

回到拓扑群的情形,我们有下述结果.

(6.11) **定理** 如果 X 是一拓扑群, 则我们对任意覆盖空间 $E\xrightarrow{p}X$ 和 X 中单位元 x_0 上纤维中点 e_0,在 E 中存在唯一的拓

扑群结构，使得 e_0 是单位元而 p 是同态.

证明 设 $m: X\times X\to X$ 为映射. $m(x_1, x_2)=x_1x_2^{-1}$ 我们希望提升 $m\circ(p\times p)$:

$$\begin{array}{ccc}(E\times E,\ (e_0,\ e_0)) & \xrightarrow{m'} & (E,\ e_0)\\ {\scriptstyle p\times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\ (X\times X,\ (x_0,\ x_0)) & \xrightarrow{m} & (X,\ x_0)\end{array}$$

以便能够定义 $e_1e_2^{-1}=m'(e_1, e_2)$, 根据唯一提升定理 m' 是唯一的. 关于它的存在性的准则是

$$m_*(p\times p)_*\pi_1(E\times E,\ (e_0,\ e_0))\subset p_*\pi_1(E,\ e_0)$$

(见(6.1)). 这意味着，对于 x_0 处的任何闭路 σ, τ, 我们可定义新的闭路 $\sigma*\tau$ 为

$$(\sigma*\tau)(t)=\sigma(t)\tau(t)\quad t\in I$$

此式右端是群中乘法. 我们还可定义

$$\bar{\tau}(t)=\tau(t)^{-1}\quad t\in I$$

提升准则断言，如果

$$[\sigma],\ [\tau]\in p_*\pi_1(E,\ e_0),$$

那么
$$[\sigma*\bar{\tau}]\in p_*\pi_1(E,\ e_0).$$

因为 $p_*\pi_1(E, e_0)$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的子群，这将由下面的引理得到证明.

引理 对任意的 σ, τ(x_0 处的闭路)，有

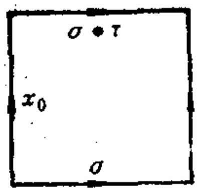
$$\sigma*\tau\simeq\sigma\tau\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

$$\sigma*\tau\simeq\tau\sigma\ \mathrm{rel}(0.1)$$

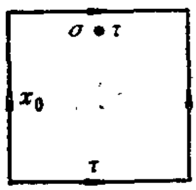
$$\bar{\tau}\simeq\tau^{-1}\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

特别是，拓扑群的基本群是交换群(如同前面(4.6)在万有覆盖群存在的情形中见到的那样).

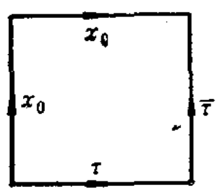
证明 考虑同伦



$F(s,t)=\sigma(s)\tau(st)$



$G(s,t)=\sigma(st)\tau(s)$



$H(s,t)=\tau(s)\tau(st)^{*}$

并应用引理(3.3)． □

(6.12)**例** 设 $X=\boldsymbol{SO}(3)$，即 $\boldsymbol{R}^3$ 的旋转群．在拓扑上，X 是 3 维射影空间(直观上，一个旋转由一旋转轴和一个数 θ 确定，这里 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 为旋转角度．于是，X 同胚于 $\boldsymbol{R}^3$ 中半径为 π 的闭球迭合边界上的对径点)从而 $\boldsymbol{SO}(3)$ 的万有覆盖群是带有某个拓扑群结构的 S^3．可以证明这个群就是单位四元数群．当 $n>3$ 时，仍有 $\pi_1(\boldsymbol{SO}(n))\cong\boldsymbol{Z}/2$，万有覆盖群是旋量群(Chevalley[14]第 3 章．在物理学中另一个重要的群是正常洛伦茨群，在拓扑上，它是 $\boldsymbol{P}^3\times\boldsymbol{R}^3$，并且它的万有覆盖群是 $\boldsymbol{SL}(2,\boldsymbol{C})$ 即行列式为 1 的 2×2 复矩阵群(见 Gelfand 等[25])．

(6.13)**练习题** 证明 $\boldsymbol{SO}(3)$ 与 $S^1\times S^2$ 不同伦等价．

(6.14)**练习题** 应用(6.13)可以给下述结论一个有趣的证明：S^2 没有连续的到处非零切向量场(更有启发性的讨论见于第 16 节)．设存在 t: $S^2\to\boldsymbol{R}^3-\{0\}$ 使得对所有 $x\in S^2$，内积 $\langle x, t(x)\rangle=0$．我们可以假定 $t(x)$ 为单位向量．构造 ϕ: $S^1\times S^2\to\boldsymbol{SO}(3)$ 如下：令 $n(x)$ 为 x 和 $t(x)$ 的叉积，则 $A(x)=(x, t(x), n(x))$ 是

$SO(3)$中元．定义 $\phi(\theta, x)$ 为合成 $R_\theta \circ A(x)$，其中 R_θ 是绕向量 x 所在的直线转一角度 θ 的旋转，而 θ 是从 $t(x)$ 到 $n(x)$的方向计量，且 $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$．证明 ϕ 是一一到上的连续映射，从而是一个同胚，这同(6.13)矛盾．

7 闭路空间和高维同伦群

设 X^I 是 X 中所有道路的集合，如果 X 是一个度量空间，并具有度量 d，我们可以在 X^I 上定义度量 d^* 为

$$d^*(\sigma, \tau) = \sup_{t \in I} d(\sigma(t), \tau(t))$$

在 X 未必可度量化时，我们可用下面的方法在 X^I 上定义拓扑，并且这个拓扑在 X 是度量空间时正是 d^* 导致的拓扑．考虑集合

$$[K, U] = \{\sigma \mid \sigma(K) \subset U\} \quad \begin{array}{l} K \text{ 为 } I \text{ 中的紧集} \\ U \text{ 为 } X \text{ 中的开集} \end{array}$$

这些集合构成 X^I 上所谓紧开拓扑的一个次基；从而 X^I 中开集是形如$[K, U]$的集合的有限交的任意并的形式．

(7.1) **练习题** 当 X 可度量化时，证明 X^I 上的这个拓扑同 d^* 导致的拓扑相同．

这个拓扑的主要性质是：

(7.2) **命题** 由 $\omega(\sigma, t) = \sigma(t)$ 定义的赋值映射 ω. $X^I \times I \to X$ 连续．

关于这个命题的证明及其它一些纯粹点集方面的结论，可参见 Dugundji[20]或者 Kelley[34]．最好，读者作为练习对它们加以证明．注意，要用到的 I 的唯一性质是较强意义下的局部紧性，即对于每个 $t \in I$ 和包含 t 的每个开集 V，存在 t 的开邻域 W 使得 $\overline{W}$ 是紧的且 $\overline{W} \subset V$．

我们将只考虑 X^I 的子空间，$\Omega_{X,x_0}=\Omega_{x_0}$，它由 x_0 处的所有闭路构成，当点 x_0 是 X 中闭集时，这是 X^I 的一个闭子空间，例如当 X 是 Hausdorff 空间时.

(7.3) **命题**　$\sigma, \tau\in\Omega_{x_0}$ 属于 Ω_{x_0} 的同一道路连通分支当且仅当 $\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0, 1)$

因为从 σ 到 τ 的一条道路 f 对应于一个同伦 $F:\sigma\simeq\tau\ \mathrm{rel}(0, 1)$，此对应由公式

$$f(s)(t)=F(s, t)$$

给出. 因子分解

$$I\times I\xrightarrow{f\times id}\Omega_{x_0}\times I\xrightarrow{\omega}X$$

说明 f 连续时 F 也连续；反过来的情形作为练习.　□

(7.4) **推论**　$\pi_1(X, x_0)$ 是 Ω_{x_0} 中道路连通分支的集合.

闭路之间的乘法确定一映射 $\Omega_{x_0}\times\Omega_{x_0}\to\Omega_{x_0}$，容易看出它是连续的，设 C 是 x_0 处的常值道路，则 $CC=C$. 定义映射 L_C, R_C: $\Omega_{x_0}\to\Omega_{x_0}$ 分别为用 C 左乘和右乘.

(7.5) **引理**　L_C(或 R_C)与 Ω_{x_0} 的恒等映射相对于 $\{C\}$ 同伦.

证明　我们知道，对于每个 σ，$C\sigma\simeq\sigma\ \mathrm{rel}(0, 1)$. 把这个同伦 $F_\sigma(s, t)$ 明显写出，我们将看到它是关于偶 (σ, t) 的连续函数，从而是 L_C 同恒等映射相对于 $\{C\}$ 的同伦.　□

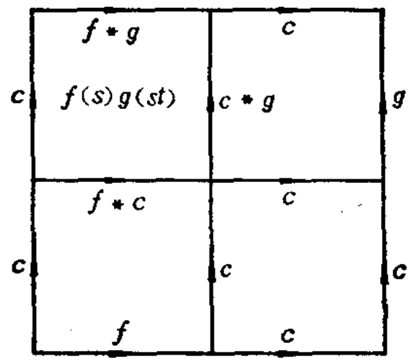
乘法的连续性，$CC=C$，以及(7.5)中的性质，通常把具有这些性质的偶 (Ω_{x_0}, C) 叫做一个 ***H*-空间**，这是比拓扑群较弱的概念. 但是对于证明下面的定理，它已是足够的了.

(7.6) **定理**　$\pi_1(\Omega_{x_0}, C)$ 是交换群.

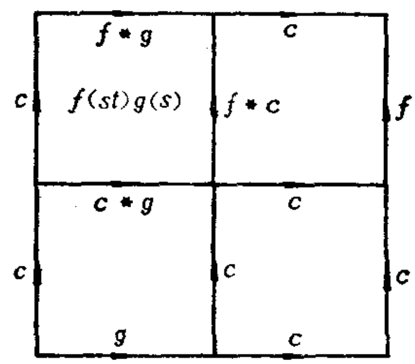
证明　我们把有关拓扑群的证明加以变通. 设 f, g 是 Ω_{x_0} 中 C 处的闭路. 定义 $(f*g)(t)=f(t)g(t)$. 则

$$fg\simeq f*g\simeq gf\ \mathrm{rel}(0, 1)$$

因为，对于 $fg \simeq f*g$，可应用



证明，而对于 $gf \simeq f*g$，可应用



证明. □

现在，我们归纳地定义高维同伦群为

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega_{x_0}, C) \quad n \geqslant 2$$

(7.7) **推论** 高维同伦群都是交换群.

(7.8) **练习题** 如果 f 是 Ω_{x_0} 中 C 处的闭路，则用 $\bar{f}(s, t) = f(s)(t)$ 定义 $\bar{f}$ 得到正方形 I^2 到 X 内的一个映射. 它把整个边缘映到 x_0. 反之，对于这样一个映射 $\bar{f}$，用上面的等式可定义 C 处的一条闭路 f. 若 g 是 C 处另一闭路，则 $f \simeq g$ rel $(0, 1)$ 当且仅当 $\bar{f} \simeq \bar{g}$ rel ∂I^2，这里 ∂I^2 是正方形的边缘. 这就给出 $\pi_2(X, x_0)$ 的一个直接解释. 根据归纳法，2 可用 n 代替.

按照另一观点，如果将 ∂I^n 迭合成一点(即在 I^n 中定义一个

等价关系如下：$a \sim b$ 当且仅当 a 和 b 都在 ∂I^n 内，并取关于这个等价关系的商空间)，我们可以得到具有一个特殊点 s_0 的 n 维球面 S^n. 因此，$\pi_n(X, x_0)$ 可以解释成映射 $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$ 的同伦类.

(7.9)**练习题** 如果 α 是从 x_0 到 x_1 的一条道路，则对所有的 n，α 导出同构

$$(\alpha_*)_n: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$$

我们希望 π_n 成为一个**函子**. 事实上，对于映射 f:

$$(X, x_0) \to (X', x_0').$$

定义映射 $$\Omega(f): (\Omega_{x_0}, C) \to (\Omega_x C')$$

为 $$\Omega(f)(\sigma) = f \circ \sigma$$

容易证明 $\Omega(f)$ 连续；从而由归纳法可定义同态

$$(f_*)_n: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X', x_0')$$

为 $$(f_*)_n = (\Omega(f)_*)_{n-1} \quad n \geqslant 2$$

对 n 使用归纳法，不难验证

(1) ((恒等映射)$*$)$_n$ = 恒等同态，

(2) $((gf)_*)_n = (g_*)_n (f_*)_n$.

因此我们得到一个函子. 另外，相对于 $\{x_0\}$ 同伦的映射 $f \simeq g$ 导出相对于 $\{c\}$ 同伦的映射 $\Omega(f) \simeq \Omega(g)$，于是对于所有 n 有

$$(f_*)_n = (g_*)_n.$$

(**练习题**：如果 $f \simeq g$，但不相对于 $\{x_0\}$ 同伦，问 $(f_*)_n$ 和 $(g_*)_n$ 有何关系？)

(7.10)**推论** 若 X 可点缩，则对所有的 n，$\pi_n(X, x_0)$ 为平凡群.

(7.11)**练习题** 对于所有的 n，存在标准同构

$$\pi_n(X\times Y,\ (x_0,\ y_0))\cong\pi_n(X,\ x_0)\times\pi_n(Y,\ y_0).$$

(确定 $\Omega_{(x_0,y_0)}$并应用(4.8))

(7.12)**定理** 如果 $p\colon(E,\ e_0)\to(X,\ x_0)$为覆盖空间，则

$$(p_*)_n\colon\ \pi_n(E,\ e_0)\to\pi_n(X,\ x_0)$$

在 $n\geqslant 2$ 时为同构.

证明 把 π_n 解释为 $(S^n,\ s_0)$ 到给定的带基点空间的映射的同伦类的集合(7.8). $(p_*)_n$ 是满同态意即任何映射 $f\colon(S^n,\ s_0)\to(X,\ x_0)$可提升为映射 $f'\colon(S^n,\ s_0)\to(E,\ e_0)$使得 $pf'=f$. 因为当 $n\geqslant 2$ 时 S^n 是单连通的(4.13)，这可由(6.4)得到. 而 $(p_*)_n$ 是单同态意即当 f' 提升 f, g' 提升 g 且 $f\simeq g\ \mathrm{rel}\{s_0\}$时, $f'\simeq g'\ \mathrm{rel}\{s_0\}$, 这可由覆盖同伦定理(5.3)得到. □

(7.13)**推论** 对于 $n\geqslant 2$ 和所有 m, $\pi_n(P^m)\cong\pi_n(S^m)$.

(7.14)**推论** $n\geqslant 2$ 时, $\pi_n(S^1)=0$

证明 S^1 的万有覆盖空间 $\boldsymbol{R}$ 可以点缩. □

(7.15)**注意** 人们可能期望

(a) 当 $n<m$ 时, $\pi_n(S^m)=0$,

(b) $\pi_n(S^n)\cong\boldsymbol{Z}$,

(c) 当 $n>m$ 时, $\pi_n(S^m)=0$

实际上, (a)和(b)皆真, 但(c)却不真. 我们可以利用单纯逼近(见 Dugundji[20])直接证明或者先计算 S^m 的同调群(15.4), 而后应用 Hurewicz 定理来证明(a)和(b). (Hurewicz 定理的一个形式是: 如果 $n\geqslant 2$ 并且对所有 $q<n$ 时, $\pi_q(X)=0$, 则对所有 $q\leqslant n$, 有 $\pi_q(X)\cong H_q(X)$, 参见 Eilenberg[21]). 性质(c)对于同调群成立(15.5), H. Hopf 给出了第一个不同伦于常值映射的映射 $S^3\to S^2$ 的例子(见 Hu[33]第 3 章). 在近些年来虽然已有很多发现(见[33]最后一章), 球面的高维同伦群的完全解决仍是代数拓扑学中的一个重大问题, 关于这个问题的详细介绍请参阅 G.

W. Whitehead[88].

(7.16) **注意** 覆盖空间的极有成效的推广是所谓**纤维空间**和**纤维丛**. 对于任何纤维空间有着一个同伦群的无穷正合序列. 不过, 纤维空间的同调论更为复杂, 并要用到**谱序列**, 请参阅 Spanier [52]的第 2, 5, 7, 9 章.

第二编 奇异同调论

引 言

我们以下讨论在第一编开头一段引入的有关边缘的论题. 为了帮助巩固概念,读者可看一下(12.11)练习的附图. 无论是曲线 δ 或曲线 γ_1 在曲面上都不能缩成一个点. 但 δ 把曲面割成两部分而 γ_1 不能. 同时看到,三条曲线 γ_1, γ_2, γ_3 一起构成一部分曲面的整个边缘.

上述观察的数学探讨是一件很细致的事,因为后来证明实际上存在两种不同的处理方法. 一种方法引向"经典"同调论,而另一种引向"边"理论,后者和同调论有很多相似之处而基本出发点不同. 一直到二十世纪五十年代这一分歧的真正实质才被理解.

在代数拓扑的早期阶段,作为基本手段是把一个空间用一个刚性组合装置来代替,后者即所谓"单纯复形",并在此基础上发展理论. 除了使一种理论成为可能之外,单纯复形还为流形的讨论提供了一种便利方法. Poincaré 对偶定理是这方面最早的定理之一.

一直到有可能用几页篇幅以拓扑不变方式引入奇异同调论(Eilenberg[21])之后,单纯技巧才逐渐发生改变. 但为此改进而付出的代价是可计算的显式的丧失.

一个成功的标志是 Eilenberg 和 Steenrod[23]同调函子公理的引入. 它使得这一论题在概念上协调一致而且优美,同时也提供了计算上的方便. 第二编就是遵循着这一思路进行编排的.

基本定义在第 9 节中给出. 基本的定理在第 11、第 14、第 15 节中加以证明. 这可以看作所望于同调的不变性的确切的数学阐述. 第 10 节中的材料用于同伦不变性的证明. 许多教师喜欢同伦不变性的一种更直接的证明, 这是通过构造“棱柱算子”来表达的. 这一方法简述在练习(11.7)中(细节可参看原先的«代数拓扑讲义»).

在第 12 节中证明了 Poincaré 的一个重要结果. 这里形变概念和边缘概念之间出现了一个数学联系.

对计算特别重视. 计算技能对代数拓扑的应用来说是很重要的. 我们计算的主要工具是正合序列. 它的操作牵涉到代数和几何两方面的知识. 初一接触令人望而生畏. 第二位作者清楚地记得:“图表追踪”初次被用来作某些事情的情景.

我们逐步地引入计算. 这样奇异同调论一般理论由正合序列的引入而展开. 这一阶段引入一些标准代数操作(五项引理及直和引理)同时附以几何例证, 这种计算的关键是与“环绕图表追踪”形式操作相结合的模式认辨. 实际上, 在这个教本中, 如果一个讨论牵涉到一个非形式的图表(即在这当中需要附加几何知识)我们就不把它叫做图表追踪.

在计算中引入几何知识的主要手段是第 15 节中的切除定理. 这一定理断言相对同调模对略掉某些子空间的不变性. 它类似模的 Noether 同构定理 $A/A\cap B\simeq A+B/B$. 当和一种叫做 Barratt-Whitehead 引理的有力的多用途的(对计算和理论都有用)模式辨认手段结合起来(第 17 节)之后就给出 Mayer-Vietoris 序列. 它可看成对有限集的公式

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$$

的推广.

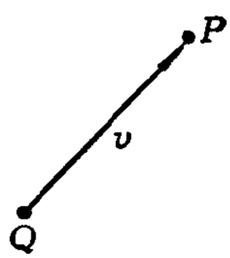
这一方法的一个重要的理论上的应用是在第 18 节中证明了

Jordan-Brouwer 分离性质.

读者将注意到"计算"一词有两种意义. 特别是, 以上评论并没有提出计算同调模的具体结构的问题, 而只是一旦知道之后如何利用它们. 这里的关键是尽可能应用基本定理来描述空间. 第16及19—21节中的材料就是以此为主导思想而编排的. 射影空间提供很好的例子说明如何从实行计算的角度去看待自然出现的空间.

8 仿射预备知识

当欧几里得空间被剥夺掉一切,既没有坐标, 也没有像 $\mathbf{R}^n$ 那样的加法,数乘法时,它就只有点、线、平面等,并且当这样设想时,它也就没有度量空间或向量空间的性质,这时就叫作**仿射空间**.更确切地说, $\mathbf{R}$ 上的一个 n 维仿射空间就是加群 $\mathbf{R}^n$ 单可迁作用于其上的一个集合 E. 这样, 对 E 中的每两个点 P 和 Q, 在 $\mathbf{R}^n$ 中存在唯一的从 Q 到 P 的向量 v:



我们可以写 $v=P-Q$及$P=Q+v$. 但在这里式子 $P+Q$ 没有意义. 不过,某些加法式子在仿射几何中有意义.

设 t 为一实数. 我们把 $tP+(1-t)Q$ 定义作满足 $S-Q=t(P-Q)$(这是一个向量方程)的唯一的点 S. 如果$P\neq Q$, 对所有 $t\in\mathbf{R}$ 得到的所有的这样的点就是通过 P 和 Q 的**直线**(定义). 更一般地说,给出点 $P_0, \cdots, P_r$ 和实数 $a_0,\cdots,a_r$, 满足 $a_0+\cdots+a_r=$

1, 我们把

$$\sum_{i=0}^{r} a_i P_i$$

定义作满足 $$S-P_0=\sum_{i=1}^{r} a_i(P_i-P_0)$$

的唯一的点 S. 如果 $P_0, \cdots, P_r$ **无关**(即 $P_1-P_0, \cdots, P_r-P_0$ 诸向量线性无关), 则所有这样的 S 的集是一 r 维**仿射空间**, 叫 $p_0, \cdots, p_r$ 的**张成**. 张成中每一个点 S 有一唯一的坐标组$(a_0, \cdots, a_r)$, 叫相对于 $p_0, \cdots, p_r$ 的**重心坐标**. 这些坐标除了满足方程

$$a_0+\cdots+a_r=1$$

之外别无其它限制.

给出不同的 P 和 Q, 通过 P 和 Q 的直线上满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的点 $tP+(1-t)Q$ 构成连接 P 和 Q 的**线段**. 仿射空间的一个子集如果包含连接自身任意两点的线段就叫**凸集**.

更一般地说, 给出无关的点组 $P_0, \cdots, P_r$, 它们的张成中所有重心坐标非负的点构成由 $P_0, \cdots, P_r$ 张成的 r 维**几何单形**. 它就是 $P_0, \cdots, P_r$ 的**凸包**(包含 $P_0, \cdots, P_r$ 的最小凸集). 试把这一点加以证明作为练习. 直观地说, 具有重心坐标$(a_0, \cdots, a_r)$(所有 $a_i\geqslant 0$)的点是在点 P_i 上放上质量 a_i 所得到的质量中心. 取所有 $a_i=1/r+1$ 给出单形的**重心**.

从一个仿射空间 E 到另一个仿射空间 E' 的函数 f, 如果对所有的点 P、Q 和实数 t 都有

$$f(tP+(1-t)Q)=tf(P)+(1-t)f(Q)$$

就叫一个**仿射映射**. 如果 $f(P)\neq f(Q)$, f 就把连接 P、Q 的线段映为连接 $f(P)$、$f(Q)$ 的线段且保持重心坐标. 可以证明(留作练习)f 总可以如下得到: 设 $\bar{f}$ 是从向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 到自身的一个线性变换. 在 E 中选一点 O 并在 E' 中选一点 O'。于是

$$f(P)=O'+\bar{f}(P-O) \quad \text{对所有 } P\in E$$

就是一个仿射映射．反之，给出 f，选定 O，对任一向量 v，令 $P=O+v$，于是 $\bar{f}$ 由方程

$$\bar{f}(v)=f(P)-f(O)$$

确定．这样如果 $E=E'$，则一个仿射映射正好是一个线性变换加一个位移．

选定原点 O 建立 E 和 $\boldsymbol{R}^n$ 之间的一一对应 $P\leftrightarrow v$，这里 $P=O+v_0$，我们选取 E 的拓扑使此对应成为一个同胚。则很清楚仿射映射是连续的．

如果 $P_0, \cdots, P_n$ 是张成 E 的无关点，则仿射映射 f 由它在这些点上的作用唯一确定，因为（留作练习）

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i P_i\right)=\sum_{i=0}^{n} a_i f(P_i).$$

反之，在 E' 中给定任意点组 $f(P_0), \cdots\cdots, f(P_n)$，以上方程定义一个仿射映射 $f: E\to E'$.

9 奇异理论

我们取可数无限个 $\boldsymbol{R}$ 的无穷乘积 $\boldsymbol{R}^\infty$，并考虑向量．

$$E_0=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots),$$
$$E_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots),$$
$$E_2=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ \cdots),$$

等等．

我们把 $\boldsymbol{R}^n$ 等同于第 n 个分量以后的所有分量全是 0 的子空间．对任一 $q\geqslant 0$，我们令 Δ_q 表示由 $E_0, \cdots, E_q$ 张成的 q－几何单形，叫做**标准**（几何）q－单形．这样，Δ_0 是一点，Δ_1 是单位区间，Δ_2 是一个三角形（包括它的内部），Δ_3 是一个四面体等等．

(9.1) 设 $P_0, \cdots, P_q$ 是某个仿射空间 E 中的点．$(P_0, \cdots, P_q)$

将表示把 E_0 映为 P_0, …, 把 E_q 映为 P_q 的唯一的仿射映射 $\boldsymbol{R}^q \to E$ 在 Δ_q 上的限制，这样$(E_0, \cdots, E_q)$就是 Δ_q 的恒等映射，并用 δ_q 表示.

给出一空间 X, X 中的一个**奇异 q-单形**是一个映射 $\Delta_q \to X$. 这样对$q=0$, 它可以等同于 X 中的一个点；对 $q=1$, 它是 X 中的一条道路；对 $q=2$, 它是标准三角形到 X 中的一个(连续)映射等等. 仿射映射$(P_0, \cdots, P_q)$是仿射空间 E 中一个奇异 q-单形.

我们将以纯粹形式的方式对这些奇异 q-单形进行加减. 我们取一个有单位元的可换环 R 并将用 R 中的纯量来乘(主要例子：$R=\boldsymbol{Z}$, $R=\boldsymbol{R}$, $R=$一个有限域). 更确切地说，定义 $S_q(X)$为由所有奇异 q-单形生成的自由 R-模. $S_q(X)$的元素是形式线性组合

$$\sum_\sigma \nu_\sigma \sigma$$

这里 σ 遍取奇异 q-单形，而系数 ν_σ 取自 R. (只有当所有系数全为 0 时这样一个和才是 0()这样的和叫奇异 q-链.

人们需要注意区别奇异 q-单形(映射 $\sigma: \Delta_q \to X$)和奇异 q-链(奇异 q-单形的形式线性组合). 特别注意 $-\sigma$ 是一奇异 q-链. 此外，人们不要把奇异 q-单形混同于它的像，例如 $\sigma: \Delta_1 \to X$ 和由

$$\sigma'(t)=\begin{cases}\sigma(2t) & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ \sigma(1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

定义的 $\sigma': \Delta_1 \to X$ 是 $S_1(X)$的不同的元素.

对 $q>0$, $0\leqslant i\leqslant q$. 定义 $F_q^i: \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ 为仿射映射

$$(E_0, \cdots, \hat{E}_i, \cdots, E_q)$$

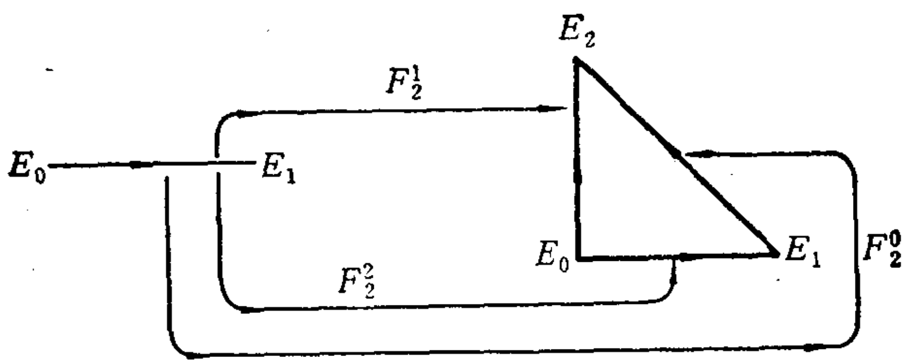
这里 $\hat{E}_i$ 表示“去掉 E_i”；换句话说，

$$F_q^i(E_j)=\begin{cases}E_j & j<i,\\ E_{j+1} & j\geqslant i.\end{cases}$$

对一空间 X 中任一奇异 q-单形 σ，定义 σ 的 i-面 $\sigma^{(i)}$为奇异 $(q-1)$-单形 $\sigma\circ F_q^i$. 这样，F_q^i 是 δ_q 的 i-面，并且如果 $\sigma=(P_0,\cdots,P_q)$，X 是仿射空间，则

$$\sigma^{(i)}=(P_0,\ \cdots,\ \hat{P}_i,\ \cdots,\ P_q)。$$

对 $q=2$ 图示如下：



这样 F_q^i 同胚地且仿射地把 Δ_{q-1} 映到 Δ_q 中对着顶点 E_i 的面（作为点集）上.

我们现在定义一个奇异 q-单形 σ 的边缘为 $(q-1)$ 维链

$$\partial(\sigma)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma^{(i)}$$

（在前面的图中，$\partial\delta_2$ 是三角形三条边的和，符号的选择使得从 E_0 开始环绕一个圈；不过，$\partial\delta_2$ 并不是一个圈，而是三条道路带上 $\pm$ 号的形式和）在特殊情形 $\sigma=(P_0,\ \cdots,\ P_q)$，

$$\partial(P_0,\ \cdots,\ P_q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(P_0,\ \cdots,\ \hat{P}_i,\ \cdots,\ P_q)$$

我们按线性要求把 ∂ 扩张成一个模同态 $S_q(X)\to S_{q-1}(X)$；这样，

$$\partial(\Sigma\,\nu_\sigma\sigma)=\Sigma\,\nu_\sigma\partial(\sigma)$$

对 $q=0$，0-链的边缘定义为 0.

(9.2) **命题** $\partial\partial=0$.

证明：只需对当 c 为一个 q-单形 σ 时，验证 $\partial(\partial c)=0$．（这种类型的陈述将反复使用，通常不再提及）．通过计算我们得到以下结果

(9.3) **引理** 对 $j<i$, $F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$

于是

$$
\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \partial(\sigma^{(i)}) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j (\sigma\circ F_q^i)\circ F_{q-1}^j \\
&= \sum_{j<i=1}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^j F_{q-1}^{i-1}) \\
&\quad + \sum_{0=i\leq j}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^i F_{q-1}^j)
\end{aligned}
$$

而所有各项都将消去（在第一个和中令 $i'=j$, $j'=i-1$）． □

设 c 为一个 q-链，如 $\partial(c)=0$，则 c 叫一个**闭链**；如存在 $(q+1)$-链 c' 使得 $\partial(c')=c$，则 c 叫一个**边缘**．两个 q-链相差一个边缘叫做**同调的链**，记作 $c_1\sim c_2$．根据 (9.2) 边缘构成闭链模 Z_q 的一个子模 B_q；商模 Z_q/B_q 叫 X 的**第 q 个奇异同调模**，记作

$$H_q(X;\ R)$$

当已知是在 R 中取系数时可简记为 $H_q(X)$．

(9.4) **例** 设 X 为一单点 x，对每一个 q 有唯一的奇异 q-单形 σ_q（x 上的常值映射）．我们有

$$
\partial(\sigma_q)=\begin{cases}\sigma_{q-1} & q\text{ 偶数}>0,\\ 0 & q\text{ 奇数},\end{cases}
$$

$$
Z_q=B_q=\begin{cases}0 & q\text{ 偶数}>0,\\ S_q & q\text{ 奇数},\end{cases}
$$

所以对所有 $q>0$，有 $H_q=0$．不过 $Z_0=S_0$ 而 $B_0=0$，所以 $H_0\cong R$，同构由 $\nu\sigma_0\to\nu$ 给出．

(9.5) 命题 设(X_k)为 X 的道路连通区的族. 于是存在一个标准同构

$$H_q(X)\cong\oplus_k H_q(X_k)\quad 对所有\ q\geqslant 0$$

(一族 R–模的直和 $\oplus M_k$ 定义作 M_k 的笛卡尔积的子模,由最多只有有限个 m_k 不为 0 的族(m_k)构成.)

证明 实际上,我们有一同构

$$S_q(X)\cong\oplus_k S_q(X_k)\quad 所有\ q\geqslant 0$$

使得边缘运算逐个依连通分支进行. 因为 Δ_q 是道路连通的,一个奇异 q–单形 σ 必把 Δ_q 映入某个道路连通分支 X_k. 这样,每一 q–链 c 唯一地分解成一个和

$$c=\sum_k c_k$$

这里 c_k 是 X_k 上的一个奇异 q–链. □

(9.6) 命题 $H_0(X)$是一自由 R–模,其生成元的个数和 X 的道路连通分支的个数相等.

证明 根据(9.5),我们可以假定 X 道路连通. 在 X 中选定一基点 x_0. 对任一 $x\in X$,设 σ_x 为从 x_0 到 x 的一条道路,从而

$$\partial(\sigma_x)=x-x_0.$$

给出一 0–链
$$c=\sum_x \nu_x x$$

我们说 c 为一边缘当且仅当它的系数的和为 0. 因为如系数的和为 0,则

$$c=\sum_x \nu_x x-(\sum_x \nu_x)x_0=\partial(\sum \nu_x\sigma_x)$$

反过来是很清楚的. 现在每一 0–链是闭链. 把 c 映成它的系数和的映射是 S_0 到 R 上的一个同态,它的核是 B_0,从而

$$H_0(X)\cong R.$$

这一命题是代数拓扑中所有连通性定理的关键(参见 18 节和 27 节).

(9.7) **练习** 约化第 0 个同调模 $H_0^*(X)$ 是在 0-链上定义一个不同的边缘算子得到的:

$$\partial^*(\sum_x \nu_x x) = \sum_x \nu_x.$$

验证 $\partial^*\partial = 0$. $H_0^*(X)$ 是 ∂^* 的核除以 1-链的边缘所得的商. 如 X 道路连通, $H_0^*(X) = 0$, 而如果 X 有 r 个道路连通分支, $r>1$, $H_0^*(X)$ 是一个有 $(r-1)$ 个生成元的自由 R-模, 所以叫做**约化同调**.

对 $q>0$ 我们定义

$$H_q^*(X) = H_q(X).$$

现在考虑函子性质. 设 $f: X \to X'$. 如 σ 是 X 中一个奇异 q-单形. $f\circ\sigma$ 就是 X' 中一个奇异 q-单形. 我们得到一个同态 $S_q(f): S_q(X) \to S_q(X')$ 如下:

$$S_q(f)(\sum \nu_\sigma \sigma) = \sum \nu_\sigma (f\circ\sigma)$$

很清楚

(i) S_q(恒等映射) = 恒等映射,

(ii) $S_q(gf) = S_q(g) S_q(f)$.

此外, 我们还得到如下关系:

(9.8) **引理** $\partial S_q(f) = S_{q-1}(f)\partial$.

从 $(f\circ\partial)\circ F_q^i = f\circ(\sigma\circ F_q^i)$ 立即得出. □

所以如果 z 是 X 上一个 q-闭链, $\bar{z}$ 是它的同调类, 规定

$$H_q(f)(\bar{z}) = \overline{S_q(f)(z)},$$

我们就得到一个同态

$$H_q(f): H_q(X) \to H_q(X').$$

因为 (i) 和 (ii) 对 $H_q(f)$ 也成立, 我们看到, 对每一个 $q\geqslant 0$, H_q 都是从拓扑空间范畴到 R-模范畴的一个函子. 这样, **同调模是拓扑不变量**.

(9.9) **练习** 设 X 是 X' 的一个道路连通分支, f 是包含映射. 于是 $H_q(f)$ 是一单射, 且存在一个同态

$$P_q: H_q(X') \to H_q(X),$$

使得 $P_q H_q(f) =$ 恒等映射.

(9.10) **奇异复形间的映射** 大量技术性的工作是构造奇异复形间的映射. 因为 $S_q(X)$ 是奇异 q-单形上的自由模, 任意指定在奇异 q-单形上的值都可得到唯一的一个定义在 $S_q(X)$ 上的同态. 当源和目标是空间 X 的函子并且当所要的同态的性质实质上和空间无关时, 下述方法是常用的.

一个奇异 q-单形 $\sigma \in S_q(X)$ 可写作

$$\sigma = S_q(\sigma)(\delta_q)$$

这里 δ_q 是 Δ_q 的恒等映射. 于是(作为例子巩固概念)只用一个值 $P(\delta_q) \in S_q(\Delta_q)$ 就可对所有 X 定义一个同态

$$P^X: S_q(X) \to S_q(X)$$

方法是借助方程

$$P^X(\sigma) = S_q(\sigma) P(\delta_q)$$

这一构造的基本特征是一种叫作**自然性**的性质: 给出 $f: X \to Y$, 于是下列图表可换:

(9.11)

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{P^X} & S_q(X) \\ {\scriptstyle S_q(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_q(f)} \\ S_q(Y) & \xrightarrow{P^Y} & S_q(Y) \end{array}$$

证明 我们在奇异 q-单形 $\sigma \in S_q(X)$ 上进行计算. 于是

$$\begin{aligned} P^Y S_q(f)(\sigma) &= P^Y(f\sigma) = S_q(f\sigma) P(\delta_q) = S_q(f) S_q(\sigma) P(\delta_q) \\ &= S_q(f) P^X(\sigma). \end{aligned}$$

一般结论可以从此得出, 因为 $S_q(X)$ 是由所有 σ 自由生成的. □

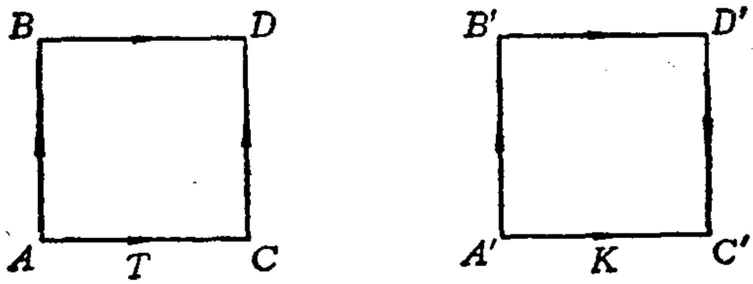
反之, 一个对所有 X 定义的同态 P^X: $S_q(X) \to S_q(X)$ 且满足自然性性质 (9.11) 可由它的值 $P^{\Delta_q}(\delta_q)$ 唯一确定.

自然性性质是 P 和 X 无关一词的确切含义. 在通常的范畴论术语中 P 叫函子 S_q 的一个自然变换。我们通常将在记法中省去上标 X.

奇异链复形将在下节中进行详细讨论. 有关材料用在同伦论不变性的证明中，但以后将暂时搁起来一直到上同调理论的引入. 倾向于直接证明同伦不变性的读者可以在(10.6)之后这样作，但证明中要用到练习(11.7).

(9.12) **练习** 设 A、B 是仿射空间 X 中两个不同点. 并设 σ, τ: $\Delta_1 \to X$ 分别是仿射映射 (A, B) 和 (B, A). 于是 $\sigma \neq -\tau$. 证明 σ 同调于 $-\tau$. 提示: 令 $\rho \in S_1(X)$ 为 A 点的常值映射. 又令 ω, $\rho' \in S_2(X)$ 分别是仿射映射 (A, B, A) 和 A 点的常值映射. 证 $\partial(\omega+\rho') = \tau+\sigma$.

(9.13) **练习** 把环面 T 和克莱茵瓶 K 看成仿射空间 $I \times I$ 分别如下两图叠合对应边而得到的商空间.



设 p, p': $I \times I \to T$, K 分别是叠合映射. 用

$$\sigma_1 = p\circ(A, B, D), \quad \sigma_2 = p\circ(A, C, D)$$

定义映射 σ_1, $\sigma_2 \in S_2(T)$; 用

$$\tau_1 = p'\circ(A', B', D'), \quad \tau_2 = p'\circ(A', D', C')$$

定义映射 $\tau_1 \tau_2 \in S_2(K)$, 用

$$\omega = p'\circ(A', B') = p'\circ(D', C')$$

定义 $\omega \in S_1(K)$. 验证

$$\partial(\sigma_1-\sigma_2)=0, \quad \partial(\tau_1+\tau_2)=2\omega$$

及 $\partial\omega=0$. 这样，如果 $R=\boldsymbol{Z}$，我们有 $\omega\in Z_1(K)$ 而 $2\omega\in B_1(K)$，而如果 $R=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$，则 $\omega\in Z_1(K)$ 而 $\tau_1+\tau_2\in Z_2(K)$.

10 链 复 形

这一节以奇异复形作为中心例子论述链复形的代数性质. 我们把前一节的中心思想抽象化.

(10.1) 定义 R 上的一个**链复形**是自由 R-模和模同态的一个序列 $C=\{C_q, \partial_q\}$，这里 $\partial_q: C_q\to C_{q-1}$ 且 $\partial_q\partial_{q+1}=0$

$$C_{q+1}\xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}.$$

在大多数情况下当 $q<0$ 时 $C_q=0$. C_q 的元素有**维数** q.

一个空间 X 的奇异复形就是一个例子，这里 $C_q=S_q(X)$ 而 ∂_q 就是(9.1)构造的边缘映射. 我们经常把 $\{S_q(X), \partial_q\}$ 简写作 $S(X)$.

(10.2) 定义 一个同态序列 $\{f_q\}$（这里 $f_q: C_q\to C'_q$）如果满足

$$\partial'_q f_q=f_{q-1}\partial_q$$

$$\begin{tikzcd}
C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & C'_q \arrow[d, "\partial'_q"] \\
C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"'] & C'_{q-1}
\end{tikzcd}$$

就叫一个**链映射**. 例如，一个空间的映射 $f: X\to Y$ 导出一个链映射 $S(f): S(X)\to S(Y)$ (9.8).

像在拓扑的情形一样，我们引进 C_q 的子模 $Z_q(C)$，$B_q(C)$，分别定义如下：

$$Z_q(C)=\operatorname{Ker}\partial_q \quad q\text{–闭链}$$

$$B_q(C)=I_m\partial_{q+1} \quad q\text{–边缘}$$

(10.3) **定义** D 的第 q 个**同调模**定义作

$$H_q(C)=Z_q(C)/B_q(C).$$

根据构造，$H_q(C)$ 是一个 R–模．如 $z\in Z_q(C)$，我们把 $H_q(C)$ 中相应的元素写作 $\bar{z}$.

一个链映射 $f: C\to C'$ 把闭链映成闭链，把边缘映成边缘．从而 f 导出一个有明确意义的同态

(10.4)
$$H_q(f): H_q(C)\to H_q(C')$$
$$H_q(f)(\bar{z})=\overline{f_q(z)}$$

这样 H 定义了一个从 R 上链复形和链映射的范畴到 R–模和同态的范畴的函子．对这一点的验证作为一个练习；见(9.8)后面的材料.

在下一节中将会明显地看出为何要给出以下定义.

(10.5) **定义** 链映射 $f=\{f_q: C_q\to C'_q\}$ 和 $g=\{g_q: C_q\to C'_q\}$ 间的一个**链同伦**是一个同态序列 $D=\{D_q: C_q\to C'_{q+1}\}$ 满足

$$\partial'_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=f_q-g_q$$

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q-g_q"'] \arrow[dl, "D_q"'] & C_{q-1} \arrow[d] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] \\
C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"'] & C'_q \arrow[r] & C'_{q-1}
\end{tikzcd}$$

我们写作 $f\simeq g$.（如当 $q<0$ 时 $C_q=0$，方程变作 $\partial'_1D_0=f_0-g_0$）

(10.6) **命题** 链同伦的链映射在同调中导出相同的映射.

证明 设 $\bar{z}\in H_q(C)$ 是一个类，有代表元 $z\in Z_q(C)$，于是

$$f_q(z)-g_q(z)=\partial'_{q+1}D_q(z)\in B_{q+1}(C').$$

从而
$$H_q(f)(\bar{z})=H_q(g)(\bar{z}).$$
□

以下的一系列思想是受到 $S(P)$ 的性质的启发，这里 P 是一个点. 在(9.4)中我们注意到 $q\geqslant 1$ 时有 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$ 而

$$S_0(P)/\operatorname{im}\partial_1\cong R.$$

我们首先把这些性质抽象化.

(10.7) **定义** 一个链复形 C 叫**零调的**，如果对所有 q 有

$$H_q(C)=0.$$

这就是说对所有 q 有 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$ (如对 $q<0$ 有 $C_q=0$，则 $\operatorname{im}\partial_1=C_0$). 名词**正合**是以上事实的同义语.

注意按照(10.7) $S(P)$ 并不是零调的，一种联系零调性和 $S(P)$ 的性质的系统方法如下:

(10.8) **定义** (以下假定 $q<0$ 时 $C_q=0$). C 在 R 上的一个**增广**是一个满射 $\varepsilon: C_0\to R$ 使得 $\varepsilon\partial_1=0$,

$$C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}R$$

这就是说 $\operatorname{im}\partial_1\subset\ker\varepsilon$. 注意同构 $C_0/\ker\varepsilon\cong R$.

例如 $S(X)$ 有一个增广 $\varepsilon: S_0(X)\to R$ 由 $\varepsilon=\partial^*(9.7)$ 给出. 在 $S(P)$ 的情形我们有 $\operatorname{im}\partial_1=\ker\varepsilon$.

给出一个具有增广 $\varepsilon: C_0\to R$ 的链复形 C，我们构造**约化链复形** $\tilde{C}=\{\tilde{C}_q,\tilde{\partial}_q\}$ 如下: 对 $q\geqslant 1$ 我们令 $\tilde{C}_q=C_q$, $\tilde{\partial}_q=\partial_q$, 对 $q=0$, 我们令 $\tilde{C}_0=\ker\varepsilon$. 注意, $\tilde{\partial}_1: \tilde{C}_1\to\tilde{C}_0$, 因为 $\operatorname{im}\partial_1\subset\ker\varepsilon$. 例如, 练习 (9.7) 断言一个空间 X 的约化同调就是约化奇异复形 $\tilde{S}(X)$ 的同调.

(10.9) **定义** 一个具有增广的链复形叫**零调的**，如果它的约化链复形是零调的. 一个等价的表述是 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$ 且

$$\operatorname{im}\partial_1=\ker\varepsilon.$$

(10.10) **命题** 一个具有增广 $\varepsilon: C_0 \to R$ 的链复形 $C=\{C_q, \partial_q\}$ 是零调的当且仅当对 $q>0, H_q(C)=0$ 且 $H_0(C)\cong R$.

证明 如 C 零调，于是 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$ 且 $\operatorname{im}\partial_1=\ker\varepsilon$. 从而对 $q\geqslant 1, H_q(C)=0$, 而

$$H_0(C)=C_0/\operatorname{im}\partial_1=C_0/\ker\varepsilon\cong R.$$

反之，如 $H_q(C)=0$ 对 $q>0$ 成立，则 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$ 对 $q>0$ 成立. 而射影 $\varepsilon: C_0\to H_0(C)$ 满足 $\ker\varepsilon=\operatorname{im}\partial_1$ 而且如果 $H_0(C)\cong R$, 它就是一个增广. □

我们下一目标是把零调性联系于某些链同伦. 每一具有增广 $\varepsilon: C_0\to R$ 的链复形有一(不一定唯一)右逆 $\eta: R\to C_0$ 由 $\eta(1)=x$ 给出，这里 x 满足 $\varepsilon(x)=1$. 于是 $\varepsilon\eta=1$. 对 $q\geqslant 1$ 我们定义

$$\varepsilon | C_q=0$$

从而把 $\eta\varepsilon: C\to C$ 看成一个链映射. 例如，在 $S(P)$ 中我们有

$$\eta(1)=\sigma_0,$$

并有一链同伦 $1\cong\eta\varepsilon$ 由 $D_q(\sigma_q)=\sigma_{q+1}$ 给出，这里 $\sigma_q: \Delta_q\to P$ 是常值映射. 方程

$$\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=1-\eta\varepsilon$$

的验证留作习题. 更一般地，我们有

(10.11) **命题** 如 $1\simeq\eta\varepsilon$, 则 C 零调.

证 对 $q\geqslant 1$, 方程 $\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=1-\eta\varepsilon$ 蕴涵 $\operatorname{im}\partial_{q+1}=\ker\partial_q$, 而对 $q=0$ 蕴涵 $\operatorname{im}\partial_1=\ker\varepsilon$. 于是根据 (10.9) 或 (10.10) C 是零调的.

我们现在引入空间 X 上的一个几何条件它将蕴涵 $S(X)$ 的零调性(10.9).

(10.12) **定义** X 叫非球状的如果每一连续的 $f: S^n\to X$ 都可扩张成 $\bar{f}: E^{n+1}\to X$. 这里 S^n 是 R^{n+1} 中的单位球面，E^{n+1} 是单位实心球. 我们将把这一定义理解成也适用于偶 (E^{n+1}, S^n) 的

同胚像.

评注 在(10.12)中令 $n=0$ 表明 X 是弧连通的.

评注 在有些行文中,"非球状的"一词用来描述一个空间 X,它的万有覆盖空间 $\tilde{X}$ 在我们的意义下是非球状的.

例 欧几里得空间的凸子集 X 是非球状的. 要看出这一点,任取一点 $Q\in X$. 用极坐标 (t, x) 表 E^{n+1} 中的点,这里 $0\leqslant t\leqslant 1$, $x\in S^n$ 而 $(0, x)=(0, x')$ 是原点. S^n 中的点有形为 $(1, x)$ 的坐标. 给出 $f: S^n\to X$,用

$$\bar{f}(t, x)=(1-t)Q+tf(x)$$

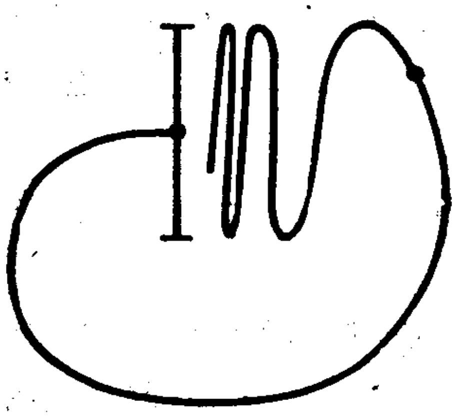
定义 $\bar{f}: E^{n+1}\to X$.

例 一个可点缩空间是非球状的. 设 $H: X\times I\to X$ 为一收缩同伦使得 $H(x, 0)=x$, $H(x, 1)=Q$,这里 $Q\in X$ 是一个点. 用

$$\bar{f}(t, x)=H(f(x), 1-t).$$

定义 $\bar{f}: E^{n+1}\to X$.

练习 拓扑学家的正弦曲线是非球状的. 这一空间由几部分构成: $y=\sin(1/x)$ 的图象, $0<x\leqslant 1$,线段 $\{(0, y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$,从 $(0, 0)$ 到 $(1, \sin 1)$ 的弧(见下图). 提示: 用局部连通性说明一个球面的像不进入麻烦部分.



(10.13) **定理** 如果 X 是非球状的,则 $S(X)$ 是零调的.

在证明这一点之前我们回忆一种构造连续映射的方法．如 $X=A_1\cup\cdots\cup A_k$，A_i 是 X 中的闭集且我们有连续映射 $f_i\colon A_i\to Y$ 使得 $f_i|A_i\cap A_j=f_j|A_i\cap A_j$，则一个完全确定的连续映射 $g\colon X\to Y$ 由 $g(x)=f_i(x)$（当 $x\in A_i$）给出．

证明（A.L.Liulevicius 提出） 设 $\varepsilon\colon S_0(X)\to R$ 是增广，而 $\eta\colon R\to S_0(X)$ 是一右逆．我们构造一个链同伦 $1\simeq\eta\varepsilon$．设 $\dot{\Delta}_{q+1}\subset\Delta_{q+1}$ 为边缘．于是 $\dot{\Delta}_{q+1}$ 是 q–面 $F^i_{q+1}(\Delta_q)$，$0\leqslant i\leqslant q+1$ 的并．偶 $(\Delta_{q+1},\ \dot{\Delta}_{q+1})$ 同胚于 $(E^{q+1},\ S^q)$．因为 X 非球状，任何映射

$$\dot{\Delta}_{q+1}\to X$$

都可扩张成映射 $\Delta_{q+1}\to X$．如 σ 为 X 的奇异 q–单形．我们用对 q 进行归纳并指定在 $\dot{\Delta}_{q+1}$ 每一个面上的值的办法来定义

$$D_q(\sigma)\in S_{q+1}(X).$$

具体定义如下：

$$D_0(\sigma)F^0_1=\sigma;\quad D_0(\sigma)F^1_1=\eta\varepsilon(\sigma)$$

对 $q\geqslant 1$，$D_q(\sigma)F^0_{q+1}=\sigma$；$D_q(\sigma)F^i_{q+1}=D_{q-1}(\sigma F^{i-5}_q)$．

$\dot{\Delta}_{q+1}$ 中 q–面的典型交有形式

$$F^i_{q+1}(\Delta_q)\cap F^j_{q+1}(\Delta_q),$$

且不失一般性，我们可假定 $j<i$．面交换关系(9.3)产生一个交换图表

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{q-1} \arrow[r, "F^j_q"] \arrow[d, "F^{i-1}_q"'] & \Delta_q \arrow[d, "F^i_{q+1}"] \\
\Delta_q \arrow[r, "F^i_{q+1}"'] & \dot{\Delta}_{q+1}
\end{tikzcd}$$

从而

$$F^i_{q+1}(\Delta_q)\cap F^j_{q+1}(\Delta_q)=F^i_{q+1}F^j_q(\Delta_{q-1})=F^j_{q+1}F^{i-1}_q(\Delta_{q-1}).$$

$D_q(\sigma)$ 在相交部分的完全确定性由以下计算验证：

$$D_q(\sigma)F_{q+1}^iF_q^j=D_{q-1}(\sigma F_q^{i-1})F_q^j$$

$$=\begin{cases}\sigma F_q^{i-1} & \text{如 } j=0,\\ \eta\varepsilon(\sigma F_q^{i-1}) & \text{如 } q=1,\ j\neq 0,\\ D_{q-2}(\sigma F_q^{i-1}F_{q-1}^{j-1}) & \text{其它;}\end{cases}$$

而

$$D_q(\sigma)F_{q+1}^jF_q^{i-1}=\begin{cases}\sigma F_q^{i-1} & \text{如 } j=0,\\ D_{q-1}(\sigma F_q^{j-1})F_q^{i-1} & \text{其它.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sigma F_q^{i-1} & \text{如 } j=0,\\ \eta\varepsilon(\sigma F_q^{j-1}) & \text{如 } q=1,\ j\neq 0,\\ D_{q-2}(\sigma_q^{j-1}F_{q-1}^{i-2}) & \text{其它.}\end{cases}$$

根据 $\eta\varepsilon$ 的定义和(9.3), 这些式子相等. 从而我们有

$$D_q(\sigma)\colon \Delta_{q+1}\to X \text{及} \quad D_q\colon \quad S_q(X)\to S_{q+1}(X).$$

我们验证 D_q 是一个链同伦:

$$\partial_1 D_0(\sigma)=D_0(\sigma)F_1^0-D_0(\sigma)F_1^1=(1-\eta\varepsilon)(\sigma),$$

$$\partial_{q+1}D_q(\sigma)+D_{q-1}\partial_q(\sigma)=\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^iD_q(\sigma)F_{q+1}^i$$

$$+D_{q-1}\Big(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma F_q^i\Big)$$

$$=\sigma+\sum_{i=1}^{q+1}(-1)^iD_{q-1}(\sigma F_q^{i-1})$$

$$+\sum_{i=0}^{q}(-1)^iD_{q-1}(\sigma F_q^i)=\sigma$$

因为两个和相消. □

(10.14) **练习** 设 X 为一空间, $Q\in X$ 为一点. 并设 $c\colon X\to X$ 为 Q 点的常值映射. 那么 $S(c)\colon S(X)\to S(X)$ 是什么? 设

$$c'\colon S(X)\to S(X)$$

定义为当 $\sigma\in S_q(X)$, $q\geqslant 1$ 时, $c'(\sigma)=0$ 而当 $\sigma\in S_0(X)$ 时,

$$c'(\sigma)=\sigma_0.$$

这里 $\sigma_0\colon \Delta_0\to Q$. 而 σ 为一 q–单形. 证明 c' 为一链映射且链同

伦于 $S(c)$.

(10.15) **练习** 证明 $\simeq$ 为一等价关系.

(10.16) **练习** 设 $f_1, f_2: C\to C'$ 及 $g_1, g_2: C'\to C''$ 都是链映射. 如 $f_1\simeq f_2$, $g_1\simeq g_2$, 证明 $g_1f_1\simeq g_2f_2$.

(10.17) **练习** 对每一个 q, Δ_q 都是凸的从而是非球状的. 定理(10.13)产生一个链同伦 $D_q^{\Delta_q}: S_q(\Delta_q)\to S_{q+1}(\Delta_q)$. 按照(9.10)中的原理, 我们可以应用值 $D_q^{\Delta_q}(\delta_q)$ 和公式

$$P_q(\sigma)=S_{q+1}(\sigma)D_q^{\Delta_q}(\sigma_q)$$

定义自然映射 $P_q: S_q(X)\to S_{q+1}(X)$. 为什么这一构造不能对所有 X 证明 $S(X)$ 的零调性?

11 同调的同伦不变性

同调函子的基本特征是它们的同伦不变性; 同伦的映射在同调中导出相同的映射. 属于同一同伦型的空间有同构的同调.

(11.1) **定理** 如 $f, g: X\to Y$ 是同伦的映射, 则 $S(f), S(g): S(X)\to S(Y)$ 是链同伦的映射.

因为链同伦的映射在同调中导出相等的映射, 我们有

(11.12) **定理** 如 $f, g: X\to Y$ 是同伦的映射, 则对每一个 $q\geqslant 0$, 在同调模上的导出同态 $H_q(f)$ 和 $H_q(g)$ 相等.

(11.3) **定理** 如 $f: X\to Y$ 为同伦等价, 则对每一个 $q\geqslant 0$, $H_q(f): H_q(X)\to H_q(Y)$ 是一同构.

证 设 $g: Y\to X$ 是 f 的同伦逆. 于是 $fg\simeq id_Y, gf\simeq id_X$. 根据(9.8), $H_q(f)H_q(g)=1$, $H_q(g)H_q(f)=1$. 从而 $H_q(f)$ 和 $H_q(g)$ 是互逆的同构. □

要证明(11.1), 我们先把它归结成有关 X 的一个定理. 用 $H: X\times I\to Y$ 记 $H(\ \ ,0)=f$ 而 $H(\ \ ,1)=g$ 的同伦. 设 i_0,

i_1: $X \to X\times I$ 分别表示顶包含和底包含，于是 $f=Hi_0$ 和 $g=Hi_1$. 由于函子性，只需证明：

(11.4) **定理** $S(i_0)$和$S(i_1)$: $S(X)\to S(X\times I)$是链同伦的映射.

证 我们从在 0 维证明这一结果开始. 用仿射映射把 Δ_1 等同于 $\Delta_0\times I$ 使得 Δ_1 中的 E_i 分别对应于 $E_0\times\{i\}$，这里 $i=0$, 1. 这样的映射是唯一的. 定义 D_0: $S_0(X)\to S_1(X\times I)$使得在奇异 0–单形 σ 上 $D_0(\sigma)=\sigma\times id$

$$\Delta_1=\Delta_0\times I\xrightarrow{\sigma\times\mathrm{id}}X\times I$$

按线性要求把 D_0 扩张到整个 $S_0(X)$. 于是

$$\partial_1 D_0=S_0(i_1)-S_0(i_0)$$

因为这对每一 σ 成立. 注意 D_0 是自然的；如 h: $X\to X'$，则

$$\begin{tikzcd}
S_0(X) \arrow[r, "D_0"] \arrow[d, "S_0(h)"'] & S_1(X\times I) \arrow[d, "S_1(h\times id)"] \\
S_0(X') \arrow[r, "D_0"] & S_1(X'\times I)
\end{tikzcd}$$

要验证这一点只需在奇异 0–单形 σ 上验证. 进行计算得：

$$S_1(h\times id)D_0(\sigma)=(h\times id)\circ(\sigma\times id)=h\sigma\times id=D_0(h\sigma)$$
$$=D_0S_0(h)(\sigma).$$

我们对 q 进行归纳来构造 D_q. 归纳假定是存在链同伦(一个空间一个)：

$$D_j\colon S_j(X)\to S_{j+1}(X\times I),\quad j\leqslant q-1$$

满足

(a) $\partial_{j+1}D_j+D_{j-1}\partial_j=S_j(i_1)-S_j(i_0)$

(b) (自然性)对 h: $X\to X'$, $D_jS_j(h)=S_{j+1}(h\times id)D_j$, 进

行计算:

$$\partial_q(S_q(i_1)-S_q(i_0))=(S_{q-1}(i_1)-S_{q-1}(i_0))\partial_q$$
$$=\partial_q D_{q-1}\partial_q,$$

最后一步是令 $j=q-1$ 应用 (a) 得到的. 换个写法, 我们有:

(c) $\partial_q(S_q(i_1)-S_q(i_0)-D_{q-1}\partial_q)=0$ 对所有空间 X 成立. 要构造 D_q, 我们用到(10.13). 把(c)应用于元素 $\delta_q\in S_q(\Delta_q)$ 得出结论

$$(S_q(i_1)-S_q(i_0)-D_{q-1}\partial_q)(\delta_q)$$

是一闭链. 根据(10.13), $S(\Delta_q\times I)$ 零调, 从而存在

$$\omega\in S_{q+1}(\Delta_q\times I)$$

使得 $$\partial_{q+1}(\omega)=(S_q(i_1)-S_q(i_0)-D_{q-1}\partial_q)(\delta_q).$$

我们令 $$D_q(\delta_q)=\omega$$

从而有 $$\partial_{q+1}D_q(\delta_q)+D_{q-1}\partial_q(\delta_q)=(S_q(i_1)-S_q(i_0))(\delta_q)$$

于是对 $S_q(X)$ 中的奇异 q-单形 σ 定义

$$D_q(\sigma)=S_{q+1}(\sigma\times id)D_q(\delta_q)$$

按线性要求把 D_q 扩张成映射

$$S_q(X)\to S_{q+1}(X\times I).$$

自然性 (b) 从(9.11)自动得出:

$$D_qS_q(h)(\sigma)=D_q(h\sigma)=S_{q+1}(h\sigma\times id)D_q(\delta_q)$$
$$=S_{q+1}(h\times id)S_{q+1}(\sigma\times id)D_q(\delta_q)$$
$$=S_{q+1}(h\times id)D_q(\sigma).$$

要验证条件 (a) 我们计算如下:

$$\partial_{q+1}D_q(\sigma)=\partial_{q+1}S_{q+1}(\sigma\times id)(D_q(\delta_q))$$
$$=S_q(\sigma\times id)\partial_{q+1}D_q(\delta_q).$$

记 $\sigma=S_q(\sigma)(\delta_q)$ 应用 ∂_q 给出

$$\partial_q\sigma=S_{q-1}(\sigma)\partial_q(\delta_q).$$

于是由性质 (b)

$$D_{q-1}\partial_q\sigma = D_{q-1}S_{q-1}(\sigma)\partial_q(\delta_q)$$
$$= S_q(\sigma\times id)D_{q-1}\partial_q(\delta_q)$$

二者结合在一起，我们有

$$\begin{aligned}(\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q)(\sigma) &= S_q(\sigma\times id)(\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q)(\delta_q)\\ &= S_q(\sigma\times id)(S_q(i_1)-S_q(i_0))(\delta_q)\\ &= (S_q(i_1)-S_q(i_0))S_q(\sigma)(\delta_q)\\ &\qquad \text{因}(\sigma\times id)i_j=i_j\sigma,\ j=0,\ 1,\\ &= (S_q(i_1)-S_q(i_0))(\sigma).\end{aligned}$$

这就完成了归纳. □

评注 我们证明了比定理所述更多的东西：$S(i_0)$ 和 $S(i_1)$ 之间的链同伦是一自然链同伦.

以下是一些练习帮助领会在我们的证明中所用到的思想.

(11.5) **练习** 要对所有空间得到 D_0 只需构造 D_0:

$$S_0(\Delta_0)\to S_1(\Delta_0\times I)$$

使得
$$\partial_1 D_0 = S_0(i_1)-S_0(i_0).$$

(11.6) **练习** (9.7)中定义的增广 ε_X: $S_0(X)\to R$ 是自然的：对 f: $X\to Y$ 有 $\varepsilon_X=\varepsilon_Y S_0(f)$. 证明 ε 的一个自然右逆 η 的存在蕴涵对所有 X, $S(X)$ 零调. 设对所有 X, ε_X 有一右逆

$$\eta_X:\ R\to S_0(X)$$

且 $S_0(f)\eta_X=\eta_Y$. 定义 D_0: $S_0(\Delta_0)\to S_1(\Delta_0)$ 为

$$D_0(\sigma_0)=\sigma_1.\quad (9.4)$$

于是 $\partial_1 D_0 = 1-\eta_{\Delta_0}\varepsilon_{\Delta_0}$. 把 R 看成集中于 0 维的链复形，而 ε, η 是链映射. 定义 D_0: $S_0(X)\to S_1(X)$ 为

$$D_0(\sigma)=S_1(\sigma)D_0(\sigma_0).$$

用自然性得到 $\partial_1 D_0=1-\eta_X\varepsilon_X$. 用和 (11.4) 证明中相同的步骤完成 D_q: $S_q(X)\to S_{q+1}(X)$ 的构造使得

$$\partial D+D\partial = 1-\eta\varepsilon.$$

(11.7) **练习** 可以给出(11.4)一个直接证明而不用考虑零调性，自然性或方程 $\sigma=S(\sigma)(\delta_q)$. 在 $\Delta_q\times I$ 中间用 $(E_0, \cdots, E_q)$ 来表示 $\Delta_q\times\{0\}$，用 $(E'_0, \cdots, E'_q)$ 表示 $\Delta_q\times\{1\}$. 对每一个

$$q\geqslant 0,\quad 0\leqslant i\leqslant q,$$

定义 $U^i_q: \Delta_{q+1}\to\Delta_q\times I$ 为仿射映射 $(E_0, \cdots, E_i, E'_i, \cdots, E'_q)$. 给出一奇异 q-单形 $\sigma: \Delta_q\to X$，定义

$$D_q(\sigma)=S(\sigma\times I)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i U^i_q\right)\in S_{q+1}(X\times I).$$

通过直接计算验证

$$(\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q)(\sigma)=(S_q(i_1)-S_q(i_0))(\sigma).$$

一个中间过程是对 $D_q(\delta_q)$ 验证此公式且避免考虑零调性. 此 D_q 叫棱柱算子.

(11.8) **评注** 另一个显式链同伦将应用于(15.26).

12 π_1 和 H_1 间的关系

在整个这一节中我们把系数环 R 取成整数环并把 $H_1(X;\boldsymbol{Z})$ 写成 $H_1(X)$.

(12.1) **定理** *存在一同态 $\chi: \pi_1(X, x_0)\to H_1(X, \boldsymbol{Z})$ 它把一个闭路 γ 的同伦类送入奇异 1-单形 γ 的同调类. 如 X 是道路连通的，则 χ 是到上的，且其核为换位子群.*

(12.2) **推论** 如 X 是道路连通的，则 χ 为一同构当且仅当 X 的基本群是交换的

定理的证明 设 γ, γ' 是以 x_0 为基点的闭路且

$$F: \gamma\simeq\gamma' \operatorname{rel}(0, 1)$$

在 X 中定义一奇异 2-单形 σ 如下:

$$\sigma(E_0)=x_0,$$

对 Δ_2 中除 E_0 之外的任一点 Q，通过 E_0 和 Q 的直线交 E_0 的对边于一点 Q'. 我们记

$$Q'=tE_2+(1-t)E_1 \quad 及 \quad Q=SQ'+(1-S)E_0$$

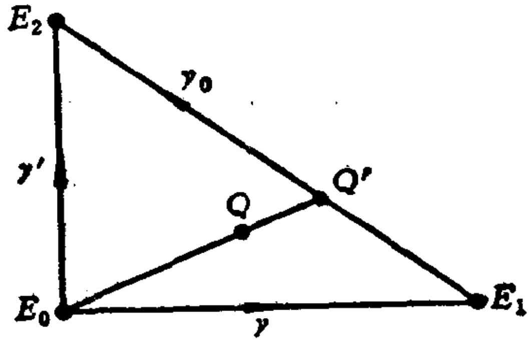
定义 $\sigma(Q)=F(s, t)$. σ 是连续的因为 Δ_2 是映射 $s\neq 0$ 时

$$(s, t)\to Q,$$

而

$$(0, t)\to E_0$$

之下 I^2 的商空间.

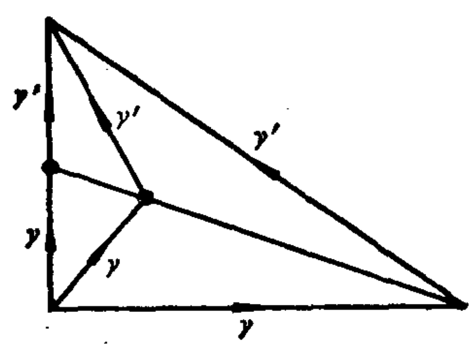


如 γ_0 是以 x_0 为基点的常值闭路，我们有

$$\partial(\sigma)=\gamma-\gamma'+\gamma_0.$$

因为 γ_0 是以 x_0 为基点的平凡 2-单形的边缘，我们有 $\gamma\sim\gamma'$, 从而 χ 是完全确定的.

要看出 χ 是一个同态，利用以下图表



定义一个奇异 2-单形 σ 使得

$$\partial(\sigma)=\gamma+\gamma'-\gamma\gamma'.$$

(这一公式适用于更一般情形下的两条道路 γ 和 γ'，只要 $\gamma\gamma'$ 有定义就行了.)

现在设 X 是道路连通的.

设 $z=\Sigma\ \nu_i\alpha_i$ 为一个 1-闭链，从而

$$0=\Sigma\ \nu_i(\alpha_i(1)-\alpha_i(0))=\partial z.$$

这就是说，集中同类项之后，所有系数为0. 从 x_0 到 $\alpha_i(0)$ 选择一条道路 η_{i0}，从 x_0 到 $\alpha_i(1)$ 选择一条道路 η_{i1}，并使道路的选择只依赖于端点，而不依赖于指标. 于是，集中同类项之后，

$$0=\Sigma\ \nu_i(\eta_{i1}-\eta_{i0}).$$

令

$$\beta_i=\eta_{i0}+\alpha_i-\eta_{i1},$$

我们得到

$$z=\Sigma\nu_i\beta_i$$

现在如果 γ_i 是闭路 $\eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1}$，我们看出

$$\chi[\Pi\gamma_i^{\nu_i}]=\bar{z}$$

从而 χ 是满的.

下一步我们求 $\ker\chi$. 主要困难是当换位子表为道路乘积时如何识别它们. 设一闭路 γ 表作

$$\gamma=\prod_i\alpha_i^{\varepsilon_i}$$

这里 α_i 是道路，不一定尽不相同，而 $\varepsilon_i=\pm1$. 记

$$\exp(\alpha_i)=\sum_j\varepsilon_j$$

这里和是取遍所有使得

$$\alpha_j=\alpha_i$$

的 j.

(12.3) 引理　如对 γ 的每一个不同的因子 α_i 有

$$\exp(\alpha_i)=0,$$

则$[\gamma]$在换位子群中.

证 从x_0到α_i的始点和终点选择道路η_{i0}和η_{i1}并使选择只依赖端点而不依赖指标. 于是

$$\gamma=\prod_i \alpha_i^{\varepsilon_i}\simeq\prod_i(\eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1})^{\varepsilon_i}\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$$

令Π_1'为$\Pi_1(X,\ x_0)$模以自身的换位子群所得的商群并令$\tilde{\gamma}$为$[\gamma]$的旁系. 于是记

$$\beta_i=\eta_{i0}\alpha_i\eta_{i1}^{-1}$$

我们有
$$\tilde{\gamma}=\sum_i\varepsilon_i\tilde{\beta}_i=\sum\exp(\alpha_i)\tilde{\beta}_i=0$$

这里最后的和取遍不同的道路类. □

我们继续定理的证明.

设γ为一同调于0的闭路. 这样

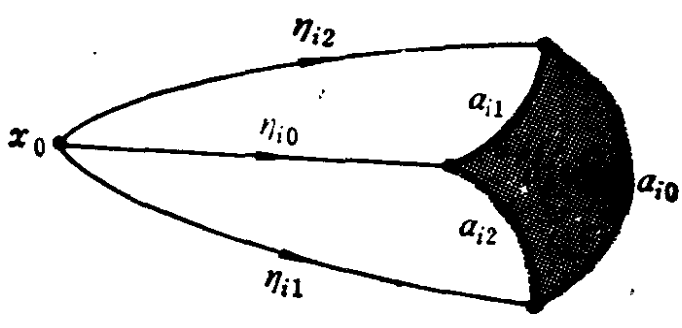
$$\gamma=\partial(\sum\nu_i\sigma_i).$$

记
$$\partial(\sigma_i)=\alpha_{i0}-\alpha_{i1}+\alpha_{i2},$$

从而经过集中同类项后在和

(12.4)
$$\sum\nu_i(\alpha_{i0}-\alpha_{i1}+\alpha_{i2})$$

中γ以系数为1出现，所有其它道路系数为0. 我们再次选取道路η_{ij}, $j=0,\ 1,\ 2$分别从x_0到$\alpha_{i2}(0)$, $\alpha_{i0}(0)$, $\alpha_{i1}(1)$只依赖于顶点而不依赖于指标,并且我们为顶点x_0选取常值道路.



其次考虑x_0处的闭路

$$\beta_{i0}=\eta_{i1}\alpha_{i0}\eta_{i2}^{-1},$$

$$\beta_{i1}=\eta_{i0}\alpha_{i1}\eta_{i2}^{-1},$$
$$\beta_{i2}=\eta_{i0}\alpha_{i2}\eta_{i1}^{-1}.$$

于是 $\beta_i=\beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2}\simeq\eta_{i1}\alpha_{i0}\alpha_{i1}^{-1}\alpha_{i2}\eta_{i1}^{-1}\simeq x_0\ \mathrm{rel}(0,\ 1)$.

从而
$$\prod_i[\beta_i]^{\nu_i}=1$$

通过对(12.4)中系数的考察,发现道路合成
$$\gamma(\prod_i\beta_i^{\nu_i})^{-1}$$

满足(12.3)中的条件,从而$[\gamma]$属于换位子群.

因为$H_1(X)$是交换的,χ 的核必须包含换位子群. 证完. □

(12.5)例 如X是图形8. 它的基本群是2个生成元的自由群(根据 Van Kampen 定理,见 Crowell 和 Fox[16]). 根据我们的定理,$H_1(X)$是2个生成元的自由阿贝尔群,即$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$.

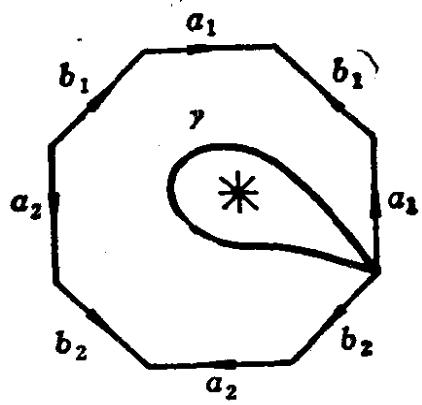
(12.6)练习 证明任一映射$(I^q,\ \partial I^q)\to(X,\ x_0)$(这里$\partial I^q$按(7.8)中的意义)过渡到商空间都可得到一奇异$q$-单形,它的每一个面都是$x_0$上的常值映射. 从此对所有$q\geqslant1$得出一同态
$$\chi\colon\pi_q(X,\ x_0)\to H_q(X;\boldsymbol{Z}).$$

证明在下述意义下这些同态是函子性的:一映射
$$f\colon(X,\ x_0)\to(Y,\ y_0)$$

导出一交换图表

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X,x_0) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "(f_*)_q"'] & H_q(X) \arrow[d, "H_q(f)"] \\
\pi_q(Y,y_0) \arrow[r, "\chi"'] & H_q(Y)
\end{tikzcd}$$

(12.7)评注 关系$\chi[\gamma]=0$的一个更富于几何性的描述是可能的. 回忆亏格g的可定向闭曲面M_g可以从等同一个$4g$边多边形的边得到. $g=2$的情形图示如下(不带内部的闭路).



如我们挖去一小圆盘的内域，我们得到一个带有边缘γ的可定向曲面W，而W和$2g$个圆的束有同一同伦型．从而$\pi_1(W)$是生成元组$\{\alpha_i,\ \beta_i;\ 1\leqslant i\leqslant g\}$上的自由群，这里$\alpha_i=[a_i]$，$\beta_i=[b_i]$．因为

$$[\gamma]\Pi_{i=1}^{g}[\alpha_i,\ \beta_i],$$

从而γ在$H_1(W)$中零调．更一般地我们有

(12.8)**命题**　令γ为X中一条闭路，看作一个映射$f\colon S^1\to X$．则$\chi(\gamma)=0$的充分必要条件是f可扩张成$\bar{f}\colon W\to X$，这里W为一可定向曲面，以S^1为边缘．

人们将把(12.8)同以下事实相对照：f零伦当且仅当f可扩张成一个圆盘的映射

$$\bar{f}\colon E^2\to X.$$

我们写出(12.8)证明的要点，而把细节留作练习．一方面，如f有一扩张，则看作W中的一条闭路，$\chi[\gamma]=0$．另一方面，设

$$\chi[\gamma]=0,$$

则存在一同伦$H\colon S^1\times I\to X$使得

$$H(\ ,\ 0)=f$$

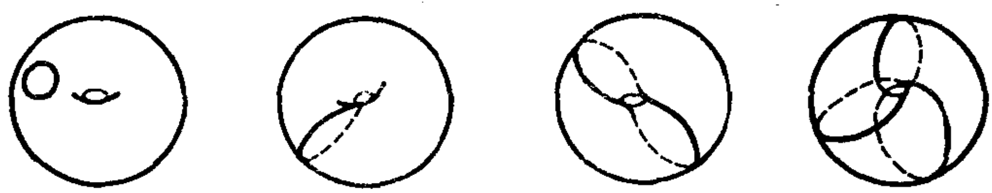
且按照(12.1)$H(\quad,1)$为一些换位子的乘积，在$S^1\times\{1\}$上作适当的叠合便得到W和$\bar{f}$.

(12.9)**评注**　有关把整同调类表示成圆的嵌入有一些精采的

结果. 对环面

$$T,\ H_1(T)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}.$$

把生成元表作(1, 0)和(0, 1),于是(a, b)可表示成圆的嵌入当且仅当$a=b=0$或$g.c.d(a, b)=1$(这里令$g.c.d(a, 0)=a$).



(0,0) (1,0) (2,1) (3,2)

一个证明给出在 Rolfsen[85], p.19. 对其它曲面类似的结果见 Schafer, Canadian Math、Bull. 19(1976); Meyerson、proc. Amer. Math. Soc、61(1976); Meeks and Patrusky. Illinois J. Math. 22(1978).

用嵌入曲面表示$H_2(M^4)$是一尚未解决的重要问题,这里M^4是一闭 4 维流形.

(12.10) **评注** 令K为$\boldsymbol{R}^3$中一个纽结,一种叫作 Wirtinger 表示的计算$\Pi_1(\boldsymbol{R}^3-K)$的方法叙述在 Crowell 和 Fox[16]或 Rolfsen[85]中. 应用(12.1)可得到

$$H_1(\boldsymbol{R}^3-K)\cong\boldsymbol{Z}$$

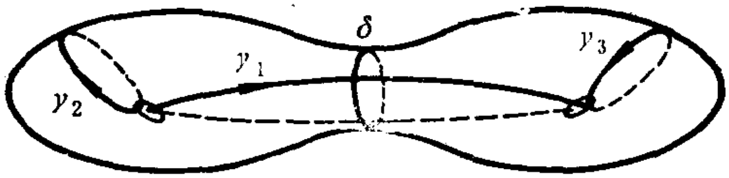
(这一点也将在第 18 节中讲到). 如J和K是$\boldsymbol{R}^3$中不相交但可能打结的两个圆,于是

$$\chi(J)\in H_1(\boldsymbol{R}^3-K)$$

确定一个整数叫J和K**的环绕数**. 其确切定义有赖于定向. 这一拓扑不变量为高斯所发现. 曾被应用于 DNA 的研究中见 W. R. Bauer, F. H. C. Crick, 和 J. H. White, 超盘绕 DNA, Scientific American 243 July(1980), 118—133.

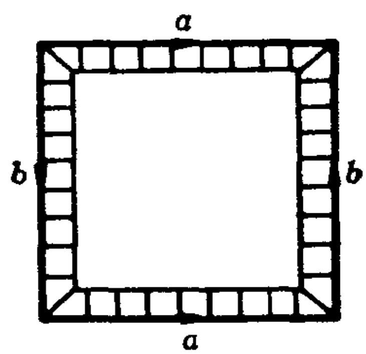
(12.11) **练习** 考虑下图中亏格z的曲面上的曲线γ_i, $i=1$、

2、3 及 δ, γ_i 的定向已标出.

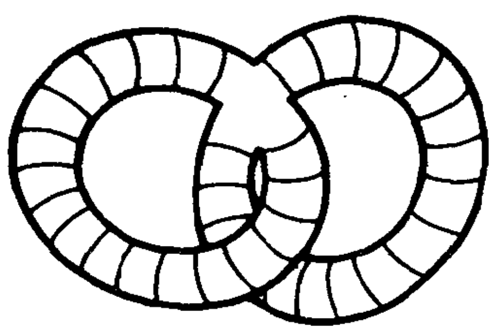


证明在 H_1 中 $\delta=0$ 且 $\gamma_1=\gamma_2+\gamma_3$.

(12.12)**练习** 把克莱茵瓶 K 看成下图所示的商空间(阴影部分后面将用到).



令在 $\pi_1(K)$ 中 $\alpha=[a]$, $\beta=[b]$. 证明在 $\pi_1(K)$ 中 $[\alpha, \beta]\neq 1$. 找出一有孔环面到 K 的映射来示换位子 $[\alpha, \beta]$. 提示: 想象有孔环面如下:



叠合 K 的图形中阴影部分的外边缘得到的 K 的子空间是什么? 提示的映射不是一个嵌入.

(12.13)**练习** 证麦比乌斯带的边缘不是一个收缩核. 你可以用 π_1 和 H_1 间的关系去等同生成元. 类似于(9.13)的计算可

用来算出由包含导出的映射 $H_1(\partial M)\to H_1(M)$. 作出一个麦比乌斯带到它的中圆的形变收缩.

13 相对同调

设 A 为 X 的子空间. 于是对每一 $q\geqslant 0$, $S_q(A)$ 是 $S_q(X)$ 的一个子模, 它由实际上映入 A 的奇异 q-单形 $\Delta_q\to X$ 的线性组合构成. 于是我们可以构成商模, 并且因为边缘算子把 $S_q(A)$ 送入 $S_{q-1}(A)$; 它导出一个同态 $\bar\partial$, 使得以下图表

(13.1)

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X)/S_q(A) \\ \partial\downarrow & & \downarrow\bar\partial \\ S_{q-1}(X) & \longrightarrow & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

可换[即, 如 $c\in S_q(X)$, 我们定义 $\bar\partial(c \bmod S_q(A)$ 的傍系$)=\partial c \bmod S_{q-1}(A)$ 的傍系]. 明显地 $\bar\partial\bar\partial=0$. 象以前一样, 我们可以考虑模

(a) $$\mathrm{Kernel}(S_q(X)/S_q(A)\xrightarrow{\bar\partial} S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A))$$

(b) $$\mathrm{Image}(S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A)\xrightarrow{\bar\partial} S_q(X)/S_q(A))$$

因为(b)是(a)的子模, 我们可以再次构造商模, 此商模记作 $H_q(X, A)$ [如我们要明确系数环就记作 $H_q(X, A; R)$]并叫作 **X 模 A 的第 q 个相对同调模**.

如果我们高兴的话我们可以直接从 $S_q(X)$ 求得这个模. 从 $c\in S_q(X)$ 开始假设在绕正方形(13.1)走到 $S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)$ 时, c 送入 0; 明显地这就是说 $\partial c\in S_{q-1}(A)$. 所有这样的 c 构成 $S_q(X)$ 的一个子模 $Z_q(X, A)$. 它的元素叫 **X 上模 A 的相对 q-闭链**.

(13.2)**例** 如 σ 是 X 中一条道路，则它是一个模 A 的相对 1-闭链当且仅当它的端点在子空间 A 中．更一般地说，一个奇异 q-单形是一个模 A 的相对 q-闭链当且仅当它的面全在 A 中．

模 $Z_q(X, A)$ 正好是上面的模 (a) 在商同态下的前像．(b) 的前像是什么？很清楚它就是 $S_q(X)$ 的子模 $B_q(X, A)$，由所有与 $S_q(A)$ 中的链同调的链构成；它们叫作 X 上模 A 的相对 q-边缘（如 $c-c'$ 是一个相对 q-边缘就写作 $c\sim c' \bmod A$）．

(13.3)**引理**

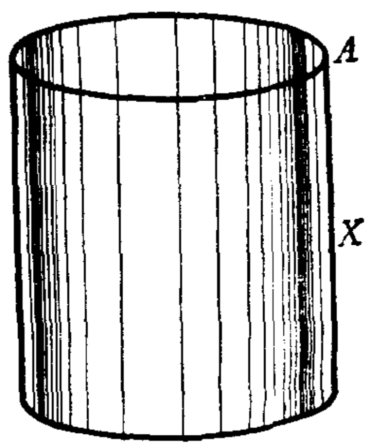
$$H_q(X, A)\cong Z_q(X, A)/B_q(X, A)$$

这是代数中同构定理

$$(M/P)/(N/P)\cong M/N$$

的一个推论． □

(13.4)**例** 如 X 是柱面 $I\times S^1$，A 是子空间 $1\times S^1$，任一水平闭路 $S\to(t, e^{2\pi is})$ 都是一相对 1 维边缘，因为它同调于 A 中闭路 $S\to(1, e^{2\pi is})$（试证明之）．



(13.5)**注** 如 A 是空集，则按定义对所有 q，$S_q(A)=0$，从而

$$H_q(X, \phi)=H_q(X).$$

这样任何有关相对同调模的讨论都作为特例导出绝对同调模中相应的结果．

(13.6) 相对同调模对偶(X, A)是函子性的. 这样给出另一个偶(X', A')（偶字今后将指两个拓扑空间而后一个是前一个的子空间）及一映射$f: (X, A)\to(X', A')$〔就是说f为一映射$X\to X'$使得$f(A)\subset A'$〕, 则导出链同态

$$S_q(f): S_q(X)\to S_q(X')$$

把$S_q(A)$送入$S_q(A')$中, 从而$Z_q(X, A)$送入$Z_q(X', A')$中, 而$B_q(X, A)$送入$B_q(X', A')$中, 过渡到商, 导出一同态.

$$H_q(f): H_q(X, A)\to H_q(X', A')$$

像通常一样

(i) H_q(恒等映射)＝恒等映射

(ii) $H_q(gf)=H_q(g)H_q(f)$

(13.7) 例　我们总有映射$j: (X, \phi)\to(X, A)$, 它是X上的恒等映射, 从而有导出同态:

$$H_q(j): H_q(X)\to H_q(X, A)$$

另一方面, 包含映射$i: A\to X$导出同态:

$$H_q(i): H_q(A)\to H_q(X)$$

合成同态　　$H_q(ji): H_q(A)\to H_q(X, A)$

是什么? 因为

$$Z_q(A)\subset B_q(X, A),$$

它是零同态.

(13.8) 练习　证明以下图表

$$\begin{array}{ccccc}
H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
H_q(A') & \longrightarrow & H_q(X') & \longrightarrow & H_q(X', A')
\end{array}$$

中两个矩形都可交换(垂直箭头是由一映射

$$f: (X, A)\to(X', A')$$

导出的同态, 水平的就是(13.7)中的同态).

(13.9) **命题** 设(X_k)是 X 的道路连通区的族，令

$$A_k = X_k \cap A.$$

则对所有 $q \geqslant 0$，有一标准同构

$$H_q(X,\ A) \cong \bigoplus_k H_q(X_k,\ A_k).$$

证 只需对(9.5)的证明稍加变通. 当然子空间 A_k 不一定道路连通. □

(13.10) **命题** 如 A 非空而 X 道路连通，则

$$H_0(X,\ A) = 0.$$

证 取 $x_0 \in A$. 给出 X 上一 0-链 $c = \sum \nu_x x$，从 x_0 到 x 取道路 α_x. 于是

$$\partial(\sum \nu_x \alpha_x) = c - (\Sigma \nu_x) x_0,$$

所以 c 同调于 A 上一个 0-链. □

(13.11) **推论** 如(X_k)是 X 所有的道路连通区，则 $H_0(X,\ A)$为一自由模，其生成元的个数和所有与 A 不交的 X_k 的下标的个数一样多.

因为当 A_k 是空集时 $H_0(X_k,\ A_k) \simeq R$(9.6) □

(13.12) **练习** 如 A 是 X 中一单点 x_0，则

$$H_q(X) \to H_q(X,\ x_0)$$

对所有 $q > 0$ 都是同构.

(13.13) 两个映射 $f,\ g:\ (X,\ A) \to (Y,\ B)$ 叫同伦的，如果存在 $f,\ g$ 间的同伦 $H:\ X \times I \to Y$ 且 H 映射 $A \times I \to B$. 如

$$f|A = g|A = H|A \times I^{(*)}$$

则我们写作 $f \simeq g \operatorname{rel} A$. 顶包含和底包含

$$i_0,\ i_1:\ (X,\ A) \to (X \times I,\ A \times I)$$

为偶的映射. 定理(11.4)为下列图表提供自然链同伦

(*) 此记法不妥，但一般可以理解——译者.

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to S_q(A) & \longrightarrow & S_q(X) & \longrightarrow & S(X)/S_q(A) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow D_q & & \downarrow D_q & & \downarrow \bar{D}_q & & \\
0 \to S_{q+1}(A\times I) & \to & S_{q+1}(X\times I) & \to & S_{q+1}(X\times I)/S_{q+1}(A\times I) & \to & 0
\end{array}
$$

从而导出一映射 $\bar{D}_q$，它是在相对奇异链复形上 $S_{(i0)}$和 $S_{(i1)}$之间的自然链同伦．于是我们有

(13.14)**命题** 偶间同伦的映射

$$f,\ g:\ (X,\ A)\to(Y,\ B)$$

在同调上导出相同的映射．

我们把证明留作练习．只需重复(11.2)中的讨论．

(13.15)**例** 设 $X=X'$ 为闭圆盘 E^2，A 为圆周 S^1，而 $A'\supset A$ 为圆环

$$\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 1.$$

我们说包含映射

$$f:\ (X,\ A)\to(X,\ A')$$

为一同伦等价，从而

$$H_q(f):H_q(X,\ A)\to H_q(X,\ A')$$

为一同构．定义 g: $(X,\ A')\to(X,\ A)$为

$$g(z)=\begin{cases}2z & |z|\leqslant\dfrac{1}{2},\\ e^{i\theta} & \text{如 } z=re^{i\theta}\text{ 而 }\dfrac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1.\end{cases}$$

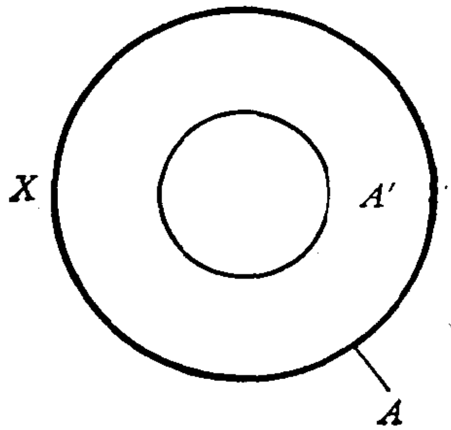
我们必须证明 fg 和 gf 都同伦于恒等映射．

定义同伦 F_t: 恒等映射$\simeq fg$ 为

$$F_t(z)=\begin{cases}(1+t)z & |z|\leqslant 1/(1+t),\\ e^{i\theta} & \text{如 } z=re^{i\theta}\text{ 而 } 1/(1+t)\leqslant r\leqslant 1.\end{cases}$$

定义同伦 G_t: 恒等映射$\simeq gf$ 为

$$G_t(z)=\begin{cases}(1+t)z & |z|\leqslant\frac{1}{2},\\ (1+s+t-st)/2e^{i\theta}\text{ 如 } z=((1+s)/2)e^{i\theta}, & 0\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$



(13.16)**练习** 偶的一个同伦等价导出一个同伦等价的偶，但反过来不真. 例如，在(13.15)中用由 $0<|z|\leqslant 1$ 定义的有孔盘 A'' 代 A'，则包含映射 $(X, A)\to(X, A'')$ 不是一同伦等价. 提示：$X=\overline{A}''$ 并且包含映射的一个同伦逆将产生一个 X 到 S^1 的收缩.

14 正合同调序列

相对同调模 $H_q(X, A)$ 最重要的性质是存在一个连接同态

$$H_q(X, A)\to H_{q-1}(A)$$

借助于它我们得到一个同态的无穷序列

$$\cdots\to H_q(A)\to H_q(X)\to H_q(X, A)\to H_{q-1}(A)\to\cdots$$

叫做偶 (X, A) 的**同调序列**(见 13.7).

我们定义此同态如下：给出一相对 q-闭链 z，它代表一个相对同调类 $\bar{z}$. 根据定义，∂z 是 A 上一个 $(q-1)$-链，但因为 $\partial\partial=0$，∂z 实际上是 A 上一个 $(q-1)$-闭链，并且我们可以考虑它的同调类

$$\overline{\partial z} \in H_{q-1}(A).$$

此同调类只依赖于 $\bar{z}$: 如 $z \sim z' \bmod A$, 则

$$z = z' + w + \partial z'',$$

这里 w 是 A 上一个 q–链, z'' 是 X 上一个 $(q+1)$–链; 于是

$$\partial z = \partial z' + \partial w,$$

即 ∂z 和 $\partial z'$ 在 A 上同调. 因而我们定义连接映射(仍用 ∂ 表示)为 $\partial \bar{z} = \overline{\partial z}$.

(14.1) **定理** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$**的同调序列是正合的.**

这就是说(*a*)序列中两个同态的合成是 0, (*b*) 一个同态的像等于下一同态的核.

证 我们将验证在 $H_q(X, A)$ 的正合性, 而把验证在 $H_q(A)$ 和 $H_q(X)$ 的正合性留作练习. 设 z 为 X 上一个 q–闭链, 即 $\partial z = 0$. 于是

$$\partial H_q(j) \bar{z} = \overline{\partial z} = 0,$$

所以合成 $\partial H_q(j)$ 是 0. 设 z 为一相对 q–闭链使得 $\bar{z}$ 在连接映射下的像 $\partial \bar{z}$ 为 0. 这就是说 $\partial z = \partial w$, 这里 w 是 A 上的一个 q–链. 从而 $z - w$ 是 X 上的闭链. 此外, $z - w$ 的相对同调类和 z 的相对同调类相同; 这样

$$H_q(j)\left(\overline{z - w}\right) = \bar{z}.$$

这表明 $H_q(j)$ 的像等于 ∂ 的核. □

(14.2) **评注** 同调序列在右端终止于

$$\to H_0(X) \xrightarrow{H_0(j)} H_0(X, A) \to 0$$

$H_0(X, A)$ 处的正合性是说 $H_0(j)$ 的像等于零同态的核, 即 $H_0(j)$ 是满的, 这一点前面已证明.

(14.3) **例** 练习 (13.2) 现在可以很容易地从 (14.1) 推出. 因为如 A 为一单点 x_0, 则对所有 $q > 0$ $H_q(A) = 0$. 这样对所有 $q \geqslant 2$

$$0 \to H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, x_0) \to 0$$

是正合的，它说明 $H_q(j)$ 是一同构．对 $q=1$ 右端 0 必须用

$$H_0(x_0) \simeq R$$

代替．但显然

$$\partial: Z_1(X, x_0) \to H_0(x_0)$$

是零同态．所以 $H_1(j)$ 也是一个同构．

(14.4) **例**　设 X 是 n 维实心球

$$E^n = \{\nu \in \boldsymbol{R}^n; |\nu| \leqslant 1\}, \quad A = S^{n-1}$$

是它的边界．因 E^n 可点缩，对所有 $q \geqslant 1$ $H_q(E^n) = 0$，所以根据正合同调序列

$$\partial: H_q(E^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1})$$

对所有 $q \geqslant 2$ 是一同构．对 $q=1$，我们有

$$0 \to H_1(E^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(E^n) \to 0$$

对 $n>1$．S^{n-1} 道路连通从而我们看出

$$H_1(E^n, S^{n-1}) = 0.$$

对 $n=1$，我们得到

$$H_1(E^1, S^0) \cong \mathrm{Kernel}(H_0(S^0) \to H_0(E^1)) \cong \boldsymbol{R}.$$

在下一节我们将发展一种技巧用来在一定情形下计算相对同调模；这和 (14.1) 结合起来使我们能确定一些绝对同调模，如 $H_q(S^n)$ 的同调模．

(14.5) **命题**　同调序列对于偶 (X, A) 是函子性的．

证　这就是说一个映射 $f: (X, A) \to (X', A')$ 导出交换方块的一个无穷序列

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X, A) & \to & H_{q-1}(A) & \to \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & H_q(A') & \to & H_q(X') & \to & H_q(X', A') & \to & H_{q-1}(A') & \to
\end{array}$$

垂直同态是由 f 导出．根据 (13.8) 只需验证

$$\begin{tikzcd}
H_q(X, A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_{q-1}(A) \arrow[d] \\
H_q(X', A') \arrow[r, "\partial"] & H_{q-1}(A')
\end{tikzcd}$$

可交换；这从链同态 $S_q(f)$ 和边缘算子可交换(9.8)的事实立可推出. □

“自然性”一词和“函子性”一词在(14.5)中及别处都是可以互相通用的.

(14.6)**练习** 设 $A\subset X\subset X'$. 把先前的同调序列加以推广我们得到以下正合序列

$$\cdots\to H_q(X, A)\to H_q(X', A)\to H_q(X', X)\to H_{q-1}(X, A)\to\cdots$$

它对三元组 (X', X, A) 是函子性的. 提示：可以建立一个链复形的短正合序列

$$0\to S(X)/S(A)\to S(X')/S(A)\to S(X')/S(X)\to 0$$

或利用图表

$$\begin{tikzcd}
H_q(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X') \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[dr] & H_q(X',A) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(X',X) \arrow[d] & \\
& H_{q-1}(A) \arrow[r] & H_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{q-1}(X') \arrow[d] \\
& & H_{q-1}(X,A) \arrow[r] & H_{q-1}(X',A)
\end{tikzcd}$$

(14.5)中的梯子在这里重复出现. 我们将发展一些代数引理来驾驭它们. 最重要的就是大家熟知的：

(14.7)**五项引理** 给出一个 R-模和同态的图表，其所有矩形块都可交换

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"] & A_5 \arrow[d, "\varepsilon"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

且各行是正合的(在联结点 2、3、4 上)而外面的四个同态 α, β, δ, ε 是同构,则 γ 也是同构.

证 先证 γ 是单的. 如 $a\in A_3$; 且 $\gamma(a)=0$, 于是 $\delta f_3(a)=0$. 因 δ 是单的, $f_3(a)=0$. 由 A_3 处的正合性, $a=f_2(a')$. 于是

$$g_2\beta(a')=\gamma f_2(a')=0.$$

由 B_2 处的正合性, $\beta(a')=g_1(b)$. 因为 α 是满的, $b=\alpha(a'')$. 于是

$$\beta(a'-f_1(a''))=0.$$

因为 β 是单的 $a'=f_1(a'')$. 于是

$$a=f_2f_1(a'')=0.$$

γ 满性的证明留作练习. 从元素 $b\in B_3$ 开始并且只做一件明显的事: 应用 g_3.

评注 这种类型的探讨叫"图表追踪", 只需要坚持. 每一步有一件明显的新事情要做.

评注 对 α 和 ε 的假设太多. 推理只要求 α 满和 ε 单即可. 在下面的例子中

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, "0"] \\
Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r, "0"] & Z \arrow[r, equal] & Z \arrow[r, "0"] & Z
\end{tikzcd}$$

这一要求的必要性是明显的.

继续讨论例(13.16). 包含

$$(E^2,\ S^1)\to(E^2,\ E^2-\{0\})$$

不是同伦等价; 但根据五项引理, 包含导出同调的同构.

(14.8) **对收缩核的应用** 根据定义, 一个子空间 $A\subset X$ 是一个**收缩核**如果存在 $r: X\to A$ 使得 $ri=id_A$, 这里 $i: A\to X$ 是包含映射. 偶 (X, A) 的长正合序列当 A 为一收缩核时有特殊的性

质．反之，A 不可能为一收缩核，有时可用示明同调模的值与这些性质的不相容性来证明．我们首先研究有关的代数问题．

(14.9) **定义** R-模的一个形如

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$$

的正合序列叫一个**短正合序列**．特点是，i 是单的，$\operatorname{im} i = \ker j$，而 j 是满的．Noether 同构定理断言

$$C = \operatorname{im} j \cong B/\operatorname{im} i$$

而
$$A \cong \operatorname{im} i.$$

所以，在同构的意义下 C 就是 B/A．在短正合序列中，一些特殊情形将选出来加以讨论．

(14.10) **定义** 一个短正合序列叫**裂的**．假如或者 (a) 存在 $k: B \to A$ 使得 $ki = id_A$；或者 (b) 存在 $l: C \to B$ 使得 $jl = id_C$．例如

$$0 \to \boldsymbol{Z} \xrightarrow{i} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \xrightarrow{j} \boldsymbol{Z} \to 0,$$

$$i(1) = (2,\ 3),\ j(1,\ 0) = 3,\ j(0,\ 1) = -2$$

是裂的因为可取 $l(1) = (1,\ 1)$ 作为 $l: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$．而

$$0 \to \boldsymbol{Z} \xrightarrow{X2} \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \to 0$$

不是裂的因为 $\boldsymbol{Z}$ 不接受任何来自 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 的非凡的同态．

(14.11) **命题** (14.10) 中的条件 (a) 和 (b) 是等价的．

证明 证 (a) 蕴涵 (b)，给出 $c \in C$ 令 $b \in B$ 为使得 $j(b) = c$ 的任一元素．定义

$$l(c) = b - ik(b).$$

我们验证 l 是完全确定的．如 b' 满足

$$j(b) = j(b')$$

则 $b - b' = i(a)$．于是差

$$\begin{aligned}(b - ik(b)) - (b' - ik(b')) &= b - b' - iki(a) \\ &= b - b' - i(a) = 0.\end{aligned}$$

根据构造 l 为一同态. 于是

$$jl(c)=j(b-ik(b))=j(b)=0,$$

所以 l 满足条件(b).

证(b)蕴涵(a). 给出 $b\in B$, 我们有

$$j(b-lj(b))=0.$$

因 i 是单的, 存在唯一的 $a\in A$ 使得

$$i(a)=b-lj(b).$$

定义 $k(b)=a$. 我们验证 k 是一同态. 如

$$k(b)=a,\quad k(b')=a',$$

于是 $$i(a)=b-lj(b),\quad i(a')=b'-lj(b').$$

从而 $$i(a+a')=b+b'-lj(b+b').$$

按定义 $$k(b+b')=a+a'=k(b)+k(b').$$

验证条件(a), 我们有

$$i(a)=i(a)-lji(a).$$

从而 $ki(a)=a$. □

(14.12) **注评** $k: B\to A$, 使得

$$ki=id_A$$

的存在性蕴涵 i 是单的 k 是满的. 类似地, $l: C\to B$ 使得 $jl=id_C$ 的存在性蕴涵 j 是满的, l 是单的. 此外

$$\ker k=\operatorname{im} l$$

如果象在上面的证明那样一个映射被用来构造另一个映射. (试证明之.)

在一裂短正合序列中, 模 B 的结构由 A 和 C 确定. 确切地说我们有

(14.13) **直和引理** 考虑具有交换三角形的 R-模的图表

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[dd, "k_1"'] & & G_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[dd, "k_2"] \\
& G \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[dr, "j_1"] & \\
G_2' & & G_1'
\end{tikzcd}$$

这里 $\operatorname{im} i_s = \ker j_s$，而 k_s 为同构，$s=1, 2$. 则合成

$$G_1 \oplus G_2 \xrightarrow{i_1 \oplus i_2} G \oplus G \xrightarrow{\nabla'} G$$

$$G \xrightarrow{\triangle} G \oplus G \xrightarrow{j_1 \oplus j_2} G_1' \oplus G_2'$$

都是同构，这里

$$\nabla'(g, g') = g + g', \quad \triangle(g) = (g, g).$$

证明 因为两个 k_s 都是同构，所以两个 i_s 都是单的，而两个 j_s 都是满的. 要验证 $\nabla' \circ (i_1 \oplus i_2)$ 是单的，我们注意

$$\nabla' \circ (i_1 \oplus i_2)(g, g') = 0$$

蕴涵着
$$i_1(g) + i_2(g') = 0.$$

应用 j_1 得
$$j_1 i_2(g') = k_2(g') = 0.$$

从而 $g' = 0$. 类似地 $g = 0$. 要验证映射满，取 $g \in G$. 于是

$$j_1(g) = k_2(g').$$

从而
$$j_1(g - i_2(g')) = 0.$$

所以
$$g - i_2(g') = i_1(g'').$$

于是
$$g = \nabla' \circ (i_1 \oplus i_2)(g'', g').$$

$(j_1 \oplus j_2) \circ \triangle$ 为一同构的证明我们留作练习. □

评注 一裂短正合序列是一个例子

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, equal] & & C \arrow[dl, "l"'] \arrow[dd, equal] \\
& B \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "j"] & \\
A & & C
\end{tikzcd}$$

回到空间,我们有

(14.14)**命题** 如 $A\subset X$ 为一收缩核,则对所有 $q\geqslant 0$,偶 (X, A) 的长正合同调序列分解为裂短正合序列

$$0\to H_q(A)\underset{H_q(r)}{\overset{H_q(i)}{\rightleftarrows}} H_q(X)\to H_q(X,\ A)\to 0$$

当 $q=0$ 时无论对正常同调或约化同调都成立. 特别是,$H_q(X)$ 同构于直和

$$H_q(A)\oplus H_q(X,\ A).$$

证明 因为 $ri=id_A$,我们有 $1=H_q(r)H_q(i)$. 于是(14.12)蕴涵着长正合序列分解成短正合序列,而(14.10)蕴涵它们是裂的. □

(14.15)**练习** 设 $X=X_1\cup X_2$ 而 $A=X_1\cap X_2$. 利用三元组合正合序列证明如包含

$$(X_1,\ A)\hookrightarrow(X,\ X_2)$$

导出同调的同构,则包含

$$(X_2,\ A)\hookrightarrow(X,\ X_1)$$

也导出同调的同构.

(14.16)**练习** 证明约化同调模(9.7)的序列也正合,这里如 A 非空,我们定义 $\tilde{H}_0^*(X,\ A)$ 为 $H_0(X,\ A)$,而

$$\tilde{H}_0^*(X,\ \phi)=\tilde{H}_0^*(X).$$

(14.17)**注** 如 $x_0\in A\subset X$,人们也可以对所有 $q\geqslant 1$ 定义 $\pi_q(X,\ A,\ x_0)$;对 $q=1$ 这只是一个具有特殊元素的集,而不是一个群. 对 $q>1$ 这是一个群,而对 $q>2$ 它可交换. 此外,存在一个正合同伦序列完全相似于正合同调序列(见胡[33]第 4 章),或[88].

(14.18)**注** 定理(14.1)的证明很容易加以推广用来证明同调代数基本引理,此引理断言任何链复形的短正合序列都有一个

相伴连接同态，它给出一长正合同调序列．见 Lang [55]，第 IV 章．

15 切除定理

这一定理断言一定的子空间 $U\subset A$ 可以从空间切掉或者说切除而不影响相对同调模．更确切地说，包含映射

$$(X-U,\ A-U)\to(X,\ A)$$

如果对所有 q 都导出同构

$$H_q(X-U,\ A-U)\to H_q(X,\ A)$$

就叫一个**切除**．

(15.1) **定理** 如果 U 的闭包含于 A 的内部，则 U 可以切除．(证明见后．)

(15.2) **定理** 设 $V\subset U\subset A$ 且

(i) V 可以切除；

(ii) $(X-U,\ A-U)$ 是 $(X-V,\ A-V)$ 的形变收缩核，则 U 可以切除．

(15.2) 的证明 条件 (ii) 说明

$$(X-V,\ A-V)$$

的恒等映射同伦于 ir，这里 r 是到 $(X-U, A-U)$ 上的收缩，而 i 是包含映射

$$(X-U,\ A-U)\to(X-V,\ A-V).$$

根据同伦定理 (13.14)，$H_q(i)$ 对所有 q 都是同构．因为同调是一个函子且 V 可切除，

$$(X-U,\ A-U)\to(X,\ A)$$

是一切除． □

证明 (15.1) 以前，先给出一些应用．

(15.3) 定理 设 E_n^+, E_n^- 分别是 n-球而 S^n 的闭北半球和闭南半球，$n\geqslant 1$（从而 $E_n^+\cap E_n^-$ 是赤道 S^{n-1}）. 则

$$(E_n^+,\ S^{n-1})\to(S^n,\ E_n^-)$$

是一切除.

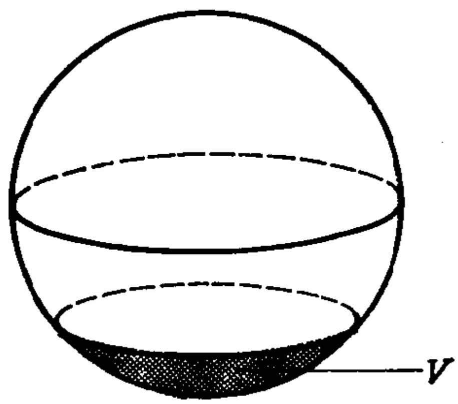
证明 我们是在切除开南半球

$$U=\{x\in S^n\,|\,x_{n+1}<0\},$$

不能直接应用(15.1)因为不满足它的条件. 这样我们分两步走. 设

$$V=\left\{x\in S^n\,|\,x_{n+1}<-\frac{1}{2}\right\}$$

根据(15.1)，V 可以切除. 但$(E_n^+,\ S^{n-1})$是$(S^n-V,\ E_n^--V)$的形变收缩核（沿大圆运动），从而可以应用(15.2). □



现在向前 n 个坐标射影给出一同胚

$$(E_n^+,\ S^{n-1})\to(E^n,\ S^{n-1}).$$

我们曾看到连接同态

$$H_q(E^n,\ S^{n-1})\to H_{q-1}(S^{n-1})$$

当 $q\geqslant 2$ 时是一同构(14.4). 另一方面，E_n^- 可点缩蕴涵着

$$H_q(S^n)\to H_q(S^n,\ E_n^-)$$

当 $q\geqslant 2$ 时是一同构. 把这些事实和(15.3)结合起来给出同构

$$H_q(S^n)\to H_{q-1}(S^{n-1})$$

这里 $q\geqslant 2,\ n\geqslant 1$.

只剩下处理 $q=1$ 的情形. 根据(14.4)

$$H_1(E^n,\ S^{n-1})=\begin{cases}0 & n>1,\\ R & n=1,\end{cases}$$

对 $n\geqslant 1$, 我们还有正合序列

$$0\to H_1(S^n)\xrightarrow{a}H_1(S^n,\ E_n^-)\xrightarrow{b}H_0(E_n^-)\xrightarrow{c}H_0(S^n)\to 0$$

因为 c 是一同构, 我们再次得到 a 为一同构($b=0$).

(15.4)**练习** 利用约化同调模(9.7), 以上结果可表述为更整齐的形式: 同态

$$H_q^*(S^n)\to H_q^*(S^n,\ E_n^-)\to H_q^*(E^n,\ S^{n-1})\to H_{q-1}^*(S^{n-1})$$

对所有 $q\geqslant 0,\ n\geqslant 0$ 都是同构.

这样我们得到

(15.5)**推论** 对 $q\geqslant 1,\ n\geqslant 1$

$$H_q(S^n)\cong\begin{cases}R & q=n\\ 0 & q\neq n\end{cases}$$

$$H_q(E^n,\ S^{n-1})\cong\begin{cases}R & q=n\\ 0 & q\neq n\end{cases}$$

(15.6)**推论** S^{n-1} 不是 E^n 的收缩核.

讨论和(4.9)中一样, 利用同调函子代替同伦: 如果我们有一映射 $f: E^n\to S^{n-1}$, 它在 S^{n-1} 上的限制是恒等映射, 则导出同态给出

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{恒等映射}"'] & H_{n-1}(E^n) \arrow[r] & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{tikzcd}$$

对 $n\geqslant 2$ 这就是

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{恒等映射}"'] & 0 \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

这是荒谬的.(练习:作 $n=1$ 的情形.)

(15.7) **Brouwer 不同点定理** E^n 到自身的任何连续映射都有不动点.

证明和(4.11)相同.

(15.8) **评注** 如我们取 $R=\mathbf{Z}$, 并取 $H_n(S^n)$ 的生成元对应整数 1, 则对任何连续映射 $f: S^n \to S^n$, $H_n(f)(\alpha)$ 都对应某个整数, 称为映射 f 的**度**. 这一点可以明确地描述(见 Dugundji[20]第 XVI 章).

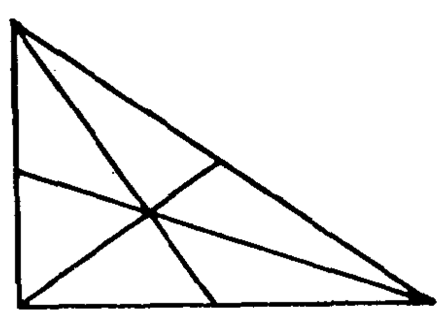
(15.1)的证明涉及一些全新的概念.

首先, 设 $\mathfrak{V}=(V_i)$ 为一族开集覆盖 X. 一个奇异 q-单形如把 Δ_q 映入某一个 V_i, 就说它是 $\mathfrak{V}$ **级小的**. 作为一个关键性的事实, 我们需要下述定理:

(15.9) **定理** $H_q(X, A)$ 中每一个同调类都可用这样一个相对闭链代表, 它是 $\mathfrak{V}$ 级小单形的线性组合.

我们将把这一定理应用于由两个开集 $X-\bar{U}$ 和 $\mathring{A}$(A 的内部)构成的覆盖且推出(15.1).

其次, 为了得到这些小单形我们将利用**重心重分**技巧, 对 $q=2$, 这种重分图示如下



更确切地说, 我们将构造重分算子

$$Sd: S_q(X) \to S_q(X)$$

它与边缘算子可交换. 为比较 c 和 Sdc, 我们还将需要算子

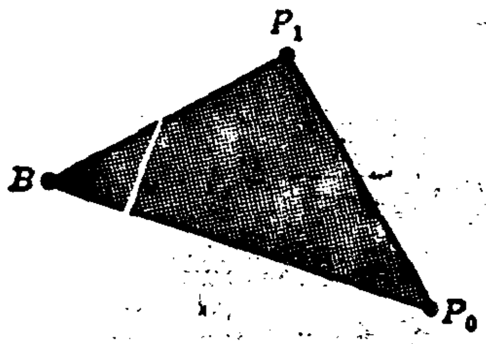
$$T: S_q(X) \to S_{q+1}(X)$$

(对 $q=2$ 它相当于以已知重分三角形为底在其上构造一退化 3 维多面体). 这种构造的一个精彩的直观讨论见 Wallace[59], 133—137 页(符号有些不同).

(15.10) 设 B 为一点, $\sigma=(P_0, \cdots, P_q)$ 为某个仿射空间中一仿射奇异 q-单形. 我们定义联接 $B\sigma$ 为仿射 $(q+1)$-单形

$$B\sigma=(B, P_0, \cdots, P_q)$$

例如, 对 $q=1$, 它的像是



按线性把这一运算扩张到仿射单形 σ 的线性组合 c(对非仿射奇异单形我们不作定义):

$$Bc=B(\sum_i \nu_i\sigma_i)=\sum_i \nu_i B\sigma_i$$

于是我们有公式

$$\partial Bc=c-B\partial c \quad q>0$$

$$\partial Bc=c-(\sum_i \nu_i)B \quad q=0$$

以上公式容易验证.

算子 Sd, T 将根据函子性的要求来定义: 如 $f: X\to X'$, 则我们将有交换图表

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{Sd} & S_q(X) \\ {\scriptstyle S_q(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_q(f)} \\ S_q(X') & \xrightarrow{Sd} & S_q(X') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{T} & S_{q+1}(X) \\ {\scriptstyle S_q(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_{q+1}(f)} \\ S_q(X') & \xrightarrow{T} & S_{q+1}(X') \end{array}$$

这样只要对空间 $X=\Delta_q$ 及奇异 q-单形 δ_q(见 10.9)定义这些算子就够了. 对 $q=0$, 令 $Sd\delta_0=\delta_0$, $T\delta_0=0$. 假定这些算子在维数$<q$ 已经定义,我们利用联结运算在维数 q 定义它们:

$$Sd\delta_q=B_qSd\,\partial\delta_q$$

$$T\delta_q=B_q(\delta_q-Sd\delta_q-T\partial\delta_q)$$

这里 B_q 是 Δ_q 的重心:

$$\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{q+1}E_i=B_q.$$

(15.11) 引理 我们有算子方程

$$\partial Sd=Sd\partial$$

$$\partial T=Id-Sd-T\partial$$

这里 Id 是恒等算子.

证明 对 q 进行归纳, $q=0$ 是明显的. 对 $q>0$, 根据函子性只需对 δ_q 计算方程两边. 利用(15.10)(为了简明略去下标 q), 我们得到

$$\partial Sd\delta=\partial BSd\partial\delta=Sd\partial\delta-B\partial Sd\partial\delta$$

但根据归纳假定

$$B\partial Sd\partial\delta=BSd\partial^2\delta=0$$

类似地

$$\begin{aligned}\partial T\delta&=\partial B(\delta-Sd\delta-T\partial\delta)\\&=\delta-Sd\delta-T\partial\delta-B(\partial\delta-\partial Sd\delta-\partial T\partial\delta)\\&=\delta-Sd\delta-T\partial\delta-B(\partial\delta-Sd\partial\delta-\partial\delta+Sd\partial\delta+T\partial^2\delta)\\&=\delta-Sd\delta-T\partial\delta\end{aligned}$$

□

现在设 $\sigma=(P_0, \cdots, P_q)$ 是某仿射空间的一个仿射 q-单形，像 $\sigma(\Delta_q)$ 为一紧集，从而我们可以考虑它的直径 $d(\sigma)$。
（练习 $d(\sigma)=$ 最大的边长．）

(15.12) **引理** 在 q-链 $Sd\sigma$ 中出现的每一仿射奇异单形的直径最大不过

$$\frac{qd(\sigma)}{q+1} \qquad \square$$

证明作为练习．

(15.13) **命题** 设 σ 为 X 中一奇异单形，$\mathfrak{B}$ 是 X 的一个开覆盖．则存在 $r>0$ 使得 $Sd^r\sigma$ 是 $\mathfrak{B}$ 级小奇异单形的线性组合．

证明 因为 Δ_q 是紧的，存在一 $\varepsilon>0$，使得 σ 把 Δ_q 中任一点的 ε-邻域映入 $\mathfrak{B}$ 中一集（留作练习）．由 (15.12) 因

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q^r}{(1+q)^r}=0$$

存在 $r>0$，使得 $Sd^r\delta_q$ 为直径 $<\varepsilon$ 的仿射奇异单形的线性组合．但

$$Sd^r\sigma=S_q(\sigma)Sd^r\delta_q.$$

(15.14) **注** 在 (15.13) 中我们可用任意 q-链代替 σ 练习）．

现在我们能够证明 (15.9)：设 z 为任一相对 q-闭链．则 (15.11) 给出

$$z-Sdz=\partial Tz+T\partial z$$

因为 ∂z 是 A 上的链，$T\partial z$ 也是 A 上的链，所以我们有

$$z\sim Sdz \mod A$$

从而归纳可知，对所有 r

$$z\sim Sd^rz \mod A$$

根据上面的注，便得到结果． $\square$

最后我们证明切除定理 (15.1)．

证明 已知 $H_q(X, A)$ 中一同调类，由一相对闭链

$$z=\sum \nu_i\sigma_i$$

代表，这里每一σ_i是$(X-\bar{U},\mathring{A})$级小的．现在任一不完全映入

$$X-U\supset X-\bar{U}$$

的σ_i必映入$\mathring{A}\subset A$，从而可以从这一式子中去掉而不改变$z \bmod A$的同调类．略去这样的σ_i之后，我们看到z可视为$(X-U) \bmod (A-U)$上的相对闭链．这样

$$H_q(X-U,\ A-U)\to H_q(X,\ A)$$

是满的．

设z是$(X-U) \bmod (A-U)$上的相对闭链而在$X \bmod A$上$z\sim 0$．这样

$$z=z'+\partial w$$

这里z'是A上的q-链，w是X上的$(q+1)$-链．重分r次(这不改变$\bar{z}\in H_q(X-U,\ A-U)$的同调类)

$$Sd^r z=Sd^r z'+\partial Sd^r w$$

这里r的选取是使得$Sd^r w$是一个$(X-\bar{U},\ \mathring{A})$级小单形的线性组合．从而我们可以写

$$Sd^r w=w_1+w_2$$

这里w_1中所有的单形都映入$X-U$，而w_2中所有的单形都映入A．我们得到

$$Sd^r z-\partial w_1=Sd^r z'+\partial w_2$$

因为左边是$X-U$上的链而右边是A上的链，我们看出两边都是$A-U$上的链，重新解出$Sd^r z$就可看出在$(X-U) \bmod (A-U)$上$Sd^r z\sim 0$．这样$H_q(X-U,\ A-U)\to H_q(X,\ A)$是单同态． □

这里是一张图，画出(15.9)(*)证明中遇到的一些概念的几何背景．在图1和图2中，空间X是矩形，A是对角线下面的三角形，U是A内的圆盘．

(*) 应为(15.1)——译者．

在图 1 中画的是一个相对奇异 2–单形的像. 在图 2 中经过重分后得到一个奇异 2–链. 扔掉 A 中的部分不改变此相对奇异 2–链. 所得结果(阴影)是$(X-U,\ A-U)$上的相对奇异 2–链. 作为 $S_2(X)/S_2(A)$ 的元素, 这一新的链同调于图 1 中奇异 2–单形.

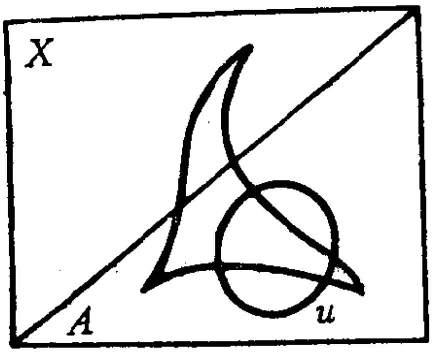


图 1

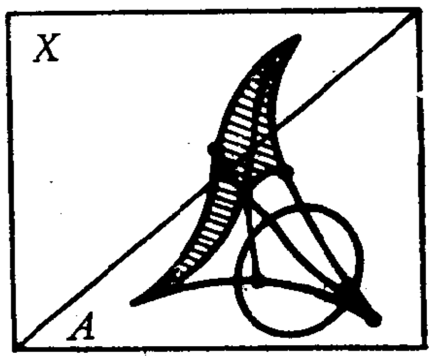


图 2

(15.15) **评注** 如假设 $U\neq A$, 则切除定理对约化同调也成立. 因在此情形下,

$$H_0^*(X-U,\ A-U)=H_0(X-U,\ A-U)$$
$$H_0^*(X,\ A)=H_0(X,\ A)$$

(当然我们假定 $A\neq\varnothing$). 在(15.1)的假设之下 $U=A$ 的情形仅当 A 既开且闭时才能出现.

(15.16) **注** 后面将需要定理(15.9)的一种更强的形式: 令 $S(\mathfrak{B})$为 $S(X)$中所有 $\mathfrak{B}$ 级小单形生成的子复形, 则包含同态

$$S(\mathfrak{B})\to S(X)$$

为一链复形等价.

我们将用**代数映射锥**的一般方法建立(15.16). 为了自由 R–模的子模也是自由的, 我们假定 R 为一 p. i. d(见 Lang[35]).

(15.17) **定义** 设 $f\colon C\to C'$ 为链复形的链映射, **映射锥** Cf 就是链复形

$$(Cf)_q=C'_q\oplus C_{q-1}$$
$$\partial_q^f(x,\ y)=(\partial'_q x+f_{q-1}y,\ -\partial_{q-1}y)$$

要验证 $\partial'_{q-1}\partial'_q=0$，只需直接计算.

$$\partial'_{q-1}(\partial'_q x+f_{q-1}y,\ -\partial_{q-1}y)$$
$$=(\partial'_{q-1}\partial'_q x+\partial'_{q-1}f_{q-1}y-f_{q-2}\partial_{q-1}y,\ \partial_{q-2}\partial_{q-1}y)=0$$

令 $(C^+)_{q+1}=C_q$, $\partial^+_{q+1}=-\partial_q$, $i(x)=(x,\ 0)$, $j(x,\ y)=y$，我们得到链复形的正合序列：

$$0\to C'\xrightarrow{i}Cf\xrightarrow{j}C^+\to 0$$

像拓扑的情形一样，我们定义一个连接映射

$$\partial:\ H_q(C^+)\to H_{q-1}(C').$$

设 $y\in C^+$ 满足 $\partial y=0$，则 $\partial'(x,\ y)=(\partial'x+fy,\ 0)$. 这样 $\partial\bar{y}=\overline{fy}$ 是一完全确定的同态（验证余下的细节）. 也像拓扑的情形一样，我们得到一长正合序列

$$\cdots\to H_q(C')\xrightarrow{H(i)}H_q(Cf)\xrightarrow{H(j)}H_{q-1}(C)\xrightarrow{H(f)}H_{q-1}(C')\to\cdots$$

这里我们用到 $H_q(C^+)=H_{q-1}(C)$，且把 ∂ 等同于 $H(f)$. 从而

(15.18) 如果 $H(f)$ 为一同构，则 $H(Cf)=0$，即 Cf 在 (10.7) 的意义下零调. □

(15.19) **引理** 如果 $H(C)=0$，则 $id\simeq 0$

证明 由假设 $Z_qC=B_qC$. 因 R 为一 p.i.d，对所有 q, Z_qC 是 C_q 的自由子模. 从而链复形 C 分裂

$$0\to B_qC\to C_q\underset{\partial}{\overset{k}{\rightleftarrows}}B_{q-1}C\to 0$$

$\partial k=id$. 根据 (14.13)，C_q 可表示成一个直和

$$C_q\cong B_qC\oplus B_{q-1}C$$

且 ∂_q: $C_q\to C_{q-1}$ 有形式 $\partial_q(x,\ y)=(y,\ 0)$.

利用这一表示定义 D_q: $C_q\to C_{q+1}$ 为

$$D_q(x,\ y)=(0,\ x).$$

于是

$$(\partial_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q)(x,\ y)=\partial_{q+1}(0,\ x)+D_{q-1}(y,\ 0)$$

$$=(x,\ 0)+(0,\ y)=(x,\ y).\qquad\square$$

(15.20) **定义** 一个链映射 $f: C\to C'$ 叫做一个链同伦等价，如果存在链映射 $g: C'\to C$ 满足 $fg\simeq id_{C'}, gf\simeq id_C$.

(15.21) **引理** 如果 $f: C\to C'$ 满足 $H(Cf)=0$, 则 f 为一链同伦等价.

证明 由(15.19)存在链同伦 $D: Cf\to Cf$ 使

$$\partial' D+D\partial'=id.$$

于是 $D_q: C'_q\oplus C_{q-1}\to C'_{q+1}\oplus C_q$ 定义四个映射

$$S_q: C'_q\to C'_{q+1},\ g_q:\ C'_q\to C_q,\ E_{q-1}:\ C_{q-1}\to C'_{q+1},$$
$$T_{q-1}:\ C_{q-1}\to C_q$$

使得 $$D_q(x,\ y)=(S_qx+E_{q-1}y,\ g_qx+T_{q-1}y)$$

计算得:

$$\partial' D(x,\ y)=(\partial' Sx+\partial' Ey+fgx+fTy,\ -\partial gx-\partial Ty),$$
$$\begin{aligned}D\partial'(x,\ y)&=D(\partial' x+fy,\ -\partial y)\\&=(S\partial' x+Sfy-E\partial y,\ g\partial' x+gfy-T\partial y).\end{aligned}$$

把 $(x,\ 0)$ 代入且相加，我们得到

$$(x,\ 0)=(\partial' Sx+fgx+S\partial' x,\ -\partial gx+g\partial' x)$$

从而 g 为一链映射且

$$id-fg=\partial' S+S\partial'.$$

把 $(0,\ y)$ 代入且取第二分量，我们得到

$$y=-\partial Ty+gfy-T\partial y$$

或者 $$id-gf=-\partial T-T\partial\qquad\square$$

(15.22) **定理** 如链映射 $f: C\to C'$ 导出同构 $H(f)$, 则 f 为链同伦等价.

证明 由(15.18), $H(Cf)=0$, 从而由(15.21), f 是链同伦等价.

(15.23) 现在(15.16)的证明已唾手可得. 定理(15.9)蕴涵

着包含$S(\mathfrak{B})\to S(X)$导出同调的同构. 这样(15.16)由(15.22)缠涵. 类似地,对一个切除

$$(X-U,\ A-U)\subset(X,\ A),$$

我们得到一个链等价

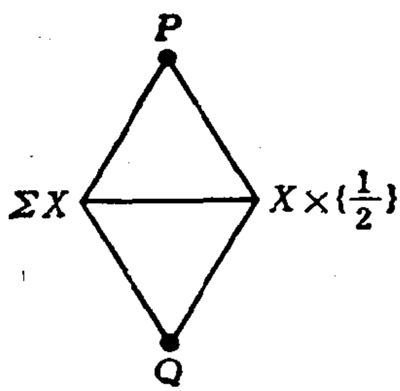
$$S(X-U,\ A-U)\to S(X,\ A). \qquad \square$$

评注 我们不能用证明同伦不变性的方法得到(15.23)中的链等价,因为这些链等价依赖于空间,例如U及其在A中的位置. 一个显式构造在 Eilenberg 和 Steenrod[23] p.207 中给出.

(15.24)**练习** 推广(15.3)中的讨论去证明**同纬映象同构**

$$H_q^*(X)\cong H_{q+1}^*(\sum X).$$

这里$\sum X$是在$X\times I$中把$X\times\{0\}$和$X\times\{1\}$分别叠合成点P和点Q得到的商空间. 我们可以把X看成$\sum X$中的子空间$X\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$.



(15.25)**练习** 构思一个例子,它使切除对约化同调失败,见(15.15).

(15.26)**练习** 设$M_q\in\Delta_q\times I$为点$\left(B_q,\ \frac{1}{2}\right)$见(15.10). 利用和$M_q$的联结去证明(11.4). 提示:考虑

$$T\delta_q=M_q(i_1\delta_q-i_0\delta_q-T\partial\delta_q).$$

画图比较链同伦T与棱柱算子(11.7).

(15.27) **练习** 设 I 为 S^2 中 $[0, 1]$ 的同胚像，x 为 I 中一点．证明包含 $(S^2-x, I-x)\to(S^2, I)$ 不是切除．

16 对球的进一步应用

(16.1) **命题** 设 $r: S^n\to S^n$ 为反射，$r(x_0, \cdots, x_n)=(-x_0, x_1, \cdots, x_n)$．则对所有 $n\geqslant 1$ 导出同态

$$H_n(r):\ H_n(S^n)\to H_n(S^n)$$

是乘以 -1．

证明 论断对 $n=0$ 成立，只要我们用约化同调模 $\tilde{H}_0^*(S^0)$（留作练习）．这样我们就可以对 n 进行归纳，因为有交换图表

$$\begin{array}{ccc}
H_n(S^n) & \xrightarrow{\ \sim\ } & H^*_{n-1}(S^{n-1}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H_n(r)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(r)} \\
H_n(S^n) & \xrightarrow{\ \sim\ } & H^*_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

（参看(15.4)）

(16.2) **命题** S^n 的任何旋转都同伦于 S^n 的恒等映射．

证明 如 $A\in SO(n+1)$，总存在 B 使得 BAB^{-1} 有以下形式：在主对角线上有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个形如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

的二阶方阵，如 n 是偶数，主对角线最后有元素 1，此外全是 0 (Halmos[28], p.164)．用 $t\theta$ 代替 θ 给出一同伦 H_t 满足

$$H_0=id,\quad H_1=BAB^{-1},$$

所要求的同伦就是 $B^{-1}H_tB$．

(16.3) **命题** 设 $g: S^n \to S^n$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的一个正交变换在 S^n 上的限制．则导出同态

$$H_n(g): H_n(S^n) \to H_n(S^n)$$

是用 g 的行列式(± 1)来乘．

证明 由(16.2)我们可以假定 $\det g = -1$，但这样一来 rg 和 gr((16.1)中的 r)都是旋转，再次利用(16.2)(及同伦定理)从而得出 $H_n(g) = H_n(r)^{-1} =$ 用 -1 乘．(练习：如 $\det g = -1$，则实际上 $g \simeq r$．) □

(16.4) **推论** 设 $a: S^n \to S^n$ 为对径映射 $a(x) = -x$，则导出映射 $H_n(a)$ 是用 $(-1)^{n+1}$ 来乘．

因为
$$\det a = (-1)^{n+1}. \qquad \square$$
我们说 a **有度** $(-1)^{n+1}$，(15.8)．

这一结果引向球上向量场的一个经典定理：S^n 上一个向量场是一连续映射 $v: S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$，对所有 $x \in S^n$ 满足 x 和 $v(x)$ 垂直(这有意义，因为 x 和 $v(x)$ 都是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中向量，如把 $v(x)$ 的始点放在 x 的终点，它将和球相切)．

(16.5) **定理** S^n 有一个到处不为零的向量场当且仅当 n 为奇数．

证明 对 $n = 2m+1$，定义

$$v(x_0, x_1, \cdots, x_{2m+1}) = (-x_1, x_0, -x_3, x_2, \cdots, -x_{2m+1}, x_{2m}).$$

反过来，给出 v，对所有 $x \in S^n$，$v(x) \neq 0$，则

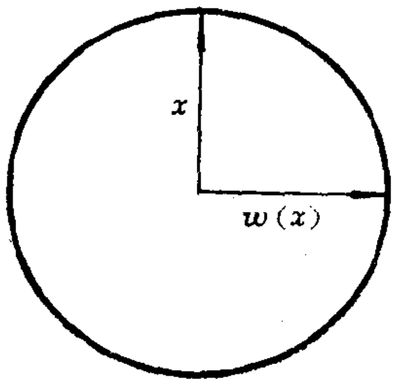
$$w(x) = v(x)/|v(x)|$$

是一映射 $S^n \to S^n$ 满足对所有 $x \in S^n$，$x \perp w(x)$

现在，如图所提示的，我们能够把 $w(x)$ 形变回 x，或向另一方向形变到 $-x$．确切地说，

$$F(x, t) = x \cos t\pi + w(x) \sin t\pi$$

确定一同伦满足



$$F(x,\ 0)=x$$

$$F\left(x,\ \frac{1}{2}\right)=w(x)$$

$$F(x,\ 1)=-x$$

这样，
$$Id\simeq w\simeq a$$
但由(16.4)及同伦定理，当 n 为偶数时对径映射不同伦于恒等映射.

注 如 n 为奇数，在证明过程中我们曾示明 S^n 上任何单位向量场，作为映射 $S^n\to S^n$ 时，都同伦于恒等映射.

(16.6) **注** 如 n 为奇数，困难的问题是确定 S^n 上到处不为零的线性无关向量场的最大数目. 这一问题为 Frank Adams 在[1]中解决.

(16.7) **练习** 设 $f,\ g: S^n\to S^n$ 为映射且对所有 $x\in S^n, f(x)\neq g(x)$，则 $f\simeq ag$，这里 a 是对径映射，从而
$$H_n(f)=(-1)^{n+1}H_n(g)$$
特别是，没有不动点的任何映射 $S^n\to S^n$ 同伦于对径映射.

(16.8) **练习** 设 f: $S^n\to S^n$ 同伦于常值映射，例如任何不是满的映射. 则 f 有一不动点且有一点 x 满足 $f(x)=-x$(利用 16.7).

(16.9) **练习** 任何 f: $S^{2n}\to S^{2n}$ 或者有一不动点，或者把某

个点映到它的对径点.

(16.10) **练习** 变通(16.5)中的构造在 S^{4n+3} 上造出 3 个线性无关到处不为零的切向量场.

球上向量场定理 令 $n+1=(\text{奇数})(q^{4a+b})$, $0\leqslant b\leqslant 3$ 则 S^n 上正好存在 2^b+8a-1 个线性无关到处不为零的切向量场. 这一构造归功于 Hurwitz-Radon 和 Eckmann, 不存在更多个的证明这一难题, 其解决归功于 J. F. Adams.

沿着(16.10) 的思路在 S^7 上构造 7 个线性无关切向量场并在 S^{15} 上构造 8 个线性无关切向量场. 你能看出造出 S^n 上形如 $(\pm x_{\sigma(0)}, \cdots, \pm x_{\sigma(n)})$ 的 Hurwitz-Radon 数个线性无关向量场的一般模型吗? 这里 σ 是 $(0, \cdots, n)$ 的一个置换.

(16.11) **练习** 设 G 为一个自由作用在 S^{2n} 上的同胚群, 即对所有 $g\in G$, 对某个 x, $gx=x\Leftrightarrow g=1$. 证明 $|G|\leqslant 2$.

(16.12) **练习** 每一 f: $\boldsymbol{P}^{2n}\rightarrow\boldsymbol{P}^{2n}$ 有一不动点. 提示: 利用(16.9)及提升定理(6.1). 构造没有不动点的

$$f\colon \boldsymbol{P}^{2n+1}\rightarrow\boldsymbol{P}^{2n+1}.$$

(16.13) **练习** 证明覆盖映射 $S^n\rightarrow\boldsymbol{P}^n$ 不零伦. 提示: 提升定理对所有单连通空间 X 提供一集合等价 $[X, S^n]\rightarrow[X, \boldsymbol{P}^n]$.

(16.14) **练习** 推敲(15.4), 注意用偶 (S^n, E_n^+) 代替 (S^n, E_n^-) 将产生对 $H_n(S^n)$ 乘以 -1 的结果.

(16.15) **练习** 我们定义 f, g: $S^n\rightarrow S^n$ 在点 $x\in S^n$ 叫做**正交的**, 如果内积($\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的内积) $f(x)\cdot g(x)=0$. 证: 如果

$$|\deg f|\neq|\deg g|,$$

则 f, g 在某点 x 正交.

17 Mayer–Vietoris 序列

现在我们考虑三元组(X, X_1, X_2)，这是按次序排列的三个空间，其中 X_1, X_2 都是 X 的子空间．我们有包含映射

$$k_2:\ (X_2,\ X_1\cap X_2)\to(X_1\cup X_2,\ X_1)$$

$$k_1:\ (X_1,\ X_1\cap X_2)\to(X_1\cup X_2,\ X_2)$$

分别由从 $X_1\cup X_2$ 中切除

$$X_1-X_1\cap X_2,\quad X_2-X_1\cap X_2$$

得到．如果 k_1, k_2 都是切除，三元组叫**正合的**(有些书叫"正常的")．这样，

$$H_q(k_i):H_q(X_i,\ X_1\cap X_2)\to H_q(X_1\cup X_2,\ X_j)$$

对所有 q, (i, j)① $=(1, 2)$或$(2, 1)$都是同构．这些同构类似于群论中的第一同构定理．正合性只依赖于 $X_1\cup X_2$，而和 X 无关．

(17.1)例 如 X_1, X_2 都是开集，则(X, X_1, X_2)正合．因为我们可以假定 $X=X_1\cup X_2$，令

$$A=X_1,\quad U=X_1-X_1\cap X_2,$$

于是 $X-U=X_2$，从而 U 是 X 的闭子集且含于开集 A 之中，从而适用切除定理．

(17.2)例 根据(15.3)，(S^n, E_n^+, E_n^-)是一正合三元组．

在另行通知之前我们假定

$$X=X_1\cup X_2.$$

令 $$A=X_1\cap X_2.$$

包含$(X_1, A)\to(X, X_2)$导出梯子

(17.3)

① 原文误为(i, i)——译者．

$$\begin{array}{ccccccccccc}\cdots\to & H_q(A) & \to & H_q(X_1) & \to & H_q(X_1, A) & \to & H_{q-1}(A) & \to & H_{q-1}(X_1) & \to\cdots\\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots\to & H_q(X_2) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X, X_2) & \to & H_{q-1}(X_2) & \to & H_{q-1}(X) & \to\cdots\end{array}$$

其每一矩形可交换．有关这种梯子的一个有用的引理是

(17.4) Barratt-Whitehead **引理** 已知一 R-模和同态的图表，其中所有矩形可交换且各行正合

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i'"] & C_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\gamma_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & B_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{i-1}"] & {} \\
\arrow[r] & C_{i+1}' \arrow[r] & A_i' \arrow[r, "f_i'"'] & B_i' \arrow[r, "g_i'"'] & C_i' \arrow[r, "h_i'"'] & A_{i-1}' \arrow[r] & B_{i-1}' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

如果所有 γ_i 是同构，则存在一长正合序列

$$(17.5)\qquad \to A_i \xrightarrow{\Phi_i} A_i'\oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} B_i' \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1}\to$$

这里

$$\phi_i=(\alpha_i\oplus f_i)\triangle,\quad \psi_i=\nabla'(-f_i'\oplus\beta_i),\quad \Gamma_i=h_i\gamma_i^{-1}g_i'.$$

回忆 $\triangle(a)=(a, a)$, $\nabla'(x, y)=(x+y)$ (14.13)

证明 证明为一图表追踪．我们证明 B_i' 处的正合性．合成

$$\Gamma_i\psi_i(a, b)=\Gamma_i(-f_i'(a)+\beta_i(b))=h_i\gamma_i^{-1}g_i'\beta_i(b),$$

因为 $g_i'f_i'=0$．但 $\gamma_i^{-1}g_i'\beta_i=g_i$，而 $h_ig_i=0$，从而 $\Gamma_i\psi_i=0$．如 $b\in B_i'$ 满足 $\Gamma_i(b)=0$，于是存在 $b_1\in B_i$ 满足 $g_i(b_1)=\gamma_i^{-1}g_i'(b)$，因为

$$g_i'(b-\beta_i(b_1))=0,$$

存在 $a\in A_i'$，满足 $f_i'(a)=b-\beta_i(b_1)$．于是 $\psi_i(-a, b_1)=b$．我们把余下的步骤留给读者． □

我们把(17.5)中的序列叫作梯子的 Barratt-Whitehead **序列**

(17.6) Barratt-Whitehead 序列的函子性是构造的直接结果．一个梯子的映射导出一个 Barratt-Whitehead 序列的映射．

(17.7) **定义** 如(X, X_1, X_2)是一正合三元组，则(17.3)是一个其中

$$H_q(X_1, A) \to H_q(X, X_2)$$

为同构的梯子. 相伴的 Barratt-Whitehead 序列叫三元组的 Mayer-Vietoris 序列.

$$\cdots \to H_{q+1}(X) \xrightarrow{\Gamma_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{\Phi_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$$

$$\xrightarrow{\Psi_q} H_q(X) \to \cdots$$

函子性是(17.6)的结果.

(17.8) **推论** 设对某个 q, $H_{q+1}(X)=0$, 则一元素 $a \in H_q(A)$ 为零的充分必要条件是

$$H_q(m_1)(a) = 0 = H_q(m_2)(a).$$

证明 条件无疑是必要的. 反过来, 由 ψ 的定义, 这些条件蕴涵 $\psi(a)=0$. 由正合性, a 是 Δ 的像, 根据假设 a 是零(*). □

这一小推论在下一节中将非常有用.

(17.9) **评注** 根据(15.15), 如 $A \neq \varnothing$, Mayer-Vietoris 序列可如下结尾:

$$\to H_1(X) \to H_0^*(A) \to H_0^*(X_1) \oplus H_0^*(X_2) \to H_0^*(X) \to 0.$$

(17.10) **相对 Mayer-Vietoris 序列** 设 (X, X_1, X_2) 为一正合三元组但不必 $X = X_1 \cup X_2$. 令 $Y = X_1 \cup X_2$, $A = X_1 \cap X_2$. 于是存在正合的相对 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots \to H_q(X, A) \to H_q(X, X_1) \oplus H_q(X, X_2) \to H_q(X, Y)$$

$$\to H_{q-1}(X, A) \to \cdots$$

并且它对正合三元组的映射是函子性的. 证明是把(17.4)应用于由三元组同调长正合序列(14.6)及包含映射图表

(*) 原作者在这里有些符号没有交待清楚: m_1: $A \to X_1$; m_2: $A \to X_2$; Ψ 即(17.7)中的 Φ: $H_q(A) \to H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$; Δ 即(17.7)中的 Γ: $H_{q+1}(X) \to H_q(A)$——译者.

$$\begin{array}{ccccc} (X_1, A) & \to & (X, A) & \to & (X, X_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (Y, X_2) & \to & (X, X_2) & \to & (X, Y) \end{array}$$

得到的梯子．在以上图表中左边的映射是一切除．

(17.11)对于某些计算(首先是(26.6))，我们希望在链的水平上计算 Γ．考虑

$$\begin{tikzcd} S(A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & S(X_1) \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "i"] & S(X_1, A) \arrow[d, "i"'] \\ S(X_2) \arrow[r] & S(X) \arrow[r, "k"'] & S(X, X_2) \arrow[u, bend right, "j"'] \end{tikzcd}$$

这里 i 是由包含导出的链映射而 j 是逆链映射，

$$ij - id = \partial D + D\partial$$

由(15.16)给出．首先注意，如

$$z \in Z_{q+1}(X) \quad 和 \quad w \in S_{q+1}(X_1)$$

满足 $\qquad ki(w) \sim k(z) \quad 在 S(X, X_2) 中,$

$$k_1(\partial w) = 0 \qquad 因而 \partial w 在 S_q(A) 中.$$

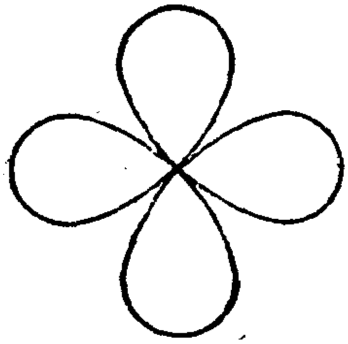
则 $$\overline{\partial w} = \Gamma \bar{z}.$$

再者一个适当的 w 只要满足

$$k_1(w) = jk(z)$$

就行，因为 $ik_1(w) = k(z) + \partial Dk(z) = ki(w)$ 且 $k_1(\partial w) = \partial k_1(w) = jk(\partial z) = 0$

(17.12)**应用**　一个图是一个空间，它是有限多条闭弧的并，其中任何两个至多在端点相交(即不相交叉)．一条闭弧是单位闭区间或 S^1 的同胚像．我们希望计算一个图的同调．由直和分解(10.5)，只需考虑连通图．现在一个连通图同伦等价于一个 r 叶玫瑰线 G_r．



G_4

它是有一个公共点的 r 个拓扑圆的并(参看 Artin [3],49 页).所以只要计算 G_r 的同调就够了.

现在 $G_1=S^1$ 答案是知道的. 对 $r\geqslant 2$, $G_r=S^1\cup G_{r-1}$ 且 $S^1\cap G_{r-1}=\{P\}$. (G_r, G_{r-1}, S^1) 是一个正合三元组. 映射

$$k_1\colon (G_{r-1}, P)\to(G_r, S^1)$$

$$k_2\colon (S^1, P)\to(G_r, G_{r-1})$$

分别是从切除 S^1-P 和 $G_{r-1}-P$ 得到. 改为切除稍小一些的开集,我们可以应用切除定理,再经过形变收缩核的讨论说明 k_1 和 k_2 是切除.这样我们可以利用 Mayr-Vietoris 序列: 对 $q>0$

$$0=H_q(P)\xrightarrow{\Psi}H_q(S^1)\oplus H_q(G_{r-1})\xrightarrow{\Phi}H_q(G_r)$$

$$\xrightarrow{\Delta}H_{q-1}(P)$$

从这里得出 $$H_q(G_r)\cong H_q(S^1)\oplus H_q(G_{r-1})$$

对所有 $q>1$ 成立.这一结果对 $q=1$ 也成立,这可由直接证明

$$\Delta\colon H_1(G_r)\to H_0(P)$$

为零映射看出,也可由在此情形下 Mayer-Vietoris 序列对约化同调也成立(17.9)看出.

这样,归纳可知

$$H_q(G_r)=0 \quad q>$$

$$H_1(G_r)\cong\underbrace{R\oplus R\oplus\cdots\oplus R}_{r\text{个}}$$

(17.13)例 我们用两种方法计算环面 T 的同调.

(a) 环面可看成两个圆环沿它们的边缘叠合得到的.（为节省记号，两个圆环都用 A 表示.）边缘是两个圆 C_1 和 C_2 的不交并 C_1+C_2，包含 $C_i\to A$ 是同伦等价. 利用切除定理(15.1)和(15.2)，我们看出 $(A,\partial A)\hookrightarrow(T,A)$ 导出同调的同构. 从而利用(17.7)我们得到 Mayer-Vietoris 序列

$$\begin{aligned}0\to H_2(T)\to H_1(C_1+C_2)\xrightarrow{\phi_1}&\ H_1(A)\oplus H_1(A)\\ &\to H_1(T)\to H_0^*(C_1+C_2)\to 0\end{aligned}$$

由(9.5)和(15.5)，

$$H_1(C_1+C_2)\cong R\oplus R,$$

由(9.7)，

$$H_0^*(C_1+C_2)\cong R.$$

由于 $C_i\to A$ 为同伦等价，$H_1(A)\oplus H_1(A)=R\oplus R$，对自然基底 ϕ_1 的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. 由此得出

$$\ker\phi_1\cong R,$$

由$(1,-1)$生成；

$$\operatorname{im}\phi_1\cong R$$

由$(1,1)$生成. 于是

$$H_2(T)\cong R,\quad H_1(T)\cong R\oplus R.$$

(b) 环面可看成 $S^1\times S^1$. 设 $x_0\in S^1$ 为一点且把子空间

$$S^1\times\{x_0\}\cup\{x_0\}\times S^1$$

记为 $S^1\vee S^1$. 我们利用偶$(S^1\times S^1,S^1\vee S^1)$的长同调正合序列. 设 p_i: $S^1\times S^1\to S^1$ 为射影，j_i: $S^1\to S^1\vee S^1$ 为包含

$$j_1(x)=(x,x_0),\quad j_2(x)=(x_0,x).$$

由(17.12)我们有一直和分解

(14.13)

$$\begin{tikzcd}
H_q(S^1) \arrow[dr, "H_q(j_1)"] \arrow[dd, "id"'] & & H_q(S^1) \arrow[dl, "H_q(j_2)"'] \arrow[dd, "id"] \\
& H_q(S^1 \vee S^1) \arrow[dl, "H_q(p_1)"] \arrow[dr, "H_q(p_2)"'] & \\
H_q(S^1) & & H_q(S^1)
\end{tikzcd}$$

因为 j_i 可经由 $S^1\times S^1$ 分解因子，包含

$$S^1\vee S^1 \to S^1\times S^1$$

化同调中导出的映射有一左逆

$$\phi: H_q(S^1\times S^1)\to H_q(S^1)\oplus H_q(S^1)^{(*)},$$

它由 $$\phi(x)=(H(p_1)(x),\ H(p_2)(x))$$

给出。所以由(14.12)

$$H_q(S^1\vee S^1)\to H_q(S^1\times S^1)$$

为一单同态。(在(21.17)中我们看到 $S^1\vee S^1$ 不是 $S^1\times S^1$ 的收缩核。)要计算 $H_q(S^1\times S^1,\ S^1\vee S^1)$ 我们首先把 $S^1\vee S^1$ 加厚成

$$S^1\times U\cup U\times S^1,$$

这里 U 是以 x_0 为中心的小区间，见图 3.

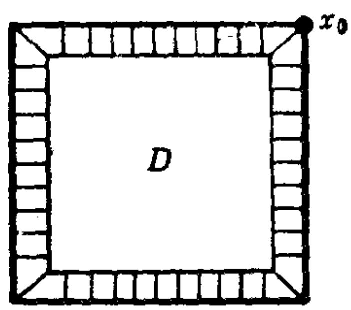


图 3　T 是 $I\times I$ 的叠合空间

然后利用一个类似于(15.3)的同伦和(13.14)，

$$H_q(S^1\times S^1,\ S^1\vee S^1)\cong H_q(T,\ U)^{(**)}.$$

(*) 原文误作 $H_1(S^1)\oplus H_1(S^1)$.

(**) 这里的 U 实际当为 $S^1\times U\cup U\times S^1$——译者。

包含 $(T-S^1\vee S^1,\ U-S^1\vee S^1)\hookrightarrow(T,\ U)$满足(15.1)，从而是一切除. 令 D 为图 3 中画出的 T 中的圆盘.

包含

$$(D,\ \partial D)\hookrightarrow(T-S^1\vee S^1,\ U-S^1\vee S^1)$$

为一同伦等价. 综合以上，我们得到

$$H_q(S^1\times S^1,\ S^1\vee S^1)\cong H_q(D,\ \partial D).$$

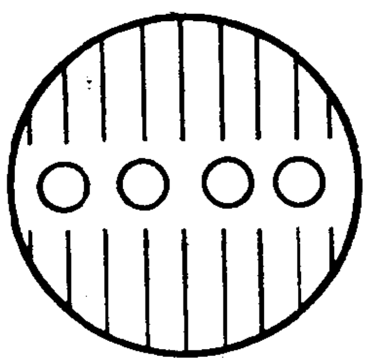
后者与 2 维球有相同的同调模(15.5)，把这些结果代入偶$(T,\ S^1\vee S^1)$的长正合同调序列，我们得到

$$H_2(T)\cong H_2(D,\ \partial D),\ H_1(T)\cong H_1(S^1\vee S^1).$$

注意 $H_1(S^1\vee S^1)$的计算差不多立刻就可完成. 直和图表使我们能计算包含导出映射. (12.1)中的结果也可用在这一推导中.

读者可深思 $H_2(T)\neq 0$ 而 $\pi_2(T)=0$ 这一事实的几何意义(如果有的话).

(17.14) **练习** 设 D_k 为从单位圆盘 E^2 中挖掉 k 个不相交的小开 2 维圆盘得到. 证明 $D_k\cong G_k$, 后者是 k 叶玫瑰线. 设 M_k 为沿边缘叠合两个复制的 D_k 得到的曲面，用(17.13)(*a*)中的方法计算出 $H_2(M_k)\cong R$而 $H_1(M_k)\cong R\oplus R\oplus\cdots\oplus R$ 共 $2k$ 个.



D_4

(17.15) **练习** 在(17.14)中用 n 维圆盘 $E^n(n\geqslant 3)$代替 E^2. 令 D_k^n 为从 E^n 中挖掉 k 个不相交小开 n 维圆盘得到. 证明

$$D_k^n\simeq S^{n-1}\vee\cdots\vee S^{n-1}$$

共 k 个. 令 M_k^n 由沿边缘叠合两个 D_k^n 的复制品得到. 证明

$$H_0(M_k^n)\cong H_n(M_k^n)\cong R,$$

$$H_1(M_k^n)\cong H_{n-1}(M_k^n)\cong R\oplus R\oplus\cdots\oplus R$$

共 k 个, 而对其余的 q 值 $H_q(M_k^n)=0$.

(17.16) **练习** 设 T^* 为从环面 T 中挖去一小开圆盘得到的. $C\subset T^*$ 为边缘圆, 证明 $C\to T^*$ 在 H_1 上导出零映射. 提示: 这可从(17.13)(a)中的计算及用 T^* 和圆盘计算 $H(T)$ 的 Mayer-Vietoris 序列推出. 利用这一观察结果去计算 $H_q(M_2)$, 把 M_2 看成两个 T^* 沿 C 叠合得到的. 推广这一方法计算 $H_q(M_k)$.

(17.17) **练习** 假设 $x_0\in X$, $y_0\in Y$ 分别有邻域 U 和 V 使得 $x_0\in U$, $y_0\in V$ 分别是形变收缩核. 令

$$X\vee Y=X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y.$$

作出 $H_q^*(X\vee Y)$ 的一个直和分解. 推出裂短正合序列

$$0\to H_q^*(X\vee Y)\to H_q^*(X\times Y)\to H_q^*(X\times Y,\ X\vee Y)\to 0.$$

(17.18) **练习** 两空间 X,Y 的联结 $X*Y$ 是在 $X\times I\times Y$ 中作叠合 $(x,\ 1,\ y)\sim(x',\ 1,\ y)$ 及 $(x,\ 0,\ y)\sim(x,\ 0,\ y')$ 得到的. 在 $X*Y$ 中有子空间

$$C_+X\times Y=\left\{(x,\ t,\ y)\ \Big|\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right\}$$

及
$$X\times C_-Y=\left\{(x,\ t,\ y)\ \Big|\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

于是 $C_+X\times Y\cap X\times C_-Y=X\times Y$ 看成子空间 $\left\{\left(x,\ \frac{1}{2},\ y\right)\right\}$. 证明三元组 $(X*Y,\ C_+X\times Y,\ X\times C_-Y)$ 正合, 且 $H_{q+1}^*(X*Y)\cong H_q^*(X\times Y,\ X\vee Y)$.

(17.19) **练习** 把克莱茵瓶 K 看成两个麦比乌斯带沿边缘叠合而得到, 证明

$$H_1(K)\cong R\oplus(R/2R),\ H_2(K)\cong {}_2R=\{r\,|\,2r=0\}.$$

利用(12.13)以得到关于 $H_q(M)$ 的信息. 利用同调证明(4.15)中不可收缩性的结果.

(17.20)**练习** 设 A, B 为 S^n 的子集, $n\geqslant 2$. 证明(a)如果 A, B 是闭的, 不交的, 且每一个都不分开 S^n, 则 $A\cup B$ 也不分开 S^n. 证明(b)如 A, B 是连通的, 开的, 且 $A\cup B=S^n$, 则 $A\cap B$ 也连通.

(17.21)**练习** 设(X, X_1, X_2)为一正合三元组,

$$X=X_1\cup X_2,\quad B\subset X_1\cap X_2=A.$$

作出另一相对 Mayer-Vietoris 序列

$$\cdots\to H_q(A,B)\to H_q(X_1, B)\oplus H_q(X_2, B)$$
$$\to H_q(X, B)\to\cdots$$

在这里令 $A=B$和在 (17.10)中令 $X=Y$ 都能产生直和分解. 在 Eilenberg-Steenrod[23], Dold[64], Spanier[52]中有进一步的推广.

(17.22)**练习** 令 a 代表对径映射. 注意图表

$$\begin{array}{ccc}(E_n^+, S^{n-1}) & \longrightarrow & (S^n, E_n^-)\\ a\downarrow & & \downarrow a\\ (E_n^-, S^{n-1}) & \longrightarrow & (S^n, E_n^+)\end{array}$$

可交换. 令 Γ_1, Γ_2 分别是和上、下两序列相伴的 Mayer-Vietoris 连接同态. 证 $\Gamma_1=-\Gamma_2$, 提示: 利用(16.14). 利用这一关系去得到(16.4)的另一证明.

18 Jordan-Brouwer 隔离定理

我们应用前一节的结果来计算球中一个闭胞腔的余集的同调(这里闭胞腔是对某个 n, I^n 的同胚像)以及球中一个球的余集的同调.

(18.1)**定理** 设 e_r 为 S^n 中一个 r 维闭胞腔. 于是

$$H_q^*(S^n-e_r)=0 \quad \text{对所有 } q\geqslant 0$$

证 对 r 进行归纳. 如 $r=0$, e_r 是一个点, S^n-e_r 可点缩. 设 $r>0$ 而定理对 $r-1$ 为真. 令 z 为 S^n-e_r 中一 q-闭链. ϕ: $I^r=e_r$ 为一同胚. 对 $t\in I$, 令 $e_{r-1}(t)=\phi(t\times I^{r-1})$, 这是一个闭 $(r-1)$ 维胞腔. 因为

$$S^n-e_{r-1}(t)\supset S^n-e_r,\quad z=\partial w_t,$$

这里 w_t 是 $S^n-e_{r-1}(t)$ 中一个 $(q+1)$-链. w_t 的支集[*] $|w_t|$ 是一紧集, 它和紧集 $e_{r-1}(t)$ 不交. 令 $\varepsilon_t>0$ 是这两集间的距离. 由一致连续性, 存在 $\delta_t>0$, 使得当 I^r 中两个点的距离小于 δ_t 时, 它们在 ϕ 下的像的距离就小于 ε_t. 令 I_t 为一以 t 为中心长度小于 δ_t 的开区间. 令 $e_r(t)=\phi(I_t\times I^{r-1})$, 它是一开 r 维胞腔. 于是 $e_r(t)$ 中每一个点到 $e_{r-1}(t)$ 的距离 $<\varepsilon_t$, 所以 $e_r(t)$ 和 $|w_t|$ 不交, 从而在 $S^n-e_r(t)$ 中, $z=\partial w_t$.

因为 I 是紧的并为开区间 I_t 所覆盖, 存在 $\rho>0$ 使得所有长度 $<\rho$ 的闭区间含在某个 I_t 中. 选择 $m>0$ 使得 $1/m<\rho$, 并考虑闭区间

$$I_0=[0,\ 1/m],\ I_1=[1/m,\ 2/m],\ \cdots,\ I_{m-1}=[m-1/m,\ 1]$$

令 $e_{r,j}$ 为 $I_j\times I^{r-1}$ 的像. 于是在 $S^n-e_{r,j}$ 中存在一链 w_j 使得

$$z=\partial w_j.$$

经过对 j 进行归纳, 问题归结为证明下述次引理.

次引理 设 J_1, J_2 为 I 的闭子区间满足 $J_1\cap J_2=\{t\}$. 令

$$e'=\phi(J_1\times I^{r-1}),\quad e''=\phi(J_2\times I^{r-1}).$$

假设在 S^n-e', S^n-e'' 中分别存在 $(q+1)$-链 w', w'', 满足

$$\partial w'=z=\partial w''.$$

则在 $S^n-(e'\cup e'')$ 中也存在 $(q+1)$-链 w 满足 $z=\partial w$.

---

[*] 如 σ 为一奇异 q-单形, 定义它的支集 $|\sigma|$ 为 $\sigma(\Delta_q)$. 对一 q-链 $c=\sum t_i\sigma_i$, 定义 $|c|=U_i|\sigma_i|$.

证明 设

$$X=S^n-e_{r-1}(t),\ X_1=S^n-e',\ X_2=S^n-e'',$$
$$A=X_1\cap X_2=S^n-(e'\cup e'').$$

因 X_1, X_2 是开的, (X, X_1, X_2) 是一正合三元组. 此外, $e'\cup e''$ 是可点缩的, 而 S^n 不能, A 不空; 这样此三元组对约化同调也是正合的. 由归纳假设, $H_{q+1}(X)=0$. 因 z 在 X_1 和 X_2 中都是边缘, 推论(17.8)告诉我们 z 在 A 中也是边缘. □

(18.2) **推论** S^n 不可能被挖去一个闭胞腔分开.

因为如 S^n-e_r 不连通, $H_0^*(S^n-e_r)\neq 0$, 矛盾. □

(18.3) **定理** 设 S_r 是 S^n 的一子空间, 它是 S^r 的同胚像. 于是 $r\leqslant n$. 如 $r=n$, 则 $S_n=S^n$; 如 $r<n$, 则

$$H_q^*(S^n-S_r)=\begin{cases}R & q=n-r-1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

证明 设 e_r^+, e_r^- 分别为 E_r^+, E_r^- 的像, S_{r-1} 为 $E_r^+\cap E_r^-$ 的像. 在 $r=n$ 的情形假设 $S_n\neq S^n$. 设

$$X=S^n-S_{r-1},\ X_1=S^n-e_r^+,\ X_2=S^n-e_r^-,\ A=S^n-S_r.$$

对 $r\neq n$, S_r 和 S^n 有不同的同调, 所以 $A\neq\varnothing$. (根据假定对 $r=n$ 也有这一点.) 由(18.1)对所有的 q,

$$H_q^*(X_1)=0=H_q^*(X_2).$$

由 Mayer-Vietoris 序列

$$H_{q+1}^*(X)\cong H_q^*(A)\quad \text{对所有 } q$$

经对 r 进行递减归纳, 我们得到

$$H_q^*(S^n-S_r)\cong H_{q+r}^*(S^n-S_0)$$

现在很容易看出 $S^n-S_0=S^n-\{\text{两个点}\}$ 同伦等价于 S^{n-1}. 这样

$$H_q^*(S^n-S_r)=\begin{cases}R & q+r=n-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(*)对 $r=n-1$ 我们得到 $H_0^*(S^n-s_{n-1})=R_0$ 如 $S^n-s_n\neq\varnothing$, 则

由(17.9)，

$$\to H_0^*(S^n-s_n)\to H_0^*(X_1)\oplus H_1^*(X_2)\to H_0^*(S^n-s_{n-1})\to 0$$

为正合列，因 $H_1^*(X_1)=H_1^*(X_2)=0$，矛盾．这样 $s_n\neq S^n$ 不可能出现．从这里立刻推出对 $r>n$，S^n 内不存在 s_r（因此也不存在任何 e_r！） □

(18.4) **评注** 对 $r=1$，s_1 叫做一个纽结．人们通常兴趣在于 $s^1\subset \boldsymbol{R}^3$．把 $\boldsymbol{R}^3$ 看成 S^3 挖去一个点 P．让我们计算 $H_q^*(\boldsymbol{R}^3-s_1)$；我们有交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow H_q^*(S^3-s_1) & \to & H_q^*(S^3) & \to & H_q^*(S^3,\ S^3-s_1) & \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\longrightarrow H_q^*(\boldsymbol{R}^3-s_1) & \to & H_q^*(\boldsymbol{R}^3) & \to & H_q^*(\boldsymbol{R}^3,\ \boldsymbol{R}^3-s^1) & \to
\end{array}$$

由切除定理，第三个垂直箭头是同构，又因为 3 维空间(**)的约化同调是 0，我们得到

$$H_q^*(\boldsymbol{R}^3-s_1)\cong H_{q+1}(S^3,\ S^3-s_1)$$

由(18.3)及(15.5)，我们得到

$$H_q^*(\boldsymbol{R}^3-s_1)=\begin{cases} R & q=1,\ 2\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

特别是，余集的同调对所有纽结都是一样的．不过，余集的基本群确实不同，并且是纽结嵌入方式的一个重要不变量（参看 Crowell 和 Fox[16]）．

(18.5) **推论** 如 $r\leqslant n$，则从 S^n 中挖去一个 s_r 能把 S^n 分开当且仅当 $r=n-1$．

我们再次查看 $H_0^*(S^n-s_r)$ 即可． □

在 $n-1=r$ 的情形我们可以看出更多的东西．

(18.6) **Jordan-Brouwer 隔离定理** 对 S^n 中的任何 s_{n-1}，S^n-s_{n-1} 包含两个连通分支，两者都以 s_{n-1} 为边界．

(*) 原证明逻辑上有问题，故改证如下——译者．

(**) 即 $\boldsymbol{R}^3$——译者．

证明 因 $H_0^*(S^n - s_{n-1})$ 同构于 R，$S^n - s_{n-1}$ 正好有两个分支 K_1，K_2．它们是 S^n 的开子集，所以每一分支的边界都含在 s_{n-1} 中．反过来，设 $x \in s_{n-1}$，并设 U 为 x 在 S^n 中的任一开邻域，我们必须证明 U 既交 K_1 又交 K_2．任选 $y_1 \in K_1$，$y_2 \in K_2$，我们能取一集 A 满足

$$x \in A \subset U \cap s_{n-1}$$

且 $s_{n-1} - A$ 是一闭 $(n-1)$ 维胞腔 e_{n-1}．由 (18.1)，

$$H_0^*(S^n - e_{n-1}) = 0,$$

所以 $S^n - e_{n-1}$ 连通，实际上弧连通．令 σ 为 $S^n - e_{n-1}$ 中从 y_1 到 y_2 的一条闭弧．因为 y_1，y_2 属于 $S^n - s_{n-1}$ 的不同分支，故 σ 穿过 s_{n-1}，且实际上，$\sigma \cap s_{n-1} \subset A$．因 $\sigma \cap s_{n-1}$ 为 σ 的闭子集，

$$\sigma \cap s_{n-1} = \sigma \cap A$$

有一始点 x_1 和一终点 x_2．现在 σ 从 y_1 到 x_1 的部分 σ_1 的所有的点都在 K_1 中（x_1 除外），而 U 和 σ_1 相交于 σ_1 的一个非空开子集，所以 U 和 K_1 相交．类似地，U 也和 K_2 相交． □

(18.7) **推论** 设 $n \geqslant 2$，s_{n-1} 是 S^{n-1} 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个同胚像．则 $\boldsymbol{R}^n - s_{n-1}$ 有两个连通分支，都以 s_{n-1} 为边界．

（把 $\boldsymbol{R}^n$ 看成 S^n 挖去一个点）$\boldsymbol{R}^n - s_{n-1}$ 的有界分支叫 s_{n-1} 的**内部**，无界分支（包括无穷远点）叫 s_{n-1} 的**外部**．注意 $n=1$ 的情形相当不同！

对 $n=2$，推论 (18.7) 就是著名的约当曲线定理．试图证明这一"直观明显"的事实是认识数学和绘图间差别的良好途径．对 $n=2$ 有一更强的结果：S^1 到平面的一个子空间上的任何同胚都可以扩张成平面到自身的一个同胚．这一定理归功于 Schoenflies，它是紧曲面三角可分性的关键（Ahlfors 和 Sario [2]，105 页）．Schoenflies 定理蕴涵一个 s_1 的内部和外部都是开 2 维胞腔．对 $n=3$，Alexander 有角球表明这一论断失败．（Hocking 和 Young

[32] 176 页). 近来, Mazur[39] 和 Brown [9] 证明了一个"优美嵌入"$s_{n-1}\subset \boldsymbol{R}^n$, 其内部和外部都是开 n 维胞腔.

另外几个著名的 S^n 上的隔离定理是 Borsuk(Hocking 和 Young[32], 6~17 节)和 Phragmen-Brouwer([32], 8-8 节)的隔离定理. S^n 上大多数隔离定理的根源是 Alexander 对偶定理 (27 节).

(18.8) **推论** $n\geqslant 2$, f: $E^n\to \boldsymbol{R}^n$ 是一一映射, 则 f 是 E^n 到 $f(E^n)$ 上的同胚; 如 $s_{n-1}=f(S^{n-1})$, 则 f 把 E^n 的内部映到 s_{n-1} 的内部上.

证明 设 $e^n=f(E^n)$. 把 $\boldsymbol{R}^n$ 看成 S^n 挖去一个点. 则 S^n-e_n 是连通的(18.2), 实际上道路连通; 因 $n\geqslant 2$, $\boldsymbol{R}^n-e_n$ 也道路连通(通过无穷远点的任何道路都可稍加移动避开那个点). $\boldsymbol{R}^n-e_n$ 无界, 所以含在 s_{n-1} 的外部 B 中. 从而

$$e_n\supset \boldsymbol{R}^n-B=s_{n-1}\cup A,$$

这里 A 是 s_{n-1} 的内部. 现在 $e_n=f(\mathring{E}^n)\cup s_{n-1}$ (不交并), 所以 $A\subset f(\mathring{E}^n)$. 因 $\mathring{E}^n$ 是连通的, 所以 $A=f(\mathring{E}^n)$. (f 是到 e_n 上的同胚这一事实是初等点集拓扑的一个结果.) □

(18.9) **推论** 假设 $n\geqslant 2$, 设 $U\subset \boldsymbol{R}^n$ 为一开连通集, f: $U\to \boldsymbol{R}^n$ 是一一映射, 则 $f(U)$ 是一连通开集而 f 是到 $f(U)$ 上的一个同胚(域不变性).

证明 取 $x\in U$, 令 $V\subset U$ 为 x 的任一开邻域, 取一以 x 为中心的闭实心球 $e_n\subset V$. 于是由(18.8), $f(\mathring{E}_n)$ 是 $f(x)$ 的一个开邻域. □

(18.10) **练习** 设 X, Y 为 n 维流形(6.8), U 在 X 中开, f: $U\to Y$ 是一一映射, 则 $f(U)$ 在 Y 中开(从而 f 把 U 同胚地映到 $f(U)$ 上).

(18.11) **练习** 设 X 为一 n 维流形, Y 为一 m 维流形, U 在

X 中开. 如 $m<n$, 则不存在 U 到 Y 中的一一映射. (首先作 $X=\boldsymbol{R}^n$, $Y=\boldsymbol{R}^m$ 的情形.)特别是, X 不同胚于 Y.

(18.12)**练习** 设 X, Y, U 同(18.11). 但此时假定 $m>n$. 如 $f: U\to Y$ 为一一映射, 则 $f(U)$ 在 Y 中不开, 实际上 $f(U)$ 的内部是空集(提示: 利用 Baire-Moore 定理(Hockinh 和 Young, 定理 2-79)归结成一个紧集, 它的像有非空内部的情形, 然后应用(18.11).)给出一个例子其中 f 不把 U 同胚地映到 $f(U)$ 上.

(18.13)**练习** 推论(18.9)对 $n=1$ 也成立.

(18.14)**练习** 对所有 q, n, r, 计算 $H_q^*(\boldsymbol{R}^n-e_r)$, $H_q^*(\boldsymbol{R}^n-s_r)$.

(18.15)**练习** 设 x 为 $\boldsymbol{R}^n-s_{n-1}$ 的有界分支中一点, $n\geqslant 1$, 证包含 $s_{n-1}\to\boldsymbol{R}^n-\{x\}$ 导出同调的同构. 反过来, 如 x 在无界分支中, 包含导出零映射. 提示: 考虑 $\boldsymbol{R}^n-\{x\}$ 到以 x 为中心以常数为半径的球的形变.

(18.16)**练习** 设 $t_{r,k}\subset S^n$ 是 $S^r\times E^k$ 的同胚像, s_r 是 $S^r\times\{0\}$ 的像. 证明包含 $S^n-t_{r,k}\to S^n-s_r$ 导出同调的同构.

(18.17)**练习** 我们把映射 $W\to X$ 的同伦类集合记作$[W, X]$. 一个映射 $f: X\to Y$ 导出

$$f_*: [W, X]\to[W, Y], \ f_*(g)=fg.$$

利用支集的概念证明: 如果 $f: X\to Y$ 导出的

$$f_*: [W, X]\to[W, Y]$$

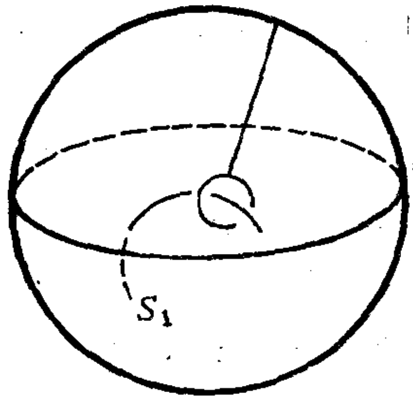
对所有紧集 W 是一集合等价, 则 f 导出同调的同构.

令人惊奇的是, 存在 f 并不是同伦等价的例子. 见 G. W. Whitehead[88], 228 页.

(18.18)**练习** 设 s_1 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中一个纽结. 构造一个映射

$$f: S^2\vee S^1\to\boldsymbol{R}^3-s_1$$

导出同调的同构. 如 s_1 为标准圆, 构造一个同伦等价 f. 一个可能的 f 的图画在下面.



(18.19)**评注** 本节结果的一个平行发展可利用 Borsuk 隔离准则[32]及一个类似于(18.3)的结果的巧妙证明来完成. 这一证明归功于 P. H. Doyle(对一般情形见[85], 13 页).

19 空间的构造：球状复形

现在我们考虑构造拓扑空间的一个重要技巧，并且对这样构造的空间，我们将推导计算它的同调模的公式. 这一方法对所有常见的空间都适用，诸如射影空间、紧曲面等等.

设我们已知一空间 X 的子空间 A 及 A 到一空间 Y 的映射 f. 在 X 和 Y 的不交并 $X \amalg Y$(带着明显的拓扑)中把每一点 $x \in A$ 叠合于它的像 $f(x) \in Y$. $X \amalg Y$ 按这些叠合确定的等价关系所得到的商空间 $Z = X \cup_f Y$ 叫做系统

$$X \supset A \xrightarrow{f} Y$$

的附加空间. 很明显商映射 g: $X \amalg Y \to Z$ 把 Y 同胚地映到 Z 的一个子空间上；我们将把 Y 等同于这个子空间. 如 $\bar{f}$: $X \to Z$ 是 g 在 X 上的限制，则根据我们的等同，$\bar{f} | A = f$.

在以后，我们将只关心满足以下条件的偶(X, A)：

(1) X 是豪斯道夫空间

(2) A 是 X 中闭集

(3) $X-A$ 中的点可以同 A 分离，即对任何 $x\in X-A$ 都存在不交开集 U, V 使得 $x\in U$ 而 $A\subset V$.

(4) A 在 X 中有一加领 B, 即存在 A 在 X 的一个开邻域 B 使得 A 是 B 的一个强形变收缩核，且 $A\neq B$.

在这种情形，我们说 (X, A) 是一加领偶.

(19.1) **例** (E^n, S^{n-1}) 是一加领偶(13.14). 在这一情形，空间 $Z=E^n\cup_f Y$ 被说成是在 Y 上通过 f 添加 n 维胞腔而成.

(19.2) **例** 更一般地说，如 X 是任一带边流形(第 28 节)，而 A 是它的边缘，则 (X, A) 是一加领偶. 实际上，A 有一开邻域 B 满足 (B, A) 同胚于 $(A\times[0, 1), A\times 0)$. (证明见 Brown[10] 或 Vick[75].)

(19.3) **命题** 已知一加领偶 (X, A) 及一映射 $f: A\to Y$, 这里 Y 是豪斯道夫空间. 令 $Z=X\cup_f(Y)$. 于是 (Z, Y) 是一加领偶，实际上，如 B 是 A 的一个加领，则 $Y\cup\bar{f}(B)$ 是 Y 的一个加领. 此外，$\bar{f}$ 把 $X-A$ 同胚地映到 $Z-Y$ 上.

一个偶到偶的映射 $f: (X, A)\to(Y, B)$ 如把 $X-A$ 同胚地映到 $Y-B$ 上就叫做一个相对同胚.

证明 因 $g^{-1}(Z-Y)=X-A$ 在 $X\amalg Y$ 中是开的，从而 $Z-Y$ 是开的，Y 是闭的，且 $\bar{f}$ 把 $X-A$ 同胚地映到 $Z-Y$ 上. 设 B 为 A 在 X 中的一个加领. 因 $B\amalg Y$ 在 $X\amalg Y$ 中开，且在等价关系下饱和，$Y\cup\bar{f}(B)$ 在 Z 中开. 设 $D: B\times I\to B$ 为一映射满足对所有 $a\in A$, $D(a, t)=a$, 对所有

$$b\in B,\ D(b, 0)=b,\ D(b, 1)\in A.$$

在 $(Y\cup\bar{f}(B))\times I$ 上定义一映射 $\bar{D}$ 如下:

$$\bar{D}(z, t)=\begin{cases} z & \text{如 } z\in Y, \\ \bar{f}(D(b, t)) & \text{如 } z=\bar{f}(b) \text{ 而 } b\in B-A. \end{cases}$$

因为 $\bar{D}$ 是从 $(B\amalg Y)\times I$ 上的一个连续映射过渡到商得来的，所以

它连续，且 $\overline{D}$ 显示出 Y 是 $Y\cup\overline{f}(B)$ 的一个强形变收缩核. 设

$$z\in Z-Y,\quad z=\overline{f}(x).$$

令 U, V 为 X 中不交开集使得 $x\in U$, $A\subset V$. 于是不交 Z-开集 $Y\cup\overline{f}(V)$ 和 $\overline{f}(\overline{U})$ 把 z 与 Y 分离. 这样条件(3)满足.

以下证明 Z 是豪斯道夫空间. 已知 z_1, z_2 为两个不同点，有以下三种情形.

情形 1 两个都在 $Z-Y$ 中. 因 $Z-Y$ 是开集且同胚于 $X-A$，而后者是豪斯道夫空间，从而两点可以分离.

情形 2 一个点在 Y 中，另一点在 Y 外. 这一情形可从条件(3)推出.

情形 3 两个点都在 Y 中. 设 Y_1, Y_2 分离 z_1 和 z_2 的不交 Y-开集. 令 $r: B\to A$ 为一收缩，且令 $B_i=r^{-1}(f^{-1}(Y_i))$, $i=1, 2$. 于是 B_i 是 X 中开集，而 $Y_1\cup\overline{f}(B_1)$ 和 $Y_2\cup\overline{f}(B_2)$ 就是分开 z_1 和 z_2 的不交 Z-开集. □

(19.4)**练习** 反过来，设 Y 是豪斯道夫空间 Z 的一个闭子空间. $\overline{f}: E^n\to Z$ 为一映射它把 S^{n-1} 映入 Y 而把开 n 维胞腔 $\mathring{E}^n$ 同胚地映射到 $Z-Y$ 上. 于是 Z 就是在 Y 上通过 $\overline{f}|S^{n-1}$ 粘附一 n 维胞腔而成. (利用 $\overline{f}$ 是闭映射的事实.)

定义 从一有限离散点集开始，逐步粘附胞腔，维数可能不同，而数目有限. 这样我们得到一个紧豪斯道夫空间，并且任何一个可以这样得到的空间叫做一个**球状复形**. 我们将求得球状复形同调的一些显式归纳公式(19.16—19.18).

几个例子：

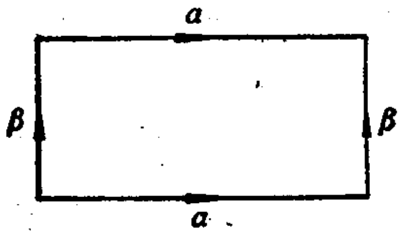
(19.5) 设 f 把 S^{n-1} 映到一个点 Y 上. 于是 $Z\approx S^n$.

(19.6) 设 $Y=S^{n-1}$, $f: S^{n-1}\to Y$ 为恒等映射，则 $Z=E^n$.

(19.7) 设 $Y=S^1$, $f: S^0\to Y$ 是到一点 P 上的常值映射. 则 Z 为有一公共点 P 的两个圆周. 重复这一运算$(r-1)$次(对同一

点 P)给出 r-叶玫瑰线 G_r(17.12).

(19.8) 设 $Y=G_2$, 用 α 和 β 记两个闭路. 把 E^2 看成 I^2, S^1 看成正方形的周界. 以下图表描绘出一个映射 f 把一个 2 维胞腔粘附到 G_2 上:



于是 Z 同胚于一个环面(利用(19.4)及平面到环面上的标准映射在一正方形上的限制).

(19.9) 每一个图(17.12)都是在一有限集上粘附 1 维胞腔而成.

我们已把实 n 维射影空间 $\boldsymbol{P}^n$ 定义为叠合球面 S^n 的对径点得到的商空间. 我们现在类似地定义复 n 维射影空间 $\boldsymbol{CP}^n$: 在复 $(n+1)$ 维空间 $\boldsymbol{C}^{n+1}$ 中, 考虑由 $|z|=1$(这里若 $z=(z_0, \cdots, z_n)$, 我们定义 $|z|^2=|z_0|^2+\cdots+|z_n|^2$)确定的子空间; 很清楚这就是 S^{2n+1}. 我们在 S^{2n+1} 上规定等价关系 $z\sim z' \Leftrightarrow z'=cz$, 这里 c 是模为 1 的复数; 叠合等价点得到的商空间叫复 n 维射影空间并记作 $\boldsymbol{CP}^n$; 注意映射 $f: S^{2n+1}\to \boldsymbol{CP}^n$ 的纤维是圆周. (对 $n=1$, $\boldsymbol{CP}^1\approx S^2$, 且 f 就是 Hopf 映射(Hu[33], 66 页).)我们断言:

(19.10) **命题** $\boldsymbol{CP}^n(\boldsymbol{P}^n)$ 是从 $\boldsymbol{CP}^{n-1}(\boldsymbol{P}^{n-1})$ 通过标准映射 $f: S^{2n-1}\to \boldsymbol{CP}^n(f: S^{n-1}\to \boldsymbol{P}^{n-1})$ 粘附一个 $2n$ 维胞腔(n 维胞腔)得到.

证明 我们给出 $\boldsymbol{CP}^n$ 的证明而把 $\boldsymbol{P}^n$ 的证明留作练习. 在以下图表中

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \hookrightarrow & E^{2n} \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{f} \\ \boldsymbol{CP}^{n-1} & \xrightarrow{i} & \boldsymbol{CP}^n \end{array}$$

i 是映射 $[z_1, \cdots, z_n] \to [0, z_1, \cdots, z_n]$. 我们定义 f 的扩张 $\bar{f}$ 为

$$\bar{f}(z) = [\sqrt{1-|z|^2}, z_1, \cdots, z_n]$$

这里 $z=(z_1, \cdots, z_n) \in E^{2n} \subset C^n$, $|z| \leqslant 1$. 设 $|z|<1$ 且设 $w \in E^{2n}$, $|w| \leqslant 1$. 如 $\bar{f}(z)=\bar{f}(w)$, 则

$$(\sqrt{1-|z|^2}, z_1, \cdots, z_n) = e^{i\theta}(\sqrt{1-|w|^2}, w_1, \cdots, w_n).$$

因为左边第 0 个坐标是实数 >0, 而 $1-|w|^2$ 是实数 $\geqslant 0$, 我们必须有 $e^{i\theta}=1$, $z=w$. 这样 $\bar{f}$ 限制于开胞腔 $\mathring{E}^{2n}$ 是单射, 且它的像很清楚就是 $\boldsymbol{CP}^n - \boldsymbol{CP}^{n-1}$. 此外, $\bar{f}$ 是 E^{2n} 到 $\boldsymbol{CP}^n$ 中的闭映射, 从而它在 $\mathring{E}^{2n}$ 上的限制是到 $\boldsymbol{CP}^n - \boldsymbol{CP}^{n-1}$ 上的闭映射, 就是说是一同胚. 根据(19.4), 证完. □

(19.11) **评注** 我们知道 $\boldsymbol{P}^n$ 以 S^n 覆盖空间, 从而是一紧的连通的 n 维流形. 我们断言 $\boldsymbol{CP}^n$ 是一紧的连通的 $2n$ 维流形. 因为它是 S^{2n+1} 的连续像, 它是紧且连通的, 现在 $\bar{f}(\mathring{E}^{2n})$ 是一开 $2n$ 维胞腔. 但 $\boldsymbol{CP}^n$ 的其它点局部上看是一样的, 因为 $\boldsymbol{CP}^n$ 是齐性的, 即任给两点 x, y, 总存在 $\boldsymbol{CP}^n$ 到自身的同胚把 x 映到 y. 令 $x=f(x')$, $y=f(y')$, x', $y' \in S^{2n+1}$. 于是存在 $\boldsymbol{C}^{n+1}$ 的满秩线性变换 λ 把 x' 映到 y', 因为 λ 和复数乘法可交换, 过渡到商给出所期望的 $\boldsymbol{CP}^n$ 的同胚(射影变换)(我们把 $\boldsymbol{CP}^n$ 看成挖去原点的 $\boldsymbol{C}^{n+1}$ 的商空间).

(19.12) **练习** 设 p, q 为两个正的互素整数. 映射

$$h: (z_0, z_1) \to e^{2\pi i/p} z_0, \ e^{2\pi i q/p} z_1)$$

是 S^3 到自身的一个同胚, 它的 p 次幂是恒等映射. 这给出 $\boldsymbol{Z}/p$ 在 S^3 上的一个纯不连续作用(5.10). 由这一作用得到的商空间用 $L(p, q)$ 表示, 它也是一个紧的连通的 3 维流形, 并且可以证明是一个球状复形(Artin[3], 162 页)或参看(21.27). 从这里可以确定它的同调(我们知道它的基本群是 $\boldsymbol{Z}/p$). 这些"透镜空间"是一个重要的例子源泉, 例如 $L(7, 1)$ 和 $L(7, 2)$ 同伦等价而不同胚

(见 Hilton 和 Wylie[30]，225 页)．庞加莱一个尚未证明的猜想断言紧 3 维流形同伦等价于 3 维球一定同胚于 3 维球．（S^n 代替 S^3 的同样断言对 $n\geqslant5$ 已先后为 Smale[51]，Stallings[54a]和 Newman[«数学纪事»1966，555—571 页]证明.）

(19.13)**练习**　利用四元数除环 $\boldsymbol{H}$ 代替 $\boldsymbol{C}$，构造四元数射影空间 $\boldsymbol{HP}^n$．证明它是一紧的 $4n$ 维流形，以 3 维球为纤维的 S^{4n+3} 的商空间，且 $\boldsymbol{HP}^n$ 是从 $\boldsymbol{HP}^{n-1}$ 经由添加 $4n$–胞腔得到．$\boldsymbol{HP}^1\approx S^4$ 且我们得到另一 Hopf 映射 $S^7\to S^4$．它以 S^3 为纤维．（我们也可利用凯莱数构造 $8n$ 维流形且对 $n=1$ 得到以 7 维球为纤维的 Hopf 映射 $S^{15}\to S^8$；见 Steenrod[55]，105—110 页.）

现在假设 Z 是一系统 $X\supset A\xrightarrow{f}Y$ 的附加空间，而 $\bar f\colon X\to Z$ 是 f 的标准扩张．于是 $\bar f$ 导出偶 $(X,\ A)$ 的同调序列到偶 (Z, Y) 的同调序列的一个同态．

(19.14)**定理**　假设 $(X,\ A)$ 为一加领偶．则

$$H_q(\bar f)\colon H_q(X,\ A)\to H_q(Z,\ Y)$$

对所有 q 为一同构．

证明　设 B 为 A 在 X 中的加领．考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc}H_q(X,\ A) & \xrightarrow{i} & H_q(X,\ B)\\ f_1\downarrow & & \downarrow f_2\\ H_q(Z,\ Y) & \xrightarrow[j]{} & H_q(Z,\ Y\cup\bar f(B))\end{array}$$

这里水平同态是由包含导出而垂直同态是由 $\bar f$ 导出．我们将证明 $i,\ j,\ f_2$ 都是同构，从而 f_1 也是．

先考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc}H_q(X-A,\ B-A) & \to & H_q(X,\ B)\\ f_3\downarrow & & \downarrow f_2\\ H_q(Z-Y,\ \bar f(B-A)) & \to & H_q(Z,\ Y\cup\bar f(B))\end{array}$$

其中水平箭头是切除而 f_3 由同胚导出，所以都是同构，从而 f_2 也

$$\begin{array}{ccc}H_q(X,A) & \xrightarrow{i} & H_q(X,B)\\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ H_q(Z,Y) & \xrightarrow[j]{} & H_q(Z,Y\cup\bar{f}(B))\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}H_q(X-A,\ B-A) & \longrightarrow & H_q(X,B)\\ {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ H_q(Z-Y,\bar{f}(B-A)) & \longrightarrow & H_q(Z,Y\cup\bar{f}(B))\end{array}$$

是. 要看出 i(相应地 j)是同构, 我们利用 A(相应地 Y)是 B(相应地 $Y\cup\bar{f}(B)$ (19.3))的形变收缩核这一事实. 这蕴涵着我们有一交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc}H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,\ A) & \to & H_{q-1}(A) & \to & H_{q-1}(X)\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ H_q(B) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,\ B) & \to & H_{q-1}(B) & \to & H_{q-1}(X)\end{array}$$

其中外面四个垂直箭头是同构而水平线正合. 结果从五项引理(14.7)推出. □

(19.15) 对以下梯子应用 Barratt-Whitehead 引理 (17.4)

$$\begin{array}{ccccccccccc}\to & H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,\ A) & \to & H_{q-1}(A) & \to & H_{q-1}(X) & \to\cdots\\ & {\scriptstyle H_q(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_q(\bar{f})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow & & \downarrow & \\ \to & H_q(Y) & \to & H_q(Z) & \to & H_q(Z,\ Y) & \to & H_{q-1}(Y) & \to & H_{q-1}(Z) & \to\cdots\end{array}$$

得到一个 Mager-Vietoris 正合序列

$$\cdots\to H_q(A)\to H_q(Y)\oplus H_q(X)\to H_q(Z)\to H_{q-1}(A)\to\cdots$$

这一序列将在许多计算中加以利用.

现在考虑添加 n 维胞腔$(X,\ A)=(E^n,\ S^{n-1})$这一特别情形, 我们知道

$$\partial:\ H_q(E^n,\ S^{n-1})\to H^*_{q-1}(S^{n-1})$$

对所有 q 为一同构(14.3). 利用交换图表

$$\begin{tikzcd} H_q(E^n,S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^*_{q-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "H_{q-1}(f)"] \\ H_q(Z,Y) \arrow[r] & H^*_{q-1}(Y) \end{tikzcd}$$

我们可以在偶(Z, Y)的同调序列中把相对同调模换掉而得到正合序列

$$\to H_q(Y)\to H_q(z)\to H^*_{q-1}(S^{n-1})\xrightarrow[H_{q-1}(f)]{} H^*_{q-1}(Y)\to H^*_{q-1}(Z)\to.$$

因为除 $q=n$ 外 $H^*_{q-1}(S^{n-1})$是零，此序列产生以下公式.

推论 我们有

(19.16) $H^*_q(Z)\cong H^*_q(Y)$ 对 $q\neq n$ 和 $q\neq n-1$

(19.17) $H^*_{n-1}(Z)\cong H^*_{n-1}(Y)/\mathrm{Im}\, H_{n-1}(f)$

(19.18) 正合序列

$$0\to H^*_n(Y)\to H^*_n(Z)\xrightarrow{\psi}\text{Kernel } H_{n-1}(f)\to 0$$

(19.19)**评注** 如 $\mathrm{Ker}H_{n-1}(f)$是一自由模，这一正合序列可裂从而我们有

$$H^*_n(Z)\cong H^*_n(Y)\oplus \mathrm{Ker}\, H_{n-1}(f)$$

(“可裂”是说存在一同态$\mathrm{Ker}\, H_{n-1}(f)\to H^*_n(Z)$，它是 ψ 的右逆.)例如，在 $R=\boldsymbol{Z}$ 或 $R=$一个域时，这种情形将出现，因为这时 Ker $H_{n-1}(f)$将是一自由模.

(19.20)**推论** 设 R 为一诺特环. 如 Z 是一球状复形，则对每一个 q, $H_q(Z)$是一有限生成 R-模. 如 n 是用以构造 Z 的胞腔的最高维数，则对 $q>n$, $H_q(Z)=0$.

这可以从前面的公式对粘附上的胞腔的个数进行归纳推出. □

如果我们取

$$Z=\bigcup_{i=0}^{\infty}C_i$$

这里对 $i>0$, C_i 是圆心在原点, 半径为 $1/i$ 的圆周, C_0=原点. 我们得到一紧豪斯道夫空间, 它不是一球状复形, 因为 $H_0(Z)$ 不是有限生成.

(19.21) **定理** 复射影空间的同调如下

$$H_q(\boldsymbol{CP}^n)\cong\begin{cases}0 & q>2n \text{ 或 } q \text{ 为奇数,}\\ R & q \text{ 为偶数且 } 0\leqslant q\leqslant 2n.\end{cases}$$

证明 对 $n=0$, 它是一个点的同调. 对 n 进行归纳. 我们从 $\boldsymbol{CP}^{n-1}$ 经由粘附 $2n$ 维胞腔得 $\boldsymbol{CP}^n$. 根据(19.16)我们只需要考虑 $q=2n$ 和 $q=2n-1$. 根据(19.17), $H_{2n-1}(\boldsymbol{CP}^n)=0$, 因为

$$H_{2n-1}(\boldsymbol{CP}^{n-1})=0.$$

根据(19.18),

$$H_{2n}(\boldsymbol{CP}^n)=\operatorname{Ker} H_{2n-1}(f),$$

这里 $f: S^{2n-1}\to\boldsymbol{CP}^{n-1}$ 是标准映射. 因为 $H_{2n-1}(f)$ 是零同态, 我们得到 $H_{2n}(\boldsymbol{CP}^n)\cong R$. □

(19.22) **练习** 计算四元数射影空间(19.13)的同调.

(19.23) **定理** 设 $f: S^n\to\boldsymbol{P}^n$ 为标准映射. 如 n 为偶数,

$$H_n(f)=0.$$

如 n 为奇数, 则存在同构

$$H_n(\boldsymbol{P}^n)\cong R\cong H_n(S^n)$$

使得在此同构下 $H_n(f)$ 是乘以 2, 即下图可交换.

证明 $\boldsymbol{P}^n$ 是从 $\boldsymbol{P}^{n-1}$ 经由标准映射 f: $S^{n-1}\to\boldsymbol{P}^{n-1}$ 粘贴 E^n 得到的. 从而

$$\bar{f}: (E^n, S^{n-1})\to(\boldsymbol{P}^n, \boldsymbol{P}^{n-1})$$

导出同调的同构(19.14). 考虑从 f: $(S^n, S^{n-1})\to(\boldsymbol{P}^n, \boldsymbol{P}^{n-1})$ 得

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\times 2} & R \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(\mathbf{P}^n) \end{array}$$

到的梯子

(19.24)

$$\begin{array}{l} 0\to H_n(S^n)\xrightarrow{j} H_n(S^n,\ S^{n-1})\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(S^{n-1})\to 0 \\ \qquad\quad \downarrow f_1 \qquad\qquad \downarrow f_2 \qquad\qquad\qquad \downarrow f_3 \\ 0=H_n(\mathbf{P}^{n-1})\to H_n(\mathbf{P}^n)\xrightarrow{j'} H_n(\mathbf{P}^n,\ \mathbf{P}^{n-1})\xrightarrow{\partial'} H_{n-1}(\mathbf{P}^{n-1}) \\ \qquad\qquad \to H_{n-1}(\mathbf{P}^n)\to 0 \end{array}$$

顶行的零是从(15.5)来的，底行左端的零是从(19.20)及对 n 的归纳来的，底行右端的零是从(15.5)来的．垂直映射由 f 导出．由于代数的理由，上行可裂且正合，但要计算 f_2，我们需要一个和导出映射一致的分裂．主导思想是把 $S^{n-1}\subset S^n$ 压缩成一个点造出 $S^n\vee S^n$，每一个球同胚地映到 $\boldsymbol{P}^n/\boldsymbol{P}^{n-1}$ 上．正合序列使这一想法具体化．根据三元组的长正合序列(14.6)，切除(15.3)，及直和引理(14.13)，我们有一直和分解

(19.25)

$$\begin{array}{ccccc} H_n(S^n,E_n^+) & & & & H_n(S^n,E_n^-) \\ \cong\uparrow & \searrow & & \nearrow & \uparrow\cong \\ & & H_n(S^n,S^{n-1}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ H_n(E_n^-,S^{n-1}) & & & & H_n(E_n^+,S^{n-1}) \end{array}$$

这里 E_n^+，$E_n^-\subset S^n$ 分别是上半球和下半球，令

$$e^{\pm}:\ (E^n,\ S^{n-1})\to(E_n^{\pm},\ S^{n-1})$$

分别是上、下半球向前 n 个坐标射影的逆同胚，在笛卡儿坐标中

$$e^{\pm}(x)=(x, \pm\sqrt{1-|x|}).$$

于是 $$fe^{\pm}: (E^n, S^{n-1})\to(\boldsymbol{P}^n, \boldsymbol{P}^{n-1})$$

由(19.14)和(13.6)导出同调的同构，从而 f_2 为一满同态．映射 fe^+ 和 fe^- 并不相同，令

$$\phi: (E^n, S^{n-1})\to(E^n, S^{n-1})$$

是由 $\phi(x)=-x$ 给出．注意 $\phi|S^{n-1}$ 是对径映射．于是

(19.26)
$$fe^-=fe^+\phi$$

因为 $$e^+\phi(x)=(-x, \sqrt{1-|x|}=-e^-(x).$$

我们现在利用正合序列举出各同调模的生成元.

令 $\iota_n\in H_n(S^n)$，$\iota_{n-1}\in H_{n-1}(S^{n-1})$ 为生成元，且在(15.4)中的同构下互相对应.

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r] & H_n(S^n, E_n^-) & H_n(E^n, S^{n-1}) \arrow[l] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H(e^+)"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \\
 & & H_n(E_n^+, S^{n-1}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

用 $\partial(K)=\iota_{n-1}$ 定义 $K\in H_n(E^n, S^{n-1})$，用 $K^{\pm}=H_n(e^{\pm})(K)$ 定义 $K^{\pm}\in H_n(E_n^{\pm}, S^{n-1})$，用 $\eta=f_2(K^+)$(*)定义 $\eta\in H_n(\boldsymbol{P}^n/\boldsymbol{P}^{n-1})$．根据构造 η 生成 $H_n(\boldsymbol{P}^n, \boldsymbol{P}^{n-1})$．根据(19.25)我们把 $K^{\pm}$ 看成 $H_n(S^n, S^{n-1})$ 的被加项的生成元．我们下一步计算(19.24)中的映射.

(a) $j(\iota_n)=(K^+, -K^-)$.

由自然性(14.5)，在(19.24)的顶行中 $\partial(K^{\pm})=\iota_{n-1}$. 所以 $\ker\partial$ 的一个生成元是 $(K^+, -K^-)$．由正合性 $j(\iota_n)=m(K^+, -K^-)$，$m\in \boldsymbol{R}$．在(19.25)的右上角进行计算(且不言而喻地把同构的群等同起来)得 $mK^+=K^+$ 或 $m=1$.

(b) $f_2(K^-)=(-1)^n\eta$.

(*) 原文误作 $f_2(K^{\pm})$——译者

$$f_2(K^-)=H(fe^-)(K)=H(fe^+\phi)(K)=(-1)^nH(fe^+)(K)$$
$$=(-1)^nf_2(K^+),$$ 这里利用了(19.26)和(16.4). 结合(a)和(b)得到$f_2j(\iota_n)=(1+(-1)^{n+1})\eta$[(*)].

当n是偶数时,$f_2j(\iota_n)=0$. 由于j'是单射,$H_n(f)=f_1$是零映射. 当n是奇数时,我们得到$\partial'=0$,因为f_2是满射而

$$f_3=H_{n-1}(f)=0.$$

所以j'是一同构而$H^n(\boldsymbol{P}^n)\cong R$由$(j')^{-1}(\eta)$生成. 于是

$$H_n(f)(\iota_n)=f_1(\iota_n)=(j')^{-1}f_2j(\iota_n)=2(j')^{-1}\eta.$$

(19.27) **定理** 实射影空间的同调如下

$$H_q(\boldsymbol{P}^n)\cong\begin{cases}0 & q>n,\\ R_2 & q\text{ 为偶数且 }1<q\leqslant n,\\ R/2 & q\text{ 为奇数且 }1\leqslant q\leqslant n-1,\\ R & q=0\text{ 及 }q=n\text{ 而 }n\text{ 为奇数时}\end{cases}$$

(这里R_2是R中2倍为零的元素构成的子模).

这样系数在有理数域中的同调完全不同于系数在特征为2的域中的同调.

证明 对n进行归纳,$n=0,1$是平凡的($\boldsymbol{P}^1\cong S^1$). 从(19.16)对$q\leqslant n-2$我们有$H_q(\boldsymbol{P}^n)\cong H_q(\boldsymbol{P}^{n-1})$, 而由(19.20)对$q>n$, $H_q(\boldsymbol{P}^n)=0$.

由(19.18)我们有一正合序列

$$0\to H_n(\boldsymbol{P}^n)\to H_{n-1}(S^{n-1})\xrightarrow{H_{n-1}(f)}H_{n-1}(\boldsymbol{P}^{n-1})$$
$$\to H_{n-1}(\boldsymbol{P}^n)\to 0.$$

如n为偶数, 中间的映射是乘以2, 所以$H_n(\boldsymbol{P}^n)\cong R_2$, 而$H_{n-1}(\boldsymbol{P}^n)\cong R/2R$. 如$n$为奇数,中间的映射是0,所以$H_n(\boldsymbol{P}^n)\cong R$,而$H_{n-1}(\boldsymbol{P}^n)\cong R_2$. □

评注 注意按照(19.24)并分析压缩$S^{n-1}\subset S^n$,对$R=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$,

(*) 原文为$(1+(-1)^n)\eta$, 误——译者.

结果立即可得，因这样一来 $H_n(f)$ 对所有 n 都是 0 映射.

(19.28) **例** 对 $R=\boldsymbol{Z}$ 我们得到

$$H_q(\boldsymbol{P}^2)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & q=0,\\ \boldsymbol{Z}/2 & q=1,\\ 0 & q\geqslant 2,\end{cases}$$

$$H_q(\boldsymbol{P}^3)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & q=0,\\ \boldsymbol{Z}/2 & q=1,\\ 0 & q=2,\\ \boldsymbol{Z} & q=3,\\ 0 & q\geqslant 4.\end{cases}$$

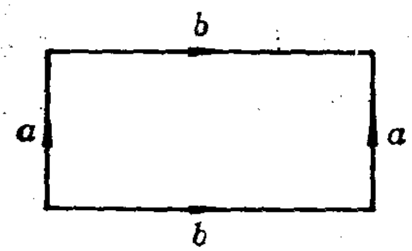
并依此类推. 对 $R=\boldsymbol{Z}/2$ 我们得到

$$H_q(\boldsymbol{P}^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}/2 & q\leqslant n,\\ 0 & q>n.\end{cases}$$

(19.29) **定理** 环面 T 的同调是

$$H_q(T)\cong\begin{cases}R & q=0 \text{ 和 } q=2,\\ R\times R & q=1,\\ 0 & q>2.\end{cases}$$

证明 T 是从 $Y=G_2$ 通过以下指出的映射粘附 2 维腔得胞到



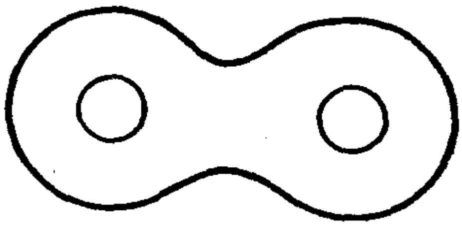
这里标号 a, b 的边分别映到 G_2 的闭路 a, b 上（因为我们知道单位正方形 I^2 经由

$$\phi:\ (x,\ y)\to(e^{2\pi ix},\ e^{2\pi iy})$$

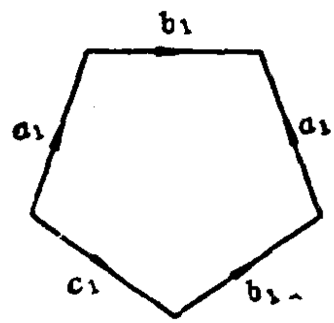
映射到 T 上，正是以上叠合方式）. 现在 $H_1(G_2)$ 是由闭路 $\phi\cdot a$, $\phi\cdot b$ 的同调类 α, β 生成的自由 R-模(17.12)，且粘附映射 f: $S^1\to$

G_2 把 $H_1(S^1)$ 的生成元送到 $\alpha+\beta-\alpha-\beta=0$ 上，所以 $H_1(f)$ 是一零同态. 定理可从(19.16—19.18)推出，试和(17.13)比较.

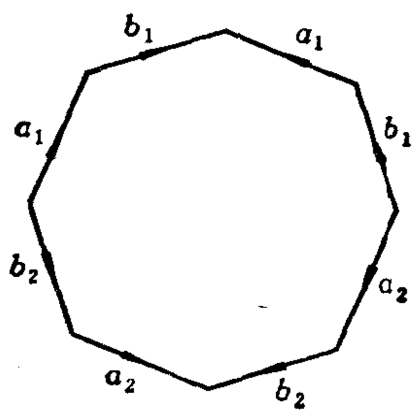
(19.30)例　考虑双环面



我们可以这样设想，从环面的两个复制品中每个挖去一个小的开的 2 维圆盘，并沿这两个圆盘的边缘圆把它们粘合起来. 现挖去开 2 维圆盘后环面可表示如下：



把多边形的边按图中标明的字母叠合，闭路 c_1 就是挖去的圆盘的边界、在和另一复制品粘合时，两个 c_1 将消去而我们得到

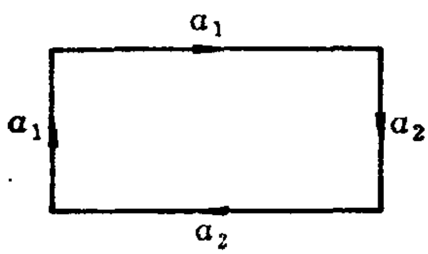


这样我们可以把双环面确切地描述为从 G_4 经由一个八边形的周界的映射粘上一个 2 维胞腔而成，此映射由式子 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2\cdot a_2^{-1}b_2^{-1}$ 描述．更一般地，经由一个 $4g$ 边形的周界的映射把一个 2 维胞腔粘到一个 G_{2g} 上，此周界由 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ 描述，给出 g **折环面** T_g．像在(19.26)中那样进行计算得

$$H_q(T_g)\cong\begin{cases} R & q=0 \text{ 或 } q=2, \\ R^{2g} & q=1, \\ 0 & q>2. \end{cases}$$

数目 g 叫 T_g 的**亏格**．

(19.31)**例**　我们从射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ 开始并把它"二倍起来"，像对环面那样，我们得到一个曲面可描述为：经由正方形周界的由式子 $a_1^2a_2^2$ 描述的映射把一个 2 维胞腔粘到 G_2 上而成



更一般地说，通过由式子 $a_1^2\cdots a_h^2$ 描述的映射把 $2h$ 边形粘到一个 G_h 上得到一曲面 U_h($U_1=\boldsymbol{P}^2$)．于是 U_h 的同调如下

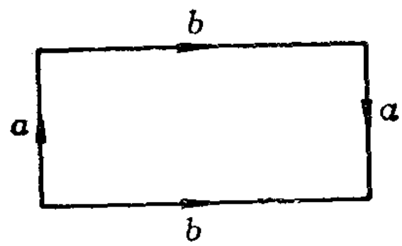
$$H_q(U_h)\cong\begin{cases} R & q=0, \\ R^{h-1}\times R/2 & q=1, \\ R_2 & q=2, \\ 0 & q>2 \end{cases}$$

(要看出这一点，注意同态

$$H_1(f):\ H_1(S^1)\to H_1(G_h)\cong R^h$$

把 $H_1(S^1)$ 的一个生成元映成 $2(\bar{a}_1+\cdots+\bar{a}_h)$，这里 $\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_h$ 是 $H_1(G_h)$ 的自由生成元. 这一同态的余核同构于 $R^{h-1}\times R/2$，因为我们可以取 $\bar{a}_1+\cdots+\bar{a}_h, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_h$ 为自由生成元，而核为 R_2.）

(19.32) **练习** **克莱茵瓶**是把一个柱面的两端扭转 180° 粘合而成，即如下粘合而成



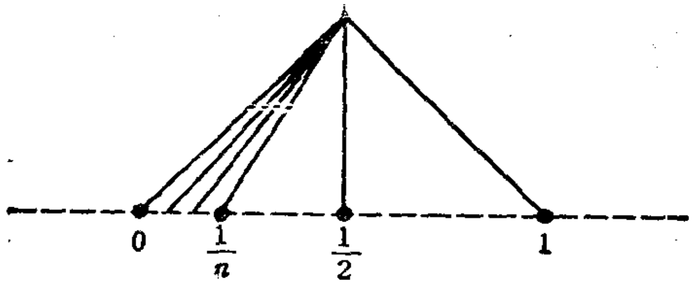
证明它同胚于空间 U_2（这两个空间都可以由沿一条边粘合两个三角形构造出来，但粘合的方式不同）.

(19.33) **练习** 证明如果环面粘合到射影平面上（用和粘合两个环面得到双环面相同的方法）得到的曲面同胚于 U_3.

(19.34) **注** 每个紧的连通的 2 维流形或者同胚于 S^2，或者同胚于一个 T_g，或者同胚于一个 U_h. 这是一个非凡的定理（见 Ahlfors 和 Sario[2]；证明用到可三角剖分性及 Jordan-Schoenflies 定理）. 明显地这当中没有任何两个同胚（从它们的同调群来看），所以这就得到了这些曲面的一个完全的分类. 对三维的情形还不知道任何一个这样的分类，而 Markov 证明在维数 $\geqslant 4$ 这是不可能的，因为导致的 π_1 的分类将解决群的字的问题，和 Novikov-Boone 定理相矛盾（见 Massey[67]，144 页）.

(19.35) **例** 如从一球状复形中挖去一个点，所得空间有有限多个道路连通区（对粘上的胞腔的个数进行归纳）. 所以以下画出的紧的道路连通空间不是一球状复形.

除去添加 n 维胞腔的情形以外我们还可以把定理(19.14)应用于许多其它情形. 假设 (X, A) 是一加领偶，设 P 是一点，



$f: A \to P$是常值映射. 于是系统 $X \supset A \xrightarrow{f} P$ 的附加空间正是把 A 压缩成一个点所得的商空间 X/A. 由(19.14), 我们有正合序列

$$\to H_q(P) \to H_q(X/A) \to H_q(X, A) \to H^*_{q-1}(P) \to.$$

因为一个点的约化同调是零, 我们得到以下结果.

(19.36) **命题** 如(X, A)为一加领偶, 则把 A 压缩成一个点得到的空间 X/A 为一豪斯道夫空间, 其中特选点有一可点缩开邻域. 此外, 对所有 q 存在一标准同构

$$H^*_q(X/A) \cong H_q(X, A)$$

所以我们得到一正合序列

$$\to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X/A) \to H^*_{q-1}(A) \to H^*_{q-1}(X) \to$$

(19.37) **例** 参看(15.24). 设 X 为一豪斯道夫空间. 在空间 $X \times I$ 中把闭子空间 $X \times \{0\}$压缩成一个点而把 $X \times \{1\}$压缩成另一个点. 在这些压缩下商空间 SX 叫做 X 的**(非约化)双角锥**. 例如, $S(S^n) \approx S^{n+1}$. 两次应用前面的命题, 我们得到

$$H_q(SX) \cong \begin{cases} H_{q-1}(X) & q>0, \\ R & q=0. \end{cases}$$

(19.38) **例** 参看(17.17). 设(X, x), (Y, y)为带基点豪斯道夫空间, 其中点 x, y 都有可点缩开邻域(如流形的情形). 则偶$(X \amalg Y, x \amalg y)$是加领的. 叠合 x 和 y 得到的商空间 $X \vee Y$ 叫 X 和 Y 在 x 和 y 的楔和或球束. 利用前面的命题, 我们得到

$$H_q(X \vee Y) \cong \begin{cases} H_q(X) \oplus H_q(Y) & q>0, \\ R^{c+d-1} & q=0, \end{cases}$$

这里 c 是 X 的道路连通区的个数而 d 是 Y 的道路连通区的个数.

(19.39)**例** 假设一豪斯道夫空间 Z 是两个闭子空间 X 和 Y 的并,且假设 (X, A) 是一加领偶,这里 $A=X\cap Y$. 于是

$$Z=X\cup_f Y,$$

这里 $f: A\to Y$ 是包含映射,且(19.14)和(19.36)给出正合序列

$$\to H_q(Y)\to H_q(X\cup Y)\to H_q(X/X\cap Y)\to H^*_{q-1}(Y)\to$$

试把这一结果和关于 $\pi_1(X\cup Y)$ 的 Van Kampen 定理(14.12)进行比较. 对 $q>0$, 目前没有任何关于 $\pi_q(X\cup Y)$ 的一般性结果.

(19.40)**练习** 证明球的乘积是一球状复形. 提示:令

$$f_n:\ (E^n,\ S^{n-1})\to(S^n,\ pt)$$

为(19.5)中的相对同胚. 于是 $f_n\times f_m$ 把

$$\partial(E^n\times E^m)=S^{n-1}\times E^m\cup E^n\times S^{m-1}$$

映到 $S^n\vee S^m$,而 $E^n\times E^m$ 同胚于 E^{n+m}. 取一同胚 ϕ, 于是 $S^n\times S^m$ 同胚于

$$Z=E^{n+m}\cup_{(f_n\times f_m)\phi}S^n\vee S^m,$$

后者是通过 $(f_n\times f_m)\phi$ 向 $S^n\vee S^m$ 粘上一 $(n+m)$ 维胞腔得到的. 对 k 进行归纳可推广到 k 重乘积.

(19.41)**练习** 利用拓扑学家正弦曲线, (10.13)前的练习及定理(10.13)构造一个相对同胚 $(X,\ A)\to(X/A,\ pt)$ 的例子,使它不导出同调的同构.

以下两个练习利用(19.23)推知关于球的映射的一些事实.

(19.42)**练习** 如 $f: S^n\to S^n$ 对所有 $x\in S^n$ 满足

$$f(-x)=f(x),$$

则 $\deg f$ 是偶数,特别是,如 n 是偶数则 $\deg f=0$.

(19.42)的部分逆命题成立. 如 $\deg f$ 是偶数, 则对某个 $x\in S^n$ 有 $f(-x)=f(x)$. 证明这点要用到(26.13).

(19.43) **练习** 如 $f: S^n \to S^n$ 的映射度为奇数，则对某个

$$x \in S^n, \quad f(-x) = -f(x).$$

提示：假设不然，考虑

$$h(x) = (f(x) + f(-x)) / |f(x) + f(-x)|.$$

利用(19.42).

评注 Borsuk 的一个定理断言对所有

$$x \in S^n, \quad f(-x) = -f(x)$$

蕴涵 $\deg f$ 是奇数(26.25). (19.42)的部分逆可用(26.25)及一个类似于(19.43)的构造来证明.

(19.44) **练习** 证明如 n 是奇数而 $n-k$ 是偶数或 n 是偶数而 $n-k$ 是奇数，则 $\boldsymbol{P}^k$ 不是 $\boldsymbol{P}^n$ 的收缩核. 这一点可只用对 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 的结果作到么？

评注 $\boldsymbol{P}^k$ 不是 $\boldsymbol{P}^n$ 的收缩核，但需要比(19.27)更多的结构来说明问题. 令 $\boldsymbol{P}^n_k$ 是在 $\boldsymbol{P}^n$ 中把 $\boldsymbol{P}^k$ 压缩成一个点得到的空间. $\boldsymbol{P}^n_k$ 的同伦型与 S^n 上向量场问题密切相关[69], [65].

20 Betti 数和 Euler 示性数

如果采用整系数同调论，那么，对于某些空间，诸如球状复形(19.20)，同调群将是有限生成的. 当 A 是有限生成的阿贝尔群时，一个基本定理(见 Lang[35], p. 45)指出，A 中有限阶元形成挠子群 T，并且商群 A/T 为自由阿贝尔群. A/T 中生成元的最小个数称为 A 的**秩**. $H_q(X; Z)$ 的秩称为空间 X 的 q 维 **Betti 数** β_q，X 的 Euler **示性数** $\chi(X)$ 定义为

$$\chi(X) = \sum_q (-1)^q \beta_q$$

只要此和有限，这些数当然都是拓扑不变量.

(20.1) 例 对于 S^n，$\beta_0 = \beta_n = 1$，而其它的所有 $\beta_q = 0$，从而

$$\chi(S^n)=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数时},\\ 2 & n\text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

(20.2)例 对于 r 叶玫瑰线 G_r, $\beta_0=1$, $\beta_1=r$, 其它的 $\beta_q=0$, 从而

$$\chi(G_r)=1-r$$

(20.3)例 对于 $\boldsymbol{CP}^n$(19.21), 当 q 为奇数或者 $q>2n$ 时, $\beta_q=0$, 而当 q 是满足 $0\leqslant q\leqslant 2n$ 的偶数时, $\beta_q=1$, 于是

$$\chi(\boldsymbol{CP}^n)=n+1$$

(20.4)例 对于 $\boldsymbol{P}^n$(19.23), n 为奇数时, 我们有 $\beta_0=1$, $\beta_n=1$, 而对其它的情形 $\beta_q=0$. 因此

$$\chi(\boldsymbol{P}^n)=\begin{cases}1 & n\text{ 为偶数时},\\ 0 & n\text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

(20.5)例 对于 g 折环面 T_g(19.27), $\beta_0=\beta_2=1$, $\beta_1=2g$, 在 $q>2$ 时 $\beta_q=0$. 所以

$$\chi(T_g)=2-2g.$$

(20.6)例 对于曲面 U_h(19.22), $\beta_0=1$, $\beta_1=h-1$, 当 $q\geqslant 2$ 时 $\beta_q=0$, 从而

$$\chi(U_h)=2-h.$$

我们还可以用类似的方式定义偶 (X, A) 的相对 Betti 数和相对 Euler 示性数.

(20.7)引理 在这些数都有定义时, 有

$$\chi(X)=\chi(A)+\chi(X, A)$$

证明 应用正合同调序列, 这个引理便归结为一个纯代数的引理:

(20.8)引理 对于有限生成的阿贝尔群的正合序列

$$0\to A_1\xrightarrow{i_1}A_2\xrightarrow{i_2}\cdots\xrightarrow{i_{r-1}}A_r\to 0,$$

则 $\qquad \operatorname{rank}A_1-\operatorname{rank}A_2+\cdots+(-1)^{r+1}\operatorname{rank}A_r=0.$

证明 对 r 使用归纳法. 在 $r=1, 2$ 时结论显然, 当 $r=3$ 时, 设 $\bar{A}_i$ 是 A_i 模以其挠子群的商群. 于是有导出同态 $\bar{i}_1, \bar{i}_2$, 并从而有导出的自由阿贝尔群序列:

$$0 \to \bar{A}_1 \xrightarrow{\bar{i}_1} \bar{A}_2 \xrightarrow{\bar{i}_2} \bar{A}_3 \to 0,$$

一般来说它不正合(如令 $A_1=2\boldsymbol{Z}$, $A_2=\boldsymbol{Z}$). 不过, 我们有下述事实.

(20.9)**子引理** $\bar{i}_1$ 为单同态, $\bar{i}_2$ 为满同态, 而 $\operatorname{Ker}\bar{i}_2/\operatorname{Im}\bar{i}_1$ 为挠子群.

证明 留作练习.

于是, $\operatorname{rank} A_1=\operatorname{rank}(\operatorname{Ker}\bar{i}_2)$. 现在自由阿贝尔群的正合序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\bar{i}_2 \to \bar{A}_2 \to \bar{A}_3 \to 0$$

分裂, 因此

$$\bar{A}_2 \cong \bar{A}_3 \oplus \operatorname{Ker}\bar{i}_2, \quad \operatorname{rank}\bar{A}_2=\operatorname{rank}\bar{A}_3+\operatorname{rank}(\operatorname{Ker}\bar{i}_2).$$

据定义, $\operatorname{rank} A_i=\operatorname{rank}\bar{A}_i$, 所以引理在 $r=3$ 时已经证明.

在 $r>3$ 时, 考虑正合序列

$$0 \to A_1 \to A_2 \to \operatorname{Im} i_2 \to 0,$$

$$0 \to \operatorname{Im} i_2 \to A_3 \to \cdots \to A_r \to 0.$$

因为每个序列少于 r 项, 从而可以应用归纳法.

(20.10)**推论** 如果 Z 是在 Y 上粘附一个 n 维胞腔而得到的空间, 并且 $\chi(Y)$ 有定义, 则

$$\chi(Z)=\chi(Y)+(-1)^n.$$

证明 由(19.14), 对于每个 q, $H_q(Z, Y)\cong H_q(E^n, S^{n-1})$, 从而根据引理, 我们仅需计算 $\chi(Z, Y)=\chi(E^n, S^{n-1})$. 再次应用引理, $\chi(E^n, S^{n-1})=1-[1+(-1)^{n-1}]=(-1)^n$. □

(20.11)**推论** 设 X 是在 α_0 个点上粘附 α_q 个 q 维胞腔得到

的球状复形，$q=1, \cdots, n$（按任意顺序），那么

$$\chi(X)=\sum_{0}^{n}(-1)^{q}\alpha_{q}$$

这可由(20.10)对 $\sum_0^n \alpha_q$ 使用归纳法得到证明.

(20.12) **练习** X 的 q 维 Betti 数等于有理数域向量空间 $H_q(X; \boldsymbol{Q})$ 的维数. (证明：如果 $z_1, \cdots, z_\beta$ 是带整系数的闭链，它们的同调类构成 $H_q(X; Z)$ 模以挠子群的商群的基，那么，这些闭链的同调类也构成 $H_q(X; \boldsymbol{Q})$ 的基.)

(20.13) **注** 考虑(20.11)的如下特殊情形：取 3 维空间中的正多面体(同胚于 S^2)，把它的表面划分成三角形(或四边形等)，使得如果它们之中两个相交，则交于公共边或公共顶点. 设 F 是面数，E 是边数，V 是顶点数，那么总有

$$V-E+F=2$$

这是 Euler 的一个古老定理，关于这个公式的有趣的历史及其对于领会数学发现的启示，可参阅 I. Lakatos 的《证明和反驳》.

(20.14) **练习** 如果 X, Y 都是球状复形，则 $X\times Y$ 也是，并且

$$\chi(X\times Y)=\chi(X)\chi(Y).$$

例如

$$\chi(S^2\times S^2)=4,$$

$$\chi(\boldsymbol{P}^2\times \boldsymbol{P}^2)=1,$$

等等，这样一些数值足以用来判断某些空间不同伦等价，诸如 $S^2\times S^2$ 和 S^4 等.

(20.15) **练习题** 如果 X 和 Y 都是连通 n 维流形，并有着完全确定的 Enler 示性数，那么 $\chi(X+Y)$ 有定义(见 19.39)，且

$$\chi(X+Y)=\begin{cases}\chi(X)+\chi(Y) & n\text{ 为奇数,}\\ \chi(X)+\chi(Y)-2 & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

(设 $X*Y$ 是不交并 $X\amalg Y$ 迭合 X 和 Y 中的一个小闭 n 维胞腔

得到的空间，据 Mayer-Vietoris 序列，

$$\chi(X*Y)=\chi(X)+\chi(Y)-1.$$

现在，$X*Y$ 是在 $X+Y$ 上粘附一个 n 维胞腔得到的空间，从而可以应用(20.10)。)

(20.16)**注意** 如果 R 为任一主理想整环(PID)，那么，我们所引用的阿贝尔群上的结果都可推广到 R 上的模上(Lang[35]，XV 章，第 2 节)。

这样，我们可以定义 Euler 示性数 $\chi(X;R)$：

$$\chi(X;R)=\sum_q(-1)^q\operatorname{rank}_R H_q(X;R)$$

并且，关于 Euler 示性数的全部结果也都可推广。

(20.17)**例** 对于 $\boldsymbol{P}^n$ (19.18)，

$$\chi(\boldsymbol{P}^n;\boldsymbol{Z}/2)=\begin{cases}0 & n\text{ 为奇数，}\\ 1 & n\text{ 为偶数。}\end{cases}$$

(20.18)**例** 对于曲面 U_h(19.28)，

$$\chi(U_h;\boldsymbol{Z}/2)=2-h.$$

(20.19)**注** 这些例子说明 Euler 示性数 $\chi(X;R)$ 可能与主理想整环 R 无关，在 X 是球状复形时的确如此，因为，与前面相同，可以证明：对所有 R

$$\chi(X;R)=\sum_q(-1)^q\alpha_q$$

实际上，与 R 的无关性对任意空间都成立，这可由万有系数定理推知(见 29.12)。

(20.20)**关于 Euler 示性数的注记**：X 的 Euler 示性数是一个极为有用的不变量，在拓扑学之外它也有许多应用，例如：

(1) 我们已经知道只有奇数维的球面才有非零向量场(16.5)，这些球面的 Euler 示性数为零．现在，我们可以定义任何微分流形 X 上的向量场(Bishop 和 Crittenden[7]；为能讨论切向量，可

微性是必须的). 对紧连通空间 X, 存在非零向量场当且仅当 $\chi(X)=0$(Steenrod[55], p. 201). 于是, 对于紧曲面来说, 只有环面和 Klein 瓶具有非零向量场(作为练习, 给以明确构造).

如果 X 是奇数维紧流形, 那么它总有非零向量场(见(26.10)), 微分几何方法证明, 如果 X 是非紧的, 它总有非零向量场.

(2) 在关于非奇异射影代数簇的 Riemann-Roch 定理中, 一种更一般的 Euler 示性数起着关键性的作用(见 Hirzebruch [31]).

(20.21) **练习** 计算 n 维单形的 2 维骨架的同调群. 提示: 应用(20.11). 并推广到 Δ_n 的 k 维骨架同调群的计算.

21 空间的构造: 胞腔复形和多附加空间

(21.1) 现在考查称为**有限胞腔复形**的一类特殊的球状复形. 这种空间是一个紧 Hausdorff 空间 Z, 含有有限个闭子集 c_j^q (其中 $q=0,1,\cdots$, 表示维数, j 跑遍某个标码集 J_q), 并且具备下述性质: 设

$$Z^q=\bigcup\{c_j^p \mid j\in J_p,\ p\leqslant q\},$$

$$Z^{-1}=\text{空集},$$

并设

$$f_j^q=c_j^q\cap Z^{q-1}$$

则,

(1) 只有在 $p=q$ 和 $i=j$ 时 $c_i^p-f_i^p$ 与 $c_j^q-f_j^q$ 才相交;

(2) $Z=\bigcup\limits_q Z^q$;

(3) 对于每个 c_j^q, 存在映射 ϕ_j^q: $E^q\to Z$, 把 S^{q-1} 映到 f_j^q 上, 把 E^q-S^{q-1} 同胚地映到 $c_j^q-f_j^q$ 上(S^{-1} 为空集).

于是，当 $q>0$ 时，集合 $c_j^q-f_j^q$ 是 q 维开胞腔，并且对所有 q 和 j，这些开胞腔的不交并是 Z（注意，f_j^0 是空集，从而 c_j^0 是 0 维闭胞腔），映射 ϕ_j^q 叫做 c_j^q 的**特征映射**．显然，Z 是在 $(Z-c_i^q)\cup f_i^q$ 上通过映射 $\phi_j^q|S^{q-1}$ 粘附一个 q 维胞腔得到的①，因此 Z 是球状复形．闭子空间 Z^q 叫做 Z 的 q **维骨架**．

(21.2) **例**　在第 19 节中考查过的所有球状复形都是有限胞腔复形．因而，当 $n>0$ 时，

$$\boldsymbol{P}^n=c^0\cup c^1\cup c^2\cdots\cup c^n$$

$$\boldsymbol{CP}^n=c^0\cup c^2\cup c^4\cdots\cup c^{2n}$$

$$\boldsymbol{HP}^n=c^0\cup c^4\cup\cdots\cup c^{4n}$$

$$S^n=c^0\cup c^n$$

$$E^n=c^0\cup c^{n-1}\cup c^n\quad n\geqslant 2$$

$$\boldsymbol{T}_g=c^0\cup c_1^1\cup\cdots\cup c_{2g}^1\cup c^2$$

$$\boldsymbol{U}_h=c^0\cup c_1^1\cup\cdots\cup c_h^1\cup c^2$$

（当然，这些不是不交并！）

(21.3) **例**　把 S^2 看作在它的北极上粘附一个 2 维胞腔得到的空间，这里的粘附映射是将 S^1 映到北极上的常值映射．设 x 为不同于北极的一点，并且通过 S^0 到 x 的常值映射在 S^2 上粘附一个 1 维胞腔．结果，所得到的球状复形 Z 不是一个有限胞腔复形，因为 c^2 的边界 f^2 由 x 和北极组成，从而 c^2-f^2 不是 2 维胞腔．

有限胞腔复形比球状复形优越之处在于我们能够证明下述精采的结果：

(21.4) **定理**　设 X 是有限胞腔复形，$E\xrightarrow{p}X$ 是 d 层覆盖空间（即每一个纤维 $p^{-1}(x)$ 有 d 个点），$d>0$．那么，E 具有有限胞腔复形结构，p 为胞腔式映射，并且

$$\chi(E)=d\chi(X)$$

① 这里 q 是胞腔的最高维数——译者．

(我们称 p 为胞腔式映射，是指对所有 $q\geqslant 0$，p 把 E 的 q 维骨架映入 X 的 q 维骨架．)

证明 对于任意点 $e\in E$，设 $x=p(e)$，则对唯一确定的 q 和 j，$x\in c_j^q-f_j^q$，设 $y=(\phi_j^q)^{-1}(x)$，从而 $y\in E^q-S^{q-1}$，因为 E^q 可以点缩，由提升定理(6.1)，存在唯一的映射 ψ_j^q: $E^q\to E$，满足(1) $\psi_j^q p(y)=e$ 和(2) $p\psi_j^q=\phi_j^q$．显然 p 把 $\psi_j^q(E^q-S^{q-1})$ 一一地映到 $c_j^q-f_j^q$ 上．由于 p 为开映射，ψ_j^q 将 E^q-S^{q-1} 同胚地映到它的象上．

如果固定 x 并令 e 在纤维 $p^{-1}(x)$ 中变动，我们就得到 d 个上述的映射，分别用 $\psi_{i,j}^q$ 表示它们，其中标码 i 跑遍 1 到 d．显然，整个映射组 $\psi_{1,j}^q, \cdots\psi_{d,j}^q$ 仅与 ϕ_j^q 有关，而与点 x 无关．

设 $c_{i,j}^q$ 是 E^q 在 $\psi_{i,j}^q$ 之下的象．那么，这些闭子集在 E 上给出一个有限胞腔复形结构，并且 p 为胞腔式映射．此外，对于每个 q，集合 $c_{i,j}^q$ 的个数是 c_j^q 个数的 d 倍．从而，由(20.11)，$\chi(E)=d\chi(X)$．

注意 即使不假定 X 是有限胞腔复形，公式 $\chi(E)=d\chi(X)$ 也可证明，只是在证明时需要谱序列(见 Spanier[52] 第 9 章)．

(21.5) **注意** 在 Riemann 曲面论中，往往要遇到**分枝覆盖空间** $E\xrightarrow{p}X$．粗略地说，在一个开集 $U\subset X$ 上，$p^{-1}(U)\to U$ 是一个覆盖空间，而在 X-U(**分枝轨迹**)上可以有**分歧**．例如，考虑扩充复平面 S^2 到自身上局部地由 $z\to z^2$ 定义的映射．则分枝轨迹由 0，∞ 两点组成，而在这个集合之外有一个 2 层(非分歧的)覆盖空间．这样，对于分枝覆盖空间，公式(21.4)不再成立．不过，从公式的右端减去一个修正项，此修正项是"分歧指数"的一个函数，便可得到一个正确的公式(关于 $X=S^2$ 的特殊情形，见 Springer[54]，p. 275)．

(21.6) **注意** 欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间 X 叫做(有限)多面

体，如果它可以表示成有限个几何单形的并，使得每两个这种单形的交或为空集或为它们的公共面，(例如，两个相交的 2 维几何单形必须交于它们的一条公共棱或一个公共顶点)．每个这样的表示叫做 X 的一个**三角剖分**．例如，图 (b) 是一个三角剖分，而 (a) 不是.

(a) (b)

空间 X 叫做可(有限)**三角剖分的**(有时叫做**有限单纯复形**，虽然这个术语逐渐地仅用于一个纯代数概念)，如果它同胚于一个(有限)多面体．显然，这样的空间是有限胞腔复形.

对于可三角剖分空间有着计算同调群的系统的组合程序(见 Wallace[59] 第十章)．我们还可以明确地计算紧连通曲面的基本群(Ahlfors 和 Sario[2]，p. 99)，然而，即使三角剖分环面这样简单的曲面，至少也要 7 个顶点，21 条边和 14 个三角形，看来异常复杂．用三角剖分法处理同调论归功于 Poincaré[45]，他于 1895 年开始了整个工作.

设 X 和 Y 都是可剖分空间，映射 $f: X\to Y$ 叫做**单纯映射**(关于给定的三角剖分)，如果 f 在 X 中每个几何单形 s 上的限制是 s 到 Y 中一个几何单形上的仿射映射．可剖分空间的最为重要之处在于：任何映射可用其同伦类中的一个单纯映射(关于适当的三角剖分)来逼近(参阅任何一本经典的书籍).

(21.7) **注意** 为了研究非紧空间，有着几种类型的无限复形可供应用．对于同伦问题，最为有用的一种是 J. H. C. Whitehead

[61]的 **CW-复形**. 它的定义与(21.1)相同，只是 e_j^q 可为无限多个，而 Z 上的拓扑则还要求：Z 中子集 Y 为闭集当且仅当对于所有的 q, j, $Y\cap e_j^q$ 是 e_j^q 的闭集.（这里 e_j^q 带有从 E^q 得到的商拓扑）. 可以证明：对于无论什么样的空间 X, 存在一个 CW 复形 Z 和映射 $f: Z\to X$ 使得：(i) f 导出 Z 和 X 的道路连通分支之间的一一对应；(ii)对于每个 $z\in Z$ 和 $q>0$, 导出同态

$$(f_*)_q: \pi_q(Z, z)\to \pi_q(X, f(z))$$

为一同构.（这样的映射 f 称为**弱同伦等价**.）这就把确定 X 的同伦群的问题归结为确定一个 CW 复形的同伦群的问题，而对于后者，有一些有效的方法可供应用（见 Spanier[52]第 7、8 两章）.

(21.8) **注意** 设 $X=\bigcup\limits_n X^n$ 为胞腔复形，X^n 为 n 维骨架，对于 $n\geqslant 1$ 定义 $C_n=H_n(X^n, X^{n-1})$, $C_0=H_0(X^0)$, 而 $\partial_n: C_n\to C_{n-1}$ 为合成映射：

$$H_n(X^n, X^{n-1})\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1})\to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

那么 $\partial_{n-1}\partial_n=0$, 而且

$$H_n(X)\cong\frac{\operatorname{Ker}\partial_n: C_n\to C_{n-1}}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}: C_{n+1}\to C_n}.$$

证明 应用(19.36), 在 $n\geqslant 1$ 时，

$$H_q(X^n, X^{n-1})\cong \tilde{H}_q^*(X^n/X^{n-1})\cong \tilde{H}_q^*(S^n\vee\cdots\vee S^n).$$

于是，对于所有 n, 只是在 $q=n$ 时，$H_q(X^n, X^{n-1})$ 为非零群. 据(19.20),

$$H_n(X^{n-1})=0$$

和

$$H_n(X^{n+1})\cong H_n(X).$$

把对所有 n 的(X^n, X^{n-1})的长正合序列拼合在一起，并把上面的结果代入，得到图表

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 \to H_n(X^{n-1}) & & & & 0 \to H_{n-1}(X^{n-2}) \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\to H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial'} & H_n(X^n) & \xrightarrow{j} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & & & \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \to & & \\
 & & \downarrow k & & & & \downarrow \\
 & & H_n(X^{n+1}) \to 0 & & & & H_{n-1}(X^n) \to 0
\end{array}
$$

从左上角的 0 到右下角的 0 是一条长正合序列中的一部分．定义

$$\phi: H_n(X^{n+1}) \to \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$$

为
$$\phi = jk^{-1}.$$

由于 k 是满同态 $k^{-1}(x)$(*)是 $\partial' H_{n+1}(X^{n+1}, X^n)$ 的一个傍系，ϕ 是完全确定的．由于

$$H_n(X^{n-1}) = 0,$$

j 为单同态，从而 ϕ 为单同态．因为

$$H_{n-1}(X^{n-2}) = 0,$$

所以
$$\ker \partial_n = \ker \partial = \operatorname{im} j.$$

从而 ϕ 也是满同态，因此 ϕ 是一同构． □

(21.9) 注意　关于同调论的唯一性定理．

Eilenberg-Steenrod[23] 的一个十分重要的发现是同调函子的公理化，奇异同调论就是一个例子．抽象地说，一个同调论是从拓扑空间偶及其映射到 R 模及其同态的一系列函子 $\{H_q\}$，连同一系列自然变换 $\{\partial_q | \partial_q: H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)\}$，使得

a) $\to H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q}$ 为正合序列；

b) 如果 $g, f: (X, A) \to (Y, B)$ 是偶的同伦的映射，则 $H_q(f) = H_q(g)$；

c) 如果 U 是 A 的一个子集，并且 $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$，则包含映射

$$(X-U, A-U) \to (X, A)$$

对所有的 q 都导出同构 $H_q(X-U, A-U) \cong H_q(X, A)$.

(*) 这里 $x \in H_n(X^{n+1})$，原书有误——译者．

当然,除 $H_q(pt)$ 的值外,这正是全部基本定理. Eilenberg 和 Steenrod 证明了

(21.10) **唯一性定理** 如果 H 和 $\overline{H}$ 都是在有限 CW-复形偶范畴上定义的同调论,并且 $\eta: H(pt) \to \overline{H}(pt)$ 为同态,则存在唯一的自然变换 $\overline{\eta}: H \to \overline{H}$,它是 η 的扩张. 特别是,如果 η 是同构,则对所有有限 CW 偶 (X, A), $H_q(X, A) \simeq \overline{H}_q(X, A)$.

这个定理的证明并不困难,基本上是对前面见到的那种骨架使用归纳法. 证明的细节见[23]的 p.100(一个就单纯复形论述的证明.至于就有限 CW 偶论述的证明可参阅[25]的 p. 86).

于是,构造同调论的不同方法对于有限 CW 复形必给出相同的结果,尽管它们对于较一般的空间可以不同.

有些理论满足 a), b), c), 但不同于奇异同调论, 因为它们对单点空间的值不同.其中一种就是 bordism 同调论,由 Thom[57]给出. 它以较之奇异(或单纯)同调论更为直接地解释边缘关系作为直观基础.粗略地说,就是考虑所有映射 $f:(M,\partial M)\to(X,A)$,这里 M 为 n 维流形(紧的),两个这样的映射 f 和 g 等价,是指存在 $n+1$ 维流形 W,使得 $\partial W = M \amalg M$(不交并)和 $F:(W, \partial W)\to(X, A)$,它是 $f \amalg g$ 的扩张. 等价类的集合 $\mathscr{N}_n(X, A)$ 上可以给出阿贝尔群结构,且满足 a), b), c),不过,$\mathscr{N}_n(pt)$ 却由流形的等价类组成. 例如,$\mathscr{N}_2(pt)$ 具有两个等价类 S^2 和 p^2. 请读者查阅 Connev 和 Floyd[15]与 G. W. Whitehead[88].

(21.11) **同调论中的链复形** 链复形在理解同调论上所起的作用已由 Burdik, Conmer 和 Floyd 加以分析, 我们引用他们的结果(*),设 L 是从有限 CW 偶到链复形的共变函子, 即对每个 (X, A) 有链复形 $\{L_n(X, A), \partial\}$,对每个映射

$$f: (X, A)\to(Y, B),$$

(*) 参看 Proc. Amer. Math. Soc. 19(1968), 1115—1118.

有链映射 $\quad L(f):L(X, A)\to L(Y, B)$.

将 $L_n(X, \phi)$ 记作 $L_n(X)$. 假如 L 满足

(1) $\quad 0\to L_n(A)\to L_n(X)\to L_n(X, A)\to 0$

对于所有的偶 (X, A) 都正合,

(2) $h_n(X, A)=\dfrac{\operatorname{Ker}\partial: L_n(X, A)\to L_{n-1}(X, A)}{\operatorname{Im}\partial: L_{n+1}(X, A)\to L_n(X, A)}$

是一个同调论. 那么, 存在自然等价

$$h_n(X, A)\cong\sum_{p+q=n}H_p(X, A; h_q),$$

其中 H_p 为奇异同调论而 $h_q=h_q(pt)$.

在第 29 节介绍零调模型之后, 这个问题即可证明.

空间的构造: 多附加空间 以下所要考虑的附加空间是粘附上一个比胞腔大的空间得到的. 这些材料对于后文的发展不是本质性的, 但可提供一些有趣的例子.

我们继续采用第 19 节开始的大量假定. 连续映射的构造则基于证明(10.13)时的原则(拼合在闭子集上定义的映射)以及下述原理:

(21.12) **扩张原理** 设 X 通过 $f:A\to Y$ 粘附在 Y 上. 若 $g:X\to Z$ 和 $h:Y\to Z$ 对所有的 $\in A$ 满足 $g(a)=hf(a)$, 则存在唯一的连续映射 $k: X\cup_f Y\to Z$ 使得

$$\begin{tikzcd} X\coprod Y \arrow[r, "g\coprod h"] \arrow[d] & Z \\ X\cup_f Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

交换. 证明是简单的, 或者参阅 Dugundji[20], p. 129.

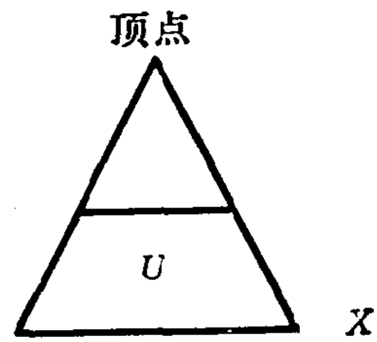
映射锥 在分析空间之后, 就产生了分析映射的问题. 一个重要的工具是映射锥. 我们称

$$CX = X \times I / X \times \{0\}$$

叫做 X 上的**锥**. $X \times \{0\}$ 在 CX 中的像是**顶点**. CX 中的点写成 (x, t) 的形式，其中 $x \in X$, $t \in I$. X 可视为 CX 的子空间 $X \times \{1\}$. 偶 (CX, X) 是加领的，例如

$$U = X \times \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

就是 X 的一个加领. 利用 CX 进行论证的动机通常可以从图 4 看出



给定 $f: X \to Y$, 可得 $\hat{f}: CX \to CY$, 这里 $\hat{f}(x, t) = (f(x), t)$.

(21.13) **引理** 顶点是 CX 的强形变收缩核.

证明 所要求的同伦 $H: CX \times I \to CX$ 可由 $H(x, t, s) = (x, ts)$ 定义. □

(21.14) **命题** $f: X \to Y$ 零伦当且仅当 f 可扩张为

$$F: CX \to Y.$$

证明 如果 f 可以扩张，那么它可通过一个可点缩空间分解，从而 f 零伦. 反之，设 $F: X \times I \to Y$ 是零同伦，且 $F(\ ,-1) = f$. 则因 $F(x, 0)$ 为常值，F 可导出一个确定的映射 $F: CX \to Y$. □

(21.15) **定义** $f: X \to Y$ 的**映射锥** Cf 就是附加空间 $CX \cup_f Y$. Y 可作为一个闭集嵌入 Cf, 此嵌入记作 $e: Y \to Cf$. 并且，$CX - X$ 是一开子集. 见 Dugundji[20], p. 128. 由 (21.14) 我们有

(21.16) $ef: X \to Cf$ 零伦. 设有可交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

则扩张原理(21.12)给出唯一的 $\gamma: Cf \to Cf'$ 使得

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\beta"'] & Cf \arrow[d, "\gamma"] \\ Y' \arrow[r, "e'"'] & Cf' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CX \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & Cf \arrow[d, "\gamma"] \\ CX' \arrow[r] & Cf' \end{tikzcd}$$

可交换.

利用 Cf 论证的动机往往可由图 5 看出:

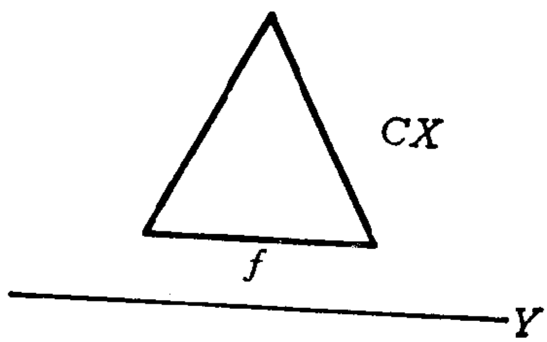


图 5 Cf

(21.17) **命题** $f: X \to Y$ 零伦, 当且仅当 Y 是 Cf 的收缩核.

证明 若 f 零伦, 则有 f 的扩张 $F: CX \to Y$. 于是由(21.12), $F \amalg id: CX \amalg Y \to Y$ 给出一收缩. 反之, 若有收缩 $\gamma: Cf \to Y$, 则 $f = ref$ 零伦(21.16).

□

作为(21.17)的应用, P^{n-1} 不是 P^n 的收缩核(与练习(19.44)比较).

证明 $\boldsymbol{P}^n \cong Cf$, 其中 $f: S^{n-1} \to \boldsymbol{P}^{n-1}$ 为标准映射. 根据练习(16.13), f 不零伦.

再者, $S^1 \vee S^1$ 不是 $S^1 \times S^1$ 的收缩核.

证明 环面是一个映射锥:

$$S^1 \xrightarrow{f} S^1 \vee S^1 \to S^1 \times S^1.$$

根据 Van Kampen 定理(4.12), $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ 是有两个生成元 a 和 b 的自由群, 而 f 的同伦类是换位子 $[a, b] \neq 1$. □

评注 以后将用(21.17)来证明某些映射不零伦, 办法是证明 Cf 的上同调中的上积结构与到 Y 的一个收缩不相容.

映射扩张到映射锥上的问题有一个有用的命题:

(21.18) **命题** 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. 则 g 能扩张为 $h: Cf \to Z$, 使得 $he = g$, 当且仅当 gf 零伦.

证明 必要性由(21.16)可得. 反之, 若 gf 零伦, 则 Z 是 Cgf 的收缩核, 且收缩 $Cgf \to Z$ 同标准映射 $Cf \to Cgf$ 的合成给出 h,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{e} & Cf \\ \| & & \downarrow g & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[gf]{} & Z & \rightleftharpoons & Cgf \end{array}$$

评注 h 与零伦有关, 一般来说, 即使在同伦的意义下 h 也不唯一. 我们不打算作进一步的分析, 那是一般同伦论中的经典内容.

下面考查 Cf 的同调性质. 因为 CX 可以点缩, (19.15) 给出长正合序列:

(21.19)

$$\to H_q^*(X) \xrightarrow{H_q(f)} H_q^*(Y) \xrightarrow{H_q(e)} H_q^*(Cf) \to H_{q-1}^*(X) \to \cdots$$

对于(严格)交换的图表

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

此序列是函子性的. 不过, 实际上往往只有在同伦意义下的可交换性:

$$f'\alpha \simeq \beta f.$$

(21.20) **命题** 如果 $f'\alpha \simeq \beta f$, 则存在 $e'\beta$ 的扩张

$$\gamma: Cf \to Cf'$$

使得图表

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_q(X) \arrow[r, "H_q(f)"] \arrow[d, "H_q(\alpha)"'] & H_q(Y) \arrow[r] \arrow[d, "H_q(\beta)"'] & H_q(Cf) \arrow[r] \arrow[d, "H_q(\gamma)"'] & H_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "H_{q-1}(\alpha)"'] & \cdots \\
\arrow[r] & H_q(X') \arrow[r, "H_q(f')"'] & H_q(Y') \arrow[r] & H_q(Cf') \arrow[r] & H_{q-1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

中的所有正方形都可交换.

证明 γ 存在, 因为

$$e'\beta f \simeq e'f'\alpha \simeq *.$$

我们来更明确地描述 γ. 设 $H: X \times I \to Y'$ 是满足

$$H(\ \ ,0) = f'\alpha$$

和

$$H(\ \ ,1) = \beta f$$

的同伦, 则可定义 γ 为

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} (\alpha(x), 2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ e'H(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$e(y) \mapsto e'\beta(y),$$

它可用图 6 表示:

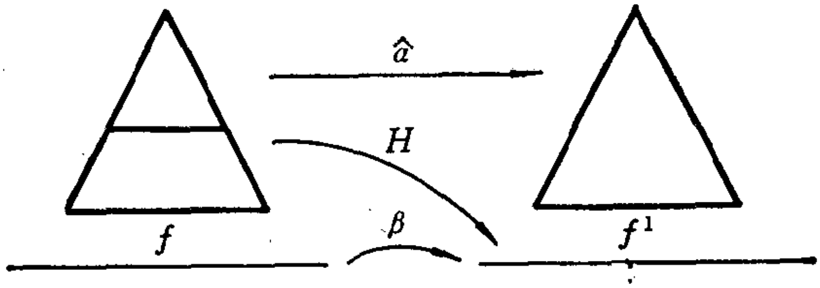


图 6

只要能够证明

$$\begin{tikzcd} (CX, X) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & (Cf, Y) \arrow[d, "\gamma"] \\ (CX', X') \arrow[r, "\bar{f}'"'] & (Cf', Y') \end{tikzcd}$$

同伦可换,便可得出我们的结果,因为将 Barratt-Whitehead 引理应用于切除映射 $\bar{f}$, $\bar{f}'$ 将有(21.19),而$(\hat{\alpha}, \gamma)$导出一个阶梯映射. 所要求的同伦

$$K:(CX\times I, X\times I)\to(Cf', Y') \quad 由$$

$$K(x, t, s)=\begin{cases}\left(\alpha(x), \dfrac{2t}{s+1}\right) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{s+1}{2}, \\ e'H(x, 2t-s-1) & \dfrac{s+1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

给出. 于是, $K(x, t, 0)=\gamma\bar{f}(x, t)$,

$$K(x, t, 1)=\bar{f}'\hat{\alpha}(x, t). \qquad \square$$

评注 对于不同的扩张 $\gamma\neq\gamma'$, 可以有

$$H_q(\gamma)\neq H_q(\gamma').$$

映射锥的一个重要性质是它们的同伦不变性.

(21.21) **命题** 如果 $f, g: X\to Y$ 同伦, 则 Cf 和 Cg 同伦等价.

证明 首先构造映射 $\theta: Cf\to Cg$ 和 $\psi: Cg\to Cf$. 设 $H: X\times I\to Y$ 是满足 $H(\ , 0)=g$ 和 $H(\ , 1)=f$ 的同伦. 并设

$$\overline{H}(x, t)=H(x, 1-t).$$

则 θ 由以下公式给出

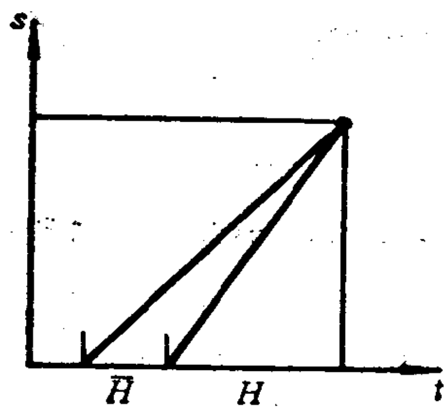
$$\theta(x, t)=\begin{cases}(x, 2t) & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ H(x, 2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\theta|Y=id$$

类似地，将 H 换成 $\overline{H}$，可以定义 ψ. θ 和 ψ 是完全确定的. 再来构造一个同伦 $\psi\theta\simeq id(\mathrm{rel}Y)$. 注意

$$\psi\theta(x, t)=\begin{cases}(x, 4t) & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{4},\\ \overline{H}(x, 4t-1) & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ H(x, 2t-1) & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

于是，所要求的同伦 $K:Cf\times I\to Cf$ 可从下图看出：



明确地说，K 定义为：

$$K(x, t, s)=\begin{cases}\left(x, \dfrac{4t}{3s+1}\right) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{3s+1}{4},\\ H(x, 3s+2-4t) & \dfrac{3s+1}{4}\leqslant t\leqslant \dfrac{s+1}{2},\\ H(x, 2t-1) & \dfrac{s+1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$K|Y=id.$$

对 $\theta\psi$ 可类似地处理.

评注 (21.21)中的同伦等价有些不太明显的推论. 例如, 按照棱方程 aaa^{-1} 叠合(等边)三角形的三条边得到的空间是映射 $f:S^1\to S^1$ 的映射锥且 $f\simeq id$. 但 id 的映射锥是圆盘, 从而这个空间(叫做**笨伯帽**)具有单点的同伦型. 另一个例子如图 7 所示. 将两个环面联锁起来, 使它们的表面沿子空间 $S^1\vee S^1$ 相切. 得到的空间与 $(S^1\times S^1)\vee S^2$ 有相同伦型. (证明: 考虑一个环面到另一个上的粘附映射并应用 21.17 后面的讨论.)

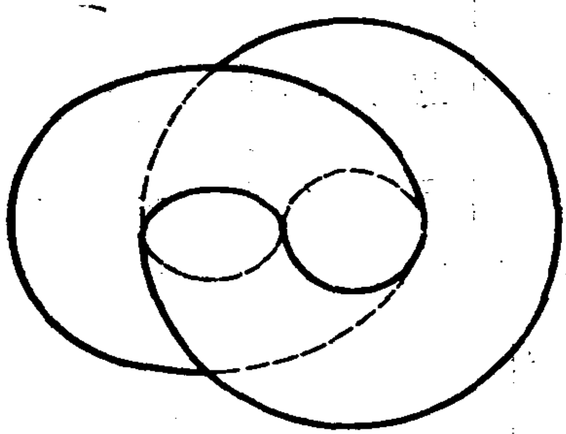


图 7

某些流形① 设 M 和 M' 是边界同胚的流形, $h:\partial M\to\partial M'$ 为同胚. 附加空间 $W=W(h, M, M')=M\cup_h M'$ 可以证明是一流形. 应用加领性质(19.2)和域的不变性, 在 M 和 M' 接合各点处构造局部欧几里德结构. 自然, 首先考虑的是

$$M=M'=E^n$$

的情形.

(21.22) **命题** (Alexander 戏法). 设 $h:S^{n-1}\to S^{n-1}$ 为同胚, 则 $W=E^n\cup_h E^n$ 与 S^n 同胚.

① 应感谢的是, 这些讨论取材于 Rolfsen 的评述论文[85], 读者可查阅到进一步的有趣的材料.

证明　把 E^n 看作 S^{n-1} 上的锥，有一个同胚 $\hat{h}:E^n \to E^n$ 它是 h 的扩张. 设 $p:E^n \amalg E^n \to S^n$ 是通常叠合两个半球成 S^n 的映射，则

$$p(\hat{h} \amalg id): E^n \amalg E^n \to S^n$$

由(21.12)可扩张为 $\phi: W \to S^n$. 显然，ϕ 是紧空间到 Hausdorff 空间的连续一一映射，因此是一个同胚. □

评注　W 不必与 S^n 光滑等价. Milnor[83]给出了第一个不光滑等价的例子，并刺激了拓扑学的重大发展.

透镜空间(19.12). 设 $M = E^2 \times S^1$，人们发现对

$$\partial M = S^1 \times S^1$$

的某些同胚有

$$L(p, q) \cong M \cup_h M.$$

下面我们构造这些同胚并进行一些计算，把 S^1 中的点写成 $e^{i\theta}$ 的形式.

(21.23)**定义**. 用

$$\lambda(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = (e^{i(\theta+\phi)}, e^{i\phi})$$

$$\mu(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = (e^{i\theta}, e^{i(\theta+\phi)}).$$

给出**扭转** $\lambda, \mu: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$. 在几何上没有方法区别 $S^1 \times S^1$ 的两个因子. 但是，如果视

$$S^1 \times S^1 = \partial(E^2 \times S^1),$$

便会产生有意义的差别. 我们只考虑 $E^2 \times S^1 \subset \boldsymbol{R}^3$ 以标准的(不打结)方式嵌入的情形. 这时，圆 $\phi = 0$ 称作**子午圆** M，圆 $\theta = 0$ 称作**经圆** L，子午圆在 $E^2 \times S^1$ 中零伦，而经圆代表 H_1 的一个生成元. 扭转在 M 和 L 上的作用如图 8 所示. (实际上，M, L 的象被 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个同胚歪曲了.)

当然，$\lambda | M = \mu | L = id$.

在本节的余下部分我们考虑同调论并取 $R = \boldsymbol{Z}$，圆 M 和 L 确定 $H_1(S^1 \times S^1)$ 的一个基，m 和 l. 更明确地说，选择 $H_1(M)$，

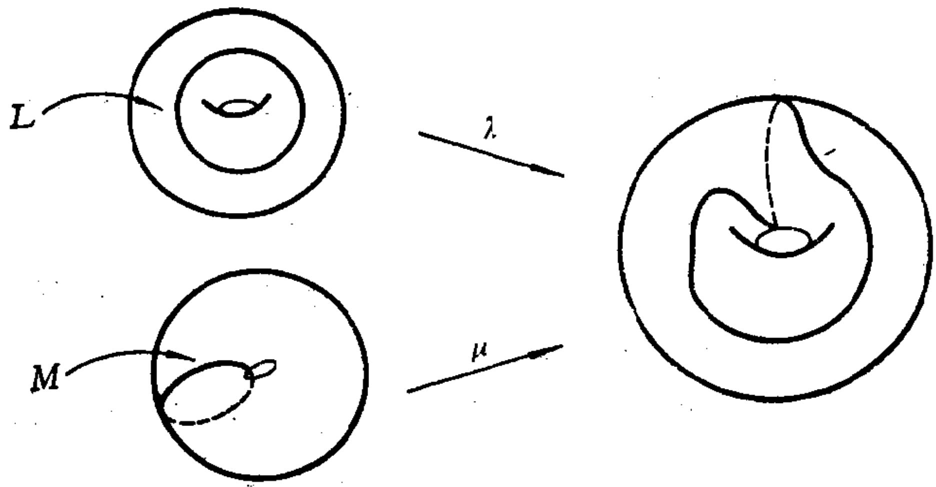


图 8

$H_1(L)$ 的生成元，并取它们在 $H_1(S^1\times S^1)$ 中的象．这相当于给每一个圆确定定向（即方向）．应用这个基，我们有

(21.24).

$$H_1(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad H_1(\mu)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$m=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\qquad l=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

同胚的逆由 $\lambda^{-1}(e^{i\theta},\ e^{i\phi})=(e^{i(\theta-\phi)},\ e^{i\phi})$ 给出，并且对 μ^{-1} 也作类似的处理．于是

(21.25)

$$H_1(\lambda^{-1})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad H_1(\mu^{-1})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

在线性代数中我们有以下事实，任何 $\det=1$ 的 2×2 阶整数方阵是(21.24)和(21.25)中四个矩阵的一个积[89][(*)]．交换映射

$$i: S^1\times S^1\to S^1\times S^1,\ i(x,\ y)=(y,\ x),$$

交换 m 和 l，且有矩阵

(*) 设 $S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，则 S 和 U 生成 $SL(2,\ \mathbf{Z})$ 而 $U=(R^{-1}S)^2$.

$$H_1(i)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

综上所述，就是：

(21.26)　如果 A 是任一 2×2 阶整数方阵，且

$$\det A=\pm 1,$$

则存在 $S^1\times S^1$ 的自同胚 h 使得

$$H_1(h)=A.$$

这说明 $E^2\times S^1\cup_h E^2\times S^1$ 的拓扑型仅与 $h(M)$ 有关，关于这一点及其细节请参阅 Rolfsen[85].

(21.27) **定义**　设 (p, q) 为互素整数，h 是 $\partial(E^2\times S^1)$ 的自同胚，在 $H_1(S^1\times S^1)$ 中满足 $H_1(h)(m)=qm+pl$. 附加空间 $L(p, q)=E^2\times S^1\cup_h E^2\times S^1$ 叫做**透镜空间**.

不能明显看出这种描述与(19.12)中的相同. 细节见 M. Cohen[78]. $h(M)$ 叫做一个 (p, q) 环面纽结. 在 $L(p, q)$ 之间有着拓扑关系. 如果 $\pm r\equiv q^{\pm 1}\bmod p$, 则 $L(p, q)$ 同胚于 $L(p, r)$. 这可用割和粘的方法加以证明，见 Hilton 和 Wylie[30] 或 Rolfsen[85]. 此外，

$$L(1, q)\cong S^3,\quad L(0, 1)\cong S^2\times S^1.$$

前者可由分解

$$S^3\cong\partial(E^2\times E^2)=E^2\times S^1\cup S^1\times E^2$$

得出(注意 E^2 位置的交换)，后者则可由 $S^2\times S^1=E^+_2\times S^1\cup E^-_2\times S^1$ 得到. 为规范化我们约定取 $0<q<p$.

(21.28) **命题**　$L(p, q)$ 的整系数同调为

$$H_3\cong\boldsymbol{Z},\quad H_2=0,\quad H_1\cong\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z},\quad H_0\cong\boldsymbol{Z}.$$

证明　应用(19.15)有(简记 $L(p, q)$ 为 L) $H_3(L)\cong H_2(S^1\times S^1)$ 和正合序列

$$
\begin{tikzcd}
 & & & H_1(E^2\times S^1) \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & H_2(L) \arrow[r] & H_1(S^1\times S^1) \arrow[ur, "H_1(j)"] \arrow[dr, "H_1(h)"'] \arrow[rr, phantom, "\oplus"] & & H_1(L) \arrow[r] & 0 \\
 & & & H_1(E^2\times S^1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

其中 j 为包含映射，h 为粘附映射．象(21.24)中那样用 m, l 表示 $H_1(S^1\times S^1)$ 的生成元，此序列上下项中对应于经圆的生成元记为 l_1 和 l_2，则

$$H_1(j)(m)=0,\quad H_1(j)(l)=l_1,$$
$$H_1(h)(m)=pl_2,\quad H_1(h)(l)=xl_2,$$

这里 x 为某个整数．从而，$(H_1(j)\oplus H_1(h))\circ\Delta$ 关于这个基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & x \end{pmatrix}$$

这是一个单同态．因为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ 是 $H_1(E^2\times S^1)\oplus H_1(E^2\times S^1)$ 的一个基，我们得到上述结果． □

附注 事实上，$x\equiv\pm q^{-1}\bmod p$，因为在 $H_1(S^1\times S^1)$ 上，

$$H_1(h)=\begin{pmatrix} q & y \\ p & x \end{pmatrix}$$

且

$$qx-py=\pm 1.$$

Poincaré 三维同调球面．这是一种首先由 Pioncaré 构造的空间，而我们下面给出的构造则归功于 Dehn．我们将弄清它的同调性质．

设 K 是 S^3 中的一个纽结，具有邻域 N，这里 N 是 $E^2\times S^1$ 在嵌入 $\phi: E^2\times S^1\to S^3$ 之下的象，且 $\phi(\{0\}\times S^1)=K$，$X=S^3-\operatorname{int}N$ 是边界 ∂X 与 $S^1\times S^1$ 同胚的 3 维流形．注意，$X\subset S^3-K$

是一个形变收缩核. 因为点 $z\in N$ 具有 $z=\phi(re^{i\theta}, y)$ 的形式, 其中

$$re^{i\theta}\in E^2-\{0\},\quad y\in S^1.$$

于是, 由 $f(z)=\phi(e^{i\theta}, y)$, $f|S^3-\operatorname{int} N=id$ 定义的 $f:S^3-K\to X$ 具备所要求的性质. 从而由(18.3), X 具有 S^1 的同调.

(21.29) **练习** 设 C 是形如 $C=\operatorname{Im}\phi|S^1\times\{x\}$ 的圆, 这里 $S^1=\partial E^2$. 并姑且认为 $x\in K$. 证明包含映射 $C\to X$ 导出同调的同构. 提示: 使 C 不动, 将圆盘 $\operatorname{Im}\phi|E^2\times\{x\}$ 向相反方向伸展, 得到一个嵌入 2 维球面, C 是它的赤道. 这个 2 维球面表示了 $R^3-\{x\}$ 的同调. 再将 K 看成交于 x 和 ∞ 的两条弧的并, 并用 Mayer–Vietoris 序列计算.

由同胚 $h:S^1\times S^1\to\partial X$ 得到新的流形 $Q=E^2\times S^1\cup_h X$, 这个过程称为**换球术**, 它的精心制作加深了我们对流形的认识.

图 9 中画出了一个三叶形纽结 K.

(21.30) **练习** 证明图 9 中的 J 和 C 在 $H_1(X)$ 中满足 $[J]+[C]=0$. 提示: 每个下交叉产生一个 $-[C]$, 而每个缠绕产生一个 $+[C]$.

设 $Q=E^2\times S^1\cup_h(X)$, 这里 h 是满足 $h(M)=J$ 的同胚, M 是 $E^2\times S^1$ 的子午圆, 则 Q 叫做 **Poincaré 3 维同调球面**.

(21.31) **命题** $H_q(Q)\cong H_q(S^3)$.

证明 把练习(21.29)和(21.30)与(21.28)的推理结合起来即可. □

评注 应用 Seifert, Van Kampen 定理(4.12), Q 的基本群是 $\pi_1(S^3-K)$, 带上 J 所表示的附加关系. 于是, 我们发现 $\pi_1(Q)$ 是 120 阶的有限群, 即**二元二十面体群**. 因此, Q 和 S^3 不同胚, 空间 Q 还可以由二元二十面体群在 S^3 上的纯不连续作用得到. 不同的数学分支通过这个群显示出迷人而广泛的内在联系, 关于这些, 请参阅 F. Klein[81].

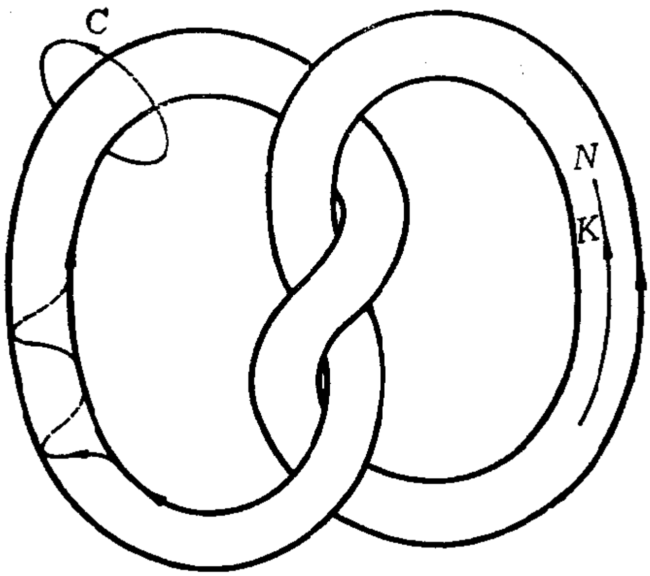


图 9

第三编　形流上的定向和对偶性

引　　言

流形是第三编主要的几何论题．本编引入一种新的理论工具——上同调，并借助于 Alexander-Whitney 映射引入上积和卡积.上积赋予上同调以较第 19 节中同调所具有的更多的代数结构．由上同调到同调的卡积应用在对偶定理中．

第一个题目是流形的可定向性．这一讨论具体地阐明了同调作为拼合“局部信息”而得到整体性质的手段的新用途．定向是流形 M 的整体性质，它显示在局部上就是“左手系”还是“右手系”的差异．这一差异可以靠选择特定的同调模的生成元来描述．定向就是这种选择的一个协合系.

我们对上同调的探讨分述在本编和第四编中．本编中我们循序导出与同调论相类似的内容，并证明一个万有系数定理.这个定理在计算中常常有用．然后引入上积．但把这些积的更深入的理论探讨留在第四编，而在此开发足够的材料证明流形的对偶定理.

我们对庞加莱对偶定理的证明引自 Milnor[41]（也见于[84]）．这一推理应用 Mayer-Vietoris 序列实现了从局部信息到整体信息的过渡.

27 节中的 Alexander 对偶定理证实了第 18 节中孕育的初步思想．28 节中 Lefschetz 对偶定理完成了对偶定理的三种形式.

22 流形的定向

在本节中，X 总表示一个 n 维流形，$n\geqslant 1$。

(22.1) **引理** 对任意点 $x\in X$，

$$H_n(X,\ X-x)\cong R.$$

证明 设 U 是 x 的一个同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 中单位开球的开邻域（即 x 的一个"坐标邻域"）。切除开集 $X-x$ 的闭子集 $X-U$，我们得到 $H_n(U,\ U-x)\xrightarrow{\cong} H_n(X,\ X-x)$。

由于 U 可点缩，偶 $(U,\ U-x)$ 的正合序列给出

$$H_n(U,\ U-x)\xrightarrow{\cong} H^*_{n-1}(U-x),$$

而 $U-x$ 与 S^{n-1} 同伦等价，因此 $H^*_{n-1}(U-x)\cong R$. □

考虑 $n=2$, $R=\boldsymbol{Z}$ 的特殊情况，这时 $H_2(X,\ X-x\cong H_1(U-x)$ 中有两个可能的元素可以生成这一无限循环群，它们分别对应于两个按相反方向绕 x 一周的闭路. 选取这两个生成元之一直观上对应于"选取点 x 处的一个定向。"

对 $n>2$，我们必须确定 $H_{n-1}(U-x)\cong H_{n-1}(S^{n-1})$ 所有可能的生成元. 将 S^{n-1} 看成几何单形 Δ^n 的边界，则可证明生成元是 $\pm\partial\delta^n$，其中 δ^n 是 Δ^n 上的恒等奇异单形(参看 Wallace [59], p. 178, 以及(22.40)).

定义 R-模 $H_n(X,\ X-x)$ 的一个生成元叫做 X 在点 x 处的一个**局部 R- 定向**.

为整体地定义 X 的定向的概念，直观形象启示我们，必须有 X 在每一点处的定向且使得这些局部定向"匹配". 但这并非一定可行，这可用开 Möbius 带说明之：它是在空间

$$S=\{(s,\ t)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,0\leqslant s\leqslant 1,\ 0<t<1\}$$

中叠合 $(0,t)$ 与 $(1,1-t)$ 而成(此商空间为-2 维流形)，见(28.17)，

不过，在下述意义下，我们总可得到遍及给定点 x 的一个邻域的"匹配定向"：

(22.2) **拓展引理** 给定一元 $\alpha_x \in H_n(X, X-x)$，则存在 x 的开邻域 U 及 $\alpha \in H_n(X, X-U)$，使得 $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$，这里

$$j_x^U: H_n(X, X-U) \to H_n(X, X-x)$$

是由包含映射导出的标准同态．

证明 设 a 是代表 α_x 的相对闭链，则 ∂a 的支集 $|\partial a|$ 是 X 中含于 $X-x$ 的紧子集，因此 $U = X - |\partial a|$ 是 x 的一个开邻域．取 $\alpha \in H_n(X, X-U)$ 是相对于 $X-U$ 的 a 的同调类．

这个引理告诉我们，对 x 附近的点 y（即对 $y \in U$），我们可以令 $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$ 得到元素 $\alpha_y \in H_n(X, X-y)$．我们认为这些元素"匹配"，因为它们从同一元素 $\alpha \in H_n(X, X-U)$ 得来．称 α 为 α_x 在 U 中的一个拓展．我们还必须证明进一步的结论．

(22.3) **凝聚引理** 如果 α_x 生成 $H_n(X, X-x)$，则可以选取 U 和 α 使对所有 $y \in U$，α_y 生成 $H_n(X, X-y)$．

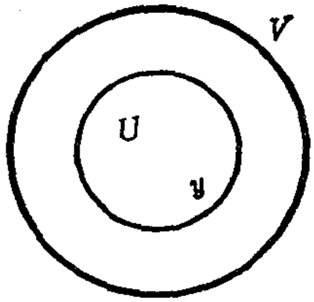
这可由下述更强的结果直接推出．

(22.4) **局部常值引理** x 的每个邻域 W 都包含 x 的一个邻域 U，使得对每个 $y \in U$，j_y^U 是同构（从而 α_x 在 U 中有唯一拓展）．

证明 设 V 是包含在 W 内的 x 的坐标邻域（V 同胚于 E^n），设 U 是对应于一个半径 <1 的开球的更小的开集，则有交换图表（对任一 $y \in U$）

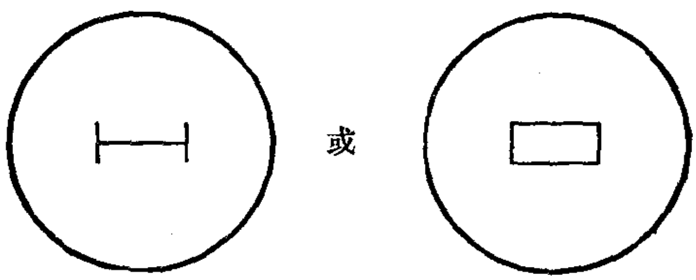
$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X, X-U) & \xleftarrow{\cong} & H_n(V, V-U) & \xrightarrow{\cong} & H_{n+1}^*(V-U) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle j_x^U} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H_n(X, X-y) & \xleftarrow{\cong} & H_n(V, V-y) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}^*(V-y)
\end{array}$$

其中左边的水平同构是切除同构，右边的是连接同态（V 可点缩）．右边的竖直箭头是同构，因为包含映射 $V-U \to V-y$ 是同伦等价



(自 y 沿半径向外收缩)，因此 j_y^U 是同构. □

(22.5)**评注** 用于上述推理中的 U 的性质只是：(a) $(V, V-U)\to(X, X-U)$ 是切除，(b) 对每一点 $y\in U$，包含映射 i: $V-U\to V-y$ 导出同构 $H_{n-1}^*(V-U)\to H_{n-1}^*(V-y)$. 若我们取 U 为包含 x 的维数 $d\leqslant n$ 的闭长方体，这两条性质仍然成立. 性质(a)是显然的，至于(b)，我们可取一 $(n-1)$ 维球面 $S_{n-1}\subset V-U$，已知包含映射

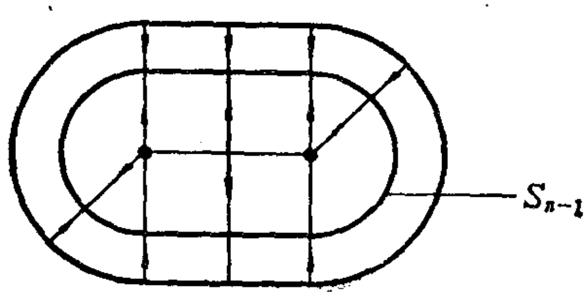


$$i'\colon\ S_{n-1}\to U-y$$

是同伦等价，而且很易证明包含映射

$$i''\colon\ S_{n-1}\to V-U$$

也是同伦等价($d=1$, $n=2$ 的情形如下图所示)，因此 $H_{n-1}(i)=$



$H_{n-1}(i')H_{n-1}(i'')^{-1}$ 是同构.

定义 给定子空间 $U\subset X$. 元素 $\alpha\in H_n(X, X-U)$ 在对每个 $y\in U$ 使得 $j_y^U(\alpha)$ 生成 $H_n(X, X-y)$ 时，即称为 X 沿 U 的**局部 R-定向**.

(22.6) **记号** 如果 $V\subset U$ 是 X 的子空间,

$$j_V^U: H_n(X, X-U)\to H_n(X, X-V)$$

表示由包含映射导出的同态. 如果 α 是沿 U 的局部 R-定向，则 $j_V^U(\alpha)$ 是沿 V 的局部 R-定向, 因为对任意 $y\in V$,

$$j_y^V(j_V^U(\alpha))=j_y^U(\alpha).$$

现在我们来定义 X 的**整体 R-定向**. 假设已经给出

(i) 覆盖 X 的一族开子空间 U_i.

(ii) 对每个 i, 有一个 X 沿 U_i 的局部定向 $\alpha_i\in H_n(X, X-U_i)$.

如果下述相容条件成立, 则称此为一**R-定向系**: 对任意 $x\in X$, 若 $x\in U_i\cap U_{i'}$, 则

(iii) $j_x^{U_i}(\alpha_i)=j_x^{U_{i'}}(\alpha_{i'})$.

在此情形, 在每一点 x 处, 一个局部 R-定向由

(iv) $\alpha_x=j_x^{U_i}(\alpha_i)$, $x\in U_i$

明确定义.

对于另一 R-定向系 (V_k, β_k), 如果

(v) $\alpha_x=\beta_x$ 对所有 $x\in X$ 成立,

我们就说它们确定同一定向。因此 X 的一个**整体 R-定向**定义为 R-定向系的一个等价类, 其等价关系为 (V).

如果存在一个 R-定向系 ($\mathbf{Z}$-定向系), 我们就说 X 是 **R-可定向的(可定向的)**.

(22.7) **命题** (a) R-可定向的 X 的开子流形 v 也是 R-可定向的. (b) X 是 R-可定向的, 当且仅当它的所有连通分枝是

R-可定向的.

证明 (a) 设(U_i, α_i)是 X 的一个 R-定向系. 对任意 $x\in V$, 设 $\beta_x\in H_n(V, V-x)$在切除同构

$$H_n(V, V-x)\xrightarrow{\simeq}H_n(X, X-x)$$

之下与 α_x 对应. 由(22.4), 存在 x 的一个开邻域 V_x 使得对某个 i, $V_x\subset V\cap U_i$, 且 β_x 可唯一地拓展成 V 沿 V_x 的局部 R-定向 $\bar\beta_x$; 我们还可进一步选取如此小的 V_x, 使得 $X-V$ 包含在 $X-V_x$ 的内域之中. 因此, 对任意 $y\in V_x$, 图表

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V-y) & \xrightarrow{\simeq} & H_n(X, Z-y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(V, V-V_x) & \xrightarrow{\simeq} & H_n(X, X-V_x) \end{array} \begin{array}{c}\nwarrow \\ \quad H_n(X, X-U_i) \\ \swarrow\end{array}$$

说明 V 在 y 点由 $\bar\beta_x$ 导出的局部 R-定向等于 β_y, 这样, $(V_x, \bar\beta_x)$ 是 V 的一个 R-定向系.

(b) 可以由(a)及流形的连通分枝是开集的事实推出. □

(22.8) **命题** 假设 X 连通, 则在一点处一致的 X 的两个 R-定向相等.

证明 设 A 是两定向在该点一致的点的集合. 由(22.4), A 和 $X-A$ 是开的, 因此 $A=X$. □

(22.9) **推论** 每个连通可定向流形仅有两个不同的定向.

(22.10) **例** 对 $X=S^n$ 及任意 $x\in X$, 由于 S^n-x 可缩, $H_n(S^n)\to H_n(S^n, S^n-x)$是同构. 取由单独一个集 X 构成的开覆盖及 $H_n(S^n)$的生成元 α_x, 可以看出 S^n 是 R-可定向的.

(22.11) **例** $X=\boldsymbol{R}^n$ 同胚于 S^n 去掉一个点, 因此由(22.7), X 是 R-可定向的.

(22.12) **命题** 任一流形具有唯一的 $\boldsymbol{Z}/2$-定向.

对每个 x, α_x 必须是 $H_n(X, X-x; \boldsymbol{Z}/2)$的唯一的非零元. 我们可以选取 x 的开邻域 U_x, 在其中 α_x 有唯一拓展. 显然, 这些拓

展是相容的. □

(22.13) **评注** 事实上我们可以证明,如果 X 可以定向,则对所有系数环 R, X 是 R-可定向的,这一点可由万有系数定理推知. 万有系数定理指明了如何由 $H_q(X, A; \mathbf{Z})$ 和 R 来确定 $H_q(X, A; R)$ (见第 29 节).

(22.14) **定理** 设 X 是不可定向的连通流形,则存在一个 2 层连通覆盖空间 $E \xrightarrow{p} X$ 使得 E 可定向.

(22.15) **推论** 任一单连通流形可定向. (更一般地,具有不含指数为 2 的子群的基本群的连通流形可定向.)

定理的证明 定义 E 是偶 (x, α_x) 的集合,其中 $x \in X$, α_x 是 $H_n(X, X-x; \mathbf{Z})$ 的两个生成元之一. 令 $p(x, \alpha_x) = x$.

考虑偶 (U, α_U),这里 U 是 X 中开集, α_U 是 X 的沿 U 的局部定向. 设

$$\langle U, \alpha_U\rangle = \{(x, \alpha_x) \mid x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\},$$

且假定 $$(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U\rangle \cap \langle U', \alpha_{U'}\rangle,$$

由 (22.4),存在 x 的开邻域 $U'' \subset U \cap U'$,使得 α_x 在 U'' 上有唯一的拓展 $\alpha_{U''}$. 于是必然有 $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''} = j_{U''}^{U'}(\alpha_{U'})$,从而

$$\langle U'', \alpha_{U''}\rangle \subset \langle U, \alpha_U\rangle \cap \langle U', \alpha_{U'}\rangle.$$

这样,集合 $\langle U, \alpha_U\rangle$ 构成 E 上的拓扑基. 由于 p 将 $\langle U, \alpha_U\rangle$ 同胚地映到 U 上,且

$$p^{-1}(U) = \langle U, \alpha_U\rangle \cup \langle U, -\alpha_U\rangle (\text{不交并}),$$

故我们确有一 2 层覆盖空间.

对每一点 $x \subset X$,选取如同 (22.4) 的开邻域 $V \supset U$,使得 α_V 存在. 令 $\alpha_U = j_U^V(\alpha_V)$,应用同构

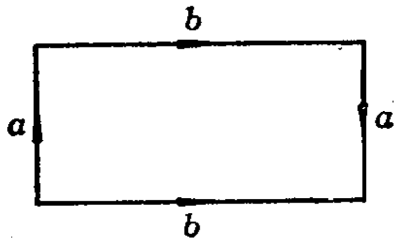
$$H_{n-1}^*(\langle V, \alpha_V\rangle - \langle U, \alpha_U\rangle) \simeq H_{n-1}^*(V-U)$$

使 E 获得沿 $\langle U, \alpha_U\rangle$ 的局部定向. 这说明 E 可定向.

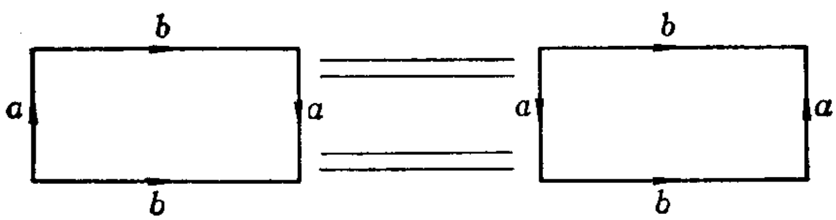
如果 E 不连通，则对其每个分枝 C, $p|C: C\to X$ 是覆盖空间，且 $p|C$ 必然是一个同胚（因为 E 的纤维只有两个点），因此 C 不可定向，与(22.7(b))矛盾. □

推论的证明 推论可由 $p_*\pi_1(E, e_0)$ 在 $\pi_1(X, x_0)$ 中的指数为 2 的事实推知.

(22.16)**例** 对 $X=\boldsymbol{P}^2$，我们有 $E=S^2$. 如果 X 是 Klein 瓶 U_2，我们有 $E=$ 环面 T_1，因为设 q: $I^2\to U_2$ 是由(19.32)的粘合给出的映射：



取两个这种图形，将第二个上下倒置，再拼合在一起，就给出环面.



确切地说，可定义 p: $T_1\to U_2$ 为

$$p(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})=\begin{cases} q(2s, t) & 0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{2} \\ q(2s-1, 1-t) & \dfrac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

试证明对 $X=U_h$ 的更一般情形，我们有 $E=T_{h-1}$, $h>1$(19.32).

(22.17)**注意** 相反地，可能有这样的问题，是否每一可定向流形 E 都是一个不可定向流形 X 的 2 层覆盖?

回答是否定的，因为由(21.4)，$\chi(E)$ 应是偶数（当 E 和 X 是有限胞腔复形时），而 $E=\boldsymbol{CP}^{2n}$ 是 $\chi(E)$ 为奇数的例子(20.3 及

22.31).

(22.18) 在 $R=\boldsymbol{Z}$ 时，模拟构造 E 的方法去构造包含 E 作为开子空间的另一覆盖空间是有用的. 设 X^0 是所有 (x, α_x) 的集合，其中 $x\in X$, $\alpha_x\in H_n(X, X-x)$, 并不假定 α_x 是生成元. 令 $p(x,\alpha_x)=x$. 对任意开集 $U\subset X$, 同前面一样定义 $\langle U, \alpha_U\rangle$, 这些集合构成 X^0 上的拓扑基，且使得 p: $X^0\to X$ 是覆盖空间. 纤维 $p^{-1}(x)$ 与 $H_n(X, X-x)$ 一一对应，X^0 称为 X 的 **R-定向层**.

假设 $R=\boldsymbol{Z}$. 定义取值于非负整数的 X^0 上的函数 v 如下：已知 (x, α_x), 则 α_x 是 $H_n(X, X-x)$ 的一个生成元的整数倍，此倍数的绝对值与生成元的选取无关，将此数值定义为 $v(x, \alpha_x)$.

(22.19) **引理** 对 $q>0$, $v^{-1}(q)$ 是 X^0 中开集，且 $v^{-1}(q)\to X$ 是 2 层覆盖空间.

此引理可由(22.4)立即推出.

注意 $v^{-1}(0)$ 仍为开集，而 $v^{-1}(0)\to X$ 是同胚，X^0 作为 $v^{-1}(q)$ 的不交并，不会是连通的. $v^{-1}(1)$ 即为前面的 E.

(22.20) **练习** 对一般的环 R, 定义等价关系：$a\sim b$, 如果 $a=ub$, 其中 u 是 R 中一个有乘法逆元的元素. 其等价类集合可称为"R 模以可逆元集合。"定义映射 v: $X^0\to$"R 模以可逆元集合"并验证引理. 如果 1 表示含有 1 的等价类，则 $v^{-1}(1)$ 是每一纤维与 R 中可逆元做成的乘法群一一对应的 X 的覆盖空间. 对 $R=\boldsymbol{Z}/2$, $v^{-1}(1)\to X$ 是同胚，且 $X^0=X\times\boldsymbol{Z}/2$.

(22.21) **评注** 对任意子空间 $A\subset X$, 使得 $ps=$ 包含映射 $A\to X$ 的(连续!)映射 s: $A\to X^0$ 称为 A 上的**截口**. 对 $x\in A$, 令 $s'(x)\in H_n(X, X-x)$ 表示 $s(x)$ 的第 2 个坐标，即

$$s(x)=(x,s'(x)).$$

令 ΓA 表示 A 上截口的集合，如果 s_1, $s_2\in\Gamma A$, 则

$$x\to(x,\ s_1'(x)+s_2'(x))\quad x\in A$$

确定 A 上的另一截口，记为 s_1+s_2. 如果 $s\in \Gamma A$, $\lambda\in R$, 则

$$x\to(x,\ \lambda s'(x))\quad x\in A$$

也确定 A 上的一个截口，记为 λs. 这些运算使得 ΓA 成为一个 R–模. 这个模的零元是截口

$$x\to(x,\ 0)\quad x\in A.$$

整个 X 上的截口称为**整体截口**.

注意，存在将 X 映入 $v^{-1}(1)$ 的整体截口，当且仅当 X 是 R–可定向的. 而且，事实上，X 上的不同 R–定向与这些截口一一对应(以此作为一个练习). 更一般地，对任意 $A\subset X$, 我们称：X 沿 A 是 **R–可定向的**，如果存在 A 上截口将 A 映入 $v^{-1}(1)$.

(22.22) **命题** X 沿 A 是 R–可定向的，当且仅当存在同胚 ϕ: $p^{-1}(A)\to A\times R$(给 R 以离散拓扑)使得图表

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(A) & \xrightarrow{\phi} & A\times R \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A & \end{array}$$

交换. 在此情况下，ΓA 同构于所有连续映射 $A\to R$ 所成的模. 如果 A 有 k 个连通分枝，$k<\infty$, 则 $\Gamma A\cong R^k$.

证明 给定截口 s: $A\to v^{-1}(1)$, 对每个 $x\in A$, $s'(x)$ 是 $H_n(X, X-x)$ 的一个生成元. 如果 $(x,\ \alpha_x)\in p^{-1}(A)$, 则存在唯一的 $\lambda_x\in R$ 使得 $\alpha_x=\lambda_x s'(x)$. 定义 ϕ 为

$$\phi(x,\ \alpha_x)=(x,\ \lambda_x)\quad x\in A.$$

如果 U 是 x 的开邻域且在其上 α_x 具有唯一拓展 α_U, 则 ϕ 将 $\langle U,\ \alpha_U\rangle$ 一一地映到 $U\times\lambda_x$ 上，因此 ϕ 是同胚. 反之，给定 ϕ, 则可由 $s(x)=\phi^{-1}(x,\ 1)$, $x\in A$, 来恢复 s.

(22.23) **评注** 存在标准同态

$$j_A:\ H_n(X,\ X-A)\to\Gamma A,$$

定义为 $j_A(\alpha)(x)=(x,\ j_x^A(\alpha))$, $x\in A$(参见(22.6)). (我们必须

验证 $j_A(\alpha)$ 的连续性：设 α 的一个代表相对闭链为 a，如果 $U=X-|\partial a|$，则 U 是包含 A 的开集．如果 $\alpha_U\in H_n(X,\ X-U)$ 是相对于 $X-U$ 的 a 的同调类，则 α_U 在包含映射 $X-U\to X-A$ 之下导出 α．给定 $x\in A$，考虑 x 的开邻域 V，使得 $V\subset U$ 且 $j_x^A(\alpha)$ 在 V 上具有唯一拓展 α_V(22.4)．因为 α_U 导出 α_V，$j_A(\alpha)$ 将 $V\cap A$ 映入 $\langle V,\ \alpha_V\rangle$，而后一类型的集合构成 $(x,\ j_x^A(\alpha))$ 在 X^0 中的邻域的一个基．)

如果 $B\subset A$，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,\ X-A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \\ {\scriptstyle j_B^A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ H_n(X,\ X-B) & \xrightarrow[j_B]{} & \Gamma B \end{array}$$

其中，右边的竖直箭头 r 定义为 A 上的截口在子集 B 上的限制．

(22.24) **定理**　假设 $A\subset X$ 为闭集，则

(i) 对 $q>n$，$H_q(X,\ X-A)=0$．

(ii) j_A 是单同态，且其象集为具有紧支集的截口所成的子模 Γ_cA，即

$$j_A:H_n(X,\ X-A)\xrightarrow{\sim}\Gamma_cA.$$

特别的是 $j_X:H_n(X)\xrightarrow{\sim}\Gamma_cX$，且 $H_q(X)=0$，$q>n$．

我们说截口 $s\in\Gamma A$ 具有紧支集，如果它在 A 的某个紧子集之外与零截口相等(这个紧子集一般依赖于 s)．如果 A 是紧的，当然 $\Gamma_cA=\Gamma A$．

(22.25) **推论**　如果 A 连通且非紧，则 $H_n(X,\ X-A)=0$．特别的，如果 X 连通且非紧，则 $H_n(X)=0$．

证明　如果 $\alpha\in H_n(X,\ X-A)$，则由连通性可知 $vj_A(\alpha)$ 为常值．又因 $j_A(\alpha)$ 在一个紧集以外等于零，故 $\alpha=0$．　□

(22.26) **推论**　如果 A 是紧的，且有 k 个连通分枝，X 沿 A

为 R-可定向，则

$$H_n(X,\ X-A)\cong R^k.$$

证明 应用(22.22). □

(22.27) **推论** 如果 A 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的紧子空间，且有 k 个连通分枝,则 k 等于 A 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的余集的第$(n-1)$个贝蒂数(假设 $n\geqslant 2$).

证明 因 $\boldsymbol{R}^n$ 可定向，故可沿 A 定向. 而且 $H_n(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n-A)\xrightarrow{\simeq} H_{n-1}(\boldsymbol{R}^n-A)$. □

(22.28) **推论** 设 X 是紧连通流形. 假设对任意 $a\neq 0,\ a\in R$ 及任意可逆元素 $u\in R$, $ua=a$ 蕴含 $u=1$(例如当 R 是整数环时此条件成立)，则

$$H_n(X)=\begin{cases} R & \text{如果 } X \text{ 为 } R\text{-可定向的,} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

证明 如果 X 是 R-可定向的，应用(22.22)即可证得. 假设有一整体截口 $s\in\Gamma X$, $s\neq 0$, 则 $v(s(X))$ 是"R 模以可逆元的集合"中的常值，即存在 $a\in R$, $a\neq 0$, 使得对所有 $x\in X$, $s'(x)$ 是 $H_n(X,\ X-x)$的一个生成元的 a 倍，这里 $s(x)=(x,\ s'(x))$. 对 R 的假设蕴含着 $s'(x)/a$ 是一个完全确定的生成元. 故映射 $x\to(x,\ s'(x)/a)$是一个截口 $X\to v^{-1}(1)$. 因此 X 是 R-可定向的. □

(22.29) 我们看到一个紧连通流形 X 的一个 R 定向由 ΓX 的一个生成元或最高维同调模 $H_n(X)$的一个生成元 ζ 确定，ζ 称为这个 R-定向的**基本类**. 这样，每一点 x 的局部 R-定向就是 $j_x^X(\zeta)$.

(22.30) **推论** 如果 X 是紧连通流形，则

$$H_n(X,\ \boldsymbol{Z}/2)\cong\boldsymbol{Z}/2.$$

应用(22.12). □

(22.31) **评注** 与我们前面对同调群的计算相比较，我们有下述表格：

可定向的		不可定向的	
S^n	所有 $n\geqslant 1$	U_h	所有 $h\geqslant 1$
$\boldsymbol{T}_g$	所有 $g\geqslant 1$	$\boldsymbol{P}^n$	n 为偶数
$\boldsymbol{P}^n$	n 为奇数		
$\boldsymbol{CP}^n$	所有 n		
$\boldsymbol{HP}^n$	所有 n		

定理(22.24)**的证明**:

第 0 步. 如果 A 空,结论显然.

第 1 步. 如果定理对闭子集 A_1, A_2 及 $A_1\cap A_2$ 成立,则定理对 $A=A_1\cup A_2$ 也成立.

我们应用三元组 $(X,\ X-A_1,\ X-A_2)$ 的相对 Mayer-Vietoris 序列(17.10). 由此序列知当 $q>n$ 时, $H_q(X,\ X-A)=0$, 当 $q=n$ 时,有可交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to H_n(X,X-A) & \to & H_n(X,X-A_1)\oplus H_n(X,X-A_2) & \to & H_n(X,X-A_1\cap A_2)\\
\downarrow j_A & & \cong\wr\downarrow j_{A_1}\oplus j_{A_2} & & \cong\wr\downarrow j_{A_1\cap A_2}\\
0\to \Gamma_c A & \xrightarrow[(r_1-r_2)]{} & \Gamma_c A_1\oplus\Gamma_c A_1 & \xrightarrow[r_1+r_2]{} & \Gamma_c(A_1\cap A_2)
\end{array}$$

可用图表追踪法证明 j_A 是同构.

第 2 步. A 是紧的、连通的,且包含在一个被 p 均匀覆盖的坐标邻域内. 由切除性,可用 $\dot{E}^n$ 替换 X.

情形 1. A 是长方体(维数$\leqslant n$).

则, (i) 可由 $H_q(\dot{E}^n,\ \dot{E}^n-A)\xrightarrow{\simeq}H^*_{q-1}(\dot{E}^n-A)\xrightarrow{\simeq}H^*_{q-1}(S^{n-1})$ 推出, (ii) 可由(22.5)及(22.22)推出, 因为 A 连通且 $\dot{E}^n$ 是 R-可定向的.

情形 2. A 是长方体 $A_1,\ \cdots,\ A_m$ 的有限并, 且每一 A_i 的每个面都平行于 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个坐标超平面. 由情形 1 我们可以假定 $m>1$.

我们用关于 m 的归纳法来证明. 令 $A'=A_1\cup\cdots\cup A_{m-1}$, 则

$A'\cap A_m$ 是与 A' 同样类型的集合，至多是 $m-1$ 个如同 A_i 的长方体的并(可能维数降低，但无影响)．于是 A' 和 $A'\cap A_m$ 皆满足归纳假设．由第1步定理对 A 成立．

情形3． A 是含于 U 的紧集，U 是被 p 均匀覆盖的坐标邻域．

对于 $s\in\Gamma A$，我们不妨假定 s 将 A 映入 U 上面一叶(否则，A 的紧性与 U 的正规性给出覆盖 A 的 m 个不交开集，使得对每个 $U_i\cap A$ 此事实仍真)．因此 s 可扩张为 $s^*\in\Gamma U$ (p 在该叶上的逆)．对任一点 $x\in A$，选取一个 n 维长方体，将 x 包含在其内域之中，使得长方体的面皆平行于坐标超平面，且整个长方体包含在 U 中．令 A' 表示所有这些长方体的并，因 A 紧，故 A' 是一有限并．由情形2及交换用表

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,\ X-A') & \xrightarrow[\sim]{j_{A'}} & \Gamma A'\ni s^*|A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X,\ X-A) & \xrightarrow{\quad j_A \quad} & \Gamma A\ni s \end{array}$$

可知 s 含于 j_A 的象中，因此 j_A 是满的．

设 $\alpha\in H_q(X,\ X-A)$，其中 $q\geqslant n$，当 $q=n$ 时假定 $j_A(\alpha)=0$．我们欲证 $\alpha=0$．设 z 是代表 α 的相对闭链，则 $X-|\partial z|=V$ 是包含 A 的开集．设 α' 是 z 在 $H_q(X,\ X-V)$ 中的同调类．当 $q=n$ 时，因为对所有 $x\in A$ 总有 $j_x^V(\alpha')=j_x^A(\alpha)=0$，故由(22.4)知，存在开集 V' 满足 $A\subset V'\subset V$，且使得对所有 $x\in V'$，$j_x^V(\alpha')=0$．用上述办法构造 A'，使得 $A\subset A'\subset V'\cap U$，则

$$j_{A'}^V(\alpha')=0,$$

由情形2，$\alpha=j_A^{A'}(j_{A'}^V(\alpha'))=0$．

第3步．A 是紧的．

则 A 是有限个紧集 $A_1, \cdots, A_m$ 的并，且其中每一个都包含在被 p 均匀覆盖的坐标邻域内，再应用关于 m 的归纳法及第 1 步和第 2 步.

第 4 步. $A\subset U$, U 是开集，其闭包 $\overline{U}$ 紧. 则定理对 U 和 A 成立.

我们应用三元组

$$(X,\ V\cup(X-\overline{U}),\ (U-A)\cup(A-\overline{U}))$$

的正合同调序列(14.6). 注意，由切除性，

$$H_q(U,\ U-A)\xrightarrow{\simeq}H_q(U\cup(X-\overline{U}),\ (U-A)\cup(X-\overline{U})),$$

当 $q>n$ 时，我们得到

$$H_{q+1}(X,\ U\cup(X-\overline{U}))\to H_q(U,\ U-A)$$
$$\to H_q(X,\ (U-A)\cup(X-\overline{U})).$$

将第 3 步应用于流形 X 和紧子集 $\overline{U}-U$ 及 $\overline{A}\cup(\overline{U}-U)$，可知第一第三个模为零，因此中间项为 0.

当 $q=n$ 时，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to H_n(U,\ U-A) & \to & H_n(X,\ (U-A)\cup(X-\overline{U})) & \to & H_n(X,\ U\cup(X-\overline{U})) \\
\downarrow{\scriptstyle j_A} & & \downarrow & & \downarrow \\
0\to \Gamma_c A & \xrightarrow{\quad i \quad} & \Gamma(\overline{A}\cup(\overline{U}-U)) & \xrightarrow{\quad r \quad} & \Gamma(\overline{U}-U)
\end{array}$$

其中单同态 i 的定义如下：

若 $s\in\Gamma_c A$ 在一个紧集 $K\subset A$ 之外为零，则

$$i(s)\,|\,A=s$$
$$\text{在 } K \text{ 以外},\ i(s)=0$$

(我们将 U^0 等同于 $p^{-1}(U)$). 由此图表可见 j_A 是同构.

第 5 步. 一般情形.

设 $s\in\Gamma_c A$ 在紧集 $K\subset A$ 之外为零. 存在开集 $U\supset K$ 使 $\overline{U}$ 紧(可用有限多个坐标邻域覆盖 K). 考虑 $A'=A\cap U$, $s'=s|A'$,

将第4步用于$j_{A'}$，且由交换图表

$$\begin{array}{ccc}H_n(U,\ U-A') & \rightarrow & H_n(X,\ X-A)\\ j_{A'}\downarrow\wr & & \downarrow j_A\\ 0\rightarrow s'\in\Gamma_c A' & \xrightarrow{\quad i\quad} & s\in\Gamma_c A\end{array}$$

可知$s\in\mathrm{Im}(j_A)$.

对于$\alpha\in H_q(X,\ X-A)$，当$q=n$时假定$j_A(\alpha)=0$，我们欲证$\alpha=0$. 设z是代表α的相对闭链，将上述推理用于$|z|$，则存在开集$U\supset|z|$使得$\overline{U}$紧. 令$A'=A\cap U$，用同一交换图表可完成$q=n$时的证明. 当$q>n$时，由第4步z在$H_q(U,\ U-A')$中的同调类是0，从而当然$\alpha=0$. □

(22.32)**评注** 可定向性并非在同伦等价之下的不变性质. 例如开Möbius带与圆周同伦等价(28.17).

(22.33)**练习** 设f: $X\rightarrow Y$是m层覆盖空间，其中X和Y是n维紧连通定向流形. 设$R=\mathbf{Z}$. 对任意$x\in X$选取x的一个邻域U，使U被f同胚地映到$y=f(x)$的一个邻域V上，则f导出同构

$$H_n(X,\ X-x)\rightarrow H_n(U,\ U-x)\rightarrow H_n(V,\ V-y)$$
$$\rightarrow H_n(Y,\ Y-y).$$

如果对每一点$x\in X$，这一同构将x处的局部定向映成在y处的局部定向，则称f为**保持定向的**.

设ζ_X，ζ_Y是这两个定向的基本同调类，则$H_n(f)(\zeta_X)$是ζ_Y的倍数，这个倍数称为f的**度**. f保持定向当且仅当它的度为正数；在此情况下degree$(f)=m$. 这一事实可利用交换图表

$$\begin{array}{ccc}H_n(X,\ X-f^{-1}(y))\cong\bigoplus\limits_{x\in f^{-1}(y)}H_n(X,\ X-x) & \rightarrow & H_n(Y,\ Y-y)\\ \uparrow & & \uparrow\\ H_n(X) & \xrightarrow[H_n(f)]{\qquad\qquad} & H_n(Y)\end{array}$$

得到.

(22.34) **注意** 本节中，我们大致看到了层理论的一些技巧. 要进一步扩展眼界，可参阅 Swan[56].

(22.35) **注意** 对流形 X 的可定向性的另一种处理办法是通过 X 的闭路空间在 X 的"拓扑切丛"上的作用，请参阅 E. Fadell [24].

(22.36) **练习** 证明：任一连通流形 X 是匀齐的(homogeneous)，即，对任意 $x, x'\in X$，存在 X 到自身的同胚 ϕ，使得 $\phi(x)=x'$. (提示：先考虑 $X=\dot{E}^n$ 的情形，证明此时 ϕ 在一薄壳 $1-\varepsilon\leqslant |y|<1$ 上可取为恒等映射. 然后做 x 和 x' 同处于一个坐标邻域 U 内的情形(在 U 之外取 ϕ 为恒等映射). 一般情形中，用一条道路连接 x, x'，用有限多个坐标邻域覆盖这条道路，再利用前一种情形通过有限步骤从 x 过渡到 x'.)

(22.37) **练习** 已知 n 维连通流形 $X, Y, n\geqslant 2$. 取点 $x\in X$, $y\in Y$. 令 c 和 d 分别是以 x 和 y 为中心的闭 n 维胞腔，c 和 d 分别包含在 x 和 y 的一个坐标邻域 U 和 V 内. 令 $\dot{c}$ 和 $\dot{d}$ 分别是 c 和 d 的内域，s 和 t 分别是它们的边界(所以 s 和 t 同胚于 S^{n-1}). 在不交并 $X-\dot{c}\amalg Y-\dot{d}$ 中，借助于一个指定的同胚 h 将 s 和 t 粘合起来. 证明所得的空间是一个连通的 n 维流形 $X\dot{+}Y$. 说明这样定义的加法在同胚的意义下仅依赖于 X 和 Y 是个很困难的问题，这与圆环猜想(Annulus Conjecture) [36] 有关. 最近，这一问题在维数 $\neq 4$ 的情形已由 Kirby 和 Siebenmann 完成 (见 Bull. Amer. Math. Soc. (1969), 742–749 及 Annals of Math. 89 (1970), 575–582).

(22.38) **练习** 证明上面定义的连通 n 维流形的同胚类上的加法是交换的、结合的，并以 S^n 所在的类为单位元. 这样，这些同胚类构成一个幺群(monoid)，而紧流形的同胚类构成一个子幺群

(submonoid). 在 $n=2$ 时，这个子幕群由 T_1 和 U_1 的类生成，且有关系 $T_1+U_1=U_g$(此处 $T_g=T_1+T_1+\cdots+T_1$(g 项)，$U_h=U_1+\cdots+U_1$(h 项)).

这一结果在高维情形的一些部分推广，可见 Smale[51a]和 Wall[58a, 73].

(22.39) **练习** 证明：对某个整数 $n\neq 2$(或 1)，$\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$-可定向性蕴含 $\boldsymbol{Z}$-可定向性.

(22.40) **练习** 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的标准正交坐标架之间定义一种等价关系：两个坐标架等价，如果由一个坐标架表示另一个坐标架的矩阵的行列式为 1. 应用(15.4)，建立 $H_n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n-\{0\})$ 的生成元和坐标架的等价类之间的明确对应.

(22.41) 设 $M^{n-1}\subset\boldsymbol{R}^n$ 是嵌入，使得任一 $x\in M$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有一闭邻域 U 满足 $(U, U\cap M)$ 和 (E^n, E^{n-1}) 是同胚偶. 这种嵌入称作**局部平坦的嵌入**. 证明 M 的一个定向等价于指定一个连续法方向 v: $M\to S^{n-1}$. 并证明如果 v 是局部同胚，且 M 是闭集，则 v 导出同构 $H(v)$: $H_{n-1}(M;\boldsymbol{Z})\to H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z})$.

(22.42) **练习** 嵌入 $M^{n-1}\subset N^n$ 称为**双边的**，如果 M 将 M 在 N 中一邻域 U 分成两个分枝(并不要求 $N-M$ 是分离的). 对连通的 M，如果不是这样，则嵌入称为**单边的**. 叠合立方体的相对面构造一个三维流形，并显示出一个环面的单边嵌入和一个 Klein 瓶的双边嵌入. 由叠合立方体的相对面构成的空间是一个 3 维流形当且仅当它的 Euler 示性数为 0(证明见于 Seifert 与 Threlfall, § 60).

(22.43) **练习** 如果 $M^{n-1}\subset N^n$ 是可定向流形 N 的局部平坦子流形，则 M 可定向当且仅当嵌入是双边的.

(22.44) **练习** 举例说明可定向流形的边缘未必可定向. 提示：Möbius 带 $\times I$ 的边缘是什么?

(22.45) **练习** 设 M 是 n 维闭流形. 如果 S^{n-1} 是坐标圆盘 $\bar{U}$ 的边界, 证明 M 可定向当且仅当包含映射 $S^{n-1}\to M-\mathrm{Int}U$ 导出同调的零映射.

(22.46) **练习** 设 M^n 是可定向的闭流形, 被坐标圆盘族 $\{U_i|1\leqslant i\leqslant k\}$ 覆盖, 且使得对任意 i, $\bar{U}_i-U_i$ 与 S^{n-1} 同胚. 假定 $\{\alpha_i|\alpha_i\in H_n(M, M-U_i)\}$ 构成一个 R-定向, 应用相对 Mayer-Vietoris 序列构造生成元 $\zeta\in H_n(M)$, 使对所有 i, ζ 映成 α_i.

(22.47) **练习** 证明可定向闭流形 M, N 的连通和(22.37)可定向. 已知 M 和 N 的定向及构造 $M+N$ 时用到的反向同胚, 证明此连通和具有和 M, N 的定向相容的一个定向.

(22.48) **练习** 设 h 是环面的一个同胚, $A=H_1(h)$ 是一 2 阶整矩阵. 证明 h 保持定向当且仅当 $\det A=1$.

(22.49) **练习** 证明带有相容拓扑群结构的流形是可定向的.

(22.50) **练习** 可定向 n 维闭流形 M 叫做**球状的**, 如果存在 $f: S^n\to M$, 使得对某个 $k\neq 0$, $H(f)\zeta_S=k\zeta_M$. 证明当 $n>1$ 时如果 M 是球状的, 则 $\pi_1(M)$ 有限.

23 奇异上同调

代数拓扑经过相当长一段发展时期, 直到 1930 年 Le-fschetz 给流形对偶定理以简明的公式化描述之后, 拓扑空间的上同调模才被人们认识. 在下述两种意义下上同调与下同调对偶: (1) 存在链与上链的双线性配对; (2) H^q 是**反变函子**, 即映射 $X\to Y$ 导出反方向的同态 $H^q(Y)\to H^q(X)$.

定义 X 上所有 q 维**奇异上链**的模 $S^q(X)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(S_q(X), R)=S_q(X)^*$. 于是, 一个 q 维奇异上链是一个 R-线性同态 $c: S_q(X)\to R$. 如果我们用 $[z, c]$ 表示链 z 在此同态之下的象, 则有

等式

$$[z_1+z_2,\ c]=[z_1,\ c]+[z_2,\ c],$$

$$[z,\ c_1+c_2]=[z,\ c_1]+[z,\ c_2],$$

$$[\nu z,\ c]=\nu[z,\ c]=[z,\ \nu c]\quad \nu\in R,$$

因此，[;]是双线性配对.

注意，一个 q 维上链由它在奇异 q 维单形上的值唯一确定，而且这些值可以任意指定. 因此，$S^q(X)$ 同构于若干个 R 的直积，直积因子的个数等于 X 中 q 维单形的个数.

(23.0) **评注** 设 $S(X)$ 是 $R=\boldsymbol{Z}$ 时的奇异复形，则 $R\otimes S(X)$ 标准同构于($1\otimes\sigma\to\sigma$) 奇异单形上的自由 R-模 ($\otimes$ 是在 $\boldsymbol{Z}$ 上求张量积)，且由一标准同构，$\mathrm{Hom}_R(R\otimes S(X),\ R)\cong\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(S(X),\ R)$.

(23.1) **例** 取 R 为实数域 $\boldsymbol{R}$，X 是 3 维欧氏空间. 在此特殊情形，0 维上链由它在 0 维单形上的值唯一确定. 因此，一个 0 维上链由一个任意的函数 ϕ: $X\to R$ 给定，记为 $c^0(\phi)$.

当 $q=1$ 时，假定已知一个 X 上的向量场 v，对 v 指定一个 1 维上链 $c^1(v)$ 如下：设 σ 是一奇异 1-单形，如果 σ 可微，定义

$$[\sigma,\ c^1(v)]=\int_\sigma \Omega^1(v),$$

这里右端是与 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$ 相伴的 1 次微分形式 $\Omega^1(v)=v_1dx+v_2dy+v_3dz$ 在道路 σ 上的线积分. 否则，定义右端为零.

当 $q=2$ 时，与 v 相伴的 2 次微分形式为

$$\Omega^2(v)=v_1dydz+v_2dzdx+v_3dxdy,$$

我们定义可微奇异 2-单形 σ 上的一个 2 维上链为

$$[\sigma,\ c^2(v)]=\int_\sigma \Omega^2(v),$$

其中右端是 v 的法向分量的面积分.

当 $q=3$ 时，从一连续函数 ϕ 开始，相伴3次微分形式 $\Omega^3(\phi)=\phi\,dx\,dy\,dz$. 定义可微奇异3-单形 σ 上的一个3维上链 $c^3(\phi)$ 为

$$[\sigma,\ c^3(\phi)]=\int_\sigma \Omega^3(\phi),$$

等式右端为密度 ϕ 在区域上的质量积分.

(23.2) **评注** 因为 S_q 是拓扑空间到 R-模的函子，$\mathrm{Hom}_R(\ ,R)$ 是 R-模范畴上的反变函子，故合成函子 S^q 是从拓扑空间到 R-模的反变函子. 更明确地说，如果 f: $X\to Y$ 是映射，则 $S^q(f)$: $S^q(Y)\to S^q(X)$ 定义如下：对 q 维链 z 和 q 维上链 c,

$$[z,\ S^q(f)c]=[S_q(f)z,\ c].$$

在 z 是奇异 q 维单形 σ 时，此公式变成

$$[\sigma,\ S^q(f)c]=[f\circ\sigma,\ c],$$

换言之，$S^q(f)$ 是 $S_q(f)$ 的转置 ${}^tS_q(f)$.

(23.3) **命题** 对所有 $q+1$ 维链 z 和 q 维上链 c, 存在唯一同态 δ: $S^q(X)\to S^{q+1}(X)$ 使得

$$[\partial z,\ c]=[z,\ \delta c].$$

并且，如果 f: $X\to Y$ 是映射，则

$$\delta S^q(f)=S^{q+1}(f)\delta.$$

另外，

$$\delta\delta=0.$$

证明 令 $\delta={}^t\partial$ 即可. □

我们将 δ 叫做上边缘算子.

(23.1)(续) 在我们的典型例子中，可说明上边缘算子如下：假设 ϕ 是3维空间上的一个可微函数，v 是可微向量场，如果 σ_q 是 q 维可微奇异单形，由定义有

(1) $[\sigma_1,\ \delta c^0(\phi)]=\phi(\sigma_1(E_1))-\phi(\sigma_1(E_0))$,

(2) $[\sigma_2,\delta c^1(v)]=\int_{\partial\sigma_2}\Omega^1(v)$,

(3) $[\sigma_3, \delta c^2(v)] = \int_{\partial\sigma_3} \Omega^2(v)$,

(4) $[\sigma_4, \delta c^3(\phi)] = \int_{\partial\sigma_4} \Omega^3(\phi)$.

另一方面，我们还可将函数 ϕ 和它的梯度向量场 $\nabla\phi$ 联系起来(从而有 $\Omega^1(\nabla\phi) = d\phi$)，于是

$$\int_{\sigma_1} \Omega^1(\nabla\phi) = \phi(\sigma_1(E_1)) - \phi(\sigma_1(E_0)),$$

因此，
$$\delta c^0(\phi) = c^1(\nabla\phi).$$
故在这些上链上 δ 应取梯度.

我们可以将向量场 v 与其旋度 $\nabla\times v$ 联系起来(从而有 $\Omega^2(\nabla\times v) = d\Omega^1(v)$)，由 Stokes 定理

$$\int_{\sigma_2} \Omega^2(\nabla\times v) = \int_{\partial\sigma_2} \Omega^1(v).$$

因此，
$$\delta c^1(v) = c^2(\nabla\times v).$$
所以，在这些 1 维上链上，δ 对应取旋度.

我们也可以将 v 与其散度 $\nabla\cdot v$ 联系起来，$\nabla\cdot v$ 为可微函数且满足 $\Omega^3(\nabla\cdot v) = d\Omega^2(v)$. 由 Gauss 定理，

$$\int_{\sigma_3} \Omega^3(\nabla\cdot v) = \int_{\partial\sigma_3} \Omega^2(v),$$

从而
$$\delta c^2(v) = c^3(\nabla\cdot v),$$
在这些上链上，δ 对应取散度.

在所有情况下，如果我们使用微分形式的语言，则 δ 总对应于取外导数 d. 由于在 3 维空间中对任意 3 次微分形式总有 $d\Omega^3 = 0$，故由(4)可知 $\delta c^3(\phi) = 0$(一般的 Stokes 定理).

(更详尽的叙述，见 Spivak[53]).

我们定义上闭链模和上边缘链模为

$$Z^q(X) = \delta: S^q(X) \to S^{q+1}(X) \text{ 的核},$$

$$B^q(X)=\delta: S^{q-1}(X)\to S^q(X)\text{的象}$$

并定义上同调模 $H^q(X;R)$ 为

$$H^q(X)=Z^q(X)/B^q(X).$$

如果 $f: X\to Y$ 是映射，则由(23.3)，$S^q(f)$ 保持上闭链和上边缘，从而过渡到商导出同态

$$H^q(f): H^q(Y)\to H^q(X).$$

这使得 H^q 成为反变函子($H^q(gf)=H^q(f)H^q(g)$)，所以上同调模是拓扑不变量.

(23.1)(续) 设 $X=3$ 维欧氏空间. 我们已用微分形式描述了一些上同调类. 上闭链对应于**闭**形式(其外导数为 0)，而上边缘是**正合**形式($d\omega$ 型的形式). 但 q 为正数时有以下经典事实，即 q 次形式(在 $\boldsymbol{R}^3$ 上)是闭形式当且仅当它是正合形式(即 $\operatorname{curl} v=0$ 当且仅当对某个 ϕ 有 $\operatorname{grad}\phi=v$，$\operatorname{div} v=0$ 当且仅当对某个 u 有 $v=\operatorname{curl} u$). 这对应于 q 为正数时 $H^q(\boldsymbol{R}^3)=0$ 的事实.

(23.4) **注意** 我们可以在微分流形 X 上定义微分形式的外微分. 闭 q 次微分形式模以正合微分形式明白地给出 X 的另一种第 q 个上同调向量空间. 当 X 仿紧时，这一向量空间标准同构于 $H^q(X;\boldsymbol{R})$. 这是 de Rham 的一个基本定理(见[17]，[68]).

(23.5) **例** 设 X 是复平面 $\boldsymbol{C}$ 中的开集，$\phi: X\to\boldsymbol{C}$ 是 X 中的全纯(解析)函数. 对 X 中每个奇异 1 维单形 σ_1，定义 1 维上链 $c^1(\phi)$ 在 σ_1 上的值为

$$[\sigma_1,\ c^1(\phi)]=\int_{\sigma_1}\phi\, dz.$$

这一 1 维上链实际上是一个 1 维闭链，因为由 Cauchy 定理，对 X 中每个奇异 2-单形 σ_2，

$$[\sigma_2,\ \delta c^1(\phi)]=\int_{\partial\sigma_2}\phi\, dz=0.$$

将这种思想推广到复解析流形，可以证明类似于 de Rham 定理的结论. 这一工作归功于 Dolbeault(Dolbeault[18]).

假定我们从偶(X, A)开始，定义

$$\bar{S}^q(X, A)=\mathrm{Hom}_R(S_q(X)/S_q(A), R),$$

定义上边缘算子 δ: $\bar{S}^q(X, A)\to\bar{S}^{q+1}(X, A)$为边缘算子 ∂: $S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A)\to S_q(X)/S_q(A)$的转置，于是我们定义

$H^q(X, A)=\delta$ 在 $\bar{S}^q(X, A)$ 上的核/δ 在 $\bar{S}^{q-1}(X, A)$上的象.

可以更明确地解释如下：我们有链复形的正合序列

$$0\to S_q(A)\xrightarrow{i}S_q(X)\xrightarrow{p}S_q(X)/S_q(A)\to 0,$$

应用函子 $\mathrm{Hom}_R(\quad, R)$，给出另一序列

$$0\to\bar{S}^q(X, A)\xrightarrow{t_p}S^q(X)\xrightarrow{t_i}S^q(A)\to 0.$$

(23.6) **引理** 此序列正合.

证明 先证明 ${}^ti$ 是到上的. 令 $S_q(X, A)$是 $S_q(X)$的支集不包含在 A 内的所有奇异单形生成的子模，则

$$S_q(X)=S_q(A)\oplus S_q(X, A).$$

因此，对 $S_q(A)$上的任一线性泛函规定它在 $S_q(X, A)$上等于零就可将它扩张到 $S_q(X)$上. 余下的步骤可形式地推出，而与 $S(X)$的特殊性无关. 适合 $fi=0$ 的 f: $S_q(X)\to R$ 可扩张成一个完全确定的 $\bar{f}$: $S_q(X, A)\to R$ 使得 $\bar{f}p=f$. 因此 $\mathrm{Ker}\,{}^ti\subset im\,{}^tp$. 其它步骤留给读者. □

特别是，${}^tp$ 将 $\bar{S}^q(X, A)$同构地映到 $S_q(X)$的子模，$S_q(A)$的零化子 $S^q(X, A)$上，如在这种意义下把 $\bar{S}^q(X, A)$与 $S^q(X, A)$等同视之，则上边缘就是前述 $S^q(X)$上的上边缘算子的限制. 于是相对上闭链模 $Z^q(X, A)$就是所有在 $S_q(A)$ 和 $B_q(X)$ 上等于零的上链，即 $Z^q(X, A)$是 $B_q(X, A)$的零化子. 显然，相对上边缘链模 $B^q(X, A)$包含在 $Z_q(X, A)$的零化子中，但相反的包含

关系一般不成立．在所有情况下，我们总有标准同态

$$(23.7) \qquad \alpha: H^q(X, A) \to H_q(X, A)^*.$$

换言之，我们可用公式

$$[\bar{z}, \bar{c}] = [z, c]$$

定义一个双线性配对（称为 Kroneker 积）：

$$(23.8) \qquad H_q(X, A) \times H^q(X, A) \to R.$$

(23.9) **命题** 若 R 是主理想子环(PID)，则 α 是满同态．

$R = \boldsymbol{Z}$ 和 $R=$ 一个域是我们可以想见的 PID 的主要例子．

证明 我们有 $H_q(X, A) = \bar{Z}_q(X, A)/\bar{B}_q(X, A)$，其中 $\bar{Z}_q(X, A) = p(Z_q)$、$\bar{B}_q(X, A) = p(B_q)$ 是自由模 $S_q(X)/S_q(A)$ 的子模．由于 R 是 PID，对所有 q，$\bar{B}_q$ 是自由模（见 Lang[35]，p. 387)，故正合序列

$$(23.10) \qquad 0 \to \bar{Z}_q(X, A) \xrightarrow{i} S_q(X)/S_q(A) \xrightarrow{\partial} \bar{B}_{q-1}(X, A) \to 0$$

分裂（存在同态 h 使得 $\partial h=$ 恒等，从而 $S_q(X)/S_q(A) = h\bar{B}_{q-1} \oplus \bar{Z}_q$)．由与上一引理中相同的推理，应用函子 $\mathrm{Hom}_R(\quad, R)$ 得到的对偶序列也正合，因此有图表

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & Z^q(X, A) & \to & S^q(X, A) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H_q(X, A)^* & \to & \bar{Z}_q(X, A)^* & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

其中各行各列都正合．由此 α 是满射． □

(23.11) 我们知道 α 的核是商模 $A^q(X, A)/B^q(X, A)$，这里 $A^q(X, A)$ 是 $Z_q(X, A)$ 的零化子．用 $E^q(X, A)$ 表示这个核，任意映射 $f: (X, A) \to (Y, B)$ 导出一个交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & E^q(X, A) & \to & H^q(X, A) & \to & H_q(X, A)^* \\ & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle H^q(f)} & & \uparrow{\scriptstyle {}^tH_q(f)} \\ 0 \to & E^q(Y, B) & \to & H^q(Y, B) & \to & H_q(Y, B)^*. \end{array}$$

如果用 $E^q(f)$ 表示 $H^q(f)$ 在 $E^q(Y, B)$ 上的限制，我们看到 E^q 成为反变函子.

(23.12) 我们现在来定义**连接同态**:

$$\delta: H^q(A) \to H^{q+1}(X, A).$$

考虑正合交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & S^q(X, A) & \to & S^q(X) & \xrightarrow{{}^t i} & S^q(A) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & \\ 0 \to & S^{q+1}(X, A) & \to & S^{q+1}(X) & \to & S^{q+1}(A) & \to 0 \end{array}$$

设 c 是 X 上一个上链，使得 ${}^t i(c)$ 是 A 上的闭上链，此闭上链代表上同调类 $\bar{c}$, 因 ${}^t i(\delta c) = 0$, 故 δc 是 $q+1$ 维相对闭上链，代表一个上同调类 $\overline{\delta c} \in H^{q+1}(X, A)$. 容易看出这个类与 c 的选择无关，因此可定义

$$\delta \bar{c} = \overline{\delta c}.$$

(23.13) **定理** 奇异上同调模具有下述性质：

(1) 反变函子性，

(2) 交换图表

$$\begin{array}{ccc} H^q(A) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X, A) \\ {\scriptstyle H^q(f)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle H^{q+1}(f)} \\ H^q(B) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(Y, B) \end{array}$$

(3) 正合上同调序列

$$0 \to H^0(X, A) \to \cdots \to H^q(X) \to H^q(A) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X, A) \to \cdots.$$

(4) 同伦不变性：

$$f \simeq g \Rightarrow H^q(f) = H^q(g),$$

(5) 切除性:

$\overline{U} \subset \mathring{A} \Rightarrow H^q(X, A) \to H^q(X-U, A-U)$为同构.

(6) 对单点 P,

$$H^q(P) = \begin{cases} R & q=0, \\ 0 & q>0. \end{cases}$$

证明 (1)—(3)作为练习.(4)是因为同伦的映射导出奇异复形间链同伦的映射((11.4),(13.13)),从而导出上链复形间链同伦的映射(不同的是指标倒转了),最后在上同调上导出相同的映射. (5) 应用(15.23)中得到 $S(X-U, A-U) \subset S(X, A)$ 这个链同伦等价用同样的讨论可推得. 或者考虑图表:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & E^q(X, A) & \to & H^q(X, A) & \to & H_q(X, A)^* & \to 0 \\
& {\scriptstyle E^q(f)=E^q(g)}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^tH_q(f)={}^tH_q(g)} & \\
0 \to & E^q(Y, B) & \to & H^q(Y, B) & \to & H_q(Y, B)^* & \to 0,
\end{array}$$

将此图表中的(Y, B)换成(X, A), (X, A)换成$(X-U, A-U)$, 应用同调论中的切除定理(15.1)、(15.23)及五项引理(19.15)可得(5). (6)可由单点的同调, 对所有的q, $E^q(P)=0$的事实(23.12)及标准同构 $R^* \cong R$ 得到. □

(23.13.1)**注意** 性质(1)—(6)是 Eilenberg-Steenrod 上同调论公理. 他们证明对可剖分空间偶, 在同构的意义下, 存在唯一的上同调论.这一点对任意空间并不成立(如对拓扑学家的正弦曲线). 人们可用这种公理刻画去证明 de Rham 定理 (23.4)(见 Schwartz[48]).

(23.14)**评注** 由上述基本性质,可推出许多其它性质. 我们列举一些如下,并把验证留作练习.

(7) 对非空的 X,定义增广上同调模

$$H^{0*}(X) = H^0(P) \to H^0(X) \text{的余核},$$

其中 $X\to P$ 是到单点 P 上的常值映射. 对非空的 A, 令

$$\tilde{H}^0(X, A)=H^0(X, A),$$

则增广上同调序列正合.

(8) 三元组(X', X, A)的正合上同调序列

$$\cdots\to H^q(X'X)\to H^q(X'A)\to H^q(X, A)\to\cdots.$$

(9) 正合三元组的 Mayer-Vietoris 正合序列:

$$\cdots\to H^q(X_1\cup X_2)\to H^q(X_1)\oplus H^q(X_2)\to H^q(X_1\cap X_2)\to\cdots.$$

(10) 相对 Mayer-Vietoris 序列.

(11) X 可缩蕴含对所有 q 有 $H^{q*}(X)=0$.

(23.15)练习 设(X_k)是 X 的道路连通分支族,则对所有 q, 存在标准同构

$$H^q(X)\to\prod_k H^q(X_k)$$

(其中不是直和而是直积). 若 X 非空且道路连通,则

$$H^0(X)=R,$$

$$H^0(X, A)=0 \quad (A\text{ 非空}),$$

(注意,这些性质不是从基本性质(1)-(6)推出的,因它们对 Cech-Alexander 上同调不真.)

(23.16) 根据同调论中的同样推理,

$$\delta: H^{q*}(S^{n-1})\to H^{q+1}(E^n, S^{n-1})$$

是同构,且

$$H^{q*}(S^n)\simeq\begin{cases}R & q=n,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

(22.17)评注 上同调中类似于公式(19.16-19.18)的结果同样可以证明.因此,如果 Z 是由 Y 经函数 $f: S^{n-1}\to Y$ 粘附一个 n-胞腔得到的空间,则有

(1) $H^q(Z)\to H^q(Y)$是同构,对 $q\neq n$, $q\neq n-1$,

(2) $H^{n-1}(Z)\cong\mathrm{Ker}H^{n-1}(f)$,

(3) 正合序列

$$0 \to \operatorname{Coker} H^{n-1}(f) \to H^n(Z) \to H^n(Y) \to 0.$$

我们再回到(23.11)中的映射

$$\alpha\colon\ H^q(X,\ A) \to H_q(X,\ A)^*.$$

例 借助于映射度为 2 的映射 $f\colon S^1 \to S^1$，将一个 2-胞腔粘附在 S^1 上可得射影平面. 应用(23.17)我们有 $H^2(\boldsymbol{P}^2;\ \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$. 由 $H_2(\boldsymbol{P}^2; \boldsymbol{Z}) = 0$，故 $H_2(\boldsymbol{P}^2; \boldsymbol{Z})^* = 0$，从而 $\operatorname{Ker}\alpha \neq 0$.

我们对这一问题的研究基于导出函子的方法，其思想是研究函子 $\operatorname{Hom}_R(\ \ ,N)$ 在 R-模短正合序列

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

上的作用，其中 N 是一个固定的 R-模. 我们沿袭 Cartan-Eilenberg[77]中的处理，但把讨论限制在基本内容上.

(23.18) **定义** R-模 M 的一个**分解**，是一链复形 $\{C_q,\ \partial_q\}$ 及一满同态 $\varepsilon\colon C_0 \to M$，适合 $\operatorname{Im}\partial_q = \operatorname{Ker}\partial_{q-1}$ 以及 $\operatorname{Im}\partial_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$. 回忆链复形的定义，每一 C_q 应要求为自由 R-模.

例 若 R 是域(M 是向量空间)，可取 $C_0 = M$，且对所有 $q \geqslant 1$，$C_q = 0$. 若 R 是整数环 $\boldsymbol{Z}$(M 是 Abel 群)，则存在自由 Abel 群 F 和满同态 $\varepsilon\colon\ F \to M$ 使得 $\operatorname{Ker}\varepsilon$ 是自由 Abel 群，这时，M 的一个分解(或表示)由 $C_0 = F$，$C_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$ 和 $q \geqslant 2$ 时 $C_q = 0$ 给出. R 是 PID 的情况与此类似，因为在这时自由模的子模是自由的[35].

分解是不唯一的，但不同的分解对映射来说却令人欣慰.

(23.19) **命题** 令 C, C' 是 M 和 M' 的分解. 已知映射 $f\colon M \to M'$，则存在链映射 $\{f_q\}$，$f_q\colon C_q \to C'_q$ 使得 $\varepsilon' f_0 = f\varepsilon$;

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C'_0 \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

并且，任意两个这样的链映射链同伦

证明 对 q 归纳定义 f_q. 因为 ε' 满，故 $\operatorname{Im} f\varepsilon \subset \operatorname{Im}\varepsilon'$. 又因 C_0 自由，故 f_0 存在. 假定链映射中直至 f_{q-1}:

$C_{q-1}\to C'_{q-1}$ 皆存在，则有 $\partial'_{q-1}f_{q-1}\partial_q=f_{q-2}\partial_{q-1}\partial_q=0$，这说明 $\mathrm{Im}f_{q-1}\partial_q\subset\mathrm{Ker}\,\partial'_{q-1}=\mathrm{Im}\,\partial'_q$，又因 C_q 自由，故 f_q: $C_q\to C'_q$ 存在且适合 $\partial'_qf_q=f_{q-1}\partial_q$. 对于两个链映射 f, g; $C\to C'$，我们对 q 归纳定义一个链同伦. 对 $q=0$, $\varepsilon'(f_0-g_0)=0$，因 $\mathrm{Im}\,\partial'_1=\mathrm{Ker}\,\varepsilon'$ 且 C_0 自由，故存在 D_0: $C_0\to C'_1$ 使得 $\partial'_1D_0=f_0-g_0$. 在归纳步骤中，我们有 $\partial'_qD_{q-1}\partial_q=(f_{q-1}-g_{q-1}-D_{q-2}\partial_{q-1})\partial_q=\partial'_q(f_q-g_q)$，因此 $\partial'_q(f_q-g_q-D_{q-1}\partial_q)=0$. 又因 $\mathrm{Ker}\,\partial'_q=\mathrm{Im}\,\partial'_{q+1}$ 且 C_q 自由，我们有 D_q: $C_q\to C'_{q+1}$ 并适合 $\partial'_{q+1}D_q+D_{q-1}\partial_q=f_q-g_q$. □

评注 对 C 的假定可减弱为 $\partial_{q-1}\partial_q=0$，即 C 是复形. 并且我们并未用到 C'_q 的自由性. 在此条件下的(23.19)是同调代数的基本引理之一.

(23.20) **命题** M 的任意两个分解链同伦等价.

证明 设 C, C' 是 M 的分解. f: $C\to C'$, g: $C'\to C$ 是覆盖 id: $M\to M$ 的链映射. 于是 gf, id: $C\to C$ 链同伦，对 fg 同理.

现在我们可以定义 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,N)$ 的导出函子. 为简化记号，我们将 $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,N)$ 暂记作 $H(\ \ )$. 设 C 是 M 的分解，构造上链复形 $C^*=\{H(C_q),\ \partial^*_{q+1}$: $H(C_q)\to H(C_{q+1})\}$，则导出函子即是 C^* 的同调，更确切地说：

(23.21) **定义** $\mathrm{Hom}_R(\ \ ,N)$ 的第 q 个导出函子 $Ext^q_R(\ \ ,N)$ 定义作

$$Ext^q_R(M,\ N)=\frac{\mathrm{Ker}\{\partial^*_{q+1}:\ H(C_q)\to H(C_{q+1})\}}{\mathrm{Im}\{\partial^*_q:\ H(C_{q-1})\to H(C_q)\}}.$$

现在的事实是，我们得到一个函数，它依赖于分解的选取. 它的函子性质尚待检验. 我们将检验的步骤列出，而具体验证留作练习. 注意，$Ext^q_R(M,\ N)$ 是 R-模.

第 1 步. M 和 M' 的分解之间的链映射 f: $C\to C'$ 导出一个完全确定的同态(注意方向)

$$Ext_R^q(M', N) \to Ext_R^q(M, N).$$

第 2 步．第 1 步中链同伦的链映射导出同一同态．

第 3 步．在标准同构的意义下，$Ext_R^q(M, N)$ 与分解无关．

第 4 步．$f: M \to M'$ 导出完全确定的同态

$$f^q: Ext_R^q(M', N) \to Ext_R^q(M, N),$$

使得 $(gf)^q = f^q g^q$ 以及 $(id)^q = id$．故 $Ext_R^q(\ , N)$ 是一反变函子．

(23.22) **评注** 将 $H(\ )$ 作用于 $C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ 产生正合序列 $0 \to H(M) \xrightarrow{\varepsilon^*} H(C_0) \xrightarrow{\partial_1^*} H(C_1)$，即 ε^* 为单同态，且 $\operatorname{Ker}\partial_1^* = \operatorname{Im}\varepsilon^*$．其验证是机械性的．

这样，$\operatorname{Ker}\partial_1^*$ 可与 $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ 等同视之．我们仅在 $q \geqslant 1$ 时应用记号 Ext，对于 Abel 群的情形，我们得到 $Ext^q = 0$，对 $q \geqslant 2$．因为此时存在 M 的分解使得 $C_q = 0$ 对 $q \geqslant 2$．故通常的记号是 $Ext(M, N)$ 而略去 q 和 $\boldsymbol{Z}$．记号 Ext 的出现是由于 $Ext(M, N)$ 也把 Abel 群的短正合序列（扩张）

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$

加以分类，见 MacLane[38]．

(23.23) **练习** $\operatorname{Hom}_R(\ ,\ )$ 的双可加性蕴含 $Ext_R^q(\ ,\ )$ 的双可加性．对 Abel 群 G，$Ext(\boldsymbol{Z}, G) = 0$，$Ext(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}, G) \cong G/nG$．若 G 有限生成，则 $Ext(G, \boldsymbol{Q}) = 0$．$Ext(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z})$ 不可数．

为研究 $\operatorname{Hom}_R(\ , N)$ 在短正合序列上的作用，我们摹仿在拓扑情形构造连接同态的方法．一个重要的特征是出现一个偶 (X, A) 的奇异复形的短正合序列

$$0 \to S(A) \to S(X) \to S(X, A) \to 0.$$

在我们的代数问题中，将用分解的"直和"的构造达到同样的目的．

(23.24) **构造** 已知 R-模的短正合序列 $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \to 0$ 及 A' 和 A'' 的分解 C' 和 C''．令 $C_q = C_q' \oplus C_q'$．对某个满

足 $j\bar{j}=\varepsilon''$ 的 $\bar{j}: C_0''\to A$, 投影 ε: $C_0\to A$ 具有形式 $\varepsilon(x, y)=i\varepsilon'(x)+\bar{j}(y)$.

$$\begin{tikzcd}
 & C_0'' \arrow[dl, dashed, "\bar{j}"'] \arrow[d, "\varepsilon''"] & \\
A \arrow[r, "j"'] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注意,因 C_0'' 自由且 j 是满同态,故 $\bar{j}$ 存在(不唯一). 对某个 e_q: $C_q''\to C_{q-1}'$, 边缘算子 ∂_q: $C_q\to C_{q-1}$ 具有形式 $\partial_q(x, y)=(\partial_q' x+e_q y, \partial_q'' y)$. 特别, 因我们需要 $\varepsilon\partial_1=0$, 故必须有 $i\varepsilon' e_1+\bar{j}\partial_1''=0$. 这个方程对 e_1 可解(不唯一), 这是因为 $\mathrm{Im}\,\bar{j}\partial_1''\subset\mathrm{Im}\,i\varepsilon'$, 序列在 A 处正合, ε' 是满同态及 C_1'' 自由. $\partial_{q-1}\partial_q=0$ 的要求可转化成 $0=\partial_{q-1}' e_q+e_{q-1}\partial_q''$, 而这一方程可对 e_q 归纳求解. ε 是满同态和 $\mathrm{Im}\,\partial_q=\mathrm{Ker}\partial_{q-1}$ 的验证是读者应当完成的练习. 我们将 $\{C_q, \partial_q\}$ 称为 C' 和 C'' 的**正规扩张**,将 $\{\bar{j}, e_q\}$ 称为该**正规扩张的数据**.

(23.25) **引理** 由 $x\to(x, 0)$ 定义的包含 $C'\to C$ 及由 $(x, y)\to y$ 定义的射影 $C\to C''$ 都是链映射. 且图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "j"] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

可交换. 因此 $0\to C'\to C\to C''\to 0$ 是分解的一个短正合序列.

证明 由定义立得. □

注意 跟在拓扑的情形一样, C 作为链复形不一定可裂, 而作为 R–模可裂.

(23.26) **引理** 将函子 $\mathrm{Hom}_R(\ \ , N)$ 作用于一个正规扩张可得一短正合序列

$$0\to(C'')^*\to C^*\to(C')^*\to 0.$$

证明 非形式部分仅是右边的满射，这可由 R-分裂 $C\to C'$ 得到. □

(23.27) **命题** 令 $0\to A'\xrightarrow{i}A\xrightarrow{j}A''\to 0$ 是短正合序列. 则存在自然同态 δ: $Ext_R^q(A',N)\to Ext_R^{q+1}(A'',N)$ 及自然长正合序列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(A'',N)\to \mathrm{Hom}_R(A,N)\to\cdots\xrightarrow{\delta} Ext_R^q(A'',N)$$

$$\to Ext_R^q(A,N)\to Ext_R^q(A',N)\xrightarrow{\delta} Ext_R^{q+1}(A'',N)\to\cdots,$$

这里自然性是对短正合序列的映射而言.

证明 由 (23.20) 可用正规扩张计算 $Ext_R^q(A,N)$. 可以如同拓扑情形那样去构造连接同态. 长正合序列的正合性的证明可由拓扑情形的讨论得到. 正规扩张的非典型构造导致自然性方面的一个麻烦，而对拓扑情形，这种麻烦就不存在.

子引理 设

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & A'' & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha''} & & \\
0 & \to & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \to & 0
\end{array}$$

是每行正合的可交换图表，并设

$$0\to C'\to C\to C''\to 0$$

和

$$0\to D'\to D\to D''\to 0$$

分别是数据为 $\{\bar{j},e_q\}$ 和 $\{\bar{k},f_q\}$ 的图表中行上的正规扩张. 对于 α' 和 α'' 上的链映射 F': $C'\to D'$ 和 F'': $C''\to D''$, 则存在 α 上的链映射 F: $C\to D$ 使得图表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C' & \to & C & \to & C'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F'} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F''} & & \\
0 & \to & D' & \to & D & \to & D'' & \to & 0
\end{array}
$$

交换. 更进一步, 任意两个这样的三元组(F', F, F''), (G', G, G'') 通过一链同伦 $F\simeq G$ 而链同伦, 并且此链同伦与给定的链同伦 $F'\simeq G'$, $F''\simeq G''$ 相容.

子引理的证明 所需的 F 对某个 λ_q: $C''_q\to D'_q$ 具有形式

$$F(x, y)=(F'x+\lambda_q y, F''_q y).$$

F 为链映射的条件转化为

$$\bar{i}'\varepsilon'\lambda_0+\bar{k}F''_0=\alpha\bar{j}$$

及
$$\bar{\partial}'_q\lambda_q+f_qF''_q=F'_{q-1}e_q+\lambda_{q-1}\partial''_q,$$

并且, 这些可对 $\{\lambda_q\}$ 归纳求解. 有关链同伦的部分可类似地证明. □

(23.27)中的自然性可由图表追踪证明. □

我们将这部分理论用于 $\operatorname{Ker}\alpha$ 的问题. 若不另声明, 我们的讨论限于 Abel 群$(R=\boldsymbol{Z})$.

(23.28) **万有系数定理** 存在自然短正合序列

$$0\to Ext(H_{n-1}(X, A; \boldsymbol{Z}), G)\to H^n(X, A; G)$$
$$\xrightarrow{\alpha}\operatorname{Hom}(H_n(X, A; \boldsymbol{Z}), G)\to 0,$$

且此序列可裂(未必自然可裂).

证明 记 $S_n=S_n(X, A)$, $H_n=H_n(X, A; \boldsymbol{Z})$, B_n 和 Z_n 是边缘链群和闭链群. 我们有自然短正合序列

$$0\to B_n\to Z_n\to H_n\to 0,$$
$$0\to Z_n\to S_n\to B_{n-1}\to 0.$$

后者可裂(不一定自然). 构造图表

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & \mathrm{Hom}(S_{n+1}, G) & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_n, G) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_n, G) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_n, G) \arrow[u] \arrow[r] & Ext(H_n, G) \arrow[r] & 0 \\
 & & \mathrm{Hom}(S_n, G) \arrow[u] \arrow[ur, dashed, "\partial^*_{n+1}"] & 0 \arrow[u] & & \\
 & \mathrm{Hom}(S_{n-1}, G) \arrow[ur, dashed, "\partial^*_n"] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_{n-1}, G) \arrow[u] \arrow[r] & Ext(H_{n-1}, G) & & \\
 & & 0 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

由(23.27)各行各列皆正合. 注意由于 $\mathrm{Hom}_G(G\otimes S_n,\ G) \cong \mathrm{Hom}_Z(S_n,\ G)$. 虚箭头表示的合成是$(X,\ A)$的上链复形的边缘算子. 定义

$$F_0 = \mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}(S_n,\ G) \to \mathrm{Hom}(Z_n,\ G)\},$$

$$F_1 = \mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}(S_n,\ G) \to \mathrm{Hom}(B_n,\ G)\}.$$

则 $F_0 \subset F_1 = \mathrm{Ker}\,\partial^*_{n+1}$. 从上边一行的正合性可得完全确定的满同态

$$F_1 \to \mathrm{Hom}(H_n,\ G),$$

其核恰为 F_0. 由左边一列的正合性我们得到 $F_0 \cong \mathrm{Hom}(B_{n-1}, G)$, 因此有满同态

$$F_0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1},\ G),$$

设其核为 K, 则 $K \cong \mathrm{Im}\,\partial^*_n$. 利用 $H^n = \mathrm{Ker}\,\partial^*_{n+1}/\mathrm{Im}\,\partial^*_n$, 我们得到交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Im}\,\partial^*_n \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1/F_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{n-1},\ G) \arrow[r] & H^n \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_n,\ G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

最下边一行是所需的正合序列. 自然性是(23.27)和证明中构造的自然性的结果. 特别是, 由 F_0 出发的满同态是自然的且无需构造中序列的分裂. 分裂的出现是由于分裂 $B_{n-1}\to S_n$ 分裂了左边一列, 给出映射 $\mathrm{Hom}(H_n, G)\to F_1$. 与投影 $F_1\to H^n$ 合成, 便分裂万有系数序列. □

评注 如果 R 是 PID, 可推广(23.28), 用 $H_*(X, A; R)$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\ \ , N)$, $Ext_R(\ \ , N)$ 表示 $H^n(X, A; N)$, 其中 N 是 R-模. 对更一般的 R, 则序列将换成一个更精心的代数设计——谱序列.

(23.29) **评注** 假定 R 是 PID, 应用(23.28)可以计算一些熟悉的空间的上同调. 对 r 叶玫瑰线 G_r,

$$H^q(G_r)\cong H_q(G_r)_*\cong\begin{cases} R & q=0,\\ R^r & q=1,\\ 0 & q>1.\end{cases}$$

对 g 倍环面 T_g,

$$H^q(T_g)\cong H_q(T_g)^*\cong\begin{cases} R & q=0 \quad \text{和} \quad q=2,\\ R^{2g} & q=1,\\ 0 & q>2.\end{cases}$$

对复射影空间,

$$H^q(\boldsymbol{CP}^n)\cong\begin{cases} R & q\text{ 是偶数且 } q\leqslant n,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

下面考虑不可定向紧曲面 U_h. 设 p 是整环 R 的示性数, 有两种情形:

情形 1. $p=2$, 则 $2R=0, R_2=R$, 所有同调模都是自由模, 且有

$$H^q(U_h)\cong H_q(U_h)^*\cong\begin{cases} R & q=0 \quad \text{和} \quad q=2,\\ R^h & q=1.\\ 0 & q>2,\end{cases}$$

情形 2. $p\neq 2$, 应用(23.28)可得

$$H^q(U_h)\cong\begin{cases}R & q=0,\\ R^{h-1} & q=1,\\ R/2, & q=2,\\ 0 & q>2.\end{cases}$$

同理，对实射影空间，若 R 有示性数 2，则

$$H^q(\boldsymbol{P}_h)\cong\begin{cases}R & q\leqslant n,\\ 0 & q>n.\end{cases}$$

(23.30) **练习** 映射 $\boldsymbol{P}^2\to S^2$ 定义为将底胞腔捏成一点. 计算在整数及模 2 上同调上导出的映射. 利用此结果证明(23.28)中的分裂不是自然的.

(23.31) **练习** 改写 (23.28) 的证明，说明 $H_q(X;\ F)$ 和 $H^q(X;\ F)$ 是对偶的向量空间，这里 F 是域.

(23.32) **练习** 如果 X 是球状复形，使得对所有 $q>0$, $H_q(X;\ F)=0$, 这里 $F=\boldsymbol{Q}$ 或者 $F=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$, 其中 p 取遍所有素数. 则 $H_q(X;\boldsymbol{Z})=0$. 提示：回忆(19.20).

(23.33) **练习** 设 $f: X\to Y$ 是球状复形间的映射. 对所有 $q>0$, f 导出同构 $H(f): H_q(X;F)\to H_q(Y;\ F)$, F 与(23.32)中相同. 则 f 导出整系数同调和上同调的同构. 提示：考虑映射锥 Cf, 利用(23.28)中的自然性，进行从映射到映射锥再从映射锥到映射的讨论.

下面的一系列练习发展了 Bockstein 同态的一些性质. 对应于短正合序列 $0\to\boldsymbol{Z}\xrightarrow{n}\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\to 0$, 我们有链复形的短正合序列

$$0\to S(X)\xrightarrow{n}S(X)\to\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\otimes S(X)\to 0.$$

(23.34) **练习** 通过构造连接同态的过程，得到自然的长正合

序列

$$\to H_q(X;\boldsymbol{Z})\xrightarrow{n}H_q(X;\boldsymbol{Z})\to H_q(X;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$$
$$\xrightarrow{\beta}H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z})\to\cdots$$

和

$$\to H^{q-1}(X;\boldsymbol{Z})\xrightarrow{\beta}H^q(X;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\to H^q(X;\boldsymbol{Z})$$
$$\xrightarrow{n}H^q(X;\boldsymbol{Z})\to\cdots.$$

(23.35)练习 将(23.34)推广到任意 Abel 群的短正合序列 $0\to A\to B\to C\to 0$. 并检验由短正合序列的交换图表导出的映射的相容性.

(23.36)练习 证明与 $0\to\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\xrightarrow{n}\boldsymbol{Z}/n^2\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\to 0$ 相伴的 Bockstein 同态的合成是 0.

(23.37)练习 证明 β: $H^{n-1}(\boldsymbol{P}^n;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\to H^n(\boldsymbol{P}^n;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ 当 n 为偶数时是同构而当 n 是奇数时是 0. 证明 β: $H_2(L(p,q);\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})\to H_1(L(p,q);\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$是同构, 其中 $L(p,q)$是透镜空间(21.28).

(23.38)练习 证明覆盖射影 $S^{2n}\to P^{2n}$ 取任一有限生成阿伯尔群为系数群时在同调和上同调上均导出 0. 回忆(16.13)这个映射不零伦.

下面一组练习探讨一个把上同调与映射同伦类联系起来的重要定理的特殊情况. 我们假定空间 X 是有限连通 CW 复形, 它的 X^0 是单点, X^1 是一束圆周. CW 复形的一般理论表明任意有限连通 CW 复形同伦等价于一个这种形式的 CW 复形[66]. 映射 f: $X\to Y$ 的同伦类集合记作$[X,Y]$.

(23.39)定理 存在由 $\Phi(f)=H^1(f)(\iota)$ 给出的自然同构 Φ: $[X,S^1]\to H^1(X;\pi_1S^1)$, 其中 $\iota\in H^1(S^1;\pi_1S^1)$在下面由(23.28)

和(12.1)得到的同构之下对应于恒等映射：

$$H^1(S^1;\pi_1 S^1)\cong \mathrm{Hom}(H_1(S^1;\boldsymbol{Z}),\ \pi_1 S^1)$$
$$\cong \mathrm{Hom}(\pi_1 S^1,\ \pi_1 S^1).$$

第1步．将 Φ 分解如下：

$$\begin{array}{ccc} [X,\ S^1] & \xrightarrow{\Phi} & H^1(X;\pi_1 S^1) \\ \Psi\downarrow & & \uparrow\cong \\ \mathrm{Hom}(\pi_1 X,\ \pi_1 S^1) & \cong\to & \mathrm{Hom}(H_1(X;\boldsymbol{Z}),\ \pi_1 S^1) \end{array}$$

其中 $\Psi(f)=f_*$ 是 π_1 的导出映射．

第2步．给定$[X,\ S^1]$一个 Abel 群结构，使得 Ψ 是同态．

a) 设 $m: S^1\times S^1\to S^1$ 是复数乘法，$c: S^1\to S^1$ 是共轭．则 $m_*: \pi_1 S^1\times\pi_1 S^1\to\pi_1 S^1$ 是同伦类的加法，c_* 是用 -1 作乘法．后一事实要用到 $m(1\times c)\varDelta=0$，其中 0 是映射 $e^{i\theta}\to e^{i0}=(1,\ 0)$，$\varDelta$ 是对角映射．

b) 已知$f,\ g:\ X\to S^1$，用 $f+g=m(f\times g)\varDelta$ 定义 $f+g:\ X\to S^1$．证明+是单值地定义在同伦类上，且是可结合和可交换的．$0:\ X\to S^1,\ x\to e^{i0}$ 是单位元．证明在$[X,\ S^1]$中 $cf=-f$，并且 Ψ 是关于此结构的自然同态．

第3步．证明 Ψ 是单同态．考虑 $\Psi(f)=0$ 并利用提升定理(6.1)．

第4步．证明 Ψ 是满同态．首先利用在 X 上的假设，再应用(4.12)及在骨架上的归纳证明 $X^2\subset X$ 导出 π_1 中的同构．胞腔分解 $X^2=(S^1\vee\cdots\vee S^1)\cup e^2\cup\cdots\cup e^2$ 给出一个表示 $1\to R\to F\to\pi_1\to 1$．我们将 X^2 看作一个映射锥．利用(21.17)中的事实可得映射 $h:\ X^2\to S^1$，使得对一个预先指定的 φ 有 $h_*=\varphi$．利用当 $i\geqslant 2$ 时 $\pi_i(S^1)=0$ 及在胞腔上的归纳，将 h 扩张到 X 上．

(23.40)**练习**　假如 R 是 PID，H_{q-1} 有限生成．设 T_{q-1} 是 H_{q-1} 的挠子模．如果 H_q 也有限生成且 F_q 是 H_q 模以其挠子模

所得的商模，则

$$H^q \cong F_q \oplus T_{q-1}(\text{非标准的}).$$

24 上积和卡积

上同调区别于同调的关键特征是存在一个称为上积的自然乘法，使得所有上同调模的直和成为一个分次 R-代数(历史上，乘法首先用闭链的交定义在流形的同调群的直和上，但定义很困难，见 Lefschetz[37]，第 4 章)。这个上同调环通过卡积作用在同调模的直和上，因此，卡积可用于表示流形上的对偶定理.

设
$$S^{\cdot}(X)=\bigoplus_{q\geqslant 0} S^q(X).$$

我们首先在 $S^{\cdot}(X)$ 中定义上积. 我们要求上积是双线性的，且若 $c\in S^p(X)$，$d\in S^q(X)$，要求 $c\cup d\in S^{p+q}(X)$. 为定义 $c\Theta d$，只须对任意奇异$(p+q)$-单形 σ，指定$[\sigma, c\Theta d]$. 为此，考虑由 $\lambda_p=(E_0, \cdots, E_p)$，$\rho_q=(E_p, E_{p+1}, \cdots, E_{p+q})$给出的仿射映射

$$\lambda_p: \Delta_p \to \Delta_{p+q},$$
$$\rho_q: \Delta_q \to \Delta_{p+q}.$$

令
$$[\sigma, c\cup d]=[\sigma\lambda_p, c][\sigma\rho_q, d],$$

其中右边是 R 中两纯量的积(这样一来，即是用 c 作用在 σ 的"前" p 维面上，用 d 作用在 σ 的"后" q 维面上，然后将结果相乘). 如果 $c=\sum_p c_p$，$d=\sum_q d_q$ 是 $S^{\cdot}(X)$ 中任意两元，按定义，

$$c\cup d=\sum_{p,q} c_p\cup d_q.$$

(24.1)命题 $S^{\cdot}(X)$中的上积是双线性的、可结合的，且以 0 维上链 1 为单位元，这里 1 是对 X 中任一点 x 由$[x, 1]=1$定义.

证明 易见.(注意，当初 1 表示为 $\partial^*(9.7)$.) □

(24.2)命题 上边缘算子是分次环 $S^{\cdot}(X)$的求导运算，即对

$c\in S^p(X)$, $d\in S^q(X)$,

$$\delta(c\cup d)=\delta c\cup d+(-1)^p c\cup\delta d.$$

证明 对任意$(p+q+1)$-单形σ,我们有

$$\begin{aligned}
[\sigma,\ \delta c\cup d]&=[\partial(\sigma\lambda_{p+1}),\ c][\sigma\rho_q,\ d]\\
&=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i[(\sigma\lambda_{p+1})^{(i)},\ c][\sigma\rho_q,\ d]\\
&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[\sigma^{(i)}\lambda_p,\ c][\sigma\rho_q,\ d]\\
&\quad+(-1)^{p+1}[\sigma\lambda_p,\ c][\sigma\rho_q,\ d],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma,\ c\cup\delta d]&=[\sigma\lambda_p,\ c][\partial(\sigma\rho_{q+1}),\ d]\\
&=\sum_{i=p}^{p+q+1}(-1)^{i-p}[\sigma\lambda_p,\ c][(\sigma\rho_{q+1})^{(i-p)},\ d]\\
&=[\sigma\lambda_p,\ c][\sigma\rho_q,\ d]\\
&\quad+(-1)^p\sum_{i=p+1}^{p+q+1}(-1)^i[\sigma\lambda_p,\ c][\sigma^{(i)}\rho_q,\ d].
\end{aligned}$$

将后式乘以$(-1)^p$再与前式相加,含$[\sigma\lambda_p,\ c][\sigma\rho_q,\ d]$的项则符号相反而消去,最后得到的和是

$$\sum_{i=0}^{p+q+1}(-1)^i[\sigma^{(i)}\lambda_p,\ c][\sigma^{(i)}\rho_q,\ d]=[\sigma,\ \delta(c\cup d)].\qquad\square$$

(24.3) **推论** 上闭链模的直和$Z^\cdot(X)$是$S^\cdot(X)$的子环,上边缘链模的直和$B^\cdot(X)$是$Z^\cdot(X)$的双边理想. 故将上积过渡到商,上同调模的直和$H^\cdot(X)$成为一分次$\hat{R}$-代数.

证明 显然(注意由于$\partial^*\partial=0$, 1是上闭链). $\square$

设f: $X\to Y$是映射, 则对所有q, f导出同态$S^q(Y)\to S^q(X)$. 因此,由

$$S^\cdot(f)\left(\sum_p c_p\right)=\sum_p S^p(f)(c_p)$$

可定义一个同态$S^\cdot(f):S^\cdot(Y)\to S^\cdot(X)$. 同理, 我们有模同态$H^\cdot(f):H^\cdot(Y)\to H^\cdot(X)$.

(24.4) 命题 $S^{\cdot}(f)$ 和 $H^{\cdot}(f)$ 都是环同态.

证明 对 $c\in S^p(Y)$, $d\in S^q(Y)$ 和 $(p+q)$–单形 σ,

$$\begin{aligned}[\sigma,\ S^{p+q}(f)(c\cup d)] &= [f\sigma,\ c\cup d]\\ &= [(f\sigma)\lambda_p,\ c][(f\sigma)\rho_q,\ d]\\ &= [f(\sigma\lambda_p),\ c][f(\sigma\rho_q),\ d]\\ &= [\sigma,\ S^p(f)(c)\cup S^q(f)(d)].\end{aligned}$$ □

(24.5) 推论 $S^{\cdot}$ 和 $H^{\cdot}$ 是从拓扑空间范畴到分次 R–代数范畴的反变函子.

(24.6) 例 设 X 是单点空间 P, 则, 作为 R–模, $H^{\cdot}(P)=H^0(P)=R$. 上闭链 1 的上同调类 1 是其生成元. 由于 $1\cup 1=1$, 可知 $H^{\cdot}(P)$ 环同构于 R.

(24.7) 注意 环 $S^{\cdot}(X)$ 一般没有良好的交换性质. 例如, 将 X 取作单位区间 Δ_1, 依下式定义 0–上链 c, d:

$$[x,\ c]=\begin{cases}1 & x=E_0,\\ 0 & \text{其它};\end{cases}$$

$$[x,\ d]=\begin{cases}1 & x=E_1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

若 δ_1 是恒等 1–单形, 我们有

$$[\delta_1,\ c\cup d]=1,$$
$$[\delta_1,\ d\cup c]=0.$$

不过, 有

(24.8) 定理 $H^{\cdot}(X)$ 反交换, 即对 $a\in H^p(X)$, $b\in H^q(X)$, 则

$$a\cup b=(-1)^{pq}b\cup a.$$

特别的, 如果 $a=b$ 且 p 为奇数, 则 $a\cup a=0$, 在此假定环 R 的特征数 $\neq 2$.

证明[*] 这个定理的证明异常复杂, 且包含着某些新思想. 现

[*] 另一证明可由(29.17)和(29.29)给出.

分为如下六个步骤:

1. 设 $\pi=\pi_p$ 是整数$[0, 1, \cdots, p]$的任一置换. 将π看成是把顶点 E_i 映成 $E\pi(i)$的仿射映射 $\Delta_p\to\Delta_p$,则对空间 X 中的任意奇异 p 维单形 σ, σ 与 π 的合成是一个新的 p 维单形. 线性扩张后给出 $S_p(X)$的一个自同态 $z\to z\pi$(**置换算子**).

2. 如果 $i_0, \cdots, i_q$ 是 0 与 p 之间的 $q+1$ 个整数, 令$(i_0\cdots i_q)$表示对所有 j 将 E_j 映成 E_{i_j} 的仿射映射 $\Delta_q\to\Delta_p$. 则对空间 X 中任意奇异 p-单形 σ, $\sigma(i_0\cdots i_q)$是奇异 q-单形(特别的称$(0\cdots j-1\ j\ j\ j+1\cdots p)$为 p 维第 j 个**退化算子**). 由所有奇异单形 $\sigma(i_0\cdots i_q)$生成的 $S_q(X)$ 的子模记为 $C(\sigma)_q$.

3. 显然, 边缘算子将 $C(\sigma)_q$ 映入 $C(\sigma)_{q-1}$. 因此, 这些子模的序列构成一个代数链复形, 记为 $C(\sigma)$. 而且我们可以考虑由 ∂ 在 $C(\sigma)_q$ 上的核模以 ∂ 在 $C(\sigma)_{q+1}$ 上的象所得的同调模 $H_qC(\sigma)$.

(24.9) **引理** $C(\sigma)$是零调链复形, 即对所有 $q>0$,

$$H_qC(\sigma)=0.$$

证明 在基元上定义算子 $O: C(\sigma)_q\to C(\sigma)_{q+1}$ 为

$$O(\sigma(i_0\cdots i_q))=\sigma(Oi_0\cdots i_q).$$

这恰为σ和 E_0 与$(i_0\cdots i_q)$的联接(15.10)的合成. 因此对 $q>0$ 及任意 $z\in C(\sigma)_q$, 我们有

$$\partial(Oz)=z-O(\partial z).$$

所以, 如果 z 是闭链, 则 $z=\partial(Oz)$. □

4. 对任意 p 令 θ_p 表示$[0, \cdots, p]$的倒序置换 $\theta_p(i)=p-i$. 定义分次模 $S.(X)$的自同态 θ, 对任一 $z\in S_p(X)$,

$$\theta(z)=(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}z\theta_p,$$

为简明起见，将 θ_p 的符号记为 $\varepsilon_p=(-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}$，引入这一符号是因为下面的引理：

(24.10) 引理　$\theta\partial=\partial\theta$.

证明　如果 σ 是奇异 p-单形，则

$$\partial\theta(\sigma)=\varepsilon_p\partial(\sigma\theta_p)$$
$$=\varepsilon_p\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\sigma(p\cdots\hat{i}\cdots0).$$

而
$$\theta(\partial\sigma)=\varepsilon_{p-1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\sigma(p\cdots\hat{i}\cdots0).$$

因此我们必须说明 $\varepsilon_p(-1)^{p-i}=\varepsilon_{p-1}(-1)^{i}$，而这是容易的. □

由 (24.10)，θ 过渡到商可得出 $H.(X)$ 的自同态. 我们希望说明这个自同态是恒等映射. 事实上，我们有下述的

(24.11) 引理　在 $S.(X)$ 上，θ 链同伦于恒等映射. 即存在 $S.(X)$ 的维数升 1 的自同态 J，使得

$$Id-\theta=\partial J+J\partial.$$

证明　如果我们愿意，可以明确地写出 J 的复杂表示式. 而我们应用第 5 步，**零调承载子的技巧**代替了这一点. 首先注意对任意 p 维单形 σ，$Id(\sigma)$ 和 $\theta(\sigma)$ 都在 $C(\sigma)_p$ 内 (C"承载"了 Id 和 θ). 再者，在 $S_0(X)$ 上，$\theta=Id$，所以我们能够对 $Id-\theta$ 应用下述代数引理 □

5. 设 ϕ: $S.(X)\to S.(Y)$ 是链同态 (意味着 ϕ 保持链的维数且与边缘算子可交换. 更一般地，$S.(X)$ 和 $S.(Y)$ 可以代以任意代数链复形)，假定在 $S_0(X)$ 上 $\phi=0$ 且 ϕ 有一个零调承载子 (意即对 $S.(X)$ 中每一奇异单形 σ 总伴随 $S.(Y)$ 中一个零调子复形 $C(\sigma)$，使得 $\phi(\sigma)\in C(\sigma)$，且使得对 σ 的任意面 $\sigma^{(i)}$，$C(\sigma)\supset C(\sigma^{(i)})$).

(24.12) 引理　ϕ 与 0 链同伦.

证明 我们用归纳法构造 $J: S_p(X) \to S_{p+1}(Y)$. 当 $p=0$ 时，令 $J=0$. 对正数 p，假定对小于 p 的维数 J 已有定义，且满足 $\phi=\partial J+J\partial$，并使得对维数低于 p 的任意单形 τ，$J(\tau)\in C(\tau)$，则只需在 σ 是 p 维单形时定义 $J(\sigma)$ 且验证这些条件. 现在，

$$J\partial\sigma\in \bigcup_i C(\sigma^{(i)})\subset C(\sigma),$$

$$\phi\sigma\in C(\sigma),$$

因此，$\phi\sigma-J\partial\sigma\in C(\sigma)$. 但此链是一闭链:

$$\partial(\phi\sigma-J\partial\sigma)=\phi\partial\sigma-\partial J\partial\sigma=(\varphi-\partial J)\partial\sigma,$$

由于在维数为 $p-1$ 时 $\phi=\partial J+J\partial$，故

$$(\phi-\partial J)\partial\sigma=J\partial\partial\sigma=0.$$

因 $p>0$ 且 $C(\sigma)$ 零调，所以存在 $z\in C(\sigma)_{p+1}$ 使

$$\partial z=\phi\sigma-J\partial\sigma.$$

那么，我们定义 $J\sigma=z$，完成归纳法. □

6. 最后，我们回到上同调模. θ 的转置 θ' 是 $S^{\cdot}(X)$ 的一个自同态，由

$$[z,\ \theta' c]=[\theta z,\ c]$$

给出. θ' 与上边缘算子可换，因此导出 $H^{\cdot}(X)$ 的一个自同态，且必为恒等映射(转置(24.11)即得). 容易验证公式

$$\theta_{p+q}\lambda_p=\rho_p\theta_p,$$

$$\theta_{p+q}\rho_q=\lambda_q\theta_q.$$

对 $c\in S^p(X)$，$d\in S^q(X)$，我们来计算 $\theta'(c\cup d)$，

$$\begin{aligned}
[\sigma,\ \theta'(c\cup d)] &= [\theta\sigma,\ c\cup d] \\
&= \varepsilon_{p+q}[\sigma\theta_{p+q},\ c\cup d] \\
&= \varepsilon_{p+q}[\sigma\theta_{p+q}\lambda_p,\ c]\,[\sigma\theta_{p+q}\rho_q,\ d] \\
&= \varepsilon_{p+q}[\sigma\rho_p\theta_p,\ c]\,[\sigma\lambda_q\theta_q,\ d] \\
&= \varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q[\sigma\rho_p,\ \theta' c]\,[\sigma\lambda_q,\ \theta' d]
\end{aligned}$$

$$=\varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q[\sigma,\ \theta' d\cup\theta' c],$$

最后一步用到 R 可以交换的事实. 又,

$$\varepsilon_{p+q}\varepsilon_p\varepsilon_q=(-1)^{pq},$$

所以,
$$\theta'(c\cup d)=(-1)^{pq}\theta' d\cup\theta' c.$$

因为 θ' 导出上同调的恒等映射, 故 c 和 d 的上同调类 a 和 b 满足

$$a\cup b=(-1)^{pq}b\cup a. \qquad \square$$

(24.13)注意 零调承载子(及其推广零调模型)的技巧是非常有用的. 例如, 它是证明不同的同调论同构的关键(Hilton 和 Wylie[30], pp. 301—329). 又见第 29 节附录(29-23A).

(24.14)评注 在三维欧氏空间,上链由可微函数 ϕ 与可微向量场 v 给出的典型例子中, 我们有函数与向量场的乘法 ϕv, 或两个向量场的向量积 $v\times w$. 等价地,我们有微分形式的楔积. 由于

$$\Omega^1(\phi v)=\phi\Omega^1(v),$$

$$\Omega^2(v\times w)=\Omega^1(v)\wedge\Omega^1(w),$$

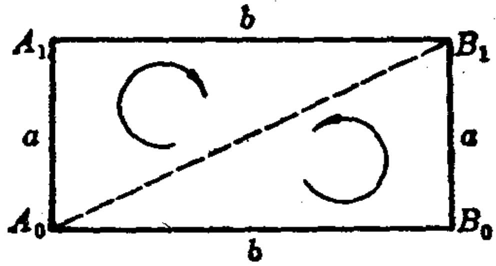
因此, 在上链水平上, 这个积并不对应上积. 即一般来说 $c^2(v\times w)\neq c^1(v)\cup c^1(w)$. 但在上同调水平, 这两个积是对应的 (参阅 Goldberg[26] 附录 B).

(24.15)例 $H^\cdot(S^n)$ 是由一个 n 维元素 a 生成的, 满足唯一的关系 $a^2=0$ 的分次 R-代数.

(24.16)例 为确定环面 T 的上同调代数, 我们需要明确指出它的第 2 个同调模的一个生成元. 考察 (19.25) 中的推理可知 $H_2(T)$ 由同构

$$H_2(T)\to H_2(T,\ G_2)\leftarrow H_2(E^2,\ S^1)\xrightarrow{\partial} H_1(S^1)$$

确定, 因此, 只须指出$(E^2,\ S^1)$上一个 2 维相对闭链, 其边缘代表 $H_1(S^1)$ 的一个生成元即可. 由图



可以看出 $$z=(A_0A_1B_1)-(A_0B_0B_1)$$

是这样的一个闭链．如果 ϕ: $I^2 \to T$ 是商映射，则 $S_2(\phi)(z)$ 是 T 上的 2 维闭链，其同调类 ζ 生成 $H_2(T)$．

由(23.29)知，当 R 是 PID 时 $H^1(T) \cong R \oplus R$．设 α 是闭路 $a=\phi(A_0A_1)$ 的同调类，β 是 $b=\phi(A_0B_0)$ 的同调类，从而 α, β 是 $H_1(T)$ 的生成元．设 α^*, β^* 是 $H_1(T)$ 的对偶基，从而

$$[\alpha, \alpha^*]=1=[\beta, \beta^*],$$
$$[\alpha, \beta^*]=0=[\beta, \alpha^*],$$

则
$$\begin{aligned}[\zeta, \alpha^* \cup \beta^*] &= [\alpha, \alpha^*][\beta, \beta^*]-[\beta, \alpha^*][\alpha, \beta^*] \\ &= 1+0=1,\end{aligned}$$
$$[\zeta, \alpha^* \cup \alpha^*]=[\zeta, \beta^* \cup \beta^*]=0+0=0.$$

现在，将同调类 $\nu \in H^2(T)$ 映成 $[\zeta, \nu] \in R$ 的映射给出同构 $H^2(T) \to R$，这推出 $\alpha^* \cup \beta^*$ 生成 $H^2(T)$，所以 $H^{\cdot}(T)$ 是由两个一次元 α^*, β^* 生成的分次 R-代数，满足关系

$$(\alpha^*)^2=0=(\beta^*)^2, \quad \alpha^*\beta^*=-\beta^*\alpha^*.$$

(24.17)**练习** 用如上明确做出 H_2 的一个生成元的办法，确定所有紧曲面 T_g, U_h 的系数取自一个 PID 的 R 上同调代数 (19.30—19.31)．

(24.18)**注意** 上积在拓扑学中最值得注意的应用之一是 **Hopf 不变量**．我们曾经讨论了 Hopf 映射 $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$，那是分别把象球面看作具有系数 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{H}$ 和 Cayley 数的射影 1-空间得到的．更一般的，对任意 n 和任意映射

$$f: S^{2n-1} \to S^n,$$

取 $R=\mathbf{Z}$, 并选取最高维上同调群的生成元 $\zeta \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$, $\eta \in H^n(S^n)$(这相当于选取定向). 设 y 是代表 η 的闭上链. 因 $\eta \cup \eta = 0$, 所以 $y \cup y$ 是一上边缘, 记 $y \cup y = \delta u$. 又因

$$H^n(f)(\eta) \in H^n(S^{2n-1}) = 0$$

(n 不小于 2), 故存在 S^{2n-1} 上的一个 $(n-1)$ 维上链 x, 使得 $S^\cdot(f)(y) = \delta(x)$. 于是 $x \cup S^\cdot(f)(y)$ 和 $S^\cdot(f)(u)$ 都是 S^{2n-1} 上的 $(2n-1)$ 维上链, 且它们的差实际上是闭上链:

$$\begin{aligned}
&\delta(x \cup S^\cdot(f)(y) - S^\cdot(f)(u)) \\
&= \delta(x \cup \delta(x)) - S^\cdot(f)(y \cup y) \\
&= \delta(x) \cup \delta(x) - S^\cdot(f)(y) \cup S^\cdot(f)(y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此, 这个闭上链的上同调类是 ζ 的倍数 $\gamma\zeta$, γ 是唯一确定的整数. 可以证明 γ 与我们所做的所有选择无关(改变 S^{2n-1} 上的定向能改变 γ 的符号除外). 这个整数是 f 的 Hopf 不变量, 它只与 f 的同伦类有关. 且对应 $f \to \gamma(f)$ 导出同态

$$\gamma: \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Z}$$

适合

(i) n 为奇数 $\Rightarrow \gamma = 0$,

(ii) n 为偶数 $\Rightarrow 2 \in \mathrm{Im}(\gamma)$,

(iii) 如果 $n=2, 4, 8$, f 为 Hopf 映射, 则 $\gamma(f)=1$(证明见 Hilton 和 Wylie[30], pp. 379—387). Adem 和 Frank Adams 的工作解决了逆问题: 在同伦的意义下, Hopf 映射是唯一的 Hopf 不变量为 1 的映射. 这蕴含着 $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ 和 Cayley 数是 $\mathbf{R}$ 上仅有的非平凡可除代数这一纯代数定理! (这些结果的一个巧妙的处理用到"非常"上同调("extraordinary" cohomology), 请参阅 [6], p. 136–7; 而在(29.37)之后可参阅[87].)

下面我们介绍伴随运算——卡积．对任意 p, q，这将是双线性配对

$$\cap: S_{p+q}(X)\times S^p(X)\to S_q(X).$$

对 $c\in S^p(X)$，$z\in S_{p+q}(X)$，$z\cap c$ 是唯一的 q-链，使得对所有 q-上链 d，

(24.19) $$[z\cap c,\ d]=[z,\ c\cup d],$$

更确切地说，对任意奇异$(p+q)$-单形 σ，令

$$\sigma\cap c=[\sigma\lambda_p,\ c]\sigma\rho_q,$$

并线性扩张到任意$(p+q)$-链上．于是(24.19)可由 Kronecker 积的双线性和上积的定义推出．再利用线性扩张，我们得到一个配对

$$\cap: S_\cdot(X)\times S^\cdot(X)\to S_\cdot(X).$$

评注 卡积有着几种不同的定义，例如 $\sigma\cap c=(-1)^{pq}[\sigma\lambda_p, c]\sigma\rho_q$ 或者 $[\sigma\rho_p,\ c]\sigma\lambda_q$; 另外，某些作者将和同调的计值配对写在右边．最终的结果是，关于不同种类的积，在公式中出现相当多的符号差异，J. F. Adams[62] 中有这一问题的系统探讨．

(24.20) **命题** 上述配对使 $S_\cdot(X)$ 成为右单式 $S^\cdot(X)$-模．

证明 练习．特别是 $z\cap[c\cup d]=(z\cap c)\cap d$. □

(24.21) **命题** 对 $z\in S_{p+q}(X)$，$c\in S^p(X)$，有

$$\partial(z\cap c)=(-1)^p[(\partial z)\cap c-z\cap\delta c].$$

证明 只须证明两边与一个任意上链的 Kronecker 积给出同样的值．这可由(24.20)和(24.1)推出． □

(24.22) **推论** 过渡到商，卡积导出双线性配对

$$\cap: H_{p+q}(X)\times H^p(X)\to H_q(X).$$

(24.23) **练习** 假设 X 道路连通，从而 $\partial^*: H_0(X)\to R$ 是同构．于是，对任意 $a\in H_p(X)$，$b\in H^p(X)$，有

$$\partial^*(a\cap b)=[a,\ b].$$

卡积对第一变元是函子性的，而对第二变元是反变函子性的.

(24.24) **命题** 对任意映射 $f: X\to Y$, $a\in H_{p+q}(X)$, $b\in H^p(Y)$,

$$H_q(f)[a\cap H^p(f)(b)]=H_{p+q}(f)(a)\cap b.$$

证明 我们用取每一边与 Y 上任意一个 q-上链的 Kronecker 积的方法，并利用(23.3)、(24.4)及(24.19)验证链-上链水平上同样的公式. □

(24.25) **相对情形的积** 前面关于上积和卡积的所有结果可以推广到相对情形. 这样 $H^\cdot(X, A)$ 成为反交换分次 R-代数，$H_\cdot(X, A)$ 成为右单式 $H^\cdot(X, A)$-模. 这些结构都是函子性的.

我们将需要(24.25)的一个推广，即由前面定义的卡积导出的卡积：

(24.26) $\qquad H_{p+q}(X, A)\times H^p(X, A)\to H_q(X)$,

(24.27) $\qquad H_{p+q}(X, A)\times H^p(X)\to H_q(X, A)$.

首先注意，如果 σ 是 A 上奇异 $(p+q)$-单形，则 $\sigma\lambda_p$ 在 $S_p(A)$ 中，因此 $c\in S^p(X, A)$ 和 $\omega\in S_{p+q-1}(A)$ 蕴含 $\omega\cap c=0$. 所以，如果 $z\in Z_{p+q}(X, A)$, $c\in Z^p(X, A)$，则公式(24.21)说明 $z\cap c$ 的确是 X 上一个 q-闭链（而不是相对 q-闭链），进而得到配对(24.26). 类似地可得(24.27).

(24.28) **练习** 对一个固定的同调类 $a\in H_{p+q}(X, A)$，图表

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) & \longrightarrow & H^p(X) \\ \downarrow{\scriptstyle a\cap} & & \downarrow{\scriptstyle a\cap} \\ H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) \end{array}$$

可以交换（其中 $a\cap$ 意为用 a 做卡积）.

(24.29) **注意** 存在另一些上同调运算（如 Steenord 平方）对同伦论有重要的应用（参看 Mosher 和 Tangora[69]）.

(24.30) **练习** 用将同调平凡嵌入的圆周（如(12.11)中的 δ）

捏成单点得到环面束的方法，计算可定向曲面的上积结构. 利用自然性从环面上的已知结果中推导出来.

(24.31)**练习** 设 f: $S^{2n-1}\to S^n$ 是(24.18)中的映射，构造映射锥 Cf. 令 i: $S^n\to Cf$ 为包含映射. 证明当 $q=0$、n、$2n$ 时 $H^q(Cf;\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}$，其它 $H^q(Cf;\boldsymbol{Z})=0$.

(24.32)**练习** 记(24.31)中非零群的生成元为 α, β, $H^*(i)(\alpha)=\eta$, $\delta(\zeta)=\beta$, 这里 η 和 ζ 的定义见(24.18), δ 见(21.19). 证明 $\alpha\cup\alpha=\gamma(f)\beta$, 因此由(21.21), $\gamma(f)$是同伦不变量. 提示：在图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\leftarrow & S^{\cdot}(S^{2n-1}) & \leftarrow & S^{\cdot}(E^{2n}) & \leftarrow & S^{\cdot}(E^{2n}, S^{2n-1}) & \leftarrow 0 \\
 & \uparrow{\scriptstyle S^{\cdot}(f)} & & \uparrow & & \uparrow & \\
0\leftarrow & S^{\cdot}(S^n) & \xleftarrow[S^{\cdot}(i)]{} & S^{\cdot}(Cf) & \leftarrow & S^{\cdot}(Cf, S^n) & \leftarrow 0
\end{array}$$

中寻求适当的代表计算 δ.

25 代数极限

对流形的 Alexander 对偶定理和 Poincaré 对偶定理来说，正确的上同调模一般不是奇异上同调模，而是由奇异上同调模取极限所得的另一种上同调模. 这个极限过程是纯代数过程，在其他许多有关问题中也极其有用.

极限将取在**有向**(**过滤**)集上：这是一个集合 I，连同一个对 I 中某些元素偶定义的偏序关系 $i\leqslant i'$，使得对任意 i, $i'\in I$，存在 $i''\in I$ 满足 $i\leqslant i''$ 且 $i'\leqslant i''$.

(25.1)**例** 设 K 是集合 X 的子集，I 是 X 的包含 K 的子集的集合. 定义 $V\leqslant V'$ 为 $V\supset V'$，则对任意的 V、V'，集合 $V\cap V'$ 满足有向性条件(这是拓扑学中最重要的例子).

(25.2)例　设 I 是非零整数的集合，且 $i \leqslant i'$ 意指 i 整除 i'，则对任意的 i 和 i'，它们的最小公倍数满足上述条件(这个例子及其推广在数论中很有趣).

(25.3)例　设 I 是一个带基点的空间 (X, x_0) 的所有带基点的覆盖空间 $(E, e_0; p)$ 的集合. 定义 $(E, e_0; p) \leqslant (E', e'_0; p')$，如果存在映射 f: $(E', e_0) \to (E, e_0)$ 使得 $pf = p'$. 为满足有向性条件，可取纤维积:

$$E'' = \{(e, e') \in E \times E' \mid pe = p'e'\},$$

$$e''_0 = (e_0, e'_0),$$

$$p''(e, e') = p(e) = p'(e'),$$

这里 E'' 具有 $E \times E'$ 的子空间拓扑(此例在代数几何中的类似的例子已被用于构造 étale 上同调[5]).

(25.4)**定义**　假定 $(M_i)_{i \in I}$ 是由有向集 I 标码的 R-模的一个族，且对任意 $i \leqslant i'$ 有一同态

$$\varphi_{i', i}\colon\ M_i \to M_{i'}$$

使得当 $i \leqslant i' \leqslant i''$ 时 $\varphi_{i'', i'} \varphi_{i', i} = \varphi_{i'', i}$ 和

$$\varphi_{i, i} = \text{恒等同态},$$

则称这个体系为模的有向(归纳)系. 这个系的一个有向(归纳)极限是一模 M 以及一族由 I 标码的同态

$$\varphi_i\colon\ M_i \to M,$$

使得当 $i \leqslant i'$ 时 $\varphi_{i'} \varphi_{i', i} = \varphi_i$，并且具有下述万有性质:

对任意模 N 及任一族同态

$$\psi_i\colon\ M_i \to N,$$

如果 $i \leqslant i'$ 时满足 $\psi_{i'} \varphi_{i', i} = \psi_i$，则有唯一的同态 ψ: $M \to N$，对所有的 i 适合

(*) $$\psi_i = \psi\varphi_i.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & N & & \\
 {} \arrow[r] & M_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[r, "\varphi_{i',i}"'] & M_{i'} \arrow[u, "\psi_{i'}"'] \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

显然，由此万有性质可知，任何两个归纳极限 M 和 N，通过满足条件(*)的唯一同构而同构. 因此，我们可以讨论有向系的归纳极限并记为

$$\varinjlim M_i,$$

上述的唯一同态 ψ 也记为 $\varinjlim \psi_i$.

(25.5) **命题** 归纳极限存在.

证明 设 M^+ 是所有 M_i 的直和，φ_i^+: $M_i \to M^+$ 是将 $x_i \in M_i$ 映成第 i 个分量为 x_i，其余分量为零的向量的单同态. 对任意偶 $i \leqslant i'$ 和所有 $x_i \in M$，做由形如

$$\varphi_{i'}^+\varphi_{i',i}(x_i) - \varphi_i^+(x_i)$$

的所有元素生成的子模，并设 M 是 M^+ 模以这个子模所得的商模，π: $M^+ \to M$ 为商同态. 则 M 连同同态 $\varphi_i = \pi\varphi_i^+$ 是一个归纳极限. □

(25.6) **例** 假定 M_i 是某个模的所有子模，$i \leqslant i'$ 意味着 M_i 是 $M_{i'}$ 的子模，$\varphi_{i',i}$ 是包含同态. 于是，作为归纳极限我们可取并

$$\cup_i M_i$$

(由有向性条件，这也是一个子模)，而 φ_i 是包含同态. 我们有更一般的结论：

(25.7) **补充** $M = \cup_i \varphi_i(M_i)$.

证明 设 M' 是右端的模，且 ψ_i: $M_i \to M'$ 就是 φ_i 但看成是到 M' 内的同态，则系统 $(M', (\psi_i))$ 显然是另一归纳极限. 令 ψ: $M \to M'$, φ: $M' \to M$ 是满足(*)的唯一同构，则 φ 是包含映射 $M' \to$

M, 且 $\psi=\varphi^{-1}$, 故 $M=M'$. □

(25.8) **练习** 假定有向集 I 有极大元 m, 使得对所有 $i\in I$ 有 $i\leqslant m$, 则同态

$$\varphi_m: M_m \to \varinjlim M_i$$

是同构.

(25.9) **练习** 翻转归纳系及其极限的定义中箭头的方向, 我们得到**射影**(**反向**)系及射影(反向)极限的概念. 构造射影极限, 作为 M_i 的直积的子模.

我们需要关于归纳极限的下面几个基本引理.

(25.10) **引理**(**可加性**) 假定对每个 i 我们有一个直和分解 $M_i=N_i\oplus P_i$, 且对 $i\leqslant i'$, 同态 $\varphi_{i',i}$ 相应地分解为 $\varphi_{i',i}=\psi_{i',i}+\rho_{i',i}$. 设 $N=\varinjlim N_i$, $P=\varinjlim P_i$, 于是我们得到导出同态 ψ: $N\to M$, ρ: $P\to M$ 满足

$$\psi\psi_i=\varphi_i|N_i,\ \rho\rho_i=\varphi_i|P_i,$$

因此 $\psi\oplus\rho$: $N\oplus P\to M$ 是同构.

证明 我们构造其逆. 设 $x\in M$, 选取 $x_i\in M_i$ 使得 $x=\varphi_i(x_i)$ (25.7). x_i 可唯一地写成 $x_i=y_i+z_i$ 的形式, $y_i\in N_i$, $z_i\in P_i$. 定义 $\theta(x)=(\psi_iy_i,\ \rho_iz_i)\in N\oplus P$. 不难验证 $\theta(x)$ 与 x_i 的选取无关, 且 θ 是 $\psi\oplus\rho$ 的逆同态. □

还有一种重要情形, 在此无须考虑 M_i 以得到 M. 子集 $J\subset I$ 称为**有尾的**(有时称为"**共尾的**"), 如果 J 在由 I 导出的序之下是有向集, 并且对任意 $i\in I$ 总存在 $j\in J$ 使得 $i\leqslant j$. 因此, 我们可以构造集合 J 上的归纳极限, 且利用同态族 φ_j: $M_j\to M$ 的万有性质, 得到标准同态

$$\lambda: \varinjlim M_j \to \varinjlim M_i,$$

(25.11) **引理** λ 为同构,

证明 设 $M'=\varinjlim M_j$, $\varphi'_j: M_j\to M'$ 为标准同态(因而对所有 j, $\lambda\varphi'_j=\varphi_j$). 已知 $x\in M$ 可写为 $x=\varphi_i(x_i)$, 对某个 $x_i\in M_i$. 因 J 是有尾子集,存在 $j\in J$ 使得 $i\leqslant j$,所以有 $x=\varphi_j(x_j)$, 这里 $x_j=\varphi_{j,i}(x_i)$. 于是, $x=\lambda\varphi'_j(x_j)$, 即 λ 到上.

设 $x'\in M'$ 适合 $\lambda(x')=0$. 对某个 $x_j\in M_j$, 记 $x'=\varphi'_j(x_j)$, 使得 $\varphi_j(x_j)=0$, 我们需要下面的事实:

(25.12)**子引理** 如果 $\varphi_i x_i=0$, 则有 i' 使得 $i\leqslant i'$ 和 $\varphi_{i',i}(x_i)=0$.

假如此子引理正确,则存在 $i'\in I$ 使得 $j\leqslant i'$, 且 $\varphi_{i',j}x_j=0$. 因 J 有尾,存在 $j'\in J$ 使 $i'\leqslant j'$; 那么, $\varphi_{j',j}x_j=\varphi_{j',i'}\varphi_{i',j}x_j=0$, 因此 $x'=\varphi'_{j'}\varphi_{j',j}x_j=0$.

子引理的证明 回到 M 的构造((25.5)的证明). 由于 $\varphi_i x_i=0$, 所以 $\varphi_i^+x_i$ 是元素

$$\varphi_{k'}^+\varphi_{k',k}y_{k',k}-\varphi_k^+y_{k',k}$$

的一个和,其中 $y_{k',k}\in M_k$. 由 φ_i^+ 的定义,必有

$$(i)\qquad x_i=\sum_{k'=i}\varphi_{k',k}y_{k',k}-\sum_{k=i}y_{k',k}.\ ^{(*)}$$

当 $h\neq i$ 时,

$$(h)\qquad 0=\sum_{k'=h}\varphi_{k',k}y_{k'k}-\sum_{k=h}y_{k',k}.\ ^{(**)}$$

选取比出现的所有 k' 都大的下标 i', 将 $\varphi_{i',i}$ 作用于等式(i), 将 $\varphi_{i',h}$ 作用于每个非空的等式(h),并相加,我们得到

$$\varphi_{i',i}x_i=\sum_{\text{所有}(k',k)}(\varphi_{i',k'}\varphi_{k',k}y_{k',k}-\varphi_{i',k}y_{k',k}),$$

由有向系的定义,它等于零. □

(25.13)**练习** 如果对所有 $i\leqslant i'$, $\varphi_{i',i}: M_i\to M'_i$ 是同构, 则对

(*) 原文符号混乱, 故改正如此, 但也可改作 $x_i=\sum_k\varphi_{i,k}y_{i'k}-\sum_{k'}y_{k',i}$

(**) 原文符号混乱,故改正如此,但也可改作 $0=\sum_k\varphi_{h,k}y_{h,k}-\sum_{k'}y_{k',h}$

所有 i, $\varphi_i: M_i \to M$ 是同构.

下面考虑归纳极限与正合序列的相容性. 假定我们有同一个有向集 I 上的三个归纳系, 且有同态

$$M_i^* \xrightarrow[\lambda_i]{} M_i \xrightarrow[\rho_i]{} M_i^{**}$$

使得此序列正合, 并且对 $i \leqslant i'$, 图表

$$\begin{tikzcd} M_i^* \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\varphi^*_{i',i}"'] & M_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\varphi_{i,i}"] & M_i^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}_{i',i}"] \\ M_{i'}^* \arrow[r, "\lambda_{i'}"] & M_{i'} \arrow[r, "\rho_i"] & M_{i'}^{**} \end{tikzcd}$$

交换. 过渡到极限, 给出同态

$$M^* \xrightarrow[\lambda]{} M \xrightarrow[\rho]{} M^{**}$$

对所有 i, 适合 $\lambda\varphi_i^* = \varphi_i\lambda_i$, $\rho\varphi_i = \varphi_i^{**}\rho_i$.

(25.14) **引理** 上述极限的序列正合.

证明 对于 $x^* \in M^*$ 选取 $x_i^* \in M_i^*$ 使得 $x^* = \varphi_i^* x_i^*$, 则

$$\rho\lambda x^* = \varphi_i^{**}\rho_i\lambda_i x_i^* = 0.$$

若 $x \in M$ 使得 $\rho x = 0$, 记 $x = \varphi_i x_i$. 因 $\varphi_i^{**}\rho_i x_i = 0$, 所以存在 i' 使得 $i \leqslant i'$ 且 $0 = \varphi_{i',i}^{**}\rho_i x_i = \rho_{i'}\varphi_{i',i}x_i$. 由在 i' 阶段的正合性, 存在 $x_{i'}^* \in M_{i'}^*$, 使得 $\varphi_{i',i}x_i = \lambda_{i'}x_{i'}^*$. 因此, $\lambda\varphi_{i'}^* x_{i'}^* = \varphi_{i'}\lambda_{i'}x_{i'}^* = \varphi_i x_i = x$. □

(25.15) **推论** 如果每个 λ_i 是满同态 (如果每个 ρ_i 是单同态), 则 λ 也是 (ρ 也是).

最后, 我们考虑重复极限. 假定 J 是另一有向集, 且对每个 $j \in J$ 伴随一个有向子集 $I_j \subset I$, 若有 $j \leqslant j'$ 则有 $I_j \subset I_{j'}$. 又假定

$$I = \bigcup_j I_j.$$

则对每个 j, 可以做出

$$M_j^* = \varinjlim_{i \in I_j} M_i.$$

如果 $j\leqslant j'$，则存在同态 $\psi_{j',j}: M_j^*\to M_{j'}^*$ 定义如下：给定 $x\in M_j^*$，选取 $i\in I_j$ 及 $x_i\in M_i$ 使得 $x=\varphi_i^* x_i$，这里 $\varphi_i^*: M_i\to M_j^*$ 是标准同态。选取 $i'\in I_{j'}$ 适合 $i\leqslant i'$。令 $\psi_{j',j}x=\varphi_{i'}^*\varphi_{i',i}x_i$，这里 $\varphi_{i'}^*: M_{i'}\to M_{j'}^*$ 是标准同态（验证这与选取无关）。借助这些 $\psi_{j',j}$，我们得到另一归纳系，且可取其极限

$$M^*=\varinjlim M_j^*.$$

因此，存在唯一同态 ψ，θ 使对所有 $i\in I_j$，$j\in J$，图表

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r] \arrow[dr] & M_j^* \arrow[r] \arrow[d] & M^* \arrow[dl, bend right, "\psi"'] \\
 & M \arrow[ur, bend right, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

可以交换。

(25.16) **练习** ψ 和 θ 是互逆同构。

(25.17) **练习** 设 x 是 Hausdorff 空间 X 的任一点，则

$$\varinjlim_{x\in U\text{开}} H_n(X,\ X-U)\to H_n(X,\ X-x)$$

是同构。

评注 对射影极限，(25.14)的模拟不真，即正合序列的射影极限不一定还是正合的（参看 Eilenberg 和 Steenrod [23] p. 225）。只有当我们假定 R 是域时这一点才成立。

(25.18) **练习** 对射影极限，(25.10，25.11 和 25.16)的模拟成立。

26 Poincaré 对偶性

在本节中 X 总表示 n 维流形。如果 X 是 R-可定向的，我们一次选定 X 的 R-定向。其它情况，我们取 $R=\mathbf{Z}/2$ 并取唯一的

$\mathbf{Z}/2$-定向(22.12). 对每一紧集 $K\subset X$, 将 X 的 R-定向限制在 K 上(看成 R-定向层的一个截口), 并应用同构 $H_n(X, X-K)\to\Gamma K$ 给出基本类 $\zeta_k\in H_n(X, X-K)$ (22.21 和 22.24). 这一思想将贯穿本节始终.

如果 X 不紧, 我们所要寻求的对偶定理则需要不同的上同调论, **即具有紧支集的奇异上同调**. 它是用如下方法由通常的奇异同调得到: X 的紧子空间按包含关系做成有向系($K\leqslant K'$ 即 $K\subset K'$). 用紧子空间做标码, 模 $H^q(X, X-K)$ 构成一归纳系(同态 $H^q(X, X-K)\to H^q(X, X-K')$ 由包含映射导出), 定义

$$H_c^q(X)=\varinjlim_{k\text{紧}} H^q(X, X-K).$$

当然, 如果 X 紧, 则 $H_c^q(X)=H^q(X)$ (25.8). $H_c^q(X)$ 的一个上同调类由一个在某紧子空间 K 之外为零的上链所代表, 它零化所有支集在 $X-K$ 中的链.

(26.1) **评注** 给定映射 $f: X\to Y$, 则对任意紧集 $K\subset X$, $f(K)$ 紧. 然而 f 不一定将 $X-K$ 映入 $Y-f(K)$, 所以 f 不导出 H_c^q 的同态. 如果我们假定 f 是常态的, 即对任意紧集 $L\subset Y$, $f^{-1}(L)$ 紧, 则得一导出同态. 这时, f 将 $X-f^{-1}(L)$ 映入 $Y-L$, 所以存在导出同态:

$$H^q(Y, Y-L)\to H^q(X, X-f^{-1}(L))\to H_c^q(X).$$

当 L 变化时, 这些同态与由包含映射导出的同态相容, 从而过渡到极限给出导出同态 $H_c^q(f): H_c^q(Y)\to H_c^q(X)$. 如果 X 是 Y 的子空间, f 是包含映射, 则当 X 不闭时 f 非常态.

(26.2) **评注** 如果 U 是 X 的开子空间, 我们仍可定义一个标准同态

$$H_c^q(U)\to H_c^q(X)$$

(注意此同态与(26.1)中的同态方向相反), 即对任意紧 $K\subset U$, 我

们有切除同构的逆 $H^q(U, U-K)\to H^qU(X, X-K)$，因这些同构与包含同态相容，过渡到极限给出唯一同态，使得图表

$$\begin{array}{ccc} H^q_c(U) & \longrightarrow & H^q_c(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^q(U, U-K) & \to & H^q(X, X-K) \end{array}$$

对所有 K 交换.

(26.3)例　把 $U=\boldsymbol{R}^n$ 看成是 S^n 去掉一点 x. 对紧集 $K\subset U$，集合 S^n-K 构成 x 的一个基本邻域系，它包含可缩邻域构成的一个有尾系. 对后者

$$H^q(S^n, S^n-K)\xrightarrow{\simeq}H^{q*}(S^n)$$

是一同构(23.21.7)，从而(25.11)

$$H^q_c(\boldsymbol{R}^n)\xrightarrow{\sim}H^{q*}(S^n)$$

是同构. 此同构可推广到任意流形的单点紧化(参阅(27.4)).

现在对任意紧集 $K\subset X$，考虑用 ζ_k 做卡积 $\gamma\to\zeta_k\cap\gamma$(24.26)给出的从相对上同调到绝对上同调的同态

$$\zeta_k\cap: H^q(X, X-K)\to H_{n-q}(X).$$

如果 $K\subset K'$，则图表

$$\begin{array}{ccc} H^q(X,X-K) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & H_{n-q}(X) \\ & \nearrow & \\ H^q(X,X-K') & & \end{array}$$

可交换，过渡到极限给出同态

$$D: H^q_c(X)\to H_{n-q}(X)$$

(注意，当 $q>n$ 时 D 是零同态).

(26.4)练习　设 U 开于 X，给 U 以导出 R-定向. 则图表

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(X) & \xrightarrow[D]{} & H_{n-q}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_c^q(U) & \xrightarrow[D]{} & H_{n-q}(U) \end{array}$$

可交换.

(26.5)**练习** 设 $R=\mathbf{Z}$, X, Y 是紧连通定向流形. 且设 f: $X\to Y$ 是 m 层覆盖空间. 假若 f 保持定向, 则图表

$$\begin{array}{ccc} H^q(X) & \xrightarrow[D]{} & H_{n-q}(X) \\ {\scriptstyle H^q(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle H_{n-q}(f)} \\ H^q(Y) & \xrightarrow[mD]{} & H_{n-q}(Y) \end{array}$$

交换(22.33 与 24.24).

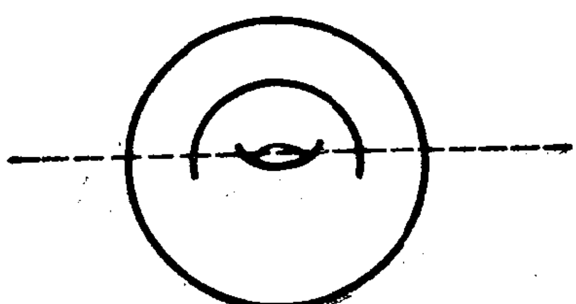
(26.6)Poincaré **对偶定理** 设 X 是 R-定向 n 维流形, 则同态

$$D:\ H_c^q(X)\to H_{n-q}(X)$$

是同构(对所有 q).

证明. 证明分几步, 并同时对 X 的开子流形证之.

在详述各步之前, 我们先概括说明(对紧 X)如何进行证明. 在当 K 增大而成整个 X 的过程中, 模 $H^q(X, X-K)$便越来越"显示出"X 的上同调. 例如对于环面, K 为虚线以上的紧致部分,



对偶(在代数意义下)1维同调的表示如上图. 证明中的一个基本比较是形如

$$H^q(X, X-K)\xrightarrow{\cong} H^q(W, W-K)\xrightarrow{\zeta_K\cap} H_{n-q}(W)$$

的合成. 这里 W 是开的, 且包含映射 $(W, W-K)\to(X, X-K)$是切除. 这样, 对应于由 $H^q(X, X-K)$所显示的 X 的上同调, 存在其支集含于 W 的 X 的同调. 用求并的方法增大 K 产生 W 对应的增大. 技巧性的工具是同时使用一个同调绝对 Mayer-Vietoris 序列与一个上同调相对 Mayer-Vietoris 序列. 关键步骤是检验卡积与这些序列的相容性. 于是证明归结为人们从一个同构开始(即 $K=$一点), 经过一系列相容的同构直到本定理.

第一步. 如果定理对开集 U, V 和 $B=U\cap V$ 成立, 则定理对 $Y=U\cup V$ 成立.

设 K 和 L 分别是 U 和 V 的紧集. 我们对三元组 $(Y, Y-K, Y-L)$应用 Mayer-Vietoris 序列(17.11 和 23.14), 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
\leftarrow H^{q+1}(B, B-K\cap L) & \longleftarrow & H^q(Y, Y-K\cup L) & \longleftarrow & \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta_{K\cap L}\cap} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{K\cap L}\cap} & & \\
\longleftarrow H_{n-q-1}(B) & \longleftarrow & H_{n-q}(Y) & \longleftarrow &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
H^q(U, U-K)\oplus H^q(V, V-L) & \longleftarrow & H^q(B, B-K\cap L) & \longleftarrow & \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta_K\cap\oplus\zeta_L\cap} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{K\cap L}\cap} & & \\
H_{n-q}(U)\oplus H_{n-q}(V) & \longleftarrow & H_{n-q}(B) & \longleftarrow &
\end{array}$$

上面一行是$(Y, Y-K, Y-L)$的经过形如$(W, W-S)\subset(Y, Y-S)$的切除的相对 Mayer-Vietoris 序列; 下面一行是 (Y, U, V)的 Mayer-Vietoris 序列. 右边两个方块的交换性来自卡积映射的自然性.

子引理 下面的图表在系数相差$(-1)^{q+1}$的意义下可以交换;

$$
\begin{array}{ccc}
H^{q+1}(Y,\ Y-K\cap L) & \xleftarrow{\ \gamma\ } & H^{q}(Y,\ Y-K\cup L) \\
\big\downarrow \cong & & \\
H^{q+1}(B,\ B-K\cap L) & & \big\downarrow \zeta_{K\cup L}\cap \\
\zeta_{K\cap L}\cap \big\downarrow & & \\
H_{n-q-1}(B) & \xleftarrow{\ \ \Gamma\ \ } & H_{n-q}(Y)
\end{array}
$$

证明 我们在链(上链)的水平检查 Mayer–Vietoris 边缘算子 γ 和 Γ. 利用(17.11)进行计算, 并利用(15.22)得到切除映射的链同伦逆. 计算的焦点是下述交换图表:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overset{(1)}{S^{\cdot}(Y,\ Y-K\cup L)} & & \overset{(4)}{S^{\cdot}(Y,\ Y-K)} \arrow[ll] \arrow[dl] & & \overset{(6)}{S^{\cdot}(Y,\ Y-K\cap L)} \arrow[ll] \arrow[dl] \\
& \overset{(5)}{S^{\cdot}(U,\ U-K)} & & \overset{(8)}{S^{\cdot}(B,\ B-K\cap L)} & \\
\underset{(2)}{S^{\cdot}(X,\ X-K\cup L)} \arrow[uu] & & \underset{(3)}{S^{\cdot}(X,\ X-K)} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ul] & & \underset{(7)}{S^{\cdot}(X,\ X-K\cap L)} \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

其中的所有映射均为包含映射所导出; 垂直的与倾斜的映射皆为切除, 而水平的映射是围绕用于构造 Mayer–Vietoris 序列的方块的路线. 为简便计, 如果 $R\subset S\subset X$, j: $(X,\ X-S)\to(X,\ X-R)$ 是包含映射, 则在 $S(X,\ X-R)$ 中 $j_*(\zeta_S\cap j^*x)=\zeta_R\cap x$ 略写为 $\zeta_S\cap x=\zeta_R\cap x$. 设 c 在(1)中使得 $\delta c=0$, 设(2)中的 a_2 是 c 在切除的一个链同伦逆之下的象, 则 $\delta a_2=0$. 设(3)中的 a_3 是由(17.11)给出的元素, 使得在(7)中 δa_3 代表 a_2 的 Mayer–Vietoris 上边缘. 设 a_3 在(4)、(5)中的象是 a_4、a_5, 则 a_4 在(1)中的象是 $c+\delta Dc$, 其中 D 是一链同伦. 从而 $\gamma(c)$ 在(6)中由 δa_4 代表. 由交换性, δa_4 和 δa_3 在(8)中的象相等, 我们有 $\zeta_{K\cap L}\cap\gamma(c)=\zeta_{K\cap L}\cap\delta a_4=\zeta_{K\cap L}\cap\delta a_3$, 且取象于 $S(B)$ 中. 更进一步, $\zeta_{K\cap L}\cap\delta a_3=\zeta_K\cap\delta a_3=(-1)^{q+1}\partial(\zeta_K\cap a_3)=(-1)^{q+1}\partial(\zeta_K\cap a_i)$, $i=4,\ 5$. 另一方面,

$$\zeta_K\cap a_4=\zeta_{K\cup L}\cap(c+\delta Dc)=\zeta_{K\cup L}\cap c\pm\partial(\zeta_{K\cup L}\cap Dc),$$

从而应用(17.11)和 $S(Y)\leftarrow S(U)\leftarrow S(B)$, $\Gamma(\zeta_{K\cup L}\cap c)$ 由 $\partial(\zeta_K\cap$

u_5)代表．因此，沿着两条路线，得出 $S(B)$ 中两个代表元，它们在 $S(X)$ 中相等(不计符号)．但是 $S(B)\to S(X)$ 是单射． □

回到第一步的证明．注意到 Y 中每一紧集具有 $K\cup L$ 的形式，过渡到极限给出带符号的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\leftarrow H_c^{q+1}(B) & \leftarrow & H_c^q(Y) & \leftarrow & H_c^q(U)\oplus H_c^q(V) & \leftarrow & H_c^q(B) & \leftarrow \\
\downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D\oplus D & & \downarrow D & \\
\leftarrow H_{n-q-1}(B) & \leftarrow & H_{n-q}(Y) & \leftarrow & H_{n-q}(U)\oplus H_{n-q}(V) & \leftarrow & H_{n-q}(B) & \leftarrow
\end{array}$$

其中各行正合，且除带有 Y 以外的垂直箭头都已知是同构(25.10 和 25.14)．由五项引理(14.7)定理对 Y 成立．

第二步．设 (U_i) 是一个由包含映射全序化的开集系，并设 U 是它们的并．如果定理对所有 U_i 成立，则对 U 也成立．

这归结为验证同构：

$$\psi_1:\ \varinjlim H_{n-q}(U_i)\to H_{n-q}(U),$$

$$\psi_2:\ \varinjlim H_c^q(U_i)\to H_c^q(U).$$

要点是对任意紧集 $K\subset U$，对某个 i 我们有 $K\subset U_i$(用有限个 U_j 复盖 K；因为这个系是全序的，所以所有这些 U_j 包含在一个 U_i 中)，这推出 ψ_1 是同构(考虑任意链的紧支集)．同理，建立在重复极限(25.16)上的结果，可说明 ψ_2 是同构．

第三步．U 包含在一坐标邻域内．将 U 看成 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间．

情形 1．U 是凸集．

那么 U 同胚于 $\dot{E}^n$(练习)．计算归纳极限

$$\varinjlim_K H^q(\dot{E}^n,\ \dot{E}^n-K)$$

时，只须令 K 跑遍中心在原点半径 <1 的闭球的共尾系．但对这样的 K，问题中的模除 $q=n$ 时外全为零，且

$$\zeta_K\cap:\ H^n(\dot{E}^n,\ \dot{E}^n-K)\to H_0(\dot{E}^n)\cong R$$

必为同构(24.23),从而极限同态 D 亦为同构.

一般情形. 我们将 U 中具有有理坐标的点构成的稠密集排序. 对第 j 个点,选取一个含在 U 内的凸开集 V_j,令

$$U_i = U_{i-1} \cup V_i \quad i>1,$$
$$U_1 = V_1.$$

归纳假设是定理对 k 个凸开集的并成立, $k<i$. 注意到 $U_{i-1} \cap V_i$ 最多是 $i-1$ 个凸开集的并. 由情形 1 及第一步, 对 i 归纳, 定理对 U_i 成立. 由第二步,定理对 U 成立.

第四步. 对 X 证明.

由 Zorn 引理(第二步和第三步)存在 X 的极大开子空间 U, 定理对 U 成立. 对任意包含在一个坐标邻域内的开集 V, 定理对 $U \cup V$ 成立(第一步和第三步). 由极大性, $U=X$. □

(26.7) **推论** 若 X 连通且 R-可定向,则 $H_c^n(X) \cong R$.

在此情形, 在对偶定理之下 $H_c^n(X)$ 的对应于 $H_0(X)$ 的标准生成元的生成元称为 R-定向的**基本上同调类**. 如果 $f: X \to Y$ 是满足(26.5)的假设的 m 层覆盖空间, 则 $H^n(f)$ 将 Y 的基本类映成 X 的基本类的 m 倍.

(26.8) **推论** 若 X 紧且可定向,则 X 的 Betti 数满足: 对所有 q,

$$\beta_q = \beta_{n-q}.$$

证明 取 $R=\boldsymbol{Z}$,此可由(23.40)推出. □

例如, 如果 $n=3$, 已知 β_1 和 X 的连通分支的数目可以确定所有 Betti 数.

当然, (23.28)同样告诉我们同调中的挠: 若 T_q 是 $H_q(X;\boldsymbol{Z})$ 的挠子群,则

(26.9) $$\boxed{T_q \cong T_{n-q-1}}$$

特别注意：去掉可定向性的假设，此公式不成立——例如考虑 $\boldsymbol{P}^2$.

(26.10) **推论** 设 R 是 PID. 若 X 是奇维数紧 R-可定向流形，则 $\chi(X;R)=0$.

(26.11) **推论** 若 X 是偶数维紧可定向的，且维数不能被 4 整除，则 $\chi(X)$ 为偶数.

证明 由(26.8)，如果 $n=4k+2$，我们必须证明 β_{2k+1} 是偶数. 按照(20.12)和(23.31)，这归结为证明 $H^{2k+1}(X;\boldsymbol{Q})$ 的维数是偶数. 可以假定 X 连通，且将 $H^n(X;\boldsymbol{Q})$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 等同(26.7)，则上积是 $H^{2k+1}(X;\boldsymbol{Q})$ 上的非退化斜对称双线性型(24.8 和 24.19). 由于奇数阶斜对称矩阵的行列式为 0，所以 β_{2k+1} 是偶数. □

此推论对 $4k$ 维流形不成立(如考虑 $\boldsymbol{CP}^{2k}$).

注意 我们已经默认紧流形的 Betti 数有限，见附录(26.17).

注意 如果 X 不可定向，我们曾证明有一个系数取自 $\boldsymbol{Z}/2$ 的 Poincaré 对偶定理. 常常还须要一个更强的结果，即系数取自定向层的对偶性(见 Swan[56]，第 XI 章).

我们可以应用 Poincaré 对偶定理确定射影空间的上同调代数. 作为例子，考虑复射影平面. 设 $\zeta\in H_4$ 是某个 R-定向的基本类，γ 是 H^2 的生成元(23.25)，则 $\zeta\cap\gamma$ 生成 H_2. 因 Kronecker 积 $H_2\times H^2\to R$ 非退化，我们得到

$$[\zeta\cap\gamma,\ \gamma]=[\zeta,\ \gamma\cup\gamma]$$

生成 R，因而 $\gamma^2=\gamma\cup\gamma$ 生成模 H^4，γ 生成 R-代数 $H^\cdot$. 更一般些的结果也对.

(26.12) **命题** 如果 γ 生成模 $H^2(\boldsymbol{CP}^n)$，则 γ 生成上同调代数 $H^\cdot(\boldsymbol{CP}^n)$.

证明 对 n 归纳. 应用在维数 $\leqslant 2n-2$ 的情况下包含映射 $\boldsymbol{CP}^{n-1}\to\boldsymbol{CP}^n$ 导出同构的事实(19.10). □

我们称 $H^{\cdot}(\boldsymbol{CP}^n)$ 为由一个 2 次元素生成的高度为 $n+1$(即 $\gamma^{n+1}=0$)的**截头多项式代数**.

(26.13) **练习** 令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Z}/2$, 则 $H^{\cdot}(\boldsymbol{P}^n)$ 是由一个 1 次元生成的高度为 $n+1$ 的截头多项式代数.

(26.14) **练习** R 任意. $H^{\cdot}(\boldsymbol{HP}^n)$ 是由一个 4 次元生成的高度为 $n+1$ 的截头多项式代数.

作为(26.13)的应用. 我们有

(26.15) Borsuk–Ulam **定理** 若 $n>m\geqslant 1$, 则不存在映射 g: $S^n\to S^m$ 与对径映射交换.

证明 任何这样的映射过渡到商均可导出映射 f: $\boldsymbol{P}^n\to\boldsymbol{P}^m$, 使得图表

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^m \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \boldsymbol{P}^n & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{P}^m \end{array}$$

交换(垂直箭头为双层复盖).

子引理 存在 f': $\boldsymbol{P}^n\to S^m$, 使得 $pf'=f$.

证明 我们应用提升准则(6.1). 如果 $m=1$, 这是显然的, 因为唯一的同态 $\pi_1(\boldsymbol{P}^n)\to\pi_1(\boldsymbol{P}^1)$ 是零. 假定 $m>1$, 考虑导出的代数同态

$$H^{\cdot}(f):\ H^{\cdot}(\boldsymbol{P}^m)\to H^{\cdot}(\boldsymbol{P}^n)$$

(系数为 $\boldsymbol{Z}/2$). 设 γ_m, γ_n 是这两个代数的生成元. 因为

$$0=H^{\cdot}(f)(\gamma_m^{m+1})=H^{\cdot}(f)(\gamma_m)^{m+1}$$

且 $n>m$, 我们有 $\gamma_n\neq H^{\cdot}(f)(\gamma_m)$. 因此 $H^{\cdot}(f)(\gamma_m)=0$(H^1 仅有的另一元素).

设 i: $\boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{P}^n$, j: $\boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{P}^m$ 是使前两个坐标之外的齐次坐标皆为零所得的包含映射, 则 $H^1(j)$ 是同构(应用 19.27 的证明, 对

m 归纳)，所以 $H^1(j)(\gamma_m)\neq 0$. 故 $H^1(j)\neq H^1(fi)$，从而 fi 与 j 不同伦. 但 i 和 j 可以认为是基本群($\boldsymbol{P}^1\approx S^1$)的生成元，所以

$$f_*:\ \pi_1(\boldsymbol{P}^n)\to\pi_1(\boldsymbol{P}^m)$$

是零同态. 再应用(6.1). □

回到定理，我们有 $pf'p'=pg$. 如果 $x\in S^n$，或者 $g(x)=f'p'(x)$，或者 $g(-x)=f'p'(x)=f'p'(-x)$. 从而 $f'p'$ 和 g 是 fp' 的两个提升，且在一点一致. 由(5.1)，$f'p'=g$. 但是 $g(x)\neq g(-x)=-g(x)$，而 $p'(x)=p'(-x)$，矛盾. □

(26.16)设想 对一个 n 维 R-定向流形 X，上积

$$H^p(X,\ X-K)\times H^q(X,\ X-L)\to H^{p+q}(X,\ X-K\cap L)$$

过渡到极限导出上积

$$H_c^p(X)\times H_c^q(X)\to H_c^{p+q}(X),$$

从而直和 $H_c^!(X)$成为 R-代数(X 不紧时，没有单位元)，且对常态映射是反变函子性的. 应用对偶同构，我们可以转化这个乘法构造同调代数 $H.(X)$，使得在得到的乘法中一个 p 维类和一个 q 维类的“交积”有维数 $p+q-n$. 这个代数关于自然导出的模同态 $H.(f)$: $H.(X)\to H.(Y)$不是共变函子性的.（参阅 Dold[64]，p. 335ff, p. 196.）到第 31 节将处理一个特殊情况.

(26.17)附录：绝对邻域收缩核

如果将 E^n 的边界叠合成一点，则可得同胚于 S^n 的一空间，所以

$$\dot{E}^n\approx S^n-一点\approx\boldsymbol{R}^n.$$

(26.17.1)引理 对 n 维流形 X 中任一点 x，x 的一个开邻域 U 和 S^n 中一点 p，存在映射 f: $X\to S^n$ 使得

$$f:\ U\approx S^n-p,$$
$$f(X-U)=\{p\}.$$

证明 选取 x 的坐标邻域 V 及 x 的坐标邻域 $U\subset V$ 使得 $\overline{U}$

$\subset V$. 设 $g: \overline{U} \to E^n$ 是一同胚且将 U 映到 $\dot{E}^n$ 上. 令 $h: E^n \to S^n$ 是将边界叠合成一点 p 的商映射. 定义 f:

$$f(x') = \begin{cases} p & x' \in X - U, \\ hg(x') & x' \in U. \end{cases}$$ □

(26.17.2) **引理** 如果 K 是 X 的紧子空间, 则存在 K 的开邻域 V 及将 V 映入欧氏空间的单射.

证明 对每一 $x \in K$, 按(26.17.1)选取 U_x 及 f_x. 设有限多个这样的开集 $U_1, \cdots, U_r$ 覆盖 K, 取 V 为它们的并. 如果 $f_1, \cdots, f_r$ 是相伴的映射, 定义

$$f: X \to S^n \times S^n \times \cdots \times S^n$$

为 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_r(x))$. 则 f 在 V 上的限制是单射, 且球面的积可嵌入 $r(n+1)$ 维欧氏空间. □

(26.17.3) **推论** 紧流形可以嵌入一欧氏空间.

我们知道, 一个空间称为 AR = **绝对收缩核**(或实心的), 如果它具有下述万有性质: 对任意正规空间 Y 及 Y 的闭子空间 B 到 X 的映射 f: $B \to X$, f 可以扩张成 Y 到 X 的映射. Tietze 扩张定理说明单位闭区间是一个 AR. 由于 AR 的卡积仍是 AR, 所以 E^n 是 AR(见 Dugundji[20] 第 VII 章, No. 5)如果在上述定义中要求 f 扩张到 B 的一个开邻域上, 则称 X 为一个 ANR = **绝对邻域收缩核**. 显然, ANR 的开子空间仍是一个 ANR(AR 的开子空间亦如此).

(26.17.4) **定理** 紧流形是 ANR.

(26.17.5) **推论** 如果紧流形 X 被嵌入某个欧氏空间, 则 X 是某个开邻域的收缩核.

仅将其万有性质应用于 $B = X$ 和 $f = \mathrm{Id}$ 的情况.

定理的证明 因 X 可被有限多个坐标邻域覆盖, 且每一个坐标邻域是一个 ANR, 我们简化为证明下述的引理.

(26.17.6)**引理** 如果 X_1, X_2 是 ANR, 在 X 中是开集且 $X=X_1\cup X_2$, 则 X 是 ANR.

证明 设 B 是 Y 中闭集, Y 为正规空间. $f: B\to X$. 令 $A_i=B-f^{-1}(X_j)$, $i=1, 2$, $j=1, 2$, $i\neq j$. 则 $A_1\cap A_2$ 是空集, 且 A_1、A_2 是闭集. 因 Y 正规, 我们可以用开集 Y_1, Y_2 分离 A_1, A_2.

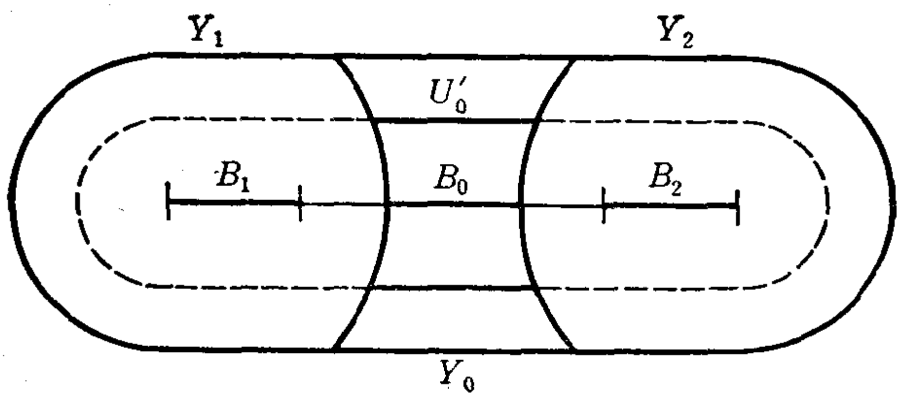
设 $Y_0=Y-(Y_1\cup Y_2)$, 则 Y_0 闭于 Y 中从而也正规. 令 $B_i=Y_i\cap B$, $i=1, 2, 0$, 则

$$f(B_i)\subset X_i \quad i=1, 2,$$

$$f(B_0)\subset X_1\cap X_2.$$

由于 $X_1\cap X_2$ 是 ANR, 所以 $f|B_0$ 可扩张成 B_0 在 Y_0 中一个邻域 U_0 上的映射 g_0(U_0 相对开于 Y_0), 因此 $U_0\cap B=B_0$, f 和 g_0 合起来定义一个映射 g: $U_0\cup B\to X$ (因 $U_0=(U_0\cup B)\cap Y_0$ 相对闭于 $U_0\cup B$, 故 g 连续).

将正规性用于不交闭集 B_0 和 Y_0-U_0, 存在不交相对开集 V 和 $W\subset Y_0$ 使得 $B_0\subset V$ 和 $Y_0-U_0\subset W$. 因此, $U_0'=Y_0-W$ 是闭的, 且 $U_0'\subset U_0$.



这样, $g(U_0'\cup B_i)\subset X_i$, $i=1, 2$, 且 $U_0'\cup B_i$ 闭于 Y, $i=1, 2$. 因 X_i 是 ANR, $g|U_0'\cup B_i$ 扩张成一开邻域 U_i ($i=1, 2$)上的映射 G_i: $U_i\to X_i$. 现在, 对 $i=1, 2$,

$$U_i'=U_i\cap(U_0'\cup Y_i)$$

在 $U_1'\cup U_2'=U$ 中是闭集，且

$$U_0'=U_1'\cap U_2'$$

(练习)，故可定义一映射 $F: U\to X$，使得 F 在 U_i' 上等于 G_i，$i=1, 2$. 这个定义是合理的，而且 U 包含 B 的开邻域(练习题)

$$(U_1\cap(V\cup Y_1))\cup(U_2\cap(V\cup Y_2)).$$ □

(26.17.7) **推论** 如果 X 是紧流形，Δ 是 $X\times X$ 的对角线，则存在 Δ 的开邻域 V 使得 V 上的恒等映射在 $X\times X$ 中同伦于 V 到 Δ 上的一个收缩.

证明 将 X 嵌入 $\boldsymbol{R}^N$(26.17.3). 令 U 是 X 的开邻域且具有收缩 $r: U\to X$(26.17.5). 设 ε 是 X 到 $\boldsymbol{R}^N-U$ 的距离，V 是 Δ 在 $X\times X$ 中的 ε 邻域. 定义

$$F: X\times X\times I\to \boldsymbol{R}^N$$

为
$$F(x, x', t)=(1-t)x+tx',$$

则 F 将 $V\times I$ 映入 U(由 V 的定义). 设

$$G=r(F|V\times I): V\times I\to X,$$

从而 $G(x, x', 0)=r(x)=x$, $G(x, x', 1)=r(x')=x'$. 定义

$$H: V\times I\to X\times X$$

为
$$H(x, x', t)=(x, G(x, x', t)),$$

则 H 是所要求的同伦. □

(26.17.8) **定理** 设欧氏空间的紧子空间 K 是一 ANR，则对所有 q, $H_q(K)$ 是有限生成模.

证明 设 $r: U\to K$ 是开邻域 U 到 K 的收缩，则存在有限胞腔复形 C，使得 $K\subset C\subset U$(见 22.24 的证明中情况 3)，所以 K 是 C 的收缩核. 因此，对所有 q,

$$H_q(r|C): H_q(C)\to H_q(K)$$

是满同态，但已知 $H_q(C)$ 是有限生成的. □

(26.17.9) **推论** 紧流形的同调模是有限生成的.

(26.17.10)**注意**　定理(26.17.3)和(26.17.4)可以用超限归纳法推广到仿紧流形上([29]), 当然, (26.17.9)不能推广. 我们已经证明了的嵌入定理是很弱的. Whitney 证明每个 n 维仿紧微分流形可以嵌入(可微地)到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中. 这是最好的一般结果, 因为我们将看到射影平面不能嵌入到 3 维空间(27.11). (要概括地了解一下嵌入方面的工作, 可参看 Lashof[36]. 进一步地发展见于 S. Gitler, 流形的浸入和嵌入, 纯数学专题讨论会记录, 22 卷).

在以下练习中, 假定流形是连通的和闭的.

(26.18)**练习**　设 $\dim M=n$. 如果 M 可定向, 则 $H_{n-1}(M;\boldsymbol{Z})$挠自由. 如果 M 不可定向, 则当 k 为奇数时 $H_n(M;\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})=0$, $H_{n-1}(M;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$的挠子群是 2 阶循环群, 且 $H_1(M;\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})\neq 0$.

(26.19)**练习**　若 M 为可定向 3 维流形且 $H_1(M;\boldsymbol{Z})=0$, 则 M 具有三维球面的同调群.

(26.20)**练习**　如果 M 是不可定向 3 维流形, 则 $H_1(M;\boldsymbol{Z})$ 无限.

(26.21)**练习**　当 $p+q=n$, 系数取自一个域时, 证明上积配对 $H^p(M)\oplus H^q(M)\to H^n(M)$ 具有下述性质: 如果 $x\in H^p(M)$, 对所有 $y\in H^q(M)$ 有 $x\cup y=0$, 则 $x=0$.

(26.22)**练习**　证明 $\boldsymbol{CP}^{2n}$ 不可能有反定向的同伦等价.

(26.23)**练习**　注意 (26.12) 和 (26.14) 与练习(24.32) 给出 Hopf 不变量为 1 的映射 $S^3\to S^2$, $S^7\to S^4$. 证明: 对这些映射, 图表

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \arrow[r] \arrow[d, "-1"'] & S^n \arrow[d, "-1"] \\
S^{2n-1} \arrow[r] & S^n
\end{tikzcd}$$

即使是在同伦意义下也不交换，其中 -1 指的是一个 -1 度映射．提示：应用(21.20)．

(26.24) **练习** 透镜空间 $L(p, q)$ 可有一个反向同伦等价的一个必要条件是：-1 是模 p 二次剩余，即存在整数 λ 使得 $-1\equiv\lambda^2 \bmod p$．提示：考虑模 p 的 Bockstein 同态 β: $H^1\to H^2$，应用(26.21)．一个更细致的结果将见于(31.10)．

(26.25) **练习** 证明 Borsuk 的一个定理：如果 $f: S^n\to S^n$ 与对径映射交换，则 f 的度数是奇数．提示：首先作 n 是奇数的情形，然后应用同纬映象 $\sum f$ 与 S^{n+1} 通过赤道 S^n 的反射的合成推广到 n 为偶数．与(26.23)不同，这不是同伦论的一个结果，因为同伦论证明了 S^n 的映射的同伦类按度数分类，所以无论如何总有 $fa\simeq af$．

(26.26) **练习** 可定向 n 维流形 M 是球状的，如果存在 f: $S^n\to M$ 使得对某个 $k\neq 0$, $H(f)\zeta_S=k\zeta_M$．证明：如果 $p\nmid k$，则 f 导出模 p 同调的同构．最后推出 $H_i(M; \boldsymbol{Z})$ 有限，$1\leqslant i<n$．

27 Alexander 对偶性

在本节中 X 表示 R–定向的 n 维流形，A 是一闭子集．设 $U=X-A$．我们知道，当应用带紧支集的上同调时，存在标准同态

$$i: \ H_c^q(U)\to H_c^q(X).$$

我们希望将此同态嵌入上同调的一个正合序列中，为此目的，必须考虑对子空间 A 的另一种上同调论．

考虑 A 的所有开邻域 V 构成的族，按反包含关系构成有向集($V\leqslant V'$ 意指 $V'\subset V$)．包含同态使得模 $H^q(V)$ 形成归纳系．我们定义

$$\check{H}^q(A)=\varinjlim_{V} H^q(V).$$

将包含同态 $H^q(V)\to H^q(A)$ 过渡到极限，得到标准同态

$$\varkappa:\ \check{H}^q(A)\to H^q(A).$$

如果这是同构，则称 A **整齐地嵌入**在 X 中。

(27.1) **命题** 如果 A 是 ANR，则 $\varkappa$ 为满同态；如果 X 也是 ANR，则 $\varkappa$ 是同构(见后面的注意)。

证明 设 $r: V\to A$ 是 A 的邻域 V 到 A 的收缩．$i: A\to V$ 是包含映射，则 $H^q(ri)=$恒等同态．这就说明 $H^q(i)$ 是满同态，从而 $\varkappa$ 是满同态．

假定 X 是 ANR．设 U 是 A 的任一邻域，令 U' 是更小的邻域带有收缩 $r: U'\to A$．我们会找到一个比 U' 还要小的邻域 V，使得当 $i: A\to U'$，$j: V\to U'$ 是包含映射时存在同伦

$$i(r|V)\simeq j,$$

所以 $H^q(j)=H^q(r|V)H^q(i)$．我们有分解

$$\begin{tikzcd}
H^q(U) \arrow[rr] \arrow[d] & & H^q(A) \\
H^q(U') \arrow[dr] & & H^q(V) \arrow[u] \\
& H^q(A) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

从而 $H^q(U)$ 中映成 $H^q(A)$ 中的零元的类，映到 $H^q(V)$ 中是零，故 $\varkappa$ 是单同态．

在 $U'\times I$ 的闭子集 $(U'\times 0)\cup(A\times I)\cup(U'\times 1)$ 上，令

$$F(x,t)=\begin{cases} x & \text{若}\quad t=0,\ x\in U', \\ r(x) & \text{若}\quad t=1,\ x\in U', \\ x & \text{若}\quad x\in A. \end{cases}$$

因 U' 是 ANR，F 可扩张成这个子集的一个邻域到 U' 的映射(见下面的注意)．这个邻域包含一个形如 $V\times I$ 的集合，其中 V 是

A 的一个邻域. 这给出了所需的同伦.

注意 尚需一个另外的假定, 使 $U'\times I$ 正规. 例如 X 仿紧 (见 H. Schuber 著«拓扑学», 定理 2 和定理 3, pp. 95—96). □

(27.2) **评注** 如果 A 不是整齐嵌入的, 仍可证明 $\check{H}^q(A)$ 只依赖于 A 而不依赖于嵌入. 这实际上是 A 的 Alexander-Čech 上同调模(Spanier[52]第六章).

现在, 我们假定流形 X 是紧的, 那么 A 也紧. 对 A 的任意开邻域 V, $K=X-V$ 紧且含于 U. 同态

$$H^q(V)\xrightarrow{\delta}H^{q+1}(X,\ V)\cong H^{q+1}(U,\ U-K)$$

与 V 的变化相容, 所以过渡到极限, 给出连接同态

$$\delta:\ \check{H}^q(A)\to H_c^{q+1}(U).$$

(27.3) **定理** 若 X 紧, 则序列

$$\cdots\to H_c^q(U)\xrightarrow{i}H^q(X)\xrightarrow{j}\check{H}^q(A)\xrightarrow{\delta}H_c^{q+1}(U)\to\cdots$$

正合, 其中 A 闭且 $U=X-A$.

证明 给定 $H^q(U,\ U-K)$ 中一个类, 它在映射 $H^q(U,\ U-K)\to H^q(X,\ X-K)\to H^q(X)\to H^q(X-K)$ 之下的象是零; 由于 $X-K$ 是 A 的邻域, 可得 $ji=0$.

$$H^q(X,\ X-K)\to H^q(X)\to H^q(X-K)$$

的正合性蕴含 $\operatorname{Ker} j=\operatorname{Im} i$.

对 $H^q(X)$ 中任意类, 在

$$H^q(X)\to H^q(x)\to H^{q+1}(X,\ X)=H^{q+1}(U,\ U)$$

之下的象是零, 所以 $\delta j=0$. 反之, 对某个 V, 由 $H^q(V)$ 中元素代表的 δ 的核中的类映成 $H^{q+1}(X,\ V)$ 中的零; 而该元素应在 $H^q(X)\to H^q(V)$ 的像中. 从而 $\operatorname{Ker}\delta=\operatorname{Im} j$.

同理, $\operatorname{Ker} i=\operatorname{Im}\delta$. □

(27.4) **推论** 设 A 是紧 ANR X 中的紧 ANR, $U=X-A$,

则对紧的 $K\subset\bar{U}$，同态

$$H^q(\bar{U},\ \bar{U}-K)\xrightarrow{\sim} H^q(X,\ X-K)\xrightarrow{\text{包含}} H^q(X,\ A)$$

过渡到极限导出同构

$$H_c^q(\bar{U})\xrightarrow{\sim} H^q(X,\ A).$$

证明 将五项引理应用于图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to H^{q-1}(A) & \to & H_c^q(U) & \to & H^q(X) & \to & H^q(A) & \to \\
\| & & \downarrow & & \| & & \| & \\
\to H^{q-1}(A) & \to & H^q(X,\ A) & \to & H^q(X) & \to & H^q(A) & \to,
\end{array}$$

运用(27.1)，对所有 q 将 $\check{H}^q(A)$ 与 $H^q(A)$ 等同视之. □

现在令 $\zeta_A\in H_n(X,\ X-A)$ 是由 X 的 R-定向确定的基本类. 对 A 的任意开邻域 V，由切除可得

$$H_n(V,\ V-A)\cong H_n(X,\ X-A).$$

ζ_A 在此同构之下的前象仍记为 ζ_A，用 ζ_A 作卡积，得到同态

$$\zeta_A\cap:\ H^q(V)\to H_{n-q}(V,\ V-A)\cong H_{n-q}(X,\ X-A)$$

(24.27). 这些同态与 V 的变化相容(24.24)，因此，过渡到极限给出同态

$$D_A:\ \check{H}^q(A)\to H_{n-q}(X,\ X-A)$$

(注意：对 $q>n$，D_A 是零同态).

(27.5) Alexander **对偶定理** 设 X 是 R-定向紧 n 维流形，A 闭，则对所有 q，D_A 是同构.

证明 图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H_c^q(U) & \to & H^q(X) & \to & \check{H}^q(A) & \to \\
\downarrow{\scriptstyle D_U} & & \downarrow{\scriptstyle D_X} & & \downarrow{\scriptstyle D_A} & \\
\to H_{n-q}(U) & \to & H_{n-q}(X) & \to & H_{n-q}(X,\ X-A) & \to
\end{array}$$

带符号交换(其中 D_U 和 D_X 是 Poincaré 对偶定理中的同构(26.6)). 应用五项引理(14.7)(检验五项引理在图表仅带符号交

换时仍成立). □

(27.6) **练习** 设 (K, L) 是 X 中紧致偶，则存在相对 **Alexander 对偶性**

$$\check{H}^q(K, L) \to H_{n-q}(X-L, X-K).$$

在 $K=X$ 的情形下得到同构

$$\check{H}^q(X, L) \to H_{n-q}(X-L).$$

由下述一系列步骤推得相对 Alexander 对偶性.

第 1 步 定义

$$\check{H}^q(K, L) = \varinjlim_{(U,V)} H^q(U, V),$$

其中 (U, V) 跑遍包含 (K, L) 的开集偶的有向集. 将偶 (U, V) 的上同调正合序列过渡到极限, 得到上同调正合序列

$$\to \check{H}^{q-1}(L) \to \check{H}^q(K, L) \to \check{H}^q(K) \to \check{H}^q(L) \to$$

第 2 步 定义卡积

$$H_n(X, X-K) \times H^q(U, V) \to H_{n-q}(X-L, X-K)$$

如下: 设 $z \in Z_n(X, X-K)$, $c \in Z^q(U, V)$, 令 ν 是 X 的开覆盖 $\{V, X-K, U \cap (X-L)\}$, 由定理 (15.9) 我们可以假定 z 是 ν 级小. 由于 c 零化 $S_q(V)$, 故 $z \cap c$ 是 $(X-L, X-K)$ 上相对 $(n-q)$ 维闭链.

这一卡积与过渡到更小的 (U, V) 相容, 从而过渡到极限给出卡积

$$H_n(X, X-K) \times \check{H}^q(K, L) \to H_{n-q}(X-L, X-K).$$

第 3 步 图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\to \check{H}^{q-1}(L) & \longrightarrow & \check{H}^q(K, L) & \longrightarrow & \check{H}^q(K) & \longrightarrow & \check{H}^q(L) \to \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_L \cap} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_K \cap} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_L \cap} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_L \cap} \\
\to H_{n-q+1}(X, X-L) & \to & H_{n-q}(X-L, X-K) & \to & H_{n-q}(X, X-K) & \to & H_{n-q}(X, X-L) \to
\end{array}$$

带符号交换，应用绝对 Alexander 对偶性及五项引理. □

(27.7)评注 我们可以类似地定义标准同态

$$\zeta_K\cap:\ H^q(X-L,\ X-K)\to \check{H}_{n-q}(K,\ L),$$

其中右边的模是射影极限

$$\varprojlim_{(U,V)} H_{n-q}(U,\ V).$$

此同态一般不是同构：设 $X=\boldsymbol{P}^3$, $K=\boldsymbol{P}^2$, L 空, $R=\boldsymbol{Z}$, 则 $\check{H}^1(K)=H_1(K)=\boldsymbol{Z}/2$. 现在 $X-K$ 是开 3 维胞腔，所以上同调正合序列给出 $H^2(X,\ X-K)=H^2(\boldsymbol{P}^3)=0$. 麻烦来源于同调群的挠子群. 我们可以用与(22.24)的证明相类似的推理，应用射影极限与向量空间正合序列可交换的事实，证明当 R 为一个域时这一对偶性成立.

(27.8)评注 Alexander 对偶性可以推广到仿紧流形中任意闭偶的情形. 这要用到带紧支集的 Čech–Alexander 上同调(参看 Spanier[52]第六章或者 Swan[56]第 XI 章).

(27.9)推论 设 A 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的紧子流形，则对所有 $q<n$,

$$H^q(A)\cong H^*_{n-q-1}(\boldsymbol{R}^n-A),$$

且 $H^n(A)=0$(从而 $\dim A<n$).

证明 由(26.17)我们可以等同 $\check{H}^q(A)=H^q(A)$. 将 $\boldsymbol{R}^n$ 认为是 S^n-单点，我们有同构

$$H^q(A)\xrightarrow[D_A]{} H_{n-q}(S^n,\ S^n-A)\leftarrow H_{n-q}(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n-A)$$

$$\xrightarrow[\partial]{} H^*_{n-q-1}(\boldsymbol{R}^n-A). \qquad \square$$

(27.10)一般分离定理 如果 A 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的具有 k 个连通分支的紧$(n-1)$维子流形，则 A 的补集具有 $k+1$ 个连通分支.

证明 在 $\boldsymbol{Z}/2$ 中取系数. 由(27.9)和 Poincaré 对偶性，$H_0(A)\cong H^{n-1}(A)\cong H^*_0(\boldsymbol{R}^n-A)$. □

(27.11) **定理** 一个不可定向的紧 n 维流形不能嵌入 $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

证明 否则,如果 k 是 A 的连通分支的个数,则

$$\operatorname{rank} H_n(A;\boldsymbol{Z})=\operatorname{rank} H^n(A;\boldsymbol{Z})$$
$$=\operatorname{rank} \tilde{H}_0^*(\boldsymbol{R}^{n+1}-A;\boldsymbol{Z})=k$$

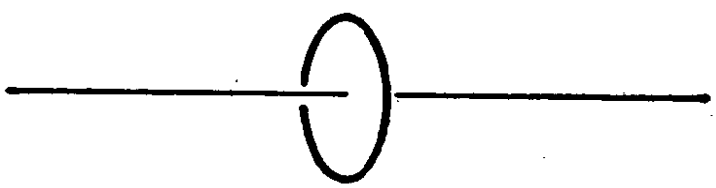
(因为(27.9)对任意系数环成立). 但是 A 不可定向蕴含着 $H_n(A;\boldsymbol{Z})$ 具有比 k 小的秩(22.28). □

这样,不可定向曲面 U_n 不能嵌入 3 维空间.

(27.12) **练习** 如果 A 是紧 n 维流形,可嵌入同维数的紧连通流形 X 中,则 $A=X$.

(27.13) **练习** 应用 Alexander 对偶性简短地证明定理(18.1)和(18.3).

(27.14) **练习** 回忆 X 和 Y 的联接 $X*Y$ (17.18). 注意 S^n 同胚于 S^p*S^q, 这里 $p+q=n+1$. 按照 $x\to(x, 0, y)$ 将 S^p 嵌入 S^n, 其中 $y\in S^q$ 固定. 应用这一嵌入几何地阐明对偶同构 $H^p(S^p)\cong H_q(S^n-S^p)$. $p=q=1$ 的情况如图所示



下面的练习基于 Steenrod 和 Epstein [87], p. 35.

(27.15) **练习** 设 M 是嵌入 S^n 的连通闭 $(n-1)$ 维流形. 由(27.11), M 可定向且将 S^n 分成闭包分别为 A 和 B 的两个开子集, 使得 $A\cup B=S^n$. 证明没有 M 的真闭子集可以分离 S^n, 从而 $A\cap B=M$.

(27.16) **练习** 应用(27.15)证明 Hopf 的一个定理. 包含映射 $i: M\to A$, $j: M\to B$ 导出 $H^q(M)$ 的直和表示

$$H^q(M)\cong i^*H^q(A)\oplus j^*H^q(B),$$

其中 $0<q<n-1$，并且 i^*, j^* 是单同态(i^* 为 $H^q(i)$的简写)．证明：对 $r\geqslant n-1$, $H^r(A)=0=H^r(B)$，在一域 F 中取系数时，证明

$$i^*H^q(A)\cong \operatorname{Hom}(j^*H^{n-q-1}(B), F) \quad 0<q<n-1.$$

(27.17)**练习** 应用(27.16)证明下列嵌入的不存在性：$\boldsymbol{P}^n\not\subset S^{n+1}$, $\boldsymbol{CP}^n\times S^m\not\subset S^{2n+m+1}$, $\boldsymbol{CP}^n\not\subset S^{2n+1}$, $\boldsymbol{HP}^n\not\subset S^{4n+1}$. 这里 $n\geqslant 2$.

28 Lefschetz 对偶性

一个 n 维带边流形是一个局部同胚于欧几里德半空间

$$\boldsymbol{R}_+^n=\{(x_1, \cdots, x_n)\in \boldsymbol{R}^n \mid x_n\geqslant 0\}$$

的空间 X. X 中具有同胚于 $\dot{E}^n$ 的开邻域的点构成 X 的一个开子集 $\dot{X}$，这个开子集是一个 n 维流形.

令
$$\partial X=X-\dot{X}.$$

对每一 $x\in\partial X$，存在一个相对开邻域同胚于 $\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid x_n=0\}\approx \boldsymbol{R}^{n-1}$ 中一个开子集，所以 ∂X 是一个 $n-1$ 维流形.

(28.1)**例 1** 闭 Möbius 带，它的边缘是一圆周.

(28.2)**例 2** 闭 n 维圆环

$$\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid a\leqslant |x|\leqslant b\},$$

其中 $a>0$. 它的边缘是两个$(n-1)$维球面的不交并.

(28.3)**例 3** E^n.

(28.4)**例 4** $Y\times I$. 其中 Y 是任意无边流形.

(28.5)**例 5** 带边流形的任一开子空间.

(28.6)**注意** Ahlfors 和 Sario[2]Chap. 1 或 Massey[67]中给出了紧带边曲面的一个完全分类.

设 V 是 X 中开集，所以 $\dot{V}=V\cap\dot{X}$, $\partial V=V\cap\partial X$. 令 $\Gamma(\dot{V})$ 表示 $\dot{X}$ 的定向层在 $\dot{V}$ 上的截口的模，$\Gamma(\partial V)$ 表示 ∂X 的定向层在 ∂V 上的截口的模(22.8 和 22.2).

(28.7) **命题** 存在唯一同态

$$\partial_V:\ \Gamma(\dot{V})\to\Gamma(\partial V),$$

它与在更小的 V 上的限制相容，并将 $\dot{X}$ 沿 $\dot{V}$ 的局部定向映成 ∂X 沿 ∂V 的局部定向.

(28.8) **推论** 如果 $\dot{X}$ 可 R-定向，则 ∂X 也是 R-可定向的.

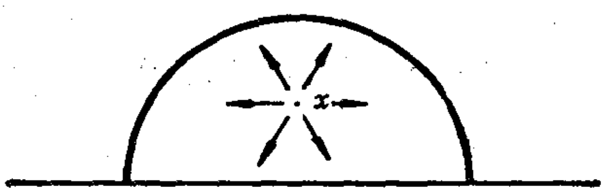
事实上，(28.7)说明了 $\dot{X}$ 的一个 R-定向如何导出 ∂X 的一个 R-定向.

命题的证明 问题是局部的. 只须对一个基中的开集进行验证(28.7). 有两种类型:

类型 1. $V\subset\dot{X}$, 取 $\partial_V=0$.

类型 2. V 同胚于半球 $\dot{E}^n\cap\boldsymbol{R}^n_+$. 在这种情形下，我们有几个自然同构.

(1) 对任意 $x\in\dot{V}$, $X-\dot{V}$ 是 $X-x$ 的强形变收缩核，从而 $H_n(X,\ X-\dot{V})\to H_n(X,\ X-x)\xleftarrow{\sim}H_n(\dot{X},\ \dot{X}-x)$ 是同构.



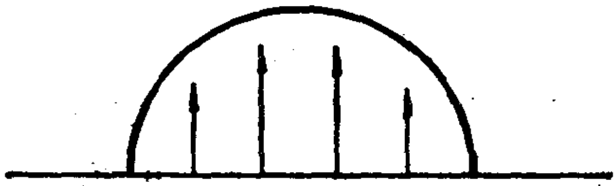
(2) 因 $\dot{V}$ 是一个开 n 维胞腔，所以计值同态

$$\Gamma\dot{V}\to H_n(\dot{X},\ \dot{X}-x)$$

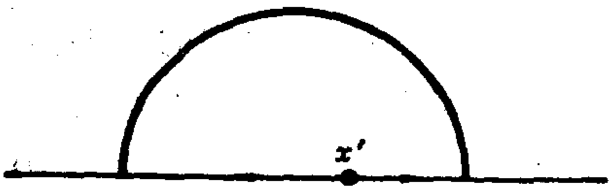
是同构，与(1)联合给出同构的交换图表

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X,\ X-\dot{V}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma\dot{V} \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
H_n(X,\ X-x) & \xleftarrow{\sim} & H_n(\dot{X},\ \dot{X}-x)
\end{array}$$

(3) 考虑三元组$(X, X-\dot{V}, X-V)$的正合同调序列. 因为$X-V$是X的强形变收缩核，所以对所有q我们有$H_q(X, X-V)=H_q(X, X)=0$. 从而$\partial: H_n(X, X-\dot{V})\to H_{n-1}(X-\dot{V}, X-V)$是同构.



(4) 假定$x'\in\partial V$, 则$X-V$是$X-\dot{V}-x'$的强形变收缩核. 同理$\partial X-\partial V$是$\partial X-x'$的强形变收缩核.



(5) $X-\dot{V}-x'$是$X-\dot{V}$中相对开集, $\dot{X}-\dot{V}$的闭包是$X-V\subset X-\dot{V}-x'$, 因此$\dot{X}-\dot{V}$可以切除. 把此同构和(4)结合起来给出同构的交换图表

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\partial V \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & & H_{n-1}(X-\dot{V}, X-V) \arrow[d, "\wr"] \\
H_{n-1}(\partial X, \partial X-x') & H_{n-1}(\partial X, \partial X-\partial V) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & H_{n-1}(X-\dot{V}, X-\dot{V}-x')
\end{tikzcd}$$

(左边的垂直同构是截口在点x'处的计值 [∂V是∂X中的开$(n-1)$维胞腔]).

(6) 综合(2)、(3)和(5)给出同构

$$\partial_V: \Gamma\dot{V}\to\Gamma\,\partial V.$$

它显然与在更小的第1型或第2型V上的限制相容. □

(28.9)**注意** (28.8)的逆不真，例1说明这点.

(28.10) 下面我们将 X 作为一个 n 维无边流形的闭子空间自然嵌入.

设 X_1, X_2 是 X 的两个复制品, 构造不交并

$$X_1 \amalg (\partial X \times I) \amalg X_2,$$

然后将任一个 $x' \in \partial X_1$ 与 $(x', 0)$ 叠合, 将任一个 $x' \in \partial X_2$ 与 $(x', 1)$ 叠合. 设 $2X$ 是商空间. 则每个 X_i 同胚地映到 $2X$ 的一个闭子空间上. 显然 $2X$ 是一个 n 维流形. 如果 X 紧, $2X$ 也紧.

(28.11) **例** 2(Möbius 带) = Klein 瓶,

2(2 维圆环) = 环面,

$2E^n = S^n$,

$2(S^1 \times I)$ = 环面.

(28.12) **练习** 如果 $\dot{X}$ 是 R-定向的, 则存在唯一的由 $\dot{X}_1$ 和 $\dot{X}_2$ 上给定的 R-定向导出的 $2X$ 上的 R-定向.

令 $Y_1 = X_1 \cup (\partial X \times [0, 1))$, $Y_2 = (\partial X \times (0, 1]) \cup X_2$ (将它们与其在 $2X$ 中的象等同). 则 X_i 是 Y_i 的形变收缩核, $i = 1, 2$, 且 $Y_1 \cap Y_2 = \partial X \times (0, 1)$ 同伦等价于 ∂X. 由于每个 Y_i 是 $2X$ 中的开集, 故 $(2X, Y_1, Y_2)$ 是正合三元组. 将 (20.8) 用于 Mayer-Vietoris 序列, 我们得到

$$\chi(2X) = \chi(Y_1) + \chi(Y_2) - \chi(Y_1 \cap Y_2)$$

或
$$\chi(2X) = 2\chi(X) - \chi(\partial X).$$

这里欧拉示性数可以对任意 PID R 选取.

(28.13) **推论** 如果 X 紧且 $\dot{X}$ 是 R-定向的 (R 为一个 PID), 则 $\chi(\partial X; R)$ 是偶数.

证明 如果 n 是偶数, 则 ∂X 是奇数维的且是 R-定向的, 所以 $\chi(\partial X; R) = 0$ (26.10). 如果 n 是奇数, 由同样的理由知 $\chi(2X; R) = 0$, 而 $\chi(\partial X; R) = 2\chi(X; R)$. □

(28.14) **例** $\boldsymbol{P}^{2n}$, $\boldsymbol{CP}^{2n}$ 和 $\boldsymbol{HP}^{2n}$ 都不是边缘 ($\chi(\boldsymbol{P}^{2n}; \boldsymbol{Z}/2)$

-1, $\chi(CP^{2n})=\chi(HP^{2n})=2n+1$). 紧可定向曲面 T_g 都是边缘，因为它们可嵌入在 3 维空间中. 所有紧可定向三倍(fold)曲面是边缘，这是一个深入的定理(见 Rohlin[47]).

(28.15) **命题** 设 X 紧. $s\in\Gamma\dot{X}$ 是 $\dot{X}$ 的一个 R-定向. 则存在唯一同调类 $\zeta\in H_n(X, \partial X)$，使得对任意 $x\in\dot{X}$，

$$s(x)=j_x^{\dot{X}}(\zeta).$$

证明 存在由

$$j(\alpha)(x)=j_x^{\dot{X}}(\alpha)$$

给出的标准同态 j: $H_n(X, \partial X)\to\Gamma\dot{X}$ (验证 $j(\alpha)$ 连续). 我们要求 j 是同构: 等同 $X=X_1$，这样 X 是开流形 $Y=Y_1$ 的一个闭子空间且是 Y 的形变收缩核(28.10)，因此有交换图表

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X, X-\dot{X}) & \xrightarrow{j} & \Gamma\dot{X} \\
\downarrow & & \\
H_n(Y, Y-X) & & \uparrow \nu \\
\downarrow & & \\
H_n(Y, Y-X) & \xrightarrow{j} & \Gamma X,
\end{array}$$

其中左边的垂直箭头都是同构($Y-\dot{X}$ 与 $Y-X$ 同伦等价)，ν 是 Y 的定向层在 X 上的截口在 $\dot{X}$ 上的限制. 由于 X 紧，下面的 j 是同构(22.24). 因此我们归结为证明下面的论断:

子引理 ν 是一同构.

这可由下面的事实推出: 如果 $x'\in\partial X$, V 是半球形邻域, W 是 x' 在 Y 中的一个坐标邻域满足 $W\supset V$，则 $\dot{V}$ 上的任一截口唯一地扩张到 W 上. □

(28.16) **推论** 在相同条件下，$\partial\zeta\in H_{n-1}(\partial X)$ 是 ∂X 的导出定向的基本类.

证明 (28.7)的证明说明了图表

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, \partial X) & \xrightarrow{j} & \Gamma(X) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial_X \\ H_{n-1}(\partial X) & \xrightarrow{j} & \Gamma(\partial X) \end{array}$$

交换.

(28.17)**例** 设 X 是(闭)Möbius 带, φ: $I^2 \to X$ 是商映射, 从而对所有 t, $\varphi(0, t) = \varphi(1, 1-t)$. 闭路

$$\sigma(s) = \varphi\left(s, \frac{1}{2}\right),$$

$$\tau(s) = \begin{cases} \varphi(2s, 0) & s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi(2s-1, 1) & s \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

分别代表 X 的赤道和 X 的边缘. 现在赤道是 X 的强形变收缩核. 形变由

$$F_u(\varphi(s, t)) = \varphi\left(s, \frac{1}{2} + u\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$$

给出. 由于 $F_0\tau = \sigma^2$, 我们得到 τ 同伦于 σ^2, 这推出 $H_2(X) = 0$. 而当我们将模 $H_1(\partial X)$ 和 $H_1(X)$ 都与 R 等同看待时, 包含映射 $H_1(\partial X) \to H_1(X)$ 就是用 2 乘, 因此当 $R = \boldsymbol{Z}$ 时, 同调正合序列说明 $H_2(X, \partial X) = 0$, 所以 X 的确不可定向.

(28.18)**Lefschetz 对偶定理** 设 X 是 n 维紧带边流形, 且设 $\dot{X}$ 是 R-定向的. 设 $\zeta \in H_n(X, \partial X)$ 是基本类. 则图表

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H^{q-1}(X) & \longrightarrow & H^{q-1}(\partial X) & \xrightarrow{\delta} & H^q(X, \partial X) & \longrightarrow & H^q(X) & \longrightarrow \\ \downarrow \zeta\cup & & \downarrow (\partial\zeta)\cap & & \downarrow \zeta\cap & & \downarrow & \\ \to H_{n-q+1}(X, \partial X) & \xrightarrow[\partial]{} & H_{n-q}(\partial X) & \to & H_{n-q}(X) & \to & H_{n-q}(X, \partial X) & \to \end{array}$$

带符号交换, 且垂直箭头皆为同构.

证明 特别是, 左边的方块仅在相差因子 $(-1)^{q-1}$ 的意义下交

换(24.21)，而中间的和右边的方块确实交换.

注意，同态 $H^{q-1}(\partial X)\to H_{n-q}(\partial X)$ 是 Poincaré 对偶，所以是同构(26.6). 如果我们验证了同构 $H^q(X)\to H_{n-q}(X,\partial X)$，由 5 项引理(14.7)可得另一同构.

视 X 等同于 $X_1\subset 2X$(29.3)，则切除映射和形变收缩给出同构

$$H_{n-q}(X,\partial X)\xrightarrow{\sim}H_{n-q}(\overline{Y}_1,\overline{Y_1\cap Y_2})\xrightarrow{\sim}H_{n-q}(2X,2X-X).$$

且在此同构之下，$H_n(X,\partial X)$ 中的基本类(28.15)对应于 $H_n(2X,2X-X)$ 中的基本类(28.12, 22.21, 22.24). 但是由 Alexander 对偶(27.5)与基本类求卡积给出同构

$$\check{H}^q(X)\xrightarrow{\sim}H_{n-q}(2X,2X-X).$$

在此情况下，$\check{H}^q(X)=H^q(X)$，因为 X 是它在 $2X$ 中的邻域 $X\cup(\partial X\times[0,\varepsilon))$ 的形变收缩核. □

(28.19) **练习** 设 X 是 3 维的，$H_1(X)=0$，则 ∂X 是 2 维球面的不交并(证明 $H_1(\partial X)=0$).

(28.20) **练习** 假设 Y 是 $4k$ 维的紧定向流形，则存在由

$$\beta(\xi,\eta)=[\zeta,\xi\cup\eta]$$

给出的 $H^{2k}(Y)$ 上的对称双线型 β，其中 ζ 是 $4k$ 维的基本同调类. 假设 Y 是边缘，$Y=\partial X$，这里 X 紧. 设 A^{2k} 是在包含 $H^{2k}(X)\to H^{2k}(Y)$ 之下 $H^{2k}(X)$ 的象，则在 β 之下 A^{2k} 是自身的正交补.

对 R 是实数域的情形，这一结果可叙述为：由 β 导出的二次型的**指数**为 0，这给出 $4k$ 维流形边缘化的一个必要条件.（参看 Hirzebruch[31]第 8 节指数的一个公式.）

(28.21) **注意** 边缘流形的理论称为**配边**. 两个紧 n 维流形属于一个配边类，如果它们的不交并是个边缘. 应用(19.39)的技巧可以证明这是一种等价关系. “不交并”运算定义了 n 维配边类集

合 $\mathscr{N}$ 上的一个加法使得它成为 $\boldsymbol{Z}/2$ 上的向量空间(零类由边缘流形组成). 流形的拓扑积导出双线性映射

$$\mathscr{N}_p\times\mathscr{N}_q\to\mathscr{N}_{p+q},$$

借助于这个映射, 所有 $\mathscr{N}_q$ 的直和 $\mathscr{N}$ 做成 $\boldsymbol{Z}/2$ 上的分次交换代数. 对可微范畴(即紧可微流形)这个代数业已确定. 对此情形, Thom 证明了 $\mathscr{N}$ 是由所有 q 次不定元 $x_q(q\neq 2^k-1)$ 生成的自由交换代数; 当 q 是偶数时, 他证明 x_q 是射影空间 $\boldsymbol{P}^q$ 的类. 证明方法是证明 $\mathscr{N}_q$ 同构于某个我们可以计算的同伦群 (Thom[57]; Milnor[41]); 当 q 为奇数且 $\neq 2^k-1$ 时, Dold[19] 计算类 x_q 如下: 记 $q+1=2^r(2s+1)$, 则 x_q 是 $\boldsymbol{P}(2^r-1, 2^rs)$ 的类, 这里, 一般的说 $\boldsymbol{P}(m, n)$ 是由 $S^m\times\boldsymbol{CP}^n$ 叠合 (x, z) 与 $(-x, \bar{z})$ 得到的流形(又见 Stong[72]).

也有关于紧定向可微流形的配边理论. 定义 $-X$ 为带有相反定向的 X, 于是 X 和 Y 称为属于一个定向配边类如果 X 和 $-Y$ 的不交并是一个定向边缘(28.8 之后的评注). 给拓扑积赋予积定向(参见 29 节), 我们得到一个分次反交换环

$$\Omega=\oplus_{q\geqslant 0}\Omega_q.$$

有理数上的代数 $\Omega\oplus\boldsymbol{Q}$ 已由 Thom 确定. 它是由偶数维复射影空间 $\boldsymbol{CP}^{2k}$ 的类生成的自由反交换代数. 所以如果 q 不能被 4 整除, 则 Ω_q 是挠群. Ω 的挠部分已由 Wall[58] 和 Milnor[40] 确定. 对数值小的 q 我们有

$$\Omega_q=\begin{cases}0 & q=2,\ 3,\\ \boldsymbol{Z} & q=4,\\ \boldsymbol{Z}/2 & q=5.\end{cases}$$

对任意偶 (Y, B), 考虑对所有 X 的所有映射 $(X, \partial X)\to(Y, B)$ 就可以构造 (Y, B) 的新的同调论, 称为**边缘论**. 除了一个点的边缘群非平凡外, 这个同调论满足所有的 Eilenberg-Steenrod

公理(参看 Conner 和 Floyd [15]). R. J. Milgram 在 Proc Symp. Pure Math. Vol. 32(1978)79—89 中介绍了近期发展的概况.

(28.22) 对 26—30 节中的材料的更深入的研究, 可参看 Dold[64]. 对偶定理对非常同调论的推广, 可参看 Adams[74]或 Gray[76].

(28.23)**练习** 如果 M 紧, 则 ∂M 不是 M 的收缩核.

(28.24)**练习** 如果 M 是可缩流形 W 的边界, 则 M 和 $2W$ 具有球面的同调.

(28.25)**练习** 假设 M 可定向, $\dim M=2n+1$. 令 $i: \partial M\to M$ 是包含映射. $K=\ker H_n(i): H_n(\partial M)\to H_n(M)$, 这里系数取自一个域 F. 证明: $2\dim K=\dim H_n(\partial M)$. 如果 M 不可定向, 结论对 $F=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 亦真.

(28.26)**练习** ([79]p. 63)设 M 是 3 维紧流形, ∂M 不包含 2 维球面. 证明: 如果(a) M 可定向且 $\partial M\neq\phi$ 或(b) M 不可定向且 ∂M(可能空)不包含射影平面, 则 $H_1(M;\boldsymbol{Z})$ 无限.

第四编 乘积和 Lefschetz 不动点定理

引 言

关于同调和上同调模的系统计算，已经有几种方法可供我们支配．但是，关于上积的计算却还没有这样一般的方法可循．实际上，两种概括的着手方法可以想到：其一，要计算的空间的特殊结构可在可能的上同调代数上施加限制．对于流形，对偶定理就给出了很强的限制．其二，用抽象手段可以构造一些辅助乘积并且确定它们之间的许多关系．这些往往可反过来用于上同调代数的确定．本编将论述形式过程的某些基本方面．

在第 29 节中介绍了叉积和斜积．论述了它们同 24 节中上积和卡积之间在形式上的关系．在上同调水平上保持的某些关系，在基础链复形上仅仅在链同伦的意义下才得以保持．明确地构造出这样的链同伦，或者是即使给出象(24.8)那样的一个论证，将是相当麻烦的．代替这一点我们应用零调模型定理．这是本书中最为抽象的一部分论述．不过，所有重要的细节在证明同伦不变性(11.4)时已经见到．

这种形式方法的应用之一是把积空间的上同调环用因子空间的上同调环的张量积表示．

这几种乘积之间的所有形式上的关系，我们并不打算彻底地进行讨论．Dold[64] 和 Spanier[52] 的教本在这方面给出了很多

材料. J. F. Adams[62]也给出了一个良好的综述.

第 30 节中介绍的 Thom 复形, 在流形的研究以及在同伦论中都是重要的. 本节的定理反映出第 29 节引进的乘积的效用.

在第 31 节简要介绍了相交理论. 在同调类用嵌入子流形表示时, Poincaré 对偶同构得到了更富几何意义的解释. 若放宽表示同调类的方式, 将导致由组合处理得到的 Poincaré 对偶的几何解释. 我们不准备在一般情形这样做, 而仅仅满足于对透镜空间的讨论.

29 乘　积

我们已经看到(7.11), 带基点拓扑空间的积空间的 n 维同伦群与因子空间 n 维同伦群的乘积标准同构. 但是, 对于积空间的同调模, 情形却远为复杂. 例如,

$$H_2(S^1\times S^1)\cong R,$$

而

$$H_2(S^1)\times H_2(S^1)=0.$$

分成两个部分进行分析. 第一是联系 $S(X\times Y)$ 和 $S(X)\otimes S(Y)$ 的几何步骤. 第二是联系 $H.(C\otimes C')$ 和 $H.(C)\otimes H.(C')$ 的代数步骤. 当 R 是一域时, 分次同调模 $H.(X\times Y)$ 与张量积 $H.(X)\otimes H.(Y)$ 同构.

$X\times Y$ 中的每个奇异 n-单形 ω 可唯一地表示成 (σ, τ) 的形式, 这里 $\sigma=p_X\omega$, $\tau=p_Y\omega$ (p_X, p_Y 是 $X\times Y$ 到 X, Y 的射影). 对满足 $0\leqslant p\leqslant n$ 的每个整数 p, 可将张量积 $S_p(X)\otimes S_{n-p}(Y)$ 中元 $\sigma\lambda_p\otimes\tau\rho_{n-p}$ (σ 的前 p 维面和 τ 的后 $(n-p)$ 维面的张量积, 见第 24 节), 同 (σ, τ) 联系起来. 应用线性扩张给出一个同态

$$S_n(X\times Y)\rightarrow S_p(X)\otimes S_{n-p}(Y).$$

将所有这些同态加起来: 设

$$[S(X)\otimes S(Y)]_n=\bigoplus_{p=0}^{n}S_p(X)\otimes S_{n-p}(Y),$$

于是定义 **Alexander-Whitney** 同态

$$A:\ S_n(X\times Y)\to[S(X)\otimes S(Y)]_n$$

为
$$A(\sigma,\ \tau)=\sum_{p=0}^{n}\sigma\lambda_p\otimes\tau\rho_{n-p}.$$

(29.1)**引理** 对$(X,\ Y)$来说，Alexander-Whitney 同态是函子性的.

证明 引理是说，给出映射$f\colon X\to X'$，$g\colon Y\to Y'$，它们导出映射$f\times g\colon X\times Y\to X'\times Y'$，则图表

$$\begin{tikzcd}
S_n(Y\times Y) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S_n(f\times g)"'] & {[S(X)\otimes S(Y)]_n} \arrow[d, "\bigoplus_p S_p(f)\otimes S_{n-p}(g)"] \\
S_n(X'\times Y') \arrow[r, "A"] & {[S(X')\otimes S(Y')]_n}
\end{tikzcd}$$

交换，而这可由定义直接证明。 □

(29.2) 现在定义边缘算子，使模$[S(X)\otimes S(Y)]_n$的序列成为一个代数链复形. 一般地说，设C，C'是代数链复形，且设

$$[C\otimes C']_n=\bigoplus_{p=0}^{n}C_p\otimes C'_{n-p}$$

如前，则对$z\in C_p$，$z'\in C'_{n-p}$，可令

$$\partial(z\otimes z')=\partial z\otimes z'+(-1)^p z\otimes\partial z'$$

并作线性扩张来定义$\partial\colon[C\otimes C']_n\to[C\otimes C']_{n-1}$. 显然$\partial\partial=0$.

(29.3)**引理** A是链同态，即

$$A\partial=\partial A.$$

证明 证明是通过一个计算，此计算实质上与(24.2)证明中的相同.

我们可象通常那样，将∂_i的核模以前一个∂的象做成同调模$H_n(C\otimes C')$. (29.3)则蕴含A导出一个函子性的同态

$$\overline{A}: H_n(X\times Y)\to H_n(S(X)\otimes S(Y)).$$

(29.4) Eilenberg-Zilber 定理　$\overline{A}$ 为同构．实际上 A 是链复形 $S(X\times Y)$ 和 $S(X)\otimes S(Y)$ 之间的链等价．

说 A 是链等价，即意味着存在链同态

$$B: S(X)\otimes S(Y)\to S(X\times Y),$$

使得 AB 和 BA 都与恒等同态链同伦．B 及链同伦的构作要用零调模型法——见附录(29.23 A)．

下面讨论代数复形 $S(X)\otimes S(Y)$ 的同调与 X 的同调和 Y 的同调的张量积之间的关系．设 z 是 X 上的 p 维闭链，W 是 Y 上的 $(n-p)$ 维闭链，则 $z\otimes w$ 是 $[S(X)\otimes S(Y)]_n$ 中的闭链，并且我们由 $(\bar{z}, \bar{w})\to \overline{z\otimes w}$ 得到一个完全确定的双线性配对

$$H_p(X)\times H_{n-p}(Y)\to H_n(S(X)\otimes S(Y)),$$

从而有唯一同态

$$H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y)\to H_n(S(X)\otimes S(Y))$$

将 $\bar{z}\otimes\overline{W}$ 映为 $\overline{z\otimes w}$．若如上令

$$[H(X\otimes H(Y)]_n=\bigoplus_{p=0}^{n} H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y),$$

则可由
$$i\Big(\sum_{p=0}^{n}\bar{z}_p\otimes\bar{w}_{n-p}\Big)=\sum_{p=0}^{n}\overline{z_p\otimes w_{n-p}}$$

得到同态　$i: [H(X)\otimes H(Y)]_n\to H_n(S(X)\otimes S(Y))$．

显然，i 对于偶 (X, Y) 是函子性的．在合成同态

$$\overline{B}_i: H_p(X)\otimes H_q(Y)\to H_{p+q}(X\times Y)$$

之下，元素 $\zeta\otimes w$ 的象记作 $\zeta\times w$．

当 R 是一 PID 时，我们将说明 i 是单同态并确定它的余核．为了后面的应用，我们还要讨论更一般的情形：用任意代数链复形 C, C' 代替 $S(X)$ 和 $S(Y)$，并且取 C 和 C' 是用所有整数标号的，而不只是用非负整数标号，这可使我们同时讨论代数上链复

形，因为令 $C_{-n}=C^n$ 即可将上链复形转变成链复形. 设

$$[C\otimes C']_n=\bigoplus_{p+q=n} C_p\otimes C'_q,$$

这里 p 和 q 可取负值，并对复形 $C\otimes C'$ 定义边缘算子如(29.2)，从而可得如上的标准链同态

$$i: H(C)\otimes H(C')\to H(C\otimes C').$$

假定 R 是 PID 而 C 自由(即所有的 C_n 都是自由模，$C_n=S_n(X)$ 即满足这一要求)，我们来确定 i 的核和余核.

令 Z, B 是 C 的闭链复形和边缘复形，B^- 是由

$$B_q^-=B_{q-1}$$

给定的复形，则有链复形的正合序列

(29.5) $$0\to Z\to C\xrightarrow{\partial} B^-\to 0.$$

据假设，B^- 是自由的，所以此序列可裂. 从而，用 C' 作张量积给出另一链复形的正合序列

$$0\to Z\otimes C'\to C\otimes C'\to B^-\otimes C'\to 0.$$

按照通常的讨论，这个序列导出一个无穷的同调正合序列

(29.6) $$\to H_n(Z\otimes C')\to H_n(C\otimes C')$$
$$\to H_n(B^-\otimes C')\to H_{n-1}(Z\otimes C')\to.$$

现在，Z 是自由复形，且边缘算子恒为零. 所以，在此情形，$Z=H(Z)$。我们有下述结果:

子引理 $i: Z\otimes H(C')\to H(Z\otimes C')$ 是同构。

证明 因为 $Z\otimes C'$ 上的边缘算子由

$$\partial(z\otimes w)=(-1)^p z\otimes\partial w$$

给定，故只需证明序列

$$0\to Z_p\otimes B'_q\to Z_p\otimes Z'_q\to Z_p\otimes H_q(C')\to 0$$

正合，而这个序列的正合性可由 Z_p 的自由性得到，这样便可证明子引理。 □

类似地，$i: B^{-}\otimes H(C')\to H(B^{-}\otimes C')$ 也是一个同构，这些同构的模代入正合序列(29.6)就有

$$\to[B\otimes H(C')]_n\to[Z\otimes H(C')]_n$$
$$\to H_n(C\otimes C')\to[B\otimes H(C')]_{n-1}\to,$$

换言之，我们有正合序列

(29.7) $\qquad 0\to \operatorname{Coker}\varphi_n\to H_n(C\otimes C')\to \operatorname{Ker}\varphi_{n-1}\to 0.$

其中 φ_n: $[B\otimes H(C')]_n\to[Z\otimes H(C')]_n$ 为连接同态.

为确定 $\operatorname{Coker}\varphi_n$ 和 $\operatorname{Ker}\varphi_n$，可应用正合序列

(29.8) $\qquad 0\to B_p\xrightarrow{j_p}Z_p\to H_p(C)\to 0.$

此序列未必可裂. 用 $H_{n-p}(C')$ 作张量积给出正合序列

(29.9) $\qquad B_p\otimes H_{n-p}(C')\xrightarrow{j_p\otimes 1}Z_p\otimes H_{n-p}(C')$
$$\to H_p(C)\otimes H_{n-p}(C')\to 0.$$

左边的箭头未必是单同态，事实上，因为(29.8)是 $H_p(C)$ 的自由分解(Z_p 是自由的)，由定义此箭头的核是

$$\operatorname{Tor}(H_p(C),\ H_{n-p}(C')).$$

对所有的 p，将这些序列相加，给出正合序列(因 $\varphi_n=\oplus_p j_p\otimes 1$)：

$$0\to\oplus_p\operatorname{Tor}(H_p(C),\ H_{n-p}(C'))\to[B\otimes H(C')]_n$$
$$\xrightarrow{\varphi_n}[Z\otimes H(C')]_n\to[H(C)\otimes H(C')]_n\to 0,$$

它给出 $\operatorname{Ker}\varphi_n$ 和 $\operatorname{Coker}\varphi_n$. 我们把结果叙述如下：

(29.10) **Künneth 正合序列** 设 R 为 $-$PID, C 为自由链复形，则对所有 n 有正合序列

$$0\to\bigoplus_p H_p(C)\otimes H_{n-p}(C')\to H_n(C\otimes C')$$
$$\to\bigoplus_p\operatorname{Tor}(H_p(C),\ H_{n-p-1}(C'))\to 0.$$

实际上这个序列可裂(但不标准可裂)：因为序列(29.5)分裂，

故有射影 $\pi: C\to Z$; 类似地还有 $\pi': C'\to Z'$. 把它们与商同态(*)合成,得 $\psi: C\to H(C)$, $\psi': C'\to H(C')$, 从而有同态

$$H(\psi\otimes\psi'): H(C\otimes C') \to H(H(C)\otimes H(C'))$$
$$= H(C)\otimes H(C').$$

这是使 $H(C)\otimes H(C')$ 成为直加项的射影.

在 $C=S(X)$, $C'=S(Y)$ 的几何情形, 可应用 Eilenberg-Zilber 定理去代换 $H_n(S(X)\otimes S(Y))$ 并得到 $X\times Y$ 的同调。

(29.11) **Künneth 公式** 设 R 是 PID, 那么

$$H_n(X\times Y)$$
$$\cong \bigoplus_{p=0}^{n} H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y) \oplus \bigoplus_{p=0}^{n} \operatorname{Tor}(H_p(X),\ H_{n-p-1}(Y)).$$

(29.11.1) **推论** 如果 Y(或 X)的维数低于 n 的所有同调模都是自由的(如当 R 为域时),则

$$H_n(X\times Y)\cong \bigoplus_{p=0}^{n} H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y).$$

证明 在此情形, (29.9) 正合且左边为零,因此

$$\operatorname{Tor}(H_p(X),\ H_{n-p-1}(Y))=0. \qquad \square$$

(29.11.2) **推论** (R 为 PID) 如果 Euler 示性数 $\chi(X;\ R)$, $\chi(Y;\ R)$ 确定,则 $\chi(X\times Y;\ R)$ 确定,并且

$$\chi(X\times Y;\ R)=\chi(X;\ R)\chi(Y;\ R).$$

作为 (29.10) 的特殊情形, 设 $C=S(X;\ \boldsymbol{Z})$, C' 是链复形, 其中 $C'_0=R$, 而当 $n\neq 0$ 时 $C'_n=0$, R 是任意可换环, 这时,

$$[C\otimes C']_n=S_n(X;\ \boldsymbol{Z})\otimes R=S_n(X;\ R).$$

因此有

(29.12) **万有系数定理** 序列

$$0\to H_n(X;\ \boldsymbol{Z})\otimes R\to H_n(X;\ R)\to \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X;\ \boldsymbol{Z}),\ R)\to 0$$

(*) 商同态指 $Z\to H(C)$, $Z'\to H(C')$——译者.

为可裂的正合序列.

例如，若 $R=\boldsymbol{Z}/2$，则

$$\operatorname{Tor}(H_{n-1}(X;\ \boldsymbol{Z}),\ \boldsymbol{Z}/2)$$

是 $H_{n-1}(X;\boldsymbol{Z})$ 的二阶元子群，而

$$H_n(X;\boldsymbol{Z})\otimes\boldsymbol{Z}/2$$

是用 2 乘 $H_n(X;\boldsymbol{Z})$ 的乘法映射的余核.

(29.13) 如果同调模是有限生成的，可以应用循环分支更为明确地确定 Tor. 根据与(23.23)完全类似的论证，可以证明 $\operatorname{Tor}(M,\ N)$ 对于 $(M,\ N)$ 是双加性的. 由于自由的被加项不产生任何结果(29.12)，我们只需计算 $\operatorname{Tor}(R/a,\ R/b)$，这里 a 和 b 非零. 正象(23.21)的证明那样，可以选取任何自由分解来计算 Tor. 因此我们使用

$$0\to R\xrightarrow{a^*}R\to R/a\to 0,$$

其中 a^* 是乘以 a 的乘法. 与 R/b 作张量积给出

$$0\to\operatorname{Tor}(R/a,\ R/b)\to R/b\xrightarrow{a^*}R/b\to R/d\to 0,$$

这里 d 是 a 和 b 的最大公因子. 如果 m 是 a 和 b 的最小公倍数，那么，R/b 上乘以 a 的乘法的核为

$$(m/a)R/bR\cong R/d.$$

这样，如果 $M,\ N$ 的挠子模分别有分解

$$\bigoplus_i R/a_i,\ \bigoplus_j R/b_j,$$

并且 $d_{ij}=g\cdot c\cdot d(a_i,\ b_j)$，于是

$$\operatorname{Tor}(M,\ N)\cong\bigoplus_{i,j}R/d_{ij}.$$

(29.14)例 考虑流形 $\boldsymbol{P}^3\times S^2$，$\boldsymbol{P}^2\times S^3$，因为球面的同调是自由的，由(29.11.1)我们得到

$$H_n(\boldsymbol{P}^2\times S^3;\boldsymbol{Z})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & n=0,\\ \boldsymbol{Z}/2 & n=1,\\ 0 & n=2,\\ \boldsymbol{Z} & n=3,\\ \boldsymbol{Z}/2 & n=4,\\ 0 & n\geqslant 5;\end{cases}$$

$$H_n(\boldsymbol{P}^3\times S^2;\boldsymbol{Z})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & n=0,\\ \boldsymbol{Z}/2 & n=1,\\ \boldsymbol{Z} & n=2,\\ \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}/2 & n=3,\\ 0 & n=4,\\ \boldsymbol{Z} & n=5,\\ 0 & n=6.\end{cases}$$

这样，这两个流形并不同伦等价. 不过,

$$\pi_1(\boldsymbol{P}^2\times S^3)\cong\boldsymbol{Z}/2\cong\pi_1(\boldsymbol{P}^3\times S^2),$$

且当 $n>1$ 时，由(7.12)我们有

$$\pi_n(\boldsymbol{P}^2\times S^3)\cong\pi_n(S^2)\times\pi_n(S^3)\cong\pi_n(S^2\times\boldsymbol{P}^3),$$

因此它们的所有同伦群相同. （Whitehead 的一个定理给出了具有相同同伦群的两个空间同调群相同的一个充分条件，见Spanier [52]第七章第 5 节.）

(29.15)例　考查 6 维流形 $S^2\times S^4$ 和 $\boldsymbol{CP}^3$. 由(29.11.1)和(19.21)，它们有着相同的同调，但是它们的同伦群却不同. 例如,

$$\pi_4(S^2\times S^4)\cong\pi_4(S^2)\times\pi_4(S^4)$$

包含有子群 $1\times\pi_4(S^4)\cong\boldsymbol{Z}$, 然而纤维空间 $S^7\to\boldsymbol{CP}^3$ 的正合序列说明

$$\pi_4(\boldsymbol{CP}^3)\cong\pi_4(S^7)=0$$

（见 Spanier[52]第七章第 2 节).

(29.16) **附注** 在相对的情形，(29.10)导出正合序列

$$0 \to \bigoplus_{p=0}^{n} H_p(X, A) \otimes H_{n-p}(Y, B)$$
$$\to H_n(S(X, A) \otimes S(Y, B))$$
$$\to \bigoplus_{p=0}^{n} \operatorname{Tor}(H_p(X, A), H_{n-p-1}(Y, B)) \to 0,$$

在 A, B 中有空集时，比如说 B 为空集，则不难证明 Alexander-Whitney 同态导出链复形

$$S(X \times Y)/S(A \times Y) \text{ 与 } S(X, A) \otimes S(Y)$$

的一个等价. 从而对所有 n 有同构

$$H_n(S(X, A) \otimes S(Y)) \cong H_n(X \times Y, A \times Y).$$

另一方面，当 $(X \times Y, A \times Y, X \times B)$ 是正合三元组(如 A 和 B 为开集时)时，将上述情形与相对 Mayer-Vietoris 序列结合，通过 5 项引理，对所有 n 可得同构

$$H_n(S(X, A) \otimes S(Y, B)) \cong H_n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B).$$

(29.17) **上积和叉积** 应用上面的材料研究上积的基础在于上积可表示为合成(归功于 Lefschetz). 上链 $c \in S^p(X), d \in S^q(X)$ 的上积 $c \cup d$ 是合成

$$S(X) \xrightarrow{S(\Delta)} S(X \times X) \xrightarrow{A} S(X) \otimes S(X) \xrightarrow{c \otimes d} R \otimes R \xrightarrow{m} R.$$

其中 $\Delta: X \to X \times X$ 是对角映射，m 是 R 中乘法. 这是容易验证的. 对于奇异 n-单形 $\sigma (n = p + q)$，

$$S(\Delta)(\sigma) = (\sigma, \sigma),$$

且

$$m(c \otimes d) A(\sigma, \sigma)$$
$$= m(c \otimes d) \left(\sum_{i+j=n} \sigma\lambda_i \otimes \sigma\rho_j \right)$$
$$= [\sigma\lambda_p, c][\sigma\rho_q, d].$$

把这几步孤立起来，可以找到在计算中有用的形式关系.

考虑空间 X, Y 和上链 $c \in S^p(X), d \in S^q(Y)$.

(29.17.1) **定义** 叉(或外)积 $c\times d\in S^{p+q}(X\times Y)$ 是由合成

$$S(X\times Y)\xrightarrow{\Delta}S(X)\otimes S(Y)\xrightarrow{c\otimes d}R\otimes R\xrightarrow{m}R$$

给定的上链. 更明确地说, 考虑上链复形 $[S(X)\otimes S(Y)]^*$, 它的 n 次分支是 $[S(X)\otimes S(Y)]_n$ 的对偶, 存在链复形的标准同态

$$r: S^{\cdot}(X)\otimes S^{\cdot}(Y)\to[S(X)\otimes S(Y)]^*,$$

定义如下: 对于 $c\in S^p(X)$, $d\in S^q(Y)$, $r(c\otimes d)$ 为 $S(X)\otimes S(Y)$ 上的线性形式, 它在 $z\otimes w\in S_{p'}(X)\otimes S_{q'}(Y)$ 上的值由

$$[z\otimes w,\ r(c\otimes d)] =\begin{cases}[z,\ c][w,\ d] & p'=p \text{ 且 } q'=q,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

给定, 于是

$$c\times d={}^t\Delta r(c\otimes d).$$

(29.17.2) **引理**

$$\delta(c\times d)=\delta c\times d+(-1)^p c\times\delta d.$$

证明 直接应用(29.2)和(29.3) □

与通常一样, 闭上链的叉积是闭上链. 增加一个上边缘, 则闭上链的叉积的改变也是一个上边缘. 因此, 我们有一个配对

$$H^p(X)\otimes H^q(Y)\xrightarrow{\times}H^{p+q}(X\times Y),$$

称之为**上同调叉积**, 上积和叉积间的基本关系是: 对于 c, $d\in H^{\cdot}(X)$,

$$c\cup d=H^{\cdot}(\Delta)(c\times d).$$

这往往用作上积的定义.

一个有用的关系是:

(29.17.3) **命题**

$$c\times d=S^{\cdot}(p_X)(c)\cup S^{\cdot}(p_Y)(d).$$

这里 p_X, p_Y 分别是 $X\times Y$ 到 X 和 Y 上的射影.

证明 对于 $X\times Y$ 中任意的奇异 $(p+q)$-单形 $(\sigma,\ \tau)$,

$$
\begin{aligned}
&[(\sigma,\ \tau),\ {}^{t}\!A r(c\otimes d)]\\
&\qquad=[A(\sigma,\ \tau),\ r(c\otimes d)]\\
&\qquad=[\sigma\lambda_p\otimes\tau\rho_q,\ r(c\otimes d)]\\
&\qquad=[\sigma\lambda_p,\ c][\tau\rho_q,\ d],\\
&[(\sigma,\ \tau),\ S^{\cdot}(p_X)c\cup S^{\cdot}(p_Y)d]\\
&\quad=[p_X(\sigma,\ \tau)\lambda_p,\ c][p_Y(\sigma,\ \tau)\rho_q,\ d]\\
&\quad=[\sigma\lambda_p,\ c][\tau\rho_q,\ d].
\end{aligned}
$$

□

(29.17.4) 推论 关于同调和上同调的叉积的关系有公式

$$[\zeta\times\omega,\ \xi\times\eta]=[\zeta,\ \xi][\omega,\ \eta].$$

为某些应用，把(29.17.3)推广为

(29.17.5) 命题 设 $a,\ b\in H^{\cdot}(X),\ c,\ d\in H^{\cdot}(Y)$，则

$$
\begin{aligned}
&(a\cup b)\times(c\cup d)\\
&\qquad=(-1)^{|b||c|}(a\times c)\cup(b\times d).
\end{aligned}
$$

其中$|x|$表示维数.

证明 和(29.17.3)不同，这种关系对于上链并不成立. 我们在此给出证明的开头，但证明的完成要借助于零调模型定理(29.25). 下面的图表包含有定义各种积的途径.

$$
\begin{tikzcd}
 & S(X\times Y) \arrow[r, "A"] \arrow[dl, "S(\Delta_{X\times Y})"'] \arrow[d, "S(\Delta_X\times\Delta_Y)"] \arrow[dl, phantom, shift left=6, "①"] \arrow[dr, phantom, "②"] & S(X)\otimes S(Y) \arrow[d, "S(\Delta_X)\otimes S(\Delta_Y)"] \\
S(X\times Y\times X\times Y) \arrow[r, "S(1\times i\times 1)"] \arrow[d, "A"] \arrow[drr, phantom, "③"] & S(X\times X\times Y\times Y) \arrow[r, "A"] & S(X\times X)\otimes S(Y\times Y) \arrow[d, "A\otimes A"] \\
S(X\times Y)\otimes S(X\times Y) \arrow[r, "A\otimes A"] & S(X)\otimes S(Y)\otimes S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "1\otimes T\otimes 1"] & S(X)\otimes S(X)\otimes S(Y)\otimes S(Y)
\end{tikzcd}
$$

这里的 i 和 T 在(29.27)中有定义. 三角形①是由交换映射导出，②是 A 的函子性质(29.1)，图表③在链同伦的意义下可以交换是

(29.28)中证明了的一个事实. 由此便可推出我们的结果. □

下面我们把(29.17.5)纳入一代数结构，构造分次模 $H^{\cdot}_{q}(X)\otimes H^{\cdot}(Y)$. 它的 n 次分支为

$$[H^{\cdot}(X)\otimes H^{\cdot}(Y)]^n=\bigoplus_{p+q=n}H^p(X)\otimes H^q(Y).$$

然后如下定义乘法，把它转变成一个分次 R-代数，具有乘法

$$(a_p\otimes b_q)(c_r\otimes d_s)=(-1)^{qr}(a_p\cup c_r)\otimes(b_q\cup d_s).$$

(在 $S^{\cdot}(X)\otimes S^{\cdot}(Y)$ 中同样定义乘法，上边缘算子成为分次代数的求导运算，符号就是据此选取的. 注意，一般来说此乘法不可交换，即使每个因子可以交换.

存在一个分次代数同态

$$H^{\cdot}(X)\otimes H^{\cdot}(Y)\xrightarrow{\times}H^{\cdot}(X\times Y).$$

对于 $a\in H^{\cdot}(X)$ 和 $b\in H^{\cdot}(Y)$，此同态定义为

$$a\otimes b\to a\times b=H^{\cdot}(p_X)(a)\cup H^{\cdot}(p_Y)(b).$$

(p_X, p_Y 是 $X\times Y$ 到 X, Y 上的射影.)这个同态对 (X, Y) 是函子性的，称为**叉积**.

(29.17.6)**练习** (R 为 PID) 假设X的所有同调模都是有限生成的，则存在正合序列

$$0\to[H^{\cdot}(X)\otimes H^{\cdot}(Y)]^n\xrightarrow{\times}H^n(X\times Y)$$
$$\to\bigoplus_{p+q=n+1}\mathrm{Tor}(H^p(X),\ H^q(Y))\to 0,$$

并且，如果 X 或 Y 的同调模又都挠自由时，此叉积是同构(证明 $S(X)$和一子复形 C 链同伦等价. 这里每个 C_p 都是自由有限生成的，从而对所有 p, $C^p=C_p^*$ 自由，并且 $C^{\cdot}$ 和 $S^{\cdot}(X)$上链同伦等价. 改变标码的符号，将上链复形 $C^{\cdot}$, $S^{\cdot}(Y)$转变为链复形，再应用 Künneth 正合序列(29.10). 最后，用 C_p 是有限自由生成的事实，说明 $r: C^p\otimes S^q(Y)\to[C_p\otimes S_q(Y)]^*$ 是同构).

特别是，如果 $H_{\cdot}(X)$和 $H_{\cdot}(Y)$中有一个是无挠的(或者系数

是一个域)，我们还可以把上同调环 $H^{\cdot}(X\times Y)$ 完全表示成环 $H^{\cdot}(X)$，$H^{\cdot}(Y)$ 的张量积.

(29.17.7) **练习** 给定另一空间 W 和映射 $f: W\to X$，$g: W\to Y$，它们导出映射 (f, g)：$W\to X\times Y$. 对于 $\xi\in H^{\cdot}(X)$，$\eta\in H^{\cdot}(Y)$，我们有

$$H^{\cdot}(f, g)(\xi\times\eta)=H^{\cdot}(f)(\xi)\cup H^{\cdot}(g)(\eta).$$

特别是，如果 $\Delta: X\to X\times X$ 为对角映射，$\Delta(x)=(x, x)$，则

$$H^{\cdot}(\Delta)(\xi\times\eta)=\xi\cup\eta.$$

联系卡积和叉积关系的公式也有一个：

(29.17.8) $\quad(\zeta\times\omega)\cap(\xi\times\eta)=(-1)^{q(p-r)}(\zeta\cap\xi)\times(\omega\cap\eta).$

这里 $\zeta\in H_p(X)$，$\omega\in H_q(Y)$，$\xi\in H^r(X)$，$\eta\in H^q(Y)$. 这个公式并不很显然，在链-上链水平上的类似公式不成立，因为 AB 只是链同伦于恒等映射而不等于恒等映射，${}^tA_T$ 仅在上同调水平上是代数同态而在上链水平上不是. 上述公式的证明要应用与 Eilenberg-Zilber 定理中相同的技巧(见附录(29.23 A)).

(29.18) **例** 上同调环是比同调(或上同调)群更细致的不变量. 考虑空间 $S^1\times S^2$ 和粘接 S^1，S^2，S^3 于一个公共点 p 得到的空间 $S^1\vee S^2\vee S^3$，根据 Künneth 公式和公式(19.16—19.18)，这些空间有着相同的同调群(0 到 3 维为 $\mathbf{Z}$，更高维的为 0). 从而有相同的上同调群(23.28). 由(27.17.6)，如果 a 是 $H^1(S^1\times S^2)$ 的一个生成元，b 是 $H^2(S^1\times S^2)$ 的一个生成元，则 $a\cup b$ 生成 $H^3(S^1\times S^2)$.

定义映射 $f: S^1\vee S^2\vee S^3\to S^1\vee S^2$，使得在 $S^1\vee S^2$ 上为映等映射，在 S^3 上为映入 p 的常值映射. 那么，当 $q=0, 1, 2$ 时 $H^q(f)$ 是群同构(因为 $H^q(f)$ 是群同构. 练习题.). 设 a' 生成 $H^1(S^1\vee S^2\vee S^3)$，b' 生成 $H^2(S^1\vee S^2\vee S^3)$，并令

$$a'=H^1(f)(a''),\ b'=H^2(f)(b''),$$

则 $$a''\cup b''\in H^3(S^1\vee S^2)=0,$$
从而 $$a'\cup b'=H^3(f)(a''\cup b'')=0.$$
这样，$H^\cdot(S^1\times S^2)$和 $H^\cdot(S^1\vee S^2\vee S^3)$作为环是不同构的.

(29.19) $X\times Y$ 上的另一有用的运算是斜积(除以链)，即一个双线性配对
$$H^{p+q}(X\times Y)\times H_p(X)\to H^q(Y),(\gamma,\ \alpha)\to\gamma/\alpha.$$
对于 $\beta\in H_q(Y)$，它满足公式
$$[\beta,\ \gamma/\alpha]=[\alpha\times\beta,\ \gamma].$$

首先设 $c\in[S(X)\otimes S(Y)]^*_{p+q}$，$\omega\in S_p(X)$. 定义 c/w 为 Y 上的 q 维上链，对于所有的 $z\in S_q(Y)$，适合
$$[z,\ c/w]=[w\otimes z,\ c].$$
于是
$$\begin{aligned}[z,\ \delta(c/w)]&=[\partial z,\ c/w]\\&=[w\otimes\partial z,\ c]\\&=(-1)^p[\partial(w\otimes z)-\partial w\otimes z,\ c]\\&=(-1)^p[z,\ \delta c/w-c/\partial w],\end{aligned}$$
因此 $$\delta(c/w)=(-1)^p(\delta c/w-c/\partial w),$$
从而过渡到商给出斜积
$$H^{p+q}([S(X)\otimes S(Y)]^*)\times H_p(X)\to H^q(Y).$$
对于 $\gamma\in H^{p+q}(X\times Y)$，$\alpha\in H_p(X)$，我们于是定义
$$\gamma/\alpha=\overline{{}^tA^{-1}}\gamma/\alpha.$$

注意，在 $p=q=0$，$\gamma=1$ 的特殊情形，我们有

(29.20) 对所有的 $\alpha\in H_0(X)$，
$$1/\alpha=[\alpha,\ 1]1\in H^0(Y).$$

联系各种不同乘积的基本公式是

(29.21) 对 $\gamma\in H^p(X\times Y)$，$\xi\in H^q(X)$，$\eta\in H^r(Y)$，$\alpha\in H_s(X)$，
$$\{(\xi\times\eta)\cup\gamma\}/\alpha=(-1)^{r(s-q)}\eta\cup\{\gamma/\alpha\cap\xi\}.$$

为使此公式便于接受，设 $\beta\in H_{p+q+r-s}(Y)$，从而

$$\begin{aligned}
&[\beta,\ \eta\cup\{\gamma/\alpha\cap\xi\}]\\
&\quad=[\beta\cap\eta,\ \gamma/\alpha\cap\xi]\\
&\quad=[(\alpha\cap\xi)\times(\beta\cap\eta),\ \gamma]\\
&\quad=(-1)^{r(s-q)}[(\alpha\times\beta)\cap(\xi\times\eta),\ \gamma]\,(28.17.8)\\
&\quad=(-1)^{r(s-q)}[\alpha\times\beta,\ (\xi\times\eta)\cup\gamma]\\
&\quad=(-1)^{r(s-q)}[\beta,\ \{(\xi\times\eta)\cup\gamma\}/\alpha].
\end{aligned}$$

（证明见(29.30)．）

当 $q=3$，$\gamma=1$ 时我们有

(29.22) 应用(29.20)，则

$$(\xi\times\eta)/\alpha=[\alpha,\ \xi]\eta.$$

设有映射 $f\colon X\to X'$，$g\colon Y\to Y'$，斜积满足公式

(29.23) $H^{p+q}(f\times g)(\gamma')/\alpha=H^q(f)(\gamma'/H_p(g)(\alpha))$（练习）．

附录(29.23 A) 零调模型

在本附录中讨论 Eilenberg-MacLane 的零调模型方法（见[22]或 MacLane[38]第八章），并将其应用于乘积理论．

我们已经看到，对于拓扑空间的有序偶 $(X,\ Y)$，我们可伴以

$$F(X,\ Y)=S(X\times Y),$$

$$F'(X,\ Y)=S(X)\otimes S(Y).$$

二者都是**增广链复形**．R 上链复形 C 的一个所谓**增广**，是使得合成

$$C_1\xrightarrow{\partial}C_0\xrightarrow{\varepsilon}R$$

等于零的满同态 $\varepsilon\colon C_0\to R$．$S(X\times Y)$ 的增广是 ∂^* (9.7)，$S(X)\otimes S(Y)$ 的增广是

$$\partial^*\otimes\partial^*\colon S_0(X)\otimes S_0(Y)\to R\otimes R\simeq R.$$

我们可以考虑有序偶 $(X,\ Y)$ 范畴 $\mathscr{P}$，其中的射

$$(X, Y)\to(X', Y')$$

为形如 $f\times g$ 的映射，这里 $f: X\to X'$, $g: Y\to Y'$. 还可以考虑增广链复形 $\mathscr{C}$, 其中的射 $h: C\to C'$ 为保持增广的链同态，即满足 $\varepsilon' h=\varepsilon$. 于是，$F$ 显然是从 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{C}$ 的一个函子，F' 也是这样的一个函子

$$(F'(f\times g)=S(f)\otimes S(g): S(X)\otimes S(Y)\to S(X')\otimes S(Y')).$$

此外，Alexander-Whitney 给出这两个函子间的一个射(自然变换)

$$A: F\to F'.$$

这从(29.1)，(29.3)以及

$$A: S_0(X\times Y)\to S_0(X)\otimes S_0(Y)$$

保持增广(练习)的事实推出. Eilenberg-Zilber 定理可改述为 A **是函子的链等价**. 这意味着存在函子间的射

$$B: F'\to F$$

使得 AB 和 BA 都和恒等射链同伦. 一般地说，若 $\mathscr{A}$ 是任一范畴，F, F': $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 为函子($\mathscr{C}$ 定义如上)，Φ, Ψ 为函子间的射. 我们说 Φ, Ψ **链同伦**，是指对于 $\mathscr{A}$ 中每个对象 X, 链同态 $\Phi(X)$, $\Psi(X)$: $F(X)\to F'(X)$ 是链同伦的，并且这时的链同伦对 X 是函子性的.

零调模型的技巧给出在 $\mathscr{C}$ 内取值的两个函子 F, F' 链等价的一个充分条件. 事实上，条件还要强一些，它蕴含着函子间的任何射 $F\to F'$ 都是链等价.

给定具有一个特殊对象集 $\mathscr{M}$ 的范畴 $\mathscr{A}$, 偶($\mathscr{A}$, $\mathscr{M}$)称为**有模型范畴**，$\mathscr{M}$ 中的对象称为**模型**. 设 $F: \mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 是任一函子，对于每个 $q\geqslant 0$, 我们有从 $\mathscr{A}$ 到 R-模范畴的一个函子 F_q, 它把 $\mathscr{A}$ 中的 X 映到链复形 $F(X)$ 的 q 维分支. 我们说，F_q 有一个基(关于 $\mathscr{M}$ 的)，如果存在标号族 $\{d_j\in F_q(M_j)\}_{j\in J}$, 其中 M_j 是某个模

型. 使得对于 $\mathscr{A}$ 中每个 X, $F_q(X)$ 是由所有元素

$$\{F_q(u)(d_j)\}_{j\in J} \quad \text{所有 } u: M_j\to X$$

生成的自由 R-模. 当每个 F_q 都有基时, 就称 F 是自由的.

(29.24)例 设 $F, F': \mathscr{P}\to\mathscr{C}$ 是 Eilenberg-Zilber 定理中的两个函子. 作为 $\mathscr{P}$ 的模型取所有有序偶 (Δ^p, Δ^q) (Δ^p 是标准几何 p-单形), 则 F 和 F' 都是自由的. 设 d_q: $\Delta^q\to\Delta^q\times\Delta^q$ 为对角映射, 从而 $d_q\in S_q(\Delta^q\times\Delta^q)$, 对于任意有序偶 (X, Y), 我们知道奇异 q-单形 σ 构成自由 R-模 $S_q(X\times Y)$ 的一个基, 而公式

$$\sigma=[(p_X\sigma)\times(p_Y\sigma)]\circ d_q$$

(p_X: $X\times Y\to X$, p_Y: $X\times Y\to Y$ 为射影) 说明单元集 $\{d_q\}$ 是 F_q 的一个基. 于是, 对于所取的模型 F 是自由的. 另一方面, $F'_n(X, Y)$ 的一个基由所有 $\sigma\otimes\tau$ 构成, 这里 σ 是 X 中奇异 p-单形, τ 是 Y 中奇异 q-单形, 且 $p+q=n$. 而公式 (见 9.10)

$$\sigma\otimes\tau=F'_n(\sigma\times\tau)(\delta_p\otimes\delta_q)$$

($\delta_p\in S_p(\Delta^p)$, $\delta_q\in S_q(\Delta^q)$ 是恒等映射) 说明族 $\{\delta_p\otimes\delta_q)_{p+q=n}$ 是 F'_n 的一个基. 因此 F' 是自由的.

如果 C 是增广链复形, 增广为 ε: $C_0\to R$. 令

$$\widetilde{C}_q=\begin{cases} C_q & q>0, \\ \operatorname{Ker}\varepsilon & q=0\end{cases}$$

可得约化链复形 $\widetilde{C}$. $\widetilde{C}$ 的同调模叫做 C 的**约化(增广)同调模**. 函子 F: $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 叫做**零调的**(关于 $\mathscr{M}$), 如果对于每个模型 $M\in\mathscr{M}$, 链复形 $F(M)$ 的所有增广同调模均为零。

(29.24)例(续) 在 Eilenberg-Zilber 条件下, 由于 $\Delta^p\times\Delta^q$ 可以点缩, 所以对于所有的 n, p 和 q, $H^*_n(\Delta^p\times\Delta^q)=0$, 因而 F 是零调的. 对于所有的 n, p 和 q, 我们还有

$$H^*_n(S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q))=0.$$

设 R 是一链复形, 在 0 维处是 R, 而在其它维处是 0, 并且边缘算

子是零．那么，因 Δ^p 可以点缩，$\partial^*: S(\Delta^p)\to R$ 为链等价，从而

$$\partial^*\otimes\partial^*: S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q)\to R\otimes R\simeq R$$

是链等价．由此得出结论，F' 也是零调的．

下面是我们的主要结果．

(29.25) **零调模型定理** 设 $(\mathscr{A}, \mathscr{M})$ 是有模型范畴，$\mathscr{C}$ 是 R 上的增广链复形范畴，F 和 F': $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 是函子，F 自由，F' 零调．那么，在链同伦的意义下存在唯一的函子射 $\Phi: F\to F'$．

(29.26) **推论** 如果 F 和 F' 都是自由和零调的，那么 F 和 F' 链等价，并且实际上任何函子射 $F\to F'$ 都是链等价．

推论的证明 由定理，存在射 Φ: $F\to F'$ 和 Ψ: $F'\to F$，并且在链同伦的意义下存在唯一的射 $F\to F$ 和 $F'\to F'$，因此 $\Phi\Psi$ 和 $\Psi\Phi$ 必定分别与相应的恒等射链同伦． □

应用(29.24)我们看出 Eilenberg-Zilber 定理可立即得到．

(29.27) **练习** 对 (X, Y) 为函子性的一个明确链同态

$$B: S(X)\otimes S(Y)\to S(X\times Y)$$

是由 $$B((\sigma\otimes\tau))=\sum\pm(D_{j_q}\cdots D_{j_1}\sigma, \cdots D_{i_p}D_{i_1}\tau)$$

定义的洗牌同态，这里 σ 是奇异 p-单形，τ 是奇异 q-单形，D_k 是第 k 个退化算子（(24.8)的证明，第二编），和是对 $(0, \cdots, p+q-1)$ 的适合 $i_1<i_2<\cdots<i_p$，$j_1<j_2<\cdots<j_q$ 的所有排列 $(i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q)$ 的求和，而符号则是排列的反序数．

在证明(29.25)之前，先给出一些应用．

对于任意有序偶 (X, Y)，定义同态

$$T: S(X)\otimes S(Y)\to S(Y)\otimes S(X)$$

为 $$T(z\otimes w)=(-1)^{pq}w\otimes z.$$

这里 $z\in S_p(X)$，$w\in S_q(Y)$．则 T 是链同态：

$$\partial T(z\otimes w)=(-1)^{pq}[\partial w\otimes z+(-1)^q w\otimes\partial z],$$

$$T\partial(z\otimes w)=T[\partial z\otimes w+(-1)^{p}z\otimes\partial w]$$
$$=(-1)^{pq-q}w\otimes\partial z+(-1)^{pq}\partial w\otimes z.$$

显然 T 保持增广并且对 (X, Y) 是函子性的.

考虑图表

$$\begin{tikzcd} S(X\times Y) \arrow[r, "S(i)"] \arrow[d, "A"'] & S(Y\times X) \arrow[d, "A"] \\ S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "T"] & S(Y)\otimes S(X) \end{tikzcd}$$

其中 i 为交换同胚 $X\times Y\to Y\times X$.

(29.28) **命题** 上面的图表是链同伦交换的, 即 $AS(i)$ 和 TA 链同伦.

证明可由零调模型定理的唯一性部分直接得到. □

(29.29) **推论** 若 $\zeta\in H_p(X)$, $\omega\in H_q(Y)$, 则

$$H_{p+q}(i)(\zeta\times\omega)=(-1)^{pq}\omega\times\zeta.$$

(29.30) **练习** 应用同样的方法证明公式 (29.17.8) 和 (29.21), 即从某个图表的链同伦交换性推出它们. 后者可参阅关于零调模型的定理进行证明.

(29.25) 的证明 设 $\{d_j\in F_0(M_j)\}_{j\in J_0}$ 是 F_0 的一个基, 因 F' 零调, 对于所有的 $j\in J_0$, 增广导出同构

$$\varepsilon': H_0(F'(M_j))\xrightarrow{\sim} R.$$

从而存在唯一的 $z_j\in H_0(F'(M_j))$, 使得对于所有 $j\in J_0$,

$$\varepsilon'(z_j)=\varepsilon(d_j).$$

存在着保持增广的唯一的函子射 $\varphi: H_0(F)\to H_0(F')$, 它把线性组合

$$\sum\nu_{uj}F_0(u)(d_j)\in F_0(X)$$

$(\nu_{uj}\in R,\ u: M_j\to X)$ 的类变为元

$$\sum\nu_{uj}H_0(F')(u)(z_j)\in H_0(F'(X)).$$

我们将构造射 $\Phi: F\to F'$ 使给出 $\varphi=H_0(\Phi)$. 如果 Ψ 是任一射

$F \to F'$，则由唯一性 $\varphi = H_0(\Psi)$，并且我们将同时构造链同伦 D：$\Phi \simeq \Psi$.

这样，对于每个对象 $X \in \mathscr{A}$，我们必须定义链同态

$$\Phi(X): F(X) \to F'(X)$$

（链同伦 $D(X): F(X) \to F'(X)$），满足对任何 $h: X \to Y$，我们有

$$\Phi(Y)F(h) = F'(h)\Phi(X)$$

$$(D(Y)F(h) = F'(h)D(X)).$$

对 $q \geqslant 0$，设 $\{d_j \in F_q(M_j)\}_{j \in J_q}$ 是 F_q 的一个基．一旦我们知道了值 $\Phi_q(M_j)(d_j)$ $(D_q(M_j)(d_j))$，则对任何 X 我们必须定义

$$\Phi_q(X)F_q(u)(d_j) = F'_q(u)\Phi_q(M_j)(d_j)$$

$$(D_q(X)F_q(u)(d_j) = F'_q(u)D_q(M_j)(d_j)).$$

它们确定了 $\Phi_q(X)$ $(D_q(X))$．这些值并非任意的，因为我们要求

$$\partial\Phi_q(X) = \Phi_{q-1}(X)\partial$$

$$(\partial D_q(X) = \Phi_q(X) - \Psi_q(X) - D_{q-1}(X)\partial).$$

对 q 应用归纳法．当 $q=0$ 时，定义 $\Phi_0(M_j)(d_j)$ 为

$$z_j \in H_0(F'(M_j))$$

在 $F'_0(M_j)$ 中的任意代表元（定义 $D_0(M_j)(d_j)$ 为 $F'_1(M_j)$ 中边缘是增广的核中元 $\Phi_0(M_j)(d_j) - \Psi_0(M_j)(d_j)$ 的任意元）．于是，对于 $\omega \in F_0(X)$，$\Phi_0(X)(\omega)$ 的同调类由应用 $\varphi(X)$ 于 ω 的类得到．特别是，对于 $j \in J_1$，$\Phi_0(M_j)(\partial d_j)$ 是 $F'_0(M_j)$ 中的边缘．因此定义 $\Phi_1(M_j)(d_j)$ 为满足

$$\partial\Phi_1(M_j)(d_j) = \Phi_0(M_j)(\partial d_j)$$

的任意元．设 $q>1$ 且当 $p<q$ 时 Φ_p 已被定义，并同 ∂ 可换．注意 $\Phi_{q-1}(M_j)(\partial d_j)$ 是一闭链；因为

$$H_{q-1}(F'(M_j)) = 0,$$

可定义 $\Phi_q(M_j)(d_j)$ 为适合

$$\partial\Phi_q(M_j)(d_j) = \Phi_{q-1}(M_j)(\partial d_j)$$

的任意元。(设 $q>0$ 且 $p<q$ 时 D_p 已有定义且是链同伦，注意对于每个 $j\in J_q$，元素

$$\Phi_q(M_j)(d_j)-\Psi_q(M_j)(d_j)-D_{q-1}(M_j)(\partial d_j)$$

是一闭链．由于 $H_q(F'(M_j))=0$，可定义 $D_q(M_j)(d_j)$ 为边缘是此闭链的任意元.) □

(29.31)**附注** 如果注意到 $S(X)$ 保持空间 X 的全部同调和上同调结构，我们可以用更加范畴化的观点看待我们的结果．迄今我们只是把 $S(X)$ 作为增广链复形．为了得到乘法性质，考虑保持增广的链同态

$$S(X)\xrightarrow{S(d)}S(X\times X)\xrightarrow{A}S(X)\otimes S(X),$$

这里 d 是对角映射，A 是 Alexander-Whitney 映射．设

$$m=AS(d),$$

则 m 是 $C=S(X)$ 上一个余代数结构的余乘法，亦即图表

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "m\otimes id"'] \\
C\otimes C \arrow[u, "id\otimes m"] & C \arrow[l, "m"] \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

交换(这个图表表示对偶结合律．要证明它的交换性，可应用对于任一奇异 n-单形 σ 的明显公式

$$m(\sigma)=\sum_{p+q=n}\sigma\lambda_p\otimes\sigma\rho_q).$$

此外，增广 $\partial^*: S(X)\to R$ 是一个余单位，即合成

$$C\xrightarrow{m}C\otimes C\xrightarrow{id\otimes\partial^*}C\otimes R\cong C,$$

$$C\xrightarrow{m}C\otimes C\xrightarrow{\partial^*\otimes id}R\otimes C\cong C$$

都等于 C 上的恒等自同态.

设 $\mathscr{D}$ 是一范畴，其对象是这样一些增广链复形，它具有将其变成余代数的余乘法，且对余代数来说增广是一余单位．范畴 $\mathscr{D}$

中的射是保持增广的链同态 $h: C\to C'$ 且使图表

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "h\otimes h"] & C'\otimes C' \\ C \arrow[u, "m"] \arrow[r, "h"] & C' \arrow[u, "m'"'] \end{tikzcd}$$

交换. 因此, 函子 $X\to S(X)$ 实际上在范畴 $\mathscr{D}$ 中取值(若 $f: X\to Y$, 则(29.1)蕴含 $S(f)$ 是 $\mathscr{D}$ 中射).

不过, 范畴 $\mathscr{D}$ 不适宜于乘积, 因为 $\mathscr{D}$ 就没有积! 当然, 对于 $C, C'\in\mathscr{D}$, 张量积 $C\otimes C'$ 具有自然的余乘法

$$C\otimes C' \xrightarrow{m\otimes m'} C\otimes C\otimes C'\otimes C'$$
$$\xrightarrow{id\otimes T\otimes id} C\otimes C'\otimes C\otimes C',$$

这里 T 是(29.28)中定义的交换运算. 这使 $C\otimes C'$ 成为余代数(练习题). 存在着由

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C' \arrow[dl, "id\otimes\varepsilon'"'] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes id"] & \\ C\otimes R \arrow[d, "\wr"] & & R\otimes C' \arrow[d, "\wr"] \\ C & & C' \end{tikzcd}$$

给出的射影 $p: C\otimes C'\to C$ 和 $p': C\otimes C'\to C'$. 它们是 $\mathscr{D}$ 中射(练习题). 假设 $h: C''\to C$, $h': C''\to C'$ 是 $\mathscr{D}$ 中射, 如果存在射 $(h, h'): C''\to C\otimes C'$ 使得:

$$p(h, h')=h,\ p'(h, h')=h',$$

那么它是唯一的:

$$\begin{aligned}(h, h') &= (p\otimes p')(id\otimes T\otimes id)(m\otimes m')(h, h')\\ &= (p\otimes p')[(h, h')\otimes(h, h')]m''\\ &= (h\otimes h')m''.\end{aligned}$$

现在 $h\otimes h'$ 是 $\mathscr{D}$ 中射, 而 m'' 不是, 除非图表

$$\begin{tikzcd} C''\otimes C'' \arrow[rr, "T"] & & C''\otimes C'' \\ & C'' \arrow[ul, "m''"] \arrow[ur, "m''"'] & \end{tikzcd}$$

交换，即 C'' 是反交换的(练习)．这样，$C\otimes C'$ 具有乘积的万有性质仅对于反交换对象的子范畴成立．我们已经看到(24.7)函子 $X\to S(X)$ 不在这个子范畴中取值．

从而我们考虑范畴 $\overline{\mathscr{D}}$，它的对象和 $\mathscr{D}$ 的对象一样，但它的射是 $\mathscr{D}$ 中射的链同伦类．并且考虑反交换对象的完全子范畴 $\overline{\mathscr{D}}_c$($C\in\overline{\mathscr{D}}_c$ 当且仅当 T_m 和 m 链同伦)．那么范畴 $\overline{\mathscr{D}}_c$ 具有乘积，并且函子 $X\to S(X)\otimes S(X)$ 可视为在 $\overline{\mathscr{D}}_c$ 中取值的函子(因为函子 $X\to S(X)\otimes S(X)$ 在模型 Δ^q 上是零调的，并且函子 $X\to S(X)$ 在这些模型上是自由的．所以零调模型定理蕴涵，对于 $S(X)$，T_m 和 m 链同伦——这给(24.8)以另一证明)，因此，Eilenberg-Zilber 定理可叙述为：在 $\overline{\mathscr{D}}_c$ 中取值的这个函子保持乘积(在同构的意义下)．

(29.32) 练习　Alexander-Whitney 映射 $S(X\times Y)\to S(X)\otimes S(Y)$ 是范畴 $\overline{\mathscr{D}}_c$ 中射．

(29.33) 相对上积　设 $(X\times Y,\ A\times Y,\ X\times B)$ 是正合三元组，我们推广 Eilenberg-Zilber 定理并用于构造相对上积．由三元组的正合性，有链等价

$$S(X\times Y)/S(A\times Y)+S(X\times B)\to$$
$$S(X\times Y)/S(A\times Y\cup X\times B).$$

应用 Eilenberg-Zilber 定理(29.4)，我们有链等价

$$S(X)\otimes S(Y)\to S(X\times Y),$$
$$S(A)\otimes S(Y)\to S(A\times Y),$$
$$S(X)\otimes S(B)\to S(X\times B).$$

结合这些并应用函子性质，又得链等价

$$S(X)\otimes S(Y)/S(A)\otimes S(Y)+S(X)\otimes S(B)$$
$$\to S(X\times Y)/S(A\times Y)+S(X\times B).$$

结合这些链等价和链同构

$$S(X)\otimes S(Y)/S(A)\otimes S(Y)+S(X)\otimes S(B)$$
$$\cong S(X)/S(A)\otimes S(Y)/S(B),$$

我们得到

(29.34) **相对 Eilenberg-Zilber 定理** 如果$(X\times Y, A\times Y, X\times B)$是正合三元组，则存在 $S(X, A)\otimes S(Y, B)$ 和 $S(X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$的链等价.

(29.35) **推论** 存在一个配对，即相对叉积

$$H^p(X, A)\otimes H^q(Y, B)\xrightarrow{\times} H^{p+q}(X\times Y, A\times Y\cup X\times B),$$

它同绝对叉积相容，并且满足类似的函子性、结合性、以及叉积在交换映射(29.29)之下所具有的性质.

可以仿照证明叉积的这些性质时使用的零调模型法进行证明.

在 $X=Y$ 时，对角映射导出

$$(X, A\cup B)\to(X\times X, A\times X\cup X\times B).$$

从而有配对 $H^p(X, A)\otimes H^q(X, B)\to H^{p+q}(X, A\cup B)$.

(29.36) **命题** 若

$$X=\bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

其中 U_i 都是 X 中的可点缩开集. 则，正维数元的 n 重上积在 $H^\cdot(X)$ 中是 0.

证明 包含映射 $U_i\to X$ 对于正维数导出零映射

$$H^\cdot(X)\to H^\cdot(U_i).$$

因为 U_i 在 X 中可以点缩，根据长正合序列，存在满同态

$$H^q(X, U_i) \to H^q(X),\ q>0.$$

对于 $x_1, \cdots, x_n$, 设 $y_i \in H^{\cdot}(X, U_i)$ 是 x_i 的前象，则对于正维数，相对上积

$$y_1 \cup \cdots \cup y_n \in H^{\cdot}\left(X,\ \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)=0.$$

由自然性, $x_1 \cup \cdots \cup x_n = 0$. □

特别的，双角锥中的上积为 0.

(29.37) **评注** 相对上积在 Hopf 不变量方面的一个巧妙应用载于 Steenrod 和 Epstein [87], p.12—15. 望读者一阅.

(29.38) **练习** 证明 $\boldsymbol{CP}^n$ 和 $S^2 \times S^4 \times \cdots \times S^{2n}$ 的上同调环不同构.

(29.39) **练习** 证明 $S^n \vee S^m$ 不是 $S^n \times S^m$ 的收缩核.

(29.40) **练习** 证明：如果对角映射 $\Delta: X \to X \times X$ 可以在同伦的意义下通过 $X \vee X$ 分解，那么，$H^{\cdot}(X)$ 中正次数元的上积是 0. 证明：当 X 为双角锥时这样的

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\triangle"] \arrow[dr, dashed] & X \times X \arrow[d, phantom, "\simeq\ \cup"] \\ & X \vee X \end{tikzcd}$$

分解存在.

(29.41) **练习** 证明：如果 X 是闭流形，并且有 (29.40) 中的对角分解，则 X 具有球面的同调.

(29.42) **练习** 设 $f: X \to Y$, 变通 (29.36) 的证明使它适用于 $Cf = CX \cup Y$ 的情形. 证明：如果 n 重上积在 $H^{\cdot}(Y)$ 中为 0, 则 $n+1$ 重上积在 $H^{\cdot}(Cf)$ 中是 0. 这里 Cf 是映射锥 (21.15).

(29.43) **练习** 把导出函子的方法应用于函子"同 R 作张量积", 导出 (29.12).

(29.44) **练习** 令 $R = \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$, 直接从系数序列

$$0\to \boldsymbol{Z}\xrightarrow{n}\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\to 0$$

导出的同调长正合序列推出(29.12). 提示: 将 $H_q(X;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ 和

$$\operatorname{Coker}\{H_q(X;\ \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}\xrightarrow{n}H_q(X;\ \boldsymbol{Z})\}$$

等同看待, 并且将

$$\operatorname{Tor}(H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z}),\ \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$$

和

$$\operatorname{Ker}\{H_{q-1}(X;\ \boldsymbol{Z})\xrightarrow{n}H_{q-1}(X;\boldsymbol{Z})\}$$

等同看待.

30 Thom 类和 Lefschetz 不动点定理

设 X 是无边可定向 n 维流形. 我们构造一个称之为 Thom 类的上同调类 $\mu\in H^n(X\times X,\ X\times X-\Delta)$。此类和基本类 ζ 有着密切关系, 并用于构造 Poincaré 对偶同构的逆.

设 X 是 n 维流形(无边), 在第 22 节曾定义过 X 的 R-定向层 $X^0\to X$, 它在点 x 上的纤维是局部同调模 $H_n(X,\ X-x)$. 给定 X 的一个 R-定向, 亦即给定一个截痕 s: $X\to X^0$, 使得对每个 x, $s(x)$生成 $H_n(X,\ X-x)$.

现在考虑对偶层 $X^{0*}\to X$, 它在 x 上的纤维是局部上同调模 $H^n(X,\ X-x)$, R-定向 s 决定一个整体截痕 s^*: $X\to X^{0*}$, 对所有 $x\in X$, 它以

$$[s(x),\ s^*(x)]=1$$

为特征.

设 U 是 X 中开集, 用 Γ^*U 表示对偶层的 U 上截痕的模. 如果 Δ 是 $X\times X$ 的对角线,

$$U^t x: (X, X-x) \to (X \times U, X \times U - \Delta)$$

将是由
$$U^t x(x') = (x', x), \ x' \in X$$
给定的映射，这里 $x \in U$. 回忆
$$j_x^U: (X, X-U) \to (X, X-x)$$
为包含映射.

(30.1) **定理** 设 X 是 R-定向 n 维流形，U 为其开子空间，那么，对所有 $q<n$,
$$H^q(X \times U, X \times U - \Delta) = 0.$$
并且，存在唯一的同构 $\varphi: H^n(X \times U, X \times U - \Delta) \to \Gamma^* U$，对所有的 $\beta \in H^n(X \times U, X \times U - \Delta)$ 和 $x \in U$ 有
$$\varphi(\beta)(x) = H^n(U^t x)(\beta).$$

(30.2) **推论** 在 $H^n(X \times X, X \times X - \Delta)$ 中存在唯一的上同调类 $\mu = \mu_x$，使得对所有 $x \in X$,
$$s^*(x) = H^n(X^t x)(\mu).$$

这个类 μ 将称作 X 的给定 R-定向的 Thom 类.

(30.3) **推论** 设 X 紧，$\zeta \in H_n(X)$ 为 R-定向的基本类，且
$$H^n(j): H^n(X \times X, X \times X - \Delta) \to H^n(X \times X)$$
为包含映射导出的同态，$\mu' = H^n(j)(\mu)$. 那么
$$\mu' / \zeta = 1.$$

证明 对任意 $x \in X$，考虑交换图表
$$\begin{tikzcd}
(X, X-x) \arrow[r, "i_x"] & (X \times X, X \times X - \Delta) \\
X \arrow[u, "j_x"] \arrow[r, "i_x"] & X \times X \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$
这里 $i_x = X^t x$，竖直箭头为包含映射. 于是
$$1 = [s(x), H^n(i_x)\mu] = [H_n(j_x)\zeta, H^n(i_x)\mu]$$
$$= [\zeta, H^n(i_x j_x)\mu] = [\zeta, H^n(j i_x)\mu] = [H_n(i_x)\zeta, \mu'].$$

如果 $\bar{x}$ 是 x 的同调类(x 为 0 维闭链)，则

$$H_n(i_x)\zeta=\zeta\times\bar{x}$$

(因为 $X\approx X\times x$)，从而由(29.19)，对所有的 x，

$$1=[\bar{x},\ \mu'/\zeta],$$

这就证明了推论. □

定理(30.1)的证明 对于任意的 $\beta\in H^n(X\times U,\ X\times U-\Delta)$，定义集合截痕 $\varphi(\beta)$: $U\to X^{0*}$ 为

$$\varphi(\beta)(x)=H^n(U^ix)(\beta),\ x\in U.$$

如果 $\Gamma'U$ 表示 U 上集合截痕的模，则当 $V\subset U$ 时有交换图表

$$\begin{tikzcd} H^n(X\times U,\ X\times U-\Delta) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & H^n(X\times V,\ X\times V-\Delta) \arrow[d, "\varphi"] \\ \Gamma'U \arrow[r] & \Gamma'V. \end{tikzcd}$$

因此，要验证同态 φ 在(连续)截痕的模 Γ^*U 中取值，只须考虑下述特殊情形:

情形 **1**. U 包含于一座标邻域 U' 之内，并且 U 是可点缩的(比如说是开 n 维胞腔).

对于每个 $x\in U$，有交换图表

$$\begin{tikzcd} H^q(X\times U,\ X\times U-\Delta) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "U^ix"'] & H^q(U'\times U,\ U'\times U-\Delta) \arrow[d, "U^ix"] \\ H^q(X,\ X-x) \arrow[r, "\simeq"] & H^q(U',\ U'-x), \end{tikzcd}$$

其中水平同构是切除同构. 于是我们可以设

$$X=U'\approx \boldsymbol{R}^n,$$

在此情形有同胚

$$f:(\boldsymbol{R}^n\times U,\ (\boldsymbol{R}^n-0)\times U)$$
$$\simeq(\boldsymbol{R}^n\times U,\ \boldsymbol{R}^n\times U-\Delta),$$

它由 $f(y,\ x)=(y+x,\ x)$定义. 并且，对每个 $x\in U$ 有交换图表

$$\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{R}^n\times U,\ (\boldsymbol{R}^n-0)\times U) \arrow[r, "f", "\sim"'] & (\boldsymbol{R}^n\times U,\ \boldsymbol{R}^n\times U-\Delta) \\
(\boldsymbol{R}^n\times 0,\ (\boldsymbol{R}^n-0)\times 0) \arrow[u, "id\times jx"] & \\
(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n-0) \arrow[u] \arrow[r, "\sim", "f_x"'] & (\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n-x), \arrow[uu, "U^t x"']
\end{tikzcd}$$

这里 $f_x(y)=x+y$, j_x 是映点 0 为 x 的映射. 我们可以假设 $0\in U$.

子引理 1 映射 $s'\to s'(0)$ 是 Γ^*U 到 $H^n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n-0)$ 的同构.

证明 这可由 $H^n(j_0^U)$ 为同构(22.4)的事实得到. □

子引理 2 若 $s'\in\Gamma^*U$, $x\in U$, 则

$$s'(x)=H^n(f_{-x})(s'(0)).$$

证明 设 $\alpha\in H^n(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n-U)$ 是对所有 $x\in U$ 适合

$$\alpha=H^n(j_x^U)(s'(x))$$

的唯一类. 现在 j_x^U 和 $f_x j_0^U$ 是同伦的映射

$$(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n-U)\to(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n-x)$$

(在时刻 t 映射为 $f_{tx}j_0^U$), 从而

$$\begin{aligned}
s'(x)&=H^n(j_x^U)^{-1}(\alpha)\\
&=H^n(f_x)^{-1}H_n(j_0^U)^{-1}H^n(j_0^U)(s'(0))\\
&=H^n(f_{-x})(s'(0)).
\end{aligned}$$
□

应用这些子引理, $\varphi(\beta)$ 的连续性就等价于公式

$$H^n(U^t x)(\beta)=H^n(f_{-x})H^n(U^t 0)(\beta).$$

此公式来自于 $U^t x$ 与 $U^t 0 f_{-x}$ 同伦的事实.

子引理 3 对于所有 q, $H^q(U^t 0)$ 是同构.

于是, 定理中的情形 1 便可由子引理 1 和 3 得到证明.

应用上面的交换图表, 我们必须证明

$$\begin{aligned}
H^q(id\times j_0)\colon H^q(\boldsymbol{R}^n\times U,\ (\boldsymbol{R}^n-0)\times U)\\
\to H^q(\boldsymbol{R}^n\times 0,\ (\boldsymbol{R}^n\times 0)\times 0)
\end{aligned}$$

是同构．而这可由 U 的可点缩性得到． □

情形 2．如果定理对于开集 U, V 和 $B=U\cap V$ 成立，则对开集 $Y=U\cup V$ 也成立．

为简单计，设

$$U'=X\times U-\Delta,\ V'=X\times V-\Delta,$$
$$B'=X\times B-\Delta,\ Y'=X\times Y-\Delta.$$

子引理 4 存在正合序列

$$\to H^q(X\times Y,\ Y')\xrightarrow{i} H^q(X\times U,\ U')\oplus H^q(X\times V,\ V')$$
$$\xrightarrow{j} H^q(X\times B,\ B')\xrightarrow{k} H^{q+1}(X\times Y,\ Y')\to,$$

其中 i 由链同态 $z\to(z,\ z)$ 导出，j 由链同态 $(z,\ w)\to z-w$ 导出，k 为连接同态．

如果子引理成立，在此情形的假设之下就有：当 $q<n$ 时，

$$H^q(X\times Y,\ Y')=0.$$

此外，交换图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^n(X\times Y,\ Y') \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & H^n(X\times U,\ U')\oplus H^n(X\times V,\ V') \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi\oplus\varphi"] & H^n(X\times B,\ B') \arrow[d, "\varphi"] \\
0 \arrow[r] & \Gamma^*Y \arrow[r, "i"] & \Gamma^*U\oplus\Gamma^*V \arrow[r, "j"] & \Gamma^*B
\end{tikzcd}$$

和 5 项引理蕴含 φ 关于 Y 是同构．

子引理的证明 为得到子引理 4 中的正合序列，考察由

$$i(\bar{z})=(\bar{z},\ \bar{z})$$

定义的链复形单同态

$$i:\ \frac{S(X\times B)}{S(B')}\longrightarrow\frac{S(X\times U)}{S(U')}\oplus\frac{S(X\times V)}{S(V')}$$

和由 $j(\bar{z},\ \bar{w})=\overline{z-w}$ 定义的链复形满同态

$$j:\ \frac{S(X\times U)}{S(U')}\oplus\frac{S(X\times V)}{S(V')}\longrightarrow\frac{S(X\times U)+S(X\times V)}{S(U')+S(V')}.$$

显然 $ji=0$. 假设 $j(\bar{z}, \bar{w})=0$. 如果 $z=\Sigma\nu_h\sigma_h$, 令 v 是使 $|\sigma_h|$ 和 Δ 相交的那些 $\nu_h\sigma_h$ 的和,则 v 等于用 w 代替 z 以同样方式定义的链,这是因为 $z-w\in S(U')+S(V')$. 所以 $i(\bar{v})=(\bar{z}, \bar{w})$. 这样我们有链复形的正合序列. 由于所有这些复形是自由的,取对偶给出上链复形的一个正合序列,从而有无限的上同调正合序列

$$\to H^q(C/C') \xrightarrow{i} H^q(X\times U, U')\oplus H^q(X\times V, V')$$
$$\xrightarrow{j} H^q(X\times B, B') \xrightarrow{k} H^{q+1}(C/C')\to,$$

这里
$$C=S(X\times U)+S(X\times V),$$
$$C'=S(U')+S(V').$$

因为
$$X\times Y=X\times U\cup X\times V,$$

所以 C 到 $S(X\times Y)$ 内的包含同态为链同伦等价. 类似地,包含 $C'\to S(Y')$ 也是. 并且,通过求商,包含 $C/C'\to S(X\times Y)/S(Y')$ 也是链同伦等价. 因此,在上面的正合序列中可以用 $H^q(X\times Y, Y')$ 代换 $H^q(C/C')$. □

情形 3. 设 $U=\bigcup_i U_i$, 而 $\{U_i\}$ 是开子空间的一个全序族,并且定理对这里的每个 U_i 成立. 于是定理对 U 成立.

限制同态 $\Gamma^*U\to\Gamma^*U_i$ 给 Γ^*U 一个射影极限(25.9)表示:

$$\Gamma^*U=\varprojlim_i \Gamma^*U_i,$$

因而我们只须验证标准同态

$$\theta: H^q(X\times U, U')\to \varprojlim_i H^q(X\times U_i, U_i')$$

对于所有的 $q\leqslant n$ 是同构. 如果用 C 表示 S, Z 或 B, 便有

$$C_q(X\times U, U')=\bigcup_i C_q(X\times U_i, U_i'),$$

因为每个链具有紧支集和 U_i 是全序的. 取零化子,我们看到,当 $C=S$ 或 Z 时,

$$C^q(X \times U,\ U') = \varprojlim_i C^q(X \times U_i,\ U'_i).$$

当 $C = B$ 时，我们验证：若 $c = \delta d$，且

$$d \in S^{q-1}(X \times U,\ U'),$$

则对所有 i，$c | X \times U_i = \delta(d | X \times U_i)$．反之，假若对于每个 i 存在 $d_i \in S^{q-1}(X \times U_i,\ U'_i)$ 使得 $c | X \times U_i = \delta d_i$，我们断言，用一上边缘修改每个 d_i 之后，便可使各 d_i 吻合，给出

$$d \in S^{q-1}(X \times U,\ U')$$

使得 $c = \delta d$．如果 $U_i \subset U_j$，那么 $d_i - (d_j | X \times U_i)$ 是上闭链．由关于 U_i 的定理，推知是上边缘．当 $q \leqslant 1$ 时，这意味着

$$d_i = d_j | X \times U_i,$$

从而无须修改．现在设 $q > 1$ 且上述断言对 $q-1$ 成立，显然，可设标号集是一序数，于是可用超限归纳法完成我们的修改．设 j 是一标号，使得当 $i < j$ 时 d_i 吻合，若 j 有一前趋 i，且

$$d_i - (d_j | X \times U_i) = \delta e_{ij},$$

我们可把 e_{ij} 扩张为 $S^{q-2}(X \times U_j,\ U'_j)$ 中元（因为

$$S_{q-2}(X \times U_i,\ U'_i)$$

是 $S_{q-2}(X \times U_j,\ U'_j)$ 中一个直和项）并用 $d_j + \delta e_{ij}$ 代替 d_j．若 j 为极限序数，则可设对于所有的 $i < j$，e_{ij} 吻合（根据在 q 上的归纳假设），给出一个 $e_j \in S^{q-2}(X \times U_j,\ U'_j)$，并且可用 $d_j + \delta e_j$ 代替 d_j，因此，对一切 $q \leqslant n$，

$$B^q(X \times U,\ U') = \varprojlim_i B^q(X \times U_i,\ U'_i).$$

这说明 $q \leqslant n$ 时 θ 是同构．

情形 4. U 是含于一坐标邻域的任意开集．

将 U 中具有有理坐标的稠密点集加以排列，设 V_j 是含有第 j 个点的且包含在 U 内的最大凸开集．令

$$U_1 = V_1,$$

$$U_i = U_{i-1} \cup V_i, \quad i > 1.$$

由情形1和2，以及对 i 的归纳，对于所有的 U_i 定理成立，由情形3，定理对于它们的并成立.

一般情形. 利用前面的几种情形，使用 Zorn 引理 □

(30.4)**注意** 设 $p: X \times X \to X$ 是到第二个因子上的射影. 如果 $U \subset X$ 是 x 的坐标邻域，根据情形1，$p^{-1}(U) \cap (X \times X - \Delta)$ 和 $(X - \{x\} \times U)$ 同胚. 从而 $(p^{-1}(U), p^{-1}(U)) \cap (X \times X - \Delta)$ 和 $(X, X - \{x\} \times U)$ 同胚. 关于 p 的局部乘积结构与复盖射影类似. 此外，$H^n(X|x)(\mu)$ 生成 $H^n(X, X - \{x\})$. 这些可用来证明 Thom 同构定理：由 $\Phi(c) = p^*(c) \cup \mu$ 定义的映射

$$\Phi: H^q(X) \to H^{q+n}(X \times X, X \times X - \Delta)$$

是同构. 这要用到相对上积. 我们将此证明留给有兴趣的读者作为科研练习. 根据 Künneth 定理，这个定理关于坐标邻域是正确的. 至于一般情形，可由子引理4中出现的 Mayer-Vietoris 方法得到. 对于纤维丛和示性类，这个定理有着重要的推广和应用. 进一步的发展载于[64]，[52]，[65]，[84]中.

我们讨论相对上同调模 $H(X \times X, X \times X - \Delta)$ 的一个原因在于下面的交换性引理：

(30.5)**引理** 若 $\gamma \in H^p(X \times X, X \times X - \Delta)$，$\eta \in H^q(X)$，则

$$H^p(j)(\gamma) \cup (\eta \times 1) = H^p(j)(\gamma) \cup (1 \times \eta).$$

其中 $j: X \times X \to (X \times X, X \times X - \Delta)$ 为包含映射.

证明 由(26.17.7)，存在 Δ 在 $X \times X$ 中的开邻域 V 和收缩 $r: V \to \Delta$ 使得 $ir \simeq k$，这里 $i: \Delta \to X \times X$，$k: V \to X \times X$ 都是包含映射，用 k' 表示包含映射，

$$(V, V - \Delta) \to (X \times X, X \times X - \Delta),$$

注意 k' 是切除映射. 下面的图表交换：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \beta \arrow[r, mapsto] & \gamma\cup\beta \\
 & H^q(X\times X) \arrow[r] \arrow[dl, "H^q(i)"'] \arrow[dd, "H^q(k)"] & H^{p+q}(X\times X,\ X\times X-\Delta) \arrow[dd, "\wr H^{p+q}(k')"] \\
H^q(\Delta) \arrow[dr, "H^q(r)"'] & & \\
 & H^q(V) \arrow[r] & H^{p+q}(V,\ V-\Delta) \\
 & \xi \arrow[r, mapsto] & H^p(k')(\gamma)\cup\xi
\end{tikzcd}$$

这里，我们使用了绝对和相对上同调的混合上积。

设 $p_i: X\times X\to X$ 是射影，$i=1, 2$. 则

$$1\times\eta=H^0(p_1)(1)\cup H^q(p_2)(\eta)=H^q(p_2)(\eta),$$

$$\eta\times 1=H^q(p_1)(\eta).$$

设 $p: \Delta\to X$ 是 p_1 和 p_2 在对角线上的公共限制，由以上图表，当 $i=1$ 和 $i=2$ 时，

$$\begin{aligned}\gamma\cup H^q(p_i)(\eta)&=H^{p+q}(k')^{-1}(H^p(k')(\gamma)\cup H^q(p_i i r)(\eta))\\&=H^{p+q}(k')^{-1}(H^p(k')(\gamma)\cup H^q(pr(\eta)).\end{aligned}$$

根据混合上积的定义，

$$\begin{aligned}&H^p(j)(\gamma)\cup H^q(p_i)(\eta)\\&\quad=H^{p+q}(j)(\gamma\cup H^q(p_i)(\eta)).\end{aligned}$$

这就证明了引理. □

如 X 是紧的，我们能用 Thom 类 μ (或它在 $H^n(X\times X)$ 中的像 μ')明确地表示 Poincaré 对偶同构的逆.

(30.6) **定理** 设 X 是 R-定向 n 维紧流形，具有基本类

$$\zeta\in H_n(X).$$

则对于任意的 $p\leqslant n$, Poincaré 对偶同构 $H^p(X)\xrightarrow{\simeq}H_{n-p}(X)$ 的逆可由

$$\alpha\to(-1)^{pn}\mu'/\alpha,\quad \alpha\in H_{n-p}(X)$$

给出.

证明 若 $\eta\in H^p(X)$，则 $\zeta\cap\eta$ 是它在 $H_{n-p}(X)$ 中的象，并且

$$
\begin{aligned}
\mu'/\zeta\cap\eta &= 1\cup\{\mu'/\zeta\cap\eta\}\\
&= \{(\eta\times 1)\cup\mu'\}/\zeta \quad (29.21)\\
&= \{(1\times\eta)\cup\mu'\}/\zeta \quad (30.5)\\
&= (-1)^{pm}(-1)^{0}\eta\cup\{\mu'/\zeta\cap 1\} \quad (29.21)\\
&= (-1)^{pm}\eta\cup\{\mu'/\zeta\}\\
&= (-1)^{pm}\eta\cup 1 \quad \mathbf{(30.3)}\\
&= (-1)^{pm}\eta. \qquad\qquad \square
\end{aligned}
$$

设有映射 $f: X\to Y$，且 Y 是另一 R-定向 m 维紧流形，定义 f 的图象的上同调类 μ_f 为

$$\mu_f=H^m(f\times id)(\mu'_Y)\in H^m(X\times Y),$$

其中 $\mu'_Y\in H^m(Y\times Y)$ 是 Y 的 Thom 类的象. 类 μ_f 完全确定上同调上由 f 导出的同态.

(30.7) **命题** 对于任意的 $\eta\in H^p(Y)$，

$$H^p(f)(\eta)=(-1)^{pm}\mu_f/\zeta_Y\cap\eta,$$

这里 $\zeta_Y\in H_m(Y)$ 是 Y 的基本类.

证明

$$
\begin{aligned}
\mu_f/\zeta_Y\cap\eta &= H^p(f)(\mu'_Y/\zeta_Y\cap\eta) && (29.23)\\
&= (-1)^{pm}H^p(f)(\eta). && (30.6)
\end{aligned}
$$

$\square$

现在设 $Y=X$，我们来寻求 f 具有不动点的充分条件.

(30.8) **命题** 若 $\mu_f\neq 0$，则 f 有不动点.

证明 若 f 无不动点，则有分解

$$
\begin{tikzcd}
 & X\times X-\Delta \arrow[d, "i"] \\
X\times X \arrow[ur] \arrow[r, "f\times id"'] & X\times X
\end{tikzcd}
$$

其中 i 为包含映射. 因为

$$H^n(i)H^n(j)=0$$

和
$$\mu'_X=H^n(j)(\mu_X),$$

所以
$$\mu_f=H^n(f\times id)(\mu'_X)=0. \qquad \square$$

为了得出一个数值上的准则, 考虑 Lefschetz 类

$$L_f=H^n(f,\ id)(\mu')=H^n(\Delta)(\mu_f)\in H^n(X),$$

并定义 Lefschetz 数为

$$\Lambda_f=[\zeta,\ L_f]=[\zeta,\ H^n(f,\ id)\mu'];$$

根据(30.8), $\Lambda_f\neq 0$ 蕴含 f 具有不动点.

我们计算 R 为域时的 Λ_f. 设 $\{\alpha_i\}$ 是 $H^{\cdot}(X)$的一个基, i 跑遍一个有限集. 令 q_i 是适合 $\alpha_i\in H^{q_i}(X)$的整数. 由 Künneth 公式 (29.17.6), $\alpha_i\times\alpha_j$ 构成 $H^{\cdot}(X\times X)$的一个基, 从而

$$\mu'=\sum_{i,j}c_{ij}\alpha_i\times\alpha_j$$

(其中当 $q_i+q_j\neq n$ 时 $c_{ij}=0$). 设

$$H^{\cdot}(f)(\alpha_i)=\sum_k a_{ki}\alpha_k$$

(当 $q_k\neq q_i$ 时 $a_{ki}=0$), 且

$$y_{kj}=[\zeta\cap\alpha_k,\ \alpha_j]=[\zeta,\ \alpha_k\cup\alpha_j]$$

(当 $q_k+q_j\neq n$ 时 $y_{kj}=0$, 当 $q_k+q_j=n$ 时 $y_{jk}=(-1)^{qk(n-qk)}y_{kj}$), 则

$$\begin{aligned}\Lambda_f&=\sum_{i,j}c_{ij}[\zeta,\ H^{\cdot}(f,\ id)(\alpha_i\times\alpha_j)]\\&=\sum_{ij}c_{ij}[\zeta,\ H^{\cdot}(f)(\alpha_i)\cup\alpha_j] \qquad (29.17.7)\\&=\sum_{i,j,k}c_{ij}a_{ki}[\zeta,\ \alpha_k\cup\alpha_j]\\&=\sum_{i,j,k}c_{ij}a_{ki}y_{kj}=\sum_{i,k}a_{ki}\Big(\sum_j c_{ij}y_{kj}\Big).\end{aligned}$$

另一方面,

$$(-1)^{nq_k}\alpha_k = \mu'/\zeta \cap \alpha_k \quad (30.6)$$
$$= \left(\sum_{j,i} c_{ji}\alpha_j \times \alpha_i\right)/\zeta \cap \alpha_k$$
$$= \sum_{j,i} c_{ji}[\zeta \cap \alpha_k,\ \alpha_j]\alpha_i \quad (29.22)$$
$$= (-1)^{q_k(n-q_k)}\sum_i\left(\sum_j c_{ji}y_{jk}\right)\alpha_i,$$

从而，
$$\sum_j c_{ji}y_{jk} = (-1)^{q_k}\delta_{ik}.$$

由于矩阵的右逆也是左逆，所以
$$\sum_j c_{ij}y_{kj} = (-1)^{q_k}\delta_{ik},$$

因此，
$$\Lambda_f = \sum_k (-1)^{q_k} a_{kk}.$$

这些结果综述如下：

(30.9) **Lefschetz 不动点定理** 设 X 是 R-定向紧流形，R 为一域. 如果 $f: X \to X$ 是任一映射，则 f 的 Lefschetz 数为
$$\Lambda_f = \sum_q (-1)^q \operatorname{Tr} H^q(f).$$
若 $\Lambda_f \neq 0$，则 f 有不动点.

(30.10) **推论** 恒等映射的 Lefschetz 数等于 X 的 Euler 示性数 $\chi(X; R)$，即
$$\chi(X; R) = [\zeta,\ H^n(d)\mu'].$$
其中 $d: X \to X \times X$ 为对角映射.

(30.11) **练习** 如果 $R = \boldsymbol{Q}$，则 Λ_f 实质上为一整数.

(30.12) **推论** 若 $f: S^n \to S^n$ 有映射度 $d \neq (-1)^{n+1}$，那么 f 有不动点(对径映射(16.4)说明假设必要).

证明 $\operatorname{Tr}H^n(f) = d$，$\operatorname{Tr}H^0(f) = 1$，并且
$$\Lambda_f = 1 + (-1)^n d. \qquad \square$$

(30.13) **练习** 应用(26.12)或(26.14)证明：如果 n 为偶数，则 $\boldsymbol{CP}^n$ 或 $\boldsymbol{HP}^n$ 的每个自映射有不动点(见[63]).

(30.14) **注意** 在 f 只有有限个不动点 $x_1, \cdots, x_r$ 时，有着纯

局部的方法给每个点确定一个指数 $I(x_j)\in\mathbf{Z}$，使得 Lefschetz 不动点公式

$$\Lambda_f=\sum_j I(x_j)$$

成立(见 Brown[11, 63])．在微分几何(Bott and Atiyah[8])和代数几何(Weil[60])中，有着与 Lefschetz 公式类似的非常重要的公式．

(30.15)**练习** 设 X, Y 分别为 n 维和 m 维的 R–定向流形，不必是紧的．则对每一点 $(x, y)\in X\times Y$，我们有标准同构(29.16)

$$\times:\ H_n(X,\ X-x)\otimes H_m(Y,\ Y-y)$$
$$\to H_{m+n}(X\times Y,\ X\times Y-(x,\ y))$$

(因为在 Künneth 公式中其它项为零)．于是存在 $X\times Y$ 的唯一 R–定向使得在 (x, y) 处的局部 R–定向是 $\zeta_x\times\zeta_y$，这里的 $\zeta_x(\zeta_y)$ 是 X 在 x 处(Y 在 y 处)的 R–定向．这叫做 $X\times Y$ 的**乘积 R–定向**．当 X 和 Y 是紧流形时，

$$\zeta_{X\times Y}=\zeta_X\times\zeta_Y,$$

其中 ζ 表示 R–定向的基本类．

设 X 是紧 R–定向的，$\mu_{X\times X}$ 是关于乘积 R–定向的流形 $X\times X$ 的 Thom 类，$\mu'_{X\times X}$ 是它在 $H^{2n}(X\times X\times X\times X)$ 中的象．那么，$\mu'_{X\times X}$ 与 $\mu'_X\times\mu'_X$ 之间关系如何？设 μ''_X 是 $H_n(\Delta)(\zeta_X)$ 的 Poincaré 对偶，即

$$(\zeta_X\times\zeta_X)\cap\mu''_X=H_n(\Delta)(\zeta_X),$$

证明 $\mu'_X=\mu''_X$ (见 30.17)．

(30.16)**科研练习** 将第 30 章中的所有结果推广到有边紧流形．特别是，确定 Lefschetz 对偶定理的逆同构，并证明一个 Lefschetz 不动点定理。

(30.17) **评注** 设 X 是 n 维紧流形，取系数于一域中，我们构造 μ' 的一个明确表达式. μ' 是 Thom 类在 $H^n(X\times X)$ 上的限制. 已知 $H^{\cdot}(X)$ 的一个基 $\{b_i\}$，按照要求

$$[\zeta,\ b_j^*\cup b_i]=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

构造 $H^{\cdot}(X)$ 的对偶基 $\{b_i^*\}$. 根据 Poincaré 对偶性，这是可能的. 应用斜积和 (29.21) 可以证明:

(30.18) **命题** $\mu'=\sum_i(-1)^{|b_i|}b_i^*\times b_i$，其中

$$|b_i|=\dim b_i.$$

证明 应用 (29.17.6)，记 $\mu'=\sum\alpha_{rs}b_r^*\times b_s$. 对于 $a\in H^k(X)$，根据 (30.5) 则有

$$(a\times 1)\cup\mu'=(1\times a)\cup\mu'.$$

利用 (29.21) 和 (30.3) 得

$$\{(1\times a)\cup\mu'\}/\zeta=(-1)^{nk}a\cup\{\mu'/\zeta\}=(-1)^{nk}a.$$

替换 μ' 并应用 (29.17.5) 有

$$(-1)^{nk}a=\{(a\times 1)\cup\mu'\}/\zeta=\sum\alpha_{rs}\{(a\cup b_r^*)\times b_s\}/\zeta.$$

令 $a=b_r$ 并利用 (29.22) 可得

$$(-1)^{n|b_r|}b_r=\sum\alpha_{rs}(-1)^{|b_r^*||b_r|}b_s.$$

由于 $\{b_s\}$ 无关，我们得到

$$\alpha_{rs}=\begin{cases}(-1)^{|b_r|} & r=s,\\ 0 & r\neq s.\end{cases}\qquad\square$$

(30.18) 的表现形式（符号以及 b_i^* 是在右边还是左边）要受定义卡积时的约定的影响.

证明 $\mu_x'=\mu_x''$. 提示：记

$$\mu_x''=\sum\alpha_{rs}b_r^*\times b_s,$$

并计算 $\zeta\times\zeta\cap\mu_x''$ 在 $b_i\times b_i^*$ 上的值.

(30.19)练习　证明 $H^n(i)\mu'=(-1)^n\mu'$, 其中

$$i: \; X\times X\to X\times X$$

为交换映射, $n=\dim X$.

(30.20)练习　证明: 存在满足(30.3)的类μ蕴含X可定向.

(30.21)练习　由(30.18)推导(30.10), 这固然容易, 但值得一做.

(30.22)练习　设$f: X\to Y$如(30.9)中, 定义$g: X\to X\times Y$为$g(x)=(x, f(x))$. 设$\Gamma=H(g)(\zeta_X)$. 证明$\zeta_X\times\zeta_Y\cap\mu_f=\Gamma$. 提示: 在一域内取系数. 令$w$满足$\zeta_X\times\zeta_Y\cap w=\Gamma$, 记

$$w=\sum\lambda_{rs}b_r^*\times c_s,$$

并由(30.15)记$\Gamma=H(1\times f)(\zeta_X\times\zeta_Y\cap\mu'_X)$. 然后, 在$b_r\times c_s^*$上计值并用(30.18)计算$\mu_f$.

评注　把μ'和μ_f分别与对角线$H(\Delta)(\zeta_X)$和图象Γ的Poincaré对偶等同起来, 可使我们洞察其几何意义. 例如, 公式

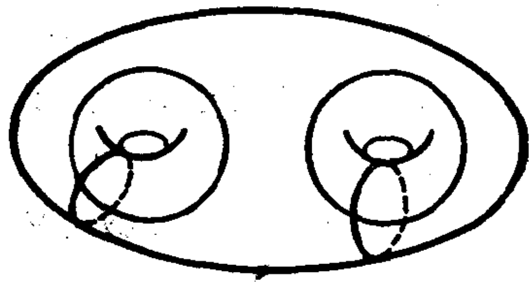
$$\Lambda_f=[\zeta\times\zeta,\ \mu'\cup\mu_f]$$

可以从(30.15)得到. 在下一章, 我们将把这个公式解释为对角线和图象的相交数.

31　相交数与上积

我们再来考察环面. H_1的一个基可用一对交于一点的嵌入圆周表示, 对偶基元的上积不为零. 另一个例子是亏格为2的有向曲面, H_1的一个基表示在下图中. 应用(24.30)进行计算, H'的对偶基中不同元素的上积的非零值和零值分别相应于这些代表圆周间的非空交或空交. 我们应用Thom类去探讨相交数和上积之间的关系. 但这讨论是介绍性的. 较为详细的阐述在Dold[64]

中给出，而一个几何上的论述见于 Seifert 和 Threlfall[86]．本论述的基本思想来自 Dold 的书和 Milnor[82]．奠基性论文是 Thom[57]．系数始终取自一个域或者整数．



设 V 为 n 维闭流形，M, N 分别是其 r 维和 s 维的子流形．

基本假设　$r+s=n$ 且 $M\cap N$（如果不空）是有限点集．

(31.1)**定义**　M 和 N 在点 x 处**横截**相交，是指存在 x 的一个坐标邻域 U 和同胚 $(U, U\cap M, U\cap N)\cong(\boldsymbol{R}^{r+s}, \boldsymbol{R}^r\times\{0\}, \{0\}\times\boldsymbol{R}^s)$．$x$ 必须对应原点．我们说 $M\cap N$ 是**横截的**，如果它在每一点处是横截的．

例　$y=x$ 或者 $y=x^3$ 的图象与 x 轴的交在原点处是横截的，而 $y=x^2$ 的图象与 x 轴的交就不是横截的．

如果流形 M,N,V 都是可定向的(或者系数为 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$)，则对于每个横截相交可指定一个**相交数**$\pm1$ 如下：设 ζ_M^x, ζ_N^x 和 ζ_V^x 是由已知的整体定向导出的 $x\in M\cap N\subset V$ 处的局部定向，U 是如(22.1)中那样的 x 的一个坐标邻域．包含映射

$$(U, U-x)\subset(V, V-x)$$

是一个切除映射．由横截性我们有同胚

$$\begin{aligned}(U, U-x)&\cong(\boldsymbol{R}^{r+s}, \boldsymbol{R}^{r+s}-\{0\})\\&=(\boldsymbol{R}^r, \boldsymbol{R}^r-\{0\})\times(\boldsymbol{R}^s, \boldsymbol{R}^s-\{0\}).\end{aligned}$$

作交换图表

$$\begin{array}{ccc}
H_r(\mathbf{R}^r,\ \mathbf{R}^r-\{0\})\otimes H_s(\mathbf{R}^s,\ \mathbf{R}^s-\{0\}) & \xrightarrow{\times} & H_{r+s}(\mathbf{R}^{r+s},\ \mathbf{R}^{r+s}-\{0\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_r(M\cap U,\ M\cap U-x)\otimes H_s(N\cap U,\ N\cap U-x) & \xrightarrow{\times} & H_{r+s}(U,\ U-x) \\
 & & \downarrow \\
 & & H_{r+s}(V,\ V-x),
\end{array}$$

其中水平映射是叉积，竖直映射是切除映射．根据(30.15)，

$$\zeta_M^x\times\zeta_N^x=\varepsilon\zeta_V^x\quad(\varepsilon=\pm1).$$

(31.2) **定义** M 和 N 在 x 处的相交数定义为 ε．记

$$M\cdot N=\sum\nolimits_i\varepsilon_i,$$

这里 ε_i 是 M 和 N 在每个横交 x_i 处的相交数． 如果 $M\cap N$ 不横截相交，则不定义 $M\cdot N$．

(31.3) **引理** 相交数与坐标邻域 U 无关．

证明留作练习． □

(31.4) **引理** $M\cdot N=(-1)^{rs}N\cdot M$．

证明 可由叉积的相应性质(29.29)得到． □

附注 想象局部相交数 ε 的一个有用的几何方法是运用标架的等价类． 如果把在 x 处 M 的局部定向标架和在 x 处 N 的局部定向标架并置，可以得到在 x 处 V 的一个标架． ε 的值是 ±1 要看这个标架是否与 V 的定向等价．

(31.5) **引理** 设

$$k:(V,\ V-x)\to(V\times V,\ V\times V-\Delta)$$

为包含映射，则

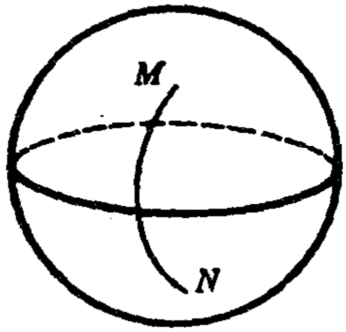
$$M\cdot N=\sum[\zeta_M^{x_i}\times\zeta_N^{x_i},\ H^n(k)\mu].$$

这里 μ 是 Thom 类，而 $\zeta_M^{x_i}\times\zeta_N^{x_i}$ 可视为 $H_n(V,\ V-x)$ 中的一个元．

证明 由(30.2)，

$$[\zeta_V^{n}, H^n(k)\mu]=1.$$ □

在目前情况下，$M\cdot N$ 与 $H.(V)$ 并无密切关系．例如，当 $V=S^2$, M 和 N 是两条相交弧时，可能有 $M\cdot N\neq 0$.



(31.6)定义 类 $\alpha\in H_r(V)$ 由子流形 M 所表示，是指

$$\alpha=H_r(i)(\zeta_M),$$

其中 $i: M\to V$ 为包含映射．

以下命题提供了代数和几何之间的联系：

(31.7) **命题** 设 $\alpha\in H_r(V)$, $\beta\in H_s(V)$ 由子流形 M, N 所表示，且 $M\cap N$ 是横截的．那么，

$$[\alpha\times\beta, \mu']=M\cdot N.$$

这里 μ' 是 Thom 类的限制．

证明 首先建立记号．设 $\{U_i\}$ 是 $\{x_i\}\in M\cap N$ 处横截相交的坐标邻域．记 $\Delta|M\cap N\subset V\times V$ 为集合 $\{(x, x)|x\in M\cap N\}$，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc}
M\times N & \rightarrow & (M\times N, M\times N-\Delta|M\cap N) \\
\downarrow & & \downarrow l \\
V\times V & \xrightarrow[j]{} & (V\times V, V\times V-\Delta).
\end{array}$$

记开集偶 $(M\cap U_i, N\cap U_i)=(A_i, B_i)$．根据叉积的自然性，有交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
H_r(M)\otimes H_s(N) & \xrightarrow{\times} & H_{r+s}(M\times N) & \rightarrow & H_{r+s}(M\times N, M\times N-\Delta|M\cap N) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow H(l) \\
H_r(V)\otimes H_s(V) & \xrightarrow{\times} & H_{r+s}(V\times V) & \xrightarrow[H(j)]{} & H_{r+s}(V\times V, V\times V-\Delta).
\end{array}$$

利用切除性，分解 $H(l)$ 为合成

$$\begin{aligned}&H_n(M\times N,\ M\times N-\Delta|M\cap N)\\&\quad\simeq\sum_i H_n(A_i\times B_i,\ A_i\times B_i-(x_i,\ x_i))\\&\quad\simeq\sum_i H_n(U_i,\ U_i-x_i)\simeq\sum_i H_n(V,\ V-x_i)\\&\quad\xrightarrow{H(k)} H_n(V\times V,\ V\times V-\Delta),\end{aligned}$$

其中第二个同构来自横截性，其它的来自切除性. 计算，有

$$\begin{aligned}[\alpha\times\beta,\ \mu']&=[\alpha\times\beta,\ H^{\cdot}(j)\mu]\\&=[H_{\cdot}(j)(\alpha\times\beta),\ \mu]\\&=[H_{\cdot}(l)(\zeta_M\times\zeta_N),\ \mu]\\&=\sum_i[\zeta_M^{x_i}\times\zeta_N^{x_i},\ H^{\cdot}(k)\mu]\\&=M\cdot N.\end{aligned}$$ □

我们应用(31.7)来计算 $H^{\cdot}(V)$ 中的上积.

(31.8) **推论** 如果 $a=\mu'/\alpha$, $b=\mu'/\beta$, 则

$$[\zeta_V,\ a\cup b]=(-1)^sM\cdot N.$$

这里 $\beta\in H_s(V)$.

证明 由(30.6), $\zeta\cap a=(-1)^{ns}\alpha$. 从而

$$\begin{aligned}[\zeta,\ a\cup b]=[\zeta\cap a,\ b]&=(-1)^{ns}[\alpha,\ \mu'/\beta]\\&=(-1)^{ns}[\beta\times\alpha,\ \mu']\\&=(-1)^s[\alpha\times\beta,\ \mu']\\&=(-1)^sM\cdot N.\end{aligned}$$ □

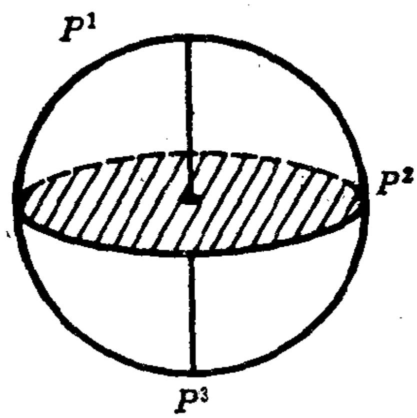
附注 此处令人烦恼的符号是我们对上积的约定所致.

附注 $\alpha=\beta$ 的可能性是允许的，不过，当 $\alpha=\beta$ 时仍要求不同的子流形表示这个类，并且它们必定横截相交或者根本不交.

附注 读者可根据(31.8)考查一些悬而未决的例子. 但要特别注意，在描述 H_1, H^1 的基时，关于代数对偶和 Poincaré 对偶

中“对偶”一词的不同用法.

例 $\boldsymbol{P}^3$ 的模 2 上同调的上积结构缺少一个适当的图形. 把 $\boldsymbol{P}^3$ 想象成实心 3 维球叠合边界上的对径点得到的空间. 有着两个嵌入: 从赤道 2 维圆盘到球内的嵌入 $\boldsymbol{P}^2\subset\boldsymbol{P}^3$ 和从一条直径到球内的嵌入 $\boldsymbol{P}^1\subset\boldsymbol{P}^3$, 它们的交探查出非零的上积 $H^1\otimes H^2\to H^3$.



练习 应用(31.8)计算紧曲面和 $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{CP}^n$, $\boldsymbol{HP}^n$ 的上同调环.

练习 设 $f: X^n\to Y^n$ 是闭流形间的映射, 且 $\deg f=k$. 证明 $k\chi(Y)=[\Gamma, \mu_f]$, 这里 Γ 定义如(30.22). 应用(31.6)和(30.22)得出方程 $k\chi(Y)=\Gamma\cdot\Gamma$.

注意 希望了解相交理论的进一步发展的读者可查阅 Dold [64]第八章第 11 节 p.314—325. 这里, 我们谈谈本书的材料和 Dold 的论述之间联系的梗概.

设 $e: M^r\to V^n$ 是一嵌入, $e(M)$ 可满足 $\check{H}^q(M)\cong H^q(M)$ (27.1), 则存在 Alexander 对偶同构 $H^{n-q}(M)\to H_q(V, V-M)$ (27.6). 结合 Pöincaré 对偶性, 我们得到**转移同构**:

$$H_q(V, V-M)\to H^{n-q}(M)\xrightarrow{\zeta_M} H_{q-s}(M),$$

这里 $n=r+s$. 在此同构之下, $1\in H_0(M)$ 对应的类 $\nu_M\in H_s(V, V-M)$ 叫做 M 在 V 中的**横截类**. 应用万有系数, 得出 M 在 V

中的 Thom 类 $\tau_M \in H^s(V, V-M)$ 且

$$[\nu_M, \tau_M]=1.$$

在对角线 $\Delta \subset V\times V$ 的情形，$\tau_\Delta \equiv \mu \in H^n(V\times V, V\times V-\Delta)$ 正象第 30 章所定义.

现在设 M^r, $N^s \subset V$ 横截相交于一个单点. 可以证明，在上积配对

$$H^s(V, V-M)\otimes H^r(V, V-N)\to H^n(V, V-M\cap N)$$

之下，$\tau_M\cup\tau_N=\pm\tau_{M\cap N}$，其中符号是相交数. $r+s=n$ 的要求是不必要的，并且不连通的情况按预期的方式发展. 此外，如果

$$\mu_M\in H^s(V)$$

是 τ_M 的拉回(pull-back). 可以证明

$$\zeta_V\cap\mu_M=e_*(\zeta_M),$$

这是(30.15)的推广.

(31.7)最后回到处理 $M\times N$, $\Delta\subset V\times V$ 的情形. 形式是

$$\zeta_{V\times V}\cap\mu_{M\times N}=e_*(\zeta_M\times\zeta_N)=\alpha\times\beta,$$

$$\zeta_{V\times V}\cap\mu_\Delta=e_*(\zeta_\Delta)\quad(30.15)$$

于是，把(31.7)写成这种记号，我们有

$$\begin{aligned}
&[\alpha\times\beta, \mu']\\
&=[\zeta_{V\times V}\cap\mu_{M\times N}, \mu_\Delta]\\
&=[\zeta_{V\times V}, \mu_{M\times N}\cup\mu_\Delta]\\
&=[\zeta_{V\times V}, \tau_{M\times N}\cup\mu_\Delta]\ \text{由上积的自然性}\\
&=[\zeta_{V\times V}, \pm\tau_{(M\times N)\cap\Delta}].
\end{aligned}$$

相交理论的扩充(冗长的例子) 相交理论计算的局部特征可有重要的推广，对透镜空间 $L(p, q)$ 的情形我们给以简单扩充，并且改进前面的计算. 我们的目的在于证明

(31.9) **命题** 设 p 为素数，存在一个生成元

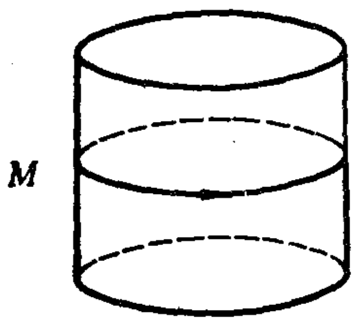
$$x\in H^1(L(p, q); \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$$

使得 $$[\zeta,\ x\cup\beta x]=qz,$$
这里 $$z\in H^3(L(p,\ q);\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$
适合$[\zeta,\ z]=1$，ζ是整数基本类的模p约化，β是与短正合序列
$$0\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\to 0$$
相伴的 Bockstein 同态。

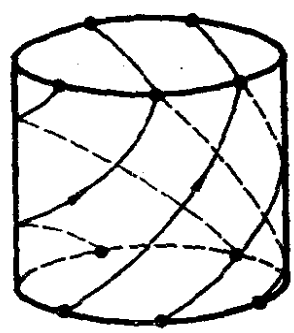
在证明之前，首先回忆空间$L(p,\ q)$的主要特征，并引入将使用的模型，其次讨论(31.7)在这些模型上的扩充，此后，证明则是计算。

我们知道$L(p,\ q)=(E_1^2\times S^1)U_h(E_2^2\times S^1)$，其中$h$是
$$\partial(E_i^2\times S^1)=S^1\times S^1$$
的一个同胚。$h|\partial E_1^2\times\{pt\}$是$\partial(E_2^2\times S^1)$上的一个$(p,\ q)$环面纽结，整数$(p,\ q)$互素。至于模型，我们迭合$E^2\times I$中的$(x,\ 0)$和$(x,\ 1)$构成$E^2\times S^1$。记
$$M=\partial E^2\times\left\{\frac{1}{2}\right\}$$
为在h之下象是$(p,\ q)$环面纽结的圆周。对于适当的h，$h(M)$由$\partial E_2^2\times I$上的p条螺旋弧表示，这些弧从底端到顶端旋转$2\pi q/p$弧度。

下面是$L(5,\ 2)$的图示。我们确定$L(p,\ q)$的定向。



$E_1^2\times I$



$E_2^2\times I$

在每块$E_i^2\times I$上都是右手系，并取h保持定向，且h映M如所指

的方向。

我们曾用 Mayer-Vietoris 序列计算过整系数上同调群及模 p 上同调群(把(21.28)和(23.28)结合起来). 简记 $L(p, q)$ 为 L, 结果是 $H^q(L; \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$, $0\leqslant q\leqslant 3$. 而带有整系数时

$$H^3\cong\boldsymbol{Z},\ H^2\cong\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z},\ H^1=0.$$

对于模 p 上同调环, 回想 β: $H^1\to H^2$ 是同构(23.37), 由Poincaré 对偶性, 上积配对 $H^1\otimes H^2\to H^3$ 是非退化的. 从而, 如果

$$x\in H^1(L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$$

是生成元, 则 βx 和 $x\cup\beta x$ 生成 H^2 和 H^3. 当然, 整上同调环是平凡的. 结果, 这两个上同调环都与 q 无关.

但当我们应用相交理论时, 旋转 $2\pi q/p$ 弧度的效用就显示出来. 我们来适当地修改(31.7).

显然, $H_2(L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$的非零元不可能用子流形来表示(为什么? 注意 $H_2(L;\ \boldsymbol{Z})=0$), 从而, 我们将用嵌入的"伪射影平面" P 表示 H_2. P 是将一个 2 维胞腔沿其边界粘附到一圆周上得到, 粘附映射的映射度为 p:

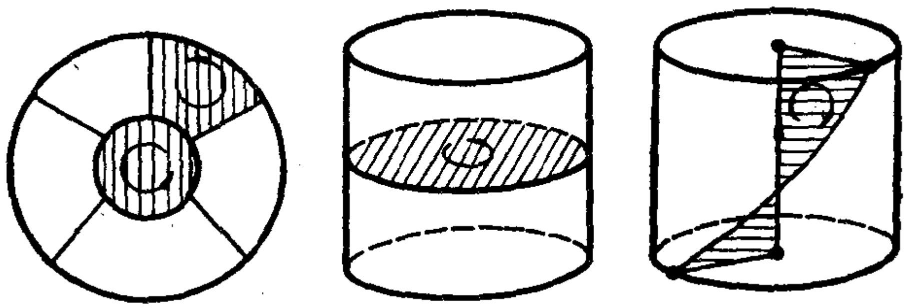
$$P=S^1\bigcup_p e^2.$$

抽象的伪射影平面 P 可以想象为边界迭合了的正 p 边形. 将 P 嵌入 L, 把在 $E_1^2\times I$ 中和 $E_2^2\times I$ 中的分成两部分描述: 一部分是以 M 为边缘的圆盘 $E_1^2\times\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, 一部分由从 p 条螺旋弧到 $E_2^2\times I$ 的柱心轴的凸缘. 这些部分由图 10 示意. 一个 Mayer-Vietoris 计算表明包含映射 $P\to L$ 导出 H_1 和 H_2 的同构, 这里 H_1 和 H_2 以 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 为系数群. 在(31.6)的意义下, 可以用 P 表示 H_2.

其次考虑定向, 尽管 P 不是流形, 但在上面说的多边形内部的点 x 处具有局部欧几里德结构. 对于这样的点和系数 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 存在切除映射$(\boldsymbol{R}^2,\ \boldsymbol{R}^2-\{0\})\to(P,\ P-x)$和同构

$$H_2(P;\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H_2(P,\ P-x;\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

(证明这一点，并看出在使用整系数时会发生什么)．因此，我们可以把 $H_2(P,\ P-x)$ 的生成元和一个定向等同起来，并且带有模 p 系数时可把这个类拉回到 $H_2(P;\ \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$．在图 10 中 P 的前象的一个定向连同 P 在 L 中相应的定向一齐给出．P 的定向有赖于 h 的选取．

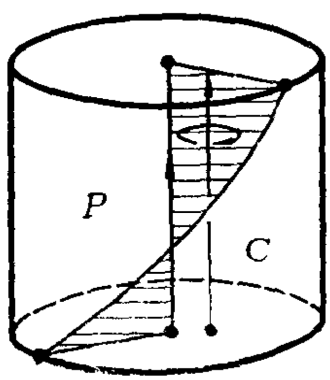


P的前象　　$E_1\times I$　　$E_2\times I$

图　10

证明(31.7)的关键步骤是分解映射 $H(l)$(用(31.7)中的记号)，对此，只有局部横截是需要的．我们将应用(31.7)到现在情形的扩充而不加正式的阐述．

下面我们寻找 H_1 的一个生成元，它和 P 横截相交．Mayer-Vietoris 计算说明，$E_2^2\times I$ 的柱心轴在叠合端点之后代表 H_1 的一个生成元．这个柱心轴的定向是向上的，如图 10 中所示．柱心



轴的平行位移给出直线 C, C 与 P 横交于 q 个点，在这些点处的相交数是 -1, 因为 C 的定向同 P 的定向并置是左旋的.

上述讨论综述如下：

1. 设 $\gamma\in H_1(L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$是由 C 表示的类, C 是 $E_2\times I$ 的柱心轴的平行小位移并带有向上的定向.

2. 设 $\pi\in H_2(L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$ 是生成元 $g\in H_2(P;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$的象, g 是$(P,\ P-x)$的一个定向的拉回. 这里 $x\in C\cap P$. 则

3. $[\gamma\times\pi,\ \mu']=-q$, 其中 $\mu'\in H^3(L\times L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$是 Thom 类的限制. 并且,

4. $\beta\pi=\gamma$, 这里 $\beta\colon H_2\to H_1$ 是 Bockstein 映射.

证明 前面的讨论中已可证明第3条. 对于第4条, 考虑链复形的短正合序列

$$0\to S(L)\otimes\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}\xrightarrow{p}S(L)\otimes\boldsymbol{Z}/p^2\boldsymbol{Z}\to S(L)\otimes\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}\to 0$$

于是, 表示 π 的链拉回成链 z, z 的边缘用 p 可除. 应用模型 P 可以看出 $p^{-1}\partial(z)$是表示 γ 的链. □

现在可以完成(31.9)的证明. 设

$$y\in H^1(L;\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$$

适合$[\gamma,\ y]=1$, 则

$$[\pi,\ \beta y]=[\beta\pi,\ y]=[\gamma,\ y]=1.$$

由于 $$-q=[\gamma\times\pi,\ \mu']=[\pi,\ \mu'/\gamma],$$

从而 $$\mu'/\gamma=-q\beta y.$$

类似的, $\mu'/\pi=-qy$. 从而由(31.8),

$$q^2[\zeta,\ y\cup\beta y]=(-1)(-q)=q.$$

因此 $y\cup\beta y=q'z$, 其中 $qq'\equiv 1\bmod p$, 并且 z 满足 $[\zeta,\ z]=1$. 令 $x=qy$, 便得到须求的公式 $x\cup\beta x=qz$. □

(31.10) **推论** 若 $L(p,\ q)$和 $L(p,\ q')$同伦等价, 则

$$\pm q'\equiv qm^2\bmod p.$$

证明 设 $f: L(p,q)\to L(p,q')$ 是同伦等价. 则

$$H(f)\zeta=\pm\zeta',$$

因为 ζ 是一整数类的约化. 设 x, x' 是 $L(p,q)$ 和 $L(p,q')$ 的 H^2 中由(31.8)给定的类，则对某个模 p 整数 m, $H^{\cdot}(f)x'=mx$. 计算之，得

$$\begin{aligned}\pm q&=[\pm\zeta', x'\cup\beta x']=[\zeta, H^{\cdot}(f)(x'\cup\beta x')]\\&=m^2[\zeta, x\cup\beta x]=m^2q,\end{aligned}$$

这里的等式在 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 中成立. □

评注 透镜空间(21.27)之间同胚的一个必要条件可以取同伦等价的必要条件；$\pm qq'$ 是一个模 p 二次剩余.

评注 不同伦等价的透镜空间可以有同构的上同调环和同构的同伦群. 例如，根据(31.10)，$L(5,1)$ 和 $L(5,2)$ 并不同伦等价，但是我们已经看到它们的上同调环和基本群同构. 又因为 S^3 是它们每一个的万有覆盖空间，它们的高维同伦群也同构.

注意 最重要的例子可说是同伦等价但不同胚的一对透镜空间. 对于任意的空间，这样的例子是普通的. 但对于闭流形，问题却微妙得多. 在 $n\leqslant 2$ 时就没有这样的例子. 并且，推广的 Poincaré 猜测的解断言：当 $n\geqslant 5$ 时，与 S^n 有相同同伦型的流形和 S^n 同胚(见注意(19.12)). 透镜空间例子所以出现，是因为同胚的充分条件：当 $\pm q'\equiv q^{\pm1} \bmod p$ 时 $L(p,q)\cong L(p,q')$，这也是必要条件(Moise 和 Reideistor 应用 Franz 的工作得到)，同时，同伦等价的必要条件(31.10)也是充分的(归功于 J. H. C. Whitehead). 因此，如 $L(7,1)$ 和 $L(7,2)$ 虽同伦等价但不同胚. 这些问题以及更多的问题在 M. Cohen[78] 中有详细讨论.

练习 $E_1\times I$ 的向下定向的柱心轴在迭合端点之后给出另一生成元 $\alpha\in H_1(L(p,q);\ \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})$. 并用相交理论和 Mayer-Vietoris 序列证明 $\gamma=q\alpha$ 和 $[\alpha, x]=1$，其中 x 出自(31.9).

符 号 表

$\sigma \simeq \tau \text{rel.}\ (0,\ 1)$
$\pi_1(X,\ x_0),\ [\sigma]$
f_*
$f \simeq g$
$\sigma' e_0$
$\mathbf{P}^n$
$\tilde{X}$
Ω_{X_0}
$\pi_n(X,\ x_0)$
$\Delta_q,\ \delta_q$
$E_0,\ E_1,\ E_2,\ \cdots$
$(P_0 \cdots P_q)$
R
$S_q(X)$
$F_q^i,\ \sigma^{(i)}$
∂
$z_1 \sim z_2$
$Z_q(X),\ B_q(X),\ H_q(X)$
$\oplus$
$\partial^*,\ H_q^*$
$S_q(f),\ H_q(f)$
$\bar{z}$
$B^q(X),\ Z^q(X),\ H^q(X)$
$H^q(f)$
$S^q(X,\ A),\ S_q(X,\ A)$
$Z^q(X,\ A),\ B^q(X,\ A),\ H^q(X,\ A)$
$[z,\ c]$
$A^q(X,\ A),\ E^q(X,\ A)$
$S^{\cdot}(X)$
$H_q(X,\ A)$
E^n
$E_n^+,\ E_n^-$
$\mathscr{V}$
$B\sigma$
Sd
G_r
e_r
$|\sigma|,\ |z|$
s_r
$\mathbf{CP}^n$
$\mathbf{HP}^n$
R_2
$T_g,\ U_h$
$\beta_q,\ \chi(X)$
$\chi(X;\ R)$
j_x^U
$X^0,\ \nu$
ΓA
$j_A,\ \Gamma_c A$
$S^q(X)$
$\delta,\ S^q(f)$
B
$\zeta \times \omega$
$[C \otimes C']_n$
Tor
$\xi \times \eta$
r
r/α

$\sigma\lambda_p$, $\sigma\rho_q$

$c\cup d$

$H^{\cdot}(X)$

$z\cap c$

$\varinjlim M_i$

ζ_K

$H^q_c(X)$

D

ANR

$\check{H}^q(A)$

∂X

$2X$

$\boldsymbol{A}$

Δ

$s^*(x)$, Γ^*U

$U^t x$

μ, μ'

μ_f

Δ_f

CX

Cf

$\vee$

$*$

$M\cdot N$

Ext

Γ

标 准 符 号

S^n	n 维球面
$\boldsymbol{R}$	实数域
$\boldsymbol{Z}$	整数
$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{H}$	有理数,复数,四元数
I	单位闭区间
$\cong$	同构的
$\xrightarrow{\cong}$	同构
$\approx$	同胚
$\bar{U}$	U 的闭包
$\mathring{A}$	A 的内部
$\varnothing$	空集
M^*	模 M 的对偶 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$
${}^t f$	同态 f 的转置

参 考 文 献

1. J. F. Adams, "Vector fields on spheres," *Ann. Math.*, **75**, 603-632 (1962).

2. L. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, 2nd printing(corrected), Princeton Univ. Press, Princeton, NewJersey(1965).

3. E. Artin, *Vorlesungen über Algebraische Topologie*, Hamburg (1964).

4. E. Artin and J. Tate, *Class Field Theory*, Harvard notes.

5. M. Artin. *Grothendieck Topologies*, Harvard notes (1962).

6. M. Atiyah, *K-Theory*, Harvard notes (1964).

7. R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York (1964).

8. R. Bott and M. Atiyah, "A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**, 245–250(1966).

9. M. Brown, "A proof of the generalized Schoenflies theorem," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**, 74-76(1960).

10. M. Brown, "Locally flat imbeddings of topological manifolds," *Ann. Math.*, **75**, 331-341 (1962).

11. R. F. Brown"On the Lefschetz fixed point theorem," *Amer. J. Math.*, **87**, 1–10(1965).

12. H. Cartan. *Seminaire*, 1948-present, Institut Henri Poincare, Paris.

13. C. Chevalley, *Algebraic Functions of One Variable*, Amer. Math. Soc., N. Y. (1951).

14. C. Chevalley, *Lie Groups*, 2nd printing, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey(1960).

15. P. E. Conner, Jr., and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Academic Press, New York(1964).

16. R. Crowell and R. Fox, *Knot Theory*, Ginn, Boston, Massachusetts (1963).

17. G. de Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris (1960).

18. P. Dolbeault, "Formes différéntielles et cohomologie sur une variété

analytique complexe, I and II," *Ann. Math.*, **64**, 83-130(1956); *Ann. Math.*, **65**, 282-330(1957).

19. A. Dold, "Erzeugende der Thomschen Algebra," *Math. Zeit.*, **65**, 25-35(1956).
20. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Massachusetts (1960).
21. S. Eilenberg, "Singular homology theory," *Ann. Math.*, **45**, 407-447 (1944).
22. S. Eilenberg and S. MacLane, "Acyclic Models," *Amer. J. Math* **75**, 189–199 (1953).
23. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1952).
24. E. Fadell, "Generalized normal bundles for locally flat imbeddings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**, 488-513.
25. I. M. Gelfand, R. A. Minlos, and Z. Ya. Shapiro, *Representations of Rotation and Lorentz Groups*, Macmillan, N. Y. (1963).
26. S. Goldberg, *Curvature and Homology*, Academic Press, N. Y. (1962).
27. A. Grothendieck, "Cohomology theory of abstract algebraic varieties," *Proc. Intern. Congr. Math. Edinburgh*, 103–118(1958).
28. P. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1958).
29. O. Hanner, "Some theorems on absolute neighborhood retracts," *Arkiv fur Mat.*, **2**, 315-360(1952).
30. P. Hiluot and S. Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, London and New York(1960).
31. F. Hirzebruch, *New Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer, Berlin(1965).
32. J. Hocking and G. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts(1960).
33. S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York(1959).
34. J. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey (1955).

35. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts(1964).

36. R. Lashof, "Problems in differential and algebraic topology." *Ann. Math.*, 81, 565-591(1965).

37. S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc., N. Y. (1942).

38. S. MacLane, *Homology*, Academic Press, New York (1963).

39. B. Mazur, "On embeddings of spheres," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65**, 59-65(1959).

40. J. Milnor, " On the cobordism ring and a complex analogue, I" *Amer. J. Math.*, **82.**, 505-521(1960).

41. J. Milnor, *Lectures on Characteristic Classes*, Princeton notes(1957).

42. J. Milnor, *Lectures on Differential Topology*, Princeton notes(1958).

43. J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

43a. J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville (1965).

44. J. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1963).

44a. S. P. Novikov, "New ideas in algebraic topology," *Russian Math. Surveys*, **20**, 37-62(1965).

45. J. H. Poincaré, *Analysis situs*, J. de L'Ecole Polytechnique, Paris (1895).

46. D. Puppe, *Topologie II*, Bonn, 1960.

47. V. A. Rohlin, "New results in the theory of 4-dimensional manifolds," (Russian) *Doklady* **84**, 221-224(1952).

48. J. Schwartz, "De Rham's theorem for arbitrary spaces," *Amer. J. Mvth.*, **77**, 29-44(1955).

49. J. P. Serre, *Corps Locaúx*, Hermann, Paris (1962).

50. J. P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Springer, Berlin (1964).

51. S. Smale, "A survey of recent results in differential topology," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**, 131-145(1963).

51a. S. Smale, "On the structure of 5-manifolds," *Ann. Math.*, **75**, 38-46 (1962).

52. E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill(1966).

53. M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York (1965).
54. G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts(1957).
54a. J. Stallings, "Polyhedral homotopy-spheres," *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 485-488(1960).
55. N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, 5th printing, Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey(1965).
56. R. Swan, *Theory of Sheaves*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois (1964).
57. R. Thom, "Quelques propriétés globales des variétés différentiables," *Comment. Math. Helv.*, **28**, 17–86(1954).
58. C. T. C. Wall, "Determination of the cobordism ring," *Ann. Math.*, **72**, 292–311(1960).
58a. C. T. C. Wall, "Classification of (n--1)-connected 2n-manifolds," *Ann. Math.* **75**, 163-189(1962).
59. A. Wallace, *Algebraic Topology*, Macmillan (Pergamon), New York (1963).
60. A. Weil, "Abstract versus classical algebraic geometry," *Proc. Int. Congr. Math.*, Amsterdam. III, (1954).
61. J. H. C. Whitehead, "Combinatorial Homotopy,I," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, 213-245 (1949).
62. J. F. Adams, *Algebraic Topology—A Student's Guide*, Cambridge University Press, N. Y. and London, 1972.
63. R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.
64. A. Doid, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, N. Y., Heidelberg, Berlin, 1972.
65. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer–Verlag, N. Y., 1975.
66. A. T. Lundell and S. Weingram, *The topology of CW-Complexes*, Van Nostrand, N. Y., 1969.
67. W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt-Brace, N.Y., 1967.
68. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie*

Groups, Scott-Foresman, Glenview, Illinois, 1971.

69. R. E. Mosher and M. C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotapy Theory*, Harper, N. Y., 1968.
70. J. F. P. Hudson, *Piecewise Linear Topology*, Benjamin, Reading, Mass., 1969.
71. V. Guillemin and A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.
72. R. E. Strong, *Notes on Cobordism Theory*, Princeton University Press, 1968.
73. C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic, N. Y., 1970.
74. J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalised Homology*, U. of Chicago, 1974.
75. J. W. Vick, *Homology Theory*, Academic, N. Y., 1973.
76. B. Gray, *Homotopy Theory—An Introduction to Algebraic Topology*, Academic, N. Y., 1975.
77. H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ., Press, 1956.
78. M. Cohen. *A Course in Simple- Homotopy Theory*, GraduateTexts in Mathematics, **10**, Springer- Verlag, 1973.
79. J. Hempel, *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies, **86**, Princeton Univ. Press. 1978.
80. F. Klein, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals*, Dover Publications, 1963.
81. F. Klein, *Lectures on Icosehedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*, Dover Publications.
82. J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1965.
83. J. Milnor, "On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere," *Annals Math.* **64**(1956), 399–405.
84. J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Math. Studies, **76**. Princeton Univ. Press, 1975.
85. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, 7, Publish

or perish Inc., 1976.

86. H. Seifert and W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie,* Leipzig, Teubner, 1934, Chelsea Publishing Company, 1947.

87. N. Steenrod and D. B. A. Epstein, *Cohomology Operations,* Annals of Math. Studies, **50**, Princeton University Press, 1962.

88. G. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory,* Graduate Texts in Mathematics, **61**. Springer-Verlag, 1978.

89. M. Newman. *Integral Matrices,* Academic Press, New York and London, 1972.

90. H. Bass (ed.), *Algebraic K-Theory I, II, III.* Proceedings of the Conference held at Seattle Reasearch Center of the Battelle Institute. Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, **341-343**, 1973.

91. R. S. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. Annals of Mathematics Studies, 57. Princeton Univ. Press, 1965.

92. P. Shanahan, The Atiyah-Singer Index Theory: An Introduction Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1978.

93. R. Bott, On topological obstructions to integrability, *International Congress of Mathematicians,* Nice 1970, **1**, Gauthier-Villars, 1971.

名 词 索 引

三　　画

四　　画

五　　画

六　画

七 画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十三画以上