

大学数学——概念、方法与技巧

微积分部分

刘坤林 谭泽光 编

清华大学出版社
施普林格出版社

(京)新登字 158 号

书 名：大学数学——概念、方法与技巧
微积分部分

作 者：刘坤林 谭泽光 编

出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦, 邮编 100084)

[http:// www .tup .tsinghua edu .cn](http://www.tup.tsinghua.edu.cn)

印刷者：北京顺义振华印刷厂

发行者：新华书店总店北京发行所

开 本：850 × 1168 1/32 印张：21.625 字数：541 千字

版 次：2001 年 9 月第 1 版 2002 年 2 月第 2 次印刷

书 号：ISBN 7-302-04647-6/O · 265

印 数：5001 ~ 15000

定 价：29.00 元

前 言

《大学数学——概念方法与技巧》是一套学习与复习大学数学的系列辅导教材,主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者,系统地复习大学数学内容、以求巩固提高所学知识,取得良好考试成绩而编写的.内容包括微积分,线性代数与概率统计两个分册,以及将陆续出版的配套习题集、模拟试题与解答等分册.选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的.本教材也可作为大学数学的教学参考书.

本书是编者数十年教学经验的积累,是编者依据对课程内容的研究理解,并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的.许多教学资料是第一次向外公开.这些教师不但有丰富的教学经历,同时也多从事科研工作,对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视.另外,他们也都是清华大学考研辅导班的主讲教师,对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究.因此,本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性、系统性、交叉性与技巧性的教学风范.同时,本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来,既突出了基础,又具有较强的针对性,希望能对这两类读者都有全方位的指导意义,为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助.

学好数学,重在基础.一味追求技巧,往往导致无所适从,望题生畏.本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练,各章节均配有相当数量的基本例题(例 * . * . *),其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧.应该说,扎实熟练的基本概念,加上对基本方法

的深入思考,是技巧的真正源泉.另外,在大多数章节里,还选编了一定数量的综合例题(综例 * . * . *),体现知识的综合性与交叉性,以训练综合运用所学知识进行分析问题及解决问题的能力.基于综合性与交叉性的考虑,在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排.读者在使用本书时,对书内例题应首先立足于独立思考,而后有选择地查阅解答过程.对一些典型题,应争取有自己的解题方法,很可能你的方法会优于书中提供的方法,果真如此,正说明你学习的深入.对准备考研的读者,鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类,在使用本书时,可参照考试大纲,有选择地略去书内某些章节.

每册书后附有清华大学相应课程的近期试题及答案,以供读者练习.这些试题的详细解答将放在后续出版的本系列辅导教材中.

全书编写工作得到清华大学数学科学系副主任白峰杉教授与其他许多教师的支持与帮助,责任编辑刘颖博士为本书的编写与书稿的勘误提出许多好的建议,并对全书的编审做出了大量出色的工作,编者向他们表示衷心的感谢.限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出.

本书主编为刘坤林.微积分部分编者为刘坤林(1~13章),谭泽光(14~23章);线性代数部分编者为俞正光(1~3章),王飞燕(4~6章);概率统计部分编者为叶俊(1~5章),赵衡秀(6~8章).

作 者

2001年6月于清华园

作者简介

谭泽光

1962年毕业于清华大学,清华大学责任教授。

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作,曾在奥地利 Graz University 任访问教授.讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程,分析系列课程负责人.长期担任清华大学考研辅导班数学主讲。

负责过多项科研项目,发表学术论文 20 多篇,并编著数学规划等教材.先后获省部级以上奖励四次,1992 年获国家进步二等奖。

任《高校应用数学学报》编委.一九九七年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,投入较多精力从事数学教改研究工作,2001 年获国家教学改革成果二等奖。

俞正光

1962年毕业于清华大学.清华大学责任教授。

清华大学代数系列课程负责人.从事组合图论的研究,发表学术论文 10 多篇.主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作。

长期担任清华大学考研辅导班数学主讲和清华大学 MBA 入学辅导数学主讲.一九九七年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,从事数学教改研究工作。

曾参加全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA 联考考前辅导教材》,主编《全国工程硕士研究生入学考

试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材。

刘坤林

1970年清华大学数学力学系毕业。清华大学责任教授。

从事基础数学与应用数学教学工作,两次获清华大学教学优秀奖。研究方向:控制理论与系统辨识,随机系统建模及预测,并行计算。1994年至1995年在美国 Texas A & M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学。发表学术论文30多篇,著有教材《工程数学》,《系统与系统辨识》。先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖。清华大学考研辅导班主讲,清华大学 MPA 考前培训班主讲。

中国工业与应用数学学会常务理事,副秘书长。系统与控制专业委员会委员,《控制理论及其应用》特邀审稿专家。

赵衡秀 女

1962年毕业于清华大学。清华大学数学科学系副教授。

研究方向为概率统计应用。长期讲授“概率统计”及“微积分”等课程。并担任清华大学考研辅导班数学主讲,清华大学 MBA 入学辅导数学主讲。

参加编写《MBA 全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA 入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材。

王飞燕 女

1967年毕业于清华大学,现任清华大学数学科学系副教授。主要研究方向:运筹学,经济数学。参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍。长期在清华大学从事数学教学与教学研究。主要讲授的课程有:高等数学,代数与几何,数学模型等。长期担任清华大

学考研辅导班数学主讲 .

曾获清华大学优秀教学成果奖 .

叶 俊

1993 年北京师范大学数学系博士研究生毕业, 现任清华大学副教授 .

专业方向: 概率统计, 应用数学 . 主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究 . 曾编写《随机数学》等教材 .

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程 . 曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖, 96, 97 年度清华大学优秀教学成果特等奖, 1999 年获宝钢优秀教师奖 .

长期担任清华大学考研辅导班数学主讲和清华大学 MBA 入学辅导数学主讲 .

目 录

第 1 章	预备知识	1
1.1	引言	1
1.2	基本不等式	1
1.3	基本不等式应用技巧	2
1.4	不等式思想	4
1.5	邻域与点集	5
1.6	实数点集的有界性与公理	7
1.7	函数及其初等性质	8
第 2 章	序列极限	17
2.1	引言.....	17
2.2	极限定义及其等价性描述.....	17
2.3	极限、聚点与子列	20
2.4	极限性质.....	21
2.5	极限存在的 4 个准则.....	23
2.6	标准极限及其应用技巧.....	31
第 3 章	函数极限	33
3.1	函数极限定义及等价性描述.....	33
3.2	极限的运算性质及复合极限定理.....	37
3.3	两个标准极限及等价无穷小量.....	38

第 4 章	连续函数	45
4.1	引言	45
4.2	函数在一点处连续的概念——微观性态	45
4.3	函数在闭区间上连续的概念——宏观性态	48
第 5 章	导数定义与微分概念	58
5.1	引言	58
5.2	导数定义及其等价性(变形)描述	58
5.3	导函数与导数零点定理	64
5.4	导数公式与微分法	66
第 6 章	用导数研究函数性态	75
6.1	引言	75
6.2	微分学基本定理	75
6.3	函数的极值、凸性与渐近线	81
6.4	洛必达法则与泰勒公式	89
6.5	用导数研究函数性态的综合例题	96
6.6	用导数研究函数性态的综合例题——不等式 证明技巧	121
6.7	与微分学有关的经济数学	130
第 7 章	原函数概念与积分技巧	136
7.1	引言	136
7.2	原函数概念	136
7.3	原函数表示法与变上限积分	140
7.4	积分方法与技巧	144
7.5	有理分式与三角有理分式的积分	158
7.6	综合例题与递推方法	165

第 8 章	定积分概念与性质	169
8.1	引言	169
8.2	可积性概念与性质	170
第 9 章	定积分计算与技巧	182
9.1	引言	182
9.2	凑微分法与变数替换	183
9.3	分部积分	187
9.4	区间变换、区间拆分与合并	191
第 10 章	基于定积分的函数性态分析及定积分应用	199
10.1	引言	199
10.2	定积分综合问题与变限积分	206
10.3	定积分应用	233
第 11 章	广义积分概念及判敛方法	255
11.1	引言	255
11.2	第一类广义积分概念与判敛	255
11.3	第二类广义积分概念与判敛	259
11.4	广义积分综合问题	262
第 12 章	数项级数及判敛方法	266
12.1	引言	266
12.2	一般性概念	266
12.3	正项级数	271
12.4	任意项级数与交错级数	277
12.5	级数综合例题	280

第 13 章 函数项级数	286
13.1 引言	286
13.2 收敛性的一般问题	286
13.3 一致收敛问题	289
13.4 幂级数的一般性概念	294
13.5 幂级数的代数运算性质与解析运算性质	298
13.6 泰勒级数与麦克劳林级数	300
13.7 级数展开与求和综合例题	303
13.8 傅里叶级数	312
13.9 傅里叶级数例题	316
第 14 章 微分方程基本概念及一阶方程与高阶 可降阶方程的解法	320
14.1 引言	320
14.2 微分方程的基本概念	320
14.3 一阶可积类型	323
14.4 高阶可降阶方程	328
14.5 综合题	330
第 15 章 高阶线性微分方程	342
15.1 引言	342
15.2 线性方程解的结构	342
15.3 线性常系数齐次微分方程的求解	349
15.4 线性常系数带非齐次项 $e^x P_n(x)$ 的 方程的求解	351
15.5 欧拉方程	353
15.6 差分方程简介	355
15.7 综合题	360

第 16 章 微分方程的应用	375
16.1 引言	375
16.2 微分方程在几何方面的应用	376
16.3 微分方程在物理、力学方面的应用.....	385
16.4 其他方面应用举例	396
第 17 章 向量代数	400
17.1 引言	400
17.2 空间向量的表示方法	400
17.3 向量的运算	402
17.4 用运算表示向量的几何关系	404
17.5 综合题	405
第 18 章 空间的平面、直线及一些特殊曲面的方程.....	418
18.1 引言	418
18.2 平面与直线	418
18.3 二次曲面的方程	424
18.4 几种特殊曲面	427
18.5 综合题	433
第 19 章 多元函数的连续性与可微性	449
19.1 引言	449
19.2 多元函数的符号表示及其定义域	449
19.3 多元函数的极限	452
19.4 多元函数的连续性	455
19.5 偏导数与全微分	456
19.6 综合题	462

第 20 章 多元函数的微分法	474
20.1 引言	474
20.2 多元函数的复合函数求导公式	474
20.3 微分形式不变性与微分公式	477
20.4 方向导数与梯度	484
20.5 综合题	487
第 21 章 多元微分学的应用	501
21.1 引言	501
21.2 空间曲线的切线与法平面, 空间曲面的 切平面与法线	501
21.3 多元泰勒公式	507
21.4 多元函数极值问题	512
21.5 综合例题	521
第 22 章 重积分概念与计算	536
22.1 引言	536
22.2 重积分的概念与性质	536
22.3 二重积分的计算	540
22.4 三重积分的计算	551
22.5 重积分的应用	557
22.6 综合例题	560
第 23 章 第一、二型曲线积分	578
23.1 引言	578
23.2 曲线积分的概念	578
23.3 格林公式	585
23.4 平面积分与路径无关的条件	589

23.5	综合例题	598
第 24 章	第一、二型曲面积分	616
24.1	引言	616
24.2	曲面积分的概念与计算	616
24.3	高斯公式与斯托克斯公式	629
24.4	梯度、散度、旋度与有势场	635
24.5	综合例题	644
附录 1	清华大学微积分试题与答案	657
附录 2	常用初等函数的导数公式	673
附录 3	常用初等函数的积分公式	674

第1章 预备知识

1.1 引言

本章内容属于学好数学课程的基础与工具,帮助和引导读者掌握常用的数学工具,如基本不等式及其变形、函数的初等性质及其应用等.这些内容也许不会单独出现在一个习题中,但它是培养和积累方法、技巧的起点,在处理某类数学问题中常常成为思路的诱发点,在某些综合性习题中也常常成为解题成功与失败的关键.

另外,本章介绍的点集概念是学好极限及其相关概念的思维基础,掌握好这些基础会使我们对极限这一数学的核心问题的认识上升到较高的台阶,对掌握好大学数学课程有着不可低估的作用.

1.2 基本不等式

下述4类不等式是分析与处理数学问题的重要和常用工具:

(1) 绝对值不等式 对任意实数 x 均有不等式

$$0 \leq |x| + x \leq 2|x|. \quad (1.1)$$

(2) 三角不等式(三点不等式) 对任意实数 x 与 y , 成立不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (1.2)$$

$$|x - y| \leq \left| |x| - |y| \right|. \quad (1.3)$$

【注】 x, y 可以是 \mathbf{R}^n 上的向量,这时须把绝对值记号换为向量范

数记号 \cdot ; 不等式(1.3)中若已知 $|x|$ 与 $|y|$ 有大小比较关系, 其右端的外层绝对值号可以脱掉, 请读者写出它的两种表达形式.

(3) 平均值不等式 对任意实数 x, y 均有不等式

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \geq xy. \quad (1.4)$$

若 $x > 0$ 且 $y > 0$, 则有

$$\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}. \quad (1.5)$$

【注】 以上不等式(1.4)或(1.5)均可扩展到有限个实数或正数的情况. 不等式(1.5)左侧称为算术平均值, 右侧称为几何平均值.

(4) 对任意实数 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 成立不等式

$$\sin x \leq x \leq \tan x. \quad (1.6)$$

以上等号仅在 $x = 0$ 时成立.

1.3 基本不等式应用技巧

首先, 对这些基本不等式要有意识地应用, 在许多场合下, 如极限分析、估计上下界、级数的比较准则、积分估计、广义积分收敛性等, 意识到应用这些不等式可能会使问题迎刃而解. 其次, 我们要强调, 这些不等式在应用中往往要变形, 比如任意实数 x 和 y , 可以换成 $\sin x$ 和 $\sin y$ 或其他任意取实值的变量与函数表达式.

例 1.3.1 对任意实数 x 和 y , $|\sin x + \cos(x + y)| \leq |\sin x| + |\cos(x + y)|$.

例 1.3.2 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin(\sin x) < \sin x$.

【解】 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < \sin x < \frac{\pi}{2}$, 由不等式(1.6)便有

$\sin(\sin x) < \sin x$.

【解毕】

例 1 3 3 设 $a_n \in \mathbf{R} (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$, 若 $\{S_n^*\}$ 有极限, 证明 $\{S_n\}$ 必有极限.

【思路】 试用绝对值不等式及单调有界极限准则.

【证】 由于 $0 \leq |a_k| + a_k \leq 2|a_k| (k = 1, 2, \dots)$, 因此有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (|a_k| + a_k) \leq 2 \sum_{k=1}^n |a_k| = 2S_n^* .$$

记 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n (|a_k| + a_k)$, 由已知条件 $\lim S_n^*$ 存在, 则 S_n^* 有界, 即 $\forall N$ 及 $M > 0$, 使 $n > N$ 时, $S_n^* < M$, 于是有 $\sigma_n < 2S_n^* < 2M$ (有界), 又 $|a_k| + a_k \geq 0$, 所以 $\{\sigma_n\}$ 单调增加, 由极限存在准则得 $\lim \sigma_n$ 存在, 但

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k + |a_k| - |a_k|) = \sigma_n - S_n^* ,$$

由极限运算法则, 有限个有极限的序列的和与差或线性组合而成的新序列亦有极限, 最后得到 $\lim S_n$ 存在. **【证毕】**

【技巧】 在绝对值不等式的诱发下, 使用了加一项减一项的方法, 这是数学中的常用技巧.

【寓意】 本题实质是级数中的“任意项级数若绝对收敛, 则必收敛”命题的证明. 该命题以极限形式出现, 其寓意是要我们利用极限存在的准则来证明极限存在. 考点: 单调有界序列必有极限, 同时考查对不等式的应用能力与技巧.

例 1 3 4 设 $a_1 = a > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{a}{a_n}$, 证明 $\lim a_n$ 存在, 并求此极限值.

(1995—1996 年作者在清华大学教学用题, 1997 年考研题)

【思路】 本题未给出序列具体表达式, 只有抽象的递推公式, 一般考虑极限存在准则, 试验单调有界序列必有极限, 递推式以和的形

式出现,酷似算术平均值,联想到试验平均值不等式.

【证】 由平均值不等式可知

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a_n \cdot \frac{a_1}{a_n} = a > 1 \quad (\text{有下界}),$$

即有 $a_n > a (n = 1, 2, \dots)$. 考虑到已知递推式, 则可有 a_{n+1}

$$\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a_1^2}{a_n} \right) = a_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

即知 $\{a_n\}$ 单调减且有下界, 故 $\lim_n a_n$

存在. 记 $\lim_n a_n = A$, 由极限的唯一性, 在递推式中令 $n \rightarrow \infty$ 则有

$$A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{a_1^2}{A} \right),$$

解方程得到 $\lim_n a_n = A = a$ (舍去一个不合理的根).

的根).

【证毕】

【技巧】 熟练应用平均值不等式.

【寓意】 考查极限的存在准则及不等式的应用.

1.4 不等式思想

利用不等式处理问题是数学中的重要手段之一,也是常用技巧.一般来讲,运用不等式的目的或作用有以下几类:

最常见的情况是估计某数学量或表达式的界.这需要综合考虑基本不等式的类型及各类初等函数的性质,适当放大某一对象(量或表达式),常运用加一项减一项,或分子分母同乘、同除某一因子等这些小技巧.

应该特别指出的一类情况是,不等式可用来证明某一数学量或表达式等于零.这时又可分为两类方法:

作为第一类方法,我们给出以下命题:

设有表达式或数学量 A , 若对任意 $\epsilon > 0$, 均有 $|A| < \epsilon$, 则必有 $A = 0$.

这一命题很容易用反证法给出证明,请读者思考.进一步,这

命题可用来证明两个数学表达式相等, 比如 $A = B$, 只须证明 $A - B = 0$, 令 $C = A - B$, 证明 $C = 0$ 即可.

作为第二类方法, 是根据实数比较公理, 两个实数在“大于”、“小于”、“等于”三者比较关系中只能是其中之一. 于是, 欲证明 $A = 0$, 则可反设 $A > 0$ 或 $A < 0$, 得出矛盾, 最后只有 $A = 0$ 成立.

在以后章节的若干例题中, 请读者注意这方面的方法与技巧.

1.5 邻域与点集

1. 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, 称点集

$$N(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为 x_0 的 δ -邻域(一维), 而称点集

$$N^*(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

为 x_0 的去心邻域(一维).

对多维情况, 例如平面, 三维空间或 n 维空间 \mathbf{R}^n , 规定 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 的邻域与去心邻域分别为

$$N(\mathbf{x}_0, \delta) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{x}) < \delta^2\},$$

$$N^*(\mathbf{x}_0, \delta) = \{\mathbf{x} \mid 0 < (\mathbf{x}, \mathbf{x}) < \delta^2\},$$

其中 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2$ 称为 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ 之间的距离, (\mathbf{x}, \mathbf{x}) 满足:

(1) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 时 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$;

(2) $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$;

(3) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ 成立不等式

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

这里 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 表示向量或 \mathbf{R}^n 上的点, x_i, y_i, z_i 分别为它们的分量.

2. 点集

本节就一维情况,介绍点集的几个概念与名词.所有概念均可推广到多维空间情况.

(1) 内点: 设 x_0 为点集 E 的一个点,若存在 $N(x_0, \delta) \subset E$, 则称 x_0 为 E 的一个内点.

(2) 聚点: 设 x_0 为一个点(可以属于 E , 也可不属于 E), 若 x_0 的任何去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$ 内都至少有一个点 $x \in E$, 则称 x_0 为 E 的一个聚点.

例 1.5.1 取 $E = \{x \mid x \in (0, 1)\}$, 则 $x_0 = 0.1$ 或 0.001 都是 E 的内点;

取 $E_1 = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 聚点为 0 , 但 $0 \notin E$;

取 $E_2 = \left\{ 0, \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 聚点为 0 , 而 $0 \in E$;

取 $E = [0, 1]$, E 的内点为 $(0, 1)$ 内的全部点, 这些点亦都是 E 的聚点, 但 E 的聚点还有 0 和 1 . 【解毕】

(3) 孤立点: 设 E 为点集, $x_0 \in E$, 但 x_0 不是 E 的聚点, 则称 x_0 为 E 的一个孤立点.

例 1.5.2 设 $E = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 则每个点均为 E 的孤立点.

【解毕】

例 1.5.3 设 $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$, 考虑 $f(x)$ 没有定义的点构成的点集 E , 即 $E = \{x \mid \sin x = 1\} = \left\{ 2k + \frac{\pi}{2} \mid k = \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$, 则 E 的每个点均为孤立点.

例 1.5.4 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{1 - \sin \frac{1}{x}}$ 没有定义的点构成的点集

$E = \{x \mid x = 0 \text{ 或 } \frac{1}{2k + 1/2}, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $x = 0$ 为 E 的聚点, 其余点均为孤立点, 即 $x = 0$ 不为 E 的孤立点. 事实上, $x = 0$ 的任意邻域内均有 E 的点(密集的点). **【解毕】**

(4) 界点与边界: 若 x_0 的任意去心邻域内既有 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称 x_0 为 E 的界点, 全体界点构成的点集称为 E 的边界.

(5) 开集与闭集: 若 E 的每一个点均为它的内点, 则称 E 为开集; 若 E 的一切聚点均属于 E , 则称 E 为闭集.

例 1.5.5 $E_1 = (0, 1)$ 为开集, $E_2 = [0, 1]$ 为闭集, E_1 与 E_2 有相同的界点, 均为 0 和 1. **【解毕】**

例 1.5.6 $E = \{x = \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ 的界点(亦为聚点)只有一个点 $x = 0$, 但 $x = 0$ 不属于 E , 故 E 为开集. **【解毕】**

1.6 实数点集的有界性与公理

1. 上界与下界

设 E 为实数点集, 若对任意 $x \in E, \forall M \in \mathbf{R}$ 使 $x < M$, 则称 M 为 E 的上界; $\forall m \in \mathbf{R}$, 使 $x > m$ 时, 称 m 为 E 的下界.

一般有界性的描述可以是如下命题:

对任意实数 $x \in E$, 若 $\forall M > 0$, 使 $|x| < M$, 则称 E 有界, 界为 M . 事实有 $-M < x < M$.

【注】 提请读者特别注意, 在序列和函数的有界性描述中有各种“趋向”的前提, 方式很多, 但这里讲的点集有界性描述是基础.

2. 上确界与下确界

有界集有无穷多个上界, 其中有一个最为重要, 即最小的上界, 称为上确界; 最大的下界称为下确界. E 的上确界与下确界分

别记为 $\sup E$ 和 $\inf E$.

我们给出上确界 $\sup E$ 的一个等价性描述如下:

设 M 为 E 的一个上界(即对任意 $x \in E$, 有 $x \leq M$), 若对任意 $\epsilon > 0, \forall x_0 \in E$, 使得 $x_0 > M - \epsilon$, 则称 M 为 E 的上确界 .

读者不难给出 E 的下确界 $\inf E$ 的等价性描述 .

【注】 数学中的等价性描述是至关重要的, 一个概念的等价性描述, 很可能成为处理某一问题的思路, 为你打开一道思维的阀门 .

数学家对实数集合的研究走过了一个漫长的道路, 最终形成若干重要的公理, 这些公理至今都是讨论和研究数学问题的共同基点, 或叫做共识 . 其中有一条公理对我们学好数学是至关重要的, 即如下命题:

非空集合 E 若有上界, 则必有上确界; 若有下界, 则必有下确界 .

1.7 函数及其初等性质

掌握初等函数的初等性质是重要的, 也是基本的 . 在一个复杂问题中, 应力图避免由于函数的初等性质或概念模糊而造成的失误, 这样的失误往往是惨重的, 而其中的模糊与疏忽又是可以避免的, 这里的关键就是对初等函数的表达及性质的表述应做到准确熟练 . 函数的初等性质包括下列内容 .

1. 单调性

对任意两点 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $y_1, y_2 \in Y$ 满足 $y_1 \leq y_2$, 其中 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在 X 上单调增加(非严格); 若上述不等式中的等号取消, 则称 $y = f(x)$ 在 X 上严格单调 . 又若上述两个不等式中后一不等式取反号, 则称 $y = f(x)$ 单调减少 .

【判断方法】 对 $x_1 < x_2$, 判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号——用减法;

或用除法,考查比值 $f(x_1)/f(x_2)$ (假设 $f(x_2) \neq 0$, 且 $f(x)$ 在 X 上取定号(恒为正或恒为负)). 当然,作为解析方法,由导函数的正负号判断函数增减性也是有效的方法. 典型例题请参见第6章内容.

例 1.7.1 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 试判断两组函数的大小关系:

(1) $\sin(\sin x)$ 与 $\sin x$; (2) $\cos(\sin x)$ 与 $\cos x$.

【解】 (1) 由 $\sin x < x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内为增函数, 因此有 $\sin(\sin x) < \sin x$.

另外,例 1.3.2 的处理方法更为直接,那里的方法及理论根据与这里单调性的方法理论根据不一样,但可得到本题结论.

(2) 考虑到 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内为减函数, 因此由 $\sin x < x$, 立即得知 $\cos(\sin x) > \cos x$. **【解毕】**

2. 周期性

对任意实数 $x \in X$, 若 $\forall T_i > 0$, 使得 $f(x + T_i) = f(x)$, 则函数 $y = f(x)$ 在定义域 X 上具有周期性. 最小周期记为 $T = \min \{T_i \mid i = 1, 2, \dots\}$.

3. 奇偶性与广义奇偶性

对任意 $x \in X$, X 为 $(-a, a)$ ($a > 0$) 或 $(-\infty, +\infty)$, 若 $f(-x) = f(x)$, 则 $y = f(x)$ 称为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$ 则 $y = f(x)$ 称为奇函数.

事实上,偶函数有对称轴 $x=0$, 而奇函数有对称点 $(0,0)$. 奇偶性有如下重要推广:

(1) 若 $y = f(x)$ 的图形以 $x = a$ 为对称轴, 则必有

$$f(a-x) = f(a+x). \quad (1.7)$$

【注】 这里的等式可理解为: a 为固定点, x 为一个实参数. 不妨先将 x 视为正数, 将 $f(\cdot)$ 的自变量在 $x = a$ 处向左右各平移 x ,

所得两点处函数值相等,而后,若 $x < 0$,上述结论也成立.

若在(1.7)式中令 $t = a - x$,则又可得到

$$f(t) = f(2a - t),$$

或记为(函数自变量记号可根据需要来更换)

$$f(x) = f(2a - x). \quad (1.8)$$

若令 $(x) = f(a - x)$,则立即可知 (x) 为偶函数.(1.8)式亦可从坐标点的关系直接得出.由于 $y = f(x)$ 图形关于 $x = a$ 对称,对 x 轴上任意点 $x < a$,与之对称的点为 $x + 2(a - x) = 2a - x$,故此得出(1.8)式成立.

(2) 若 $y = f(x)$ 图形以 $(a, 0)$ 为对称点,则必有

$$f(a - x) = -f(a + x). \quad (1.9)$$

类似上面(1)的分析可得到

$$f(x) = -f(2a - x). \quad (1.10)$$

若令 $(x) = f(a - x)$,则 (x) 为奇函数.

4. 有界性

掌握函数的有界性描述是重要的.关于有界性的描述有以下3种基本情况:

(1) 在区间上有界 设 $y = f(x)$,若对任意 $x \in X$,均存在 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.这里的 X 可以是开区间 (a, b) 或闭区间 $[a, b]$,或其他形式的点集.

(2) 在 x_0 附近有限(或 $x \rightarrow x_0$ 时有界) 设 $y = f(x)$,若存在 x_0 的一个邻域 $N^* = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$,对任意 $x \in N^*$ 均存在 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 x_0 附近有限.

(3) $x \rightarrow +\infty$ 时有界 设 $y = f(x)$,若存在 $x_1 > 0$,当 $|x| > x_1$ 时,恒有常数 $M > 0$,使满足 $|f(x)| \leq M$,则称 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 有界.(类似可有 $x \rightarrow -\infty$ 时有界的描述.读者不难给出这两种情况下有界的描述,并且可以给出无界的描述.)

5. 反函数与复合函数

在函数性态的研究中,经常会遇到反函数与复合函数的概念,这里我们强调容易忽略但却很重要的知识点.

函数 $y = f(x)$ 存在反函数的条件是单值单调(这里为严格单调),反函数记为 $x = f^{-1}(y)$,且与 $y = f(x)$ 互为反函数,它们的图形关于直线 $y = x$ 为对称. $y = f(x)$ 的反函数有时又记为 $y = f^{-1}(x)$.互为反函数的两个函数,其定义域与值域具有对偶性.

【注】 上面的两种反函数记号在不同场合下都会用到,前者变量记号没有换,而后者则换了变量记号,在使用中应特别注意,在特定场合下,要意识到有没有或需不需要换记号(可参见后面导数计算内容的一个例题).

设 $X, Y, U \in \mathbf{R}$, 复合函数的关系是:

$$f: U \rightarrow Y, \text{ 即 } y = f(u),$$

$$g: X \rightarrow U, \text{ 即 } u = g(x).$$

则 $y = f(g(x))$ 为 x 的复合函数.

一般讲, $u = g(x)$ 的值域为 $y = f(u)$ 定义域的一个子集,只有在特定情形下, $u = g(x)$ 的值域恰为 $y = f(u)$ 的定义域.

例 1.7.2 考查复合函数的定义域及值域, $y = \sin u^2$, 其中 $u = \sqrt{x}$.

【解】 对函数 $y = f(u) = \sin u^2$, 其定义域为 $-\infty < u < +\infty$, 值域为 $-1 \leq y \leq 1$; 对函数 $u = \sqrt{x}$ 有 $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq u < +\infty$, 可见 $u = g(x) = \sqrt{x}$ 的值域 $[0, +\infty)$ 为 $y = f(u) = \sin u^2$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一个子集. **【解毕】**

综例 1.7.1 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{1}{2} (x), & x \geq 0, \\ -\sin x + \frac{1}{2} (x), & x < 0. \end{cases}$$

其中 $(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ -1, & x < 1. \end{cases}$

求 $f(x)$ 表达式 .

【解】 考虑 (x) 表达式由两段给出, 在 $f(x)$ 的表达式中, 当 $x \geq 0$ 时, 所含 (x) 须分为两段, 即 $x \geq 1$ 和 $0 \leq x < 1$, 而当 $x < 0$ 时, 自然有 $x < 1$, 对所含 (x) , 只有一种情况即可表示出来 . 最后得到 $f(x)$ 表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & x \geq 1, \\ \sin x - 1, & 0 \leq x < 1, \\ -\sin x - \frac{1}{2}, & x < 0. \end{cases} \quad \text{【解毕】}$$

综例 1.7.2 设 $f(x)$ 与 (x) 均为 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义的函数, $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $f(x) \neq 0$, $y = (x)$ 有间断点, 则下列选项中正确者为().

- (A) $f((x))$ 有间断点; (B) $(f(x))$ 有间断点;
 (C) $[(x)]^2$ 有间断点; (D) $\frac{(x)}{f(x)}$ 有间断点 .

【解】 正确的选项只有(D) .

对(B), 本题中 $y = f(x)$ 值域未知, (x) 有间断点, 该间断点未必是 $f(x)$ 值域中的点 . 故 $(f(x))$ 未必有间断点 . $y = f(x)$ 连续且 $f(x) \neq 0$, $\frac{(x)}{f(x)}$ 必有间断点, 该间断点即为 (x) 的间断点 .

对(A), 复合函数 $f((x))$ 可将 $y = (x)$ 的间断点易为连续点, 故未必仍有间断点 . 例如取

$$(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases} \text{ 和 } f(x) = x^2,$$

则有 $f((x)) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 不再有间断点 .

对(C), $[(x)]^2$ 只是 $f((x))$ 复合运算的一种特例, 即 $f(u) = u^2, u = (x)$. 因此(A)不正确已经蕴含着(C)亦不正确, 仍可以上例说明 .

【解毕】

【寓意】 本题考查函数的定义域与值域, 以及复合函数运算可能

引起函数定义域与值域的变化.

综例 1.7.3 已知 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 求 $f(x)$ 表达式.

【解】 (方法 1)

【思路】 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 的线性组合为 x^2 , 则 $f(x)$ 只能是多项式函数, 且最高次数为二次.

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 由已知等式可得

$$2(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2.$$

由比较两端同次幂系数解出: $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. 最后得到

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

(方法 2)

【思路】 欲求 $f(x)$ 表达式, 若还能得出 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 的一个等式, 则可解出 $f(x)$.

令 $1-x = t$ (变数替换), 则 $x = 1-t$. 由已知等式则有 $2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2$, 或改写为

$$2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2.$$

将上述等式与已知等式联立消去 $f(1-x)$, 即可解出 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. **【解毕】**

【技巧】 函数 $y = f(x)$ 中的自变量 x 只是一个人为的记号, 根据需要, 可随时更换为其他记号, 这也是理解函数概念的一个重要方面. 上面(方法 2)中将 t 的一个等式改写为关于 x 的等式, 便是这一技巧的体现.

综例 1.7.4 已知 $f(x+1) = x^2 + 1$, 求 $f(x)$.

【解】 (方法 1)

由已知表达式对右端配成 $(x+1)$ 的方幂形式则有

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2.$$

于是立即有 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (这里又换自变量记号, 实际上是取

$t = x + 1$ 替换) .

(方法 2)

令 $t = x + 1$, 则 $x = t - 1$, 得到

$$f(t) = (t - 1)^2 + 1 = t^2 - 2t + 2,$$

即有

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

【解毕】

综例 1.7.5 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为奇函数, 已知 $f(1) = a$, 对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$.

(1) 求 $f(5)$;

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T=2$ 为周期, 求常数 a .

【思路】 求 $f(5)$, 则应力图利用已知条件凑出 $f(5)$. 已知等式表达了线性运算关系.

【解】 (1) 对已知等式令 $x = -1$, 则有

$$f(1) = f(-1) + f(2).$$

又因为 $y = f(x)$ 为奇函数, 因此 $f(2) = 2f(1) = 2a$.

再令 $x = 3$, 则有 $f(5) = f(3) + f(2)$.

至于 $f(3) = ?$ 可通过令 $x = 1$, 知道 $f(3) = f(1) + f(2) = 3a$. 最后得到 $f(5) = 5a$.

(2) 若 $y = f(x)$ 以 $T=2$ 为周期, 则应有

$$f(x+2) = f(x) + f(2) = f(x).$$

因为 $f(2) = 0$, 即解出 $a = 0$.

【解毕】

【寓意】 本题考查函数奇偶性, 周期性等初等性质.

综例 1.7.6 若函数 $y = f(x)$ 的图形有对称轴 $x = a$ 及 $x = b$ ($b > a$), 试证 $y = f(x)$ 为周期函数, 并求出周期 T .

【思路】 凡 $y = f(x)$ 的对称轴问题或对称中心问题, 应注意到函数的广义奇偶性.

【解】 由于 $y = f(x)$ 的图形以 $x = a$ 及 $x = b$ 为对称轴, 于是有

$$f(a - x) = f(a + x), f(b - x) = f(b + x).$$

进而有 $f(x) = f(2a - x)$ 且 $f(x) = f(2b - x)$, 因此

$$f(2a - x) = f(2b - x).$$

令 $t = 2a - x$, 则 $x = 2a - t$, 便得到

$$f(t) = f(t - 2a + 2b) = f(t + 2(b - a)).$$

根据周期函数定义, $y = f(x)$ 有周期 $T = 2(b - a) > 0$. **【解毕】**

【注】 周期应为正数, 本题若没有 $b > a$ 的条件, 则周期 $T = 2|b - a|$.

【寓意】 本题考查函数的奇偶性、变数替换及函数关系等概念.

综例 1.7.7 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且周期 $T = 1$, 若对任意不同的两点 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 满足不等式 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$. 试证明对任意两点 $x, x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 存在不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$.

【思路】 按周期为 $T = 1$ 的条件, 只须证明 $[0, 1]$ 上的任意两点 x_1, x_2 满足 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ 即可.

【技巧】 1° 正确使用周期函数的平移性质; 2° 意识到应用基本不等式; 3° 将复杂问题分解为几个简单问题, 即下述解法中首先考虑到当 $|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}$ 的情况, 其次再考虑 $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}$ 的情况.

【证】 首先, 对任意 $x, x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 由周期性必有 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 与之对应, 即有

$$x = k_1 + x_1, x_0 = k_2 + x_2, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为整数.}$$

使得 $f(x) = f(x_1), f(x_0) = f(x_2)$, 由此, 只须对 x_1, x_2 证明要证的不等式即可.

若 $|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}$, 则由已知不等式, 显然已经有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}.$$

当 $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}$ 时, 不失一般性, 可假设 $x_2 > x_1$. 因为周期为

1, 则 $f(0) = f(1)$, 因此

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(x_1) - f(0) + f(1) - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(1)| \\ &< |x_1 - 0| + |x_2 - 1|. \end{aligned}$$

考虑到 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 所以

$$|x_2 - 1| + |x_1| = x_1 + 1 - x_2 = 1 - (x_2 - x_1) < \frac{1}{2}.$$

对前面已得不等式右端两项分别应用已知不等式进行放大, 便得到

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &< |x_1 - 0| + |x_2 - 1| \\ &= |x_1| + |1 - x_2| < \frac{1}{2}. \quad \text{【证毕】} \end{aligned}$$

【寓意】 本题考查基本不等式的应用技巧, 同时注意到周期的概念.

第2章 序列极限

2.1 引言

极限的思想、概念与方法与分析数学问题的基本工具和语言。序列极限与函数极限固然都是重要的基础,但相对而言,前者则是训练和培养极限思维模式的基础。对序列极限的有关概念与方法,站到较高台阶上去思考,将有助于全部微积分内容的学习。

本章重点是极限定义与其等价性描述,极限的性质及运算,以及若干重要结论构成的知识层次。

2.2 极限定义及其等价性描述

1. 定义(有限极限,无穷大量与无穷小量)

考虑序列 $\{a_n\}$, 对任意(任意大的正数) $M > 0$, 若 $\forall N$ 使当 $n > N$ 时恒有 $|a_n| > M$, 则称 a_n 为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷大量, 常记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 。

【注】 无穷大量与无界序列有本质不同。 $\{a_n\}$ 无界 ($n \rightarrow \infty$) 是指: 对任意大的 $M > 0$, $\forall N_0$, 使得 $|a_{N_0}| > M$ 。

若对任意的 $\epsilon > 0$, $\forall N$ 及常数 A , 使当 $n > N$ 时恒有 $|a_n - A| < \epsilon$, 则称 a_n 的极限为 A ($n \rightarrow \infty$)。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。

【注】 1° 上述 $A = 0$ 时, 称 $\{a_n\}$ 为无穷小量 ($n \rightarrow \infty$)。

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 不是一个一般的等式, 它有两重含义: (1) 首先是极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 其次才是极限值等于 A 。当一个序列极限

存在性没有结论时,谈不上极限值是什么,这一点在处理实际问题时尤为重要.

3°若 $\{a_n\}$ 是无穷大量,则 $\frac{1}{a_n}$ ($a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$)必为无穷小量.

4°在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 的定义中应注意到,若将 $\{a_n\}$ 视为点集(序列可视为点集,但点集却不一定是序列),则对任意自然数 n ,相应于 $\{a_n\}$ 中满足 $|a_n - A| < \frac{1}{n}$ 的点必然是无穷多个,而满足 $|a_n - A| \geq \frac{1}{n}$ 的点一定是有限个.

2. 极限定义的等价性描述

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 的等价性描述可以是:

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n = A + \alpha(n)$,其中 $\alpha(n)$ 为无穷小量($\alpha(n) \rightarrow 0$).这从极限运算法则可以直接看出.显然,上述等号右侧仍为一个序列,其极限存在,并且其极限值为 A .

作为对极限本质的理解,选做几个用极限定义验证极限存在的例子是有益处的.

例 2 2 1 用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2} = \frac{2}{3}$.

【证】 $\epsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{2n^2 + 1}{3n^2} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$, 即 $\frac{1}{3n^2} < \epsilon$, 只要取 $N = \frac{1}{3\epsilon}$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $\left| \frac{2n^2 + 1}{3n^2} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$ 成立. **【证毕】**

例 2 2 2 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$ ($a > 1$).

【证】 $\epsilon > 0$, $|a^n - 1| = a^n - 1$, 只须令 $a^n - 1 < \epsilon$, 即 $a < (1 + \frac{\epsilon}{n})^n$, 为取到满足要求的 N , 利用牛顿二项展开式, 有

$$(1 + \frac{\epsilon}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{\epsilon}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\epsilon}{n}\right)^2 + \dots + \epsilon^n > 1 + n \cdot \frac{\epsilon}{n},$$

因此只须 $a < 1 + \epsilon < (1 + \frac{\epsilon}{n})^n$, 由左侧不等式可知, 取 $N = \frac{\epsilon}{a-1}$

$\frac{a-1}{n} > 0$, 则 $n > N$ 时, $|\frac{a^n}{n} - 1| < \frac{1}{n}$. 因此极限 $\lim_n \frac{a^n}{n}$ 存在且等于 1. 【证毕】

【注】 当 $0 < a < 1$ 时, 也有 $\lim_n \frac{a^n}{n} = 1$, 请读者思考其证明.

例 2 2 3 设 $a > 1$, k 为正整数, 试证 $\lim_n \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.

【思路】 $\forall M > 0$, 寻找 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时, $\frac{a^n}{n^k} > M$.

【证】 由于 $a > 1$, 记 $\alpha = a - 1$, 则 $\alpha > 0$.

首先由二项展开式可有

$$\begin{aligned} a^n &= (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\alpha^k > \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 > \frac{\alpha^2 n^2}{4}, \end{aligned}$$

此处限定 $n > 2$, 则有 $n-1 > \frac{n}{2}$. 以下分两步讨论:

(1) 若 $k=1$, 则 $\frac{a^n}{n^k} = \frac{a^n}{n} > \frac{\alpha^2}{4}n$, 令 $\frac{\alpha^2}{4}n > M$, 则 $\forall N = \frac{4M}{\alpha^2}$, 当 $n > N$ 时, $\frac{a^n}{n} > M$.

(2) 若 $k > 1$, 取 $M_1 = 1$, 即 $M_1 = \max\{1, M\}$, 这里 M 为 (1) 中的 M . 按 (1) 的结论, 由 $\frac{a^n}{n^k} > 1$, 将 $\frac{a^n}{n^k}$ 视为 (1) 中的 a . 则 $\forall N$, 使 $n > N$ 时 $\frac{a^n}{n^k} > M_1$, 因此有 $\frac{a^n}{n^k} > M_1^k = M_1 M$, 即 $\frac{a^n}{n^k} > M$.

【证毕】

【技巧】 将复杂的问题分解为简单的子问题, 简单问题得出结论后, 将“复杂”问题移植到简单问题的台阶上去, 即构造出已有结论的条件, 使问题得以解决, 这是常用方法之一.

例 2 2 4 证明 $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

【证】 $\forall \epsilon > 0$, 记 $h_n = \frac{1}{n} - 0$, 限定 $n > 2$, 则 $h_n > 0$, 于是有

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \dots + C_n^n h_n^n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 .$$

另外,注意到 $n > 2$ 时, $n - 1 > \frac{n}{2}$, 因此由上述不等式即有 $n > \frac{n^2}{4} h_n^2$, 即有 $h_n < \frac{2}{n}$. 只须令 $\frac{2}{n} < \frac{1}{2}$, 取 $N = \frac{4}{2}$, 则当 $n > N$ 时 $h_n <$

, 由极限定义, 上述证明已经得到 $\lim_n n = 1$. 【证毕】

【技巧】 上述两例证明中均引入了新的记号, 如 h_n 等. 适当引用记号有助于问题的表达与解决.

2.3 极限、聚点与子列

本节所列内容是强化极限概念的理论基础, 理解并消化这些内容, 会使我们对极限问题的认识上升一个台阶, 这对学好微积分是重要的.

我们以结论形式(不加证明)给出如下命题, 以后可以直接引用.

1. 聚点等价性描述

a_0 是点集 E 之聚点的充要条件是: E 中有一串互不相同的点 a_1, a_2, \dots 构成点列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim_n a_n = a_0$ (a_n 有极限, 此极限值为 E 之聚点 a_0 . 显然, a_0 可以是 E 的点, 也可以不是 E 的点).

2. 聚点准则 (Weierstrass 准则)

无穷有界点集 E 必有聚点.

【注】 首先, 点集可以是点列, 但点集并不等价于点列, 例如点集 $E = \{x \mid x \in (0, 1)\}$ 就不是点列. 另外, 点列一定可以看作点集. $\{a_n = 1 \mid n = 1, 2, \dots\}$ 是点列, 但作为点集, 它不是无穷点集, 因为这一

点集为 $\{1\}$ 只有一个点,是有限集,事实上,这一点集没有聚点.作为无穷有界点集,必然包含无穷多个不同的点.

3. 无穷有界点列必有收敛的子列

【注】 首先,某点列 $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 的子列是指由 a_{n_k} ($k = 1, 2, \dots$)构成一个新的点列,而每一个 a_{n_k} 都取自 $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. $\{a_{n_k} \mid k = 1, 2, \dots\}$ 称为前者的子列.显然,子列可以是原来的点列.例如无穷有界点列 $\{a_n = 1 \mid n = 1, 2, \dots\}$ 收敛的子列即是 $\{a_n\}$ 本身, $\lim_n a_n = 1$.无穷有界点列 $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 若是由互不相同的数构成,则可进一步有如下的结论.

4. 无穷有界序列收敛的充要条件

若 $\{a_n\}$ 是由互不相同的数构成的无穷有界点列,则 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\{a_n\}$ 作为点集,其聚点唯一.

【注】 上述命题也可理解为点集 E 聚点唯一的充要条件.事实上,若对互不相同的数构成的无穷有界点列 $\{a_n\}$ 有 $\lim_n a_n = a$,则 a 必为点集 $\{a_n\}$ 的聚点,并且是唯一聚点.上述结论还蕴含着极限的唯一性.

上述四个结论将有助于从序列极限的概念过渡转向函数极限的概念.

2.4 极限性质

1. 一般运算性质

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 有极限,且 $\lim_n a_n = a, \lim_n b_n = b$,则

$$1^\circ \text{对任意常数 } c, \lim_n ca_n = ca;$$

$$2^\circ \lim_n (a_n \pm b_n) = a \pm b;$$

$$3^\circ \lim_n (a_n b_n) = ab;$$

$$4^\circ \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n \neq 0 \text{ 且 } b \neq 0).$$

当 $\lim_n a_n$ 与 $\lim_n b_n$ 不存在时, 上述 $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ 性质中没有确定的结论. 如取 $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{n} + (-1)^{n-1}$, 则 $a_n + b_n$ 的极限存在, 且为 0, 但 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均没有极限. 这种特殊情况, 应引起注意.

2. 极限的解析性质

1° 比较性质(保序性) 若收敛的序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足关系 $x_n \leq y_n (n > N)$, 则 $\lim_n x_n \leq \lim_n y_n$.

【注】 由这一性质还可得到, 若 $\forall N$, 使 $n > N$ 时 $a_n > 0$, 则必有 $\lim_n a_n \geq 0$. 只须取 $a_n = y_n - x_n$ 即可.

2° 若 $\lim_n a_n = a > 0$, 则 $\forall N$, 使当 $n > N$ 时有 $a_n > 0$.

3° 有界性 若 $\{a_n\}$ 有极限, 则 $\{a_n\}$ 有界.

4° 唯一性 若 $\lim_n a_n$ 存在, 则 $\{a_n\}$ 的极限唯一.

例 2.4.1 证明上述解析性质 4° .

【证】 对极限的唯一性, 可以从 2.3 节中的聚点唯一性去理解, 这里作为习题, 给出如下证明.

【思路】 反证, 设有两个不同的数均为 $\{a_n\}$ 的极限, 导出矛盾.

设 $\lim_n a_n = A$, 又有 $\lim_n a_n = B \neq A$, 不妨假设 $A < B$, 对

$\frac{B-A}{2} > 0, \forall N_1$, 使 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - A| < \frac{B-A}{2}$, 即有

$$A - \frac{B-A}{2} < a_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}. \quad (1)$$

另外, 由 $\lim_n a_n = B$, 又 $\forall N_2$, 使当 $n > N_2$ 时, 有 $|a_n - B| < \frac{B-A}{2}$, 即有

$\frac{B-A}{2}$, 即有

$$B - \frac{B-A}{2} < a_n < B + \frac{B-A}{2}. \quad (2)$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 由(1)式有 $a_n < \frac{A+B}{2}$, 由(2)式又有 $a_n > \frac{A+B}{2}$, 矛盾. 【证毕】

2.5 极限存在的4个准则

(1) 夹逼准则 若 $\lim_n x_n = \lim_n y_n = A$, 对 $\{z_n\}$ 且 $\forall N$, 使当 $n > N$ 时, 有 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 则 z_n 有极限, 且 $\lim_n z_n = A$.

(2) 单调有界准则 设 $\{x_n\}$ 单调增有上界, 即 $\forall N$ 及 $M > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $x_n < M$, 当 $N_2 > N_1 > N$ 时, $x_{N_2} \leq x_{N_1}$, 则 $\{x_n\}$ 有极限; 或 $\{x_n\}$ 单调减有下界, 也必有极限.

【注】 在上述性质中, $\{x_n\}$ 有极限, 其极限值 x_0 必为 $\{x_n\}$ 的上确界或下确界.

(3) 无穷小量与有界序列乘积准则 设 $\lim_n x_n = 0$, 序列 $\{y_n\}$ 有界, 则 $\{x_n y_n\}$ 有极限, 且 $\lim_n x_n y_n = 0$.

【注】 这是容易忽略的一个准则, 但常常会显得很重要. 在其他准则均无效时, 这一准则很可能成为解决问题的捷径.

(4) 柯西收敛准则 $\{x_n\}$ 收敛(有极限)的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \forall N$, 使当 $n > m > N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \epsilon$.

【注】 柯西准则是充分必要条件, 证明极限不存在时, 往往是这一准则的独特用场.

例 2.5.1 设 a 为常数, 考查极限 $\lim_n \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2} + a$.

【解】 $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, 即 $\{\frac{1}{n}\}$ 为无穷小量 ($n \rightarrow \infty$), 对任意常数 a , $\sin \frac{n}{2} + a$ 均有界, 事实上 $\left| \sin \frac{n}{2} + a \right| \leq 1 + |a|$, 由准则 3 得

$$\lim_n \frac{1}{n} \sin \frac{n}{2} + a = 0.$$

【解毕】

例 2.5.2 求极限 $\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$.

【思路】 考虑夹逼准则和单调有界准则.

【解】 记 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$.

(方法 1) 运用夹逼准则试验, 发现

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} < x_n < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2},$$

即有
$$\frac{1}{n^2 + n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} < x_n < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 上述不等式两端有相同极限 $\frac{1}{2}$, 因此

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k} = \frac{1}{2}.$$

(方法 2) 因为常数 $k > 0$, 显然 $x_{n+1} > x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调增加, 另外, 考查有界性.

$$\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1.$$

故 $\{x_n\}$ 有上界, 于是 $\lim_n x_n$ 存在. 观察出 $x_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$). 用定义可

验证 $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$, 过程如下:

" $\epsilon > 0$ 限定 $\epsilon < \frac{1}{2}$, 只须令 $\frac{1}{2n} < \epsilon$, 即取 $N = \frac{1}{2\epsilon}$, 则当 $n >$

N 时, 有

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| = x_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2n} < \epsilon,$$

最后得到 $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$.

【解毕】

【注】 由上例可见夹逼准则可以令我们求出极限值, 而单调有界准则一般只能得到极限存在的结论. 这两个准则的运用都需要熟练运用有关的不等式.

例 2.5.3 求极限 $\lim_n (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

【解】 由于

$$3 = (3^n)^{\frac{1}{n}} < (1^n + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{1}{n}} (3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} .$$

令 $n \rightarrow \infty$, 上述不等式两端有相同极限 3, 于是由夹逼准则得所求极限存在, 且此极限值为 3 .

【解毕】

例 2.5.4 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 试证明:

(1) 序列 $\{a_n\}$ 单调减; (2) $\lim_n a_n = 0$.

【思路】 按序列极限解析性质 2, 可受到启发: 一个序列的极限小于 1, 则这一序列一般项最终将小于 1 (n 足够大). 若后项与前项比值小于 1, 则 $\{a_n\}$ 必为单调减.

【证】 (1) 由 $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 根据极限定义, $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - q) > 0$, $\forall N$ 使当 n

N 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon$ (注意 $a_n > 0$ 条件不可少). 取 $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - q) > 0$, 则得到

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon = \frac{1}{2}(1 + q) < 1 \quad (\text{注意 } q < 1),$$

于是得到 $\{a_n\}$ 为单调减少.

【注】 序列的许多性质都可引申到对足够大的 N , 当 $n > N$ 时有相应的结论, 比如上面的证明, 我们看到当 $n > N$ 时有 $a_{n+1} < a_n$, 这已经构成单调减的性质. 讨论一个序列 $\{a_n\}$ 的性态, 我们只须关心 a_n 在某个 N (足够大) 之后的性态就够了, 前面的有限多项无关

紧要,重要的是 $n > N$ 时的无穷多项的情况如何.

(2) 记 $R = \frac{1}{2}(1+q) < 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$0 < a_{N+1} < a_N R,$$

$$0 < a_{N+2} < a_{N+1} R = a_N R^2,$$

.....

$$0 < a_{N+p} < a_N R^p,$$

固定 N , 令 $p \rightarrow \infty$, 则 $\lim_{p \rightarrow \infty} a_N R^p = 0$, 由夹逼准则可得到 $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{N+p} = 0$, 这意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 【证毕】

例 2.5.5 设 $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, 其中 k 为正数.

【证】 令 $u_n = \frac{n^k}{a^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} < 1 \quad (\text{由 } a > 1),$$

于是根据例 2.5.4 的结论得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. 【解毕】

例 2.5.6 设 $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

【证】 令 $u_n = \frac{a^n}{n!}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

再次根据例 2.5.4 结论, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. 【解毕】

例 2.5.7 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

【证】 $\epsilon > 0, 1 + \epsilon > 1$, 由例 2.5.5, 相应于 $k=1$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+\epsilon)^n} = 0$,

即 $\forall N$, 使 $n > N$ 时, 有 $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1$ 或者写为 $\frac{1}{1+\epsilon} < \frac{n^{\frac{1}{n}}}{1+\epsilon}$, 另外注

意到 $n^{\frac{1}{n}} > 1 (n > 2)$, 于是有

$$1 < n^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} \quad \text{或} \quad 1 - \frac{1}{n} < n^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n},$$

按极限定义便有 $\lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$.

【证毕】

【注】 1° 以上例题在 2.2 节中已经出现过, 那里用的方法与本节方法并不相同.

2° 通过这些例题, 便可得到无穷大量的级别次序排队, n , $n^a (a > 1)$, $n!$, n^n .

3° 在上述最后 $n!$ 与 n^n 的关系中, 读者不难证明 $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$, 事实上

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n},$$

由夹逼准则, 立即可得所要结论.

例 2.5.8 求极限 $\lim_n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

【解】 运用不等式技巧, 试验夹逼准则.

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} \\ &< \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2}{2n+2}. \end{aligned}$$

在上述不等式两端同除以 $\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$, 即有

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^2 < \frac{1}{n+1}. \quad (1)$$

另外又有

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} \\ &> \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

于是类似(1)式又有

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}. \quad (2)$$

由(1), (2)两不等式我们得到

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼准则得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0$.

【解毕】

例 2.5.9 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n^2}{n^2 + n}$.

【思路】 含有三角函数的极限式子, 要意识到三角函数恒等式或诱导公式; 含有根式的部分往往需要有理化的手续.

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n^2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{n^2}{n^2 + n - n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n^2 + n - n^2}{n^2 + n + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + 1}$$

$$= \sin^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

【解毕】

例 2.5.10 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则_____正确(单项选择题).

- (A) $x_n > y_n$; (B) $\forall n, x_n > y_n$;
 (C) $\forall N$, 使当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$;
 (D) x_n 与 y_n 大小关系不定.

【解】 这是一个单项选择题, 只有一项是正确的. 对序列极限问题, 根据“只关心某一足够大的 N 之后的无穷多项”这一原则, 本题答案应选(C). 若作为证明题, 可取如下证明:

令 $a_n = x_n - y_n$, 则 $\lim_n a_n > a > 0$, 由 2.4 节中极限的解析性质 2°, 则 $\forall N$, 使当 $n > N$ 时, $a_n > 0$, 即 $x_n > y_n$. (A) 不对, 因为在有限项中, 可以出现 $x_n < y_n$ 的情形; 同理, 也可出现 $x_n = y_n$ 的情形, 这都不影响 $\lim_n x_n > \lim_n y_n$; (D) 项明显不对.

【寓意】 本题考查对极限概念理解的深度与准确性.

例 2.5.11 设 $a_n > 0$, 且 $\{a_n\}$ 单调减少, $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 收敛, 则 _____ 正确.

- (A) $\lim_n n a_n = 0$; (B) $\lim_n n a_n =$;
 (C) $\lim_n n a_n$ 不存在, 亦不为 ; (D) $\lim_n n a_n = c (c > 0)$.

【解】 根据极限的概念, $\sum_{k=1}^n a_k$ 有极限 ($n \rightarrow \infty$), 又 $a_k > 0$, 则 a_k 应为无穷小量才行. 其次, a_k 作为无穷小量的阶次不能太低, 事实应高于一阶, 因而猜想 (A) 正确, (B), (D) 不正确, (C) 暂不定, 以下考查极限 $\lim_n n a_n$ 的存在性, 之后便会确定 (C) 是否正确.

(方法 1) 首先因为 $a_n > 0$, 则 $x_n > 0$, 且 $\{x_n\}$ 单调增加. 由柯西准则, $\epsilon > 0$ 及 $p \in \mathbf{Z}$ (整数), $\forall N$, 使当 $n > N$ 时

$$0 < x_{n+p} - x_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \epsilon / 2, \quad (1)$$

又因 a_n 单调减少, 于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_{n+p}, \\ a_{n+2} &> a_{n+p}, \\ &\dots\dots \\ a_{n+(p-1)} &> a_{n+p}. \end{aligned}$$

将上述结果代入到 (1) 式便有

$$0 < x_{n+p} - x_n < p a_{n+p} < \epsilon / 2.$$

令 $m = n + p$, 则不等式 $0 < (m - n) a_m < \epsilon / 2$ 对 $m > n > N$ 时一概成立. 令 $m > 2n$, 即 $n < \frac{m}{2}$ 时, 即有

$$0 < \frac{m}{2} a_m < \frac{1}{2} \quad \text{或者写为 } ma_m < \frac{1}{2},$$

由极限定义, 得到 $\lim_m ma_m = 0$, 即选项(A)正确.

(方法2) " $\epsilon > 0$, 按柯西准则有

$$x_{2n} - x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \epsilon,$$

又因 a_n 单调减少, 因此由上式又有

$$n a_{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \epsilon,$$

由极限定义得到 $\lim_n n a_{2n} = 0$, 即 $\lim_k 2k a_{2k} = 0$. 这说明 $n = 2k$ 时, (A)成立, 再证 $n = 2k+1$ 时, (A)亦成立.

由 a_k 单调减少, 则有

$$0 < 2k a_{2k+1} < 2k a_{2k}$$

由于 $\lim_k 2k a_{2k} = 0$, 根据夹逼准则, 便有

$$\lim_k 2k a_{2k+1} = 0,$$

显然 $\lim_k a_{2k+1} = 0$, 由极限运算法则, 应有

$$\lim_k (2k+1) a_{2k+1} = 0.$$

对上述 $\epsilon > 0$, 考虑 $\{na_n\}$, $\forall N_1$, 使 $2k > N_1$ 时, $2k a_{2k} < \epsilon$, 又 $\forall N_2$, 使 $2k+1 > N_2$ 时, $(2k+1) a_{2k+1} < \epsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时一定有 $na_n < \epsilon$, 最后得到 $\lim_n na_n = 0$, 即正确答案为选项(A).

【解毕】

【注】 柯西收敛准则有两个互相等价的描述:

$\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是:

1° " $\epsilon > 0$, $\forall N$, 使当 $m > n > N$ 时有 $|x_m - x_n| < \epsilon$.

2° " $\epsilon > 0$ 及 $p \in \mathbf{Z}$, $\forall N$, 使当 $n > N$ 时

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon.$$

2.6 标准极限及其应用技巧

极限 $\lim_n 1 + \frac{1}{n} = e$ 可由单调有界准则证明. 一般称为重要

极限, 而我们常称之为标准极限, 与函数极限中的 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 统称为两个标准极限, 所以称之为标准极限, 是因为可以将这两个极限标准化记为

$$\lim_n (1 + (n))^{(n)} = e, \quad (2.1)$$

$$\lim_n \frac{\sin (n)}{(n)} = 1, \quad (2.2)$$

其中 $(n) > 0$, 且 $\lim_n (n) = 0$ (无穷小量).

在每一标准极限的式子中均有两处出现 (n) . 应用中, 要求这两处必须是同型(相同)无穷小量, 不相同, 则力图凑成相同类型或形状.

以上两个标准极限的应用是广泛的, 主要包括以下两个方面.

1. 复合极限运算

设 $\lim_n x_n = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_n f(x_n) = A$, 特别当 $A =$

$f(x_0)$ 时(函数 $f(\cdot)$ 在 x_0 处连续), 则 $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$.

2. 标准形式的变形技巧

所谓变形技巧是指为凑出标准型(2.1)或(2.2)进行相应的变量替换, 并保证等号成立所做的“填平补齐”.

例 2.6.1 求极限 $\lim_n 1 - \frac{1}{2n}$.

【解】 $\lim_n 1 - \frac{1}{2n} = \lim_n 1 + \frac{1}{-2n}$

方括号内已构成标准型(2.1), 记 $x_n = 1 + \frac{1}{-2n}^{-2n}$, 则原极限为 $\lim_n x_n^{-\frac{1}{2}}$, 而 $x_n \rightarrow e$, 由复合极限运算法则, 这里 $f(x_n) = x_n^{-\frac{1}{2}}$, 故此极限应为 $\lim_n x_n^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$. 【解毕】

例 2.6.2 证明 $\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$.

【证】 考虑 $u_n = e^{\frac{1}{n} \ln n} = n^{\frac{1}{n}}$, 则

$$\lim_n u_n = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\text{由例 2.5.7}),$$

由复合极限运算法则, 得

$$\lim_n \ln u_n = \lim_n \frac{\ln n}{n} = \ln 1 = 0. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 由上例, 对 n 时的无穷大量排队, 又发现 $\ln n$ 是 n 或 n (> 1) 低阶的无穷大量. 读者可把这一结论加到例 2.5.7【注】2 的排序中去.

第3章 函数极限

3.1 函数极限定义及等价性描述

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$ 内有定义, 若 $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0 (\delta < \delta_0)$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限. 特别当 $A = 0$ 时, 称 $f(x)$ 为无穷小量 ($x \rightarrow x_0$).

上述定义有两种等价性描述:

1° 当 $x \in N^*(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 时, $f(x) \in N(A, \epsilon) = \{y \mid |y - A| < \epsilon\}$, 其中 ϵ 是任意小的正数.

2° 当 $x \rightarrow x_0$ 时成立 $f(x) = A + o(x)$, 其中 $o(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} o(x) = 0$.

2. 单侧极限与极限存在的充要条件

1° 当 $y = f(x)$ 在 $x < x_0$ 时有意义, 可定义左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

2° 当 $y = f(x)$ 在 $x > x_0$ 时有定义, 可定义右侧极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

3° 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在且相等, 即等于 A .

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

设 $y = f(x)$ 在 $x > x_1$ 时有定义, 若 $\forall \epsilon > 0, \forall X > 0$ 及常数 A ,

使当 $x > X$ 时, 有

$$| f(x) - A | < \epsilon .$$

则称 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时以 A 为极限 .

两个等价性描述为:

1° " $\epsilon > 0, \forall X > 0$ 及常数 A , 使当 $x \in \{x | x > X\}$ 时, 有 $y = f(x) \in \{y | |y - A| < \epsilon\}$.

2° 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 成立等式 $f(x) = A + o(x)$, 其中 $o(x)$ 为无穷小量 ($x \rightarrow +\infty$) .

类似可以给出 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的描述, 请读者给出相应的描述 .

4 . 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 及其充要条件

这一极限是指: " $\epsilon > 0, \forall X > 0$ 及常数 A , 使当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 存在的充要条件是 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(x)$ 均有极限, 且等于 A , 即

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A .$$

5 . 特殊极限状态——无穷大量

当在某种趋向 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) > G$ (G 是任意大的正数), 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的正无穷大量 . 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) < -G$ ($G > 0$), 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的负无穷大量 .

一般情况下, 无穷大量是属于极限不存在的情况, 但这一情况与其他极限不存在的情况有所不同, 我们称 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限状态是无穷大量 .

作为示范, 我们给出 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ 的描述如下:

" $G > 0, \forall X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 有 $f(x) > G$.

熟悉各种极限状态的描述, 是处理极限及相关数学问题的基

本技能训练 .

例 3.1.1 验证 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$.

【解】 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{x+1}{x-2} - (-2) \right| = 3 \left| \frac{x-1}{x-2} \right| < \varepsilon$, 欲寻找邻域半径 δ 的形式应是 $|x-1| < \delta$, 为此需要将上面不等式中 $|x-1|$ 保留下来, 其余部分应适当放大. 为此, 限制 $|x-1| < \frac{1}{2}$, 则有

$$|x-2| > 1 - |x-1| > \frac{1}{2} \quad (\text{由三角不等式}),$$

因此只须 $\left| \frac{x+1}{x-2} - (-2) \right| < 6|x-1| < \varepsilon$, 取 $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{6}$, 并取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6} \right\}$, 则当 $|x-1| < \delta$ 时必有

$$\left| \frac{x+1}{x-2} - (-2) \right| < \varepsilon. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 极限定义中的任意正数 ε 可以任意小. 而选取 δ 时, 可尽量小, 不怕小, 只要存在就可以.

例 3.1.2 验证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x}{x^2-2} = 2$.

【解】 本题趋向为 $x \rightarrow \infty$ (包括 $\pm \infty$), 选取 $X > 0$ 时, 可尽量大, X 不怕大, 只要存在即可.

$\varepsilon > 0$, 要使

$$\left| \frac{2x^2+x}{x^2-2} - 2 \right| = \left| \frac{x+4}{x^2-2} \right| = \frac{|x|+4}{|x^2-2|} < \varepsilon$$

注意到寻找的 $X > 0$, 要求 $|x| > X$, 上述不等式须放大成为包含因子 $|x|$ 的形式, 为此限制 $|x| > 4$, 则有 $x^2 - 2 > x^2 - \frac{1}{2}|x| > |x|^2 -$

$\frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}|x|^2$, 此时有 $\frac{|x|+4}{|x^2-2|} < \frac{|x|+4}{x^2-2} < \frac{2|x|}{\frac{1}{2}|x|^2} = \frac{4}{|x|}$, 因此

只须令 $\frac{4}{|x|} < \epsilon$, 取 $X_1 = \frac{4}{\epsilon} > 0$, 并且取 $X = \min\{4, X_1\}$, 则当 $|x| > X$ 时必有

$$\left| \frac{2x^2 + x}{x^2 - 2} - 2 \right| < \epsilon. \quad \text{【解毕】}$$

例 3.1.3 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 使 _____ (正确).

- (A) 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$; (B) $f(x_0) > 0$;
 (C) 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$;
 (D) $f(x)$ 在 x_0 处没定义.

【解】 正确答案应选 (C).

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 极限存在且非零, 但在 $x = x_0$ 处可以没定义, 也可以有定义, 因此 (A) 和 (D) 均不正确. (B) 也不正确. 选项 (C) 说明存在 x_0 的一个去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$, $A > 0$ 时, " $x \in N^*(x_0, \delta)$ " 必有 $f(x) > 0$. 对这个结论可证明如下:

由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$, 则可假设 $A > 0$, " $\epsilon > 0, \forall \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 或者

$$A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon,$$

特别取 $\epsilon = \frac{A}{2} > 0$, 则 $f(x) > A - \epsilon = \frac{A}{2} > 0$, 即有 $f(x) > 0$. **【解毕】**

【寓意】 该题考查知识点有两个:

1° 极限定义; 2° 极限保序性.

例 3.1.4 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则下列正确选项为 _____.

(A) $\forall M > 0$ 及 x_0 之去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$, 使当 $x \in N^*$ 时, $f(x) > M$;

(B) $\forall M > 0$ 及 x_0 之去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$, 使当 $x \in N^*$ 时, $|f(x)| < M$;

(C) $\forall M > 0$ 及 x_0 之邻域 $N(x_0, \delta)$, 使当 $x \in N$ 时, $|f(x)| < M$;

$$(D) \forall M > 0, |f(x)| < M.$$

【解】 正确选项为(B). 极限的一条重要性质是有极限必有界. 但(A)中说明有下界, 可下界未必是正的, 若 $M < 0$, 则该选项正确. (C)不正确是因为 $f(x)$ 在 x_0 处可以没有定义. 选项(D)未说明 x 的属性, 这时 $f(x)$ 未必有界. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 只能得到 x_0 附近(不包括 x_0 处)有界, 即在某个去心邻域内有界. **【解毕】**

【寓意】 该题考查知识点为极限定义与极限存在的必要条件.

【注】 在 x_0 某去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的必要条件.

3.2 极限的运算性质及复合极限定理

1. 运算性质 (以下用 x 表示某一种趋向)

当 $\lim_x f(x) = A$ 且 $\lim_x g(x) = B$ (首先是存在) 时, 有

$$1^\circ \lim_x [f(x) + g(x)] = A + B;$$

$$2^\circ \lim_x [f(x) \cdot g(x)] = AB;$$

$$3^\circ \lim_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x) \neq 0 \text{ 且 } B \neq 0).$$

【注】 上述性质均应理解为充分条件, 即 $\lim_x f(x)$ 与 $\lim_x g(x)$ 不存在时, 所述结论 $1^\circ, 2^\circ$ 和 3° 未必没有. 例如 $\lim_x x \sin \frac{1}{2}[x]$ 不存在,

$\lim_x x^2 \sin \frac{1}{2}[x]$ 亦不存在, 但

$$\lim_x \frac{x \sin \frac{1}{2}[x]}{x^2 \sin \frac{1}{2}[x]} = \lim_x \frac{1}{x} = 0.$$

2. 复合极限定理

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $x = g(t)$, 且 $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$, 而当 $t \rightarrow t_0$ 时, $g(t)$

x_0 , 则 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = A$ (首先是存在) .

复合极限定理是许多极限运算的理论根据 .

例 3 2 1 设 $0 < x < \frac{1}{2}$, 取 $a_1 = \sin x$, $a_n = \sin a_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$), 求极限 $\lim_n a_n$.

【解】 由基本不等式 $0 < \sin x < x$ $0 < x < \frac{1}{2}$, 则 $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$. 因此 $\{a_n\}$ 单调减少, 又 $a_n > 0$, 即 $\{a_n\}$ 有下界, 所以 $\lim_n a_n$ 存在, 记 $\lim_n a_n = a$, 另由复合极限定理 $\lim_n \sin a_{n-1} = \sin a$, 于是 $a = \sin a$, 此方程有唯一解 $a = 0$, 最后得到 $\lim_n a_n = 0$. **【解毕】**

3 3 两个标准极限及等价无穷小量

在极限运算中, 许多重要结果可以直接引用, 其中, 两个标准极限及其变形技巧是很重要的内容 .

$$(1) \text{ 标准极限 } \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 . \quad (3.1)$$

与复合极限法则联合使用可有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{(x)} = 1, \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0 . \quad (3.2)$$

$$(2) \text{ 标准极限 } \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e . \quad (3.3)$$

按复合极限运算法则可有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+(x))^{\frac{1}{(x)}} = e . \quad (3.4)$$

以上两类标准极限在使用中, 常常需要变形技巧, 即凑出标准形(3.1)或(3.2), (3.3)或(3.4) .

运用以上两个标准极限, 可以推导出若干对等价无穷小量 . 提到等价无穷小量, 应特别指出如下两点 .

(3) 等价无穷小量概念及常用类型 设 (x) 与 (x) 均为某种趋向下的无穷小量, 即 $\lim_x (x) = \lim_x (x) = 0$, 若

$$\lim_x \frac{(x)}{(x)} = A$$

则当 $A = 1$ 时, 称 (x) 与 (x) 为等价无穷小量; $A \neq 1$, 但为有限数时, 称 (x) 与 (x) 为同阶无穷小量; 若 $A = 0$, 称 (x) 是比 (x) 高阶的无穷小量; 若 $A = \infty$, 则称 (x) 是比 (x) 低阶的无穷小量.

(4) 等价无穷小量替换问题 由以上描述, 可知等价无穷小量是由两个无穷小量比值或因子相乘 $\frac{(x)}{(x)} = (x) \cdot \frac{1}{(x)}$ 引出的概念, 因此, 在使用等价无穷小量替换时, 只能在整体极限表达式的因子部分替换, 其余(不是因子位置)场合不可以替换. 这点必须严格遵守.

由两个标准极限导出的常用等价无穷小量有以下几类 ($x \rightarrow 0$):

$$1^\circ \quad x \sim \sin x \sim \tan x \quad (3.5)$$

(由标准极限(3.1)导出).

$$2^\circ \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad (3.6)$$

(由标准极限(3.1)导出).

$$3^\circ \quad x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3 \quad (3.7)$$

(由标准极限(3.1)及洛必达法则或泰勒公式导出).

$$4^\circ \quad \ln(1 + x) \sim x \quad (3.8)$$

(由标准极限(3.2)导出).

$$5^\circ \quad e^x - 1 \sim x \quad (3.9)$$

(由标准极限(3.1)及4°导出).

$$6^\circ \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0) \quad (3.10)$$

(由5°导出, 注意到 $a^x = e^{x \ln a}$ 即可).

$$7^\circ \quad (1 + x)^a - 1 \sim ax \quad (a \text{ 为任意实数}) \quad (3.11)$$

(由 4° 及 5° 导出, 注意到 $(1+x) = e^{\ln(1+x)}$ 即可).

例 3.3.1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}$. (2000 年考研题)

$$\text{【解】} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

【解毕】

【注】 若直接用极限运算法则, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ 也不存在.

稍一疏忽就会得出原极限不存在的结论, 这显然是错误的, 其原因是没注意到极限运算法则均为充分条件, 而并非必要条件, 两项极限不存在时, 其和或差的极限可能存在.

【寓意】 本题考查知识点包括: 极限的运算法则, 单侧极限与极限存在的充要条件, 以及初等函数的基本属性.

例 3.3.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

【思路】 分析这一极限状态, 属于“ 1^∞ ”型, 用标准极限(3.3).

【解】 (方法 1) 凑成标准极限形式

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1} \cdot (-1)} = e^{-1}.$$

这里用到了复合极限定理.

$$\text{(方法 2) 令 } y = x^{\frac{1}{1-x}}, \text{ 则 } \ln y = \frac{\ln x}{1-x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-1)}{-(x-1)} = -1, \text{ 因此原极限为 } e^{-1}. \quad \text{【解毕】}$$

例 3.3.3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$.

【思路】 分析极限状态为“ $\frac{0}{0}$ ”型, 且与 $\sin x$ 有关, 应联想到标准极限(3.1). 但应化为自变量趋于零的形式.

【解】 令 $x = -t$, 则 $x \rightarrow 0^-$ 时 $t \rightarrow 0^+$, 原极限为

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2-t) - 2t}{\sin(-t)} &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2t}{\sin t} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2t}{\sin t} = -2. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 3.3.4 指出下列极限运算中的错误:

$$(1) \lim_x \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 1} = \lim_x \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1.$$

【解】 (1) 错误出在第一个等号. $x \rightarrow 0$ 包括趋于 $+$ 及 $-$ 两个极限, 两个极限相等时, $x \rightarrow 0$ 的极限才存在. 本题中 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 1} = \frac{3}{2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 1} = -\frac{3}{2}$ ($x < 0$, 而 $2x^3 + 1$ 为算术根, 应为正), 所以原极限不存在.

(2) 错误在第一个等号, 原因同(1), 本题极限不存在, 因左右极限不相等. **【解毕】**

例 3.3.5 设 $x > 0$, 求 $\lim_n n^2 (n^{n-1} x - n^n x)$. 指明下列做法的错误, 并给出正确做法.

$$\begin{aligned} &\lim_n n^2 (n^{n-1} x - n^n x) \\ &= \lim_n n^2 (e^{\frac{\ln x}{n-1}} - 1 - e^{\frac{1}{n} \ln x} + 1) \\ &= \lim_n n^2 (e^{\frac{1}{n-1} \ln x} - 1) - \lim_n n^2 (e^{\frac{1}{n} \ln x} - 1) \\ &= \lim_n n^2 \cdot \frac{\ln x}{n-1} - \lim_n n^2 \cdot \frac{\ln x}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_n \frac{n^2}{n(n-1)} \cdot \ln x \\
 &= \ln x.
 \end{aligned}$$

【解】 上述做法中第二个等号错误.原因是两个极限都不存在.该题答案正确,但做法有错.正确做法如下:

$$\begin{aligned}
 &\lim_n n^2 (x^{n-1} - x^n) \\
 &= \lim_n n^2 \cdot x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n(n-1)}} - 1 \\
 &= \lim_n n^2 \cdot e^{\frac{\ln x}{n}} \cdot e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}} - 1 \\
 &= \lim_n n^2 \cdot e^{\frac{\ln x}{n}} \cdot \frac{\ln x}{n(n-1)} = \ln x. \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

例 3.3.6 设常数 $a > 0, b > 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax + \sin bx)^{\cot x}$.

【思路】 分析极限状态, 本题属“ 1^∞ ”型, 意识到可试验应用标准极限(3.3).

【解】 凑出标准型(3.3).

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax + \sin bx)^{\cot x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos ax)^{\cot x} \cdot \left(1 + \frac{\sin bx}{\cos ax} \right)^{\cot x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos ax - 1)^{\frac{1}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos x(\cos ax - 1)}{\sin x}} \cdot \left(1 + \frac{\sin bx}{\cos ax} \right)^{\frac{\cos ax}{\sin bx} \cdot \frac{\sin bx}{\cos ax} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}}.
 \end{aligned}$$

对上述方括号内第一部分的指数中的 $\frac{\cos x(\cos ax - 1)}{\sin x}$, 我们

有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos ax - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{2} a^2 x^2}{x} = 0$; 方括号中第二部

分的指数中的 $\frac{\sin bx}{\cos ax} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$ 极限为 b , 因此由极限运算法则及复合

极限法则得到原极限为 $e^0 \cdot e^b = e^b$.

【解毕】

例 3.3.7 设极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^k} = 0$, 试求常数 k 与 .

【解】 首先将分子有理化, 并采用无穷小量比阶方法找出存在实数 0 的条件 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \cos 2x}{x^k (\cos 2x + \cos 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^k \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right)} (\cos 2x \neq 0) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^k \left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right)} = . \end{aligned}$$

显然, $k > 2$ 时, 即为 , 而 $k < 2$ 时, $= 0$, 因此, 欲使 0 或 , 则必须 $k = 2$, 且这时原极限 等于 -1 . **【解毕】**

【寓意】 本题考查无穷小量的比阶及无穷小量的运算 .

例 3.3.8 设 a, b, c 为正数, 求极限 $\lim_n \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3}^n$.

【思路】 对求极限问题, 首先应根据已掌握的极限概念和已知结论, 初步判断所求极限的状态, 例如本例, $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, 则可判断出所求极限状态为“1”型. 对此型极限应首先想到标准极限(3.4), 一旦确定了状态, 便向这一目标去构造标准型 .

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \lim_n \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3}^n &= \lim_n \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3}\right)^n \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{\frac{3}{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} - 3}{3}\right)^n \end{aligned}$$

按标准极限(3.4), 上述方括号内的极限为 e , 再根据复合极限运算法则, 只须求指数部分的极限即可. 记上述指数部分为 x_n , 则

$$\lim_n x_n = \lim_n \frac{1}{3} [n(a^{\frac{1}{n}} - 1) + n(b^{\frac{1}{n}} - 1) + n(c^{\frac{1}{n}} - 1)] .$$

按极限的四则运算, 只须求

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{3} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) &= \frac{1}{3} \lim_n \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_n \frac{e^{\frac{1}{n} \ln a} - 1}{\frac{1}{n} \ln a} \cdot \ln a = \frac{1}{3} \ln a . \end{aligned}$$

用类似方法,可求得

$$\lim_n \frac{1}{3} n(b^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{3} \ln b, \lim_n \frac{1}{3} n(c^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{3} \ln c .$$

于是得到 $\lim_n x_n = \frac{1}{3} \ln abc$, 从而得到原极限为

$$\lim_n \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3} = e^{\frac{1}{3} \ln abc} = (abc)^{\frac{1}{3}} . \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 上述例题除了确定采用标准极限(3.4)以外,主要技巧是加一项,减一项,同乘同除及等价无穷小量的应用.

【寓意】 本题考点为标准极限(3.4)的应用及处理标准型的代数运算技巧.

第4章 连续函数

4.1 引言

学习微积分的一个直接的重要目的是掌握研究函数的微观性态和宏观性态的方法.这一点,无论对学术研究能力的培养,还是对研究生入学应试,都是至关重要的.当然,学习微积分的目的还有其更重要的另外一面,那就是培养和训练思维与思考问题的模式,加深对客观世界的了解与感受,掌握学习未知世界的方法与技巧,不管你将来从事数学及其相关学科与否,如能达到上述境界,则必会长期受益.

函数的连续性作为承上(极限理论与方法)启下(微分、积分概念)的重要环节,它是用极限等工具研究函数微观性态与宏观性态的开始.函数在一点处连续的概念描述了函数的微观性态,而在一个区间上的连续性则描述了一个函数的宏观性态,也可以说前者涉及的是函数局部问题,而后者则是刻画函数的全局性态,并且,二者互相渗透,相辅相成.学好本章内容,对掌握微积分全部内容与技巧有重要的影响与作用.

4.2 函数在一点处连续的概念——微观性态

1. 定义及其等价性描述

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续的定义有以下描述(其中 1° 为定义,其余为等价性描述):

1° 设 $y = f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义,若 $\epsilon > 0, \forall \delta > 0$

使当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

2° $y = f(x)$ 在 x_0 处连续是指: $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3° 记 $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, $x = x - x_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f = 0$.

4° $f(x) = f(x_0) + \Delta f(x)$, 其中 $\Delta f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f(x) = 0$.

在 $x = x_0$ 处单侧连续是指:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (\text{左连续}),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\text{右连续}).$$

显然 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

2. 在一点连续的性质与间断点分类

1° 间断点 若 $y = f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点. 间断点有以下分类:

第 1 类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 均存在, 但在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第 1 类间断点. 特别当 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$f(x_0)$ 时, x_0 称为 $y = f(x)$ 的可去间断点, 这时 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 若修正 $y = f(x)$ 在 x_0 处定义为: $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 则 $y = f(x)$ 在 x_0 处被修正为连续函数. 而当 $x \rightarrow x_0^+$ 及 $x \rightarrow x_0^-$ 时 $f(x)$ 的两个单侧极限不相等时, x_0 称为 $y = f(x)$ 的跳跃间断点.

第 2 类间断点: 若间断点 x_0 不属于第 1 类间断点, 则统称 x_0 为 $y = f(x)$ 的第 2 类间断点. 其中包括两类特殊情形:

当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ 时, x_0 称为 $f(x)$ 的无穷间断点; 有时, 当

$x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 取值为正负交替, 这时又称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡型间断点, 例如 $y = \sin \frac{1}{x}$ 有振荡型间断点 $x = 0$.

当 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有如下性质:

2° 性质 (1) 若 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(2) 若 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则 $\forall N(x_0, \quad)$, 使当 " $x \in N(x_0, \quad)$ " 时, $f(x) > 0$. 这一性质称为连续函数的保号性 (请读者完成证明).

(3) 进一步, 对两个在 x_0 处连续的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 若 $f(x_0) > g(x_0)$, 则 $\forall N(x_0, \quad)$, 使 " $x \in N(x_0, \quad)$ " 有 $f(x) > g(x)$ (保号性的推论).

当然, 我们还可以断言, $y = f(x)$ 在 x_0 处连续时, 若 $f(x_0) = 0$, 则 $\forall N(x_0, \quad)$, 使 " $x \in N(x_0, \quad)$ " 有 $f(x) = 0$. 这一结论对于讨论 $y = f(x)$ 的零点 (使 $f(x) = 0$ 的点) 与保号性 (恒取正值或负值) 问题是重要的理论基础.

(4) 若 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 或记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} y = 0$, 反之亦然, 即由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 可推知 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续 (要求条件: 在 x_0 处 $f(x)$ 有定义). 这一结论往往成为判断 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续的重要手段.

(5) 若 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\forall N(x_0, \quad)$, 使得 $y = f(x)$ 在 $N(x_0, \quad)$ 内为有界函数, 即 " $x \in N(x_0, \quad)$ ", $\forall M > 0$, 使得 $|f(x)| < M$. 这一性质可直观理解为 $y = f(x)$ 在其连续点附近是有界的.

(6) 运算性质 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处连续时, 其线性组合 $(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 处亦连续, 且 $(x) = f(x) \cdot g(x)$ 与 $(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 均在 x_0 处连续.

(7) 复合运算性质 若 $y = f(u)$ 在 u_0 处连续, 而 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u_0 = \varphi(x_0)$, 则 $y = f(\varphi(x))$ 在 x_0 处连续.

例 4 2 1 试确定常数 a, b 的关系, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续.

【解】 这是分段表达的函数, 应采用左右极限相等的方法.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + bx^2) = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b,$$

因此必须 $a = b$ 时, $y = f(x)$ 在 x_0 处才能连续. 【解毕】

例 4 2 2 设函数

$$f(x) = \begin{cases} |x| \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

判断 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性. (1993 年考研题)

【解】 只须考查 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin \frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$, 因此 $f(x)$

在 $x = 0$ 处连续.

【注】 上述极限运算用到了无穷小量与有界函数乘积仍为无穷小量的准则.

4 3 函数在闭区间上连续的概念——宏观性态

1. $[a, b]$ 上连续的函数与初等函数的连续性

若 $y = f(x)$ 在任意点 $x \in [a, b]$ 上连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 显然在端点 a, b 两处是单侧连续.

函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 从直观上讲, 是确定了 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的宏观性态, 或称之为全局性态, 并蕴含了一系列的重要结论, 而这些结论也统统是在 $[a, b]$ 上的全局性态. 后面将分别叙述.

对于初等函数 $y = c$ (c 为常数), $y = x$ (\mathbf{R}), $y = a^x$ ($a > 0$), $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \log_a x$ ($a > 0$), $\ln x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ 等在它们的定义域内都是连续的, 或者说在其定义域内的任意闭区间上都是连续的. 并且, 上述基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算而生成的函数在其定义域内也连续.

2. 一致连续的概念

作为反映 $y = f(x)$ 在一个区间上宏观性态的另一个概念是一致连续.

设 X 为一个区间(开区间或闭区间), 若 $\epsilon > 0, \forall (\delta) > 0$, 使 $x_0 \in X$ 及 $x \in X$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在 X 上一致连续.

对照 $y = f(x)$ 在一点 x_0 处连续的概念, 那里的 $\delta > 0$ 除了与 ϵ 有关之外还与 x 有关, 而这里的 $\delta > 0$ 只与 ϵ 有关而与 x 无关, 换言之, 这样的 $\delta > 0$ 应对 $[a, b]$ 区间上任意一点 x 都是适用的, 或者说是“公用的”.

例 4.3.1 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 区间上不一致收敛.

【思路】 显然 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上处处连续. 这是因为 $\epsilon > 0$, 取任意的 $x_1 \in (0, 1)$, 则 $x \in (0, 1)$, 要使

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right| < \epsilon,$$

只要 $|x - x_1| < |x_1 x|$ 即可, 于是可取 $(\delta, x) = |x_1 x| > 0$, 则当 $|x - x_1| < (\delta, x)$ 时, 即有 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right| < \epsilon$. 即知 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内任

一点处均连续. 而当 x_1 充分接近 $(0, 1)$ 区间的边界点 0 时, (δ, x) 也会充分小, 但却无最小者, 因此不存在一致连续所要求的与 x 无关的 (δ) . 证明如下.

【证】 $\epsilon > 0$, 取 $x_0 = \frac{1}{n} \in (0, 1)$, 对 $x = \frac{1}{n+1}$ 有 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = 1$, 显然不能比小于 1 的任意正数 ϵ 小, 即无法取到一致连续要求的 (δ) . 因此在 $(0, 1)$ 内不一致连续. **【证毕】**

例 4.3.2 设 $0 < c < 1$, 证明函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $[c, 1]$ 上一致连续.

【证】 对任意 $\epsilon > 0$ 及 $x_0, x \in [c, 1]$, 有

$$\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2 x_0 x} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2 x_0 x} \right|$$

$$\leq \frac{|x - x_0|}{x_0 x} \leq \frac{1}{c^2} |x - x_0|.$$

于是只须令 $\frac{1}{c^2} |x - x_0| < \epsilon$, 即可取 $(\delta) = \epsilon c^2$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时

必有 $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon$, 因此 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $[c, 1]$ 上一致连续.

【证毕】

3. 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质是分析函数微观与宏观性态的重要理论基础. 这些性质包括下列内容. 以下假设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

1° 有界性 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\forall x \in [a, b], \forall M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$.

2° 最大最小值定理 在 $[a, b]$ 上连续的 $y = f(x)$ 必能在 $[a, b]$ 上取到最大值与最小值, 即 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

3° 根的存在定理 (零点定理) 在 $[a, b]$ 上连续的函数 $y =$

$f(x)$ 若进一步有 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\forall x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$.

这一结论可直观理解为 $[a, b]$ 上连续的 $f(x)$ 若在两端点取得异号值, 则 $y = f(x)$ 图形(曲线)必穿过 x 轴, 或理解为 $y = f(x)$ 在其连续的区间内任意两个取得异号值的点 x_1 与 x_2 之间必有零点.

4° 介值定理 在 $[a, b]$ 上连续的函数 $y = f(x)$ 若进一步有 $f(a) < f(b)$, 则对满足 $f(a) < \eta < f(b)$ 的 η 必存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = \eta$.

【注】 上述介值定理可视为零点定理的推论, 只须引入 $F(x) = f(x) - \eta$, 则 $F(a) = f(a) - \eta < 0$, $F(b) = f(b) - \eta > 0$, 于是存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = \eta$.

5° 不动点定理 在 $[a, b]$ 上连续的函数 $y = f(x)$ 若进一步满足 $a < f(x) < b$, 则必 $\forall x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

【注】 首先, 不动点定理的含义在于: $y = f(x)$ 连续且满足 $a < f(x) < b$ 时, 方程 $x = f(x)$ 在 (a, b) 内有解, 即 $F(x) = f(x) - x$ 有零点 x_0 . 其次, 这一结论亦可视为零点定理的推论. 请读者自己完成证明.

4. 反函数的连续性

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调连续, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上严格单调且连续.

【注】 反函数问题应注意两种情况:

1° 若不换记号, 则 $y = f(x)$ 的反函数记为 $x = f^{-1}(y)$;

2° 若换记号, 则常常记为 $y = f^{-1}(x)$ 或另记为 $y = \varphi(x)$.

是否换记号, 这要根据具体情况和需要决定.

综例 4.3.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 且至少有一点 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ 使 $f(x_1) > 0$. 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有正的最大值.

【思路】 这里 x 是包括趋于正负无穷的两种情况. 首先, 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, 又在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则必然在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 又因为能取到正值, 则应能取到正的最大值. 本题关键在于如何表达这一思路.

【证】 由 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, 则对 $\varepsilon = f(x_1) > 0, \forall X > |x_1| > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < f(x_1)$. 另一方面当 $x \in [-X, X]$, 由于 $f(x)$ 连续, 必有 $x_m \in [-X, X]$, 使 $f(x_m)$ 为 $[-X, X]$ 上的最大值, 且 $x_1 \in [-X, X]$, 所以 $f(x_m) = f(x_1) > 0$. **【证毕】**

【技巧】 根据需要, 正确运用极限 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ 的定义, 选取 $\varepsilon = f(x_1) > 0$, 寻找到 $X > |x_1| > 0$, 使问题立即转化为讨论闭区间 $[-X, X]$ 及该区间之外的函数取值问题, 而后运用闭区间上连续函数的性质使问题得以解决.

【寓意】 本题考查函数的极限及连续函数的性质, 特别是闭区间上连续函数的性质. 这个题目是考查分析函数宏观性态的一个典型题目.

综例 4.3.2 设 $a < a_1 < a_2$, 讨论函数

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3}$$

的零点.

【解】 首先, $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup (a_3, +\infty)$.

考查 $f(x)$ 在点 $x = a_1, x = a_2, x = a_3$ 两侧的取值情况, 设法利用根的存在定理.

取 $x_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$, 则有 $a_1 < x_1 < a_2, x_1 - a_1 = \frac{a_2 - a_1}{2}, x_1 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2}, f(x_1) = \frac{1}{x_1 - a_3} < 0$, 且对任意 $x < a_1$ 有 $f(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, a_1)$ 内无零点.

由 $\lim_{x \rightarrow a_1^+} f(x) = +\infty$, 则 $\forall x_2 \in (a, x_1)$, 使得 $f(x_2) > 0$, 于是必有 $x_1 \in (x_2, x_1) \subset (a, a_2)$, 使得 $f(x_1) = 0$.

取 $x_3 = \frac{a_2 + a_3}{2}$, 则有 $a < x_3 < a_3$, $x_3 - a = \frac{a_3 - a}{2}$, $x_3 - a_3 = \frac{a_2 - a_3}{2}$, $f(x_3) = \frac{1}{x_3 - a} > 0$, 且对任意 $x > a_3$ 均有 $f(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(a_3, +\infty)$ 内无零点.

又因 $\lim_{x \rightarrow a_3^-} f(x) = -\infty$, 则有 $x_4 \in (x_3, a_3) \subset (a, a_3)$, 使得 $f(x_4) < 0$, 于是 $\forall x_2 \in (x_3, x_4) \subset (a_2, a_3)$ 使得 $f(x_2) = 0$. 另外, 在 $f(x)$ 的定义域的各区间内均有

$$f(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-a_2)^2} - \frac{1}{(x-a_3)^2} < 0,$$

即知 $f(x)$ 在各定义区间内均为单调减函数, 由此推知 $f(x)$ 在 (a, a_2) 及 (a_2, a_3) 内最多有一个零点.

综上所述, $f(x)$ 在 (a, a_2) 及 (a_2, a_3) 内各恰有一个零点.

【解毕】

【注】 讨论 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上的零点问题是一类重要课题. 这类问题有两层含义: 首先是存在性问题, 闭区间上连续函数若能在区间上取到异号值, 则必存在(至少有一个)零点; 其次是唯一性问题, 在取异号值的两点之间, $y = f(x)$ 单调时, 则在该两点之间有唯一的零点.

综例 4.3.3 设 $y = f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a) = f(a)$. 证明存在 $x_0 \in (0, a)$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

【思路】 构造辅助函数, 设法利用零点存在定理.

【证】 取 $F(x) = f(x) - f(x+a)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $F(0) = f(0) - f(a)$, $F(a) = f(a) - f(2a)$, $F(0) + F(a) = f(0) - f(2a)$. 又因为 $f(0) = f(2a)$, 因此 $F(0) + F(a) = 0$, 即 $F(0) \cdot F(a) < 0$ (异号), 根据零点定理, $\forall x_0 \in (0, a)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即有

$$f(x_0) = f(x_0 + a). \quad \text{【证毕】}$$

综例 4.3.4 设函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有定义, 在 $x=1$ 点处连续, 并且在 $[0, +\infty)$ 上满足 $f(x^2) = f(x)$, 证明: $f(x) = c$ (常数), $x \in [0, +\infty)$.

【思路】 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $f(1)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

【证】 由 $f(x^2) = f(x)$, 则 " $x \in [0, +\infty)$ " 有

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \dots = f(x^{\frac{1}{2^n}}),$$

令 $n \rightarrow \infty$ (对 $[0, +\infty)$ 上的任意固定 x), 则 $\lim_n x^{\frac{1}{2^n}} = 1$, 再由复合极限运算法则即有 $\lim_n f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. 又因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 最后得到

$$f(x) = \lim_n f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

取 $c = f(1)$, 则 " $x \in [0, +\infty)$ " 有 $f(x) = c$. 【证毕】

综例 4.3.5 (压缩映像原理) 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对常数 $q \in (0, 1)$ 及 " $x, x' \in (-\infty, +\infty)$ " 满足

$$|f(x) - f(x')| \leq q|x - x'|. \quad (4.1)$$

试证明

(1) 对 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点 x_0 , 由迭代公式 $x_k = f(x_{k-1})$ 构成的序列 $\{x_k \mid k=0, 1, 2, \dots\}$ 有极限(收敛).

(2) 记 $\lim_k x_k = x^*$, 证明 x^* 是满足 $x = f(x)$ 的唯一不动点.

【思路】 利用柯西收敛准则证明 $\lim_k x_k = x_0$ 存在; 再利用迭代关系进一步证明 x_0 为 $x = f(x)$ 的不动点.

【证】 (1) 由 $x_k = f(x_{k-1})$ ($k=1, 2, \dots$), 对任意正整数 p , 考虑柯西阶段差

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} \\ &\quad - x_{n+p-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\
 & \qquad \qquad \qquad n+p-1 \\
 & = \sum_{k=n}^{n+p-1} |x_{k+1} - x_k|
 \end{aligned}$$

由(4.1)式(称为利普希茨条件)

$$|x_{k+1} - x_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq q |x_k - x_{k-1}|,$$

$$\leq q^2 |x_{k-1} - x_{k-2}|,$$

并且,由归纳法可有 $|x_{k+1} - x_k| \leq q^k (x_1 - x_0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). 于是

$$|x_{n+p} - x_n| < \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k |x_1 - x_0| < |x_1 - x_0| \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k =$$

$$\frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} \cdot \text{记常数} \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} = c, \text{ 则 } c > 0, \text{ 当 } n > N =$$

$\frac{\ln c}{\ln q}$ 时,有 $|x_{n+p} - x_n| < c$, 即 $\{x_n\}$ 为柯西序列,必有极限,记

$$\lim_n x_n = x^*.$$

(2) 再次由(4.1)式,并由(1)的结论,便有

$$|f(x_{n+p}) - f(x_n)| \leq q |x_{n+p} - x_n| < \epsilon,$$

其中 ϵ 是任意正数. 于是 $\{f(x_n)\}$ 亦为柯西序列, 即 $\lim_n f(x_n)$ 存在,

由复合极限定理得到

$$\lim_n f(x_n) = f(x^*).$$

另外还有 $\lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n-1} = x^*$, 于是 x^* 满足 $x^* = f(x^*)$, 即

$x = x^*$ 为 $x = f(x)$ 的不动点. 至于 x^* 的唯一性, 可以反证如下:

设 ξ 亦为 $x = f(x)$ 的不动点. 则由题设条件可有 $|\xi - x^*| = |f(\xi) - f(x^*)| < q |\xi - x^*|$, 其中 $q < 1$, 因此上述不等式为一个矛盾, 即有 $\xi = x^*$, 于是, x^* 是唯一不动点. 【证毕】

【注】 在(1)的证明中, 限制 $c < \epsilon$ (可任意小), 并且 $\frac{\ln c}{\ln q}$

均为负数.

综例 4.3.6 设 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有下界, 但不能达到其下确界 A . 证明: 在 $[a, b]$ 上存在一个点列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)$ 单调减少趋于 A .

【思路】 运用下确界定义与极限定义, 构造点列 $\{x_n\}$.

【证】 (方法 1)

由已知条件 " $\forall x \in [a, b], f(x) > A$ ", 另由下确界定义, " $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in [a, b],$ 使得 $f(x_0) < A + \varepsilon$ ".

取 $\varepsilon_1 = 1$, 则 $\forall x_1 \in [a, b],$ 使得 $A < f(x_1) < A + 1$.

取 $\varepsilon_2 = \frac{f(x_1) - A}{2} > 0, \forall x_2 \in [a, b],$ 使得 $A < f(x_2) < A + \varepsilon_2$

即有 $A < f(x_2) < f(x_1)$. 如此取一串 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n,$ 对于 $\varepsilon_n = \frac{f(x_{n-1}) - A}{n} > 0,$ 又 $\forall x_n \in [a, b]$ 使得 $A < f(x_n) < A + \varepsilon_n$ 即有

$$A < f(x_n) < f(x_{n-1}).$$

显然点列 $\{f(x_n)\}$ 单调减少, 而 ε_n 满足

$$\varepsilon_n = \frac{f(x_{n-1}) - A}{2} < \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} < \frac{\varepsilon_{n-2}}{2^2} < \dots < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

由 $A < f(x_n) < A + \varepsilon_n$ 运用夹逼准则, 令 $n \rightarrow \infty,$ 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(方法 2)

取 $\varepsilon_1 = 1, \forall x_1 \in [a, b],$ 使 $A < f(x_1) < A + 1$.

取 $\varepsilon_n = \min \frac{1}{n}, \frac{f(x_{n-1}) - A}{2}, \forall x_n \in [a, b]$ 使

$$A < f(x_n) < A + \varepsilon_n < A + \frac{f(x_{n-1}) - A}{2} = \frac{f(x_{n-1}) + A}{2},$$

由于 A 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下确界, 而 $x_n \in [a, b],$ 因此有 $A < f(x_{n-1}),$ 于是 $A < f(x_n) < f(x_{n-1}),$ 即 $\{f(x_n)\}$ 单调减. 由 $A < f(x_n) < A + \varepsilon_n,$ 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$ 由夹逼准则, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(方法3)

取 $\varepsilon = 1, \forall x_1 \in [a, b]$ 使得 $A < f(x_1) < A + 1$, 对取值落入区间 $(A, f(x_1))$ 的所有 $f(x)$ 构成的点集仍有界, 且仍以 A 为下确界. 因此可如下选取 x_2, \dots, x_n , 令 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, \forall f(x_2) \in (A, f(x_1))$, 使得 $A < f(x_2) < A + \frac{1}{2}$, \dots , 令 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 又 $\forall f(x_n) \in (A, f(x_{n-1}))$, 使得 $A < f(x_n) < A + \frac{1}{n}$. 显然点列 $\{f(x_n)\}$ 单调减少, 且再次由夹逼定理得到 $\lim_n f(x_n) = A$. 【证毕】

【寓意】 正确理解并掌握该题的分析方法, 对学好极限概念与确界概念会有很大帮助.

第5章 导数定义与微分概念

5.1 引言

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有导数存在(或可微),是由极限定义描述的.而导数本身又是对函数本身性态的一个深刻表征,用导数去描述函数的性态,成为用数学描述客观世界的一个精辟手段,同时又是用其他数学概念描述客观世界的入门与基础.

这一段内容的学习重点是导数的背景与定义,导数定义的各种等价性描述,导数与微分的关系,导数对一个函数性态的影响与作用.

5.2 导数定义及其等价性(变形)描述

导数的背景是平均变化率的极限.具体背景应掌握几种常见物理量(或现象)的描述,例如速度、速率(包括冰雪的融解速率)、液体的挥发速率、灯光下移动物体的影子变化率、水库泄水速率、药物的反应速率等,所有这些现象均可用导数概念做出精确的描述.

1. 定义与概念

设 $y = f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义, $x \in N(x_0, \delta)$, 记 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

存在,则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数,记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{x} = f(x_0). \quad (5.1)$$

应注意到, $x \rightarrow 0$ 的方式是任意的, 特别对 $x \rightarrow 0^+$ 与 $x \rightarrow 0^-$ 时, 极限存在的两种情况, 分别称两个极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数与左导数, 并记为 $f'(x_0^+)$ 与 $f'(x_0^-)$.

对极限(5.1)中的记号 x , 在极限运算完成后便会消失, 因而它只是一个运算记号, 可以任意(需要时)用其他记号取代 x . 比如下列两式与(5.1)式等价:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad (5.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \left[f\left(x_0 + \frac{1}{h}\right) - f(x_0) \right] = f'(x_0). \quad (5.3)$$

例 5.2.1 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义, 则下列选项中, 与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是____(单项选择).

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + kx) - f(x_0)}{x}$ 存在 ($k \neq 0$ 或 1);

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)}$, 其中 $\varphi(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[f\left(x_0 - \frac{1}{x}\right) - f(x_0) \right]$ 存在;

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{\sin x}$ 存在.

【解】 应选(B). 因为(B)的极限形式只能说明右导数 $f'(x_0^+)$ 存在. 对(A), 只须令 $kx = t$, 则 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$, 且该极限值为 $kf'(x_0)$.

对(C), 只须令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$, 且该极限值为 $-f'(x_0)$.

(D)也是与 $f'(x_0)$ 存在相等价的, 并且极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x} \cdot \frac{-x}{\sin x}$$

存在; 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sin x} = -1$, 由极限运算法则, 极限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0)}{-x}$ 亦存在, 且为 $f'(x_0)$. 因此 (D) 的极限值为 $-f'(x_0)$. 【解毕】

例 5 2 2 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是____(单项选择).

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0^+} h [f(a + \frac{1}{h}) - f(a)]$ 存在;
- (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [f(a + h) - f(a - h)]$ 存在;
- (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a + 2h) - f(a + h)]$ 存在;
- (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a) - f(a - h)]$ 存在.

【解】 选项(D)正确. 且

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a) - f(a - h)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a). \end{aligned}$$

(A) 只能说明右导数 $f'(a)$ 存在. (B) 与 (C) 的极限式中没有 $f'(a)$, 无法构成 $f'(a)$ 存在的条件. 【解毕】

例 5 2 3 设 $f'(a)$ 存在, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a - h)) =$ _____.

【解】

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a - h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a + h) - f(a)) - (f(a - h) - f(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} \\ &= f'(a) + f'(a) = 2f'(a). \end{aligned}$$

【解毕】

例 5 2 4 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内可导, $x \rightarrow 0$ 时 $f'(x) \rightarrow 0$, 已知

$f(0) = 0, f'(0) = 2$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$.

【思路】 本题极限状态为“ 1^∞ ”型, 设法用标准极限.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2f(x))^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2f(x))^{\frac{-1}{2f(x)} \cdot \frac{-2f(x)}{\sin x}}$.

由复合极限运算法则, 只须求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2f(x)}{\sin x}$ 即可.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2f(x)}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(f(x) - f(0))}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= -2f'(0) = -4, \end{aligned}$$

因此原极限为 e^{-4} .

【解毕】

例 5.2.5 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 满足 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 已知 $f'(1)$ 存在且 $f'(1) = 1$, 试证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 并求 $f'(x)$.

【思路】 利用已知等式及 $f'(1)$ 存在性, 利用导数定义.

【解】 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(x + 1 + \frac{x}{\Delta x}) - f(x)}{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{x \rightarrow x} \frac{f(1 + \frac{x}{\Delta x}) - f(x)}{\frac{x}{\Delta x}}$, 上述最后一个等号用到了 $f(x + 1 + \frac{x}{\Delta x}) = f(x) + f(1 + \frac{x}{\Delta x})$. 对已知等式令 $x_1 = 1$ 得到 $f(x_2) = f(1) + f(x_2)$, 于是 $f(1) = 0$, 因为 $f'(1)$ 存在, 在此条件下利用导数定义, 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 考查 $f'(x)$ 的存在性.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{x}{x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{x}{x}) - f(1)}{\frac{x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{f'(1)}{x}, \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

应注意到上述极限中 x 为参数, x 为变量, 最后一个等号是用到了 $f'(1)$ 存在的定义. 【解毕】

例 5.2.6 设 $f(x), g(x)$ 定义在 $(-1, 1)$ 上, 且都在 $x=0$ 处连续,

若 $f(x) = \begin{cases} g(x)/x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$ 则____(单项选择题).

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 且 $g(0) = 0$;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 且 $g(0) = 1$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ 且 $g(0) = 0$;

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 且 $g(0) = 2$.

【解】 正确选项为(D).

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$ (存在), 于是必有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$; 又因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此 $g(0) = 0$. 按导数定义的极限构造再次考查极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = 2$. 【解毕】

2. 导数定义的等价性描述与微分概念

常用的导数定义等价性描述有以下 3 种(以下均假设 $f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义):

1° $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ ($\delta < \delta_0$), 使当 $x \in N(x_0, \delta)$ 时有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \epsilon, \quad x = x_0 + \Delta x,$$

则 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且必有 $f'(x_0) = A$.

2° $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 满足 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + o(\Delta x)$, 其中 $f = f(x) - f(x_0)$ 且

$\lim_{x \rightarrow x_0} o(\Delta x) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = A$.

3° $f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 满足

$$f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (5.4)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} (\quad) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 亦称为可导, 且 $f'(x_0) = A$. 记 $dx = dx$, 则称 $A \cdot dx = A dx = f'(x_0) dx$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分, 它是 (5.4) 式所表达函数增量 Δf 的线性主部, (5.4) 式的第二项显然为 dx 的高阶无穷小量.

3. 导数的简单性质

1° $f'(x_0)$ 存在等价于左导数 $f'(x_0^-)$ 与右导数 $f'(x_0^+)$ 均存在且相等.

2° $f(x)$ 在 x_0 处可导, 必在 x_0 处连续. 进一步可知 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界.

3° $f'(x_0) = \tan \alpha = k_\alpha(f)$, 其中 α 为曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处切线与 x 轴正向夹角, $k_\alpha(f)$ 为该切线的斜率.

例 5.2.7 设函数

$$f(x) = \begin{cases} |x| \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处必有_____ (单项选择题). (1993 年考研题)

- (A) 极限不存在; (B) 极限存在但不连续;
(C) 连续但不可导; (D) 可导.

【解】 正确选项为 (C).

首先, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin \frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$ (无穷小量与有界函数之积), 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 再考查可导性, 按导数定义, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin \frac{1}{x^2}}{x}$ 不存在, 于是 $f'(0)$ 不存在. **【解毕】**

例 5.2.8 设 $y = \frac{y}{1+x} x + (\quad)(x)$, 其中 $(\quad)(x)$ 满足

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\quad)(x)}{x} = 0$, 若已知 $y(2) = 5$, 求 $y'(2) = ?$

【解】 由 $y = \frac{y}{1+x} x + (x)$ 知函数增量已经表达为 x 的线性函数与 x 之高阶无穷小量之和, 则 $y = y(x)$ 必在 $x = 2$ 处可导, 且 $y'(2) = \left. \frac{y}{1+x} \right|_{x=2} = \frac{5}{3}$. **【解毕】**

5.3 导函数与导数零点定理

当 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 或 $[a, b]$ 上每一点均可导时, 称 $f(x)$ 在该区间上可导. 显然, 在闭区间上可导时, 在该区间端点系指单侧导数存在. 在区间上可导时, 其导函数 $f'(x)$ 的微观与宏观性态研究是一个重要问题, 这时应把 $f(x)$ 作为一个普通函数对待, 即前面说过的函数基本性质以及连续的性质所包括的研究方法均对 $f(x)$ 适用. 对 $f(x)$ 仍然可以讨论它的连续性与可导(可微)性. 读者了解并掌握 $f(x)$ 以下两类基本性质是重要的:

1. 导数 $f'(x)$ 在一点 x_0 处取正(负)值所决定的 $f(x)$ 微观性态——局部增减性

1° 设 $y = f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义, 且 $f'(x_0) > 0$, 则 $\forall N(x_0, \delta) \cap N(x_0, \delta)$, 使对 $N(x_0, \delta)$ 内的任意 x , 若当 $x > x_0$ 时, 有 $f(x) > f(x_0)$, 当 $x < x_0$ 时, $f(x) < f(x_0)$.

2° 条件同 1°, 但 $f'(x_0) < 0$, 则 $\forall N(x_0, \delta) \cap N(x_0, \delta)$, 使对 $N(x_0, \delta)$ 内任意 $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$, 而对 $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$.

上述微观性态可以称为 $f(x)$ 的局部增减性. 取 1° 证明如下:

设 $f'(x_0) > 0$, 则 $\epsilon > 0, \forall N(x_0, \delta) \cap N(x_0, \delta)$, 使对 $\forall x \in N(x_0, \delta)$ 有

$$f(x) - f(x_0) < \frac{\epsilon}{x} < f(x) + f(x_0).$$

特别取 $\epsilon = \frac{1}{2} f'(x_0) > 0$, 则有

$$-\frac{f}{x} > \frac{1}{2} f(x_0) > 0,$$

即 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 因此 x_0 处的 f 与 x 同号, 当 $x > x_0$ 时, $f(x) > f(x_0)$, 而当 $x < x_0$ 时, $f(x) < f(x_0)$.

读者可完成上述 2 的证明.

2. 导数零点定理及其推论

首先应指出, 这里讨论的问题是一个极为重要的结论.

考虑导函数 $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的情况, 若 $f'(a^+) f'(b^-) < 0$ (异号), 又当 $f'(x)$ 连续时, 则必然有 (至少有一个) $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 这是连续函数零点定理决定的结论. 若将上述 $f'(x)$ 连续的条件取消, 则结论仍然正确, 这便是导数零点定理. 命题如下:

设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(a^+) f'(b^-) < 0$, 则必 $\forall x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

关于这一命题的证明, 我们留在第 6 章, 作为费马定理应用的例题去完成 (例 6.2.1).

由导数零点定理可以直接得到以下重要推论. 命题如下:

设在 $[a, b]$ 上 $f'(x) \neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上定号, 即恒为正或恒为负. 或换言之, 若 $\forall x_1 \in [a, b]$ 使得 $f'(x_1) > 0$, 则 $\forall x \in [a, b]$ 均有 $f'(x) > 0$; 若 $\forall x_2 \in [a, b]$ 使得 $f'(x_2) < 0$, 则 $\forall x \in [a, b]$ 均有 $f'(x) < 0$.

给出上述推论的思路是用导数零点定理反证这一结论. 应该指出, 导数零点定理的意义与连续函数零点定理的意义有所不同.

例 5.3.1 设 $f(x)$ 为可导函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为 ____ (单项选择).

(A) 2; (B) -1; (C) $\frac{1}{2}$; (D) -2.

【解】 已知极限等式显然与 $f'(1)$ 的定义在形式上有关系,且

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) = -1,\end{aligned}$$

所以 $f'(1) = -2$, 即所求切线斜率为 $k = -2$, 答案为 (D). **【解毕】**

例 5.3.2 设 $\delta > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的____(单项选择).

- (A) 间断点; (B) 连续而不可导的点;
(C) 可导的点, 且 $f'(0) = 0$; (D) 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$.

【解】 由已知条件 $0 \leq |f(x)| \leq x^2$, 令 $x \rightarrow 0$, 由夹逼准则可得 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, 由此可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 并且因为 $0 \leq |f(0)| \leq 0$, 则必有 $f(0) = 0$, 于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

其次考虑 $0 \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$, 令 $x \rightarrow 0$ 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$. 考

虑到 $f(0) = 0$, 则 $|f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0$, 即有

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ (存在), 并且 $f'(0) = 0$, 因此正确选项应

为 (C).

【解毕】

关于导数零点定理的应用例题, 请注意第 6 章与第 9 章的部分内容.

5.4 导数公式与微分法

本节内容主要是导数的计算方法, 核心是复合函数的导数计算, 一个难点是反函数的导数计算.

1. 基本运算公式

以下涉及的 $f(x)$, $g(x)$ 均为可导函数

$$1^\circ (af(x) + bg(x) + c)' = af'(x) + bg'(x). \quad (5.5)$$

$$2^\circ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (5.6)$$

$$3^\circ \frac{f(x)}{g(x)}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0). \quad (5.7)$$

4° 复合运算 设 $y = f(u)$ 在点 u 可导, $u = \varphi(x)$ 在 x 点可导, 则 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 点可导, 且 $y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, 或记为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (5.8)$$

2. 反函数微分法

设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 又 $f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内连续且严格单调增加(或减少), 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ 在 y_0 处可导, 且

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ 其中 } y_0 = f(x_0). \quad (5.9)$$

【注】 上述反函数导数的公式中没有改变自变量记号.

3. 隐函数微分法

设 $F(x, y) = 0$, 且 $F_y \neq 0$, 则由 $F(x, y) = 0$ 可以在满足 $F_y \neq 0$ 的 (x_0, y_0) 某邻域内确定一个单值函数 $y = y(x)$. 这种隐函数的微分法只有在多元函数的微分学中给出更精确的描述, 读者可参见多元函数微分部分的隐函数微分法有关内容. 这里我们只强调形式上的求导运算.

将 $y = y(x)$ 代入到 $F(x, y) = 0$ 便得到恒等式

$$F(x, y(x)) = 0, \quad (5.10)$$

两边关于 x 求导可得到 $F_x + F_y \cdot y'(x) = 0$, 由此得到

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (5.11)$$

4. 参数方程微分法

设
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

当 $x(t) \neq 0$, 即 $x = x(t)$ 满足反函数存在条件时可确定 $y = y(x)$ 的函数关系, 并且

$$y_x = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{dy(t)}{dx(t)}, \quad (5.12)$$

值得注意的是参数微分公式用于求二阶导数 $y''(x)$ 时要特别谨慎, 不能误认为 $y_x = \frac{y(t)}{x(t)}$ 应该是

$$y_x = \frac{d}{dx(t)} \frac{dy(t)}{dx(t)}. \quad (5.13)$$

5. 乘积的高阶导数公式(莱布尼茨公式)

设 $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 具有 n 阶导数, 则 $f(x)$ 亦具有 n 阶导数, 且

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x) \\ &= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' \\ &\quad + \dots + uv^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

例 5.4.1 设曲线 $y = y(x)$ 由方程 $xy + \ln y = 1$ 确定, 求 $x_0 = 1$ 处该曲线的法线方程.

【解】 这是隐函数求导数问题, 核心是求切线的斜率. 首先求 $x_0 = 1$ 处的 y_0 值, 在 $xy + \ln y = 1$ 中令 $x_0 = 1$, 则有 $y + \ln y = 1$, 不易直接解出 y_0 , 若对初等函数很熟悉, 则可看出 $y_0 = 1$. 我们用下列方法确定 y_0 :

当 $y < 1$ 时, $y + \ln y < 1$; 当 $y > 1$ 时, $y + \ln y > 1$; 由实数的比较公理(实数与只在大于、小于、等于三种情况中取一), 只能有 $y_0 = 1$ 满足 $y + \ln y = 1$. 由题设条件, $xy + \ln y - 1 = 0$ 可视为 $F(x, y) = 0$, 事实上直接对已知等式两端关于 x 求导数即有

$$y + xy_x + \frac{1}{y} y_x = 0,$$

解出

$$y_x = \frac{-y}{1 + \frac{1}{y}}.$$

令 $x=1$ 且 $y=1$ 即有 $y_x \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{2} = k(f)$, 则法线斜率应为

$N=2$, 法线方程为 $y=2x-1$.

【解毕】

例 5.4.2 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^{\frac{1}{3}} \end{cases}$ 确定, 求 y_x .

【解】

$$y_x = \frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}},$$

$$y_x = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d(y_x)}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{9} t^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{9} t^{\frac{1}{3}}.$$

【解毕】

例 5.4.3 设 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$, 则 $f^{(27)}(\) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $\sin \frac{x}{2}$ 的奇数阶导数是某常数乘以 $\cos \frac{x}{2}$, 在 $x=$ 处取值为零. 而 $\cos 2x$ 的奇数阶导数为某常数乘以 $\sin 2x$, 在 $x=$ 处取值亦为零. 因此 $f^{(27)}(\) = 0$.

【解毕】

例 5.4.4 设 $f(x) = \ln(2-3x)$, 则 $f^{(10)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (单项选择题).

$$(A) \frac{-3^{10} \cdot 10!}{(2-3x)^{11}}; \quad (B) \frac{3^{10} \cdot 9!}{(2-3x)^{10}};$$

$$(C) \frac{3^{10} \cdot 10!}{(2-3x)^{11}}; \quad (D) \frac{-3^{10} \cdot 9!}{(2-3x)^{10}}.$$

【解】 正确选项为(D).

首先, 这一导函数的分母不能是 $(2-3x)^{11}$, 因此(A), (C)显然不正确. 其次, 符号应为 $(-1)^{9+10} = -1$, 其中复合导数运算有

10 次负号, 而负幂函数求导共 9 次, 应有 9 次负号出现, 因此只有 (D) 正确. 【解毕】

例 5.4.5 设曲线 $y = x^{2n}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴交点为 $(\frac{1}{n}, 0)$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

【解】 $y = 2nx^{2n-1}$, $y(1) = 2n$, 切线方程为 $Y - 1 = 2n(X - 1)$. 令 $Y = 0$, 则 $X = \frac{2n-1}{2n}$, 即 $\frac{1}{n} = \frac{2n-1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2n} = e^{-\frac{1}{2}}$. 【解毕】

例 5.4.6 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$, 即 $e^{y^2 \ln x} + y^2 \ln x + 4 = 0$, 求导得 $(1 + x^{y^2}) \frac{y^2}{x} + 2y \frac{dy}{dx} \ln x = 0$, 注意到 $1 + x^{y^2} \neq 0$, 因此 $\frac{y^2}{x} + (2y \ln x) \frac{dy}{dx} = 0$. 即 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{(2xy \ln x)} = -\frac{y}{2x \ln x}$. 【解毕】

例 5.4.7 设 $f(x) = (x+1)^2 \ln(1-x)$, 求 $f^{(n)}(-1)$.

【解】 两个函数乘积的 n 阶导数, 一般应利用莱布尼茨公式 (5.13), 注意到 $f(x)$ 表达式的第一个因子为幂函数形式, 它的 3 阶或大于 3 阶的导数均为零. 于是 $f^{(n)}(x)$ 的非零项只有 3 项.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x-1)^n} (x+1)^2 \\ &\quad + 2n \cdot \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{(x-1)^{n-1}} (x+1) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(-1)^{n-3} (n-3)!}{(x-1)^{n-2}}, \\ f^{(n)}(-1) &= n(n-1) \frac{-(n-3)!}{2^{n-2}} = -\frac{n!}{2^{n-2} (n-2)}. \end{aligned}$$

【注】 求 $f^{(n)}(-1)$ 也可运用泰勒公式, 将 $\ln(1-x)$ 在 $x = -1$ 处展为 n 阶泰勒公式, 并且将第一个因子 $(1+x)^2$ 与之相乘再合并,

与 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式比较 x^n 的系数, 即可直接得到 $f^{(n)}(-1)$. 请读者用此方法作为练习.

例 5.4.8 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导, 且 $f(0) = 1, f'(0) = 2$,

$$\text{求极限 } \lim_n f\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}}.$$

【解】 (方法 1)

令 $x_n = \frac{1}{n}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$, 考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x) - 1]^{\frac{x}{1 - \cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x) - 1}} \right]^{\frac{f(x) - 1}{1 - \cos x} x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - 1]x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - 1]x}{\frac{1}{2}x^2} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2f'(0) = 4. \end{aligned}$$

由复合极限运算法则便得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} = e^4.$$

$$\text{所以 } \lim_n f\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}} = \lim_{x_n \rightarrow 0} [f(x_n)]^{\frac{x_n}{1 - \cos x_n}} = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} = e^4.$$

(方法 2)

令 $x_n = \frac{1}{n}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1 - \cos x} \ln f(x)}{1 - \cos x}, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} =$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x) - \ln f(0)}{x - 0} = 2 [\ln f(x)] \Big|_{x=0} = 2 \frac{f'(0)}{f(0)} = 4.$$

$$\text{所以 } \lim_n f \frac{1}{n} = \lim_{x_n \rightarrow 0} [f(x_n)]^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}} = \lim_{x_n \rightarrow 0} [f(x_n)]^{\frac{x_n}{1 - \cos x_n}} = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} = e^4.$$

【解毕】

$$\text{【注】 (1) 若由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - 1]x}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = 4$$

得出 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{x}{1 - \cos x}} = e^4$ 是错误的, 因 $f(x)$ 未必连续, 只是已知 $f(0) = 2$.

(2) 若对整标变量求导数, 也是错误的. 应特别注意, 在极限运算中, 对序列极限必须引入一个相应的连续函数, 才可以运用导数定义或导数运算.

例 5.4.9 设 $f(x)$ 为单调可导函数, 其反函数为 $g(x)$, 且已知 $f(1) = 2, f'(1) = -\frac{1}{3}, g'(1) = 1$. 求:

$$(1) g'(2),$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{2x}.$$

【解】 (1) 首先应注意到 $f(x)$ 的反函数记为 $g(x)$, 这里已经交换了变量记号, 实际上有

$$x = f(y) = f(g(x)).$$

由上式两端对 x 求导数得到 $1 = f'(y) \cdot y_x$, 因此 $y_x \Big|_{x=2} = [f'(1)]^{-1} = -3 = g'(2)$.

对前面一阶导数所得等式再次关于 x 求导数得到 $f'(y)(y_x)^2 + f''(y) \cdot y_x = 0$, 很显然 $y_x = g'(x) = -\frac{f''(y)(y_x)^2}{f''(y)}$,

令 $x=2$ 且 $y=1$ (原记号为 $x=1, f(1)=2$) 则得到 $g(2) = \frac{f(1)(-3)^2}{\frac{3}{3}} = 3 \cdot 3 = 9$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{2x} = -\frac{1}{2} f'(1) = \frac{3}{6}. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 上述解法用了记号 $y=g(x)$, 如下做法应更为方便一些. 由反函数导数关系可有(不换记号) $f(x) \cdot g(y)=1$, 令 $x=1$, 则应有 $y=2, g(2)=-3$, 再关于 x 求一次导数便有 $f(x)g(x) + [f(x)]^2 g'(y)=0$, 再令 $x=1, y=2$, 解出 $g'(2)$ 即可.

例 5.4.10 若二次曲线 $y=ax^2+bx+c(0 < x < 1)$, 将两条曲线

$$L_1: y=e^x \quad (-\infty < x < 0), \quad L_2: y=\frac{1}{x} \quad (1 < x < +\infty)$$

连接成处处有切线的曲线, 则该二次曲线为 $y=$ _____ .

【解】 本题相当于讨论下列函数的可导性

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

由在 $x=0$ 处的连续性, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = c$, 即 $c=1$. 再由 $x=1$ 处的连续性, 由左右极限相等可得 $a+b+c=1$, 即有 $a+b=0$. 再由 $x=0$ 处的可导性, $f'(0^-) = f'(0^+)$, 即有 $b=1$, 最后得到 $a=-1$, 并可验证, 在 $x=1$ 处, $f(x)$ 亦可导. 于是该二次曲线为 $y=f(x) = -x^2 + x + 1$. **【解毕】**

例 5.4.11 设 $g(x)$ 与 $f(x)$ 为可导函数, $y=f(g(x))\cos\frac{1}{x}$, 则 $dy =$ _____ .

【解】 运用导数或微分的乘法公式即得到

$$dy = f'(g(x)) \cdot g'(x) \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} f(g(x)) \sin\frac{1}{x} dx. \quad \text{【解毕】}$$

例 5.4.12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1})$.

【解】 本题考察无穷小量的比阶与等价无穷小量替换.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} x^2 (e^{1 - \cos \frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} x^2 (1 - \cos \frac{1}{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1} x^2 \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 5.4.13 设 $f(x)$ 为可导函数, 且 $f'(0) = f(0) = 1$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\ln f(x)}.$$

【思路】 极限状态属于 $\frac{0}{0}$ 型, 设法运用等价无穷小量替换, 利用已知 $f(0) = 1$ 存在的条件, 将极限运算与导数定义相联系.

【解】 原极限

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\ln(1 + f(x) - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{\sin x}}}. \end{aligned}$$

由 $f(0) = f'(0) = 1$ 知道第一个极限存在且为 $f'(0)$, 对第二个极限, 只须考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x)-1} \cdot \frac{f(x)-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x) - 1)^{\frac{1}{f(x)-1} \cdot \frac{f(x)-1}{x}}. \end{aligned}$$

注意到上式指数部分极限可与导数定义联系, 且因 $f(0) = 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1, \text{ 所以原极限应为}$$

$$f'(0) \cdot \frac{1}{\ln e} = 1. \quad \text{【解毕】}$$

【寓意】 本题考查极限运算与导数概念.

第6章 用导数研究函数性态

6.1 引言

对一个函数 $y = f(x)$ 的宏观性态与微观性态进行精确的研究是非常重要的. 而在这种研究中, 微分学基本定理的若干结论则是重要的理论基础, 加上综合运用连续函数性质与导数零点定理, 可以形成研究函数性态的基本思维模式. 本章将通过部分例题的分析, 训练常用的方法与技巧.

对函数性态的研究包括函数的增减性, 连续性, 可微性, 极值与最大最小值, 零点及其个数(穿过 x 轴的次数), 渐近线与凸性, 有时还会涉及奇偶性与周期性. 学习本章内容, 应特别注意不要轻视简单问题. 许多简单问题里都蕴含着基本的概念、方法与技巧, 简单问题处理多了, 技巧也会随之而生.

6.2 微分学基本定理

微分学基本定理的首要背景是研究可导函数 $y = f(x)$ 在某点 x_0 处取得极值的问题. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值(应该说是局部极值——微观性态)的基本事实是在 $x = x_0$ 处的函数增量 $f = f(x_0 + x) - f(x_0)$ 在 x_0 附近(或者说两侧)为定号, 即恒为正或恒为负. 这便是 $f(x)$ 在 x_0 处取得局部极值的充要条件(不论 $y = f(x)$ 可导与否均如此), 正是这样一个基本事实, 引发出一系列重要的结果.

我们以在 x_0 处取得极大值情况来分析 $y = f(x)$ 在 x_0 附近

(某 $N(x_0, \delta)$ 邻域)的微观性态如下:

在 x_0 处取得极大值,即在 $N(x_0, \delta)$ 内的任意 x 处应有 $f(x) \leq f(x_0)$, 由此可知 $f(x) - f(x_0) \leq 0$, 即在 $N(x_0, \delta)$ 内偏离 x_0 时, 函数 $f(x)$ 取值会变小, 于是可知:

$$\text{若 } x > x_0, \text{ 则 } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

由极限的保序性便得到 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, 若进一步有 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导的条件, 则上述不等式意味着右导数存在且 $f'(x_0^+) \leq 0$.

$$\text{当 } x < x_0 \text{ 时, } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ 再次由极限保序性可}$$

知 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, 当 $f(x)$ 在 x_0 可导时便有 $f'(x_0^-) \geq 0$, 但由 $f(x)$

在 x_0 可导的充要条件可有 $f'(x_0^-) \geq 0$ 并且 $f'(x_0^+) \leq 0$, 由此只能断定 $f'(x_0) = 0$, 这便是费马定理的结论.

由费马定理可以直接导出导数零点定理(第 5 章 5.3 节已经叙述), 并且可以导出其余几个微分学基本定理.

(1) 费马定理(可导函数取得极值的必要条件)

设 $f(x)$ 满足: 1° 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有定义, 并且 " $x \in N(x_0, \delta)$ 有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$); 2° 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

(2) 导数零点定理 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 并且 $f(a^+) f(b^-) < 0$, 则必 $\exists x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$ (在 x_0 处有水平切线).

例 6.2.1 证明导数零点定理.

【思路】 $f(x)$ 在 a, b 两点异号, 若 $f(a^+) < 0$, 由局部增减性, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处减少, 所以 $x = a$ 不是 $f(x)$ 的最小值点; 而 $f(b^-) > 0$, $f(x)$ 在 $x = b$ 处增加, 则 $x = b$ 亦不是最小值点. 因此

可导函数 $f(x)$ 必有最小值点 $x_0 \in (a, b)$, 再由费马定理, 即有 $f'(x_0) = 0$.

【证】 设 $f'(a^+) < 0$ 且 $f'(b^-) > 0$ (另一情况请读者完成证明), 即有 $f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, 按极限定义, $\forall \epsilon_1 > 0, \forall \delta_1 > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta_1$ 时有

$$f'(a^+) - \epsilon_1 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a^+) + \epsilon_1,$$

取 $\epsilon_1 = -\frac{1}{2} f'(a^+) > 0$, 则有

$$f(x) - f(a) < \frac{1}{2} f'(a^+) (x - a) < 0,$$

即 $f(x) < f(a)$, 因此 $f(a)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

另外又有 $f'(b^-) > 0$, 则 $\forall \epsilon_2 > 0, \forall \delta_2 > 0$, 使当 $0 < b - x < \delta_2$ 时必有

$$f'(b^-) - \epsilon_2 < \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < f'(b^-) + \epsilon_2.$$

特别取 $\epsilon_2 = \frac{1}{2} f'(b^-) > 0$, 则有

$$f(x) - f(b) < \frac{3}{2} f'(b^-) (x - b) < 0$$

即 $f(x) < f(b)$. 因此 $f(b)$ 亦不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

综上所述, 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则必连续, 由最大最小值定理, 特别必有 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值, 而且 $x_0 \neq a, x_0 \neq b$, 则必有 $x_0 \in (a, b)$, 由费马定理, 必有

$$f'(x_0) = 0. \quad \text{【证毕】}$$

(3) 罗尔定理 设函数 $y = f(x)$ 满足:

1° 在 $[a, b]$ 上连续;

2° 在 (a, b) 内可导;

3° $f(a) = f(b)$.

则 $\forall (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$ (在 $x = c$ 处有水平切线).

【注】 罗尔定理及前面的导数零点定理的命题形式均为有水平切线的充分条件. 不满足这两个定理的条件时, 结论也可能成立.

例 6.2.2 考查下列各函数在指定区间上是否有水平切线.

$$(1) f(x) = 2x - [x] = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = |x|, x \in [-1, 1].$$

$$(3) f(x) = 2x, x \in [0, 1].$$

$$(4) f(x) = x^2, x \in [-1, 2].$$

【思路】 用最大最小值定理及费马定理.

【解】 (1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调增加, 无水平切线, 且不满足罗尔定理条件.

(2) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无水平切线. 不满足罗尔定理中的条件(2).

(3) $f(x)$ 严格单调, 无水平切线, 不满足罗尔定理中的条件(3).

(4) $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 内有水平切线, 但不满足罗尔定理中的条件(3).

(4) 拉格朗日微分中值定理 设 $f(x)$ 满足

1° 在 $[a, b]$ 上连续;

2° 在 (a, b) 内可导.

则 $\forall (a, b)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (6.1)$$

【注 1】 (6.1) 式可有如下等价表达式

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

$$(0 < \theta < 1); \quad (6.2)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \quad (c \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1) \\
 &= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0), \\
 &(0 < \theta < 1); \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(\xi)h, \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x_0 + h \text{ 之间.} \tag{6.5}$$

【注 2】 该微分中值定理的证明是先引入辅助函数, 以创造应用罗尔定理的条件, 导出结论.

【注 3】 该定理几何意义为: $f(x)$ 在 x_0 处的切线斜率与 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 两点连线相平行. (6.4) 式的 $f'(x)$ 是强调这一参数与 x 有关.

【注 4】 由微分中值定理可直接得出 4 个推论如下:

推论 1: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 恒有 $f'(x) = 0$, 则 $f(x) = c$, 其中 c 为常数.

推论 2: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $f'(x) = g'(x)$, 则在 (a, b) 内必有 $f(x) = g(x) + c$. 当且仅当两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有一个公共点 (x_0, y_0) , $x_0 \in (a, b)$ 时 $f(x) = g(x)$.

推论 3: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则对 $[a, b]$ 上的任意两点 x_1, x_2 存在常数 $L > 0$, 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \tag{6.6}$$

其中 L 称为利普希茨常数, 若进一步有 $0 < L < 1$, 则这样的 $y = f(x)$ 满足压缩映象原理(见综例 4.3.5).

推论 4: 若 $f'(x) > 0$ 在 (a, b) , 则 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上单调(非严格)增加, 且 $f'(x) > 0$ 时 $y = f(x)$ 严格单调增加. 而当 $f'(x) < 0$ 时(或 $f'(x) < 0$), $y = f(x)$ 非严格(严格)单调减少.

【注 5】 拉格朗日中值定理的两个常用重要功能是:

由 $y = f(x)$ 在某 x_1 处的取值或性态, 可推知 x_1 近旁处 $f(x)$ 的取值或性态, 像是一条“链锁”, 对满足定理条件的 $[a, b]$ 区间上 $f(x)$ 全局有某种控制作用.

拉格朗日中值定理在 $y = f(x)$ 的函数取值与其导数取值

之间搭起了一座桥梁 .

(5) 柯西中值定理 假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$, 则 $\forall x_0 \in (a, b)$ 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad (6.7)$$

【注】 柯西中值定理可视为拉格朗日中值定理的参数表达, 设

$$\begin{aligned} X &= g(x), \\ Y &= f(x). \end{aligned}$$

则有

$$\frac{f(g^{-1}(X)) - f(g^{-1}(X_1))}{X - X_1} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

在 x_1 与 x 之间. (6.8)

作为练习, 请读者将拉格朗日中值定理的 4 个推论依次进行证明, 这将有助于这一重要定理的理解与应用 .

例 6.2.3 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上有二阶导数, 且 $f(1) = f(2) = 0$, $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 证明 $\forall x_0 \in (1, 2)$, 使得 $F'(x_0) = 0$.

【思路】 对 $F(x)$ 应用罗尔定理 .

【证】 (方法 1)

$F(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x)$, 令 $x=1$ 则有 $F(1) = 0$, 另由 $F(1) = 0, F(2) = f(2) = 0$, 由罗尔定理 $\forall \xi \in (1, 2)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 对 $F(x)$ 在 $[1, \xi]$ 上应用罗尔定理, 则 $\forall \eta \in (1, \xi) \subset (1, 2)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

(方法 2)

反证, 设 $\forall x \in (1, 2), F'(x) \neq 0$, 则由导数零点定理之推论可知 $F'(x)$ 在 $(1, 2)$ 上取定号, 不妨设 $F'(x) > 0$, 因此 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上为严格单调增函数 .

考虑到 $F(1) = 0$ 及 $x \in (1, 2)$, 所以 $F(x) > 0$, 即 $\forall x \in (1, 2) F(x)$ 定号. 但由 $F(1) = F(2) = 0$, 由罗尔定理应 $\forall \eta \in (1, 2)$,

使得 $F(\xi) = 0$, 这与上述 $F(x)$ 定号矛盾, 于是原假设不成立, 即必 $\forall \xi \in (1, 2)$, 使得 $F(\xi) = 0$. 【证毕】

例 6.2.4 设 m, n 为自然数, $f(x) = x^m(1-x)^n$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内零点个数为____(单项选择题).

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

【解】 正确选项为(B).

由罗尔定理, $f(0) = f(1) = 0$, 因此至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) = 0$, 又

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m - mx - nx). \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 但当 $x \in (0, 1)$ 时, $x^{m-1}(1-x)^{n-1} \neq 0$, 得到 $x_0 = \frac{m}{m+n} \in (0, 1)$ 为唯一驻点, 即 x_0 为 $f(x)$ 的唯一零点. **【解毕】**

例 6.2.5 设函数 $g(x) = x(x+1)(2x+1)(3x-1)$, 试确定方程 $g(x) = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内有几个实根.

【思路】 已知函数 $g(x)$ 表达式已是因子乘积形式, 应采用连续函数零点定理及罗尔定理综合讨论 $g(x)$ 的零点问题, 而不应把 $g(x)$ 求出来再讨论其零点.

【解】 函数 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上连续且可导, 显然 $g(x)$ 有 4 个实根: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}$, 由罗尔定理, $g'(x)$ 至少有 3 个零点: $\xi_1 \in (0, \frac{1}{3}), \xi_2 \in (-1, -\frac{1}{2}), \xi_3 \in (-\frac{1}{2}, 0)$. 又 $g'(x)$ 为 3 次多项式, 最多有 3 个实根, 因此 $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内恰有 2 个实根.

6.3 函数的极值、凸性与渐近线

函数的极值, 凸性以及拐点均属于函数性态的研究内容, 这些

概念也都与微分学基本定理有关,并且还常与函数的连续性问题有关.

1. 极值与最大最小值问题

可导函数 $y = f(x)$ 在 x_0 取得极值的必要条件是 $f'(x_0) = 0$, 这正是费马定理的结论.关于充分条件,一般可有以下几种:

1° 在 x_0 处的增量 $f|_{x=x_0}$ 在 x_0 两侧取得定号,并且 $f' > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值, $f' < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值.这一条件不仅是充分的,还是必要的.

2° $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x)$ 存在时,若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 $y = f(x)$ 的极小值点,而当 $f''(x_0) < 0$ 时, x_0 为 $y = f(x)$ 的极大值点.当 $f''(x_0) = 0$ 时,需进一步考查.

3° 若 $y = f(x)$ 在 x_0 及其附近有 n 阶导数,并且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则当 $n = 2k$ (k 为正整数)时, x_0 为极值点.当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, x_0 为极小值点,而当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, x_0 为极大值点.

4° 若 $f'(x_0) = 0$, 而 $f''(x)$ 在 x_0 两侧变号,则 x_0 为极值点.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值属于一种微观性态,或局部问题.以此为基础,可以讨论 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大最小值问题.首先,当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时,它必能在 $[a, b]$ 上取得最大最小值(两种情况都有).一般来讲,处理区间 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 最大最小值问题应按如下程序进行讨论:

(1) 求出 $f(x)$ 的第 类间断点以及不可导点;

(2) 求出驻点;

(3) 将驻点,不可导点,第 类间断点及区间端点函数值逐一比较(在间断点还应考虑左右极限值),最后确定最大最小值.

当考虑开区间 (a, b) 上最大最小值时,还应分别考查两个端点极限值,即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

2. 函数的凸性与拐点

(1) 凸性 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 若对任意不同的两点 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 及满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 的任意正数 λ_1, λ_2 , 恒有 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为上凸(或称为凸). 上述不等式中的不等号反向时, 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 为下凸(或称为凹).

【注】 上述关于函数凸性的定义并未涉及函数的一阶或二阶导数, 是一个基础性的定义. 不等式中 λ_1, λ_2 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 且均为正数, 一般称为加权因子. 而 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ 为 x_1 与 x_2 的加权平均值, 必有 $x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < x_2$ (假设 $x_1 < x_2$ 时), 同样, $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ 为函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的加权平均值, 并且 $m < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < M$, 其中 $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

(2) 拐点 假设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有上凸与下凸的分界点 x_0 , 称 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3) 凸性判别问题 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 则对 $x \in (a, b)$, 当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 在 (a, b) 内为上凸, 而当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 为下凸.

(4) 拐点判别问题

1° 二阶可导函数 $f(x)$ 在 x_0 取得拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.

2° 二阶可导函数 $f(x)$ 在 x_0 取得拐点的充分条件是在 x_0 两侧 $f''(x)$ 异号.

3° $f''(x)$ 不存在的点, 可能会成为拐点.

4° 类似 6.3 节中第 1 小节的 3 款, 当 $n = 2k + 1$ 时, $f(x)$ 在 x_0 必取得拐点.

例 6.3.1 判别 $x = 0$ 是否为函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值点.

【解】 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, f(0) = 0.$

$$f(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, f(0) = 0.$$

$$f(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, f(0) = 0.$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 且 $f(0) = 4.$

【解毕】

例 6.3.2 设 $f(x) = x^5$, 则 ____ (单项选择).

(A) $x=0$ 为极大值点; (B) $x=0$ 为极小值点;

(C) $(0, f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点,

(D) (A), (B), (C) 均不正确.

【解】 $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, 但 $f^{(5)}(0) = 5 \neq 0$, 则 $(0, f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 即答案 (C) 正确

【解毕】

例 6.3.3 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有二阶连续导数, 且 $f(0) =$

$0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$, 则下列选项正确者为 ____ (单项选择).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

(D) $f(0)$ 不是极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(1996 年考研题)

【解】 正确选项为 (B).

按极限定义, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$, 则 $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$, 使当 $0 < |x|$

$< \delta$ 时有 $|x|(1 - \epsilon) < f(x) < |x|(1 + \epsilon)$, 这里限定 $0 < \epsilon < 1$, 特别

取 $\epsilon = \frac{1}{2}$ 时有 $f(x) > \frac{1}{2}|x| > 0$, 即 $f(x)$ 为增函数, 但 $f(0) = 0$,

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 两侧变号, 且先负 ($x < 0$ 时) 后正 ($x > 0$ 时), 亦即 $f(x)$ 先减少而后增加, 因而 $x=0$ 必为极小值点.

【解毕】

【寓意】 本题考查知识点有: 极限定义, 导数概念, 极值点与拐点概念.

【注】 由上题条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$ 可知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 且由 $f(x)$ 连续知道 $f(0) = 0$, 这不能构成判断结论的依据. 但应看到, 在 $x=0$ 附近有 $f(x) = |x| + o(x)$, 其中 $o(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

例 6.3.4 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足

$$xf(x) + 3x[f(x)]^2 = 1 - e^{-x}.$$

若已知 $f(x_0) = 0$ ($x_0 < 0$), 则下列选项正确者为 ____ (单项选择题).

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. (1997 年考研题)

【解】 正确选项为 (B).

对已知方程令 $x = x_0$, 则 $f(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0}$, 由初等函数 $y = e^x$

的性质, 当 $x_0 > 0$ 时, $f(x_0) > 0$, 当 $x_0 < 0$ 时, 亦有 $f(x_0) > 0$. 因而 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点. **【解毕】**

【寓意】 本题考查极值点、拐点概念, 并考查初等函数的性质.

例 6.3.5 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, $f(a) - f(x)$ 是 $(a - x)^2$ 的同阶无穷小量 ($x \rightarrow a$), 则存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时, 必有 ____ (单项选择题).

(A) $(x - a)[f(x) - f(a)] > 0$;

(B) $(x - a)[f(x) - f(a)] < 0$;

(C) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} > 0$ ($x \rightarrow a$);

$$(D) \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t-x)^2} < 0 (x \neq a).$$

【解】 因 $f(a)$ 为极大值, 则在 a 的邻域内必有 $f(x) - f(a) < 0$, 而 $x - a$ 在 $x = a$ 点两侧变号, 于是 (A) 与 (B) 不正确. 另外, 在题设条件下, (C) (D) 两个极限均存在, 由 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$, 再次注意到 $f(a) - f(x) < 0$, $(t - x)^2 > 0$, 因此, 只有选项 (C) 正确. **【解毕】**

【寓意】 本题有一定难度, 考查极限与极值概念, 以及极限的保序性.

3. 函数的渐近线

函数的渐近线实质上是极限问题, 考查一个函数的渐近线, 要按照一定的程序来做. 渐近线有 3 类, 对 $y = f(x)$ 的渐近线应在 $(-\infty, +\infty)$ 上考虑.

(1) 水平渐近线 若存在常数 A , 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $y = f(x)$ 沿 x 轴正向有水平渐近线 $y = A$, 而当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 时则 $y = f(x)$ 沿 x 轴负向有水平渐近线 $y = A$.

(2) 垂直渐近线 若存在常数 a , 使当 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$, 则 $y = f(x)$ 有右侧垂直渐近线 $x = a$, 而当 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ 时, 有左侧垂直渐近线 $x = a$ (一般 $x = a$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点).

(3) 斜渐近线 若有常数 a 与 b , 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, 则 $y = f(x)$ 沿 x 轴正向有斜渐近线 $y = ax + b$, 而当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ 时, 则 $y = f(x)$ 沿 x 轴负向有斜渐近线 $y = ax + b$.

考查 $f(x)$ 是否有斜渐近线的一般程序如下:

1° 考查 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ 是否为 $(+\infty$ 或 $-\infty)$? 若是, 则转向 2°; 若不是, 则无斜渐近线.

2° 考查 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 是否为一个非零常数 a ? 若是, 则转向 3°; 若不是, 则无斜渐近线.

3° 对 2° 中的常数 a , 是否有 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ 存在? 若存在, 则斜渐近线为 $y = ax + b$.

例 6.3.6 求 $y = x - e^x$ 的渐近线.

【解】 无水平渐近线, 亦无垂直渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x) = -\infty, \quad \text{并且}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x - e^x) = -\infty, \quad \text{因此沿 } x \text{ 轴正向无斜渐近线. 进一步}$$

考查 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (x - e^x) = 1$, 因此必有斜率为 1 的斜渐近线(沿 x 轴负向), 并且 $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x - x) = 0$, 于是沿负 x 轴方向的斜渐近线为 $y = x$. **【解毕】**

例 6.3.7 设 $f(x)$ 满足 $3f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}, x > 0$, 求 $f(x)$ 的极值与斜渐近线.

【解】 本题考查函数关系及其极值与渐近线等性态. 令 $x = \frac{1}{t} (t > 0)$, 则有 $3f\left(\frac{1}{t}\right) - f(t) = t$, 解方程

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = \frac{1}{x},$$

$$-f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

得到 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{8}x + \frac{3}{x}$, $f(x) = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$. 令 $f'(x) = 0$ 得驻点

$x_1 = -3, x_2 = 3, f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$. 因此, 极大值为 $f_M =$

$f(x_2) = -\frac{3}{4}$, 极小值为 $f_m = f(x_1) = \frac{3}{4}$, 且斜渐近线为 $y = \frac{1}{8}x$.

【解毕】

例 6.3.8 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有二阶导数, 且满足 $f(a) = A > 0$, $f'(a) < 0$, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时 $f''(x) < 0$, 试证明 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内恰有一个零点.

【思路】 设法利用连续函数的零点定理, 即找出能使 $f(x)$ 取得负值的点.

【证】 (方法 1)

先证 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调减少. 对 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上应用拉格朗日中值定理有

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a),$$

其中 $\xi \in (a, x)$. 由 $f'(\xi) < 0$, 则有 $f(x) < f(a) < 0$, 于是 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调减.

再次应用拉格朗日中值定理可有

$$f(x) - f(a) = f''(\eta)(x - a), \quad \eta \in (a, x).$$

注意到 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 亦单调减少, 则 $f''(\eta) < f''(a)$, 于是 $f(x) - f(a) < f''(a)(x - a)$, 或者记为

$$f(x) < f(a) + f''(a)(x - a).$$

$f(a) = A > 0$, $f''(a) < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 上述不等式右端趋于负无穷, 即 $f(x)$ 能取到负值. 事实上, 取 $x_1 = -\frac{f(a)}{f''(a)} + a$, 则当 $x > x_1$

时, 必有 $f(x) < 0$,

于是对 $x \in (x_1, +\infty)$, 在 $[a, x]$ 上应用连续函数零点定理, 则存在 $x_0 \in (a, x)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

另外由 $f(x)$ 的单调性, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内至多有一个零点, 因而 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内恰有一个零点.

(方法 2)

利用几何意义, 考虑 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处的切线方程为 $y = y(x)$

$= f(a) + f'(a)(x - a)$. 取 $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, 则 $y(x_1) = 0$, 即 x_1 为切线在 x 轴上的截距. 构造函数

$$F(x) = f(x) - y(x) = f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a)),$$

显然, $F(a) = 0$, $F(x_1) = f(x_1)$, $F'(x) = f'(x) - f'(a)$. 又当 $x > a$ 时 $f'(x) < 0$, 于是 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为减函数, 因此, 当 $x > a$ 时有 $F'(x) < 0$, 即 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上亦为减函数, 由 $F(a) = 0$, 则有 $F(x_1) = f(x_1) < 0$, 对 $f(x)$ 在 $[a, x_1]$ 上应用连续函数零点定理, 则 $\forall x_0 \in (a, x_1)$ 使得 $f(x_0) = 0$. 这说明至少有一个零点, 唯一性证明方法同方法 1. 【证毕】

【寓意】 这是利用导数研究函数性态的一个基本例题, 包括的知识点有极限、连续函数、增减性及微分中值定理. 在(方法 2)中, 应注意到曲线 $y = f(x)$ 位于 $x = a$ 处切线的下方, 且为上凸, 穿过 x 轴只有一次. 另外, 这一例题与后面的综例 6.5.1 不同, 那里的情形比此例要复杂一些.

6.4 洛必达法则与泰勒公式

1. 洛必达法则

由微分中值定理导出的洛必达法则是处理不定型极限问题的有力工具, 但应用时稍不谨慎也会出错误, 洛必达法则可分以下两种情况

1° 极限状态为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型 ($x \rightarrow a^+$ 或 $x \rightarrow a^-$, 或 $x \rightarrow \infty$);

2° 极限状态为“ $\frac{0}{0}$ ”型 ($x \rightarrow a^+$ 或 $x \rightarrow a^-$, 或 $x \rightarrow \infty$).

在两种情形中要求满足的条件是类似的, 其中最容易忽略的是极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在这样一类条件.

例 6.4.1 设 $f(x)$ 为可导函数, $f(0) = f'(0) = 1$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\sin x}.$$

【解】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x - 0} = f'(0) = 1.$$

【解毕】

【注】 下面做法是一类典型错误.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x f'(\sin x)}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(\sin x) \\ &= f'(0) = 1. \end{aligned}$$

上述做法, 尽管答案正确, 但做法是错误的, 在应用洛必达法则时, 忽略了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1}$ 的极限属于未知, 因为本题没有给出 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性条件, 只给了 $f(0) = 1$ 存在. 正确做法是应用导数定义及 $f'(0) = 1$ 存在的条件. **【解毕】**

例 6.4.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$. (1991 年考研题)

【解】 (方法 1)

对幂指型函数 x^x 一般改写为 $e^{x \ln x}$ 处理比较方便. 显然

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}(\cos x - 1)}.$$

对指数部分的极限运用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x} \sin x}{1} = -\frac{1}{2}.$$

因此原极限值为 $e^{-\frac{1}{2}}$ (用到了复合极限定理). 另外也可用等价无穷小量替换.

(方法 2)

注意到这是“ 1^∞ ”型极限状态,凑成标准极限便有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x}}.$$

以后步骤同(方法 1).

【解毕】

例 6.4.3 考查函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性(1992 年考研题).若不连续,指明间断点类型,若为可去间断点,将 $f(x)$ 修正为连续函数.

【解】 当 $x \neq 1$ 时,有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(x-1) \cos(x-1)}{-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2}{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2}{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}} = -\frac{4}{2} = f(1), \end{aligned}$$

因此 $x=1$ 为可去间断点,定义 $f(1) = -\frac{4}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

【解毕】

例 6.4.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1 - \cos x}$.

【解】 (方法 1)

考虑 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|\sin x| - \ln|x|}{1 - \cos x}$, 只须求指数部分的极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|\sin x| - \ln|x|}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

因此原极限为 $e^{-\frac{1}{3}}$.

(方法 2)

类似例 6.4.2(方法 2), 对这类“1”型极限状态, 凑成标准极限, 请读者完成具体计算. 【解毕】

例 6.4.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$.

【解】 这是“ $\infty - \infty$ ”的极限状态, 通分后便有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - (x-1)}{\ln x(x-1)}.$$

上述极限已成为“ $\frac{0}{0}$ ”型, 运用洛必达法则求解, 答案为 $\frac{1}{2}$. 【解毕】

例 6.4.6 设 $b > a > 0$, $f(a) = a^2$, 求极限

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}.$$

【思路】 分子分母均为两点函数值之差, 应意识到这一极限与导数定义有关.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{b - a}{\ln b - \ln a} \\ &= a f'(a) = a^3. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 如用洛必达法则, 分子分母同时关于 b 求导数, 则有原极限为 $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{1/b} = a^2 \cdot a = a^3$, 但这一做法是错的, 这里用的是 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 不是导数定义. 题设条件不包括 $f(x)$ 的连续性.

2. 泰勒公式

泰勒公式是微分中值定理的进一步推广,它全面深刻地反映了函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处或其附近的微观性态,主要用于函数性态的理论分析,函数值的近似计算.用于理论分析主要包括:

(1) 函数零点与极值点的分析;

(2) $f(x) - f(x_0)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时做无穷小量的阶次估计与分析,包括某些极限运算.

(3) 某些类型不等式的证明,尤其是已知 $f'(x) > 0$ 时,对证明某些不等式或估计函数的上下界有重要作用.请注意, $f'(x) > 0$, 则由导数零点定理可知必有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$ (在某区间上).

泰勒公式的基本形式有两种:

设 $f(x)$ 在某邻域 $N(x_0, \delta)$ 内有 $n+1$ 阶导数,则泰勒公式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (6.9)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. 根据需要,常常记 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ 其中 $0 < \theta < 1$. (6.9) 式右端的第一项称为 n 阶泰勒多项式,第二项称为 n 阶拉格朗日余项,记为 $R_n(x)$.

当 $f(x)$ 在某 $N(x_0, \delta)$ 内有 n 阶导数时,其 n 阶泰勒公式可取如下的佩亚诺余项形式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r_n(x - x_0), \quad (6.10)$$

其中 $r_n(x - x_0)$ 是 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小量 $(x \rightarrow x_0)$, 常记为

$$r_n(x - x_0) = o(|x - x_0|^n). \quad (6.11)$$

对初等函数的泰勒公式,重点应掌握 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ 5 类基本展开式,并注意 x 的取值范围(可参见 13.6 节).

对常见复合初等函数应掌握直接展开法与间接展开法 .

例 6.4.7 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x_0 = 1$ 处的二阶泰勒公式 .

【解】 $f(1) = 1, f'(1) = 2, f''(1) = 2$, 因此有

$$x^2 = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 + 0 .$$

请注意, $R(x) = 0$, 三阶或更高阶的泰勒公式也是这一结果 .

【解毕】

例 6.4.8 设 $e^x - (ax^2 + bx + c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量 ($x \rightarrow 0$), 求 a, b, c 的值 .

【解】 运用佩亚诺余项的泰勒公式则有

$$\begin{aligned} e^x - (ax^2 + bx + c) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &\quad - ax^2 - bx - c \\ &= (1 - c) + (1 - b)x + \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + o(x^2) . \end{aligned}$$

欲使上式右端为 x^2 的高阶无穷小量 ($x \rightarrow 0$), 则必须 $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1$.

【解毕】

例 6.4.9 若 $e^{\tan x} - e^x$ 是与 x^n 同阶无穷小量 ($x \rightarrow 0$), 求 $n = ?$

【解】 本题可用洛必达法则试验 . 我们采用泰勒公式方法 . 首先对 $e^{\tan x} - e^x$ 进行预处理 .

$$e^{\tan x} - e^x = e^x e^{\tan x - x} - 1 ,$$

其中只有 $e^{\tan x - x} - 1$ 是无穷小量 ($x \rightarrow 0$), 只须估计其阶次即可 . 将 $\tan x$ 展开为泰勒公式

$$\begin{aligned} (\tan x) \Big|_{x=0} &= \sec^2 x \Big|_{x=0} = 1, \\ (\tan x) \Big|_{x=0} &= 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \Big|_{x=0} = 0, \\ (\tan x) \Big|_{x=0} &= 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x + 2\sec^4 x \Big|_{x=0} = 2 . \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\tan x - x &= x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) - x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \\ e^{\tan x - x} - 1 &= e^{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} - 1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

于是得知 $e^{\tan x} - e^x$ 为 3 阶无穷小量, 即 $n=3$.

【解毕】

例 6.4.10 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有二阶导数, 且满足 $f(a) = A > 0$, $f'(a) < 0$, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时 $f''(x) < 0$. 试证明 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内恰有一个零点.

【思路】 给出二阶导数取定号时, 可考虑用泰勒公式进行试验, 寻找有效方法.

【解】 这一题目即是例 6.3.8, 那里已经给出两个方法, 这里用泰勒公式处理. 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 处展开, 应有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2,$$

其中 ξ 满足 $a < \xi < x$, 显然 $f''(\xi) < 0$, $f(a) = A > 0$, 且 $f'(a) < 0$, 在上式中令 $x \rightarrow +\infty$, 则必有 $f(x) \rightarrow -\infty$, 因而存在 $x_0 \in (a, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < 0$. 其余步骤同例 6.3.8. 【解毕】

例 6.4.11 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, x_1, x_2, \dots, x_n 是 (a, b) 内任意 n 个不同的点, k_1, k_2, \dots, k_n 为正数, 若 $f''(x) > 0$, $x \in (a, b)$, 试证明

$$f\left(\frac{k_1 x_1 + \dots + k_n x_n}{k_1 + \dots + k_n}\right) < \frac{k_1 f(x_1) + \dots + k_n f(x_n)}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}. \quad (6.12)$$

【思路】 用泰勒公式试验.

【证】 任取 $x_0 \in (a, b)$ 及 $x \in (a, b)$, 在 $x = x_0$ 处将 $f(x)$ 展开得到

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间. 因 $f''(\xi) > 0$, 则有不等式

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

令 x 分别取的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, 则有

$$k_i f(x_i) > k_i f(x_0) + k_i f'(x_0)(x_i - x_0) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

将上述 n 个同向不等式相加即得到

$$\sum_{i=1}^n k_i f(x_i) > f(x_0) \sum_{i=1}^n k_i + f'(x_0) \sum_{i=1}^n k_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^n k_i f(x_0).$$

若取掉上述不等式右端第二项(即令其为零), 则剩下的不等式与要证的不等式相类似. 为此, 对任意取定的 x_1, x_2, \dots, x_n , 只须取

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

即有

$$f(x_0) < \frac{\sum_{i=1}^n k_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n k_i},$$

上述结果即为要证不等式.

【证毕】

【技巧】 同向不等式相加也是常用技巧, 由等式两端舍掉某定号的部分可得到相应的不等式.

【注】 不等式(6.12)是凸函数的又一等价性描述(此处为下凸), 读者可将不等式(6.12)反向, 取 $f'(x) < 0$ 进行证明.

6.5 用导数研究函数性态的综合例题

本节给出若干综合例题, 涉及的知识点包括连续函数性质, 增减性与极值以及泰勒公式等概念及应用技巧.

综例 6.5.1 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内有二阶连续导数, 且 $f'(0) = a > 0, f(0) = 0, f''(0) < 0$, 试问 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有多少个零点? 证明你的结论.

【解】 (方法 1)

对 $x \in [0, +\infty)$, 由 $f'(x) = a > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数, $f(x)$ 最多有一个零点, 进一步推知 $f(x)$ 最多有两个零点, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内最多有一个零点. 以下证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至少有一个零点, 为此, 只须证明有两点 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 异号即可.

在 $(0, x)$ 上应用拉格朗日中值定理可得到

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \quad a > 0 \quad (0 < \xi < x),$$

即有 $f(x) > ax + f(0)$, 令 $x = -\frac{f(0)}{a}$, 则 $f(x) = 0$, 即 $\forall x_1 > 0$, 使当 $x > x_1$ 时有 $f(x) > 0$. 在 $[0, x]$ 上, 对 $f(x)$ 考虑导数零点定理, $f(0) \cdot f(x) < 0$ (异号), 因此 $\forall x_0 \in (0, x)$ 使得 $f(x_0) = 0$, 并且当 $0 < x < x_0$ 时, $f(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时 $f(x) > 0$.

对任意 $x \in [0, x_0]$, 在 $[0, x]$ 上应用微分中值定理则有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x < 0, \quad \xi_1 \in (0, x), \text{ 即 } f(x) < 0,$$

在 $[x_0, x]$ 上又有 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x - x_0)$, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_2)(x - x_0), \quad \xi_2 \in (x_0, x),$$

令 $x = x_0 + \delta$, 得 $f(x) > 0$, 即存在 x_1 , 使 $f(x_1) > 0$. 综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内变号, 于是 $f(x)$ 至少有一个零点. 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有一个零点.

(方法 2)

用泰勒公式, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $\forall \xi \in (0, x)$, 使得 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$, 由 $f''(\xi) = a > 0$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &> f(0)x + \frac{1}{2}ax^2 \\ &= x(f(0) + \frac{1}{2}ax), \end{aligned}$$

对 $x > 0$, $ax > 0$, 又 $f(0) < 0$, 显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内变号, 故有零点.

另由 $f(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 最多有二个零点, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内最多有一个零点. 综上所述, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有一个零点. 【解毕】

【注】 上述例题中若将 $f(x) - a > 0$ 改为 $f(x) > 0$, 则结论不一定对, 请看以下两个例.

$$(1) f(x) = (x-1)^2 - 1, x \in (0, +\infty).$$

$f(0) = 0$, $f'(x) = 2(x-1)$, $f''(x) = 2 > 1 > 0$, 在 $x=2$ 处有 $f(2) = 0$. 符合上述例题条件与结论.

$$(2) f(x) = -\ln(x+1), x \in [0, +\infty).$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, 但对 $x \in (0, +\infty)$ 不能保证 $\frac{1}{(x+1)^2} - a > 0$ (事实上 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$), 这样的 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内无零点.

综例 6.5.2 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导数, 且对一切 $x \in (0, +\infty)$ 有 $f''(x) > 0$. 证明在 $(0, +\infty)$ 内曲线 $y = f(x)$ 上任一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与该曲线不相交(切点除外).

【证】 (方法 1)

设切线方程为 $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 并令

$$F(x) = f(x) - y(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

则只须证明 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内除 x_0 外无零点, 即证 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内定号.

由 $F(x) = f(x) - y(x) < 0$, 不妨假设 $F(x) > 0$ (根据导数零点定理之推论), 于是 $F(x)$ 为增函数, 又因为 $F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$, $F(x_0) = 0$, 因此 x_0 为 $F(x)$ 的极小值点, 且 $F(x_0) = 0$ (切点). 于是应有

当 $x > x_0$ 时, $F(x) > 0$, $F(x) > 0$; 当 $x < x_0$ 时, $F(x) < 0$, $F(x) > 0$. 即对任意 $x \in (0, +\infty)$, $F(x)$ 不变号, 因此 $F(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 内除 x_0 外无零点.

(方法 2)

设除切点 x_0 之外, 还有交点 $(x_1, f(x_1))$, 不妨可设 $x_1 > x_0$, 在 $[x_0, x_1]$ 上用拉格朗日中值定理, 则 $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

注意到上式右端恰为切线的斜率, 即有 $f'(\xi_1) = f'(x_0)$, 对 $f(x)$ 应用罗尔定理则应有 $\xi_2 \in (x_0, x_1)$ 使得 $f'(\xi_2) = 0$, 这与 $f'(x) \neq 0$ 矛盾, 于是在 x_0 处的切线除切点 x_0 外与 $y = f(x)$ 无交点.

(方法 3)

对(方法 1)中的 $F(x)$ 应有 $F(x_0) = 0, F'(x_0) = 0$, 将 $F(x)$ 在 x_0 处展开为一阶泰勒公式得到

$$F(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

由 $F(x) \neq 0$, 则 $f''(x)$ 必然取定号. 因而 $F(x)$ 当 $x \neq x_0$ 时亦取定号, 无零点. 【证毕】

综例 6.5.3 设连续周期函数 $f(x)$ 的周期为 1, 且 $f(1) = 0$, 在 $(0, 1)$ 内可导, 令 $M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, 试证明 $\exists \xi \in (1, 2)$ 使得

$$|f'(\xi)| \leq 2M.$$

【思路】 函数取值与导数值发生关系, 应联想到拉格朗日中值定理. 另外, 由周期性, 只须证明 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $|f'(\xi)| \leq 2M$.

【证】 $f(x)$ 连续, 则 $|f(x)|$ 亦连续, 又因 $f(0) = f(1) = 0$, 则 $|f(x)|$ 的最大值只能在 $(0, 1)$ 内取得, 即 $\exists x_m \in (0, 1)$, 使得

$$|f(x_m)| = M.$$

在 $[0, x_m]$ 及 $[x_m, 1]$ 上用拉格朗日定理可分别得到

$$\pm M - 0 = f'(\xi_1)x_m, \quad \xi_1 \in (0, x_m), \quad (1)$$

$$0 - (\pm M) = f'(\xi_2)(1 - x_m), \quad \xi_2 \in (x_m, 1) \quad (2)$$

对上述两式两端取绝对值后相加即可得到

$$2M = |f(x_1)|x_m + |f(x_2)|(1-x_m). \quad (3)$$

设 $|f(x_0)| = \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|\}$, 则 $x_0 \in (0, 1)$

并且 $2M = |f(x_0)|(x_m + 1 - x_m) = |f(x_0)|$.

再据周期性有 $f(x) = f(x+1)$, $\forall x \in (0, 1)$. 因此 $\forall x \in (1, 2)$, 使得 $|f(x)| = 2M$. 【证毕】

【技巧】 欲证不等式中有 $2M$, 想到 (1) 和 (2) 两式相加. (3) 式右端的处理是注意到了 $x_m \in (0, 1)$, x_m 及 $1 - x_m$ 可视为加权因子, 因而 (3) 式右端为 $|f(x_1)|$ 与 $|f(x_2)|$ 的加权和, 加权和的重要属性是它介于原来数组之最大最小值之间.

【寓意】 本题考查连续函数的最大最小值及拉格朗日中值定理等知识点.

综例 6.5.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $\forall x \in (a, b)$, 使得

$$|f(x)| \leq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

【思路】 对有二阶导数出现的场合, 应联想到泰勒公式.

【证】 对 $x \in (a, b)$, 分别将 $f(x)$ 在 $x_0 = a$ 及 $x_0 = b$ 处展开为一阶泰勒公式得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2, \quad \xi_1 \in (a, x);$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2, \quad \xi_2 \in (x, b).$$

欲出现 $(b-a)^2$, 则可令 $x = \frac{a+b}{2}$ (中点), 将上两式两端分别相减得到

$$f(a) - f(b) + \frac{1}{2!}(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)) \frac{(b-a)^2}{4} = 0,$$

取绝对值后便有

$$|f(b) - f(a)| = \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{1}{2} |f'(1) - f'(2)|,$$

取 $|f'(x)| = \max\{|f'(1)|, |f'(2)|\}$, 由三角不等式则有

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{1}{2} (|f'(1)| + |f'(2)|) \\ \leq \frac{(b-a)^2}{4} |f'(x)| \quad (a, b).$$

因此原不等式成立.

【证毕】

【技巧】 所证不等式中含有 a, b , 应意识到将 $f(x)$ 在 $x_0 = a$ 与 $x_0 = b$ 处展开才能出现 $f(b)$ 与 $f(a)$, 取 x 为区间 $[a, b]$ 的中点也是常用的技巧.

综例 6.5.5 设方程 $x^3 - 3x + A = 0$, 讨论 A 取何值时:

- (1) 方程有一个实根;
- (2) 方程有二个不同实根;
- (3) 方程有三个不同实根.

【思路】 引入一个函数, 讨论其零点.

【解】 设 $f(x) = x^3 - 3x + A$, 只须讨论 $f(x)$ 的零点个数.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = - \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = + \quad ,$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = 1, x_2 = -1$, 则得:

当 $x \in (-1, 1)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少;

当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加.

因此 $x_1 = 1$ 为极小值点, x_2 为极大值点, 考查

$$f(-1) \cdot f(1) = (A-2)(A+2) = A^2 - 4,$$

显然:(1) $f(-1)$ 与 $f(1)$ 同号时, $f(x)$ 的最大最小值位于 x 轴一侧, $f(x)$ 只有一个实根 $x_0 \in (-\infty, -1)$. 这时有 $A^2 - 4 > 0$, 即 $|A| > 2$.

(2) $A^2 - 4 = 0$, 即 $A = \pm 2$ 时, 即 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = -1$ 中有一个

是 $f(x)$ 的零点, 此时 $f(x)$ 共有二个不同零点.

(3) $f(-1) \cdot f(1)$ 异号时, $f(x)$ 有一零点 $x_0 \in (-1, 1)$, 且在 $(-\infty, -1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内各有一个零点, 即 $f(x)$ 共有三个相异零点, 此时 $A^2 - 4 < 0$, 即 $|A| < 2$. 【解毕】

【技巧】 三次实系数多项式必有两个局部极值点, 即极小值点与极大值点, 而在 $x \rightarrow -\infty$ 与 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 分别趋于异号无穷大.

综例 6.5.6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 证明 $\forall \xi \in (a, b)$ 与 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, $f(\eta) = 0$. (1996 年考研题)

【证】 (方法 1) 反证法

假设 $\forall x \in (a, b), f(x) \neq 0$, 不妨设 $f(x) > 0$, 考查两个单侧导数 $f'(a^+)$ 及 $f'(b^-)$, 由极限保序性得

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} > 0,$$

$$f'(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} > 0,$$

则立即有 $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 与题设条件矛盾, 因而必 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有三个不同零点, 即 $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$, 由罗尔定理, $\forall \eta_1 \in (a, \xi)$ 及 $\eta_2 \in (\xi, b)$ 使得

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0.$$

在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上再次应用罗尔定理, 则 $\forall \zeta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使得 $f'(\zeta) = 0$. 【证毕】

(方法 2)

设 $f'(a) > 0$, 则应有 $f'(b) > 0$, 按导数定义有

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} > 0 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} > 0, \text{ 即 } \forall \epsilon > 0,$$

$\forall \eta_1 > 0$, 使当 $0 < x - a < \eta_1$ 时, $f(x) > (f'(a) - \epsilon)(x - a)$.

又 $v_2 > 0$, 使当 $0 < b - x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) < (f(b) + \frac{1}{2}f'(b))(b - x)$.

对 $\delta_1 > 0$, 特别取 $\delta_1 = \frac{1}{2}f'(a) > 0$, 则 $f(x) > 0$, 对 $\delta_2 > 0$, 特别取 $\delta_2 = -\frac{1}{2}f'(b) > 0$, 则 $f(x) < 0$.

限制 $\delta_1 < \frac{a+b}{2}$ 且 $\delta_2 < \frac{a+b}{2}$, 则 $\forall x_1 \in (a, a + \delta_1)$ 与 $x_2 \in (b - \delta_2, b)$, 使得 $f(x_1) > 0$ 且 $f(x_2) < 0$, 于是由连续函数的零点定理, 必有 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$. 其余同方法 1. 【证毕】

【寓意】 本题考查连续函数的性质, 导数与极限的定义.

综例 6.5.7 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且满足 $|f'(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 为非负常数, $\xi \in (0, 1)$, 证明 $|f(\xi) - f(0) - f'(0)\xi| \leq 2a\xi + \frac{b}{2}\xi^2$. (1999 年考研题)

【思路】 有二阶导数的相关条件, 一般应试用泰勒公式方法.

【证】 $\xi \in (0, 1)$, 在 $x_0 = \xi$ 处将 $f(x)$ 展开为泰勒公式

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x - \xi)^2,$$

其中 $\eta = \xi + \theta(x - \xi)$, $0 < \theta < 1$, 分别令 $x = 0$ 和 $x = 1$ 得到

$$f(0) = f(\xi) + f'(\xi)(0 - \xi) + \frac{1}{2}f''(\eta_1)(0 - \xi)^2, \quad \eta_1 \in (0, \xi),$$

$$f(1) = f(\xi) + f'(\xi)(1 - \xi) + \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1 - \xi)^2, \quad \eta_2 \in (\xi, 1).$$

上两式两端相减

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) + \frac{1}{2}[f''(\eta_2)(1 - \xi)^2 - f''(\eta_1)\xi^2], \quad (1)$$

移项并利用三角不等式便有

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &\leq |f(1) - f(0)| \\ &\leq \frac{1}{2} |f''(\eta_2)| (1 - \xi)^2 + \frac{1}{2} |f''(\eta_1)| \xi^2. \end{aligned}$$

由 $|f(x)| \leq a$ 及 $|f'(x)| \leq b$, 上述不等式可导出

$$|f(c) - f(\omega)| \leq 2a + \frac{1}{2}b[(1-c)^2 + c^2]. \quad (2)$$

记 $\varphi(c) = (1-c)^2 + c^2$, $c \in (0, 1)$, 则 $\varphi'(c) = 4c - 2$, 令 $\varphi'(c) = 0$, 得 $\omega = \frac{1}{2}$ (驻点), 而 $\varphi''(c) = 4 > 0$, 即 $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ 为 $\varphi(c)$ 的极小值. 又 $\sup_{c \in (0,1)} \varphi(c) = 1$ ($\varphi(c)$ 在 ω 两侧单调增加, 且 $\lim_{c \rightarrow 0^+} \varphi(c) = 1$, $\lim_{c \rightarrow 1^-} \varphi(c) = 1$), 即有 $\frac{1}{2} \varphi(c) < 1$. 于是, 不等式(2)即可变

为 $|f(c) - f(\omega)| \leq 2a + \frac{1}{2}b$. 【证毕】

【技巧】 正确选择泰勒公式的展开点 $x_0 = c$ 是重要的, 而在展开式适用的 x 范围内令 x 取某些个别值也是必要的, 这些都是运用泰勒公式的常用技巧.

综例 6.5.8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) > 0$, $f(0) = f(1) = 0$. 已知 $\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$, 试证 $\max_{x \in [0,1]} f(x) \leq 8$.

【思路】 有 $f(x)$ 的条件, 应意识到应用泰勒公式.

【证】 首先 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 必有最大最小值, 又 $f(0) = f(1) = 0$, 则最大最小值不能同时在区间端点取得. 其次, 欲证 $\max_{x \in [0,1]} f(x) \leq 8$ 只须证明 $\forall x \in [0, 1]$, 使得 $f(x) \leq 8$ 即可.

设 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = \min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$, 则由费马定理得到 $f'(x_0) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$, 将 $f(x)$ 在 x_0 处展开得到

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \\ &= -1 + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \quad (\xi \text{ 在 } x_0, x \text{ 之间}). \end{aligned}$$

我们证明上述等式中的 $f''(\xi) \leq 8$ 即可. 由上有

$$f''(\xi)(x-x_0)^2 \leq 2f(x) + 2, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

(1) 若 $x_0 = 0, \frac{1}{2}$, 在(1)式中令 $x = 0$, 则应有 $(x - x_0)^2 < \frac{1}{4}$, 此时便有 $f(x) > 8$.

(2) 若 $x_0 = \frac{1}{2}, 1$, 在(1)式中令 $x = 1$, 便又有 $f(x)(1 - x_0)^2 < \frac{1}{4}f(x)$, 但 $f(x)(1 - x_0)^2 = 2f(1) + 2 = 2$, 于是 $f(x) > 8$.

(3) 若 $x_0 = \frac{1}{2}$, 在(1)式中令 $x = 0$ 或 1 均可得到 $f(x) = 8$.

综上, 则有 $\max_{x \in (0, 1)} f(x) = 8$. 【证毕】

【技巧】 对某些表达式中的参数, 如本题中的 x_0 , 分情况讨论是又一常用技巧.

综例 6.5.9 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{b - a}$.

【解】 由罗尔定理, $\forall x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = 0$, 观察要证的等式含有 $f''(\xi)(b - a)$, 因此引入函数 $F(x) = (b - x)^2 f(x)$, $F(b) = F(x_0) = 0$, 再次由罗尔定理得 $\forall \xi \in (x_0, b)$, 使

$$F'(\xi) = 0, F'(x) = -2(b - x)f(x) + (b - x)^2 f'(x),$$

令 $x = \xi$, 则有

$$2(b - \xi)f(\xi) = (b - \xi)^2 f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, b).$$

即 $f''(\xi)(b - a) = 2f'(\xi)$. 即欲证等式成立. 【证毕】

【技巧】 按某些特定情形, 构造一个相应的函数是常用的技巧.

综例 6.5.10 试证明函数 $f(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\sin t$ 在 $0, \frac{\pi}{2}$ 内有唯一最小值点.

【证】 $f(t) = \frac{2}{3} \sin t + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} \cos t$, 因为

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -\frac{1}{2} < 0, \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(t) = \frac{2}{3} > 0.$$

所以, 根据极限的保号性知 $\forall a \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(a) < 0$; 又 $\forall b \in$

$(a, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(b) > 0$.

于是根据导数零点定理得 $\forall c \in (a, b) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $f(c) = 0$.

$f(t) = \frac{4}{3} \cos t - \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} \sin t > 0 \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 即 $f(t)$ 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调增加, 从而, $f(t)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内仅有一个零点.

又 $f(c) = 0$, 因此 $f(c)$ 是唯一极小值, 也是唯一最小值. **【证毕】**

【技巧】 本题要求证明存在唯一最小值点, 这一最小值点不易解出, 只须证明其存在性及唯一性. 存在性证明尚有其他做法.

综例 6.5.11 设在某邻域 $N(0, \delta)$ 内 $f(x)$ 存在. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \frac{f(x)}{x})^{1/x} = e^2$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

$1 + x + \frac{f(x)}{x} = e^{2x}$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

【思路】 利用标准极限及无穷小量比阶概念, 并按导数定义求 $f'(0)$ 及 $f''(0)$.

【解】 首先必须有 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + \frac{f(x)}{x}) = 1$ (否则 $1 + x + \frac{f(x)}{x}$ 的极限不为 1, 则与已知极限值 e^2 相抵), 进一步有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 于是

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 由 $f(x)$ 的连续性得到 $f(0) = 0$; 其次, 再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 于是

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 由 $f(x)$ 的连续性得到 $f(0) = 0$; 其次, 再由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, 按导数定义得到 $f'(0) = 0$ (此结果亦可由

洛必达法则得到, 因为 $f(x)$ 连续).

另外, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x + \frac{f(x)}{x}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln 1 + x + \frac{f(x)}{x}} = e^2$. 由复合极

限运算法则, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 1 + x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{f(x)}{x^2}.$$

由极限运算法则得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 - 1 = 1.$$

由上式利用洛必达法则, 又有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f'(0) \text{ (存在)}, \end{aligned}$$

于是 $f'(0) = 2$.

【解毕】

【技巧】 对无穷小量的比阶与阶次估计在本题中得到充分体现, 并且两次用到导数的极限表示. 在求 $f'(0)$ 时, 若用两次洛必达法则, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0), \text{ 得出 } f''(0) = 2.$$

虽然结果正确, 但这里用到了 $f(x)$ 连续的条件, 本题没有这种条件, 因而做法错误.

【寓意】 本题考查的知识点包括极限的存在性与运算, 导数定义, 连续函数性质与概念, 标准极限.

综例 6.5.12 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + c}{x - c}^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x - 1)],$$

求 c 的值.

(2001 年考研题)

【解】 由条件易见 $c > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x+c}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c} \left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c} \cdot \frac{2c}{x-c}} = e^{2c}.$$

由拉格朗日定理, 有

$$f(x) - f(x-1) = f(\xi) \cdot 1, \quad (1)$$

其中 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间, 那么

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow c} f(\xi) = e.$$

再由已知 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = e$, 于是 $e^{2c} = e$, 故 $c = \frac{1}{2}$. **【解毕】**

【技巧】 凑出标准极限是技巧之一, 对已知极限等式右端联想到与导数建立关系, 从而有等式(1), 这是技巧之二.

综例 6.5.13 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + o(x),$$

其中 $o(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

(2000 年考研题)

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + o(x)]$, 得 $f(1) - 3f(1) = 0$, 故 $f(1) = 0$.

又

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sin x} + \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 8, \end{aligned}$$

设 $\sin x = t$, 则有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1-t) - f(1)}{-t} = 4f'(1), \end{aligned}$$

所以 $f(1) = 2$.

由已知 $f(x+5) = f(x)$, 所以 $f(6) = f(1) = 0$, $f(6) = f(1) = 2$, 故所求的切线方程为 $y = 2(x - 6)$. **【解毕】**

【技巧】 由极限等式转化为导数定义的极限的模式是重要技巧. 导数定义相应的极限形式可以有各种变形技巧, 这在处理许多问题时尤为重要.

【寓意】 以上两题考查极限运算与导数定义, 等价无穷小量与拉格朗日中值定理.

综例 6 5 14 设常数 $a > 1$, $x_1 = a$, $x_n = a^{x_{n-1}}$ ($n = 2, 3, \dots$), 求使序列 $\{x_n\}$ 收敛的常数 a 之取值范围.

【思路】 这类问题可采用倒叙的方法, 即先假设 $\{x_n\}$ 收敛, 求出 a 的取值范围, 而后再证明在所得 a 的范围内, 序列 $\{x_n\}$ 收敛.

【解】 假设 $\{x_n\}$ 收敛, 并记 $\lim_n x_n = x$, 由 $\lim_n x_{n+1} = \lim_n x_n$ 及 $x_{n+1} = a^{x_n}$, 则方程

$$x = a^x \quad (1)$$

必有解, 记 $f(x) = x - a^x$, 考查 $f(x)$ 的零点, 或考查 a 满足什么条件时可使方程(1)有解. 方程(1)有解等价于 $y = x$ 与 $y = a^x$ 有交点, 至少应相切, 先求切点, 即求解

$$f(x) = 1 - a^x \ln a = 0,$$

$$x = a^x.$$

或

$$1 - x \ln a = 0, \quad (2)$$

$$1 - a^x \ln a = 0. \quad (3)$$

由(2)式得 $x_0 = \frac{1}{\ln a}$, 由(3)式得到 $x_0 = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a}$, 于是得到 $a = e^{\frac{1}{e}}$, 并且切点为 $x_0 = e$.

注意到当 a 变小时 $y = a^x$ 的曲线会趋于平缓, 即会使 $y = a^x$

与 $y = x$ 由相切变为相交, 亦即 $f(x)$ 的零点会由一个 (切点 x_0) 变为两个. 特别当 $a = 1$ 时 $y = a^x = 1$, 而题设条件为 $a > 1$, 因此得到 a 的取值范围为

$$1 < a < e^{\frac{1}{e}}. \quad (4)$$

以下证明当满足(4)时, 序列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$x_1 = a > 1, x_2 = a^{x_1} = a^a > a = x_1.$$

假设 $x_n = a^{x_{n-1}} > x_{n-1}$, 则应有

$$x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n.$$

由归纳法, $\{x_n\}$ 为单调增序列. 再看有界性:

$$x_1 = a < e, \quad (x_0 = e \text{ 为切点的横坐标})$$

$$x_2 = a^{x_1} = a^a < (e^{\frac{1}{e}})^e = e.$$

假设 $x_n < e$, 则 $x_{n+1} = a^{x_n} < a^e < (e^{\frac{1}{e}})^e = e$. 因此 $\{x_n\}$ 有上界 e , 故 $\{x_n\}$ 收敛. 【解毕】

【寓意】 本题考查初等函数性态, 连续函数的零点, 导数与切线概念以及极限的存在性准则.

综例 6.5.15 设可导函数 $f: [a, b] \rightarrow (a, b)$, 满足条件 $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1$. 证明:

(1) 函数 $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$ 在 (a, b) 中有唯一不动点, 即存在唯一的 $x^* \in (a, b)$, 使得 $x^* = g(x^*)$;

(2) 对任意给定的初值 $x_0 \in [a, b]$, 由迭代公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

所确定的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $g(x)$ 的不动点.

【证】 (1) (方法 1)

设 $F(x) = g(x) - x$, $x \in [a, b]$, 则 $F(x) = \frac{1}{2}[f(x) - x]$, 且

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.因为已知 $a < f(a) < b$, 故有 $F(a) = \frac{1}{2}[f(a) - a] > 0$, $F(b) = \frac{1}{2}[f(b) - b] < 0$.于是根据零点定理得 $\forall x^* \in (a, b)$, 使 $F(x^*) = 0$, 即 $x^* = g(x^*)$.

(方法2)

设 $\varphi(x) = f(x) - x$, 则 $\varphi(a) = f(a) - a > 0$, $\varphi(b) = f(b) - b < 0$, 即 $\forall x^* \in (a, b)$, 使得 $\varphi(x^*) = 0$, 即 $x^* = f(x^*)$, 由 $g(x)$ 的表达式, 即有 $g(x^*) = \frac{1}{2}(x^* + f(x^*)) = x^*$.

下面证明不动点的唯一性.

记 $L = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$, 则 $L = \max_{x \in [a, b]} |\frac{1}{2}(1 + f'(x))| < 1$, 若设 x^* , x_0 为 $g(x)$ 的两个不动点, 则

$$\begin{aligned} |x^* - x_0| &= |g(x^*) - g(x_0)| \\ &= |g'(x^*)(x^* - x_0)| = L|x^* - x_0|, \end{aligned}$$

其中 x^* 在 x^* 与 x_0 之间, $0 < L < 1$, 将上述不等式移项, 即有 $|x^* - x_0|(1 - L) = 0$. 因为 $x^* \neq x_0$, 则应有 $1 - L = 0$, 矛盾, 于是必有 $x^* = x_0$.

(2) (方法1)

由 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, $x_n = \frac{1}{2}[x_{n-1} + f(x_{n-1})]$ 得

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}[f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f'(x^*)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})[1 + f'(x^*)], \end{aligned}$$

其中 x^* 在 x_{n-1} 与 x_n 之间, 因而 $x^* \in [a, b]$. 由 $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1$, 得 $-1 < f'(x^*) < 1$, 故 $1 + f'(x^*) > 0$, 从而得 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$

同号 .

由数学归纳法可得数列 $\{x_n\}$ 单调, 又 $\{x_n\}$ 有界, 所以 $\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim_n x_n = \alpha$ 且由极限的保序性知道 $\alpha \in [a, b]$.

对迭代公式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由 $f(x)$ 连续性得 $\alpha = \frac{1}{2}[\alpha + f(\alpha)]$ 另由 $g(x)$ 的定义, 有 $g(\alpha) = \frac{1}{2}[\alpha + f(\alpha)]$, 故 $\alpha = g(\alpha)$, 即 α 为 $g(x)$ 的不动点.

(方法 2)

由条件知, $\forall x_0 \in [a, b]$, 都有 $x_n = g(x_{n-1}) \in [a, b]$. 所以

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |g(x_{n-1}) - g(x^*)| \\ &= |g'(x_n)| |x_{n-1} - x^*| \leq L |x_{n-1} - x^*| \\ &\dots \leq L^n |x_0 - x^*|, \end{aligned}$$

又 $\lim_n L^n = 0$, 由夹逼准则得 $\lim_n x_n = x^*$.

(方法 3)

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= |g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \\ &= |g'(x_n)| |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq L |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &\dots \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

对任意自然数 p , 用类似方法可得

$$|x_n - x_{n-p}| \leq L^{n-p} |x_1 - x_0|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则应有 $\lim_n |x_n - x_{n-p}| = 0$, 即 $\forall \epsilon > 0$ 及任意正整数 p 均有 $|x_n - x_{n-p}| < \epsilon$, 于是 $\{x_n\}$ 是柯西序列, 必收敛. 其余同(方法 1).

(方法 4)

当 $x_0 < x^*$ 时, 由 $0 < g'(x) < 1$ 及 $x^* - x_1 = g(x^*) - g(x_0)$ 知 $x_0 < x_1 < x^*$, 由归纳法可证, $x_{n-1} < x_n < x^*$, $\forall n$ 成立. 所以由单调有界准则得 $\lim_n x_n$ 存在, 且 $\lim_n x_n = x^*$.

当 $x_0 > x^*$ 时, 证明类似.

【证毕】

【注】 (1) 方法 1 可改为下列叙述 .

由条件知, " $x_0 \in [a, b]$, 都有 $x_n = g(x_{n-1}) \in [a, b]$, 即 $\{x_n\}$ 有界 .

由 $g(x) = \frac{1}{2}(1 + f(x)) > 0$, 并且

$$x_n - x_{n-1} = g(x_{n-1}) - g(x_{n-2}) = g'(\xi)(x_{n-1} - x_{n-2}),$$

在 x_{n-1} 与 x_{n-2} 之间得知, 当 $x_1 > x_0$ 时, $\{x_n\}$ 单增; 当 $x_1 < x_0$ 时, $\{x_n\}$ 单减. 故总有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

(2) 本题是一个多种思路的题目, 方法还不限于以上几种, 读者可将这一题目的方法进行归纳. 这里给出的(方法 1)较详细, 其他方法只是给出了关键步骤, 读者可将它们细化完整.

【寓意】 本题考查知识点包括: 极限存在准则, 连续函数性质, 导数及微分中值定理, 并且也同时考查函数的定义域与值域等概念.

综例 6.5.16 设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f'(x) > 0$, 试证:

(1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任一 $x > 0$, 存在唯一的 $\xi(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\xi(x))$ 成立;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) = \frac{1}{2}. \quad (2001 \text{ 年考研题})$$

【证】 (方法 1)

(1) 任给非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\xi(x)) \quad (0 < \xi(x) < 1). \quad (1)$$

因为 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续且 $f'(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号. 不妨设 $f'(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单增, 故 $\xi(x)$ 唯一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\eta)x^2, \quad \text{在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

所以 $x f'(\xi) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\eta)x^2$, 从而

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2} f''(\eta).$$

对上式二端令 $x \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 0$). 由 $f'(x)$ 连续可得极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = \frac{1}{2} f''(0),$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = \frac{1}{2} f''(0)$.

(方法 2)

(1) 同(方法 1)

(2) 对于非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = x f'(\xi) \quad (0 < \xi < x < 1).$$

由此可得到

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} + f'(0). \quad (2)$$

$$\text{又由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0), \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0),$$

最后得到 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = \frac{1}{2} f''(0)$. 【证毕】

【注】 (1) 式中的 ξ 实质是确定 0 与 x 之间某个值的一个参数, 即 $\xi = (\xi)x, 0 < \xi < 1$. 拉格朗日中值定理中的结论是至少有一个中值 ξ 使(1)式成立. 其几何意义是 $x = \xi$ 处 $y = f(\xi)$ 的切线与 $(0, f(0))$ 及 $(x, f(x))$ 两点连线相平行. 当 $f(x)$ 在 $(0, x)$ 之间曲线不改变凸性时, 即 $f''(x)$ 定号时(当然要求 $f'(x)$ 存在), 显然曲线任意点切线中与 $(0, f(0))$ 及 $(x, f(x))$ 连线相平行的只有一条, 即在 $x = \xi$ 处. 这时 $f'(x)$ 的增减性不改变.

而当 $f''(x)$ 在 $(0, x)$ 内变号时, 即 $f'(x)$ 增减性有改变, 则与

$(0, f(0))$ 及 $(x, f(x))$ 两点连线相平行的曲线之切线至少有两条. 且可推知 $f(x)$ 变号, 而 $f'(x)$ (若存在)定号时, 上述意义下的切线恰有两条, 这时拉格朗日中值便恰有两个不同的取值, 即 $f'(x)$ 恰有二个不同的取值.

另外, 本题证明中的(3)式, 再次用到了导数定义的极限形式及其变形技巧.

综例 6.5.17 试问方程 $e^{-\frac{x}{2}} = x(x^2 - 3)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内共有几个实根? 列出这些根的分布区间(互不相交).

【思路】 根据初等函数性质, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$, 而 $x(x^2 - 3)$ 为3次多项式, 与 x 轴有3个交点, 猜想 $y = e^{-\frac{x}{2}}$ 与 $y = x(x^2 - 3)$ 有3个交点.

【解】 取辅助函数

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} - x(x^2 - 3).$$

研究 $f(x)$ 的零点个数与分布区间即可.

首先试算函数值, 以寻找 $f(x)$ 的正负取值情况. 显然有4个点: $x = \pm 1$ 及 $x = \pm 3$ 是特殊点.

$$f(-3) = e^{\frac{3}{2}} > 0, f(-1) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0,$$

$$f(1) = e^{-\frac{1}{2}} + 2 > 0, f(3) = e^{-\frac{3}{2}} > 0,$$

且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 因而在 $x = 3$ 的右侧必有 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 事实上 $f(2) = e^{-1} - 2 < 0$, 于是至少有 $x_1 \in (-3, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, 2)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

其次, 考查 $f(x)$ 的各阶导数, 以确定 $f(x)$ 变号的次数.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 3x^2 + 3 \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上不定号;}$$

$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} - 6x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 仍然变号;

$f(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}} - 6 < 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定号.

因此有 $f(x)$ 为单调减函数, 最多有一个零点(变号一次). 进而推知, $f(x)$ 最多两个零点(变号两次), $f(x)$ 最多有三个零点(变号三次).

综上, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恰有三个零点, 分布区间为 $(-3, -1), (-1, 1), (1, 2)$. 【解毕】

综例 6.5.18 就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x - \frac{1}{2}\sin x = k$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论. (1997 年考研题)

【思路】 构造函数 $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x - k$, 讨论 $f(x)$ 的零点, 或构造函数 $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}\sin x$, 讨论 $\varphi(x)$ 的值域与 k 的关系.

【解】 (方法 1)

令 $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x - k$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上连续可导, 且 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x$, 令 $f'(x) = 0$ 解出驻点 $x_0 = \arccos \frac{2}{3} < 1$, 当 x

$\in [0, x_0]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少; 当 $x \in [x_0, \frac{1}{2}]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加. 因此 x_0 为 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内唯一极小值点, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2}) = -k$, $f(x_0) = x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 - k$, 于是可以断言:

(1) 当 $f(0) \cdot f(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内无零点, 此时有

$$k(x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 - k) < 0.$$

解此不等式有

$$\begin{array}{l} k > 0, \quad k < 0, \\ k > x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 \quad \text{或} \quad k < x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0. \end{array}$$

注意到 $\frac{1}{2}\sin x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2 - 4}{2} = \frac{x_0^2 - 4}{4} > 1$, 因而

$$x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 < 0, \text{ 于是得到 } k > 0 \text{ 或 } k < x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0.$$

(2) 当 $f(0) \cdot f(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $0, \frac{1}{2}$ 内恰有两个零点:

$x_1 \in (0, x_0)$ 及 $x_2 \in (x_0, \frac{1}{2})$, 此时有

$$k(x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 - k) > 0,$$

解此不等式有

$$\begin{array}{l} k < 0, \quad k > 0, \\ k > x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 \quad \text{或} \quad k < x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 < 0. \end{array}$$

上述第二组不等式无解, 因而得到

$$x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0 < k < 0.$$

(3) 当 $f(0) \cdot f(x_0) = 0$ 时, $f(x)$ 在 $0, \frac{1}{2}$ 内恰有一个零点.

此时应有 $f(x_0) = 0$ 或 $f(0) = 0$, 即有

$$k = 0 \text{ 或 } k = x_0 - \frac{1}{2}\sin x_0,$$

但 $k=0$ 时, 考查 $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x$, $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$, 且 $f'(x) =$

$\frac{1}{2} \sin x > 0$, $f(x)$ 为下凸函数, 故 $f(x) < 0$ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 于是得知 $k = 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无零点.

综上所述, 结论如下:

当 $k < x_0 - \frac{1}{2} \sin x_0$ 或 $k = 0$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无实根; 当 $k = x_0 - \frac{1}{2} \sin x_0$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有一个实根; 当 $x_0 - \frac{1}{2} \sin x_0 < k < 0$ 时, 原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有两个实根, 其中 $x_0 = \arccos \frac{2}{k}$.

(方法 2)

令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{2} \sin x$, 则 $\varphi(x)$ 连续可导, 且 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 解得驻点 $x_0 = \arccos \frac{2}{k} < \frac{\pi}{2}$, 且 x_0 为 $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内唯一极小值点, 又 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的值域为 $(y_0, 0)$, 其中 $y_0 = x_0 - \frac{1}{2} \sin x_0 = \varphi(x_0) < 0$, 于是得知

(1) 当 $k \in [y_0, 0]$, 即 $k < y_0$ 或 $k = 0$ 时, 方程 $\varphi(x) = k$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无根;

(2) 当 $k = y_0$ 时, $\varphi(x) = k$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一根;

(3) 当 $k \in (y_0, 0)$ 时, 由连续函数介值定理, 推知方程 $\varphi(x) = k$ 在 $(0, x_0)$ 和 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 内各有一个实根, 即在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恰有两

个根 .

【解毕】

【技巧】 在(方法 2)中, $(x_0) = y_0 < 0$, $(0) = \frac{1}{2} = 0$, x_0 满足

$0 < x_0 < 1 < \frac{1}{2}$, 对 $k \in (y_0, 0)$, 由连续函数的介值定理, 则 $\forall x_1$

$(0, x_0)$ 使得 $(x_1) = k$, 同时又 $\forall x_2 \in (x_0, \frac{1}{2})$ 使得 $(x_2) = k$. 连

续函数的零点定理与介值定理在本质上或概念上是相通的, 但它们的应用侧重面有所不同 .

综例 6.5.19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导 (端点有单侧导数), 且 $f(a^+) < f(b^-)$, 则对满足 $f(a^+) < c < f(b^-)$ 或 $f(b^-) < c < f(a^+)$ 的任意实数 c 均存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = c$ (称为导数介值定理, 作为导数零点定理之推论) .

【思路】 要证 $f(\xi) - c = 0$, $\xi \in (a, b)$, 考虑应用导数零点定理 .

【证】 取 $f(a^+) < c < f(b^-)$ 的情况证明 .

令 $F(x) = f(x) - cx$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$F(a^+) = f(a^+) - c < 0, F(b^-) = f(b^-) - c > 0,$$

于是由导数零点定理, 必有 $\xi \in (a, b)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即有 $f(\xi) = c$. 【证毕】

综例 6.5.20 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内没有第 1 类间断点 .

【思路】 由第 1 类间断点定义, 若有 $x_0 \in (a, b)$ 为 $f(x)$ 的第 1 类间断点, 则由极限概念可知, 在 x_0 的某邻域内一定存在两点 x 与 x , 使得 $f(x) < f(x)$, 而对介于 $f(x)$ 与 $f(x)$ 之间的任意实数 η , 均有 $\xi \in (x, x)$ 使得 $f(\xi) = \eta$, 由此可导出矛盾 .

【证】 反证, 假设存在 x_0 为 $f(x)$ 在 (a, b) 内的第 1 类间断点, 记 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = d$, 且 $c < d$, 不妨设 $c < d$, 则 $\eta = \frac{c+d}{2} > 0$,

$\nu > 0$, 使得:

当 $-(\nu) < x - x_0 < 0$ 时, $f(x) < c + \nu$;

当 $0 < x - x_0 < \nu$ 时, $f(x) > d - \nu$.

特别取 $\nu = \frac{1}{4}(d - c) > 0$, 则对任意 $x_1 \in (x_0 - \nu, x_0)$ 及任意 $x_2 \in (x_0, x_0 + \nu)$ 有 $f(x_1) < c + \nu < d - \nu < f(x_2)$, 于是存在 $\delta_1 \in (x_1, x_2)$ 及 $\delta_2 \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(\delta_1) = c + \nu$ 及 $f(\delta_2) = d - \nu$, 并且对介于 $f(\delta_1)$ 与 $f(\delta_2)$ 之间的任意实数 μ , 又存在 δ_1 与 δ_2 之间的一点 $\delta \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(\delta) = \mu$. 但是, 注意到 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 于是可知, 当 $\delta \in (x_1, x_0) \cap (x_0 - \nu, x_0)$ 时, $f(\delta) < c + \nu$, 而当 $\delta \in (x_0, x_2) \cap (x_0, x_0 + \nu)$ 时, $f(\delta) > d - \nu$, 这与 μ 介于 $c + \nu$ 与 $d - \nu$ 之间相矛盾. 因此 x_0 不为 $f(x)$ 的第 II 类间断点, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 内没有第 II 类间断点. 【证毕】

综例 6.5.21 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 试证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

【思路】 利用导数与极限概念, 估计 $\left| \frac{f(x)}{x} \right|$.

【证】 对足够大的 $x_0 > 0$, 在 $[x_0, x]$ 上应用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

另外, 对 $\frac{f(x)}{x}$ 进行如下预处理:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x} \\ &= f(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot \frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}. \end{aligned}$$

由三角不等式可有估计式

$$0 < \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |f(x_0 + \theta(x - x_0))| \left| \frac{x - x_0}{x} \right| + \left| \frac{f(x_0)}{x} \right|,$$

令 $x = x_0 + (x - x_0)$, 并注意 $\left| \frac{x - x_0}{x} \right| < 1$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0, \text{ 即有 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{x} = 0. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 综例 6.5.19 与综例 6.5.20 均为导数零点定理(综例 6.5.1)的直接推论, 与导数零点定理一起, 它们是研究导函数性态的重要工具与基础. 其中, 以导数零点定理最为基本. 其结论可直接引用. 综例 6.5.21 则是由导数性态决定函数 $f(x)$ 有水平渐近线的一个命题, 掌握这些内容会对微分与导数的知识起到良好的综合提高作用.

6.6 用导数研究函数性态的综合例题 ——不等式证明技巧

不等式的实质问题, 在许多场合下, 表现为函数在某种条件下的宏观性态, 因而运用微分学基本定理及相关的结论, 通过分析函数性态, 可以给出许多不等式的证明, 其中用到的知识与方法包括函数的增减性, 极值与最大最小值, 微分中值定理, 泰勒公式与凸性等, 涉及的基础知识又包括初等函数性质与基本不等式的运用. 常用技巧包括构造辅助函数, 合理选取变量与参数, 对含有两个或两个以上参数的不等式证明, 还应设法引入新的变量或参数, 以减少原不等式中参数的个数. 本节给出若干例题, 演示与训练典型方法与技巧.

综例 6.6.1 设 $b > a > e$, 则下列选项中唯一正确者为____(单项选择).

(A) $a^b > b^a$; (B) $a^b < b^a$; (C) $a^b = b^a$; (D) $a^b < b^a$.

【解】 引入一个变量 $x = b$, 则 $x > a > e$, 再引入一个函数

$$f(x) = \ln a^x - \ln x^a = x \ln a - a \ln x,$$

则只须考查 $x > a > e$ 时, $f(x)$ 的定号性. 显然

$$f(a) = 0, f(x) = \ln a - \frac{a}{x},$$

由 $a > e$, 则 $\ln a > 1$, 且因 $\frac{a}{x} < 1$, 因此 $f(x) > 0$. 在 $[a, x]$ 上应用拉格朗日中值定理则有

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a) > 0, \quad (a, x).$$

令 $x = b$, 即有 $a^b > b^a$, 正确选项为 (A).

【解毕】

【技巧】 对上述单项选择题, 如对初等函数性质很熟悉, 应判断出 $b > a$ 时, b 位于指数位置时, 取值为大.

综例 6.6.2 设 $e < x_1 < x_2$, 证明 $\frac{x_1}{x_2} < \frac{\ln x_1}{\ln x_2} < \frac{x_2}{x_1}$.

【证】 这是两个不等式, 先证右边不等式, 即证

$$x_1 \ln x_2 < x_2 \ln x_1.$$

取辅助函数 $y = \ln x$, 因 $x_2 > x_1 > e$, 则有

$$\ln x_2 > \ln x_1 > 1.$$

在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理

$$\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi},$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2)$, 于是 $\frac{x_1}{\xi} < 1 < \ln x_1$ 或 $\frac{1}{\xi} < \frac{\ln x_1}{x_1}$, 代入上述等式

则有

$$\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{\ln x_1}{x_1},$$

两端同乘以 $(x_2 - x_1)x_1$ 即有 $x_1 \ln x_2 < x_2 \ln x_1$, 原不等式左侧不等号证毕.

对右侧不等式, 引入 $\varphi(x) = x \ln x$, $x \in [e, +\infty)$, $\varphi'(x) = 1 + \ln x > 2 > 0$, 得知 $\varphi(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上为单调增函数, 于是 $x_2 > x_1 > e$ 时便有

$$x_2 \ln x_2 > x_1 \ln x_1,$$

即原不等式 $\frac{\ln x_1}{\ln x_2} < \frac{x_2}{x_1}$ 成立.

【证毕】

综例 6.6.3 证明当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时成立不等式 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$.

【证】 (方法 1)

考虑函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上的增减性与最小值.

$$f'(x) = \frac{(x - \tan x)\cos x}{x^2},$$

由基本不等式 $\sin x < x < \tan x$ 可知 $f'(x) < 0, x \in (0, \frac{1}{2})$, 因而

$f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上为严格单调减函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\pi}$, 于是 $f(x) >$

$\frac{2}{\pi}$ 对 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 成立.

(方法 2)

令 $g(x) = \frac{2x}{\pi} - \sin x$, 考查 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上的极小值与增减区间, 可得出欲证不等式. 具体步骤, 请读者完成, 可参考综例 6.4.18.

【证毕】

【注】 上述例题变为 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ ($0 < x < \pi$) 后成为 1999 年考研题.

综例 6.6.4 设 $x \in [0, 1], p > 1$, 证明不等式

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

【思路】 对含等号的不等式证明, 应首先考虑函数在给定区间上的最大最小值.

【证】 令 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 必有最大

最小值,先求驻点.

令 $f(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$ 为驻点, 且

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, 其次再考查端点, 有 $f(1) = f(0) = 1$, 因此 $\frac{1}{2^{p-1}}$

$f(x) \geq 1$.

【证毕】

【注】 在某区间内可导函数有唯一驻点时, 只须将驻点处函数值与区间端点处函数值(或单侧极限值)进行比较, 便可确定最大最小值.

综例 6.6.5 设 $1 \leq x \leq 3e$, 证明不等式

$$1 - (\ln 3)^2 \leq \ln x^2 - \ln^2 x \leq 1.$$

【证】 设 $f(x) = \ln x^2 - \ln^2 x$, $x \in [1, 3e]$, 则

$$f(x) = [2\ln x - (\ln x)^2]' = \frac{2}{x}(1 - \ln x),$$

令 $f(x) = 0$, 得唯一驻点 $x_0 = e$. 计算得 $f(e) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3e) = 1 - (\ln 3)^2 < 0$, 于是

$$\min_{x \in [1, 3e]} f(x) = f(3e) = 1 - (\ln 3)^2, \quad \max_{x \in [1, 3e]} f(x) = f(e) = 1,$$

从而得到不等式 $1 - (\ln 3)^2 \leq \ln x^2 - \ln^2 x \leq 1 \quad (1 \leq x \leq 3e)$.

【证毕】

综例 6.6.6 设 $a > b > 0$, $p > 1$, 证明不等式

$$p b^{p-1} (a - b) \leq a^p - b^p \leq p a^{p-1} (a - b).$$

【证】 首先, 此不等式有三个参数, 思路是选一个辅助函数, 首先须选一个变量. 原不等式经预处理可变为

$$p \frac{a}{b} - 1 \leq \frac{a}{b}^p - 1 \leq p \frac{a}{b}^{p-1} \cdot \frac{a}{b} - 1,$$

令 $t = \frac{a}{b}$, 则 $t > 1$, 只须证明

$$p(t-1) \leq t^p - 1 \leq p t^{p-1} (t-1),$$

显然可取 $F(t) = t^p - 1 - p(t-1)$, 则 $F(1) = 0$. 只须考查 $F(t) = p t^{p-1} - p = p(t^{p-1} - 1) > 0$ (因 $t > 1$), 所以 $F(t) > 0$.

对右侧不等式可设 $G(t) = t^p - 1 - p t^{p-1}(t-1)$, 则 $G(1) = 0$, 而 $G(t) = -p(p-1)t^{p-2}(t-1) < 0$, 则应有 $G(t) < 0$, 原不等式得证. 【证毕】

【技巧】 选取变量, 构造辅助函数, 研究函数的增减性或极值(包括最大最小值)是证明不等式的常用技巧.

综例 6.6.7 设 $x \in (0, 1)$, 证明不等式:

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2,$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}. \quad (1998 \text{ 年考研题})$$

【证】 (1) 令 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, 只须证 $x \in (0, 1)$ 时有 $f(x) < 0$, 显然 $f(0) = 0$, 而

$$f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, \quad f'(0) = 0,$$

$f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内符号不明显, 为此, 考查 $f''(x)$, $f''(x) = \frac{2}{x+1}(\ln(1+x) - x) < 0$, 因而 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内为单调减函数, 于是 $f'(x) < 0$, 进而推知 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) < 0$.

(2) 令 $\varphi(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, 考查 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的上下界.

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},$$

上式右端分子部分恰为(1)中的 $f(x)$, 因此当 $x \in (0, 1)$ 时, 由(1)的结论知 $\varphi(x) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调减, 又 $\varphi(x)$ 在半开区间 $(0, 1]$ 上连续, 且 $\varphi(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$, 于是有 $\varphi(x) > \frac{1}{\ln 2} - 1$. $\varphi(x)$ 在

$x=0$ 处不连续, 为此, 考查

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调减, 推知必有 $f(x) < \frac{1}{2}$. 综上, 即有原不等式成立. 【证毕】

【注】对极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 的计算也可用其他方法, 比如洛必达法则.

综例 6.6.8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足

$$xf'(x) + 3x[f(x)]^2 = 1 - e^{-x},$$

且 $f(0) = f'(0) = 0$, 证明当 $x > 0$ 时存在常数 A , 使得 $f(x) < Ax^2$, 指明 A 的取值范围.

【证】取辅助函数 $F(x) = f(x) - Ax^2$, 求出使 $F(x) < 0$ 成立时 A 的取值范围.

显然 $F(0) = 0$, $F'(x) = f'(x) - 2Ax$, $F''(x) = f''(x) - 2A$, 其中

$$f''(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} - 3(f'(x))^2 = \frac{1 - e^{-x}}{x} - 1$$

并且 $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 1$ (存在), 于是 $F''(x) < 1 - 2A$, 当且仅当 $A < \frac{1}{2}$ 时 $F''(x) < 0$.

考虑到 $F(0) = F'(0) = 0$, 由此推知 $F(x) < 0$, 且 $F'(x) < 0$, 即当 $A < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) < Ax^2$. 【证毕】

【注】对 $x > 0$ 成立不等式 $\frac{1 - e^{-x}}{x} < 1$, 请读者练习证明.

综例 6.6.9 设 $0 < a < b$, 证明不等式 $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

【思路】 将两个参数化为一个参数,进而构造辅助函数.

【证】 将原不等式变为 $\ln \frac{b}{a} > \frac{2 \frac{b}{a} - 1}{1 + \frac{b}{a}}$, 进而可选变量 $x = \frac{b}{a} >$

1, 并取辅助函数

$$F(x) = (1+x)\ln x - 2(x-1).$$

显然 $x > 1$, 且 $F(1) = 0$, 只须证明当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $F(x) > 0$.

$$F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, \quad F(1) = 0,$$

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0.$$

因而 $F(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为单调增函数, $F(x) > F(1) = 0$, 于是 $F(x)$ 亦在 $[1, +\infty)$ 上单调增加, 故 $F(x) > F(1) = 0$. 即知原不等式成立. **【证毕】**

综例 6.6.10 设 $x > 0$, 证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

【思路】 欲证不等式等价于 $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$, 或等价于

$$(1+x)\ln(1+x) > x \text{ 并且 } \ln(1+x) < x.$$

【证】 (方法 1)

对原不等式左侧只须证 $(1+x)\ln(1+x) > x$. 令 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$, 则 $F(0) = 0$, 只须证 $F(x) > 0$ ($x > 0$), 即只须证 $F(x) > 0$. 而

$$F(x) = \ln(1+x) > 0 \quad (x > 0),$$

于是左侧不等式成立. 对右侧不等式只须令

$$G(x) = \ln(1+x) - x,$$

则 $G(0) = 0$, 而

$$G(x) = \frac{-x}{1+x} < 0 \quad (x > 0),$$

由此推知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调减, 对任意 $x > 0$ 显然 $f(x) < 0$, 即右侧不等式成立.

(方法 2)

注意到 $\ln 1 = 0$, 原不等式即等价于

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} < 1$$

观察这一形式, 似与拉格朗日中值定理有关, 引入辅助函数 $f(x) = \ln(1+x)$, 在 $[0, x]$ 上应用拉格朗日中值定理则有 $\xi \in (0, x)$, 使得

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi},$$

同时注意到 $x > 0$ 时有 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$, 因而

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1,$$

即有原不等式成立.

【证毕】

综例 6.6.11 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 证明不等式

$$(\alpha - \beta)\sec^2 \alpha < \tan \alpha - \tan \beta < (\alpha - \beta)\sec^2 \beta.$$

【思路】原不等式似与 $\tan x$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的拉格朗日中值定理有关.

【证】(方法 1)

令 $f(x) = \tan x$, 考虑 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ 上的拉格朗日中值定理, 则有

$$\tan \alpha - \tan \beta = \sec^2 \xi (\alpha - \beta) \quad (\alpha < \xi < \beta),$$

而 $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内为单调增函数, 即有

$$\sec^2 \alpha < \sec^2 \xi < \sec^2 \beta,$$

因此 $(-)\sec^2 < \tan - \tan < (-)\sec^2$.

(方法 2)

令 $F(x) = \tan x - \tan - (x -)\sec^2$, $x \in [,] \subset (0, \frac{1}{2})$, 考

虑 $F(x)$ 在 $[,]$ 上的最大最小值问题, 由

$$F'(x) = \sec^2 x - \sec^2 > 0, x \in [,],$$

得知 $F(x)$ 在 $[,]$ 上为单调增函数, 又 $F() = 0$, 因此 $F(x) > 0$, 即有原右侧不等式成立.

令 $(x) = \tan x - \tan - (x -)\sec^2 x$, 则 $() = 0$, 而

$$\begin{aligned} (x) &= \sec^2 x - \sec^2 - 2(x -) \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} \\ &= - \frac{2(x -)\sin x}{\cos^3 x} < 0 \quad (< x). \end{aligned}$$

因此 $(x) < 0$, 即知原右侧不等式成立.

【证毕】

综例 6.6.12 对任意实数 a 和 b , 试证明不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

【思路】 观察不等式两侧三个分式均有共同形状 $\frac{x}{1+x}$, 由此导致

引入辅助函数的思路.

【证】 取辅助函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, 则 $f(x)$ 在 $[,]$ 上连续, 在 $(,)$

内可导, 其中 $= |a+b|$, $= |a| + |b|$, 即假设 $|a+b| < |a| + |b|$.

由拉格朗日中值定理, 存在 $(,)$ 使得

$$f() - f() = f'() (-),$$

且 $f'() = \frac{1}{(1+)^2} > 0$, 因此 $f() < f()$, 即有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} < \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} < \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

而当 $=$ 时, 即 $|a+b| = |a| + |b|$ 时, 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

【证毕】

【注】 上述方法用到下列不等式:

对任意正数 x 与正数 a 和 b , 当 $b < a$ 时有

$$\frac{b}{a} < \frac{b+x}{a+x}, \quad (1)$$

对任意非负实数 a 和 b , 有

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}, \quad (2)$$

其中等号当且仅当 a, b 中至少有一个为零时成立.

上述不等式(1)的证明是简单的, 至于(2)的证明, 用(1)的结论及三角不等式即可完成, 请读者完成证明. 在需要的场合下, 可直接应用这两个基本不等式.

【技巧】 在不等式证明中, 运用函数增减性方法与拉格朗日中值定理方法在概念上是相通的, 是一类重要方法.

归纳起来, 证明不等式的常用方法与技巧包括:

- (1) 定义变量与辅助函数, 注意减少参数个数.
- (2) 讨论函数的增减性及初值.
- (3) 微分中值定理方法.
- (4) 最大最小值方法, 包括上下界或区间端点的单侧极限.
- (5) 泰勒公式方法.
- (6) 利用凸性证明不等式.
- (7) 注意使用基本不等式与初等函数的基本性质.

6.7 与微分学有关的经济数学

1. 引言

与经济学有关的微积分知识属于微积分的应用范畴. 它包括

常用的数学模型(常常表现为各类初等函数或初等函数分段表达的函数),导数与微分的应用以及部分积分的应用.有了良好的数学基础与功底,这部分内容应该是容易掌握的,它们不过是函数的连续性,增减性,极值问题或最大最小值问题的具体体现.

2. 常用经济数学模型

(1) 生产函数

$$y(K, L) = AK^k L^{1-k} \quad (6.13)$$

其中常数 $A > 0, 0 < k < 1$, K 为固定资产总额, L 为劳动力总值.

(2) 离散复利公式及其极限形式

设 M_0 为货币本金, 利率为 r (每期利率), 期数为 t , 每期结算 n 次, 则第 t 期的本利合计为

$$M(n, t) = M_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}.$$

若每期中都随时进行结算, 即 $n \rightarrow \infty$, 则在 t 期时本利总计为

$$M(t) = \lim_n M_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = M_0 e^{rt}. \quad (6.14)$$

特别当 $t=1$ 时, 有

$$M(n) = M_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n, \quad (6.15)$$

如令 $n \rightarrow \infty$, 又有

$$M = M_0 e^r. \quad (6.16)$$

(3) 连续复利公式

仍设 M_0 为货币本金, 连续复利为 r , $M(t)$ 为 t 时刻(期数)的本利总计, $M(t)$ 的增值(正或负)速度(变化率)与 $M(t)$ 成正比, 比例因子为复利 r , 则有

$$\frac{dM(t)}{dt} = rM(t). \quad (6.17)$$

解此微分方程, 并考虑到初值 $M(0) = M_0$, 则有

$$M(t) = M_0 e^{rt}.$$

由此看出,连续复利公式即为离散复利公式的极限形式(6.14)。

(4) 需求函数与供给函数

设 p 为商品价格,需求函数和供给函数分别记为

$$Q = f(p), \quad (6.18)$$

$$S = (p), \quad (6.19)$$

$f(p)$ 和 (p) 一般为线性函数、幂函数、对数函数或指数函数。一般来讲, $f(p)$ 为 p 的减函数,而 (p) 则为 p 的增函数。(6.18)也可称为销售函数。

(5) 收益函数

当把(6.18)视为销售函数时,收益函数定义为(Q 视为销售量)

$$G(p) = pf(p). \quad (6.20)$$

(6) 边际效益与弹性

1° 边际效益

任何一个经济数学模型 $y = f(x)$ (或多元函数 $u = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$),关于某一因素或变量的导数(或偏导数)称为关于该因素或变量的边际效益。

2° 相对变化率与弹性函数

设 $y = f(x)$ 为可导函数,称

$$R_f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{y} \frac{x}{x} = f'(x) \frac{x}{f(x)} \quad (6.21)$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数。这是一种相对(或相关)变化率的概念。(6.21)式又可记为

$$R_f(x) = x \frac{d \ln f(x)}{dx}. \quad (6.22)$$

弹性函数在某区间上取值的正负号有明显的经济背景意义,即对 $x \in [a, b]$ 。当 $R_f(x) > 0$ 时,表示 $f(x)$ 对 x 有正向的弹性效果;而当 $R_f(x) < 0$ 时,表示 $f(x)$ 对 x 有负向弹性效果。其实,在

绝大多数经济数学模型中, $f(x)$ 与 x 均为非负. 因而 $R_f(x)$ 的定号问题即是 $f(x)$ 的定号问题, 或者说是 $f(x)$ 的增减性问题.

显然, 一般来说, 对需求函数(6.18), 其弹性函数 $R_f(p)$ 为负定函数, 而对供给函数(6.19), 其弹性函数 $R(p)$ 为正定函数.

例 6.7.1 求 $y = x^{-1}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的弹性函数.

【解】 $y = x^{-1}$, 由(6.21)式得到

$$R_f(x) = x^{-1} \cdot \frac{x}{x} = -1. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 有时, 把弹性 $R = R_f(x)$ 视为一种度量, 因而需保证 $R_f(x)$ 为正定函数, 因此, 若 $f(p)$ 为一个销售函数, p 为销售价格, 定义 $f(p)$ 的弹性函数为

$$R_f(p) = -f'(p) \frac{p}{f(p)} = -p \frac{d \ln f(p)}{dp}. \quad (6.23)$$

例 6.7.2 下列模型称为固定替代弹性生产函数

$$w(x) = A(K^{-\alpha} + (1-\alpha)L^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (6.24)$$

试证明 $x \rightarrow 0$ 时 $w(x)$ 以(6.13)式的 $y(K, L)$ 为极限, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = y(K, L). \quad (6.25)$$

【证】 $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = A \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(K^{-\alpha} + (1-\alpha)L^{-\alpha})$,

由复合极限运算, 只须求指数部分的极限, 运用洛必达法则得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(K^{-\alpha} + (1-\alpha)L^{-\alpha}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K^{-\alpha} \ln K + (1-\alpha)L^{-\alpha} \ln L}{K^{-\alpha} + (1-\alpha)L^{-\alpha}} \\ &= \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L \\ &= \ln K L^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad \text{【证毕】}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = AK L^{1-\alpha}$.

例 6.7.3 假设某商品需求函数为 $Q = 12000 - 80p$, p 为单价, 商

品成本函数为 $C = C(Q) = 2500 + 50Q$, 每单位商品需纳税 2 元, 试求销售利润最大的商品单价和最大利润.

(1997 年考研题, 经济类)

【解】 (1) 以 B 为销售利润, 则

$$\begin{aligned} B(p) &= (12000 - 80p)(p - 2) - (2500 + 50Q) \\ &= -80p^2 + 16160p - 649000, \end{aligned}$$

$$B'(p) = -160p + 16160.$$

令 $B'(p) = 0$, 解出驻点为 $p_0 = 101$, 又因 $B''(p) = -160 < 0$, 则 p_0 为最大利润时的单价, 且最大利润为 $B(101) = 167080$ (元).

(2) P_0 即为销售额最大时的商品单价, 且最大销售额 $S(P_0) = a - bc^2$. **【解毕】**

例 6.7.4 设某商品销售量为 $Q = \frac{a}{p+b} - c$, 其中 a, b, c 均为常数, 且 $a > bc$.

(1) 问价格 p 在何范围变化时, 相应的销售额呈增加或减少?

(2) 求销售额最大时, 商品单价 p_0 及最大销售额.

(1996 年考研题, 经济类)

【解】 设销售额为 $S(p)$, 则

$$S(p) = Qp = p \left(\frac{a}{p+b} - c \right),$$

$$S'(p) = \frac{ab - c(p+b)^2}{(p+b)^2}.$$

令 $S'(p) = 0$, 解得驻点 $p_0 = \frac{ab}{c} - b = \frac{b}{c}(a - bc) > 0$, 因而

当 $0 < p < p_0$ 时, $S'(p) > 0$, $S(p)$ 为增函数, 销售额随 p 的增大而上升; 而当 $p > p_0$ 时, $S'(p) < 0$, $S(p)$ 为减函数, 销售额随 p 的增大而下降. **【解毕】**

例 6.7.5 某酒厂有一批新酒, 如现在出售 ($t=0$), 总收入应为 R_0

(元), 如窖藏到来日按陈酒出售, 在 t 年末总收入为 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}t}$, 假定银行利率为 r , 并以连续复利计息, 试求窖藏多少年后出售可使总收入的现值为最大, 并求 $r = 6\%$ 时的 t 值.

(1998 年考研题, 经济类)

【解】 本题为陈酒增值再复合以利息损失的综合问题. 货币增值的复利公式为

$$M(t) = M_0 e^{rt}.$$

本题为利息损失问题, 利率为负数, t 年末总值为 R 的货币现值应为

$$M(t) = R e^{-rt} \quad (r > 0).$$

又 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}t}$, 因而陈酒增值与利息损失的复合函数为

$$M(t) = R_0 e^{\frac{2}{5}t - rt}.$$

令 $M'(t) = \frac{1}{5} R_0 e^{\frac{2}{5}t - rt} - r R_0 e^{\frac{2}{5}t - rt} = 0$, 解得驻点 $t_0 = \frac{1}{25r^2}$ (唯一驻点), 又

$$M''(t) = \frac{1}{5} R_0 e^{\frac{2}{5}t - rt} - r^2 R_0 e^{\frac{2}{5}t - rt},$$

$$M''(t_0) = R_0 e^{\frac{1}{25r}} (-12.5r^3) < 0.$$

因而 t_0 为 $M(t)$ 的最大值点, 即窖藏 $\frac{1}{25r^2}$ 年后, 售出陈酒可使收入的现值为最大

当 $r = 0.06$ 时, $t = \frac{100}{9} = 11$ (年).

【解毕】

【注】 上述几个经济背景的题目均为一般初等函数的增减性与极值问题, 处理方法上也并不复杂. 因而我们可以认为, 只要按理工类数学的教学要求学好数学, 对应试经济类的数学试卷应不成问题.

第7章 原函数概念与积分技巧

7.1 引言

原函数的定义是基于导数的逆运算给出的,在定义的形式上与定积分没有直接的联系.原函数与定积分的关系是由变上限积分为工具引出的,最终表现为牛顿-莱布尼茨公式.

本章的概念重点是原函数的定义、性质与存在性,并且由原函数的概念可进一步了解一个函数的导函数对函数性态的影响与作用.

在方法上,应着眼于凑微分法、分部积分法与变数替换法的基本训练,其中以凑微分最为基本,这一方法的熟练程度将直接影响对积分技巧的掌握.求解不定积分问题,即求解原函数的技巧与方法训练也是掌握好定积分计算的必备基础.

7.2 原函数概念

1. 定义

设 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义,若 $x \in I$ 恒有函数 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$G(x) = \int f(x) dx = F(x) + c. \quad (7.1)$$

2. 性质

(1) 若 $f(x)$ 在某区间连续, 则其原函数 $F(x)$ 在该区间上一

定存在(原函数存在的充分条件) .

(2) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数, 则 $F(x)$ 在区间 I 上必然连续, 且可导, $F'(x) = f(x)$, " $x \in I$.

(3) 若常数 $c \neq 0$, 则

$$c \int f(x) dx = c \int f(x) dx \quad (7.2)$$

(4) 若常数 a, b 不同时为零, 则

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx. \quad (7.3)$$

(5) $f(x)$ 的任意两个原函数之间仅差一个常数 c .

(6) 若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数, 则 $f(x)$ 在区间 I 上有界(原函数存在的必要条件) .

例 7.2.1 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$, a, b 为非零常数, 则

$\int f(a^2x + b) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (单项选择) .

(A) $\frac{1}{2} F(x) + c$; (B) $a^2 F(x) + c$;

(C) $F(a^2x + b) + c$; (D) $\frac{1}{a^2} F(a^2x + b) + c$.

【解】 正确答案为(D) .利用复合函数求导即知(D)正确 .另外, 利用凑微分方法, 即有

$$\int f(a^2x + b) dx = \frac{1}{a^2} dF(a^2x + b) = \frac{1}{a^2} F(a^2x + b) + c .$$

【解毕】

【注】 上述两个方法中, 凑微分方法是更重要的, 这是求解不定积分的基础 .

例 7.2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}, & x < 0. \end{cases}$

则 $f(x)$ 的一个原函数为 ____ (单项选择) .

$$(A) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$(B) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}x, & x < 0. \end{cases}$$

$$(C) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$(D) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}x, & x < 0. \end{cases}$$

【解】 正确答案为(B).对分段表达的函数,首先在各个分段区间内验证是否有 $F'(x) = f(x)$;其次,还应验证 $F(x)$ 在区间的端点(或分界点)处是否连续,此外,还应验证是否可导. **【解毕】**

例 7 2 3 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有原函数,则下列命题中不正确的是 ____ (单项选择) .

(A) $f(x)$ 的任意原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(B) $f(x)$ 的任意两个原函数之差必为常数;

(C) $f(x)$ 的任意两个原函数之和必为 $2f(x)$ 的原函数;

(D) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, $G(x)$ 为连续函数,则 $G(F(x))$ 必为 $G(f(x))$ 的原函数.

【解】 正确答案为(D).选项(A), (B), (C)均为原函数的性质所决定的,因而正确.对选项(D)有

$$\frac{d}{dx}G(F(x)) = \frac{dG}{dF} \cdot \frac{dF}{dx} = G(F(x))f(x) - G(f(x)).$$

【解毕】

例 7 2 4 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的反函数, $g(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则下列选项中正确的是 ____ (单项选择).

- (A) $F(x)G(x) = 1$; (B) $f(x)g(f(x)) = 1$;
 (C) $\frac{dG(f(x))}{dx} = 1$; (D) $\frac{dF(g(x))}{dx} = 1$.

【解】 正确选项为(B). (A)的右端应为 $f(x)g(x)$; (C)的右端应为 $g(f(x))f(x) = xf(x)$; (D)的右端应为 $F(g(x))g(x) = f(g(x))g(x) = xg(x)$.

【解毕】

例 7 2 5 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的反函数, $g(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则下列选项中不正确的是 ____ (单项选择).

- (A) $F(x)G(x) = 1$; (B) $f(x) \cdot g(x) = 1$;
 (C) $\frac{dG(f(x))}{dx} = xf(x)$; (D) $\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{x}{f(x)}$.

【解】 由上例知道, 不正确选项为(A).

【解毕】

例 7 2 6 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $a > 0$, 则 $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$ ____ (单项选择).

- (A) $\frac{\sin ax}{a^3 x} + c$, (B) $\frac{\sin ax}{a^2 x} + c$,
 (C) $\frac{\sin ax}{ax} + c$, (D) $\frac{\sin ax}{x} + c$.

【解】 正确选项为(A).

$$\int \frac{f(ax)}{a} dx = \frac{1}{a} \int f(ax) d(ax) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin ax}{ax} + c = \frac{\sin ax}{a^3 x} + c.$$

【解毕】

例 7 2.7 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int_{\frac{1}{2}}^2 xf(x)dx$.
(1999 年考研题)

【解】 记 $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 xf(x)dx$, 则 $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 xdf(x) = \int_{\frac{1}{2}}^2 xf(x)$

$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx$. 因 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 因而

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{2},$$

所以 $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 xf(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x \cos x - \sin x}{x} dx = \frac{4}{2} - 1$. **【解毕】**

【寓意】 本题考查原函数概念, 凑微分法, 分部积分及牛顿-莱布尼茨公式.

7.3 原函数表示法与变上限积分

当 $f(x)$ 的原函数在区间 I 上存在时, 常用 $F(x)$ 表示, 记为一个变上限的积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \in I, x \in I, \quad (7.4)$$

必须特别指出, 当 $f(x)$ 的原函数存在性未知时, (7.4) 表示的函数 $F(x)$ 未必是 $f(x)$ 的一个原函数. 对 (7.4) 式表示的 $F(x)$ 只能说是一个变上限的积分, 对这里的 $F(x)$, 具有如下性质:

(1) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积 (即 $\int_b^a f(x)dx$ 存在) 时, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 (请读者完成证明).

(2) 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 并且 $F'(x) = f(x)$, 这时 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数.

例 7.3.1 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

求 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的表达式, 并讨论 $F(x)$ 在 $[0, 2]$ 内的连续性与可导性, 说明 $F(x)$ 是否为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的原函数.

【解】 当 $x \in [0, 1]$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$.

当 $x \in (1, 2]$ 时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 2tdt + \int_1^x \frac{1}{2}dt =$

$\frac{1}{2}(x+1)$, 于是 $F(x)$ 表达式为

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2}(x+1) = 1$, 又因为 $F(1) = 1$, 因此 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 即在 $[0, 2]$ 上连续.

但 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不可导, 事实上

$$F'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

$$F'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2}(x+1) - 1}{x - 1} = \frac{1}{2},$$

即左导数和右导数不相等, 因而在 $x=1$ 处 $F(x)$ 不可导. 所以 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的原函数. 【解毕】

【注】 上述例题中的 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内不存在原函数. 事实上有结论: 导函数没有第一类间断点. 在上述例题中 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 且 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则 $F'(x) = f(x)$, 但 $f(x)$ 有第一类间断点 $x=1$, 因而原函数 $F(x)$ 不存在(详见综例 6.5.20).

例 7.3.2 设 $f(x)$ 为可微函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} tg(t) dt$.

【解】

$$\frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} tg(t) dt = f(x) g(f(x)) f'(x) = x f'(x) f(x).$$

【解毕】

【技巧】 变限积分有时以某一中间变量为上限或下限, 求导数时应注意复合函数的求导规则. 此外, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数是指已经换了自变量记号, 应立即知道 $g(f(x)) = x$.

例 7.3.3 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (t-1)e^{-t} dt$ 的极值点.

【解】 先求驻点.

$$f'(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2} \cdot 2x = 2(x^3 - x)e^{-x^2}.$$

令 $f'(x) = 0$, 解出驻点 $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

$$f''(x) = 2e^{-x^2} (5x^2 - 2x^4 - 1),$$

$f''(0) < 0, f''(-1) = f''(1) = 4e^{-1} > 0$. 因此 $x_1 = 0$ 为极大值点, $x_2 = -1$ 与 $x_3 = 1$ 为极小值点.

【解毕】

例 7.3.4 设 $g(x) = \int_0^x f(u) du$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}(x - 1), & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

则 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内 _____ (单项选择题).

(A) 无界; (B) 递减; (C) 不连续; (D) 连续.

(2001 年考研题)

【解】 正确选项为 (D).

$f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内有第一类间断点, 显然 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内可积,

因而其变限积分 $g(x)$ 在 $x \in (0, 2)$ 时连续.

【解毕】

【注】 读者可参照例 7.3.1, 求出 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并且可直接验证 $g(x)$ 在 $x=2$ 处连续. 但是, $g(x)$ 并非 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的原函数, 因为 $g(x)$ 在 $x=2$ 处不可导.

例 7.3.5 设 $f(x)$ 为已知单调连续函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,

则 $\frac{d}{dx} \int_0^{f(x)} \frac{g(t)}{t} \sin t dt = \underline{\hspace{2cm}}$ (单项选择).

$$(A) \frac{f(x)}{x} \sin(f(x)) f'(x), \quad (B) \frac{x}{f(x)} \sin(f(x)),$$

$$(C) \frac{x}{f(x)} \sin(f(x)) f'(x), \quad (D) \frac{x \sin x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

【解】 正确选项为 (C). 注意到 $g(f(x)) = x$ 及复合函数的求导规则, 则只有 (C) 正确.

【解毕】

例 7.3.6 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为

$g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$. (2001 年考研题)

【解】 由已知等式两边对 x 求导便有

$$x f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x, \quad x > 0,$$

$$f'(x) = 2e^x + x e^x,$$

两端取不定积分得到 $f(x) = (x+1)e^x + c$.

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则有

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x+1)e^x + c) = 0,$$

解得 $c = -1$, 因此

$$f(x) = (x+1)e^x - 1.$$

【解毕】

【寓意】 本题考查变上限积分与反函数的概念. 此外, 求解原函数 $f(x)$ 时, 应注意到题设条件 $f(0) = 0$ 对应的 $f(x)$ 只有一个, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 由此确定任意常数 c 的取值.

【注】 本题亦可以通过区间 $[0, x]$ 上的定积分求解, 过程更加简捷.

7.4 积分方法与技巧

1. 凑微分法

凑微分法是训练积分技巧的基础, 必须达到熟练程度. 这一方法的根据是利用积分微分的逆运算关系及已知积分公式, 凑出可求解的积分形式.

设 $f(x)$ 是可微函数, 所凑微分标准可解形式是

$$\int f(x) f'(x) dx = \int f(x) d(x) = F(x) + c, \quad (7.5)$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 但是, 这种标准可解形式并不多见, 积分的一般形式为

$$\int g(x) f'(x) dx. \quad (7.6)$$

这时要看 $g(x)$ 是否有可化为 $f'(x)$ 的部分因子. 凑微分的方法是基于对基本积分公式的熟练程度及初等函数复合变形技巧的掌握, 包括部分恒等式的变形技巧(如三角函数恒等式).

例 7.4.1 设 $x \ln x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int f(ax+b) dx$, 其中 a, b 为常数, 且 $a \neq 0$.

【解】

$$\begin{aligned} \int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a} t \ln t \Big|_{t=ax+b}^{+c} \\ &= \frac{1}{a} (ax+b) \ln |ax+b| + c. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 7.4.2 求不定积分

$$(1) \tan^2 x dx, (2) \tan^3 x dx .$$

【解】

$$(1) \tan^2 x dx = (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$$

$$(2) \tan^3 x dx = \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\ = \tan x d \tan x - \tan x dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + c. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 不定积分对被积函数满足线性运算, 利用这种性质, 有时将一个积分化为多个积分求解, 有时又把多个积分统一为一个积分号.

例 7.4.3 求不定积分 $\frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}$.

$$\text{【解】} \quad \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{d \sin x}{1 + \sin^2 x} = \arctan(\sin x) + c. \quad \text{【解毕】}$$

例 7.4.4 求不定积分 $\frac{dx}{x(4-x)}$. (1997 年考研题)**【解】** (方法 1)

$$\frac{dx}{x(4-x)} = \frac{dx}{2 \left(1 - \frac{x-2}{2}\right)^2} = \arcsin \frac{x-2}{2} + c.$$

(方法 2)

$$\frac{dx}{x(4-x)} = \frac{2d \frac{x}{4}}{4-x} = 2 \frac{d \frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + c.$$

【解毕】

例 7.4.5 计算 $\frac{dx}{x \ln x(1 - \ln x)}$.

【解】 连续采用两次凑微分的方法即有

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x \ln x(1 - \ln x)} &= \frac{d \ln x}{\ln x(1 - \ln x)} = \frac{2d \ln x}{1 - \ln x} \\ &= 2 \arcsin \ln x + c. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 7.4.6 计算 $\frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^4 x}$.

【解】 (方法 1)

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^4 x} &= - \frac{d \cos^2 x}{1 + (\cos^2 x)^2} \\ &= - \ln \left| \cos^2 x + 1 + \cos^4 x \right| + c. \end{aligned}$$

(方法 2)

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^4 x} &= - \frac{d \cos^2 x}{1 + \cos^4 x} \\ &= - \ln \left| \cos^2 x + 1 + \cos^4 x \right| + c \\ &= \ln \left| 1 + \cos^4 x - \cos^2 x \right| + c. \end{aligned}$$

这里用到了基本积分公式

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} = \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + c. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 上述答案中的绝对值号可脱掉.

例 7.4.7 求不定积分 $\frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$.

【解】 (方法 1)

$$\frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{2} x \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + c.
 \end{aligned}$$

(方法2) 原积分记为 I , 则

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx + \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} \\
 &= -\frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x + \sin x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= -\ln |\sin x + \cos x| + x - I + c,
 \end{aligned}$$

移项后解出 $I = -\frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + c$. 【解毕】

【注】 上述(方法2)称为回归方法, 是积分中的常用技巧.

2. 分部积分法

设 $f(x)$, $f'(x)$ 与 $g(x)$ 为区间 I 上的连续函数, $G(x)$ 为 $g(x)$ 在 I 上的一个原函数, 则在区间 I 上有

$$f'(x) g(x) dx = f(x) G(x) - \int f(x) G'(x) dx \quad (7.7)$$

分部积分法适用于被积函数含有 $\ln x$, $\sin x$, $\arcsin x$, e^x 及某些根式因子的情形. 往往与凑微分方法及变数替换方法交叉使用.

例 7.4.8 利用分部积分可有以下结果, 做为基本积分公式的补充.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \arcsin x dx &= x \arcsin x - \frac{1}{2} \frac{d(-x^2)}{1-x^2} \\
 &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c. \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \ln x dx = x \ln x - x + c. \quad (7.9)$$

$$(3) \quad x e^x dx = x e^x - e^x + c. \quad (7.10)$$

$$(4) \quad x \cos x dx = -x \sin x + \cos x + c. \quad (7.11)$$

$$(5) \quad \arctan x dx = x \arctan x - \frac{x dx}{1+x^2} \\ = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c. \quad (7.12)$$

例 7.4.9 利用分部积分计算 $\int (x^2 - a^2) dx$.

【解】

$$\begin{aligned} \int (x^2 - a^2) dx &= x \int (x^2 - a^2) dx - \int \frac{x^2 dx}{x^2 - a^2} \\ &= x \int (x^2 - a^2) dx - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{x^2 - a^2} dx \\ &= x \int (x^2 - a^2) dx - \int (x^2 - a^2) dx - a^2 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \\ &= x \int (x^2 - a^2) dx - \int (x^2 - a^2) dx \\ &\quad - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c, \end{aligned}$$

移项后解出

$$\int (x^2 - a^2) dx = \frac{1}{2} x \int (x^2 - a^2) dx - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c.$$

【解毕】

例 7.4.10 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时有

$$f(x) F(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}, \text{ 已知 } F(0) = 1, F(x) > 0, \text{ 求 } f(x).$$

(1999 年考研题, 1998 年清华大学考题)

【解】 由 $F'(x) = f(x)$, 则立即有

$$2 F(x) F'(x) = \frac{x e^x}{(1+x)^2},$$

两边取不定积分得

$$2 F(x) dF(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

对等式右端采用分部积分

$$\begin{aligned} \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= xe^x d \frac{-1}{1+x} \\ &= \frac{-xe^x}{1+x} + \frac{e^x(1+x)}{1+x} dx \\ &= \frac{-xe^x}{1+x} + e^x + c = \frac{e^x}{1+x} + c. \end{aligned}$$

于是即有 $F^2(x) = \frac{e^x}{1+x} + c$.

由 $F(0) = 1$, $F^2(0) = 1 + c$, 解出常数 $c = 0$, 因此

$$F(x) = \frac{e^x}{1+x} \quad (F(x) > 0).$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{3/2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{3/2}} = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{3/2}}.$$

【解毕】

【寓意】 本题考点为原函数概念, 凑微分与分部积分技巧, 本题亦可用定积分求解.

例 7.4.11 计算 $e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx$. (1997 年考研题)

【解】

$$\begin{aligned} &e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx \\ &= e^{2x}(\sec^2 x + 2\tan x) dx \\ &= e^{2x} d\tan x + 2 e^{2x} \tan x dx \\ &= e^{2x} \tan x - 2 e^{2x} \tan x dx + 2 e^{2x} \tan x dx \\ &= e^{2x} \tan x + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题属于应用分部积分方法的典型例题.

例 7.4.12 计算 $\frac{x^2 \arctan x dx}{1+x^2}$.

【思路】 首先利用凑微分法将原积分化为分部积分形式.

【解】

$$\begin{aligned} \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx &= \frac{(x^2+1-1)\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \arctan x dx - \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{x dx}{1+x^2} - \arctan x d(\arctan x) \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2 x + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 上述解法中再次用到加一项减一项的简单技巧. 这是凑微分的必备基础.

例 7.4.13 求不定积分 $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$.

【思路】 先用三角公式对原积分进行变形, 而后凑微分, 导出分部积分形式.

【解】

$$\begin{aligned} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx &= \frac{e^x dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} e^x dx \\ &= e^x d \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} de^x \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} de^x + \tan \frac{x}{2} de^x \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

【解毕】

例 7.4.14 计算 $\frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$.

【思路】 先凑微分进行试验, 最终将必然用到分部积分 .

【解】

$$\begin{aligned} \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx &= x^2 e^x d \frac{-1}{x+2} \\ &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \frac{2xe^x + x^2 e^x}{x+2} dx \\ &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x dx \\ &= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - e^x + c. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 7.4.15 求 $\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$. (2001 年考研题)

【思路】 首先凑微分得到分部积分形式 .

【解】

$$\begin{aligned} \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= -\frac{1}{2} \arctan e^x d(e^{-2x}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x - \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} de^x \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x - \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2} \arctan e^x + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 上述解法中第二个等号后的积分号内为两因子乘积, 应意识到将被积函数分解为最简分式的代数 .

例 7.4.16 求 $\frac{\arcsin x}{x} dx$. (2000 年考研题)

【解】

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{x} dx &= 2 \int \arcsin x dx - \int \frac{dx}{1-x} \\ &= 2 \int x \arcsin x dx - \int \frac{dx}{1-x} \\ &= 2 \int x \arcsin x dx + 2 \int \frac{dx}{1-x} + c. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

3. 变数替换法

设 $x(t)$ 在区间 I 上有反函数 $g(x)$ 存在, 且在 I 上有 $f(x(t))x(t)dt = F(t) + c$, 则

$$\int f(x)dx = F(g(x)) + c. \quad (7.13)$$

对某些积分, 有时不能通过凑微分方法利用基本积分公式求解, 往往需要引入一种变数替换, 使积分形式得以转化, 最终利用基本积分公式求解. 此外, 变数替换方法还常常与分部积分交叉应用.

(1) 三角替换

三角函数替换是主要针对某些含无理根式的积分替换, 包括以下几种典型积分类别.

$$1^\circ \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad (a > 0). \quad (7.14)$$

这是含有 $a^2 - x^2$ 因子作被积函数的最简单类型, 用的变换是 $x = a \sin t$, $dx = a \cos t$. 当然, 公式(7.14)只需凑微分法即可获得.

$$2^\circ \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c \quad (a > 0). \quad (7.15)$$

用的变换是 $x = a \sec t$, $dx = a \sec t \cdot \tan t$, $\tan^2 t = \sec^2 t - 1$.

$$3^\circ \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) +$$

$$c. \quad (7.16)$$

用的变换是 $x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt$.

$$4^\circ \quad \frac{dx}{a^2 + x^2} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c. \quad (7.17)$$

用的变换是 $x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt$.

$$5^\circ \quad \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c. \quad (7.18)$$

用的变换是 $x = a \sec t, dx = a \sec t \cdot \tan t dt$.

例 7.4.17 证明公式(7.15).

【证】 令 $x = a \sec t, dx = a \sec t \cdot \tan t dt$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{a \sec t \cdot \tan t}{a^2 \tan^2 t} dt = \frac{\sec t}{a \tan t} dt \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sin t} \frac{\cos t}{\sin t} dt = \frac{1}{a} \frac{1}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int \csc^2 t dt = -\frac{1}{a} \cot t + c \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\cos t}{\sin t} + c = -\frac{1}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + c. \end{aligned} \quad \text{【证毕】}$$

【注】 变数替换的积分结果必须以 $x(t)$ 的反函数 $g(x)$ 代回. 在三角替换中, 可画出示意三角形以确定三角函数关系较为方便.

例 7.4.18 求 $\int \frac{(x-2)dx}{x^2 - 2x + 10}$.

【解】 先将根号内部分进行配方. 设

$$I(x) = \int \frac{(x-2)dx}{x^2 - 2x + 10} = \int \frac{x-2}{(x-1)^2 + 3^2} d(x-1).$$

令 $x-1 = u$, 则 $dx = du$, 于是

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(u-1)du}{u^2 + 3^2} = \int \frac{udu}{u^2 + 3^2} - \int \frac{du}{u^2 + 3^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 9) - \frac{1}{3} \arctan \frac{u}{3} + c \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 10) - \frac{1}{3} \arctan \frac{x-1}{3} + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题利用了已知积分公式(7.17) .亦可直接令 $x - 1 = 9 \tan t$ 进行计算 .

例 7.4.19 求 $\frac{dx}{(2x^2 + 1)(x^2 + 1)}$. (2001 年考研题)

【解】 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \frac{dt}{\cos t(2 \tan^2 t + 1)} = \frac{\cos t dt}{2 \sin^2 t + \cos^2 t} \\ &= \frac{d \sin t}{1 + \sin^2 t} \\ &= \arctan(\sin t) + c \\ &= \arctan \frac{x}{1 + x^2} + c. \end{aligned}$$

【解毕】

(2) 指数与对数替换

被积函数中含有指数或对数时,用此类变换进行试验,往往需要配合凑微分法进行适当变形 .

例 7.4.20 求 $\frac{dx}{1 + e^x}$.

【解】 令 $e^x = t$, 则 $dx = \frac{dt}{t}$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1 + e^x} &= \frac{dt}{t(t + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} dt = \ln \left| \frac{t}{t + 1} \right| + c \\ &= x - \ln(1 + e^x) + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 变数替换往往不是唯一的,如本题还可用替换 $1 + e^x = t$.此外,还可注意到 $\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$, 见下例 .

例 7.4.21 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

(2000 年考研题)

【解】 设 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, $f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$, 于是

$$\begin{aligned} f(x)dx &= \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx \\ &= -\ln(1+e^x) d e^{-x} \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + c \\ &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + c. \end{aligned}$$

【解毕】

例 7.4.22 计算 $\frac{xe^x dx}{1+e^x}$.

【解】 令 $1+e^x = t$, 则 $x = \ln(t-1)$, $dx = \frac{2t}{t^2-1} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{xe^x dx}{1+e^x} &= 2 \ln(t-1) dt \\ &= 2 [\ln(t+1) + \ln(t-1)] dt \\ &= 2 [(t+1) \ln(t+1) - (t+1) + (t-1) \ln(t-1) - (t-1)] + c \\ &= 2 t \ln(t^2-1) + \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2t + c \\ &= 2x \sqrt{1+e^x} - 4 \sqrt{1+e^x} + 2 \ln \frac{1+e^x+1}{1+e^x-1} + c. \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 上述第一个符号是寻找变换的诱发点.

【注】 本题亦可采用变换 $e^x = \tan^2 t$, 请读者完成这一方法.

例 7.4.23 计算 $\frac{\arcsine^x}{e^x} dx$.

【解】

$$\begin{aligned} \frac{\arcsine^x}{e^x} dx &= - \arcsine^x de^{-x} \\ &= - e^{-x} \arcsine^x + \frac{dx}{1 - e^{2x}}. \end{aligned}$$

对上述的第二项,再令 $e^x = \sin t$,即可脱去根号,这时 $x = \ln |\sin t|$,

$dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= - e^{-x} \arcsine^x + \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt \\ &= - e^{-x} \arcsine^x + \csc t dt \\ &= - e^{-x} \arcsine^x + \ln |\csc t - \cot t| + c \\ &= \ln |1 - \frac{1}{1 - e^{2x}}| - x - e^{-x} \arcsine^x + c. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

(3) 根式替换

对含有某些根式的被积函数,往往可以通过根式替换进行有理化.方法是取各同形根式中方幂的最小公倍数作为方幂的相应根式作为新变量.

例 7.4.24 求 $\frac{dx}{1 + 3\sqrt{x-1}}$.

【解】 本题只有一个根式,令 $\sqrt{x-1} = t$, 则 $dx = 2tdt$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1 + 3\sqrt{x-1}} &= \frac{2tdt}{1 + 3t} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3t+1} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} t - \frac{1}{3} \ln(1 + 3t) + c \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} x - 1 - \frac{1}{3} \ln(1 + 3x - 1) + c.$$

【解毕】

例 7.4.25 计算 $\frac{(x-1)dx}{x + \frac{1}{x^2}}$.

【解】 令 $x = t^6$, 则 $dx = 6t^5 dt$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)dx}{x + \frac{1}{x^2}} &= 6 \frac{(t^6-1)t^5}{t^3 + t^4} dt \\ &= 6 \frac{t^2(t^6-1)}{t+1} dt \\ &= 6 t^2(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1) dt \\ &= 6 \left(\frac{1}{8} t^8 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{6} t^6 - \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{3} t^3 + c \right) \\ &= 6 \left(\frac{1}{8} x^{4/3} - \frac{1}{7} x^{7/6} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{5} x^{5/6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} x^{2/3} - \frac{1}{3} x^{1/2} + c \right). \end{aligned}$$

【解毕】

例 7.4.26 求 $\frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

【思路】 凑微分后进行分部积分.

【解】 $\frac{\ln(1+x)}{x} dx = 2 \int x \ln(1+x) - 2 \int \frac{x dx}{1+x}$.

对第二项令 $x = t$, 则 $dx = 2t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= 2 \int x \ln(1+x) - 4 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int x \ln(1+x) + 4(\arctan x - x) + c. \end{aligned}$$

【解毕】

7.5 有理分式与三角有理分式的积分

1. 有理分式的积分

有理分式最终可化为有理真分式与一个多项式的和. 多项式积分是容易的, 只限于幂函数积分. 而有理真分式的积分在方法上一般较为复杂. 这里我们讨论最常见的形式. 设有有理真分式

$$R(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{q(x)}{(x-a)^m p_1(x)}. \quad (7.19)$$

其中 $a \in \mathbb{R}$ 为 $p(x)$ 的一个 m 重实根, 这时 $R(x)$ 可有如下分解(假设 $p(x), p_1(x)$ 均为实系数多项式):

$$R(x) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{q_1(x)}{(x-a)^{m-1} p_1(x)}, \quad (7.20)$$

其中 A_m 为常数, $q_1(x)$ 的次数低于 $m-1$ 与 $p_1(x)$ 的次数之和.

(1) 若 $m > 1$, 则(7.20)式右端第二项视为(7.19)式右端的情形, 仍可进一步做形如(7.20)式的分解.

(2) 若 $m = 1$, 则当 $p_1(x)$ 仍有实根时, (7.20)式右端第二项仍可进一步分解. 而当 $p_1(x)$ 只有成对复根时, (7.20)式为最终分解形式.

于是我们可以断言: $R(x)dx$ 的结果只可能是幂函数, 对数函数或反三角函数类型. 以下给出具有代表性的几个例题.

例 7.5.1 求 $\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

【思路】 本题属于形如(7.20)式右端第二项 $p_1(x)$ 无实根的情形, 不能进一步分解.

【解】 取变换 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$, 于是

$$\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt = \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + c \\
 &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c \\
 &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

例 7 5 2 求 $\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$.

【思路】 反复应用(7.20)式的分解步骤可得最终分解形式.

【解】 用待定系数法, 设

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3},$$

比较两端分子可有恒等式

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + A_1 x(x-1)^2 + A_2 x(x-1) + A_3 x,$$

比较两端同次幂系数即有 $A = -1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 2$, 于是

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} dx \\
 &= -\ln |x| + 2\ln |x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c \\
 &= \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

例 7 5 3 求 $\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$.

【解】 将被积函数做形如(7.20)的分解, 则应有

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+1)^2},$$

由此可得恒等式

$$\begin{aligned}
 2x+2 &= A(x^2+1)^2 + (B_1 x + C_1)(x-1)(x^2+1) \\
 &\quad + (B_2 x + C_2)(x-1),
 \end{aligned}$$

比较两端同次幂系数得到方程组

$$\begin{aligned}
 A + B_1 &= 0, \\
 -B_1 + C &= 0, \\
 2A + B_1 - C + B_2 &= 0, \\
 -B_1 + C - B_2 + C_2 &= 2, \\
 A - C - C_2 &= 2.
 \end{aligned}$$

解得 $A = 1, B_1 = -1, B_2 = -2, C = -1, C_2 = 0$.

于是原积分为

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{dx}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} dx - \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \\
 &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{1}{x+1} + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

例 7.5.4 求 $\frac{dx}{x^6+x^4}$.

【思路】 在某些特定情况下,前面给出的有理分式积分法不一定是最好的方法.本题可通过凑微分方法引入变数替换而求解.

$$\text{【解】} \quad \frac{dx}{x^6+x^4} = -\frac{1}{x^4+x^2} d\frac{1}{x} = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} d\frac{1}{x}.$$

上述结果提示可取变换 $t = \frac{1}{x} (x > 0)$, 则

$$\begin{aligned}
 \text{原积分} &= -\frac{t^4}{1+t^2} dt = \frac{1-t^4+1}{1+t^2} dt = (1-t^2) dt + \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= t - \frac{1}{3} t^3 + \arctan t + c \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \arctan \frac{1}{x} + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 加一项,减一项,或分子分母同乘同除某一因子是常用的技巧,而凑微法是求解积分的基础.

2. 三角有理分式的积分 $R(\sin x, \cos x)dx$

三角有理分式 $R(\sin x, \cos x)$ 作为被积函数, 其积分一定可以求解. 一般有两套方法.

(1) 三角万能置换, 分以下 3 种情况

$$1^\circ R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

这意味着在被积式中 $\sin x$ 以奇次方幂出现, 它与 $\cos x$ 为非线性关系, 表现为无理函数关系, 即

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x},$$

引入变换的目的在于将 $R(\sin x, \cos x)$ 有理化.

令 $t = \cos x$, 则 $dx = -\frac{1}{\sin x} dt$. 在此变换下, $\sin x$ 与 $\cos x$ 的无理根式关系将得以解除, 从而必然可求解.

$$2^\circ R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

$$\text{取变换 } t = \sin x, \text{ 则 } dx = \frac{1}{\cos x} dt.$$

$$3^\circ R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

$$\text{取变换 } t = \tan x, dx = \frac{1}{\sec^2 x} dt = \frac{dt}{1+t^2}.$$

一般情况下, 任意 $R(\sin x, \cos x)$ 总可以分解为上述三种情况的线性组合, 即

$$\begin{aligned} R(\sin x, \cos x) &= \frac{1}{2} R(\sin x, \cos x) - R(\sin x, -\cos x) \\ &\quad + \frac{1}{2} R(\sin x, -\cos x) - R(-\sin x, -\cos x) \\ &\quad + \frac{1}{2} R(-\sin x, -\cos x) + R(\sin x, \cos x) \end{aligned}$$

显然上述等号右端部分分别属于上述 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, 即这类变换可以构成万能变换.

例 7 5 5 求 $\frac{dx}{\sin x \cos 2x}$.

【思路】 原积分即求 $\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$, 显然属于上述情况 1°.

【解】 令 $t = \cos x$, 则 $dx = -\frac{dt}{\sin x}$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sin x \cos 2x} &= \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} \\ &= \frac{2}{1-2t^2} - \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2t}{1-2t} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+2\cos x}{1-2\cos x} \right| + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

【注】 (1) 上述解法中用到了 $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2 \frac{x}{2}$.

(2) 对形如 $\frac{1}{1-x^2} dx$ 的积分应做到很熟练, 以下对此例给出不同解法, 以便应用中灵活掌握 .

例 7 5 6 求 $\frac{1}{1-x^2} dx$.

【解】 (方法 1)

$$\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c .$$

(方法 2)

取变换 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{\cos t} dt = \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| + c \\
 &= \ln \frac{1+x}{1-x^2} + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.
 \end{aligned}$$

(方法3)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{\cos t} dt = \frac{d \sin t}{\cos 2t} = \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 不定积分的计算结果形式上可能因方法不同而不同,但它们最多只差一个常数.

例 7.5.7 设 $a > 0$, 求 $\frac{dx}{\cos^2 x + a \sin^2 x}$.

【解】 本题属于三角万能置换的情形 3°, 令 $t = \tan x$, 则 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{\cos^2 x + a \sin^2 x} &= \frac{dt}{1+at^2} = \frac{1}{a} \arctan(at) + c \\
 &= \frac{1}{a} \arctan(a \tan x) + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题可直接凑微分求解, 即化为

$$\frac{d \tan x}{1 + a \tan^2 x} = \frac{1}{a} \arctan(a \tan x) + c.$$

(2) 半角万能置换

对 $R(\sin x, \cos x) dx$, 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $x = 2 \arctan t$, 于是

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

于是有

$$R(\sin x, \cos x) dx = R \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2dt}{1+t^2}.$$

这属于有理分式的积分, 必然可以求解. 但是应指出, 这种置换将导致求解高方幂构成的有理分式积分, 因此, 我们建议的原则是: 能用三角万能置换时, 一般不用半角万能置换; 能用凑微分或其他特殊方法时, 不用这二类所谓万能置换.

例 7 5 8 求 $\frac{dx}{3+5\cos x}$.

【思路】 本题最佳方法是用半角置换.

【解】 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $x = 2\arctan t$, 原积分化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{3+5\cos x} &= \frac{1}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{4-t^2} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + c \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \tan \frac{x}{2}}{2 - \tan \frac{x}{2}} \right| + c. \end{aligned}$$

【解毕】

例 7 5 9 求 $\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

【思路】 可用半角置换, 但应首先考虑简便方法凑微分.

【解】 由三角函数恒等式即可得到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 + \tan \frac{x}{2})} \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + c. \end{aligned}$$

【解毕】

7.6 综合例题与递推方法

以下一组例题,只给出主要思路与答案,请读者进行练习.

综例 7.6.1 $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ (单项选择).

- (A) $\cot x \ln \sin x - \cot x - x + c$,
 (B) $-\cot x \ln \sin x + \cot x - x + c$,
 (C) $-\cot x \ln \sin x - \cot x + x + c$,
 (D) $-\cot x \ln \sin x - \cot x - x + c$.

【解】 答案为(D),凑微分后进行分部积分.

【解毕】

综例 7.6.2 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 则

$$\int (\sin x + 1) \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (A) $\frac{\sin(\sin x + 1)}{x} + c$; (B) $\frac{\sin(\sin x + 1)}{\sin x + 1} + c$;
 (C) $\frac{\sin(\sin x + 1)}{\sin x} + c$; (D) $\frac{\sin(\sin x + 1)}{\sin(x + 1)}.$

【解】 答案为(B),凑微分即可得答案.

【解毕】

综例 7.6.3 $\int \frac{x-2}{x^2-2x+10} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (A) $x^2 - 2x + 10 - \ln(x - 1 + x^2 - 2x + 10) + c;$
 (B) $-x^2 - 2x + 10 - \ln(x - 1 + x^2 - 2x + 10) + c;$
 (C) $-x^2 - 2x + 10 + \ln(x - 1 + x^2 - 2x + 10) + c;$
 (D) $x^2 - 2x + 10 + \ln(x - 1 + x^2 - 2x + 10) + c.$

【解】 答案为(A), 原积分即可变形为

$$\frac{x-1-1}{(x-1)^2+9} dx = \frac{1}{2} \frac{d(x-1)^2}{(x-1)^2+9} - \frac{dx}{(x-1)^2+9} = (A). \text{【解毕】}$$

综例 7.6.4 设 $\int xf(x)dx = \arcsin x + c$, 则 $\frac{dx}{f(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$. (单项选择题)

- (A) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c;$ (B) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c;$
 (C) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c;$ (D) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c.$

【解】 答案为(A), 由已知等式两端对 x 求导数, 解出 $\frac{1}{f(x)}$ 之后进行积分. **【解毕】**

综例 7.6.5 $\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. (单项选择题)

- (A) $\frac{\ln x}{x^2} + c;$ (B) $-\frac{\ln x}{x} + c;$
 (C) $\frac{\ln x}{x} + c;$ (D) $-\frac{\ln x}{2x} + c.$

【解】 答案为(B).

(方法 1)

令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t$, $dx = e^t dt$, 原积分化为

$$\frac{t-1}{e^t} dt = (te^{-t} - e^{-t}) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int tde^{-t} - \int e^{-t} dt \\
 &= - \int te^{-t} = - \frac{\ln x}{x} + c.
 \end{aligned}$$

(方法 2)

$$\frac{\ln x - 1}{x^2} dx = - \int d \frac{\ln x}{x} = - \frac{\ln x}{x} + c. \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 积分时, 如对微分运算很熟悉, 将有助于你找到快捷方便的方法, 尤其对多元函数的积分, 包括微分方程的求解, 此方法和技巧尤为重要.

综例 7.6.6 求 $x^2 \arccos x dx$.

【思路】 幂函数与 e^x , $\cos x$, $\arcsin x$, $\ln x$ 乘积作为被积函数时, 分部积分是必由之路, 同时应用凑微分方法.

【解】

$$\begin{aligned}
 x^2 \arccos x dx &= \frac{1}{3} \arccos x dx^3 \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{3} \frac{x^3 dx}{1-x^2} \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{6} \frac{-x^2 + 1 - 1}{1-x^2} dx^2 \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{6} \frac{1-x^2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^2} dx^2 \\
 &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-x^2} + c.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 对第二个等号后的积分, 基于对幂函数积分的熟练进行凑微分, 并利用加一减一的技巧使计算得以减化. 此外, 在凑微分过程中应着眼于函数类的微分积分关系, 而后校核系数不要出错. 对第二个等号后的积分还可有第二个方法, 即利用变换 $x = \sin t$

求解, 请读者完成这一方法.

综例 7.6.7 计算 $I_n = \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$.

【思路】 对含有参数 n 的积分, 一般可以通过分部积分的手续, 并利用回归方法, 给出一个递推计算公式, 而要使所得递推公式完备, 必须给出递推的初值公式, 而初值公式的个数取决于递推的步数. 比如递推关系 (k 为固定整数)

$$I_{n+k} = f(I_n),$$

则初值公式应给出 k 个才行.

【解】

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n I_n - a^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

移项解出递推关系

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

上述递推公式仅需要一个递推初值即可. 显然 $n=1$ 时有

$I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$. 以 I_1 为初值, 顺序可计算 I_2, I_3, \dots , 比如

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

最后, 完备的递推公式为

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

【解毕】

第8章 定积分概念与性质

8.1 引言

定积分内容部分的学习要着眼于概念、方法与技巧, 其中的概念较丰富, 方法较多变, 技巧较灵活.

1. 背景

世界是物质的, 物质是运动的. 物质和运动都可以量化表达, 而量化表达的手段是数学. 微分和积分是定性定量表达事物规律的重要手段之一, 这种表达是精确的、精僻的. 微分和积分对一个函数从两个不同侧面进行性态的分析, 而定积分又独具特色, 它做为量化处理客观世界的工具和思想, 成为一类重要的数学模型. 在学习中, 应力争站在较高的台阶上去纵观定积分的全部内容, 形成概念与方法的系统性.

2. 函数性态分析

本章内将进一步展开关于原函数与变限积分的讨论. 我们将看到, 由定积分做为工具讨论原函数将会更加直观而深刻, 基于定积分的工具, 对函数性态的分析会得出许多重要结论, 与导数做为工具研究函数性态结合起来, 对函数的宏观与微观性态的研究将会揭示一个函数更深层的本质和属性.

3. 含参积分与变限积分

基于客观的需要, 积分内常含有某些参数, 讨论这些参数对积分的影响往往是重要目的, 而将含参数的积分化为变限的积分是进行这类研究的一个重要手段, 这是因为, 我们可以有许多办法对变限积分表达的函数(未必是原函数)进行分析, 包括增减性, 凸

性,极值与最大最小值以及零点等方面.

4. 计算的技巧性

我们并不是单纯追求技巧性.一个积分的计算,首先要求具备准确性,其次是快速性.而这两个目的实现就需要有好的方法和技巧.学习中应着眼于基本方法的积累,有了这种积累,才会孕育出技巧.

8.2 可积性概念与性质

1. 定义

定积分的经典背景是曲边梯形的面积,而定积分的定义是一种特定的极限模式.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义,按以下 4 步构造极限:

(1) 任意分割区间 $[a, b]$ 取点列 x_0, x_1, \dots, x_n 使

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \text{ 记 } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

(2) 任取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 及函数值 $f(\xi_i)$, 取乘积 $f(\xi_i) \Delta x_i$, 并令 $\Delta = \max_i \{\Delta x_i\}$.

(3) 做和式
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

(4) 取极限

$$\lim_0 S_n = \lim_0 \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

若上述极限存在,则记此极限值为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分,记为
$$I_f(a, b) = \int_a^b f(x) dx.$$

同时,该极限存在时,称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

【注】 (1) 积分的值只与区间 $[a, b]$ 及函数 $f(\cdot)$ 有关,而与积分变量的记号无关,这正是我们引用记号 $I_f(a, b)$ 的动机.

(2) 极限的存在(可积性)基于两个任意性,即上述定义中的

(2)与(3) .

(3) 若积分已经存在,则可取区间 $[a, b]$ 的特定分割与子区间上的特定点 ξ_i .

(4) 积分上限可以小于下限,并且 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

2. 可积性条件

(1) 必要条件: 被积函数 $f(x)$ 在积分区间上有界 .

(2) 充分条件:

可积的充分条件有以下几组,依次为加强的充分条件:

1° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调有界 .

2° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最多有有限个第 类间断点 .

3° $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,即 $f \in C[a, b]$.

(3) 充分必要条件: 记

$$\omega_i = \sup_{x_i, x_{i-1} \in [x_{i-1}, x_i]} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |,$$

$\int_a^b f(x) dx$ 存在的充分必要条件是极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0,$$

其中 ω_i 称为子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上函数 $f(x)$ 的振幅 .

常用的充分条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续或只有有限多个第 类间断点 .

3. 可积性与原函数存在性的关系

当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $F(x)$ 存在时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一定可积.而当, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时,也不一定有原函数存在.请参见 7.1 与 7.2 节内容.以下再给出几个例题 .

例 8 2.1 求 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$

满足 $F(0) = 1$ 的原函数 $F(x)$.

【解】 当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + a$;

当 $x < 0$ 时, $F(x) = e^x + a$.

由 $f(x)$ 可积, $F(x)$ 必然连续, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$ 得到

$a = a + 1$. 于是 $f(x)$ 的所有原函数为

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + a, & x \geq 0, \\ e^x + a - 1, & x < 0. \end{cases}$$

满足 $F(0) = 1$ 的原函数 $F(x)$ 为 ($a = 1$)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + 1, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

显然 $F(x)$ 连续并且可导.

【解毕】

【注】 本题 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意闭区间内均可积.

例 8.2.2 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -1 \leq x < 0, \\ e^x - 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$

求 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

【解】 请注意: $f(x)$ 不连续!

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 1) dt = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{4}{3}$;

当 $0 \leq x < 1$ 时, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 (t^2 + 1) dt + \int_0^x (e^t - 1) dt$
 $= \frac{4}{3} + e^x - x - 1$.

$F(x)$ 并非原函数, 其表达式为

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{4}{3}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{4}{3} + e^x - x - 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$F(0^-) = 1, F(0^+) = 0$, 显然 $F(x)$ 连续, 但不再可导. 因而不是原函数. 【解毕】

【注】 本题 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可积, 但却没有原函数存在.

例 8.2.3 设 $f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

考查 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 是否可积, 是否有原函数.

【解】 显然 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上无界, 因此不可积. 但可以验证, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有如下原函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

即有 $F'(x) = f(x)$, $F(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上处处连续、可导, 并且 $x=0$ 为 $F(x) = f(x)$ 的第二类间断点. 【解毕】

例 8.2.4 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

考查 $f(x)$ 是否在 $[-1, 1]$ 上可积, 是否有原函数.

【解】 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上不连续, 有一个第一类间断点 $x=0$, 因而可积, 并且其积分和式

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}),$$

其中 ξ_i 满足 $x_{j-1} < \xi_j < x_j$, $\xi_j \neq 0$ 时, $f(\xi_j) = 0$, 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$. 于是

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

其次, 再考虑 $f(x)$ 的原函数存在性. 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有原函数 $F(x)$ 存在, 则

当 $x \in [-1, 0)$ 时, $F(x) = a$;

当 $x \in (0, 1]$ 时, $F(x) = c$.

由 $f(x)$ 有界, 则 $F(x)$ 连续, 即应有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x),$$

因而 $a = c = c$, 即 $F(x) = c$. 但 $F(0) = f(0) = 1$, 与 $F(x) = 0$ 矛盾, 所以 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数, 即 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上没有原函数. 【解毕】

例 8.2.5 对例 8.2.4 的 $f(x)$, 求 $G(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$.

【解】 利用积分对区间的可加性有

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } G(x) = \int_{-1}^x 0 dt = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } G(x) &= \int_{-1}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &= 0 + \int_{x_0}^x 0 \cdot dt = 0, \end{aligned}$$

其中 x_0 满足 $0 < x_0 < x$, 上述第一项积分为零的证明参照例 8.2.4 解答的前半部分. 最后得到 $G(x) = 0$. 但 $G(x)$ 并非 $f(x)$ 的原函数. 【解毕】

【注】 有第一类间断点的函数 $f(x)$, 必然没有原函数, 这可参照综例 6.5.20, 若有 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $F'(x) = f(x)$ 有第一类间断点, 这与综例 6.5.20 矛盾.

另外, 还有一个容易产生的误解是认为 $f(x)$ 有导数, 则导函数一定连续. 应该指出, 导函数没有第一类间断点, 却可以有第二类间断点, 请看下例(相关的例还请参看例 8.2.2).

例 8.2.6 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可导, 而 $f(x)$ 确有第 II 类间断点.

【证】 仅需证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导即可, 只须考查

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

即有 $f'(0)$ 存在且 $f'(0) = 0$, $f(x)$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第 II 类间断点. 【证毕】

【注】 读者可进一步考虑函数 (k 为正整数)

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

k 取何值时, $f(x)$ 为连续函数.

4. 性质

掌握定积分的性质, 并会在实际解题中运用, 是学好定积分内容的基础.

(1) 对区间的可加性

对任意实数 c , 均成立

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (8.1)$$

条件: 在相应积分区间上 $f(x)$ 可积(下同).

(2) 对被积函数满足线性运算

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx, \quad (8.2)$$

其中常数 A, B 不同时为零.

(3) 区间反号性

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (8.3)$$

这时, 上述等号两侧的 dx 为异号.

(4) 保号性(保序性)

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;

若非负函数 $f \in C[a, b]$ 且不恒为零, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

若在 $[a, b]$ 上有 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$;

若 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 且 $f(x) > g(x)$, $f(x) \neq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

(5) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 亦在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (8.4)$$

(6) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

(7) 估值定理

若在 $[a, b]$ 上有 $m \leq f(x) \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (8.5)$$

(8) 中值定理

设 $f \in C[a, b]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上定号且可积, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (8.6)$$

特别当 $g(x) \equiv 1$ 时有 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (8.7)$$

例 8.2.7 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$.

【思路】 估计积分值可以任意小.

【证】 错误举例. 请看如下作法:

$$\text{记 } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (1-0) = \frac{1}{2}, \text{ 其中}$$

$(0, 1)$. 于是 $\lim_n I_n = \lim_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

上述的 $\frac{1}{2}$ 一般与参数 n 有关, 比如若有

$$= \frac{n}{n+1} < 1,$$

这时 $\lim_n \frac{n}{n+1} = e^{-1} \neq 0$.

正确作法如下:

$$n > 0, \text{ 记 } I_1(n) = \int_0^{1-n} \frac{x^n}{1+x} dx, I_2(n) = \int_{1-n}^1 \frac{x^n}{1+x} dx,$$

则 $I_n = I_1(n) + I_2(n)$. 分别估计 $I_1(n)$ 与 $I_2(n)$, 有

$$0 < I_1(n) = \int_0^{1-n} \frac{1}{1+x} dx < (1-n).$$

于是 $\lim_n I_1(n) = 0$, 而

$$0 < I_2(n) < 1 \times (1 - (1-n)) = n,$$

于是亦有 $\lim_n I_2(n) = 0$.

因此 $\lim_n I_n = 0$.

【证毕】

例 828 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in (a, b)$,

若 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 连续, 试证明 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = f(x_0)$.

【思路】 题设条件只有 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 不能得出 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导的结论, 只能考虑用定义证明.

【证】 错误举例一: (用到了 $f(x)$ 在区间上的连续性)

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = (x - x_0) f(\xi), \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间,}$$

$$F(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

错误举例二:(用到了 $F(x)$ 的可导与 $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上的连续性)

$$F(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = f(x_0).$$

错误举例三:(误认为 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 处处存在)

$$F(x) = f(x), \text{ 因而 } F(x_0) \text{ 存在且 } F(x_0) = f(x_0).$$

正确作法如下:

由 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 估计 $\left| \frac{F}{x} - f(x_0) \right|$ 是否可以任意小, 其中

$$x = x - x_0.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F}{x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} f(x) dx - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \\ &< \frac{1}{|x|} \int_{x_0}^{x_0+x} \epsilon dx = \epsilon. \end{aligned}$$

于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F}{x} = f(x_0)$ 存在, 即有 $F(x_0) = f(x_0)$.

【证毕】

【注】 上述例题反映了变上限积分与被积函数在一点处连续性的微观性态之间的关系.

例 8.2.9 设 $f \in C[0, 1]$, $g(x)$ 是满足条件 $\int_0^1 g(x) dx = 1$ 的任意非负可积函数类, 对这类 $g(x)$ 求 $I = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ 的上确界, 并证明结论.

【思路】 首先用估值定理估计出积分值 I 的上界, 进而设法证明该上界为上确界.

【解】 由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则必有最大值, 记 $\max_{x \in [0, 1]} f(x) = M$, 由积分中值定理得

$$I = \int_0^1 f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_0^1 g(x) dx = f(\xi) M,$$

其中 $\xi \in (0, 1)$, 即 I 以 M 为上界.

不妨假设有 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = M$, 则 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 使 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [0, 1]$, 并且在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上有 $f(x) > M - \varepsilon$.

$$\text{取 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x_0 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

则 $g(x)$ 符合题设条件. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \\ &> \frac{1}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (M - \varepsilon) dx = M - \varepsilon. \end{aligned}$$

即 M 为 I 的上确界.

【解毕】

【技巧】 在积分的概念中, 函数类的概念是重要的. 根据题设条件, 构造一个符合条件的 $g(x)$ 是本题的技巧.

【寓意】 本题考查积分中值定理, 积分估值定理, 以及连续函数的最大最小值概念.

例 8.2.10 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2 - 2x} dx$ 的范围.

【思路】 有时不需要计算一个积分的值, 或不易直接计算出积分的值(本题即是如此), 但可以估计积分值的范围, 思路是基于估值定理, 求被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上的最大最小值.

【解】 由 e^x 的单调性, 仅需考虑 $x^2 - 2x$ 在 $[0, 2]$ 上的最大最小值. 记 $\varphi(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, $\max_{x \in [0, 2]} \varphi(x) = 0$, $\min_{x \in [0, 2]} \varphi(x) = -1$, 因此得到

$$\frac{2}{e} \int_0^2 e^{x^2-2x} dx = 2. \quad \text{【解毕】}$$

例 8 2 11 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$, 则 I_1 与 I_2 的关系为____(单项选择).

- (A) $I_1 < I_2$; (B) $I_1 > I_2$;
 (C) $I_1 = I_2$; (D) 不确定.

【思路】 利用积分保序性定理, 考查被积函数的增减性.

【解】 答案为(A).

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x < x$, 且 $\sin x$ 单调增加, 因而 $\sin(\sin x) < \sin x$, 由积分保序性得到

$$I_1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

另外, 由 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调减少, 即有 $\cos(\sin x) > \cos x$, 因而又有

$$I_2 > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 > I_1. \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 用积分的保序性证明不等式, 常常需考查函数的增减性与极大极小值, 本题中应特别熟知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$.

例 8 2 12 若在 $[0, 1]$ 上有 $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = a > 0$, 且 $f(x) > 0$, $g(x) < 0$, 则积分 $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$, $I_2 = \int_0^1 g(x) dx$, $I_3 = \int_0^1 ax dx$ 的大小比较关系是____(单项选择).

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$; (B) $I_3 < I_2 < I_1$;
 (C) $I_2 < I_3 < I_1$; (D) $I_2 < I_1 < I_3$.

【思路】 题设条件中已蕴含着 $f(x)$, $g(x)$ 与 ax 在 $[0, 1]$ 上的比较关系. 用积分的保序性即可得出结论.

【解】 答案为(C).

$y = ax$ 为直线, 在 $x = 1$ 处恰与 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 相交, 即 $f(1) = g(1) = a$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上下凸, 而 $g(x)$ 为上凸, 于是 $g(x) > ax > f(x)$, 由积分保序性即得知只有(C)正确. **【解毕】**

第9章 定积分计算与技巧

9.1 引言

尽管定积分的定义并未与不定积分发生关系,但牛顿—莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式(简称 N-L 公式)在这二者之间建立了计算上的桥梁,即

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

当然, N-L 公式的意义远不止在计算上,在以后的内容里会看到这一点.

基于 N-L 公式的定积分计算,可以把求解不定积分的全部手段移植过来,做为计算定积分的方法.但是,要掌握好定积分的计算与相关理论分析问题,仅有这一点是远远不够的.因此,我们必须特别注意定积分计算与不定积分的不同之处,或独特之处,这是本章要解决的重点问题.

与不定积分相比,解决定积分问题的独特方法包括变数替换,区间变换,区间拆分与区间合并,拆分积分号与合并积分号,利用对称性、几何意义与周期性简化积分计算.此外,分部积分与回归法、递推法也有独特的体现.这些方法的基础仍然是凑微分法.

9.2 凑微分法与变数替换

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x = x(t)$ 满足

(1) $x(\quad) = a, x(\quad) = b$, 且 $a < x(t) < b$ ($\quad < t < \quad$);

(2) $x(t)$ 存在并在 $[\quad, \quad]$ 上可积.

则

$$\int_a^b f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt. \quad (9.1)$$

上述条件(1)是保证被积函数的取值不致越出积分区间. 变数替换的简单情况即是凑微分法. 同时, 凑微分法也是其他方法的基础和优先思路.

例 9.2.1 设 $f(x)$ 为连续奇函数, 记 $F(x) = \int_0^x \frac{f(t) dt}{1+t^2}$, 求 $F(0)$.

【解】 因为 $f(x)$ 连续, 则 $F(x)$ 存在, 且

$$F(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}.$$

$f(x)$ 为连续奇函数, 则 $F(x)$ 亦为奇函数且为连续函数, 于是 $F(0) = 0$, 因此 $f(0) = 0$. **【解毕】**

例 9.2.2 设 $f \in [0, 1]$, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 3$, 求

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \sin 2x dx.$$

【解】 原积分记为 I , 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) d(\cos^2 x) = \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 3.$$

【解毕】

例 9.2.3 设 $f(x)$ 为连续奇函数, 且 $\int_0^1 f(t) dt = a$, 求 $\int_0^1 \frac{f(-x)}{x} dx$.

【解】 原积分记为 I , 则

$$I = 2 \int_0^1 f(-x) dx = -2 \int_0^{-1} f(t) dt.$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 则

$$I = 2 \int_{-1}^0 f(t) dt = -2 \int_0^{-1} f(t) dt = -2a. \quad \text{【解毕】}$$

例 9 2 4 求 $\int_a^{2a} \frac{x^2 - a^2}{x^4} dx \quad (a > 0)$.

【思路】 采用三角函数替换进行有理化.

【解】 原积分记为 I , 令 $x = a \sec t$, $dx = a \tan t \cdot \sec t dt$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a \tan t}{a^4 \sec^4 t} a \tan t \sec t dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dsin t \\ &= \frac{1}{3a^2} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{8a^2}. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

【注】 由估值定理或保序性, 此积分 $I > 0$, 这种检查可以避免符号错误.

例 9 2 5 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x - \sin^5 x dx$.

【解】 记积分值为 I , 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x / \sin^{3/2} x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3/2} x \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5/2} x \cos x dx \\ &= \frac{2}{5} \sin^{5/2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5} \sin^{3/2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5}. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

【注】 积分号内的被积函数受到积分区间上的变量约束, 本题应

注意到 $\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 内变号, 必须拆分区间进行计算.

例 9 2 6 求 $\int_0^1 (2x - x^2) dx$. (2000 年考研题)

【解】 被积函数非负, 上限大于下限时, 积分为该区间上曲边梯形之面积. 考虑到 $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$, 积分值应为圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 的 $1/4$ 面积, 于是立即知道积分值为 $\frac{1}{4}$. **【解毕】**

【注】 上述题目本为填空题, 若不熟悉几何意义而直接计算, 定会超时造成损失, 且有出错可能.

例 9 2 7 计算 $\int_{-2}^0 (x - 2x - x^2) dx$.

【思路】 将根号内配方, 利用变数替换.

【解】 原积分记为 $I = \int_{-2}^0 (x - 1 - (x + 1)^2) dx$.

令 $x + 1 = t$, 则 $dx = dt$, 于是有

$$I = \int_{-1}^1 (t - 1) (1 - t^2) dt = 0 - 2 \int_0^1 (1 - t^2) dt = -\frac{2}{3}.$$

【解毕】

【技巧】 上述解法中用到了奇函数在对称区间上积分为零以及几何意义两个小技巧, 得以准确快速求解.

【注】 原积分必为负值, 因为被积函数在给定区间上为负定函数.

例 9 2 8 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

【解】 (方法 1——错误举例)

令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, 于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dt}{3+t^2} = 0.$$

由积分的保号性, 原积分应为正数, 上述作法答案不对. 改为

求原函数,用 N-L 公式.

$$\text{记 } F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2 + \cos t}, \text{ 在上述变换下求得 } F(x) = \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{3} \tan \frac{x}{2}, \text{ 因此 } I = \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{3} \tan \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 0. \text{ 答案仍}$$

然不对. 正确做法如下:

(方法 2)

注意到被积函数以 $T=2$ 为周期, 则

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{2 + \cos x}. \quad (1)$$

前面的错误原因在于进行变换时, 没注意变数替换的条件, 事实上在 $[0, 2]$ 上不可以直接取(方法 1)中的替换. 现在对(1)式可

进行 $t = \tan \frac{x}{2}$ 的替换.

$$I = \int_0^+ \frac{2dt}{3 + t^2} = \frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^+ = \frac{2}{3}.$$

(方法 3)

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{2 + \cos x} + \int_2^2 \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

对后一积分取平移变换 $y = 2 - x$, 则有 $dy = -dx$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{dx}{2 + \cos x} - \int_0^2 \frac{dy}{2 + \cos y} \\ &= 2 \int_0^2 \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

【解毕】

例 9.2.9 计算 $\int_{\sqrt[4]{x}}^4 \frac{|\ln x|}{x} dx$.

【思路】 为脱掉绝对值符号, 须拆分区间, 化为二个积分.

【解】 原积分为

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{1/4}^1 \frac{-\ln x}{x} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx \\
 &= 2 \int_{1/4}^1 (-\ln x) dx + 2 \int_1^4 \ln x dx \\
 &= -(2x \ln x - 4x) \Big|_{1/4}^1 + (2x \ln x - 4x) \Big|_1^4 \\
 &= 6\ln 2 - 2. \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

例 9 2.10 求 $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(1+x)\cos x}{1+\cos^2 x} dx$.

【解】 将被积函数分解为奇函数与偶函数之和, 则只须计算偶函数对应的积分, 另一个积分为零. 因此原积分为

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x\cos x}{1+\cos^2 x} dx \\
 &= 2 \int_0^{1/2} \frac{d\sin x}{2-\sin^2 x} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{2+\sin x} + \frac{1}{2-\sin x} d\sin x \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left. \frac{2+\sin x}{2-\sin x} \right|_0^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{2+1}{2-1} = 2\ln(2+1). \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

9.3 分部积分

分部积分需注意上下积分限, 与不定积分的分部积分法相类似, 常常以凑微分法为基础.

设 $f(x)$ 可导, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上可积, $G(x)$ 为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)G'(x)dx. \quad (9.2)$$

例 9.3.1 计算 $I = \int_0^{\frac{4}{3}} x^2 + 1 dx$.

【解】 首先, 本题可用变数替换 $x = \tan t$. 这里, 我们用分部积分方法求解.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{4}{3}} x^2 + 1 \Big|_0^{\frac{4}{3}} - \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{20}{9} - \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{20}{9} - I + \ln(x^2 + 1)\Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{20}{9} - I + \ln 3. \end{aligned}$$

解出原积分 $I = \frac{10}{9} + \frac{1}{2} \ln 3$. **【解毕】**

例 9.3.2 计算 $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{2x-x^2} dx$.

【解】 $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{1-(1-x)^2} dx$.

令 $1-x=t$, 则 $dx = -dt$, 于是得到

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \arcsin t d(1-t^2) \\ &= -2 \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} (1-t^2) \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} + 2 \int_0^{\sqrt{2}} dt \\ &= 1 - \frac{3}{6}. \end{aligned}$$

【解毕】

【技巧】 再次用到凑微分法, 并利用了偶对称性质.

【寓意】 本题考查变数替换与分部积分.

例 9.3.3 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 对 $x \in (0, a)$,

$$f_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt, \quad f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t) dt, \quad (k = 2, 3, \dots),$$

则由已知函数 $f_1(x)$ 表出的 $f_k(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (单项选择题) .

- (A) $\frac{1}{k} f_1(x)$; (B) $\frac{1}{k} [f_1(x)]^k$;
 (C) $\frac{1}{k!} [f_1(x)]^k$; (D) $\frac{1}{(k-1)!} [f_1(x)]^k$.

【思路】 先试算 $f_2(x)$, 观察规律 .

【解】 正确答案为(C) .

$f_1(x)$ 连续, 则 $f_1(x)$ 可导, 且 $f_1'(x) = f_1(x)$, 于是

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_0^x f_1(t) dt \\ &= \int_0^x f_1(t) f_1'(t) dt \\ &= \int_0^x f_1(t) df_1(t) = \frac{1}{2} f_1^2(t) \Big|_0^x = \frac{1}{2} f_1^2(x) - \frac{1}{2} f_1^2(0) . \end{aligned}$$

注意到 $f_1(0) = 0$, 因此 $f_2(x) = \frac{1}{2} f_1^2(x)$.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \int_0^x f_2(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2} f_1^2(t) df_1(t) = \frac{1}{3!} f_1^3(x) . \end{aligned}$$

设 $f_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} f_1^{k-1}(x)$, 则

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \int_0^x f_{k-1}(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} f_1^{k-1}(t) df_1(t) = \frac{1}{k!} f_1^k(x) . \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 9.3.4 设 $f(x), g(x)$ 均为 $[0, T]$ 上的连续可微函数, 且 $f(0) = 0$. 证明: $\int_0^T f(x) g(x) dx = \int_0^T f(t) \int_t^T g(x) dx dt$.

【思路】 试验分部积分 .

【证】 由 $g(x)$ 连续, 则 $\int_0^t g(x) dx$ 关于 t 可导, 于是可凑微分

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) g(x) dx &= \int_0^T f(x) d \int_0^x g(t) dt \\ &= f(x) \int_0^x g(t) dt \Big|_0^T - \int_0^T \int_0^x g(t) dt \cdot f'(x) dx . \end{aligned}$$

由 $f(0) = 0$, 则上述等号右端第一项为零, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) g(x) dx &= - \int_0^T f'(x) \int_0^x g(t) dt dx \\ &= \int_0^T f(t) \int_t^T g(x) dx dt . \quad \text{【证毕】} \end{aligned}$$

例 9.3.5 求 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ 与 $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

【解】 这是一个经典题目, 其结论和方法非常有用 .

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 可知 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. 记

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, 运用分部积分方法即有

$$\begin{aligned} I_n &= - \cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n . \end{aligned}$$

移项则得到阶数(步数)为 2 的递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} .$$

需要给出二个初值: $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ 形成完备递推格式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} , \quad (9.3)$$

$$I_0 = \pi/2, I_1 = 1 .$$

或等价地将(9.3)式记为

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \quad (k=1, 2, \dots).$$
(9.4)

【解毕】

【注】 记住(9.4)式是极有好处的,在许多场合的积分中,包括多元积分,最终常常化为形如 $\int_0^{1/2} \sin^n x dx$ 的积分,这时可直接利用(9.4)式写出结果.

9.4 区间变换、区间拆分与合并

尽管区间变换属于变数替换的特例,但在本节,我们还要专门讨论这一问题,其原因是区间变换属于不定积分所未涉及的问题,同时又显得非常重要,在处理一些积分计算与理论分析证明时,区间变换是重要工具,并且常常是无可替代的有力工具.

作为常用的区间变换有以下两种情况.

(1) $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 用的变换为

$$t = \frac{x-a}{b-a},$$

$$x = (b-a)t + a,$$

$$dx = (b-a)dt.$$
(9.5)

(2) $[a, b] \rightarrow [c, d]$ 用的变换为

$$t = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c,$$

$$x = \frac{t-c}{d-c}(b-a) + a,$$

$$dx = \frac{b-a}{d-c}dt.$$
(9.6)

在处理积分问题时,常常需要统一积分号,而这一手续的前提便是积分区间必须一致或相同,不同时则应取区间变换.

此外,有时还用到反号变换,令 $t = -x$, 以及倒数变换,令 $t = \frac{1}{x}$. 这些都是积分中的常用技巧.

区间处理的另一类问题是区间的拆分与合并.

本节重点是训练区间处理的能力.

例 9.4.1 设 $f(x)$ 为 $(-a, +a)$ 上的连续奇函数,证明 " $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ "

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (9.7)$$

【证】
$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

对等号右端第一个积分取反号变换 $t = -x$, 则 $dx = -dt$, 于是有

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = - \int_0^a f(x) dx,$$

因此
$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 对 $f(x)$ 为连续偶函数的情况,请读者证明

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (9.8)$$

例 9.4.2 设 $f(x)$ 为可积周期函数,周期为 T ,证明 " $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ "

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \quad (9.9)$$

【证】
$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

对上述右端第三个积分取平移变换,令 $t = x - T$, 则

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(x) dx,$$

于是(9.9)式成立.

【证毕】

例 9.4.3 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续周期函数, 周期为 T , 证明 $f(x)$ 的原函数必为周期函数与线性函数之和, 且其周期函数的周期亦为 T .

【证】 要证对 $f(x+T) = f(x)$ 存在常数 $a \in \mathbb{R}$, 使得

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = g(x) + ax,$$

且其中 $g(x)$ 满足 $g(x+T) = g(x)$.

采取构造性证明方法, 即求常数 a , 使其满足以上条件. 为此, 将 $F(x)$ 表示为

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt + ax - ax \\ &= \int_0^x (f(t) - a) dt + ax. \end{aligned}$$

记 $g(x) = \int_0^x (f(t) - a) dx$, 使其满足条件

$$g(x+T) = g(x). \quad (9.10)$$

只须求解常数 a . 考查 $g(x+T)$ 有

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_0^{x+T} (f(t) - a) dt \\ &= \int_0^x (f(t) - a) dt + \int_x^{x+T} (f(t) - a) dt \\ &= g(x) + \int_x^{x+T} (f(t) - a) dt. \end{aligned}$$

欲满足条件(9.10), 只须令 $\int_x^{x+T} (f(t) - a) dt = 0$, 求解 a 即可.

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} (f(t) - a) dt &= \int_x^{x+T} f(t) dt - \int_x^{x+T} a dt \\ &= \int_0^T f(t) dt - aT = 0, \end{aligned}$$

即有 $a = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ 确为常数.

【证毕】

【注】 上述解法中用到了例 9.4.2 的结论. 此外, 称

$$a = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

为 $f(t)$ 在一个周期内的平均值, 一般称

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (9.11)$$

为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上的平均值.

例 9.4.4 证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{x f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx$.

【思路】 $\cos x$ 为偶函数, $\sin x$ 为奇函数, 要证的等式两端分母均为偶函数, 而分子的奇偶性不详. 为此, 将 $\sin x$ 换为 $\cos t$, 则 $f(\cos t)$ 必为偶函数. 这便导致(方法 1); 将要证等式移项, 合并为一个积分号, 只须证明这个积分为零, 这便是(方法 2).

【证】 (方法 1)

对欲证不等式两端均施行变换 $t = x - \frac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{x f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{t + \frac{\pi}{2} f(-\cos t)}{1 + \sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(-\cos t)}{1 + \sin^2 t} dt, \\ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(-\cos t)}{1 + \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

于是原等式成立.

(方法 2)

只须证

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x - \frac{\pi}{2} f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx = 0$$

取变换 $t = x - \frac{\pi}{2}$ 便有

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{tf(-\cos t)}{1 + \sin^2 t} dt,$$

被积函数为奇函数, 于是 $I=0$.

【证毕】

【注】 上述两个方法形式相同, 其实思想方法不一样, (方法2)更具代表性 .

例 9.4.5 设单调减函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明 $\forall \xi \in (0, 1)$, 有

$$\int_0^{\xi} f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx .$$

【思路】 利用保序性证明移项后的不等式 .

【证】 只须证 $I = \int_0^{\xi} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx > 0$.

如能合并为一个积分号, 则有可能利用保序性得出结论 . 为统一积分限, 对上述等号右端第一个积分取变换 $t = \frac{x}{\xi}$, 则 $dx = \xi dt$, 于是

$$I = \int_0^1 (f(\xi t) - f(t)) dt .$$

由 $0 < \xi < 1$, 则 $\xi t < t$, 又因为 $f(x)$ 单调减, 所以有

$$f(\xi t) > f(t),$$

于是由保序性与连续性得到 $I > 0$.

【证毕】

【技巧】 这里的技巧便是利用区间变换来统一积分号 .

【注】 若只有 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减且可积, 则结论为 $I > 0$.

例 9.4.6 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明 $\forall \xi \in$

$(0, 1)$, 使得 $f(1 - \xi) + f(\xi) = 0$.

【思路】 如只证 $\forall \xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 问题便很简单, 用中值定理即可 . 而要证明 $f(1 - \xi) + f(\xi) = 0$, 则必须力图使被积函数出现 $f(1 - x)$, 于是联想到平移变换 $x = 1 - t$.

【证】 令 $x = 1 - t$, 则 $dx = -dt$, 于是有

$$\int_0^1 f(x) dx = - \int_1^0 f(1 - t) dt = \int_0^1 f(1 - t) dt = 0,$$

与已知等式两边相加便有

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = 0.$$

$f(x) + f(1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由中值定理便知 $\eta \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = f(\eta) + f(1-\eta) = 0. \quad \text{【证毕】}$$

例 9.4.7 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $y = f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称, 证明

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx.$$

【思路】 对称轴问题属于广义奇偶性问题(参见本书函数基本性质的章节). 在 $[a, b]$ 区间插入分点 $x = \frac{a+b}{2}$, 证明两半个区间上的积分相等.

【证】 $y = f(x)$ 以 $x = \frac{a+b}{2}$ 为对称轴, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2} - x\right) = f\left(\frac{a+b}{2} + x\right),$$

或者记为 $f(x) = f(a+b-x)$.

将 $\int_a^b f(x) dx$ 以 $x = \frac{a+b}{2}$ 为分点进行拆分有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx.$$

对第二个积分取区间变换 $t = a+b-x$, 则 $dx = -dt$, 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx \\ &= - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) dt. \end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx. \quad \text{【证毕】}$$

例 9.4.8 求下列定积分:

$$(1) I_0 = \int_0^{1/2} \ln(\sin x) dx; \quad (2) I_1 = \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\tan x};$$

$$(3) I_2 = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx; \quad (4) I_3 = \int_0^1 x \ln(\sin x) dx.$$

【思路】 利用区间变换进行试验.

【解】 (1) 首先, 积分下限 $x=0$ 为 $\ln(\sin x)$ 的奇点, 属第二类广义积分, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = 0$, 因而积分收敛, 广义积分收敛时可按

普通定积分计算.

令 $x=2t$, 则 $dx=2dt$, 于是

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \int_0^{1/4} \ln(\sin 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{1/4} (\ln 2 + \ln(\sin t) + \ln(\cos t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{1/4} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{1/4} \ln(\cos t) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

对上式右端最后一个积分取区间变换 $t = \frac{1}{2} - u$, 则有

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{1/4} \ln(\cos t) dt &= 2 \int_{1/4}^{1/2} \ln(\sin u) du, \text{ 代入(1)式, 有} \\ I_0 &= \frac{1}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{1/4} \ln(\sin t) dt + \int_{1/4}^{1/2} \ln(\sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + 2 I_0, \end{aligned}$$

因此 $I_0 = -\frac{1}{2} \ln 2$.

(2) I_1 被积函数含有 I_0 中被积函数的微分因子, 故可试验对 I_1 进行分部积分.

$$I_0 = x \ln(\sin x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\tan x} dx$$

$$= - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx = - \frac{1}{2} \ln 2 .$$

因此得到
$$I_1 = \frac{1}{2} \ln 2 .$$

(3) 对 I_1 , 取变换 $\sin x = t$, 则 $dx = \frac{dt}{\cos x}$, 于是有

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\tan x} \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln 2 ,$$

因此
$$I_2 = \frac{1}{2} \ln 2 .$$

(4) 对 I_4 设法化为 $0, \frac{\pi}{2}$ 上的积分, 取变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $dx = -dt$, 于是

$$\begin{aligned} I_4 &= - \int_{\pi/2}^0 \frac{\pi}{2} - t \ln(\cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} - t \ln(\cos t) dt . \end{aligned}$$

注意到 $t \ln(\cos t)$ 为奇函数, 因此得到

$$I_4 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = - \frac{1}{2} \ln 2 . \text{【解毕】}$$

【技巧】 对三角函数构成的定积分, 将区间变换与三角函数诱导公式结合起来, 往往是非常有效的.

第 10 章 基于定积分的函数性态分析及定积分应用

10.1 引言

基于定积分给出的某些条件,可以对连续函数或可微函数导出许多重要结论,这些结论对函数的性态分析有重要作用.

以下列出定积分的某些重要性质:

(1) 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, 当且仅当 $x \in [a, b]$ 时 $f(x) \equiv 0$, 上述不等式中的等号成立. 换言之, 若 $f(x) \not\equiv 0$, 则必有 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

(2) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则至少存在一点 (a, b) , 使 $f(\xi) = 0$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续非负, 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则必有 $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

(4) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 若 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, 则必有 $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

例 10.1.1 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ 且不恒为零, 证明 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

【证】 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为零, 则至少有一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$f(x_0) > 0$, 又因为 $f(x)$ 连续, 则对 $\forall \varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0) > 0, \forall \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时(取 δ 足够小, 使 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$)

$$-\frac{1}{2} f(x_0) < f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2} f(x_0),$$

即有 $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$.

再由 $f(x) \geq 0$ 及积分对区间的可加性, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0^-} f(x) dx + \int_{x_0^-}^{x_0^+} f(x) dx + \int_{x_0^+}^b f(x) dx \\ &= 0 + \int_{x_0^-}^{x_0^+} f(x) dx + 0 \\ &> \frac{1}{2} f(x_0)(2\delta) = f(x_0)\delta > 0. \end{aligned}$$

其中用到了积分的保序性

【证毕】

【注】 本题即为前面性质(1).

例 10.1.2 证明前面性质(3).

【证】 反证, 若有 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > 0$, 则由例 10.1.1 的结论可知 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 矛盾.

【证毕】

例 10.1.3 证明前面性质(2).

【思路】 可用中值定理证明, 但许多教科书中关于积分中值定理只能给出 $\xi \in [a, b]$ 的结论. 以下采用前述性质(1)证明.

【证】 要证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $f(\xi) = 0$.

反证, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内无零点, 又因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内必为定号, 不妨假设 $f(x) > 0, x \in (a, b)$, 即 $f(x)$ 最多在 a 或 b 点有零点, 当 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) \geq 0$ (等号最多在端点成立), 于是有 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 矛盾!

【证毕】

例 10.1.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明 $\forall \xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

【寓意】 一般教科书均给出这题目(中值定理) $\xi \in [a, b]$ 的结论, 而 $\xi \in (a, b)$ 是更加理想和有用的结论. 本题采用两个方法证明这一结论.

【证】 (方法 1) 用本节性质(2).

假设已有 $\xi \in [a, b]$ 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ (这是极易得出的结论, 可参阅任何一本高等数学教科书). 我们进一步证明这样的 ξ 一定能在 (a, b) 内部取得. 由假设则有

$$\int_a^b (f(x) - f(\xi)) dx = 0.$$

由于 $f(x) - f(\xi)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由前面性质(2), $\forall \eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) - f(\xi) = 0$, 即有 $f(\eta) = f(\xi)$.

【注】 满足积分中值定理的 ξ 不一定唯一, 但至少在 (a, b) 内部有一个, 这是最关键的.

(方法 2) 用变上限积分.

对任意 $x \in [a, b]$, 记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 因此 $\forall \eta \in (a, b)$, 使得

$$F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a),$$

即 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b - a)$. **【证毕】**

【注】 用类似上述(方法 1)的方法, 可以证明: 对在 $[a, b]$ 上连续的 $f(x)$ 与 $g(x)$, 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上定号, 则 $\forall \xi \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

请读者做此练习.

例 10.1.5 设正值函数 $f(x) \in C[a, b]$, 记

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(x)} dx,$$

则 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内零点个数为____(单项选择).

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

【解】 答案为(B).

由 $f(x)$ 连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且可导, 又 $f(x)$ 恒取正值, 则有

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(x)} dx < 0,$$

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx > 0.$$

因而 $\forall x_0 \in (a, b)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 又因为

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

即 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调, 最多有一个零点, 即 $F(x)$ 在 (a, b) 内恰有一个零点. 【解毕】

例 10.1.6 设非负严格单调减函数 $f(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续, $0 < a < b$, 证明

$$b \int_0^a f(x) dx > a \int_a^b f(x) dx.$$

【证】 (方法 1) 只须证 $I = b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0$.

对第二个积分取变换 $t = \frac{x-a}{b-a} \cdot a$, 则 $x = \frac{b-a}{a}t + a$, $dx =$

$\frac{b-a}{a}dt$, 于是

$$\begin{aligned} I &= b \int_0^a f(x) dx - a \int_0^a f\left(\frac{b-a}{a}t + a\right) \frac{b-a}{a} dt \\ &= b \int_0^a f(x) dx - f\left(\frac{b-a}{a}x + a\right) dx + a \int_0^a f\left(\frac{b-a}{a}x + a\right) dx. \end{aligned}$$

在上述第一个积分 $I_1 = \int_0^a f(x) - f\left(\frac{b}{a} - 1 + \frac{a}{x}x\right) dx$ 中, 注意 $\frac{b}{a} - 1 + \frac{a}{x} > 1, x > 0$. $\frac{b}{a} - 1 + \frac{a}{x}x > x$, 再由 $f(x)$ 连续单调减, 上述积分中被积函数大于零, 因此得出 $I_1 > 0$, 又第二个积分也大于零, 所以 $I > 0$.

(方法 2) 应用积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(x_1), \quad x_1 \in (0, a),$$

$$\int_a^b f(x) dx = a(b-a)f(x_2), \quad x_2 \in (a, b),$$

由 $x_2 > x_1$ 得 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以

$$\begin{aligned} & \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx \\ &= ab(f(x_1) - f(x_2)) + a^2 f(x_2) > 0. \end{aligned}$$

(方法 3) 对 $x \in [a, b]$, 令 $I(x) = \int_0^a f(t) dt - a \int_a^x f(t) dt$,

则 $I(x)$ 可导, 并且

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^a f(t) dt - af(x) \\ &= af(a) - af(x), \quad (0, a), \end{aligned}$$

显然 $x < a$, 又因为 $f(x)$ 严格单调减, 因而 $I(x) > 0$, 又因为 $I(a) > 0, I(x)$ 严格单调增加, 令 $x = b$, 则

$$I(b) > I(a) = 0,$$

即有原不等式成立.

【证毕】

【注】 利用变限积分证明积分不等式是重要手段, 其技巧是引入一个变量, 进而定义一个辅助函数.

例 10.1.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0, \quad \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0.$$

试证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0. \quad (2000 \text{ 年考研题})$$

【证】 (方法 1) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $0 < x < \pi$, 则有 $F(0) = F(\pi) = 0$. 由题设条件利用分部积分可得

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx = \int_0^\pi \cos x dF(x) = \int_0^\pi F(x)\sin x dx = 0.$$

由连续函数性质必存在 $\xi_1 \in (0, \pi)$, 使得 $F(\xi_1)\sin \xi_1 = 0$, 再由 $(0, \pi)$ 时 $\sin x > 0$, 则必有 $F(\xi_1) = 0$.

对 $F(x)$ 应用罗尔定理, 由 $F(0) = F(\xi_1) = F(\pi) = 0$, 则至少存在两点 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 与 $\xi_3 \in (\xi_1, \pi)$ 使得

$$F(\xi_2) = F(\xi_3) = 0, \text{ 从而得 } f(\xi_2) = f(\xi_3) = 0.$$

(方法 2) 由 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$, 则 $f(x)$ 至少有一个零点 $\xi_1 \in (0, \pi)$. 另外, 若 $f(x)$ 只有一个零点 ξ_1 , 则 $f(x)$ 必在 ξ_1 两侧异号且分别为定号, 不妨假设

当 $x \in (0, \xi_1)$ 时, $f(x) > 0$,

当 $x \in (\xi_1, \pi)$ 时, $f(x) < 0$.

注意到 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$, $\int_0^{\xi_1} f(x)\cos x dx = 0$, 因此

$$\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx = 0. \quad (1)$$

而 $\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx$

$$= \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx + \int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx,$$

同时注意到 $\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调减, 上述两个积分的被积函数均连续且大于零, 于是则有

$$\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos \xi_1) dx > 0.$$

这与(1)式矛盾！因此 $f(x)$ 至少有两个不同零点。 【证毕】

【思路】 本题主要思路是运用本节性质(2). 这是一个极重要的命题.

【技巧】 (方法 1)中是运用性质(2)找到 $F(x)$ 的 3 个不同零点, 从而确定 $f(x)$ 有两个零点. (方法 2)反证过程中, 由假设的唯一零点 对区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 进行拆分, 并利用 $\cos x$ 的增减性, 同时用到本节性质(1), 得出积分大于零这一矛盾.

【寓意】 考查由积分决定的连续函数的性态分析, 积分的计算与估值, 微分学的罗尔定理.

例 10.1.8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = k \int_0^1 x e^{1-x} f(x) dx \quad (k > 1).$$

证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

(2001 年考研题)

【思路】 此类题型必然要用到积分中值定理, 又欲证等式中含有导数, 则应考虑到微分与导数的基本定理.

【证】 首先, 由 $k > 1$, 则积分区间 $[\xi, 1] \subset (0, 1)$, 其次由积分中值定理

$$f(1) = \xi^{-1} e^{1-\xi} f(\xi), \quad \xi \in [\xi, 1] \subset (0, 1).$$

取 $\varphi(x) = x e^{1-x} f(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[\xi, 1]$ 上连续, 在 $(\xi, 1)$ 内可导, 且有

$$\varphi(\xi) = f(1), \quad \varphi(1) = f(1).$$

在 $(\xi, 1)$ 上对 $\varphi(x)$ 应用罗尔定理得

$$\varphi'(\eta) = e^{1-\eta} [f(\eta) - f(\eta) + f(\eta)] = 0,$$

其中 $\eta \in (\xi, 1) \subset (0, 1)$, 由 $e^{1-\eta} \neq 0$, 则必有

$$f(\eta) - f(\eta) + f(\eta) = 0,$$

即

$$f'(\eta) = (1 - \eta^{-1})f(\eta).$$

【证毕】

【技巧】 引入函数 $\varphi(x)$ 是重要的技巧. 欲证等式中含有 $f(x)$, 必须考查某个函数的导数, 这便是引入 $\varphi(x)$ 的背景.

【寓意】 本题考查积分中值定理与微分学有关定理的运用能力.

10.2 定积分综合问题与变限积分

本节给出若干定积分综合例题, 包括积分不等式、含参数的积分及变限积分的综合分析, 训练知识综合与交叉运用的技巧.

1. 积分不等式问题

综例 10.2.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续非负且单调增加, (X, Y) 为区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 的形心, 证明 $X \leq \frac{a+b}{2}$.

【思路】 本题要证

$$X = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \leq \frac{a+b}{2},$$

即证

$$I = \int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx \leq 0. \quad (1)$$

将 b 视为变量, 引入变上限的积分 $F(x)$, 证明 $F(x) \leq 0$, 这便是(方法 1); 将二个积分合并为一个积分号, 再插入分点 $\frac{a+b}{2}$, 把积分拆分为两个区间上的积分, 利用 $f(x)$ 单调性对积分估计正负号, 这便形成(方法 2); 利用积分中值定理对积分进行估计, 便形成(方法 3).

【证】 (方法 1)

令 $F(x) = \int_a^x tf(t)dt - \frac{a+x}{2} \int_a^x f(t)dt$, 则 $F(a) = 0$, 而

$$\begin{aligned}
 F(x) &= xf(x) - \frac{a+x}{2} f(x) - \frac{1}{2} \int_a^x f(t) dt \\
 &= \frac{1}{2}(x-a)f(x) - \frac{1}{2} f(\xi)(x-a) \\
 &= \frac{1}{2}(x-a)(f(x) - f(\xi)).
 \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (a, x)$, 又 $f(x)$ 单调增加, 因而 $F(x) > 0$, 令 $x = b$, 则不等式(1)成立.

(方法 2)

考虑(1)式中的积分

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx \\
 &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f(x) dx.
 \end{aligned}$$

将上述等号右端第一个积分记为 I_1 , $f(x)$ 单调增加, 则

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad x - \frac{a+b}{2} < 0.$$

由积分的保序性(注意被积函数为负), 因此

$$I_1 \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx. \quad (2)$$

再考虑前面等号右端中的第二个积分, 记为 I_2 , 注意

$$f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad x - \frac{a+b}{2} > 0,$$

由保序性又有

$$I_2 \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx. \quad (3)$$

将同向不等式(2)和(3)相加, 则有

$$I = I_1 + I_2 \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = 0, \quad (4)$$

于是不等式(1)得证.

(方法 3)

对(方法 2)中的 I_1 与 I_2 , 注意到 $x - \frac{a+b}{2}$ 在两个积分号内分别保持定号, 而 $f(x)$ 连续, 由积分中值定理则有

$$I_1 = f(\xi_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} x - \frac{a+b}{2} dx = -\frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_1),$$

$$I_2 = f(\xi_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b x - \frac{a+b}{2} dx = \frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_2),$$

其中 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$, 即有 $\xi_2 > \xi_1$, 由 $f(x)$ 的单调性, 则有 $f(\xi_2) > f(\xi_1)$, 于是

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{8}(b-a)^2 (f(\xi_2) - f(\xi_1)) > 0. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 在(方法 2)中, 将要证的两个积分号先合并为一个积分, 又以 $x = \frac{a+b}{2}$ 为分点拆成两个区间的积分, 最后又合并为一个区间上的积分, 这种区间的拆分与合并的技巧是处理定积分问题的常用手段.

综例 10.2.2 设非负二阶可微函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内满足 $f(x) > 0$, 对常数 $a > 0$, 试证明 $\int_0^a f(x) dx > af \frac{a}{2}$.

【思路】 本题有明显的几何意义: 在 $[0, a]$ 上以 $f(x)$ 为曲顶的梯形面积大于以 $f \frac{a}{2}$ 为高的矩形面积.

在要证的不等式中, 视 $x = a$ 为参数, 则可引入变上限积分, 然后讨论其增减性与定号性. 这便是(方法 1); 由 $f(x) > 0$, 得知 $y = f(x)$ 的曲线为下凸, 将 $f(x)$ 展为一阶泰勒公式, 对积分进行估计, 这便是(方法 2).

【证】 (方法 1) 设辅助函数

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - xf \frac{x}{2}, \quad x \in [0, a],$$

显然 $F(0) = 0$. 则只须证明 $F(a) > 0$ 即可.

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - f \frac{x}{2} - \frac{x}{2} f \frac{x}{2} \\ &= f(x) \cdot \frac{x}{2} - \frac{x}{2} f \frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} \left(f(x) - f \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

由 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为严格单调增函数, 即有 $f(x) > f \frac{x}{2}$, 于是 $F(x) > 0$, 令 $x = a$, 则 $F(a) > 0$.

(方法 2)

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f \frac{a}{2} + f \frac{a}{2} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2} f''(\xi) \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 dx$$

其中右端积分号内为 $f(x)$ 在 $x = \frac{a}{2}$ 处的泰勒展开式, 在 x 与 $x_0 = \frac{a}{2}$ 之间.

注意到 $\int_0^a \left(x - \frac{a}{2} \right) dx = 0$ 且 $f''(\xi) > 0$, 则

$$\int_0^a f(x) dx > \int_0^a f \frac{a}{2} dx = af \frac{a}{2}. \quad \text{【证毕】}$$

【技巧】 请注意积分中广义奇偶性的应用.

(1) 若连续函数 $y = f(x)$ 以 $x = a$ 为对称轴, 则对任意实数 b 有

$$\int_{-b}^b f(a-x) dx = 2 \int_0^b f(a-x) dx, \quad (10.1)$$

或 $\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (10.2)$

(2) 若连续函数 $y = f(x)$ 以点 $(a, 0)$ 为对称中心, 则对任意实

数 b 有

$$\int_{-b}^b f(a-x) dx = 0, \quad (10.3)$$

或
$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0. \quad (10.4)$$

对以上两种情况,若令 $(x) = f(a-x)$, 对(1)则有 $(-x) = f(a+x) = f(a-x) = (x)$, 即 (x) 为偶函数; 对(2)则有 $(-x) = -f(a+x) = -f(a-x) = -(x)$, 此时 (x) 为奇函数.

证明综例 10.2.1 中的(4)式及综例 10.2.2 中 $\int_0^a f\left(\frac{a}{2} - x - \frac{a}{2}\right) dx = 0$ 即是属于(10.4)式的情形. 对(10.1)至(10.4)四个公式,可用积分的区间变换及广义奇偶性(对称性)进行证明,留作读者练习.

综例 10.2.3 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

【思路】 令 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx$, 则只须证明 $I = 0$, 又被积函数

分母不为零,只须估计分子的符号,但 $\sin x - \cos x$ 在 $0, \frac{\pi}{2}$ 上变

号,为此,将区间分割,插入分点 $x = \frac{\pi}{4}$.

【证】
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx.$$

对第二个积分取区间变换 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则 $dx = -dt$, 于是

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t - \sin t}{1+t^2} dt.$$

将 I 的两个积分号再次合并,并用积分估值定理,得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \cdot \frac{\frac{x^2}{4} - x}{(1+x^2) \left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)} dx.
 \end{aligned}$$

被积函数中第一个因子在 $0, \frac{\pi}{4}$ 上小于等于零, 而第二个因子大于等于零, 由积分估值定理得知必有 $I \leq 0$, 即知原不等式成立.

【证毕】

【技巧】 再次用到积分区间的拆分与积分号的合并, 这是处理积分问题的重要技巧.

【注】 上述例题亦可用积分中值定理, 并且不等式中的等号可以除掉, 留给读者做为练习.

综例 10.2.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有一阶连续导数, 并且记 $M =$

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \text{ 试证 } M \geq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f(x)| dx.$$

【思路】 要证的不等式右端第一项是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上平均值的绝对值. 而此平均值恰为积分中值定理下的 $f(\xi)$, $\xi \in (a, b)$, 即有

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (10.5)$$

此外, 不等式右端第二项含有 $f(x)$, 应联想到凑微分方法而导致牛顿-莱布尼茨公式的又一形式

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a). \quad (10.6)$$

【证】 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $\forall x_0 \in [a, b]$, 使得

$$|f(x_0)| = M.$$

再由积分中值定理又有 (10.5) 式, 在 x_0 与 ξ 构成的区间上用 (10.6) 式则有 (注意 x_0 与 ξ 的大小关系不定)

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = f(x_0) - f(a).$$

即有

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(a)| &= \left| \int_a^{x_0} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^{x_0} |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{x_0} M dx \\ &= M(x_0 - a). \end{aligned}$$

即原不等式成立.

【证毕】

【技巧】 设 $f(x)$ 非负, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的子区间上的积分不超过 $[a, b]$ 上的积分, 即有

$$\int_c^d f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx, \quad (10.7)$$

其中 $[c, d] \subset [a, b]$.

综例 10.2.5 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且单调增加. 试证明对满足 $0 < a < b$ 的任意实数 a 与 b 有

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_0^b f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \right).$$

【思路】 视不等式中的 b 为参变量, 构造辅助函数.

【证】 令 $x \in [a, b]$ 引入辅助函数

$$F(x) = \int_a^x tf(t) dt - \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \right),$$

则有 $F(a) = 0$, 只须证明 $F(b) \geq 0$ 即可.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x xf(x) dx - \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^x 2xf(x) dx - \int_0^x f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 f(x) - \int_0^x f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \right), \end{aligned}$$

其中 $(0, x)$, 由 $f(x)$ 的单调性, 即知 $f(x) > f(0)$. 因此 $F(x) > 0$, 再由 $F(a) = 0$, 则必有 $F(x) > 0$. 令 $x = b$, 则 $F(b) > 0$, 即原不等式成立. 【证毕】

【技巧】 对 $\int_0^x f(t) dt$ 应用了积分中值定理, 是为了与 $xf(x)$ 比较大小. 当遇到函数与导数比较大小时, 常用微分中值定理将函数 (或函数增量) 转化为含有导数的表达式, 而当遇到函数与积分比较大小时, 常用积分中值定理将积分转化为含有函数值的表达式.

综例 10.2.6 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上非负, $f(0) = 0$ 且 $f'(x) > 0$. 若 (X, Y) 为区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 的形心, 试证明 $X > \frac{2}{3}a$.

【思路】 利用形心公式写出相应的积分不等式, 引入变量和辅助函数进行分析.

【证】
$$X = \frac{\int_0^a xf(x) dx}{\int_0^a f(x) dx},$$
 要证明 $X > \frac{2}{3}a$, 即证明

$$\int_0^a x - \frac{2}{3}a f(x) dx > 0.$$

令 $F(x) = \int_0^x t - \frac{2}{3}x f(t) dt$, 则 $F(0) = 0$, 只须证 $F(a) > 0$. 注意到 $F'(x) = \frac{1}{3}xf(x) - \frac{2}{3}\int_0^x f(t) dt$, 且 $F(0) = 0$, $F'(x) =$

$$\frac{1}{3}xf'(x) - \frac{1}{3}f(x) = \frac{1}{3}xf'(x) - \frac{x}{3}f'(x), \text{ 其中 } \xi \in (0, x).$$

由 $f'(x) > 0$ 可知 $f(x)$ 单调增, 于是 $f(\xi) > f'(x)$, 则有 $F'(x) > 0$, 由 $F(0) = 0$, 则又有 $F(x) > 0$, 而 $F(0) = 0$, 所以 $F(x) > 0$, 令 $x = a$, 即有 $F(a) > 0$. 【证毕】

【寓意】 本题考查积分号的合并, 积分中值定理, 导数与函数增减性等知识点, 以及综合运用知识的技巧.

综例 10 2.7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续非负下凸(上凹), 且 $f(a) = 0$, 证明: $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_a^b f(x) dx$.

【思路】 利用函数的凸性定义及积分估值定理可对两个积分进行大小的比较. 但首先必须使两个积分区间一致, 这便导致区间变换.

【证】 对欲证不等式左端积分取区间变换, 令 $t = 2x - a$, $dx = \frac{1}{2} dt$, 则

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f\left(\frac{t+a}{2}\right) dt.$$

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上下凸, 则 $f\left(\frac{t+a}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(t) + f(a)]$, 于是有

$$\frac{1}{2} \int_a^b f\left(\frac{t+a}{2}\right) dt \leq \frac{1}{4} \int_a^b (f(t) + f(a)) dt.$$

注意到 $f(a) = 0$, 则

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \leq \frac{1}{4} \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{4} \int_a^b f(x) dx.$$

于是原不等式成立.

【证毕】

综例 10 2.8 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 证明柯西积分不等式

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx. \quad (10.8)$$

【注】 柯西积分不等式是一个经典不等式, 在数学分析中有重要应用. 这里介绍一种证明方法.

【证】 设法配出平方的积分项, 由积分的保号性, 对任意实数 λ , 均有

$$\int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 dx \geq 0.$$

即有 $\int_a^b g^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx = 0$.

这是关于 $\int_a^b f(x)g(x) dx$ 的一个二次三项式, 其判别式应小于等于零, 即

$$= 4 \int_a^b f(x)g(x) dx^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx = 0.$$

这已经意味着柯西不等式成立.

【证毕】

综例 10 2 9 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 且当 $x \in [a, b]$ 时 $f(x) > 0$. 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = (b-a)^2.$$

【思路】 用柯西积分不等式.

【证】 由柯西积分不等式(10.8), 应有

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \int_a^b f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} dx = (b-a)^2.$$

【证毕】

综例 10 2 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有一阶连续导数, 且 $f(a) = 0$.

记 $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 证明 $\int_a^b (f'(x))^2 dx = \frac{M^2}{b-a}$.

【思路】 用柯西积分不等式.

【证】 由 $f'(x)$ 的连续性, 可设有 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $|f'(x_0)| = M$, 由柯西积分不等式(10.8), 考虑

$$\begin{aligned} (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx &= \int_a^b 1^2 \cdot dx = \int_a^b (f'(x))^2 dx \\ &= \int_a^{x_0} (f'(x))^2 dx \cdot \int_a^{x_0} 1^2 \cdot dx \\ &= \left(\int_a^{x_0} f'(x) dx \right)^2 \\ &= (f(x_0) - f(a))^2. \end{aligned}$$

上面等号用到了牛顿-莱布尼兹公式, 并注意到 $f(a) = 0$, 因此

$$\int_a^b (f'(x))^2 dx = \frac{f^2(x_0)}{b-a} = \frac{M^2}{b-a}. \quad \text{【证毕】}$$

【技巧】 证明中再次用到以导数为被积函数的牛顿-莱布尼兹公式(10.6).

【注】 柯西积分不等式(10.8)在处理积分问题中可直接引用.

综例 10.2.11 设 $f(t), g(t)$ 与 $y(t)$ 均为 $[a, b]$ 上的连续函数, $f(t) > 0$ 且 $y(t) = g(t) + \int_a^t f(s)y(s) ds$.

试证明在 $[a, b]$ 上成立不等式

$$y(t) \leq g(t) + \int_a^t f(s)g(s) e^{\int_a^s f(s) ds} ds.$$

【思路】 欲证不等式中含有一项变上限的积分, 将此项变上限积分定义为一个连续可微函数, 便有可能用导数对此问题进行研究.

【证】 令 $R(t) = \int_a^t f(s)y(s) ds$, 则 $R(a) = 0$, 且当 $t \in [a, b]$ 时 $R(t)$ 为可微函数

$$R'(t) = f(t)y(t).$$

考虑到已知不等式, 则上述方程可导致不等式

$$\begin{aligned} R'(t) &= f(t)g(t) + f(t) \int_a^t f(s)y(s) ds \\ &= f(t)g(t) + f(t)R(t), \end{aligned}$$

即有 $R'(t) - f(t)R(t) = f(t)g(t)$.

将上述不等式两端同乘以 $e^{-\int_a^t f(s) ds}$ (恒为正), 则不等式右端为 $R(t) \cdot e^{-\int_a^t f(s) ds}$ 的导数, 即有

$$R'(t) \cdot e^{-\int_a^t f(s) ds} = f(t)g(t) \cdot e^{-\int_a^t f(s) ds}.$$

由积分的保序性, 对上述两端取 $[a, t]$ 上的积分, 其中 $t \in [a, b]$, 同时注意到 $R(a) = 0$, 则有

$$R(t) e^{-\int_a^t f(s) ds} = \int_a^t f(s)g(s) \cdot e^{-\int_a^s f(s) ds} ds.$$

注意,右端积分变量为 s ,将上式两边同除以 $e^{-\int_a^t f(s)ds}$ (t 的函数) 则有

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{\int_a^t f(s)ds} \int_a^t f(s)g(s) \cdot e^{-\int_a^s f(s)ds} ds \\ &= \int_a^t f(s)g(s) \cdot e^{\int_a^s f(s)ds} ds. \end{aligned} \quad \text{【证毕】}$$

其中用到了积分号与积分区间的合并.

【注】 积分不等式证明的方法与技巧小结:

积分不等式的证明往往用到较多而又综合的知识点,基础是积分的保序性(保号性)与估值定理、积分中值定理与变数替换,涉及导数时需考虑微分中值定理或泰勒公式.技巧是研究被积函数在给定区间上的增减性、凸性与最大最小值,有时还需研究驻点与局部极值.而区间变换,积分号的拆分与合并则是常用手段.柯西积分不等式可做为已知结论,直接引用.

2. 含参积分与变限积分

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则当 $x \in [a, b]$ 时,变限积分的一般形式为

$$G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt. \quad (10.9)$$

若进一步有 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导的条件,则 $G(x)$ 变为可导函数,且

$$G'(x) = f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x). \quad (10.10)$$

被积函数含有与积分变量无关的参数时,相应的积分称为含参积分.这里不专门讨论含参积分的一般理论问题(有兴趣读者可参阅数学专业用的数学分析教材),只仅限于讨论含参积分的某些处理技巧问题,并且主要是求导数或求极限问题.

含参积分两种形式如下:

$$(1) \text{ 形如 } I(c) = \int_a^b f(x)dx \text{ 的积分}$$

由于 (c) 和变分变量 x 无关, 可将 (c) 移到积分号外, 即

$$\int_a^b (c) f(x) dx = (c) \int_a^b f(x) dx. \quad (10.11)$$

此时有

$$I(c) = (c) \int_a^b f(x) dx. \quad (10.12)$$

(2) 形如 $I(c) = \int_a^b f(x, c) dx$ 的积分

即含有参数 c 的部分不能以独立因子形式出现在被积函数内, 这时欲求 $I(c)$, 则需引入变数替换, 将参数变换至积分的上限或下限. 而选取变数替换的类型则因不同情况而有所不同.

综例 10.2.12 设 $F(x) = \int_x^{x+2} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ _____ (单项选择).

- (A) 为正的常数; (B) 为负的常数;
 (C) 恒等于零; (D) 不是常数.

【解】 显然 $F(x) = 0$, 即有 $F(x)$ 必为常数, 又因为

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^2 e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^2 e^{\sin t} d\cos t \\ &= - e^{\sin t} \cos t \Big|_0^2 + \int_0^2 \cos^2 t \cdot e^{\sin t} dt. \end{aligned}$$

上述第一项为零, 对第二项, 由积分保号性, 被积函数在 $[0, 2]$ 上连续非负, 积分结果亦非负, 因此 $F(0) > 0$, 即 $F(x)$ 必为正的常数, 正确选项为 (A). 此外, 亦可由 $F(x) = \int_0^2 e^{\sin t} \cdot \sin t dt$, 得知 $F(x)$ 为常数. **【解毕】**

综例 10.2.13 讨论常数 x 取何值时, 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^{x^2} (1+t^4) dt$$

存在且不等于零, 并求此极限.

【解】 应用洛必达法则 .

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + x^8}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 1 + x^8}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 1 + \frac{1}{x^8}}{x^{-6}} . \end{aligned}$$

于是知道当 $n = 6$ 时, 原极存在并且非零, 极限值为 $\frac{1}{3}$. **【解毕】**

【寓意】 本题考查无穷大量的比阶及变上限积分等知识点 .

综例 10 2.14 求 $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$. (1999 年考研题)

【思路】 积分含有参数, 必须设法将参数移至积分号外或变换到上下限才可以求导数 .

【解】 令 $x-t=u$, 则 $dt = -du$, 于是

$$\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = - \int_x^0 \sin u^2 du = \int_0^x \sin u^2 du .$$

于是

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \sin x^2 . \quad \text{【解毕】}$$

综例 10 2.15 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 求 $\varphi(x)$, 并讨论 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性 . (1997 年考研题)

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, 又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 便得到 $f(0) = 0$, 且 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ 的积分表达式为一含参数积分, 令 $u = xt$, 则 $du = xdt$, 于是

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du .$$

当 $x \neq 0$ 时, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} [xf(x) - \int_0^x f(u) du]$.

再求 $\varphi(0)$.

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du - f(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

综上, $f(x)$ 表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left[xf(x) - \int_0^x f(u) du \right], & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

另外

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = f(0). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【解毕】

【寓意】 本题考查函数的连续性、导数定义及运算, 变限积分与含参数积分, 以及极限运算.

综例 10.2.16 设 $f(x)$, $g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t g(t) dt$ 的

- (A) 低阶无穷小; (B) 高阶无穷小;
(C) 同阶但不等价的无穷小; (D) 等价无穷小.

(1997 年考研题)

【解】 答案为(B).

只须考虑极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) \sin t dt}{\int_0^x t f(t) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, 因此正确选项为 (B) .

【解毕】

【寓意】 本题考查变限积分, 积分中值定理及极限运算 .

【注】 本题没给出 $f(x)$ 的可导条件, 不可以用洛必达法则 .

综例 10 2.17 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$. 已

知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$. (1999 年考研题)

【思路】 已知条件中有含参数积分, 首先将参数变换到积分上下

限, 寻找计算 $\int_1^2 f(x) dx$ 的途径 .

【解】 令 $2x - u = t$, 则 $dt = -du$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^x t f(2x-t) dt &= - \int_{2x}^x (2x-u) f(u) du \\ &= 2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du = \frac{1}{2} \arctan x^2 . \end{aligned}$$

两端关于 x 求导数

$$\begin{aligned} 2 \int_x^{2x} f(u) du + 2x(2f(2x) - f(x)) - \\ (2xf(2x) \cdot 2 - xf(x)) &= \frac{x}{1+x^4}, \end{aligned}$$

化简得到 $2 \int_x^{2x} f(u) du = \frac{x}{1+x^4} + xf(x)$.

令 $x=1$, 由 $f(1)=1$, 得到 $\int_1^2 f(u) du = \frac{3}{4}$.

【解毕】

综例 10 2 .18 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有 $x, t \in (0, +\infty)$ 满足条件

$$\int_1^{xt} f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_1^t f(u) du,$$

求 $f(x)$. (2001 年考研题)

【思路】 已知等式也属于含参数的积分, 但参数在上限, 只将 x 视为变量, t 视为参数.

【解】 已知等式各项均为 x 的可导函数, 两端关于 x 求导数, 得到

$$tf(xt) = tf(x) + \int_1^t f(u) du.$$

由 $f(1) = \frac{5}{2}$, 只须令 $x=1$, 得到

$$tf(t) = \frac{5}{2}t + \int_1^t f(u) du.$$

当 $t \in (0, +\infty)$ 时, 由上式可见 $f(t)$ 为可导函数, 将上式两端关于 t 求导, 得

$$f(t) + tf'(t) = \frac{5}{2} + f(t),$$

解出 $f'(t) = \frac{5}{2t}$.

积分得到 $f(t) = \frac{5}{2} \ln t + c$.

由 $f(1) = \frac{5}{2}$, 解出 $c = \frac{5}{2}$. 最后得到

$$f(x) = \frac{5}{2}(\ln x + 1). \quad \text{【解毕】}$$

综例 10 2 .19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < \dots < b$, 试证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int [f(x+h) - f(x)] dx = f(\quad) - f(\quad).$$

【思路】 欲证等式中有含参数积分, 首先用变数替换将参数 h 变换到积分上下限.

【证】 记 $I(h) = \frac{1}{h} \int [f(x+h) - f(x)] dx$, 将积分分成两部分

$$I(h) = \frac{1}{h} \int f(x+h) dx - \int f(x) dx$$

对第一个积分取变换 $x+h=t$, 则 $dx=dt$, 于是

$$I(h) = \frac{1}{h} \int_{+h}^{+h} f(t) dt - \int f(x) dx.$$

由上式令 $h \rightarrow 0$ 取极限并应用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} I(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{+h}^{+h} f(t) dt - \int f(x) dx}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(+h) - f(+h)}{1} \\ &= f(\quad) - f(\quad). \end{aligned}$$

最后一个等号用到了 $f(x)$ 的连续性.

【证毕】

【技巧】 将被积函数中的参数 h 变换到积分上下限, 是一个重要技巧, 本题如不用这一技巧, 其他方法都将是相当复杂的.

综例 10.2.20 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x) dt = -\frac{x^2}{2} + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$ 的极值与渐近线.

【思路】 首先处理积分内的参数 t , 将 t 移至积分上下限后才有可能通过求导数获得 $f(x)$.

【解】 对已知等式左端积分取变换 $t-x=u$, 则 $du=dt$, 已知等式变为

$$\int_0^{-x} f(u) du = \frac{x^2}{2} - e^{-x} + 1.$$

显然上式左端为 x 的可导函数, 上式两端关于 x 求导, 得到

$$f'(x) = -x - e^{-x}.$$

因而

$$f(x) = x - e^x,$$

$$f'(x) = 1 - e^x.$$

$x_0 = 0$ 为驻点, 且因 $f'(0) = -1 < 0$, 所以 $x_0 = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 且 $f(0) = -1$.

由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知道 $f(x)$ 有斜渐近线, 且 $a = 1, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$, 即 $x \rightarrow -\infty$ 时的斜渐近线为 $y = x$, 无垂直渐近线与水平渐近线. 【解毕】

【寓意】 本题考查变限积分, 函数关系与极限等知识点.

综例 10.2.21 若 $f(t)$ 是连续周期函数, 周期为 ω , 证明函数 $f(x) = \frac{e^{kx}}{e^{-k} - 1} \int_x^{x+\omega} f(t)e^{-kt} dt$ 满足 $\frac{df}{dx} = kf(x) + f(x)$, 常数 $k \in \mathbb{R}$ 且 $f(x)$ 必为周期函数, 其周期亦为 ω .

【证】

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{ke^{kx}}{e^{-k} - 1} \int_x^{x+\omega} f(t)e^{-kt} dt + \frac{e^{kx}}{e^{-k} - 1} (f(x)e^{-k(x+\omega)} - f(x)e^{-kx}) \\ &= kf(x) + \frac{e^{kx}e^{-kx}}{e^{-k} - 1} (f(x)e^{-k} - f(x)) \\ &= kf(x) + \frac{1}{e^{-k} - 1} (f(x)e^{-k} - f(x)) \\ &= kf(x) + f(x), \end{aligned}$$

即有 $\frac{df}{dx} = kf(x) + f(x)$.

再证周期性, 只须考查是否成立 $f(x+\omega) = f(x)$.

$$f(x+\omega) = \frac{e^{k(x+\omega)}}{e^{-k} - 1} \int_{x+\omega}^{x+\omega+\omega} f(t)e^{-kt} dt,$$

取平移变换 $s = t - \omega$, 则 $dt = ds$, 且有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^{x+1} \frac{e^{-k(s+1)}}{e^{-k} - 1} ds \\
 &= \int_0^{x+1} \frac{e^{-ks}}{e^{-k} - 1} ds = f(x). \quad \text{【证毕】}
 \end{aligned}$$

【寓意】 考查变限积分与定积分的综合处理能力.

【技巧】 积分的区间变换再次体现为重要技巧, 此外还有含参数积分中的因子移进移出积分号的技巧.

3. 定积分综合问题

定积分计算与分析问题是一个相当综合的问题, 包括前面的积分不等式与含参数积分等内容, 此外还可与导数, 极限, 中值定理, 最大最小值问题相结合处理问题, 这里给出若干典型例题, 以训练综合运用知识的能力与技巧.

综例 10 2 22 设 $f(x) > 0$, $\int_0^1 [f(x) + f(x)] \sin x dx = 5$, 求 $f(0)$.

【解】

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) \sin x dx + \int_0^1 f(x) \sin x dx &= \int_0^1 f(x) \sin x dx + \int_0^1 \sin x df(x) \\
 &= \int_0^1 f(x) \sin x dx - \int_0^1 f(x) \cos x dx \\
 &= \int_0^1 f(x) \sin x dx - \int_0^1 \cos x df(x) \\
 &= f(0) + f(1) = 5, \text{ 因此 } f(0) = 3. \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

综例 10 2 23 设 $f(x) \in [0, 1]$, $f(1) = 1$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 且满足 $\int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$, 则 $[0, 1]$ 上的 $f(x)$ 为____ (单项选择).

(A) $\frac{1}{x}$; (B) $\frac{1}{2x}$; (C) x ; (D) $\frac{x}{3}$.

【解】 对已知等式两端关于 x 求导数, 并注意到 $g(f(x)) = x$, 则

得到 $f(x) = \frac{1}{2x}$, 在 $[1, x]$ 上取积分

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{dt}{2t},$$

$$f(x) - f(1) = x - 1.$$

由 $f(1) = 1$, 则 $f(x) = x$.

【解毕】

【注】 本题亦可用不定积分方法求解, 最后定出常数 $c = 0$, 此时 $f(1) = 1$ 成为多余的条件.

综例 10 2 24 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对满足 $\int_a^b g(x) dx = 0$ 的一切 $g(x)$ 均有 $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, 试证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为常数 c .

【思路】 设法证明某一非负连续函数在 $[a, b]$ 上的积分为零, 从而得出欲证的结论.

【证】 由 $f(x)$ 连续, 则 $\forall (a, b)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$, 于是有

$$\int_a^b (f(x) - f(\xi)) dx = 0,$$

记 $c = f(\xi)$, 显然 c 为常数, 则有 $\int_a^b (f(x) - c) dx = 0$.

设法配出非负连续函数的积分. 由上述积分为零的结果知道, 若取 $g(x) = f(x) - c$, 则 $g(x)$ 符合题设条件, 于是又得到

$$\int_a^b f(x)(f(x) - c) dx = 0.$$

为得到非负函数的积分为零, 考虑到

$$\int_a^b f(x)(f(x) - c) dx - c \int_a^b (f(x) - c) dx = 0,$$

合并积分号,便得到

$$\int_a^b (f(x) - c)^2 dx = 0.$$

显然 $(f(x) - c)^2$ 在 $[a, b]$ 上连续非负,由 10.1 节性质 (3),则在 $[a, b]$ 上有 $(f(x) - c)^2 = 0$,即得到

$$f(x) = c, x \in [a, b]. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 函数类的思想是数学中分析问题的一种思维模式,本题的 $g(x)$ 即是满足 $[a, b]$ 上积分为零的一类函数.读者可进一步研究下列.

综例 10.2.25 设 $f(x), g(x)$ 均为 $[0, T]$ 上的连续可微函数,且 $f(0) = 0$,试证明:

$$(1) \int_0^T f(t)g(t)dt = \int_0^T f(t) \int_t^T g(x)dx dt;$$

$$(2) \int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(t)(T-t)dt;$$

(3) 若对某非零常数 k 及满足上述条件的任意 $f(x)$ 又有

$$\int_0^T [f(x)g(x) - f(x)g(x)]dx + \int_0^T f(x)dx \int_0^T g(x)dx = 0.$$

则 $g(T) = 0$, $g(x)$ 在 $[0, T]$ 上二阶可导,并且满足方程

$$g'(x) + g(x) = \int_0^T g(x)dx.$$

【注】 本题的(1)即为例 9.3.4,这里解答省略.

【思路】 对(2)考虑分部积分.对(3),设法利用题设条件及函数类思想配出包括 $g(x)$ 在内的某个非负连续函数积分为零的形式,则被积函数恒为零,进而得出 $g(x)$ 可导.

【证】 (1) 参见例 9.3.4.

$$(2) \text{ 由 } f(0) = 0, \text{ 应用公式(10.6)则得到 } f(T) = \int_0^T f(t)dt.$$

由分部积分有

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \left. tf(t) \right|_0^T - \int_0^T tf'(t) dt = Tf(T) - \int_0^T tf'(t) dt \\ &= \int_0^T f(t)(T-t) dt. \end{aligned}$$

(3) 将本题(1), (2)结果代入题设的积分等式左端, 并记之为 I , 则应有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T f(t)g(t) - f(t) \int_t^T g(x) dx dt + \\ &\quad \int_0^T f(t)(T-t) dt \int_0^T g(t) dt \\ &= \int_0^T f(t)g(t) - \int_t^T g(x) dx + (T-t) \int_0^T g(x) dx dt = 0. \end{aligned}$$

由题设条件, 上式对一切满足 $f(0) = 0$, 且有一阶连续导数的 $f(x)$ 均成立. 现取

$$f(t) = \int_0^t g(x) dx - \int_0^T g(x) dx + (T-t) \int_0^T g(x) dx dt,$$

则由于 $g(x)$ 连续, 上述 $f(t)$ 有一阶连续导数, 且满足 $f(0) = 0$, 即有

$$f'(t) = g(t) - \int_t^T g(x) dx + (T-t) \int_0^T g(x) dx,$$

则立即有

$$I = \int_0^T g(t) - \int_t^T g(x) dx + (T-t) \int_0^T g(x) dx dt = 0.$$

上述积分中被积函数连续非负, 由 10.1 节性质(3)便得到

$$g(t) - \int_t^T g(x) dx + (T-t) \int_0^T g(x) dx = 0.$$

由变限积分性质, 上述的 $g(t)$ 为可导函数, 即 $g(x)$ 二阶可导. 由上式令 $t = T$, 得到 $g(T) = 0$, 对上式关于 t 求导便得到

$$g'(t) + g(t) = \int_0^T g(x) dx. \quad \text{【证毕】}$$

【技巧】 在积分号的合并与拆分中, 应注意积分结果与积分变量

记号无关这一重要原则, 而选取积分变量记号应尽量做到不至引起混淆.

综例 10 2 26 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \sin t^2 dt = 0$.

【思路】 在不定积分中, $\sin x^2 dx$ 不可以表达为有限的初等函数形式. 引入变数替换使 t^2 降幂为一次, 进而应用分部积分与积分中值定理, 对积分进行估计, 最后使用极限夹逼准则证明结论.

【证】 对极限中的积分引入变换 $t^2 = u, dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, 则有

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_x^{x+1} \sin t^2 dt = \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\ &= -\frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{u^{3/2}} du \\ &= \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos}{\sqrt[3]{2}} (2x+1) \\ &= \frac{(x+1)\cos x^2 - x\cos(x+1)^2}{2x(x+1)} - \frac{(2x+1)\cos}{4\sqrt[3]{2}}, \end{aligned}$$

其中 $x^2, (x+1)^2 (x \rightarrow +\infty, \text{可有 } x > 0)$.

由三角不等式

$$0 < |I(x)| < \frac{x+1}{2x(x+1)} + \frac{x}{2x(x+1)} + \frac{2x+1}{4x^3},$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 则应有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$.

【证毕】

【注】 本题当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 结论不变, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x) = 0.$$

综例 10 2 27 设 $[-1, 1]$ 上非负函数 $f(x)$ 满足 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$, 且当 $|x| > 1$ 时 $f(x) = 0$, $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $f(0) = A$, $f_n(x) = n f(nx) (n=1, 2, \dots)$, x_0 为 $(-1, 1)$ 内任一点.

$$(1) \text{ 求 } \lim_n \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(x) dx,$$

$$(2) \text{ 求 } \lim_n \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(x - x_0) dx.$$

【思路】 积分号内 $n(x) = n(n x)$ 属于含参数积分, 又已知 $f(0) = A$, 应从变数替换入手, 将参数 n 变换至积分上下限, 再运用积分中值定理.

$$\text{【证】 (1) 记 } I_n = \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(n x) dx.$$

令 $n x = t$, 则 $dx = \frac{1}{n} dt$, 于是

$$I_n = \int_{-n}^n f\left(\frac{t}{n}\right) \cdot n \left(\frac{t}{n}\right) dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{n}\right) \cdot n \left(\frac{t}{n}\right) dt,$$

其中用到 $|x| > 1$ 时 $n(x) = 0$ 的条件, 再由 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $n\left(\frac{t}{n}\right)$ 非负不变号, 由积分中值定理即有

$$I_n = f\left(\frac{\xi}{n}\right) \int_{-1}^1 n\left(\frac{t}{n}\right) dt = f\left(\frac{\xi}{n}\right),$$

其中 $\xi \in (-1, 1)$. 再由 $f(x)$ 的连续性, 便有

$$\lim_n I_n = \lim_n f\left(\frac{\xi}{n}\right) = f(0) = A.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 记 } J_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(x - x_0) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cdot n(n(x - x_0)) dx. \end{aligned}$$

取变换 $n(x - x_0) = t$, 则 $dx = \frac{dt}{n}$, 于是

$$J_n = \int_{-n(1+x_0)}^{n(1-x_0)} f\left(\frac{t}{n} + x_0\right) \cdot n \left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

由 $-1 < x_0 < 1$, 则 $-n(1+x_0) < -2n$, $n(1-x_0) > 2n$. 因此当 $n > 1$ 时可使区间 $[-1, 1] \subset [-n(1+x_0), n(1-x_0)]$, 再由 $|x| > 1$ 时 $n(x) = 0$, 利用积分对区间的可加性, 则有

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{n} + x_0\right) dt \\ &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{n} + x_0\right) dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{n} + x_0\right) dt, \end{aligned}$$

其中 $t \in (-1, 1)$, 由 $f(x)$ 的连续性, 则有

$$\lim_n J_n = \lim_n \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{n} + x_0\right) dt = f(x_0). \quad \text{【证毕】}$$

【寓意】 本题考查定积分与变限积分的处理能力, 包括积分中值定理与函数的连续性.

【注】 以上几个例题虽有较多技巧, 但所用到的知识均属于基础性, 积分的区间变换起了重要作用.

综例 10.2.28 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$3 \int_{-a}^a f(x) dx = f(\xi). \quad (2001 \text{ 年考研题})$$

【思路】 第(2)小题要证的不等式中含有 $f(\xi)$, 力图使积分号内含有 $f(\cdot)$, 再用积分估值定理, 由 $f(x)$ 连续性, 用连续函数介值定理完成(2)的证明.

【证】 (1) 对 $x \in [-a, a]$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(2) 利用(1)的结果进行积分, 则

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a f'(0)x dx + \int_{-a}^a \frac{x^2}{2!} f''(\xi) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 f''(\xi) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

由 $f(x)$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有最大最小值 m 与 M , 即 " $x \in [-a, a]$ 有 $m \leq f(x) \leq M$ ", 由积分估值定理即有

$$m \int_0^a x^2 dx \leq \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 f(x) dx \leq M \int_0^a x^2 dx, \quad (2)$$

即有
$$m \int_0^a x^2 dx \leq \int_{-a}^a f(x) dx \leq M \int_0^a x^2 dx.$$

再由连续函数的介值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in [-a, a]$ 使得

$$f(\xi) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx,$$

即
$$a^3 f(\xi) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx. \quad \text{【证毕】}$$

【寓意】 本题考点: 泰勒公式与连续函数性质, 积分估值定理, 奇偶性在对称区间上积分的应用.

【注】 在(1)式中积分号内的 $f(x)$ 不可以移至积分号外, 因为与积分变量有关. (2)式的结论用到了被积函数的奇偶性.

综例 10.2.29 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n < x < (n+1)$ 时, 证明 $2n < S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$. (2000 年考研题)

【解】 (1) 因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n < x < (n+1)$, $S(x)$ 为 x 的增函数, 所以

$$\int_0^n |\cos x| dx \leq S(x) < \int_0^{(n+1)} |\cos x| dx.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数, 由周期函数的积分性质, 即有

$$\int_0^n |\cos x| dx = n \int_0^\pi |\cos x| dx = 2n,$$

$$\int_0^{(n+1)} |\cos x| dx = 2(n+1).$$

由前积分不等式, 便有

$$2n \leq S(x) < 2(n+1).$$

(2) 由(1)知, 当 $n < x < (n+1)$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n}.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{3}. \quad \text{【解毕】}$$

【寓意】 本题考查非负函数变上限积分关于参数的单调性与极限准则.

10.3 定积分应用

定积分是对可加量的一种极限计算模式, 因此其应用范围是广泛的. 在学习定积分应用时, 应对几类典型背景总结出学习与研究问题的方法. 在计算方面, 注意应用积分的性质, 包括奇偶性、周期性、对称性等方面的性质. 此外, 在应用问题中也会涉及到函数性态分析的方法与技巧, 包括微分与积分中值定理、最大最小值问题、微分方程与初值问题等.

1. 平面区域的面积问题

假设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f_1(x) \leq f_2(x)$, 则区域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ 的面积为

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (10.13)$$

例 10.3.1 过点 $(2, 0)$ 做曲线 $y = x^3$ 的切线, 求所有切线与曲线 $y = x^3$ 围成封闭区域的面积.

【解】 设所做切线之切点为 (x_0, y_0) , 求此切点. 切线斜率为 $k = 3x_0^2$, 切线方程为 $y = 3x_0^2(x - 2)$. 又 (x_0, y_0) 在切线上, 即有 $y_0 = 3x_0^2(x_0 - 2)$, 解出 $x_1 = 0, x_2 = 3$, 即有两个切点 $(0, 0)$ 与 $(3, 27)$. 切线方程为

$y=0$ 与 $y=27(x-2)$.

(方法 1) 取 x 为积分变量, 此时须计算两个积分的和以求出所要的面积 .

$$A = \int_0^2 x^3 dx + \int_2^3 [x^3 - 27(x-2)] dx = \frac{27}{4} .$$

(方法 2) 取 y 为积分变量, 则所求面积为

$$A = \int_0^{27} \frac{y}{27} + 2 - \sqrt[3]{y} dy = \frac{27}{4} . \quad \text{【解毕】}$$

例 10.3.2 在 $[0, 1]$ 上给定 $y=e^x$, 对任意的 $t \in [0, 1]$, 记 A_1 为 $x=0, y=e^x$ 及 $y=e^t$ 围成的面积, A_2 为 $x=1, y=e^x$ 及 $y=e^t$ 围成的面积, 令 $A(t) = A_1 + A_2$, 求 $A(t)$ 的最大值与最小值 .

【思路】 这是一个含参数积分与变限积分的问题, 按面积公式列出 $A(t)$ 即可讨论该函数在 $[0, 1]$ 上的最大最小值问题 .

【解】

$$A_1(t) = \int_0^t (e^t - e^x) dx = te^t - e^t + 1,$$

$$A_2(t) = \int_t^1 (e^x - e^t) dx = e - 2e^t + te^t,$$

$$A(t) = (2t - 3)e^t + e + 1,$$

$$A'(t) = (2t - 1)e^t .$$

令 $A'(t) = 0$, 得到驻点 $t = \frac{1}{2}$, $A(t)$ 在 $[0, 1]$ 上无奇点 . 而

$$A(0) = e - 2, \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = e - 2e + 1, \quad A(1) = 1 .$$

因此得到

$$\max_{t \in [0, 1]} A(t) = 1, \quad \min_{t \in [0, 1]} A(t) = e - 2e + 1 . \quad \text{【解毕】}$$

例 10.3.3 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t (t \geq 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直

线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t) dt (x \geq 0)$. (2000 年考研题)

【解】 由题设

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2} t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

须分段求 $\int_0^x S(t) dt$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{6} x^3;$$

当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^1 S(t) dt + \int_1^x S(t) dt \\ &= -\frac{x^3}{6} + x^2 - x + \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

当 $x > 2$ 时,

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^x S(t) dt = x - 1.$$

最后得表达式

$$\int_0^x S(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{6} x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{6} x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 对分段表达的函数求变限积分, 必须分段计算, 中间用到对积分区间的可加性.

例 10.3.4 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的

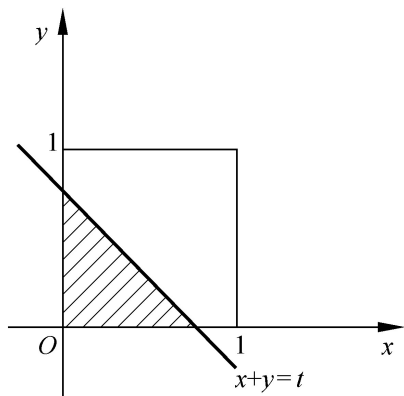


图 10.1

矩形面积, 等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证

明(1)中的 x_0 是唯一的. (1998 年考研题)

【思路】 本题属于积分应用中函数性态分析的问题, 并且涉及函数的中值问题或零点问题, 应考虑引入辅助函数.

【证】 (1) (方法 1)

要证 $\forall x_0 \in (0, 1)$ 使得 $x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx$, 显然可取 x_0 为一变量, 并作辅助函数 $F(x) = x \int_x^1 f(t) dt$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 在 $[0, 1]$ 上应用罗尔定理, 即有 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $F(x_0) = 0$, 而

$$F(x_0) = x_0 \int_{x_0}^1 f(t) dt - x_0 f(x_0) = 0,$$

即原等式成立.

(方法 2)

设法构造一个连续函数, 应用连续函数的零点定理证明

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx.$$

令 $a = \frac{1}{2}$, 取 $x_1 \in (a, 1)$. 若 $\exists x \in [x_1, 1]$ 有 $f(x) = 0$, 则

$(x_1, 1)$ 内任意一点 x_0 均可满足 $x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx$. 否则, 必有 $x_2 \in [x_1, 1]$, 使 $f(x_2) = \max_{x \in [x_1, 1]} f(x)$.

对 $x \in [0, x_2]$ 作辅助函数

$$G(x) = x \int_x^1 f(t) dt - x f(x),$$

则 $G(x)$ 连续, $G(0) > 0$ (因 $f(x)$ 非负连续). 另外考查

$$G(x_2) = x_2 \int_{x_2}^1 f(t) dt - x_2 f(x_2)$$

的符号, 由 $f(x)$ 非负连续, 且 $f(x_2)$ 为 $[x_2, 1]$ 上的最大值, 则

$$\int_{x_2}^1 f(t) dt \leq f(x_2)(1 - x_2), \text{ 于是有}$$

$$F(x_2) = \int_0^{x_2} f(t) dt \leq f(x_2)(1 - x_2) - x_2 f(x_2) = f(x_2)(1 - 2x_2).$$

由前面讨论已有 $x_2 = x_1 > \frac{1}{2}$, 因此 $F(x_2) < 0$, 对 $F(x)$ 在 $[0, x_2]$ 上应用连续的零点定理, 则必存在 $x_0 \in (0, x_2) \subset (0, 1)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(t) dt.$$

(2) 对 $x \in (0, 1)$, 取

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt - xf(x),$$

则

$$\begin{aligned} F'(x) &= -f(x) - f(x) - xf'(x) \\ &= -2f(x) - xf'(x). \end{aligned}$$

由已知条件 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 则应有 $F'(x) < 0$, 其中 $x \in (0, 1)$.

因此 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 严格单调减少, 即 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内最多有一个零点, 由 (1) 的结论, $F(x)$ 至少有一个零点, 所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内恰有一个零点, 即零点唯一. 【证毕】

【寓意】 本题考查定积分应用(面积)与变限积分的综合处理能力, 包括连续函数零点定理及可微函数的罗尔定理. 在(方法 2)中还用到了最大值的处理技巧.

【技巧】 在定积分或变限积分的综合问题中, 常常根据函数在积分区间上的增减性、驻点、极值点、最大最小值点, 以及拐点等特点, 将积分区间拆分为两个或多个子区间进行分析.

平面区域的边界有时易于用极坐标表示, 这时 $D = \{ (r, \theta) \mid r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \}$ 的面积计算公式为

$r_1(\theta), r_2(\theta)$ 的面积计算公式为

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta. \quad (10.14)$$

例 10.3.5 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 围成的面积.

【解】 为坐标原点到区域内一点引出的射线与 x 轴正向夹角, 本题的取值范围应为 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 因此面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

令 $\varphi = \frac{\theta}{2}$, 则 $d\theta = 2d\varphi$, 于是

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2. \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 所取变换是为了利用 $0, \frac{\pi}{2}$ 上的积分公式, 简化计算.

例 10.3.6 设 $k > 0$, $y = kx^2$ 与 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处相交, 记 S_1 为 $y = kx^2$ 与 $y = \sin x$ 围成的面积, S_2 为 $y = \sin x$, $y = \sin t$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$ 围成的面积, 试证: $S(t) = S_1 + S_2$ 在 $0, \frac{\pi}{2}$ 内必有最小值.

【思路】 首先应求出交点, 确定 k 的值, 而后列出两个面积表达式, 均为变限积分. 最后利用导数证明有唯一最小值. 读者可画出本题草图.

【证】 首先, 曲线交点为 $(t, \sin t)$, 且 $\sin t = kt^2$, 因此, $k = \frac{\sin t}{t^2}$.

$$S_1(t) = \int_0^t \left(\sin x - \frac{\sin t}{t^2} x^2 \right) dx = 1 - \cos t - \frac{1}{3} t \sin t,$$

$$S_2(t) = \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sin t) dx = \cos t - \frac{\pi}{2} - t \sin t,$$

$$S(t) = 1 + \frac{2}{3} t - \frac{\pi}{2} \sin t, \quad \text{且 } S(0) = 1,$$

$$S' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 - \frac{1}{6} > 0 .$$

$$S(t) = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{2}{3} t \cos t,$$

$$S(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad S' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{3} > 0 .$$

因此 $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, 使 $S'(t) = 0$, $S(t) = \frac{4}{3} \cos t + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} t \sin t$,

当 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $S(t) > 0$, 故 $S(t)$ 单调, 驻点唯一, 因此 $S(t)$ 为

$\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ 内的唯一最小值 .

【证毕】

【注】 上述证明中 $S(0)$ 与 $S' \left(\frac{\pi}{2} \right)$ 均应理解为单侧导数, 对这类

问题也可通过求 $S(t)$ 的单侧极限来处理. 对导数 $S'(t)$ 有零点这一结论, 可以由 $S(t)$ 的连续性得到, 另外, 也可直接由导数零点定理得到, 后者不需要导数连续的条件, 这一分析方法在未知导数连续条件时, 是非常重要的.

【技巧】 本题不要求出最小值点, 事实上, 若刻意去求最小值点, 不仅表达复杂化, 而且也并非是题目所要求, 理论上证明了最小值点存在唯一就够了.

2. 旋转体体积问题与质心问题(形心问题)

体积问题的一般思想是

$$V(a, b) = \int_a^b A(x) dx,$$

其中 $A(x)$ 是某平面区域的面积函数, 与 x 有关.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, 区域 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体体积为

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx; \quad (10.15)$$

绕 y 轴旋转一周生成的旋转体体积为

$$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (10.16)$$

以上(10.15)与(10.16)均为对 x 的积分, 是基于沿 x 轴划分 $[a, b]$ 区间为 $\{x_i\}$, (10.15)是由圆台体积叠加而成, (10.16)则是由薄壁筒的体积叠加而成. 有时, 计算旋转体体积亦可转化为对 y 的积分.

例 10.3.7 求 $y = x^2$, $y^2 = x$ 围成的区域绕 x 轴旋转一周生成的体积.

【解】 先求交点, 求得 $(1, 1)$ 为两曲线交点, 平面区域为 $\{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$ (如图 10.2).

$$V_x = \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{10},$$

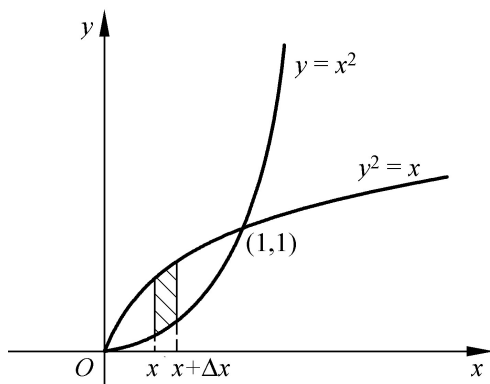


图 10.2

或横分(沿 y 轴分划), 得

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^1 2\pi y (y - y^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^3) dy \\ &= \frac{3}{10} \pi. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 对某一问题, 要注意取较为方便的一种划分, 化为对 x 或

对 y 的积分. 对两曲线相交而成的区域, 要求出交点, 并确定区域的上下及左右边界, 优选 x 或 y 作为积分变量.

例 10.3.8 设 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续单调增加且非负, 又 $f(0) = 0$, 区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$ 绕 $x = t$ 轴旋转一周生成的旋转体体积记为 $v(t)$, 试证明 $v(t)$ 二阶可导, 并求 $v'(t)$.

【思路】 画出草图, 本题为变上限定积分与含参数积分问题.

【证】 (方法 1) 沿 x 轴划分区间(如图 10.3)

$$\begin{aligned} dv(t) &= 2 \int_x^{x+\Delta x} f(x)(t-x) dx \\ v(t) &= \int_0^t 2(t-x)f(x) dx \\ &= 2t \int_0^t f(x) dx - 2 \int_0^t xf(x) dx. \end{aligned}$$

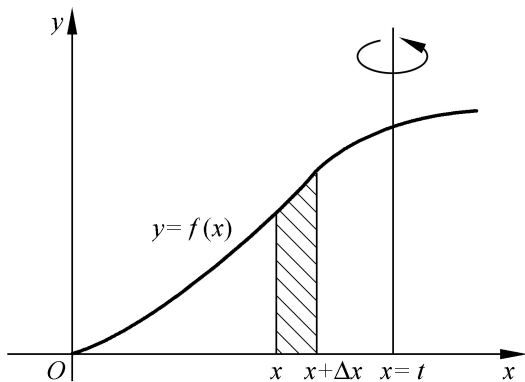


图 10.3

因 $f(x)$ 连续, 则 $v(t)$ 一阶可导, 并且有

$$\begin{aligned} v'(t) &= 2t f(t) + 2 \int_0^t f(x) dx - 2t f(t) \\ &= 2 \int_0^t f(x) dx. \end{aligned}$$

显然 $v'(t)$ 仍有一阶导数, 即 $v''(t)$ 存在, 并且

$$v''(t) = 2 f(t).$$

(方法 2) 沿 y 轴划分, 有

$$\begin{aligned} dv(t) &= (t-x)^2 dy, \\ v(t) &= \int_0^{f(t)} (t-x)^2 dy. \end{aligned}$$

这里的 x 应视为 $x = x(y) = f^{-1}(y)$, 即 $f(x)$ 的反函数, 取变换 $y = f(x)$, 上述积分变为

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t (t-x)^2 f(x) dx \\ &= (t-x)^2 f(x) \Big|_0^t + 2 \int_0^t (t-x) f(x) dx \\ &= 2 \int_0^t (t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

其余步骤同(方法 1).

【证毕】

例 10.3.9 设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2 , 并且 $a < 1$.

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积. (1998 年考研题)

【解】 (1) 当 $0 < a < 1$ 时, 如图 10.4

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left. \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^a + \left. \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right|_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

令 $S = a^2 - \frac{1}{2} = 0$, 得 $a = \frac{1}{2}$. 又 $S \Big|_{a=\frac{1}{2}} = 2 > 0$, 则 $S \Big|_{a=\frac{1}{2}}$ 是

极小值, 其值为

$$S \Big|_{a=\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6} - \frac{2}{6} = 0.$$

驻点唯一,且实际问题有最小值,上述极小值即为最小值.

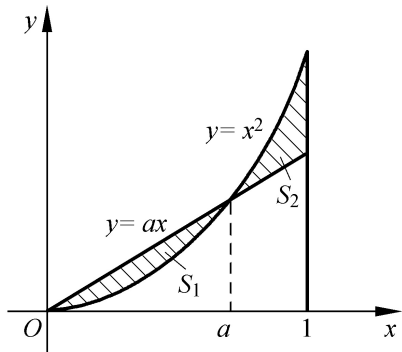


图 10.4

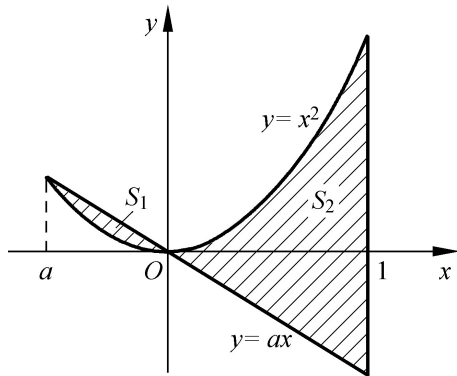


图 10.5

当 $a = 0$ 时,如图 10.5

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_a^0 (ax - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - ax) dx \\ &= -\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} . \\ S &= -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a^2 + 1) < 0, \end{aligned}$$

可见 S 单调减少,故 $a=0$ 时, S 取得最小值,此时 $S = \frac{1}{3}$.

综合上述,当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $S = \frac{1}{2}$ 为所求最小值,最小值为

$$\frac{2 - 2}{6} .$$

(2) 沿 x 轴划分,则有

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x^2 - x^4 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 - \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \left. \frac{1}{6} x^3 - \frac{x^5}{5} \right|_0^{\frac{1}{2}} + \left. \frac{x^5}{5} - \frac{1}{6} x^3 \right|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{2 + 1}{30} . \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题属于变限积分问题. 讨论 a 的取值范围时, 应注意题设条件 $a < 1$, 即 a 可以取负值. 这点不能忽略.

【寓意】 本题考点为面积、体积问题, 变限积分与极值问题.

例 10.3.10 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内恒为正, 并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1$, $y = 0$ 所围的图形 S 的面积 $A = 2$. 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积最小.

(1997 年考研题)

【思路】 已知等式为一个微分方程, 可用凑微分方法进行求解, 积分后利用面积 $A = 2$, 定出积分常数得 $f(x)$, 但 $f(x)$ 实质为 $f(x, a)$, 含一个参数.

【解】 当 $x > 0$ 时有

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}.$$

凑微分后有 $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2}a$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2}ax + c,$$

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + cx \quad x \in (0, 1].$$

由图形 S 的面积 $A = 2$, 则有

$$2 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}ax^2 + cx \right) dx = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c.$$

解出常数 $c = 4 - a$, 因此得到

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4 - a)x.$$

计算旋转体体积, 沿 x 轴对 $[0, 1]$ 进行划分, 得

$$V_x(a) = \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}ax^2 + (4 - a)x \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{30}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{16}{3} .$$

令 $V(a) = 0$, 解出驻点 $a = -5$ (唯一驻点). 又 $V(a) = \frac{1}{15} > 0$, 因此 $a = -5$ 时旋转体体积 $V(a)$ 取得最小值. 【解毕】

考虑以平面曲线围成的平板质心问题, 设均匀密度为 μ , 质心坐标为 (X, Y) , 设平面区域为

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

则质心公式为

$$X = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad (10.17)$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (10.18)$$

其中两式分子部分为对 x 轴和 y 轴的静力矩.

考虑到旋转体体积公式(10.15)与(10.16), 则又可得到

$$2 \int_a^b X f(x) dx = V_y, \quad (10.19)$$

$$2 \int_a^b Y f(x) dx = V_x. \quad (10.20)$$

公式(10.19)与(10.20)可用于求 V_x 或 V_y , 有时, 在旋转体体积易于写出的情况下, 又可用于求解质心坐标 (X, Y) .

例 10.3.11 求匀质半圆盘的重心 (X, Y) , 并求此圆盘绕 x 轴和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积. 其中半圆盘边界为 $y =$

$$R^2 - (x - R)^2 .$$

【解】 显然 $X = R$,

$$Y = \frac{\int_0^{2R} (R^2 - (x - R)^2) dx}{\int_0^{2R} (R^2 - (x - R)^2) dx} = \frac{4}{3} R.$$

上述算式的分母为半圆面积, 分子部分可取变换 $x - R = t$ 进行计算. 另外, 求 V_x 与 V_y 可按公式 (10.19), (10.20) 计算.

$$V_x = 2 Y \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{4}{3} R^3,$$

$$V_y = 2 X \cdot \frac{1}{2} R^2 = R^3. \quad \text{【解毕】}$$

3. 曲率、曲线弧长与侧面积

设平面曲线 L 由如下参数方程确定:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \quad (t \text{ 为参数}) \end{aligned}$$

若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 则 L 的弧长可微分, 称为弧微分, 记为 dl , dl 可以有以下 3 种表达式:

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (\text{参数形式}); \quad (10.21)$$

$$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \quad (\text{直角坐标 } y = y(x)); \quad (10.22)$$

$$dl = \sqrt{r^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta \quad (\text{极坐标 } r = r(\theta)) \quad (10.23)$$

而介于参数区间 $[a, b]$ 上的弧长即为

$$L = \int_a^b dl. \quad (10.24)$$

此表达式为相应于 (10.22) 与 (10.23) 的形式时, 积分上下限应注意按变数替换进行相应的更替.

当曲线 L 为二阶光滑时 (即 $y = y(x)$ 有二阶导数), 它的曲率的 3 种表达式分别为:

$$k = \left| \frac{y'(t)x''(t) - y''(t)x'(t)}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} \right|, \quad (10.25)$$

$$k = \left| \frac{y''_x}{[1 + (y'_x)^2]^{3/2}} \right|, \quad (10.26)$$

$$k = \left| \frac{2(x')^2 + 2[x'(t)]^2 - (x'')^2}{\{2(x')^2 + [x'(t)]^2\}^{3/2}} \right|. \quad (10.27)$$

上述曲线 L 绕 x 轴旋转一周生成的旋转体的侧面积 S 有以下 3 种表达式:

$$S = 2 \int_a^b |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad (10.28)$$

$$S = 2 \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y_x')^2} dy, \quad (10.29)$$

$$S = 2 \int_1^2 (\sin \theta) \sqrt{(\cos \theta)^2 + [(-\sin \theta)']^2} d\theta. \quad (10.30)$$

例 10.3.12 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的周长.

【解】 由对称性可得

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi a \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta \\ &= 2a \int_0^\pi 2(1 + \cos \theta) d\theta = 2a \int_0^\pi 2\cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 10.3.13 过原点作曲线 $y = x^2 - 1$ 的切线, 求切线与该曲线及 x 轴围成的区域绕 x 轴旋转一周生成的表面积.

【解】 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线斜率应为

$$y'|_{x=x_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{1}{2y_0},$$

而切线方程为

$$y = \frac{1}{2(x_0 - 1)} \cdot x.$$

由切点 $(x_0, x_0^2 - 1)$ 在切线上, 解出切点为 $(2, 1)$, 则切线方程即是 $y = \frac{1}{2}x$. 采用公式 (10.29) 求侧面积, 则相应于抛物线 $y =$

$x - 1$ 旋转部分的侧面积为

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2 \int_1^2 (x-1) \cdot \left(1 + \frac{1}{4(x-1)}\right) dx \\
 &= \int_1^2 (4x-3) dx \\
 &= \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1).
 \end{aligned}$$

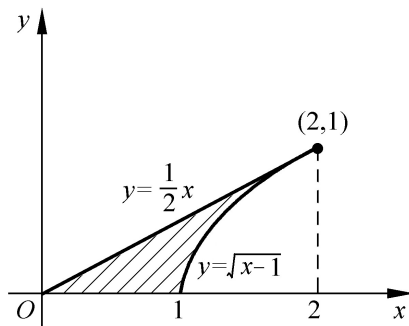


图 10.6

相应于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 旋转部分的侧面积为

$$S_2 = 2 \int_0^2 \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{5}{2} \int_0^2 x dx = 5.$$

最后得到该旋转体侧面积为

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1). \quad \text{【解毕】}$$

例 10.3.14 求半圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的形心.

【解】 题意即求均匀质量密度的半圆弧线的质量中心. 设质心坐标为 (X, Y) , 则 $X=0$, 只须求 Y . 对半圆弧段进行分割后, 将其中一小段对 x 轴取静力矩 dT_x , 则

$$dT_x = y dl,$$

积分后即有

$$T_x = \int_L y dl. \quad (\text{第一型曲线积分})$$

取参数方程

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t. \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

则

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^{\pi} a \sin t \cdot a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{\pi} a^3 \sin t dt = 2a^3. \end{aligned}$$

而半圆弧线的质量为 a , 于是 $Y = \frac{2}{3}a$. 【解毕】

例 10.3.15 设 $y = y(x)$ 是一向上凸的曲线, 其上一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{1+y^2}$, 且此曲线上的点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程, 并求函数 $y = y(x)$ 的极值.

(1998 年考研题)

【解】 曲线 $y = y(x)$ 为上凸, 则应有 $y'' < 0$, 由公式(10.26)及题设条件可得到方程

$$\frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即有
$$\frac{y''}{1+y'^2} = -1.$$

这是一个不显含 x 的二阶微分方程, 令 $p = y'$, 则 $p' = y''$, 上述微分方程化为

$$\begin{aligned} \frac{p'}{1+p^2} &= -1, \\ \frac{dp}{1+p^2} &= -dx. \end{aligned}$$

积分后得到 $\arctan p = a - x$.

又因为在 $(0, 1)$ 处切线方程为 $y = x + 1$, 则 $y'(0) = p|_{x=0} = 1$,

由此确定 $a = \frac{\pi}{4}$, 于是又得到

$$y = \tan \frac{1}{4} - x .$$

积分后得到 $y = \ln \left| \cos \frac{1}{4} - x \right| + c .$

再由 $y(0) = 1$, 确定 $c = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$, 因此 $y = y(x)$ 应为

$$y = \ln \cos \frac{1}{4} - x + 1 + \frac{1}{2} \ln 2, \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] .$$

令 $y = \tan \frac{1}{4} - x = 0$, 得到驻点 $x = \frac{1}{4}$, 又 $\cos \frac{1}{4} - x \leq 1$, 当且仅当 $x = \frac{1}{4}$ 时等号成立, 于是, $y = y(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 时取得极大值

$$y = 1 + \frac{1}{2} \ln 2 .$$

【解毕】

【寓意】 本题考点为曲率, 微分方程与不定积分 .

例 10.3.16 已知抛物线 $y = px^2 + qx$ (其中 $p < 0, q > 0$) 在第一象限内与 $x + y = 5$ 相切, 且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形面积为 S .

(1) 问 p 和 q 为何值时, S 达到最大值 ?

(2) 求出最大值 . (2001 年考研题)

【思路】 画出草图, 先求出抛物线与 x 轴的交点, 再求出面积 $S = S(p, q)$. 由直线与抛物线相切的条件, 确定出参数 p 与 q 满足的关系 . 从而将 $S(p, q)$ 转化为一元函数极值问题 .

【解】 抛物线与 x 轴交点为 $(0, 0)$ 与 $(-\frac{q}{p}, 0)$, 则所求面积为

$$S(p, q) = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx = \frac{q^3}{6p^2} .$$

由 $x + y = 5$ 与该抛物线在第一象限相切, 即知二者只有一个交点, 即方程组

$$x + y = 5,$$

$$y = px^2 + qx.$$

只有唯一解, 联立方程可导出 $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$, 其判别式

$$= (q+1)^2 + 20p = 0$$

得到 $p = -\frac{1}{20}(1+q)^2$, 于是面积函数为

$$S = S(q) = \frac{200q^3}{3(q+1)},$$

$$S'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^2}.$$

令 $S'(q) = 0$, 得驻点 $q = 3$, 且 $p = -\frac{4}{5}$, S 的最大值为 $S_{\max} = \frac{225}{32}$.

【解毕】

【寓意】 本题考点为导数与定积分应用(面积问题).

4. 压力与做功问题

垂直置入水面下的平板将受到正压力, 压强与距水面的深度成正比, 但这一距离是变量. 此类问题是典型的积分应用问题.

例 10.3.17 将半圆形平板闸门垂直放入水中, 直径与水平面重合(见图 10.7), 水密度 $\mu = 1$, 求闸板承受的正压力.

【解】 以水平面为 y 轴垂直向下方向为 x 轴建立坐标系(如图 10.7), 则 $dp = 2xy dx = 2x(R^2 - x^2) dx$, 其中 R 为半径, 则

$$p = \int_0^R 2x(R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3}(R^2 - x^2) \Big|_R^0 = \frac{2}{3}R^3.$$

【解毕】

例 10.3.18 设三角板两直角边和为 l , 垂直放入水中, 一直角边与水平面重合, 另一直角边垂直向下(见图 10.8), 问两直角边比例为何值时, 三角板承受水的压力最大?

【思路】 设两直角边比例为 k , 则压力 p 将表示为变限与含参数积分, 最后求极值.

【解】 设水平直角边边长为 a , 则另一直角边边长为 ka , 只须确定 k 值即可. 考虑纵坐标为 y 处的一小条平板上的水压力 dp , 则有

$$dp = x(ka - y) dy,$$

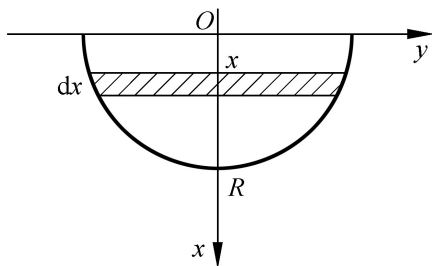


图 10.7

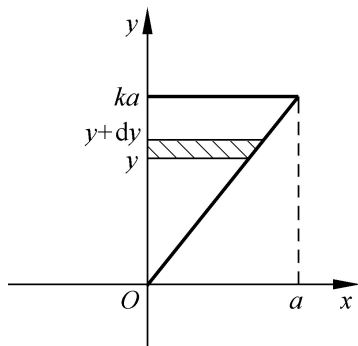


图 10.8

$p = p(k) \int_0^{ka} x(ka - y) dy$, 由 $y = kx$, 则有

$$\begin{aligned} p(k) &= \int_0^a x(ka - kx) \cdot k dx \\ &= k^2 \left. \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^a = \frac{k^2}{6} a^3. \end{aligned}$$

由题设条件 $a = \frac{l}{k+1}$, 则 $p(k) = \frac{l^3 k^2}{6(k+1)^3}$.

$$p(k) = \frac{l^3}{6} \cdot \frac{2k^2 + 2k - 3k^2}{(k+1)^4} = \frac{l^3}{6} \cdot \frac{k(2-k)}{(k+1)^4}.$$

令 $p(k) = 0$, 解得驻点为 $k=2$ ($k=0$ 不合理). 又 $p(k)$ 在 $k=2$ 两侧变号, 先正而后负, 即所求比例 $k=2$ 时, 压力 p 取得最大值, 且

$$p(2) = \frac{2}{81} l^3.$$

【解毕】

变力直线运动中, 变力做功的计算公式为

$$W = \int_a^b x f(x) dx,$$

其中 $f(x)$ 为与位移 x 有关的变力.

例 10.3.19 将一半径为 R 的半圆球压入水中, 使球体刚好与水

平面相切, 求克服浮力做的功(设水密度为 1) .

【思路】 此题为球体体积排开水的重量问题, 可用旋转体方法化为定积分的计算. 亦可用二重或三重积分计算. 以下给出定积分计算方法 .

【解】 建立坐标系如图 10.9, 其中 x 轴与水平面重合. 圆的方程为

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 .$$

将球体视为上述圆域绕 y 轴旋转一周生成的旋转体. 取如图所示断面相应的球台部分建立浮力的微分关系

$$dF = x^2 dy .$$

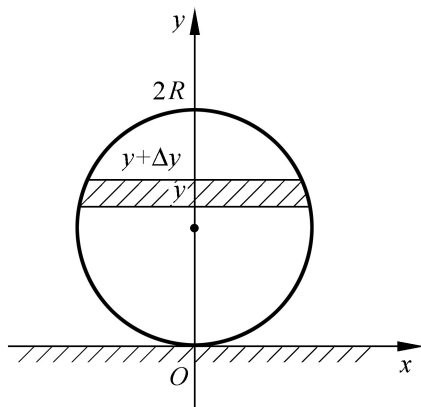


图 10.9

按题目要求, 球顶部与水平面重合时, 上述圆台的有效位移为 $2R - y$, 于是

$$dW = x^2 (2R - y) dy ,$$

取积分则有

$$W = \int_0^{2R} [R^2 - (y - R)^2] (2R - y) dy$$

令 $y - R = t$, 则 $dy = dt$, 于是

$$W = \int_{-R}^R (R^2 - t^2) (R - t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-R}^R (R^3 - Rt^2 - R^2 t + t^3) dt \\ &= 2 \int_0^R (R^3 - Rt^2) dt = \frac{4}{3} R^4 . \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 积分中尽量利用对称性, 上述积分第二个等号右端有两项积分为零.

【注】 球体进入水中后排开水的体积为 $\frac{4}{3} R^3$, 其质心为 R . 可以证明, 作的功恰为 $R \cdot \frac{4}{3} R^3$, 请读者作此证明.

第 11 章 广义积分概念及判敛方法

11.1 引言

广义积分是定积分的拓展,更确切地说,是定积分的某种极限形式,当相应的极限形式有极限存在时,广义积分称为收敛的.而收敛时,广义积分的计算可视为定积分进行计算,即定积分的处理方法均可适用于广义积分,包括凑微分法、变数替换、分部积分、递推与回归方法,只是应注意奇偶性对定积分的应用不可以照搬到广义积分的计算中来.

此外,广义积分有众多的应用背景,如做功与压力问题,以及引力问题等等,其计算与处理方法也类同于定积分.

广义积分的首要问题是收敛性判断问题,其次才是计算问题,而收敛问题又是极限问题,主要是无穷小量与无穷大量的比阶问题.

11.2 第一类广义积分概念与判敛

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积,则称 $\int_a^+ f(x)dx$ 为第一类广义积分,且当 $\lim_{b \rightarrow +} \int_a^b f(x)dx$ 存在时,称该广义积分收敛,否则,称之为发散.

类似上述情况,还有 $\int_-^b f(x)dx$ 也属于第一类广义积分形

式, 而 $\int_a^+ f(x) dx$ 则由双向极限 (a^- , 且 b^+) 来确定其收敛性, 属于第一类双边广义积分. 第一类广义积分的判敛方法如下:

(1) 充要条件 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负, $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时有界.

(2) 直接比较法 设 $X > a$, 若 $\forall x \in [X, +\infty)$ 有 $0 < f(x) \leq g(x)$, 则

1° 当 $\int_a^+ g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^+ f(x) dx$ 必收敛.

2° 当 $\int_a^+ f(x) dx$ 发散时, $\int_a^+ g(x) dx$ 必发散.

(3) 绝对收敛与条件收敛 若 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^+ f(x) dx$ 必然收敛, 且称之为绝对收敛. 否则, 即 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 发散, 而 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 则称之为条件收敛.

(4) 极限比较法(比阶法) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 区间上可积, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$, 则

1° 当 $\mu > 0$ 时, $\int_a^+ f(x) dx$ 与 $\int_a^+ g(x) dx$ 有相同的收敛性结论.

2° 当 $\mu = 0$ 时, 可由 $\int_a^+ g(x) dx$ 的收敛推知 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛.

3° 当 $\mu = \infty$ 时, 可由 $\int_a^+ g(x) dx$ 发散推知 $\int_a^+ f(x) dx$ 发散.

(5) 柯西收敛准则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{使当 } X < X' < X'' \text{ 时, } \left| \int_{X'}^{X''} f(x) dx \right| < \epsilon$.

(6) 狄里克雷收敛准则 设 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调减且恒取正值, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in [a, +\infty), \left| \int_a^x f(x) dx \right| < M$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ 收敛.

【注】 (1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的直观理解: 当 $f(x)$ 连续时, $f(x)$ 必须是 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷小量, 且做为无穷小量的阶次不可以太低.

(2) 尺度问题

对 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, 当 $p > 1$ 时收敛, 而 $p \leq 1$ 时发散.

(3) 前面所列 6 条准则中, 前 4 条是基本要求. 而在这 4 条中, 最基本的是第 1 条, 因为后面几条均是在第 1 条结论下推导出来的.

(4) 极限比较法的前提是所论极限存在, 而当极限不存在时, 这一准则不能使用.

例 11.2.1 讨论 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

【解】 被积函数在 $[a, +\infty)$ 上不为定号函数, 不能直接应用比较法或比阶法. 采用绝对收敛的准则进行分析.

$$\left| \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2} dx \leq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, 由比阶法, 则 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛

等于 $\frac{1}{2} - \arctan a$, 因此, 原广义积分绝对收敛 . 或采用狄里克雷准则 .

$$\left| \int_a^x \sin x dx \right| = | \cos X - \cos a | < 2,$$

又因 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调减且恒取正值, 于是原广义积分收敛 . 【解毕】

例 11 2 2 设 p 为实常数, 讨论 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ 的收敛性 .

【解】 当 $p = 1$ 时 .

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(\ln A) - \ln(\ln 2)) = +\infty, \text{ 发散 .}$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [(\ln A)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}],$$

因此 $p > 1$ 时收敛, 而 $p < 1$ 时发散 .

综上, 原广义积分只当 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散 . 【解毕】

例 11 2 3 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2 + \ln x}$ 的收敛性 .

【解】 被积函数做为无穷小量比 $\frac{1}{x}$ ($x \rightarrow +\infty$) 还低阶, 广义积分发散 . 事实上 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 + \ln x} = +\infty .$$

由比阶法, 广义积分发散 .

【解毕】

例 11 2 4 当 p 的取值范围为_____时, 广义积分

$$\int_1^{+\infty} x^p e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} dx \text{ 收敛 . (单项选择) .}$$

(A) $p \in (-1, 2)$; (B) $p \in (-1, 1)$;

(C) $p \in (-1, +\infty)$; (D) $p \in (1, +\infty)$.

【解】 正确选项为(B).

被积函数为 $e^{-1} x^p (e^{1-\cos\frac{1}{x}} - 1)$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 欲使广义积分收敛, 被积函数须为无穷小量, 其等价无穷小量为

$$e^{-1} x^p (1 - \cos \frac{1}{x}) \sim \frac{e^{-1}}{2x^{2-p}}.$$

因此仅当 $2-p > 1$ 时广义积分收敛, 即 $p \in (1, +\infty)$. 【解毕】

11.3 第二类广义积分概念与判敛

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 右侧邻域内无界 ($x=a$ 称为 $f(x)$ 的一个奇点), $X \in (a, b]$, $f(x)$ 在 $[X, b]$ 上可积, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ 为第二类广义积分, 且当 $\lim_{X \rightarrow a^+} \int_X^b f(x) dx$ 存在时, 称 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 否则, 即极限不存在时, 称广义积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

类似上述描述可有积分上限为奇点的第二类广义积分, 甚至可有 $[a, b]$ 内有奇点 $x=c$ 的广义积分 $\int_a^b f(x) dx$. 第二类广义积分的收敛问题是限制被积函数 $f(x)$ 作为无穷大量 ($x \rightarrow a^+$) 的阶次不可以太高. 常用判敛准则有以下几类 (均假设 $x=a$ 为奇点).

(1) 充要条件 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上非负, $x=a$ 为奇点, $\int_a^b f(x) dx$ 收敛的充分必要条件是 $(X) = \int_X^b f(t) dt$ 当 $X \rightarrow a^+$ 时有界.

(2) 直接比较法 若对满足 $a < c < b$ 的任意实数 c , 使当 $x \in (a, c]$ 时有 $0 < f(x) < g(x)$, 则

1° 当 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^b f(x) dx$ 必然收敛.

2° 当 $\int_a^b f(x) dx$ 发散时, $\int_a^b g(x) dx$ 必然发散.

(3) 极限比较法(比阶法) 设 $g(x)$ 在 $(a, b]$ 上为正定函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \mu$.

则 1° 当 $\mu \neq 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 与 $\int_a^b g(x) dx$ 具有相同的收敛性.

2° 当 $\mu = 0$ 时, 由 $\int_a^b g(x) dx$ 收敛可推知 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.

3° 当 $\mu = \infty$ 时, 由 $\int_a^b g(x) dx$ 发散可推知 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

(4) 绝对收敛与条件收敛 若 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且称为绝对收敛. 否则, 即 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散而 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛时, 称之为条件收敛.

也可类似第一类广义积分, 给出第二类广义积分的柯西准则与狄里克雷准则. 读者可练习给这些准则的叙述.

【注】 尺度问题

对第二类广义积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ($p > 0$). 只当 $0 < p < 1$ 时收敛, 其余情形均为发散. 而 $p = 0$ 时, 不属于广义积分, 而是普通定积分.

例 11.3.1 讨论 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ 的收敛性.

【解】 $x = 0$ 为奇点, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = 0$. 而积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x}$ 收敛, 所

以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ 收敛.

【解毕】

【注】 上述极限为零是用到了洛必达法则.

例 11.3.2 讨论 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2x} - 1}$ 的收敛性.

【解】 $x = 0$ 为被积函数的一个奇点, 但为可去奇点或可去间断点.

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{e^{2x} - 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2x} - 1}.$$

第一个积分中, $x = 0$ 为可去间断点, 积分必然收敛. 对第二个积分, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot x}{e^{2x} - 1} = 0$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故第二个广义积分收敛, 于是原广义积分收敛. 【解毕】

例 11.3.3 设 $p \in \mathbb{R}$, 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$ 的收敛性.

【解】 记原积分为 I , $x = 0$ 为奇点, 需分成二个积分考虑.

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^{p-1}}$ 为等价无穷小量, 因此当 $p - 1 < 1$, 即 $p < 2$ 时第一个积分收敛. 对第二个积分, 考虑比阶法.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x^p} \cdot x^q = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{q-p} \arctan x,$$

$\arctan x \sim \frac{1}{2} (x \rightarrow +\infty)$, 则上述极限只在 $p < q$ 时才存在, 而当

$q > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$ 收敛, 于是第二个积分在 $p < q > 1$ 时收敛.

综上所述, 原广义积分在 $1 < p < 2$ 时收敛. 【解毕】

例 11.3.4 设 $p \in \mathbb{R}$, 讨论 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ 的收敛性.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^p x} = \frac{1}{1-p} (\ln x)^{1-p} \Big|_2^{+\infty}.$$

显然只有当 $1 - p < 0$ 时, 上述结果才有意义, 即当 $p > 1$ 时广义积

分收敛.

【解毕】

11.4 广义积分综合问题

综例 11.4.1 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

【解】 原积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \frac{x+2}{2}^2}$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

【解毕】

综例 11.4.2 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

【解】 取变换 $x = \tan t$, 则 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原积分 } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{1+5\tan^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin t}{1+4\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(2\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \arctan 2. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

综例 11.4.3 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$. (1999 年考研题)

【解】 原积分 $I = \int_1^{+\infty} \arctan x dx - \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 第三个等号后采用极限形式是必要的, 因积分内两项被积函数均导致发散的广义积分, 按极限运算法则, 两极限均不存在时, 但其和与差的极限可以存在, 而本题中 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ 一定收敛.

综例 11.4.4 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{|x-x^2|}$.

【解】 $x=1$ 为奇点, 但积分收敛, 必须分成二个区间考虑计算.

$$\text{原积分 } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x-x^2} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x^2-x} \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}} \\ &= \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}} \right| \Big|_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

最后得到 $I = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})$.

【解毕】

【寓意】 本题考查广义积分收敛性结论与定积分计算.

综例 11.4.5 计算 $I_n = \int_0^1 x \ln^n x dx$.

【解】 $x=0$ 为可去奇点, 广义积分收敛.

$$I_n = \frac{1}{2} x^2 \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 nx^2 \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{n}{2} I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{初值 } I_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

以上已经构成一个完备的递推格式, 另一种表达格式如下:

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{2} I_{n-1} = -\frac{n}{2} \left(-\frac{n+1}{2}\right) I_{n-2} \\ &= -\frac{n}{2} \left(-\frac{n-1}{2}\right) \left(-\frac{n-2}{2}\right) I_{n-3} \\ &= \dots = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

综例 11.4.6 已知 $\int_0^+ e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$, 设 $(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, 求证

$$I = \int_0^+ 1 - (x) dx = \frac{1}{2}.$$

【证】

$$\begin{aligned} I &= \int_0^+ \int_0^+ e^{-t^2} dt - \int_0^x \int_0^x e^{-t^2} dt dx \\ &= \int_0^+ \int_x^+ e^{-t^2} dt dx. \end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^+ e^{-t^2} dt}{\frac{1}{x^2}} = 0$, 故上述广义积分收敛. 应用分部积分, 则

有

$$I = \left. x \int_x^+ e^{-t^2} dt \right|_0^+ + \int_0^+ 2x e^{-x^2} dx.$$

利用洛必达法则可证上述第一项为零, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^+ e^{-t^2} dt = 0;$$

对第二项有

$$\int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{x^2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2} .$$

因此 $I = \frac{1}{x^2}$. 【证毕】

【技巧】 证明的开头用到了已知条件 $\frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$. 此外, 广义积分的实质问题是极限问题, 对收敛的广义积分进行计算时, 可用常规方法, 但 \pm 出现在上下限时, 应视为极限的运算 .

第 12 章 数项级数及判敛方法

12.1 引言

级数的实质问题是序列问题,其收敛性如何,等价于级数部分和序列 $\{S_n\}$ 或 $\{S_n(x) \mid n = 1, 2, \dots; x \in X\}$ 的收敛问题,其中 X 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的定义域.

本章重点内容是级数的一般性概念与判敛方法.在判敛方法中,最基础的方法是用收敛性定义与必要条件,以及基本性质,包括级数的运算性质.在此基础上,应熟练掌握正项级数的判敛方法,对一般任意项级数,则要综合考虑收敛性定义,绝对收敛与条件收敛的综合分析与技巧,其中常常用到正项级数的处理方法与准则.

12.2 一般性概念

设有序列 $\{u_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, 由其一般项 u_k 构造的级数为

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, 记级数的前 n 项和(部分和)为

$k=1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

则有 $u_k = S_{k+1} - S_k \quad (k = 1, 2, \dots)$. (12.1)

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在时, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$, 这时, 称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

收敛.由(12.1)式,若级数收敛,则

$$\lim_k u_k = 0. \quad (12.2)$$

(12.2)式称为级数 $\sum_{k=1} u_k$ 收敛的必要条件.

1. 尺度问题

在一般数项级数中,有两个重要尺度级数,即等比级数与 p -级数.

(1) 等比级数 $\sum_{n=0} ar^n$.当 $|r| < 1$ 时收敛,而当 $|r| \geq 1$ 时发散.

收敛时,其和为

$$S = \frac{a}{1-r}, \text{ 其中 } a \in \mathbb{R}. \quad (12.3)$$

(2) p -级数 $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$.当 $p > 1$ 时收敛,而当 $p \leq 1$ 时发散.

2. 基本属性

(1) 柯西准则

级数 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛的充分必要条件是: $\epsilon > 0, \forall N$, 使当 $n > N$

时,对任意正整数 p 恒有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \epsilon$.

称 $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$ 为柯西阶段和.

(2) 收敛的级数满足线性运算.即 $\sum_{n=1} a_n$ 与 $\sum_{n=1} b_n$ 均收敛时

$\sum_{n=1} (a_n + b_n)$ 亦收敛.

(3) 更新性质 1

在级数的求和项中去掉有限项,或在前端增加有限项,均不改变级数的收敛性.

(4) 更新性质 2

收敛的级数可合并任意相邻有限项为一项,生成的更新级数仍然收敛,且和不变(收敛的级数可加括号).

该命题的另一形式为(推论):

若合并级数中任意相邻有限项后的更新级数发散,则原级数必然发散.

例 12.2.1 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必收敛的级数为_____.(单项选择题)

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$;
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{2n})$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

【解】 正确选项为(D),收敛的级数可加括号.

取 $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$,则(B),(C)不成立,取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}$,则(A)

不成立.

【解毕】

【寓意】 本题考查级数收敛的概念与重要结论.

例 12.2.2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性结论是_____.(单项选择题)

- (A) 收敛; (B) 发散;
 (C) 不定; (D) 与 a_n 正负有关.

【解】 正确选项为(A).

由 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,记 $S_n = \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1})$,则

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + \dots + n(a_n - a_{n-1}) \\ &= -a_0 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + na_n \end{aligned}$$

$$= -a_0 - S_{n-1}^* + na_n \quad S(n),$$

其中 $S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k$, 由极限运算性质, 则

$$S_{n-1}^* = -a_0 - S_n + na_n \quad -a_0 - S(n),$$

即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = -a_0 - S$ (存在!), 于是 a_k 收敛. 【解毕】

【寓意】 本题考查级数收敛的概念与定义, 包括极限运算性质.

例 12.2.3 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散.

【思路】 运用柯西准则.

【证】 考虑柯西阶段和

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}.$$

因为 $a_n > 0$, 则 $\{S_n\}$ 必为单调增序列. 因此有

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} &> \frac{1}{S_{n+p}} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) \\ &= 1 - \frac{1}{S_{n+p}} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}. \end{aligned}$$

对固定的 n , 令 $p \rightarrow \infty$, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可知 $S_{n+p} \rightarrow \infty$. 于是

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} = 1,$$

即柯西阶段和不能任意小, 由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散.

【证毕】

【技巧】 在级数收敛性分析中, 固定某个下标, 令其余下标趋于无穷大是常用技巧.

例 12.2.4 设 $a_n > 0$, $\{a_n\}$ 为单调减序列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

【思路】 要证的结论说明 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 是比 $\frac{1}{n}$ 高阶的无穷小量. 运用柯西收敛准则证明.

【证】 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 根据柯西准则, $\forall \epsilon > 0, \forall N$, 使当 $n > N$ 时对任意正整数 p 均有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\epsilon}{2}.$$

再由 $\{a_n\}$ 单调减少, 则

$$a_k > p a_{n+p},$$

即有 $p a_{n+p} < \frac{\epsilon}{2}$.

上式对 $n > N$ 及任意的 p 均成立, 令 $m = n + p$, 则

$$0 < (m - n) a_m < \frac{\epsilon}{2}, \quad (1)$$

对 $m > n > p$ 一概成立, 令 $m > 2n$ (n 固定). 即有

$$0 < \frac{m}{2} a_m < \frac{\epsilon}{2} \text{ 或者 } 0 < m a_m < \epsilon,$$

因此有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m a_m = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

或者: 由 (1) 式, 对固定的 n , 令 $m \rightarrow \infty$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{m \rightarrow \infty} m a_m = 0$. 因此有 $\lim_{m \rightarrow \infty} m a_m = 0$. **【证毕】**

【注】 (1) 本题的证明也可以分 $n = 2k$ 和 $n = 2k + 1$ 两种情形进

行证明,中间用到极限运算.留给读者练习.

(2) 本题属于正项级数,所证明的结论可视为正项级数收敛的必要条件(要求一般项 a_n 为单调减).

12.3 正项级数

由例 12.2.3 的证明,我们已经看到,正项级数最基本的属性是: $\{S_n \mid n=1, 2, \dots\}$ 为单调增序列,这也正是正项级数判敛方法的根基.

对正项级数的收敛问题,前面介绍的方法均可适用.但是,根据正项级数的基本属性,有它独具特色的判敛方法,而这些方法统是以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0, n=1, 2, \dots$) 的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 为单调增序列这一基本事实为前提进行构建的.以下按顺序推理层次介绍这些方法,对这些方法的全面理解,便是技巧与方法的源泉.

1. $\{S_n\}$ 的有界性

正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充分必要条件是其部分和序列 $\{S_n \mid n=1, 2, \dots\}$ 有上界.

命题寓意另一结论:正项级数发散时,必然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

2. 直接比较法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数,若存在常数 $c > 0$ 及 N , 使当 $n > N$ 时有 $a_n \leq cb_n$, 则

1° 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必然收敛.

2° 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必然发散.

例 12.3.1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + 2}$ 收敛, 因为 $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + 2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收

敛. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2 + 1}$ 收敛等均可由直接比较法

得出结论.

【注】直接比较法是基础性的判敛方法, 也是极限比较法(比阶法)的基础, 但直接比较法往往使用不太方便.

3. 极限比较法(比阶法)

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若 $b_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, 则

1° 当 $A > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有相同的收敛性.

2° 当 $A = 0$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

3° 当 $A = +\infty$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可推知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 12.3.2 设 α 为实常数, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{\alpha}{n}$ 的收敛性.

【解】根据极限的结论, $1 - \cos \frac{\alpha}{n}$ 与 $\frac{\alpha^2}{2n^2}$ 为等价无穷小量 (n

), 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\alpha^2} (1 - \cos \frac{\alpha}{n}) = 1 > 0$, 由极限比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{2n^2}$ 收

敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos \frac{\alpha}{n}$ 亦收敛.

【解毕】

例 12.3.3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的收敛性.

【解】 $\ln 1 + \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n}$ 为等价无穷小量 ($n \rightarrow \infty$), 原级数发散.

【解毕】

【注】 上述两题均为正项级数.

例 12.3.4 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{a_n}$, ($n = 1, 2, \dots$), 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

【证】 (1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right)$ (有下界), $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - a_n \right)$

$a_n + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2 a_n} < 0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(2) 由 (1), $0 < \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} < a_n - a_{n+1}$, 所证级数为正

项级数, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$, $S_n < 1$, 即正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛, 由比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛. **【证毕】**

例 12.3.5 设 $f(x)$ 在某邻域 $N(0, \delta)$ 内有界, 且 $f(0) = f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, 问 取何值时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 必收敛.

【思路】 利用泰勒公式讨论 $f(n)$ 作为无穷小量的阶次.

【解】 由题设条件, 考虑极限与导数定义

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} f(0) = 0.$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展为二阶泰勒公式则有

$$f(x) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) x^3 \quad (0 < x < 1).$$

令 $x=n$, 则

$$f(n) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) \cdot n^3.$$

由 $f(x)$ 在某 $N(0, \infty)$ 内有界, 则当 $n > N$ 时, $f(n)$ 有界, 即 $\forall N$ 与 $M > 0$, 使 $n > N$ 时 $|f(n)| < M$, 于是

$$|f(n)| < \frac{M}{3!} n^3.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ 只当 $\rho < -\frac{1}{3}$ 时收敛, 由比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 在 $\rho < -\frac{1}{3}$ 时必然收敛且绝对收敛. 【解毕】

【注】直接比较法与极限比较法均为充分条件. 就本题而言, $\rho > -\frac{1}{3}$ 时也有可能收敛, 这取决于 $f(n)$ 的取值. 但对本题来讲, $\rho < -\frac{1}{3}$ 也是充分条件. 此外, 本题亦可用佩亚诺余项来处理.

4. 比率法(达朗伯尔方法)

设 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, 则

1° 当 $r < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2° 当 $r > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散(包括 $r = +\infty$);

3° 当 $r = 1$ 时, 不能确定收敛性.

例 12.3.6 讨论下列级数的收敛性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{2^n}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}; (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

【解】 (1) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2n-1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n-3} = \frac{1}{2} < 1$, 级数(1)收敛.

(2) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \lim_n \frac{n+1}{2} = +\infty$, 因此级数(2)发散.

(3) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_n \frac{n}{n+1} = e^{-1} < 1$, 因此级数(3)收敛. 【解毕】

例 12.3.7 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ 的收敛性.

【解】 级数一般项 $a_n > 0$ 且 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 但极限

$$\lim_n \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2 + (-1)^n} = \lim_n \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$$

不存在! 因此比率法失效, 不能给出结论. 本题采用下面的根值法可方便地给出收敛的结论. 【解毕】

5. 根值法(柯西方法)

设 $a_n > 0$, 若 $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则

1° 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 当 $\rho > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3° 当 $\rho = 1$ 时, 不能给出结论.

【注】 根值法亦为充分条件. 此外, 根值法较比率法适用范围广. 且有如下命题:

设 $a_n > 0$, 若 $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (存在), 则必有 $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = r$ (存在).

上述命题寓意: 对某一正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 由比率法可以给出收敛性结论时, 用根值法必然可以给出相同结论, 反之则未必!

例 12 3 8 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n-1}$ 的收敛性 .

【解】 (方法 1) 用根值法

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2n}} \ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 1 \cdot 0 = 0 < 1 . \end{aligned}$$

因此原级数收敛 .

(方法 2) 用比阶法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n-1}}{n^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) = 2 > 0 .$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则原级数亦收敛 .

【解毕】

【注】 用比阶法的基础是能熟练判断级数一般项的无穷小量阶次, 对本题可看出

$$a_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) \sim \frac{2}{n(n-1)} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

6. 积分判别法

设 $f(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 上为非负递减函数, $a_n = f(n)$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^n f(x) dx$ 存在, 即广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 .

例 12 3 9 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散 .

【证】 此题用比率法, 根值法或比较法, 比阶法均失效. 这是用积分法处理的典型问题 .

取 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, 则 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调减且非负. 考虑广

义积分

$$\int_2^+ \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) \Big|_2^+ = +\infty.$$

因此原级数发散!

【证毕】

12.4 任意项级数与交错级数

1. 条件收敛与绝对收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然收敛, 且称之为绝对收敛. 否则, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛.

例 12.4.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2 + 2}$ 的收敛性结论是 _____ . (单项选择)

- (A) 绝对收敛; (B) 条件收敛;
(C) 发散; (D) 与 $\frac{1}{n}$ 有关.

【解】 正确选项为 (B).

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{n^2 + 2} &= (-1)^n \sin \frac{1}{n^2 + 2 - n} \\ &= (-1)^n \sin \frac{1}{n^2 + 2 - n} \\ &= (-1)^n \sin \frac{1}{n^2 + 2 + n}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{n^2 + 2 + n}$ 与 $\frac{1}{n^2 + 2 + n}$ 为等价无穷小量, 且

均为单调减趋于零. 考虑到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2 + n}$ 发散, 因此原级数

数不绝对收敛. 其次原级数属于交错级数, 由莱布尼兹准则, 级数

收敛,且为条件收敛.

【解毕】

【技巧】 在极限问题中出现三角函数时,应考虑到三角函数诱导公式或三角恒等式.将表达式变形,以寻找思路.

2. 交错级数

考虑 $u_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为交错级数, 并

且有如下莱布尼兹准则.

对 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$, 若满足

1° u_n 单调减少;

2° $\lim_n u_n = 0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 并且级数和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad u_n. \quad (12.4)$$

此外, 交错级的前 n 项的余和 $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} u_k$ 仍为交错级数, 且满足

$$|R_n| < u_{n+1}. \quad (12.5)$$

例 12.4.2 考查级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n} (x > 0)$.

【解】 由极限比较法, $\lim_n \left| \frac{(-1)^n \sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right| = 1$, 因此该级数不是绝

对收敛的. 其次, " $x > 0, \forall N$, 使当 $n > N$ 时, 有 $0 < \frac{x}{n} < \frac{\pi}{2}$, 此时

原级数为交错级数, 且 $\sin \frac{x}{n}$ 单调减少趋于零, 因而原级数条件收

敛.

【解毕】

例 12.4.3 设 $a_n > 0$ 单调减少且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1}$ 是否收敛, 说明理由. (1998 年考研题)

【解】 由于 $a_n > 0$ 且单调减少, 即 $\{a_n\}$ 单调减有下界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$= a$ 存在, 且 $a \geq 0$. 又若 $a = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 矛盾, 因

而只有 $a > 0$ 成立. $a_n > a$, 则 $\frac{1}{a_n + 1} < \frac{1}{a + 1} < 1$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a + 1)^n}$ 为正

项级, 且收敛, 由比较法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1}$ 收敛. 【解毕】

例 12.4.4 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(2n+1)!!}$ 的收敛性.

【解】

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{2n+1}{2n+1}.$$

由此得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1},$$

或记为

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}.$$

另外又有

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} < \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2}{2}.$$

由此又可推出

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1},$$

即有不等式

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{n+1}. \quad (12.6)$$

由正项级数比较法, 可知原级数不绝对收敛, 但由 (12.6) 式, 据夹逼准则可有

$$\lim_n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 0. \quad (12.7)$$

并且对本题级数有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1,$$

即 u_n 单调减少, 于是本题级数收敛, 且为条件收敛.

【解毕】

【技巧】 本题解法中用到基本不等式

$$\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}, \quad (12.8)$$

其中 $n < m$, 且 m, n 均为正数.

12.5 级数综合例题

级数问题中常常涉及到积分、极限、导数与微分方程, 这样一类问题需要对上述知识范围进行综合考虑, 并需要某些技巧. 本节给出部分例题, 以训练这种综合分析能力. 在第 13 章, 还会给出部分综合例题.

综例 12.5.1 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的和;

(2) $a_n > 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛.

【思路】 作为 (1) 中级数一般项的积分可以计算出来, 对 (2) 考虑正项级数的比较法.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad (1) \quad \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec x dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt \\
 &= \frac{1}{n(n+1)}.
 \end{aligned}$$

上述做法中用到变数替换 $\tan x = t$. 考虑部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (a_k + a_{k+2}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

因此级数和 $S = \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

(2) 对 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ 采用变数替换 $\tan x = t$, 则

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

由积分保序性及被积函数的连续性则有

$$a_n < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

于是

$$\frac{a_n}{n} < \frac{1}{n(n+1)} \quad (n > 0).$$

按正项级数比较法, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛推知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛. 【解毕】

【技巧】 按比较法估计 a_n 时, 积分的保序性简化了问题的复杂程度, 使我们不必去计算 a_n 的积分结果.

综例 12.5.2 设 $p \in \mathbb{R}$, 证明:

$$(1) \text{ 当 } p > 1 \text{ 时, 级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right| \text{ 收敛};$$

(2) 当 $0 < p < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx$ 收敛.

【证】 (1) 当 $p > 1$ 时,

$$\left| \sum_{n=1}^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right| < \sum_{n=1}^{n+1} \frac{|\sin x|}{x^p + 1} dx < \sum_{n=1}^{n+1} \frac{dx}{x^p + 1} < \frac{1}{n^p}.$$

由 $\sum_{n=1}^{n+1} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 据比较法, 原级数收敛.

(2) 当 $0 < p < 1$ 时, 由积分中值定理可得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx &= \frac{1}{\frac{p}{n} + 1} \sum_{n=1}^{n+1} \sin x dx \\ &= \frac{2}{\left(\frac{p}{n} + 1\right)} \sum_{n=1}^{n+1} (-1)^n, \quad (n, n+1), \end{aligned}$$

因此原级数为交错级数. 另外

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right| &= \frac{2}{\frac{p}{n} + 1} > \frac{2}{\frac{p}{n+1} + 1} \\ &= \left| \sum_{n+1}^{n+2} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right|, \end{aligned}$$

其中 $\sum_{n+1}^{n+2} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx$ ($n+1, n+2$), 即知级数一般项绝对值为单调减少, 且

$$\left| \sum_{n=1}^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right| = \frac{2}{\frac{p}{n} + 1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

于是由莱布尼兹准则, 级数收敛.

【证毕】

【技巧】 在以上证明中, 分别用到了积分估值与积分中值定理.

综例 12.5.3 设 n 为正整数, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \sin^{2n} x dx$, 试证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} a_n$ 收敛.

【思路】 先计算 a_n , 而后按交错级数进行分析.

【证】 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^{2n} x dx$. 令 $2x = t$, 则 $dx = \frac{1}{2} dt$, 于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} t dt . \end{aligned}$$

利用区间变换合并上述二个积分, 即对第二个积分取变换 $t = \frac{\pi}{2} - u$, 则 $dt = -du$, 于是可得到

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u du \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} . \end{aligned}$$

因此原级数收敛性等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的收敛性. 参

照例 12.4.3 的解法, 可证明上述级数为条件收敛. 具体方法, 留给读者. 【证毕】

【技巧】 积分区间的拆分与合并再次成为重要手段, 并且, 区间变换是有力的工具.

综例 12.5.4 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续周期函数, 且周期为 1, 并满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $f(x) \in C^1[0, 1]$ (有一阶连续导数), a_n

$$= \int_0^1 f(x) (nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots), \text{ 试证明级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛.}$$

【思路】 首先应处理 a_n 的积分表达式, 被积函数为两项乘积时, 一般应考虑分部积分, 同时注意到 $f(x)$ 的周期性. 下述分部积分

形式常常很有用

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g(x) dx &= f(x) \int_a^x g(t) dt \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\int_a^x g(t) dt \right) \cdot f(x) dx \\ &= f(b) \int_a^b g(t) dt - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\int_a^x g(t) dt \right) \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

【证】 为采用分部积分, 令 $G_n(x) = \int_0^x (nt) dt$, 取变换 $u = nt$, 则

有 $G_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^{nx} (u) du$, 并且 $G_n(0) = 0$, $G_n(1) = \frac{1}{n} \int_0^n (u) du$,

由题设条件, $f(x)$ 周期为 1, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则应有 $G_n(1) = 0$.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 f(x) G_n(x) dx \\ &= f(x) G_n(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 G_n(x) f'(x) dx \\ &= - \int_0^1 G_n(x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

由题设条件, $f(x)$ 有一阶连续偏导数, $G_n(x)$ 连续, 于是 $f(x)$ 与 $G_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上分别有最大值. 记

$$M_1 = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [0, 1]} |G_n(x)|,$$

则

$$|a_n| \leq \int_0^1 |G_n(x)| \cdot |f'(x)| dx \leq M_1 \int_0^1 |G_n(x)| dx,$$

其中 $G_n(x)$ 又满足

$$\begin{aligned} |G_n(x)| &= \left| \frac{1}{n} \int_0^{nx} (u) du \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \int_0^{[nx]} (u) du + \frac{1}{n} \int_{[nx]}^{nx} (u) du \right|, \end{aligned}$$

其中 $[nx]$ 为 nx 的取整函数, 由题设条件, $\int_0^{[nx]} (u) du = 0$, 因此

$$|G_n(x)| \leq \frac{1}{n} \int_{[nx]}^{nx} (u) du \leq \frac{1}{n} \int_{[nx]}^{nx} (u) du \leq \frac{M_2}{n}.$$

于是 $a_n^2 < \frac{1}{n^2} (M_1 M_2)^2$, 由正项级数比较法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

【证毕】

【技巧】 上述证明中的最后不等号用到了两个知识点:

1° 积分估值定理;

2° 非负连续函数在 $[a, b]$ 上的积分值大于等于 $[a, b]$ 任一子区间上的积分.

本题中区间 $[[nx], nx]$ 为 $[[nx], [nx] + 1]$ 的子区间.

【寓意】 本题考查积分与原函数的处理技巧, 以及正项级数的判敛方法.

第 13 章 函数项级数

13.1 引言

首先,函数项级数在收敛时,它是函数的一种表示法,这种表示法可从更深刻的背景上描述一个函数的性态,包括连续性,可微性等方面.并且,函数项级数常和导数,积分与极限,以及微分方程交叉起来,用于综合处理数学问题.

本章基本要求是掌握函数项级数与数项级数的关系,收敛点与收敛域,幂级数的收敛半径与收敛域,微分与积分运算性质,初等函数的泰勒与麦克劳林展开式.对傅里叶级数,应掌握傅里叶系数与狄里克雷收敛定理,并熟悉定义在 $[-l, l]$ 与 $[0, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数、正弦级数与余弦级的计算方法.

对一致收敛性分析,一般属于较高要求的内容.本章给出要点与例题分析,以供不同层次读者选用.对于准备参加硕士研究生入学考试的读者,本段内容可以跃过.

13.2 收敛性的一般问题

1. 收敛点与收敛域

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为 (a, b) 上的函数项级数,对 $x_0 \in (a, b)$, 若

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个收敛点,收敛点的全

体构成的点集称为收敛域.

2. 部分和与和函数

部分和为一个函数序列, 即

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x). \quad (13.1)$$

若 $\lim_n S_n(x)$ 存在, 记为 $\lim_n S_n(x) = S(x)$, $S(x)$ 称为和函数, 并且称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \quad (13.2)$$

为级数的 n 项余和. 于是, 级数收敛又可定义为 $R_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

例 13.2.1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ 的收敛域.

【解】 将 x 视为参数, 应用比率法则

$$\lim_n \left| \frac{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}} \right| = |x|.$$

因此当 $|x| < 1$, 即 $x \in (-1, 1)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 绝对收敛.

而当 $|x| > 1$ 时, 该级数不绝对收敛, 且因此时 $(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 不趋于零 ($n \rightarrow \infty$), 因此该级数发散.

当 $x = 1$ 时, 相应的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛,

当 $x = -1$ 时, 相应的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}$ 发散. 综上, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $(-1, 1]$.

至于第二个级数, 则由第一个级数的结论, 可知 $(x - 1)$
 $(-1, 1]$ 时收敛, 即得收敛域为 $(0, 2]$. 【解毕】

例 13 2 2 设 $x > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^n}$ 的收敛性.

【解】 由指数函数的性质, 可知

当 $x > 1$ 时, $0 < \frac{1}{n+x^n} < \frac{1}{x^n}$, 据正项级数比较法, 该级数收敛.

当 $x = 1$ 时, $\frac{1}{n+x^n} = \frac{1}{n+1}$, 据正项级数比较法, 该级数发散.

因此该级数收敛域为 $x > 1$. 【解毕】

例 13 2 3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

【解】 考查级数的部分和序列

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n (x^k - x^{k-1}) \\ &= (x - 1) + (x^2 - x) + \dots + (x^n - x^{n-1}) \\ &= x^n - 1. \end{aligned}$$

当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = -1$;

当 $x = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$;

当 $x = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ 不存在;

当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ 不存在.

综上, 级数收敛域为 $(-1, 1]$, 和函数为

$$S(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

【解毕】

13.3 一致收敛问题*

1. 一致收敛概念

为讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一致收敛问题, 我们将该级数收敛的定义

用 - 语言描述如下:

设 $u_n(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 若 $\epsilon > 0$ 及 $x \in (a, b)$, $\forall N(\epsilon, x)$ 及 $S(x)$, 使当 $n > N$ 时有

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \epsilon.$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上收敛于 $S(x)$, 其中 $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x)$.

对一致收敛而言, 上述定义中的 $N(\epsilon, x)$ 若与 $x \in (a, b)$ 无关, 即存在 $N(\epsilon)$ (只与 ϵ 有关), 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a, b)$ 均有

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \epsilon,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $S(x)$.

【注】 收敛问题是对某个 $x \in (a, b)$ 而言的局部性问题, 而一致收敛则是给出的对一切 $x \in (a, b)$ 的全局问题.

例 13.3.1 讨论例 13.2.3 中级数在 $(-1, 1)$ 上的一致收敛问题.

【解】 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $S(x) = -1$, 考虑余项和

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = |x|^n,$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 令 $|x|^n < \epsilon$, 只须 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} > 0$ (ϵ 充分小), 若取

$$N = \frac{\ln \epsilon}{\ln |x|} + 1, \text{ 则当 } n > N \text{ 时, } |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

上述的 N 实为 $N(\epsilon, x)$, 当 $x \rightarrow 1^-$ 或 $x \rightarrow -1^+$ 时, $\ln|x|$ 趋于零, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 不存在最大的 $N(\epsilon)$, 使对充分接近 $(-1, 1)$ 端点的 x 均适用, 即无法找到与 x 无关的 $N(\epsilon)$, 因而该级数在区间 $(-1, 1)$ 上收敛, 却不一致收敛. 【解毕】

例 13.3.2 讨论 $x^2 - x + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} (x-1)^2$ 在 $[0, 1]$ 上的收敛性.

【解】 先求部分和序列.

$$S_1(x) = x(x-1),$$

$$S_2(x) = x(x-1) + x(x-1)^2 = x^2(x-1),$$

$$S_3(x) = S_2(x) + x^2(x-1)^2 = x^3(x-1),$$

.....

$$S_n(x) = x^n(x-1).$$

对任意 $x \in (0, 1)$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$.

当 $x=0$ 时, $S_n(0)=0$, 当 $x=1$ 时, $S_n(1)=0$, 因此, 和函数为 $S(x)=0, x \in [0, 1]$, 即该级数在 $[0, 1]$ 上收敛于 0.

对一致收敛问题, $\epsilon > 0$, 令 $|R_n(x)| = x^n(1-x) < \epsilon$, 考查能否有与 $x \in [0, 1]$ 无关的 $N(\epsilon)$, 为此, 求 $|R_n(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值.

$$R_n(x) = nx^{n-1}(x-1) + x^n,$$

令 $R_n(x)=0$, 求得驻点 $x_0 = \frac{n}{n+1} \in (0, 1)$, 可证 $R_n(x)$ 在 x_0 处取得最小值, 则 $|R_n(x)|$ 在 x_0 处取得最大值.

$$|R_n(x_0)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \frac{1}{n+1}.$$

只须令 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 取 $N = \frac{1}{\epsilon} - 1 = N(\epsilon)$, 则 $N(\epsilon)$ 与 $x \in [0, 1]$ 无关, 只要 $n > N(\epsilon)$, 则必有

$$|R_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

综上所述可知, 该级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

【解毕】

2. 一致收敛的性质与条件

(1) 充分必要条件(柯西准则)

设 $x \in (a, b)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛的充分必要条件是: $\forall \epsilon > 0$, 及 $x \in (a, b)$, $\forall N(\epsilon)$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时对任意正整数 p 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon.$$

(2) 必要条件

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足:

1° $u_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上连续;

2° 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续(一致连续).

(3) 逐项积分性质

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足:

1° $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续($n=1, 2, \dots$);

2° 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 且可逐项积分, 即

$$\int_a^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt, \text{ 其中 } x \in (a, b). \quad (13.3)$$

(4) 逐项微分性质

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足:

1° 在 $[a, b]$ 上收敛于 $S(x)$;

2° $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛;

3° $u_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上有一阶连续导数.

则 1° $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微;

2° $S(x)$ 可逐项微分, 即 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), x \in (a, b)$.

(5) 充分条件(维尔斯特拉斯准则)

对定义在 (a, b) 上的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若存在 $M_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 使得:

1° $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛;

2° $|u_n(x)| \leq M_n (n=1, 2, \dots)$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛, 且绝对收敛(称为绝对一致收敛).

【注】在微积分课程里, 以上一致收敛的性质是导出幂级数一系列重要性质的理论基础.

上述性质与条件(2), 常用来判断级数不一致收敛, 而(5)则常用来判断级数一致收敛, 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 又称为优级数或强级数.

例 13.3.3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2} \sin x}$ 在 $[0, 2]$ 上的收敛性.

【解】对 $x \in [0, 2]$, 级数不绝对收敛. 另外, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n + \frac{1}{2} \sin x}$ 单调减少并趋于零, 因此对任意 $x \in [0, 2]$, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2} \sin x}$ 均为交错级数, 且由莱布尼兹准则知道该级数收

敛. 由一致收敛定义, 考查

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1 + \frac{1}{2} \sin x} \right| \leq \frac{1}{n+1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{1}{n}.$$

令 $\frac{1}{n} < \epsilon$, 取 $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} + 1$, 则当 $n > N$ 时, $|R_n(x)| < \epsilon$ 对一切 x

$[0, 2]$ 均成立. 于是, 级数在 $[0, 2]$ 上一致收敛. 【解毕】

例 13.3.4 讨论下列级数在指定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^2}{(3+x^2)^n}, x \in [0, 1];$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^2}{(2+x^2)^n}, x \in [0, 1];$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}, x \in (0, +\infty).$$

【解】 (1) 级数属于等比级数, 且其一般项 $u_n(x)$ 满足

$$|u_n(x)| < \left(\frac{2}{3}\right)^n, x \in [0, 1]$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的收敛性及优级数准则推知, 本题级数在 $[0, 1]$ 上绝对一致收敛.

(2) 级数仍属于等比级数, 在 $[0, 1]$ 上收敛于和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

由一致收敛的必要条件, $S(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 因此本题级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(3) 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 级数属于正项级数, 且为等比级数, 公比为 xe^{-x} . 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $0 < xe^{-x} < 1$, 因此级数收敛,

且和函数为

$$S(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}.$$

为考查一致收敛性, 求一般项 $u_n(x) = x^n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

$$u_n(x) = nx^{n-1} e^{-nx} (1 - x).$$

令 $u_n(x) = 0$, 解得驻点 $x_0 = 1$ ($0, +\infty$), 且当 $0 < x < 1$ 时, $u_n(x)$ 单调增加, 而当 $x > 1$ 时, $u_n(x)$ 单调减少, 另外, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_n(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$, 即有

$$\max_{x \in (0, +\infty)} |u_n(x)| = u_n(x_0) = e^{-n}.$$

e^{-n} 收敛, 按优级数准则, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛. 【解毕】

【技巧】 寻找优级数的思路为: 无穷大量与无穷小量的比阶, 正项级数比较法, 求 $|u_n(x)|$ 在指定区间上的最大值.

13.4 幂级数的一般性概念

在非线性数学问题的分析中, 幂级数是重要的理论基础, 另外, 由于幂级数最具计算上的方便性与简捷性这一原因, 使得幂级数也在计算方法中占有重要位置.

幂级数的形状 幂级数通常具有以下两种形状:

(1) 一般形幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \neq 0). \quad (13.4)$$

(2) 标准形幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (13.5)$$

为避免某些读者在幂级数展开时不必要的错误,我们将幂级数分成两种形状是有益的.对一般概念问题,主要以标准幂级数为对象.

幂级数的收敛域 很显然,幂级数的收敛域至少包括一个点,对(1),至少 $x = x_0$ 为收敛点;对(2),至少 $x = 0$ 为收敛点,这是一个既简单又重要的属性.

关于幂级数的收敛域,除上述基本属性以外,还有不同于其他函数项级数的独特之处,这就是如下三个重要结论.

结论 1(阿贝尔定理)

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某 $x_0 \neq 0$ 处收敛,则它在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛.

上述命题还寓意:若该级数在某点 $x_0 \neq 0$ 处发散,则它在 $I = \{x \mid |x| > |x_0|\}$ 上发散.

结论 2(收敛半径 R)

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ ($a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$), 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $(-R, R)$ 内收敛,其中 $R = \frac{1}{L}$ 称为收敛半径,并且规定:

$L = 0$ 时, $R = +\infty$;

$L = +\infty$ 时, $R = 0$ (只有一个收敛点).

结论 3(一致收敛问题)

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域内的任一闭区间上绝对一致收敛.

例 13.4.1 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n^2}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1}.$$

【解】 (1) $\lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_n 1 + \frac{1}{n} \cdot (n+1) =$. 因此 $R=0$,
收敛域为 $x=0$.

(2) $\lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = 0$, 因此 $R=+$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) $\lim_n \frac{5^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{5^n} = 5$, 因此 $R = \frac{1}{5}$. 当 $x = -\frac{1}{5}$ 时, 级数为 $\frac{1}{n}$, 发散; 当 $x = \frac{1}{5}$ 时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 条件收敛 . 因此收敛域为 $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$.

(4) 级数非标准形, 直接用比率法较方便 .

$$\lim_n \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-2)^n} \right| = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} / |x-2| = |x-2| .$$

当 $|x-2| < 1$, 即 $1 < x < 3$ 时收敛 . 当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}$, 绝

对收敛; 当 $x=3$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, 绝对收敛 . $R=1$, 级数收敛域为 $[1, 3]$.

(5) 级数为非标准形, 直接用比率法或根值法 .

$$\lim_n \left| \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{x^{2n-1}} \right| = \frac{|x|^2}{2} .$$

令 $\frac{|x|^2}{2} < 1$, 当 $x \in (-2, 2)$ 时级数收敛 . 又当 $x = \pm 2$ 时级数均发散(级数一般项不趋于零), 因此收敛域为 $(-2, 2)$. 【解毕】

例 13.4.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n^2}$ 在 $x < 1$ 处发散, 而在 $x=2$ 点收敛, 则参数 a 的取值范围为_____ . (单项选择)

- (A) $1 < a < 3$; (B) $2 < a < 3$;
(C) $2 < a < 3$; (D) $2 < a < 3$.

【解】 正确选项为(B) .

(方法 1)

(A) 的情况不符合本级数的收敛半径 $R=1$ 的条件;对(C), 当 $a=2$ 时, 在 $x=2$ 点收敛, 因而矛盾;对(D), 当 $a=3$ 时, 在 $x=2$ 点收敛, 因而矛盾 .

(方法 2)

显然 $R=1$, 因在 $x=2$ 点收敛, 则应有 $a \geq 3$, 又当 $x > 1$ 时级数发散, 且 $R=1$, 于是 a 不能小于 2, 即有 $a \geq 2$, 因此 a 的取值范围应为 $2 \leq a \leq 3$.

(方法 3)

$R=1$, $|x-a| \leq 1$, 令 $x=2$, 则应有 $1 \leq a \leq 3$, 又因为当 $x < 1$ 时级数发散, 则应有 $a \geq 2$, 于是 a 的取值范围应为 $2 \leq a \leq 3$.

【解毕】

【寓意】 本题考查幂级数收敛域的性质, 阿贝尔定理是重要依据 .

【注】 本题可借助数轴上区间的平移来讨论, 这也是分析幂级数收敛域的一个简易手段 .

求幂级数收敛半径 R 可用比率法或根值法, 但均要求相应的极限存在 . 若极限不存在, 或不一定存在时, 则只能用阿贝尔定理或级数收敛定义来讨论 .

例 13.4.3 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-8, 8]$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径 R 为 _____ . (单项选择)

(A) $R=8$; (B) $R=8$; (C) $R=8$; (D) 不定 .

【解】 正确选项为(C) . 比值法或根值法均不能用 ! (极限可能不存在 !) . 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的 $R_1=8$, 设 $x_1 \in (-8, 8)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛 . $a_n x_1^n \rightarrow 0, \forall M > 0$ 及 $N > 0$, 使 $n > N$ 时有 $|a_n x_1^n| < M \cdot x$ ($x = |x_1|, |x_1| < 8$) 有

$$\left| \frac{a_n x^n}{n(n-1)} \right| = \left| \frac{a_n x_1^n}{n(n-1)} \right| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = \frac{M}{n(n-1)} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n,$$

又 $\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$, 故 $\sum_{n=2} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 绝对收敛, 因此 $R = R_1 = 8$.

任取 x_2 使 $|x_2| > 8$, 证明 $\sum_{n=2} \frac{a_n x_2^n}{n(n-1)}$ 发散.

反证, 若 $\sum_{n=2} \frac{a_n x_2^n}{n(n-1)}$ 收敛, 则 $\forall x_0$ 满足 $8 < |x_0| < |x_2|$,

使得 $\sum_{n=2} \frac{a_n x_0^n}{n(n-1)}$ 亦收敛.

$$|a_n x_0^n| = \left| \frac{a_n x_2^n}{n(n-1)} \right| n(n-1) \left| \frac{x_0}{x_2} \right|^n = Mn(n-1) \left| \frac{x_0}{x_2} \right|^n.$$

而 $\sum_{n=2} Mn(n-1) x^n$ 的 $R_0 = 1$, 即 $|x| < 1$ 时收敛. 因此

$\sum_{n=2} Mn(n-1) \left| \frac{x_0}{x_2} \right|^n$ 收敛, 进而推知 $\sum_{n=2} a_n x_0^n$ 收敛, $R_1 = 8$, 应有

$|x_0| < 8$, 矛盾. 于是又有 $R = R_1 = 8$.

综上所述, 最后得到本级数的收敛半径 $R = 8$. 【解毕】

【注】 本题为单项选择题, 凭猜想选(C)是对的. 以上分析证明过程是应用阿贝尔定理的练习.

13.5 幂级数的代数运算性质与解析运算性质

1. 代数运算性质

对幂级数的代数运算性质, 我们只限于讨论和与差的运算问题. 而级数和与差的运算性质, 有赖于极限的和与差运算性质. 我们特别指出以下两点请读者注意.

(1) 当两个同形(同为标准形或一般形幂级数)幂级数的收敛半径不一致时($R_1 \neq R_2$), 其和与差而生成的更新级数之收敛半径

$R^* = \min\{R_1, R_2\}$, 收敛域取原收敛域之交集.

(2) 当两个同形级数的收敛半径一致时 ($R_1 = R_2$), 情况会复杂, 要慎重对待.

对不同形幂级数的和与差运算而生成的更新级数, 其收敛域应按极限运算法则慎重讨论.

例 13.5.1 设有级数

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (x-1)^n.$$

讨论两个级数之差生成的更新级数收敛域.

【解】 考虑(1)~(2)后的更新级数. 级数(1)和(2)均为等比级数, 级数(1)收敛域为 $|x-1| < 1$, (2)的收敛域为 $|x-1| < 3$, 则更新后的级数收敛域为 $|x-1| < 1$. 更新级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) (x-1)^n, \quad x \in (0, 2). \quad \text{【解毕】}$$

例 13.5.2 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R_1 = 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 1) x^n$ 的收敛半径 R_2 为_____.(单项选择)

(A) $R_2 = 1$; (B) $R_2 > 1$;

(C) $R_2 = 1$; (D) 不定.

【解】 正确选项为(B).

如取 $a_n = \frac{1}{n!} - 1$, 则 $a_n + 1 = \frac{1}{n!}$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的 $R_1 = 1$, 但更

新级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ 的收敛半径 $R_2 = +\infty$. **【解毕】**

【注】 本题中, 取 $b_n = 1$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) x^n$ 即为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 之和的更新级数.

2. 解析运算性质

幂级数作为一种特殊的函数项级数,由 13.4 一般性概念的结论,即可得到如下三条解析运算性质.

(1) 和函数连续性

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-R, R]$ 上一致收敛,而 $a_n x^n$ 在任意点 $x \in [-R, R]$ 连续,则其和函数 $S(x)$ 在 $[-R, R]$ 上连续.

(2) 逐项积分性质

在(1)的同样条件下,对任意点 $x \in (-R, R)$ 均有

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \quad (13.6)$$

且逐项积分后的更新级数之收敛半径 $r = R$.

(3) 逐项微分性质

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可微,且可逐项微分,即

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (13.7)$$

而更新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R^* = R$.

【注】 对逐项积分和逐项微分后的更新级数,由(2)中的 $r = R$ 及(3)中的 $R^* = R$,则立即可有 $r = R$ 及 $R^* = R$,即这类更新级数维持原级数收敛半径 R 不变.但应特别注意,在收敛域的端点上可能会有变化,须个别考查端点处的收敛性.

13.6 泰勒级数与麦克劳林级数

若 $f(x)$ 在 x_0 处有任意阶导数,则称如下幂级数为 $f(x)$ 在 x_0

处的泰勒级数, 记为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (13.8)$$

特别 $x_0 = 0$ 时, 称

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \quad (13.9)$$

为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

对上述定义必须思考两个问题: 幂级数除 $x = x_0$ (或 $x = 0$, 对麦克劳林级数) 是否收敛? 若收敛, 是否收敛到 $f(x)$? 收敛域如何? 对这些问题的结论是如下定理:

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有任意阶导数, 则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$$

收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是 n 项余和

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零, 其中 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

在上述定理条件下, 寓意着结论: 做为幂级数形式的 $f(x)$ 的展开式唯一, 幂级数展开式的和函数在收敛域上也唯一.

以下 5 类初等函数的展开式(麦克劳林级数)是对其他函数进行展开的基础.

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(2) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(4) (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \dots (-n+1)}{n!} x^n,$$

当 $x < -1$ 时, $x \in (-1, 1)$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $x \in (-1, 1]$,

当 $x > 0$ 时, $x \in [-1, 1]$.

特别 $x = -1$ 时, 对应等比级数的和函数, 即

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

$$(5) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

对其他类型函数的展开, 经常以上述结果作为已知, 做间接展开, 此时, 我们已假设满足了前述的收敛性定理 $R_n(x) = O(n^{-1})$ 的条件.

例 13.6.1 将下列函数在 x_0 处展开, 指明收敛域.

(1) e^x , $x_0 = 1$; (2) e^{-x} , $x_0 = 0$;

(3) $\ln(1-x)$, $x_0 = 0$; (4) $\ln \frac{1+x}{1-x}$, $x_0 = 0$.

【解】 (1) $e^x = e^{x-1+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned} (3) \ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-x)^{n+1} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1).$$

例 13.6.2 求 $\arctan x$ 的麦克劳林级数.

【解】 由 $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, ($|x| < 1$), 则有

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

当 $x = \pm 1$ 时, 级数均为条件收敛, 最后得到

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1]. \quad \text{【解毕】}$$

例 13.6.3 求 $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$ 在 $x_0 = 1$ 处的幂级数.

【解】

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2+x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+(x-1)} - \frac{1}{3+(x-1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x-1)^n. \end{aligned}$$

收敛域为 $(0, 2)$.

【解毕】

【注】 求函数的幂级数展开式, 最后必须合并为一个幂级数.

13.7 级数展开与求和综合例题

级数的展开与求和是较为综合的问题, 需要对 5 类初等函数的展开式及其收敛情况很熟悉, 根据函数本身结构上的特点, 确定施行何种代数运算或解析运算, 包括逐项积分与逐项微分. 对求和问题, 则需要选择适当的初等函数, 配合特定的代数运算与解析运算, 构造出所要的结果. 本节给出几类典型综合例题, 以训练级数

综合分析能力 .

综例 13.7.1 求 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x_0 = 1$ 处的幂级数展开式 .

【思路】 首先所求级数形状应为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, 其次 $f(x)$ 不属于基本初等函数类型, 必须采用代数运算或解析运算对 $f(x)$ 进行处理 .

【解】 (方法 1) 代数运算, 并用幂函数的基本展开式 .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2+(x-1))^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (x-1)^n, \quad x \in (-1, 3). \end{aligned}$$

(方法 2) 解析运算, 并采用等比级数的展开式 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n, \quad |x-1| < 2. \\ \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

因此, 可由逐项微分得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{-2}{4} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} (x-1)^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (x-1)^n, \quad |x-1| < 2.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 在级数展开运算中, 应注意求和的指标不要出错, 简单可行的办法是检查级数的第一项, 必要时检查第二项, 确保中间等号的成立.

综例 13.7.2 求 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数.

【思路】 将 $f(x)$ 的两项分别展开, 再相减.

【解】
$$x \arctan x = x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}, \quad |x| < 1;$$

$$\ln \sqrt{2+x^2} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

最后合并上面二个级数得到

$$f(x) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} \right) x^{2n}.$$

收敛域为 $[-1, 1]$.

【解毕】

【寓意】 本题考查幂级数展开方法及级数的运算.

【注】 凡求幂级数展开式, 最后必须给出收敛域, 以表示等式成立的范围.

综例 13.7.3 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx$, $n = 1, 2, \dots$. 求 I_n .

(2000 年考研题)

【解】 由

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{n+1} (\sin x)^{n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

有

$$I_n = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}},$$

考虑 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} S(x)$, 收敛半径 $R = 1$, 在 $(-1, 1)$ 内有

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

则

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \\ &= -\ln |1-x|, \end{aligned}$$

令 $x = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, 则

$$I_n = S \frac{1}{2} = -\ln \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \ln(2^{-1} + 2^{-1}). \quad \text{【解毕】}$$

【寓意】 本题考查级数求和与积分运算.

【技巧】 选取函数 $S(x) = \frac{1}{1-x}$ 是关键, 这便取决于对初等函数展开式及其微分、积分运算的熟练程度.

综例 13.7.4 求 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

【解】 设 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$, 则只需求 $S \frac{1}{2}$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} x^n,$$

分别考虑两个级数,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} &= x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx \\ &= x \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -x \ln(1-x), \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{x} [-\ln(1-x) - x - \frac{1}{2}x^2], \quad |x| < 1 \\ &\text{且 } x \neq 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x}{2} [-\ln(1-x)] - \frac{1}{2x} [-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}] \\ &= \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x), \quad (|x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0). \end{aligned}$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得到

$$S \frac{1}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{4} + \frac{3}{4} \ln \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2. \quad \text{【解毕】}$$

【技巧】 合理处理级数求和号的下标是准确写出其和函数的关键. 合并求和号时, 下标必须一致, 综例 13.7.2 及本例便是如此. 有时可采取指标变量替换以统一求和号(类似积分号合并时的区间变换). 另外, 为写出和函数, 有时需要在级数前端增加有限项或

去掉有限项 .

综例 13.7.5 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和 .

(2001 年考研题)

【思路】 只须将 $\arctan x$ 展开为 x 的幂级数, 然后运用级数运算, 求两个级数和 .

【解】 由例 13.6.2 已得到

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{x} \arctan x &= \frac{1}{x} \arctan x + x \arctan x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad |x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0. \end{aligned}$$

记上述级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(0) = 1 = f(0)$, 因此

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

令 $x=1$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}.$$

【解毕】

【寓意】 本题考查幂级数间接展开技巧及级数运算 .

综例 13.7.6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和为_____。(单项选择题)

- (A) 3; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $\frac{5}{2}$; (D) 2.

【解】 正确选项为(A).

取 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{x}{2-x^2}$, 收敛域为 $(-2, 2)$,

$$S(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}.$$

本题求 $S(1)$, 于是 $S(1) = 3$.

【解毕】

综例 13.7.7 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和为_____。(单项选择题)

- (A) $2e^{-1}$; (B) $2e - 1$; (C) $2e$; (D) $2e^{-1} - 1$.

【解】 正确选项为(C).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= 2e.$$

【解毕】

综例 13.7.8 已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x) = f_n(x) + x^{n-1} e^x \quad (n \text{ 为正整数}),$$

且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

【解】 由已知条件可得微分方程

$$f_n'(x) - f_n(x) = x^{n-1} e^x,$$

据一阶线性微分方程解的公式得到

$$f_n(x) = e^{dx} (x^{n-1} e^x e^{-dx} dx + c) = e^x \frac{x^n}{n} + c.$$

由已知 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 得 $c=0$, 故 $f_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$. 于是

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 其收敛域为 $[-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

当 $x = -1$ 时,

$$f_n(-1) = -e^{-1} \ln 2.$$

因此, 当 $-1 < x < 1$ 时, 所求级数和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -e^x \ln(1-x). \quad \text{【解毕】}$$

【寓意】 本题考查一阶线性微分方程, 而该方程含有参数 n , 进一步考查级数求和运算.

【技巧】 在求和函数时, 注意将级数一般项中与 n 无关的部分因

子移到级数求和号外边. 如本题中 $f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} =$

$e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 只须再求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ 即可.

综例 13.7.9 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数

$S(x)$.

【解】

$$\lim_n \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!} = \lim_n \frac{1}{2n+3} = 0,$$

则收敛半径为 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \\ &= 1 + xS(x). \end{aligned}$$

于是 $S(x)$ 满足一阶线性微分方程

$$S'(x) - xS(x) = 1,$$

并且 $S(0) = 0$, 求解上述方程得到

$$S(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

【解毕】

【注】 $S(x)$ 表达式中的积分不可以表为初等函数.

综例 13.7.10 设函数 $z(k) = \sum_{n=0}^k \frac{n!}{k!} e^{-1}$. k 为正整数.

(1) 求 $z(0)$, $z(1)$ 及 $z(2)$ 的值; (2) 试证 $z(k)$ 亦为正整数.

【解】 本题考查幂级数展开式与和函数的综合技巧.

$$(1) z(0) = e^{-1} \sum_{n=0}^0 \frac{x^n}{n!} \Big|_{x=1} = e^{-1} e^x \Big|_{x=1} = 1,$$

$$z(1) = e^{-1} \sum_{n=0}^1 \frac{n \cdot x^n}{n!} \Big|_{x=1} = e^{-1} x(e^x) \Big|_{x=1} = 1,$$

$$z(2) = e^{-1} \sum_{n=0}^2 \frac{n^2 \cdot x^n}{n!} \Big|_{x=1} = e^{-1} x(xe^x) \Big|_{x=1} = 2.$$

(2) 显然有如下规律:

$$k = 1: x(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n!} = P_1(x)e^x;$$

$$k = 2: x(P_1(x)e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cdot x^n}{n!} = P_2(x)e^x;$$

.....

$$k = k: x(P_{k-1}(x)e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k \cdot x^n}{n!} = P_k(x)e^x$$

其中

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = x^2 + x = x(P_1(x) + P_0(x)),$$

.....

$$P_k(x) = x(P_{k-1}(x) + P_{k-1}(x)).$$

它们均为整系数多项式. 令 $x=1$, 有 $P_k(1) \cdot e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$, 对任意正

整数 k , $P_k(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} e^{-1}$ 必为正整数. 【解毕】

【技巧】 由 $z(k)$ 的级数表达结构, 应联想到 e^x 的展开式, 其中 e^{-1} 与 n 无关, 应移到求和号外面. 对 e^x 展开式求导一次后再乘以 x , 以保证求导一次后能出现相同的因子 n , 做 k 次这样的处理, 便可出现因子 n^k .

13.8 傅里叶级数

傅里叶级数反映了一个周期函数可以分解为有限或无限多个不同频率的正弦(余弦)信号之加权和这样一个基本事实, 同时也说明了无限多个不同频率的正弦(余弦)信号可以合成某一指定的周期信号, 这是经典频谱分析的理论基础, 也是现代图像与语言处

理技术的基础之一. 后者则是理论上较为复杂的反问题.

将一个周期函数展开为傅里叶级数的公式依赖于三角函数族的正交性.

本节重点是 $[-\pi, \pi]$, $[-l, l]$ 的傅里叶级数展开以及 $[0, \pi]$, $[0, l]$ 上定义的 $f(x)$ 之奇偶延拓意义下的正弦级数与余弦级数, 包括给出收敛性结论的狄里克雷定理.

1. 三角函数族的正交性

记 $T = \{1, \cos nx, \sin mx \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ (\mathbb{N} 表示自然数全体), 则 T 之任意二元在 $[-\pi, \pi]$ 上正交, 即有

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0,$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n).$$

2. 定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (13.10)$$

其中
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

狄里克雷定理给出的收敛性结论

设上述傅里叶级数的和函数为 $S(x)$. 若 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调且只有有限个第一类间断点, 则相应的傅里叶级数收敛性结论为:

(1) 在 $f(x)$ 的连续点 $x_0 \in (-\pi, \pi)$, 有 $S(x) = f(x)$;

(2) 在 $f(x)$ 的间断点 $x_0 \in (-\pi, \pi)$, 有

$$S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^-) + f(x_0^+)];$$

(3) 在端点 $x = \pm l$, 有

$$S(\pm l) = \frac{1}{2} [f(-l^+) + f(l^-)].$$

其中 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$, 以及 $f(-l^-)$, $f(l^+)$ 分别表示 $f(x)$ 在相应点处的左右极限值.

3. 定义在 $[-l, l]$ 上的 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

对 $[-l, l]$ 上的情形, 只须取区间变换

$$t = \frac{x}{l}, \text{ 即 } x = lt, \quad (13.11)$$

则 $dx = l dt$. 记 $\varphi(t) = f\left(\frac{x}{l}\right)$, 则 $\varphi(t)$ 为 $[-1, 1]$ 上的周期函数.

此时有

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \varphi(t) \cos kt \cdot l dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin kt \cdot l dt \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

类似 $[-l, l]$ 上的情形, 也可有相应的收敛性结论, 在连续点 x 处, $S(x) = f(x)$, 而在间断点或左右端点, 均为左右极限和的一半. 具体表达式, 请读者列出.

4. 奇偶延拓

对前两小节中的 $f(x)$, 若在 $[-l, l]$ 或 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 为奇函数, 则相应的傅里叶级数必为正弦级数; 当 $f(x)$ 为偶函数时, 相应的傅里叶级数必为余弦级数.

当 $f(x)$ 只在 $[0, l]$ 或 $[0, l]$ 上有定义时, 可人为地将这样的

$f(x)$ 拓展为 $F(x)$ 如下:

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), & x < 0, \\ f(x), & 0 \leq x. \end{cases} \quad (13.12)$$

则 $F(x)$ 满足: $F(-x) = -F(x)$, 即 $F(x)$ 为奇函数. 此时 $F(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数, 且

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (13.13)$$

$F(x)$ 的傅里叶级数即称为 $f(x)$ 的奇延拓级数, 或称为 $f(x)$ 的正弦级数.

若将 $F(x)$ 定义为

$$F(x) = \begin{cases} f(-x), & x < 0, \\ f(x), & 0 \leq x. \end{cases} \quad (13.14)$$

则必有 $F(x) = F(-x)$, 即 $F(x)$ 为偶函数. $F(x)$ 的傅里叶级数为余弦级数, 称之为 $f(x)$ 的偶延拓级数, 或称之为 $f(x)$ 的余弦级数. 且

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (13.15)$$

对 $[0, l]$ 上定义的 $f(x)$, 其奇延拓与偶延拓类似上述 $[0, \pi]$ 上的情况, 只是再次考虑区间变换 (13.11), 并利用奇偶性, 则有相应的傅里叶系数公式.

余弦级数

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (13.16)$$

正弦级数

$$\begin{aligned}
 a_k &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\
 b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13.17)
 \end{aligned}$$

对收敛性的结论,完全和 $[-l, l]$ 上的情况类似.

13.9 傅里叶级数例题

例 13.9.1 设函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数,并写出和函数表达式.

【解】

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot dx = 1,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx$$

$$= 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx$$

$$= \frac{1}{k} (1 - \cos k\pi),$$

这里 b_k 可表示为

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{2}{(2n-1)}, & k = 2n-1. \end{cases}$$

于是 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)} \sin(2n-1)x.$$

级数的和函数为(一个周期上)

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \text{ 或 } \pm\pi. \end{cases}$$

【解毕】

例 13.9.2 求 $f(x) = x(0 < x < \pi)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的正弦级数与余弦级数, 并写出和函数.

【解】 (1) 奇延拓, 取 $F(x) = x (-\pi < x < \pi)$, 则

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-x}{k} d \cos kx \\ &= -\frac{2}{k} x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx dx \\ &= -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

正弦级数为

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2}{k} \sin kx.$$

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

(2) 余弦级数

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad a_0 = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{k^2} (\cos k\pi - 1),$$

上述 a_k 可表为

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{-4}{(2n-1)^2}, & k = 2n-1. \end{cases}$$

$f(x)$ 的余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{4}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

和函数为(一个周期)

$$S(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \\ \pi, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

【解毕】

例 13.9.3 求 $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的余弦级数.

【解】 取 $F(x) = x^2(-1-x+1)$, 则 $l=1$, 即有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ a_k &= \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos kx dx \\ &= \frac{2}{k} x^2 \sin kx \Big|_0^1 - \frac{4}{k} \int_0^1 x \sin kx dx \\ &= \frac{4}{(k)^2} x \cos kx \Big|_0^1 - \frac{4}{(k)^2} \int_0^1 \cos kx dx \\ &= (-1)^k \frac{4}{(k)^2} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此 x^2 在 $[0, 1]$ 上的余弦级数为

$$x^2 \sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx. \quad \text{【解毕】}$$

例 13.9.4 若将函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 2-x, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

展成周期为 $T=2$ 的正弦级数, 则和函数 $S(x)$ 在 $x = -\frac{5}{2}$ 处的值为_____。(单项选择)

(A) 0; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) 1.

【思路】 对此类问题, 无需做傅里叶级数展开计算, 直接通过 $f(x)$ 的奇延拓即可判断和函数的取值.

【解】 正确选项为(C).

一个周期 ($T=2$) 内的奇延拓函数为

$$F(x) = \begin{cases} -2-x, & -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ -x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ -x, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 2-x, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

由于周期 $T=2$, 因此 $S\left(-\frac{5}{2}\right) = S\left(-\frac{1}{2}\right)$, 而 $x = -\frac{1}{2}$ 为 $F(x)$ 的第一类间断点, $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 应为 $F(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处左右极限之和的 $\frac{1}{2}$. 而

$$F\left(-\frac{1}{2}\right)^+ = \frac{1}{2}, F\left(-\frac{1}{2}\right)^- = -\frac{3}{2}. \text{ 因此 } S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

【解毕】

【注】 熟练写出奇延拓函数(或偶延拓函数), 是解决此类问题的有效手段, 应严格按(13.12)与(13.13)两式构造延拓函数 $F(x)$. 另外, 也可以通过函数作图来处理这类问题, 应特别注意周期性, 写延拓函数的方法有利于训练函数关系表达的能力, 应予以重视.

第 14 章 微分方程基本概念及一阶方程 与高阶可降阶方程的解法

14.1 引 言

微分方程的基本内容可概括为三句话：

一个基本概念：微分方程的“解”；

三类微分方程：一阶可积型；高阶可降阶型以及高阶线性方程；

几方面简单应用：主要是在物理、力学、几何等方面的应用。

微分方程的中心问题是“解方程”，解方程的基本方法是：用变量置换，将方程化成可积类型；用观察待定（常数或函数）的方法，将问题化成代数方程或其他较简单的微分方程。与求不定积分方法比较，解微分方程的做法是，先判别方程类型，再选择具体解法。突出类型的识别是“解微分方程”的特点。

14.2 微分方程的基本概念

(1) “解”：满足微分方程的函数，即代入微分方程使其成为恒等式的函数，称为该方程的解。

(2) “阶”：微分方程中所含未知函数导数阶数的最高数。通常一个微分方程的标准型是关于最高阶导数已解出的形式，如一阶方程 $y' = f(x, y)$ ；二阶方程 $y'' = f(x, y, y')$ 等等。

(3) “通解”或“一般解”，指包含有与方程阶数相同个数的独立任意常数的方程之解，这实际上是含多个参数的函数簇。在一般

情形下,通解不一定是方程的所有解.

(4)“线性方程与非线性方程”:如果微分方程中所含未知函数及其各阶导数均是一次的,则称其为线性方程;否则就是非线性方程.例如 $y + xy = 0$ 是二阶线性方程,而 $y + yy = 0$ 则是非线性方程.线性与非线性是微分方程的基本分类,两者有很大的差别.线性方程是高等数学中的主要研究对象,它们从解的结构到解法均有很强的规律性.特别是,线性方程的通解就是其所有解.

以上 4 个是微分方程的最基本概念,另外还有“特解”、“初始条件”等概念,也都是围绕着解的概念而展开的.

例 14.2.1 请判别函数

$y_1(x) = a e^{-x^2} + 1$, $y_2(x) = a$, $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$,
其中 a, a 为任意常数,是否是方程

$$y = 2x(1 - y), \quad (14.1)$$

$$xy - (1 - 2x^2)y = 0 \quad (14.2)$$

的解?若是解的话,指出是特解还是通解?

【解】 验证是否为解,仅需将所验证函数代入方程,看是否能成为恒等式即可.

(1) 将 $y_1(x)$ 代入方程(14.1)得

$$\text{左边} = -2x a e^{-x^2}; \quad \text{右边} = 2x(-a e^{-x^2}).$$

由于左边 = 右边,可见是其解,又 $y_1(x)$ 中含有一个任意常数,因而是此一阶方程的通解,或一般解.再者,这是一阶线性方程,因而也是其所有解.

将 $y_2(x) = a$ 代入(14.1),欲让

$$0 = 2x(1 - a),$$

只有 $a = 1$ 才行,可见 $y_2(x) = a$ 除 $a = 1$ 之外,不是(14.1)之解.其实,从其通解可知,当 $a = 0$ 时, $y_1(x) = 1$.由此可知只有 $a = 1$ 时, $y_2(x)$ 才是解,这是因为 $y_1(x) = a e^{-x^2} + 1$ 是(14.1)的所

有解 .

(2) 今将 $y_1(x) = a e^{-x^2} + 1$ 和 $y_2(x) = c$ 代入方程 (14.2), 全能使其成为恒等式, 可见都是该方程之解, 但由于均只有一个任意常数, 因而不是通解, 但 $y_3(x) = a e^{-x^2} + 1 + c$ 不但是 (14.2) 之解, 而且有两个独立的任意常数, 因而是该方程的通解 .

(3) 解 $y_1(x) = a e^{-x^2} + 1$ 是含单参数 a 的函数簇, 如果用求导方法消去参数 a , 则得到以此为通解的一阶微分方程, 即由

$$\begin{aligned} y &= a e^{-x^2} + 1, \\ y' &= -2ax e^{-x^2}. \end{aligned}$$

消去 a , 得方程

$$y' = 2x(1 - y).$$

这就是方程 (14.1) .

同样地, 利用 $y_3(x)$, 用求导方法消去二个参数 a 和 c , 即由

$$\begin{aligned} y &= a e^{-x^2} + c, \\ y' &= -2x a e^{-x^2}, \\ y' &= -2a e^{-x^2} + 4x^2 a e^{-x^2}. \end{aligned}$$

得到方程

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1 + 2x^2}{-x},$$

即

$$xy' = (1 - 2x^2)y$$

这就是方程 (14.2) .

【解毕】

例 14.2.2 求 $x e^x \sin x dx = ?$

【解】 问题等价于解方程

$$y' = x e^x \sin x. \quad (14.3)$$

什么函数的导数会是 $x e^x \sin x$ 呢? 显然只可能是形如

$$y = (ax + b)e^x \sin x + (cx + d)e^x \cos x \quad (14.4)$$

的函数, 其中 a, b, c, d 为待定常数. 将 (14.4) 代入方程 (14.3), 欲使下式

$$y = (ax + b)e^x \sin x + (ax + b)e^x \cos x + ae^x \sin x \\ - (cx + d)e^x \sin x + (cx + d)e^x \cos x + ce^x \cos x \\ xe^x \sin x$$

成立, 比较两边的系数, 得到关于系数 a, b, c 和 d 的方程

$$\begin{aligned} a - c &= 1, \\ b - d + a &= 0, \\ a + c &= 0, \\ b + d + c &= 0. \end{aligned}$$

解出
$$a = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad d = \frac{1}{2}.$$

由此得
$$y(x) = \frac{x}{2}e^x \sin x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^x \cos x + C. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 这种“观察待定系数”的方法是微分方程求解的重要途径, 这里所设的带有待定常数的函数, 通常称为方程的“形式解”. 言下之意, 可能具有这种形式的解, 至于是否真有, 就要看代入方程后, 得到的代数方程是否有解, 若待定之数确能求出来, 则这种形式的解就找到了, 否则无这种形式之解.

14.3 一阶可积类型

一阶方程 $y = f(x, y)$ 中有极少数方程可以通过积分的方法求解, 这种方程统称之为一阶可积类型. 这种类型最基本的形式是所谓“可分离变量型”和“可化为可分离变量型”的方程.

1. 可分离变量型

此种类型方程形式为

$$y = f(x)g(y). \quad (14.5)$$

或者,用微分形式表示为

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

其解是

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx + c,$$

或者,满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 之解为

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

这里不定积分 $\int \frac{dy}{g(y)}$, $\int f(x)dx$ 代表一个原函数.

2. 可化成可分离变量型

这种方程是通过变量置换,将新方程化成可分离变量型方程. 典型的有

(1) 零齐方程:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (14.6)$$

作变换 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 则得关于 u 的分离变量型方程

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

(2) 线性变量方程:

$$y' = f(ax + by). \quad (14.7)$$

作变换 $u = ax + by$, 即 $y = \frac{1}{b}(u - ax)$, 则得关于 u 的方程

$$u' = bf(u) + a.$$

类似方程可以有許多,而其思路是作某种变量置换之后,使新方程成为可分离变量型.

3. 一阶线性微分方程

此种类型方程的形式为

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (14.8)$$

当 $q(x) = 0$ 时,

$$y' + p(x)y = 0 \quad (14.9)$$

是可分离变量型方程, 称为一阶线性齐次方程, 其解容易求得, 为

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}. \quad (14.10)$$

对于一阶线性非齐次方程(14.8), 它不是可分离变量型的, 其解当然也不可能是(14.10), 但是能否将其中的 c 当作新的未知函数来代替 y , 而使新方程变量分离呢? 即令

$$y(x) = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \text{ 或写成 } c(x) = y \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

为适应上述变换, 将(14.8)两边同乘 $e^{\int p(x)dx}$, 得

$$y e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad (14.11)$$

即

$$y e^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}, \quad (14.12)$$

于是得

$$c(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + A$$

从而有

$$y(x) = Ae^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx. \quad (14.13)$$

这就是(14.8)之解. 在解这种方程时, 没有必要死记公式(14.13), 可以直接利用步骤(14.11), 两边同乘因子 $e^{\int p(x)dx}$, 而后直接积分方程(14.12).

例 14.3.1 求 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$.

【解】 对方程两边同乘

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x,$$

得新方程

$$(xy)' = \sin x,$$

$$xy = -\cos x + c,$$

$$y = \frac{c}{x} - \frac{\cos x}{x}.$$

【解毕】

要指出的是, 解 (14.13) 中 $Ae^{-\int p(x)dx}$ 正是线性齐次方程 (14.9) 的一般解, 而后一部分正是线性非齐次方程 (14.8) 的一个特解. 这种解的结构形式, 对一阶线性方程总是正确的.

与一阶线性方程很像的一类非线性方程

$$y' + p(x)y = q(x)y \quad (14.14)$$

称为伯努利方程, 它通过变量置换可以变成线性方程, 为此改写 (14.14) 为

$$y' y + p(x)y^{1'} = q(x),$$

$$\frac{1}{1 -} y^{1'} + p(x)y^{1'} = q(x).$$

令 $u(x) = y^{1'}$, 得关于 u 的线性方程

$$\frac{1}{1 -} u + p(x)u = q(x).$$

4. 全微分方程与积分因子

任何一阶方程都可以写成微分形式

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0. \quad (14.15)$$

这使人联想到对隐函数 $F(x, y) = c$ 求导时的形式, 如果有

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \frac{F}{x}dx + \frac{F}{y}dy, \quad (14.16)$$

则 (14.15) 就变成

$$dF(x, y(x)) = 0,$$

因而 (14.15) 有由隐函数给出的解

$$F(x, y) = c.$$

方程 (14.15) 左端能变成 (14.16) 的形式的条件. 由混合偏导数相等可得

$$\frac{X}{y} = \frac{{}^2 F}{y x} = \frac{{}^2 F}{x y} = \frac{Y}{x},$$

从而可推出所谓“可积性条件”:

$$\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}. \quad (14.17)$$

当然,这里的条件是 X, Y 的偏导数连续.

满足这种条件的方程显然非常少,但可以通过方程两边同乘一个函数,使之成为这种方程.这在原则上总是可以的,但实际上是将原问题转化为解另一个更一般的困难问题.而在某些特别的情况下,这种方法能解决一些问题,这叫“积分因子方法”,这由所乘的函数叫积分因子而得名.具体在找积分因子时,通常是利用“凑微分”逐步来实现,其中常用的公式是

$$u dv + v du = d(uv);$$

$$\frac{u dv - v du}{u^2} = d \frac{v}{u}.$$

$u dv - v du$ 的常用积分因子有

$$\frac{1}{u^2}, \quad \frac{1}{v^2}, \quad \frac{1}{u^2 \pm v^2}, \quad \frac{1}{uv}.$$

例 14.3.2 求解 $1 + e^{\frac{x}{y}} dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

【解】 这不是线性方程,也不是可分离变量型,可利用凑全微分的方法试试.(当然可以先用可积性条件检验一下,是否是全微分方程,本题满足可积性条件).

凑全微分的过程是,先分解,把显而易见的全微分凑出来,再步步深入.

$$dx + e^{\frac{x}{y}} dx + dy - \frac{x}{y} dy = 0,$$

$$dx + e^{\frac{x}{y}} dy + \frac{y dx - x dy}{y} = 0,$$

$$dx + e^{\frac{x}{y}} dy + yd \frac{x}{y} = 0,$$

$$dx + e^{\frac{x}{y}} dy + ye^{\frac{x}{y}} d \frac{x}{y} = 0,$$

$$d(x + ye^{\frac{x}{y}}) = 0,$$

$$x + ye^{\frac{x}{y}} = c.$$

【解毕】

例 14.3.3 求解 $yd x + (x - 3x^3 y^2) dy = 0$.

【解】

$$yd x + xdy - 3x^3 y^2 dy = 0,$$

$$d(xy) - \frac{3x^3 y^3}{y} dy = 0,$$

两边同乘 $\frac{1}{x^3 y^3}$ 得

$$\frac{d(xy)}{(xy)^3} - \frac{3}{y} dy = 0,$$

$$-\frac{1}{2} d((xy)^{-2}) - 3d \ln y = 0,$$

$$d \frac{1}{2x^2 y^2} + 3 \ln y = 0,$$

$$\frac{1}{2x^2 y^2} + 3 \ln y = c.$$

【解毕】

14.4 高阶可降阶方程

二阶方程的一般形式是

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (14.18)$$

从利用积分求解的思路来看,主要是通过变量置换将方程降阶.一般性的降阶方法是没有的,必须具体方程具体处理.但在(14.18)的右端函数中,若缺 y 和 y' , 缺 y 或缺 x 的 3 种情形,有一般的降阶处理方法.

对缺 y, y' 的方程

$$y' = f(x) \quad (14.19)$$

仅需作两次不定积分即可.

对缺 y 的方程

$$y' = f(x, y') \quad (14.20)$$

仅需令 $p(x) = y'(x)$, 就降成关于 p 的一阶方程

$$p' = f(x, p).$$

对缺 x 的方程

$$y' = f(y, y'). \quad (14.21)$$

将 y 看作自变量, 即令 $p(y) = y'(x)$, 则

$$y'(x) = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p(y) \frac{dp}{dy},$$

于是有关于 $p(y)$ 的一阶方程

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

例 14.4.1 解满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 及方程 $2yy' = 1 + (y')^2$ 的特解.

【解】 这是 $y' = f(y, y')$ 型的方程, 为此可令 $p(y) = y'$, 则

$$y' = \frac{dp}{dy} y = p \frac{dp}{dy},$$

代入原方程得

$$2yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2,$$

$$\frac{2p dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}.$$

积分并利用初始条件 $p(1) = 0$, 得

$$\int_0^p \frac{2p dp}{1 + p^2} = \int_1^y \frac{dy}{y},$$

即

$$\ln(1 + p^2) = \ln y,$$

$$1 + y^2 = y,$$

$$\frac{dy}{y-1} = dx,$$

再利用初始条件 $y(0) = 1$, 并积分得

$$\int_1^y \frac{dy}{y-1} = \int_0^x dx,$$

即
$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1. \quad \text{【解毕】}$$

14.5 综合题

综例 14.5.1 试检验函数

$$y_1 = ce^x + x; \quad y_2 = ae^x + \omega x$$

是否是下列方程: (A) $y' = y - x + 1$, (B) $(x-1)y' - xy' + y = 0$ 的解? 如果是, 指出是通解还是特解? 其中 c, a, ω 是任意常数.

【解】 用直接代入方程验算方法, 可知:

$y_1(x)$ 是方程 (A) 的一般解;

$y_1(x)$ 是方程 (B) 的解, 但不是一般解;

$y_2(x)$ 是方程 (B) 的一般解.

若利用线性方程解的结构理论, 以上结果更易于得到, 此时仅需验证: e^x 是齐次线性方程 $y' - y = 0$ 之解; x 是 $y' - y = -x + 1$ 之解; e^x 和 x 是方程 $(x-1)y' - xy' + y = 0$ 之解, 再利用线性方程解的结构理论即可. 【解毕】

综例 14.5.2 若 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足条件

$$\begin{aligned} y'' &= x^2 + y^2, \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (14.22)$$

试研究其增减、凸凹区间、极值点与拐点, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 函数 $y(x)$

的趋势, 以及其奇偶性. 最后做出函数的略图.

【解】

(i) 由于 $y = x^2 + y^2 \geq 0$, 可见 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数. 又由于 $y(0) = 0$, 可知: 当 $x > 0$ 时, $y(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y(x) < 0$. 因此 $y = y(x)$ 只有唯一零点 $x = 0$. 进而可验证点 $x = 0$ 不是极值点.

(ii) 由于 $y' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2)$, 得出:

当 $x > 0$ 时, $y > 0$, $y = y(x)$ 是下凸的;

当 $x < 0$ 时, $y < 0$, $y = y(x)$ 是上凸的;

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 这是函数的唯一拐点.

(iii) 由于 $y' = x^2 + y^2 \geq x^2$, 积分得:

当 $x > 0$ 时, $y(x) \geq \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$;

当 $x < 0$ 时, $y(x) \geq \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$, 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$.

(iv) 奇偶性研究

若 $y = f(x)$ 满足 (14.22) 中的微分方程, 即

$$f'(x) = x^2 + f^2(x),$$

可推出

$$f'(-x) = (-x)^2 + f^2(-x) = x^2 + f^2(-x). \quad (14.23)$$

今考虑函数 $y_1(x) = -f(-x)$, 可证明它也满足 (14.22) 中的方程, 因为

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(-f(-x)) = f'(-x).$$

利用 (14.23) 得

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(x)}{dx} &= x^2 + f^2(-x) \\ &= x^2 + (-f(-x))^2 \\ &= x^2 + y_1^2(x). \end{aligned}$$

这就说明 $y_1(x) = -f(-x)$ 也是方程之解, 再加上

$$y_1(0) = -f(0) = 0.$$

根据一阶微分方程初值问题解的唯一性, 这两个解 $y(x) = f(x)$ 及 $y_1(x) = -f(-x)$ 是相同的, 从而有 $f(x) = -f(-x)$, 可见此函数为奇函数.

(v) 略图见图 14.1.

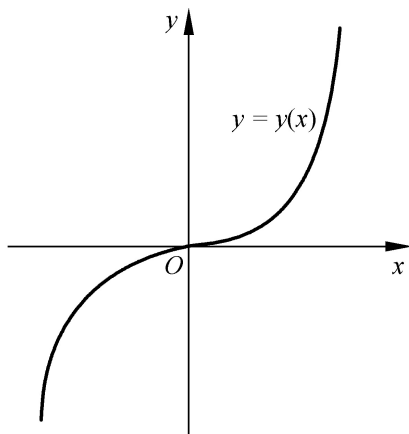


图 14.1

【解毕】

综例 14.5.3 已知函数 $y = y(x)$ 满足条件

$$xy + 3xy^2 = 1 - e^x,$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

欲使 $y(x) \sim Ax^2, \quad x \rightarrow 0$, 求 $A = ?$

【解】 (i) 若有 $y(0) = y'(0) = 0$ 及 $f(0) = f'(0) = 0$, 则由 $y(x) \sim f(x), \quad x \rightarrow 0$, 可推出 $y(x) \sim f(x)$.

(ii) 由于 $y = \frac{1 - e^{-x}}{x} - 3y^2 \sim \frac{1 - e^{-x}}{x}$, 若有

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} \sim (Ax^2) = 2A, \quad x \rightarrow 0.$$

仅需

$$\max_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 2A.$$

而对 $x \rightarrow 0$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2} \quad 0,$$

即有 $2A = \max_{x>0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1,$

解出 $A = \frac{1}{2}.$

即 " $x > 0$, 有 $y(x) = \frac{x^2}{2}.$ 【解毕】

【注】 以上几题都是要求运用微分方程解的概念来直接研究函数的性质. 其基本点是: 微分方程也是表示函数的方法.

综例 14.5.4 判断下列方程所属的一阶可积类型.

$$e^{x^2+y^2} \cdot y = \frac{x}{y};$$

$$\cos y dx + dy = \sin^2 x dy;$$

$$x(\ln x - \ln y) dy - y dx = 0;$$

$$y(1+x^2) - x(1+y^2) y = 0;$$

$$\tan x \cdot y - y = 5; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x};$$

$$y = \frac{1}{x + \sin y}; \quad \frac{dy}{dt} = g - kv \quad (g, k \text{ 是常数});$$

$$y = -\frac{y}{x}; \quad \textcircled{0} \quad xy + y = 2 - xy;$$

$$1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1.$$

【解】

由 $y = \frac{x}{y} e^{-x^2-y^2} = \frac{xe^{-x^2}}{ye^{-y^2}}$, 为可分离变量型.

$$\cos y dx + (1 - \sin^2 x) dy = 0,$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{dy}{\cos y}, \text{ 为可分离变量型.}$$

$$x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y}, \text{ 为零齐方程.}$$

$y(1+x^2) - x(1+y^2)y = 0$ 是可分离变量型, 同时有易见的积分因子

$$y dx - x dy + x^2 y dx - y^2 x dy = 0,$$

$$\frac{y dx - x dy}{xy} + x dx - y dy = 0,$$

$$d \ln \frac{x}{y} + d \frac{x^2 - y^2}{2} = 0.$$

$\tan x \cdot y - y = 5$ 是一阶线性、可分离变量型, 亦有简单的积分因子.

$$y = \frac{y-x}{x} \text{ 是一阶线性、零齐方程, 亦有简单的积分因子.}$$

$y = \frac{1}{x + \sin y}$ 可换成 $\frac{dx}{dy} = x + \sin y$, 因而是关于 $x(y)$ 的线性方程.

$$\frac{dy}{dt} = g - kv \text{ 是可分离变量、一阶线性方程.}$$

$y = -\frac{y}{x}$ 可换成 $x dy + y dx = 0$, 是线性、零齐、可分离变量、全微分方程.

① 原方程改写为 $y = 2 \frac{y}{x} - \frac{y}{x}$, 得零齐方程, 亦是全微分方程, 即 $d(xy) = 2 xy$, 还是伯努利方程, 为 $y + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}}$.

② $y = \frac{1}{x-y} + 1 = f(x-y)$ 可化成可分离变量型. 还可化为全微分方程如下:

$$\begin{aligned}(x-y)dy &= (x-y+1)dx, \\ xdy + ydx - ydy - (x+1)dx &= 0, \\ d(xy) - d\frac{y^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} &= 0.\end{aligned}$$

【解毕】

综例 14 5 5 求 $2xdy - ydx = 2y^2dy$ 的通解 .

【解】 (方法 1) 改写为对 x 的线性方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} = -2y,$$

两边同乘 $e^{-\frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{x}{y^2} &= \frac{-2}{y}, \\ y^2 e^{\frac{x}{y^2}} &= c.\end{aligned}$$

(方法 2) 改写成对 y 的伯努利方程

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y &= \frac{1}{2x}y^2, \\ \frac{d}{dx} \frac{-1}{y} + \frac{1}{2x} \frac{-1}{y} &= \frac{1}{2x}.\end{aligned}$$

(方法 3) 凑积分因子 .

$$\begin{aligned}2xydy - y^2dx &= 2y^3dy, \\ xdy^2 - y^2dx &= 2y^3dy, \\ \frac{xdy^2 - y^2dx}{y^4} &= \frac{2dy}{y}, \\ d\frac{x}{y^2} &= 2d\ln y.\end{aligned}$$

【解毕】

综例 14 5 6 设 $f(x)$ 导数连续, $f'(x) = 1$, 且方程

$$(\sin x - f(x)) \frac{y}{x} dx + f(x) dy = 0$$

是全微分方程, 求 $f(x)$ 及方程之通解 .

【分析】 这是一道微分方程里套微分方程的综合题, 本身并无难度, 只要按步骤做即可.

【解】 (1) 利用全微分条件列出关于 $f(x)$ 的方程. 由 $\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}$, 得到关于 $f(x)$ 的方程及条件

$$f(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

$$f'(x) = 1.$$

这是关于 $f(x)$ 的线性方程, 将方程两边同乘 x , 得

$$(xf(x))' = \sin x,$$

再两边在 $[1, x]$ 上积分, 得

$$xf(x) - f(1) = \int_1^x \sin x dx,$$

故
$$f(x) = \frac{-1}{x}(\cos x + 1 - \cos 1).$$

(2) 代入题设方程, 用凑全微方法求解.

$$\sin x + \frac{\cos x + 1 - \cos 1}{x} \frac{y}{x} dx - \frac{\cos x + 1 - \cos 1}{x} dy = 0,$$

$$(1 - \cos 1) \frac{y dx - x dy}{x^2} + \frac{xy \sin x dx - x \cos x dy + y \cos x dx}{x^2} = 0,$$

$$(1 - \cos 1) d \frac{y}{x} + \frac{-x d(y \cos x) + y \cos x dx}{x^2} = 0,$$

$$(1 - \cos 1) d \frac{y}{x} - d \frac{y \cos x}{x} = 0,$$

由此得到解

$$(1 - \cos 1) \frac{y}{x} - \frac{y \cos x}{x} = c,$$

即
$$y = \frac{cx}{1 - \cos x}.$$

【解毕】

综例 14.5.7 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的周期函数. 试证明 $\frac{dy}{dx} + ky = f(x)$ 有唯一的以 T 为周期的周期函数解, 其中 k 为常数.

【解】 首先解出方程的一般解. 在方程两边同乘因子 e^{kx} , 得

$$\frac{d}{dx} e^{kx} y = e^{kx} f(x).$$

得一般解为

$$y(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t) e^{kt} dt + c.$$

如果有周期为 T 之周期解, 则其解必满足周期条件:

" $x, y(x+T) = y(x)$. 今

$$\begin{aligned} y(x+T) &= e^{-k(x+T)} \int_0^{x+T} f(t) e^{kt} dt + c \\ &= e^{-kx} \int_0^{x+T} f(t) e^{k(t-T)} dt + c e^{-kT}, \end{aligned}$$

做变换 $u = t - T$, 并利用 $f(u+T) = f(u)$, 得

$$y(x+T) = e^{-kx} \int_{-T}^x f(u) e^{ku} du + c e^{-kT}$$

$$\begin{aligned} y(x+T) - y(x) &= e^{-kx} \int_{-T}^x f(u) e^{ku} du - \int_0^x f(t) e^{kt} dt + c e^{-kT} - 1 \\ &= e^{-kx} \int_{-T}^0 f(t) e^{kt} dt + c e^{-kT} - 1, \end{aligned}$$

由于 $y(x+T) = y(x)$, 得

$$\int_{-T}^0 f(t) e^{kt} dt + c e^{-kT} - 1 = 0,$$

即
$$c = \frac{1}{1 - e^{-kT}} \int_{-T}^0 f(t) e^{kt} dt.$$

由于用周期条件, 确能确定唯一的常数 c , 因而其解就是所求之唯一的周期解. 【解毕】

综例 14.5.8 方程 $y' + p(x)y = 0$, 其中 $p(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期

的周期函数, 试问在什么条件下, 其解为周期函数. 证明: 若其解不是周期函数时, 其解总可表成为周期函数乘上 e^x 的形式.

【解】 方程 $y' + p(x)y = 0$ 有一般解

$$y = \alpha e^{-\int_0^x p(t) dt}.$$

由于 $p(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 其原函数 $\int_0^x p(t) dt$ 若是周期函数, 则其解必是周期函数. 而 $\int_0^x p(t) dt$ 是周期函数的充要条件是

$$\int_0^T p(t) dt = 0.$$

可见, 方程 $y' + p(x)y = 0$ 有周期解的充要条件是

$$\int_0^T p(t) dt = 0.$$

若 $\int_0^T p(t) dt = I \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^x p(t) dt &= \int_0^x p(t) - \frac{I}{T} dt + \frac{I}{T}x \\ &= (x) + \frac{I}{T}x, \end{aligned}$$

其中

$$(x) = \int_0^x p(t) - \frac{I}{T} dt.$$

显然有

$$\int_0^T (x) dx = 0.$$

因此 (x) 是周期函数, 从而方程之解可写成

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha e^{-\int_0^x p(t) dt} = \alpha e^{-(x) - \frac{I}{T}x} \\ &= G(x) e^{-\frac{I}{T}x}. \end{aligned}$$

其中 $G(x) = \alpha e^{-(x)}$ 为周期函数.

【解毕】

综例 14.5.9 证明曲率为 1 的曲线是半径为 1 的圆簇 .

【证明】 曲率为 1 的曲线满足方程

$$\frac{y}{(1+y^2)^{3/2}} = 1,$$

即
$$y = (1+y^2)^{3/2}.$$

解此方程, 这是二阶可降阶中 $y = f(x, y)$ 型. 令 $y(x) = p(x)$, 则有 $p(x) = (1+p^2)^{3/2}$, 即

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = dx.$$

求解有

$$\begin{aligned} x + a &= \frac{p}{1+p^2}, \\ (x+a)^2 &= \frac{p^2}{1+p^2}, \\ p^2 &= \frac{(x+a)^2}{1-(x+a)^2}, \\ p &= \pm \frac{x+a}{1-(x+a)^2}. \end{aligned}$$

再解方程

$$y = \pm \frac{x+a}{1-(x+a)^2}$$

得

$$y + a = \pm \sqrt{1 - (x+a)^2},$$

即
$$(x+a)^2 + (y+a)^2 = 1.$$

这正是圆心在 (a, a) , 半径为 1 之圆 .

【证毕】

综例 14.5.10 解方程 $yy' + 1 = y^2$.

【解】 这是 $y = f(y, y')$ 型的可降阶方程 .

令
$$y = z(y), \text{ 则 } y' = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

代入方程得

$$\frac{zdz}{z^2 - 1} = \frac{dy}{y}.$$

解之得

$$z^2 - 1 = ay^2,$$

即

$$\frac{dy}{1 + ay^2} = \pm dx.$$

由于 a 的正负不同, 方程有不同之解. 下面应予以讨论:

当 $a > 0$ 时, 解为 $\frac{1}{a} \ln(\sqrt{a}y + \sqrt{1 + ay^2}) = \pm x + c$;

当 $a < 0$ 时, 解为 $\frac{1}{-a} \arcsin \sqrt{-a}y = \pm x + c$;

当 $a = 0$ 时, 解为 $y = \pm x + c$.

【解毕】

综例 14.5.11 若对方程

$$y' + p(x)y = f(x)$$

有条件: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) > 0$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+}}{p(x)} = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{p(x)} = 0.$$

证明: 此方程的任一解 $y(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0.

【证明】 先求方程的一般解

$$\begin{aligned} y(x) &= ce^{-\int_{x_0}^x p(u)du} + e^{-\int_{x_0}^x p(u)du} \cdot \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t p(u)du} dt \\ &= y_1(x) + Y(x). \end{aligned}$$

考虑相应的齐次方程一般解

$$y_1(x) = ce^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+}}{p(x)} = 1$, 即 $p(x)$ 与 x^{1+} 是等价无穷大, 由此可知

$\int_{x_0}^{+\infty} p(x) dx$ 发散, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x p(t) dt = +\infty$. 因而有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} = 0.$$

再考虑非齐次解 $Y(x)$ 的极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x_0}^x f(t) e^{\int_{x_0}^t p(u) du} dt}{e^{\int_{x_0}^x p(u) du}}.$$

运用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) e^{\int_{x_0}^x p(u) du}}{p(x) e^{\int_{x_0}^x p(u) du}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{p(x)} = 0. \end{aligned}$$

【证毕】

第 15 章 高阶线性微分方程

15.1 引言

高阶线性方程的一般形式是

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (15.1)$$

称之为 n 阶线性非齐次方程. 若 $f(x) = 0$, 则称之为 n 阶线性齐次方程; 方程中 $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 称为系数, 若这些系数均为常数, 则这种方程称作 n 阶线性常系数微分方程.

高阶线性微分方程的特点, 也是其优点是它解的结构的规定性, 其结论与线性代数中线性方程组的解的结构类似, 而且通解就是其所有解. 还有是解的存在性与唯一性的条件也简单: 只要系数 $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 连续.

由于解的结构简单, 因而高阶线性方程的求解方法主要是用“待定系数”或“待定函数”法转化方程, 求出特解.

高阶线性方程只有常系数方程才总可求出其解, 一般情况则非常复杂. 因此在求解问题上仅讨论常系数方程与欧拉方程.

线性常系数差分方程与线性常系数微分方程在许多方面是非常类似的, 这里我们将附带予以介绍.

15.2 线性方程解的结构

为表叙方便, 引进微分算子

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

和算子多项式

$$\begin{aligned} L(D) &= \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x) \\ &= D^n + a_1(x) D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x) D + a_n(x). \end{aligned} \quad (15.2)$$

因为 $L(D)$ 实际上是导数运算, 因此它显然有所谓的“线性性”, 即对任何 n 阶可导函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 及任何常数 c , 均有

$$\begin{aligned} L(D)(y_1 + y_2) &= L(D)y_1 + L(D)y_2, \\ L(D)(cy_1) &= cL(D)y_1. \end{aligned}$$

利用 $L(D)$, n 阶线性微分方程 (15.1) 可简单地表示成

$$L(D)y = f(x).$$

而相应的齐次方程则表示为

$$L(D)y = 0.$$

例如, 方程 $y'' + xy' + y = 2x$ 对应的微分算子是

$$L(D) = D^2 + xD + 1.$$

方程则是

$$L(D)y = (D^2 + xD + 1)y = 2x.$$

相应的齐次方程为

$$L(D)y = (D^2 + xD + 1)y = 0.$$

可以验证 $y(x) = x$ 是方程之解, 即

$$L(D)x = (D^2 + xD + 1)x = 0 + x + x = 2x.$$

以下以二阶为例讨论线性方程解的结构, 结果可以推广到 n 阶. 今设二阶线性方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (15.3)$$

及相应的齐次方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (15.4)$$

这里 $L(D) = D^2 + a_1(x)D + a_2(x)$.

(1) n 个函数线性无关的定义: 若不存在 n 个不全为零的常数 $c_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使得

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0,$$

则称函数 $\{y_i(x)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 是线性无关的.

(2) 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程 (15.4) 的两个线性无关特解, 则它的一般解是

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

这也是其所有解. 其理由是, 因为

$$\begin{aligned} L(D)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) &= c_1 L(D)y_1 + c_2 L(D)y_2 \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

即 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 是 (15.4) 的解, 而解中有两个独立的任意常数, 因而是其一般解.

(3) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是线性齐次方程 (15.4) 的两个线性无关特解, 又 $Y(x)$ 是相应非齐次方程 (15.3) 的一个特解, 则非齐次方程 (15.3) 的一般解为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x).$$

其理由是, 因为

$$\begin{aligned} L(D)y(x) &= c_1 L(D)y_1 + c_2 L(D)y_2 + L(D)Y \\ &= 0 + 0 + f(x) = f(x), \end{aligned}$$

即 $y(x)$ 是 (15.3) 的解, 同时其中又包含两个独立的任意常数.

类似的结论可以推广到 n 阶线性方程, 请读者自行总结.

例如, 方程 $y'' = 0$ 有三个线性无关的特解: $1, x$ 和 x^2 , 因而其一般解是

$$y(x) = a + b x + c x^2.$$

而对方程 $y''' = 1$, 因有特解 $Y(x) = \frac{x^3}{6}$, 所以其一般解为

$$y(x) = a + b x + c x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

例 15 2 1 若方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \neq 0$ 有三个特解: $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, 则函数 $y_1(x) = y_3(x) - y_1(x)$ 及 $y_2(x) = y_3(x) - y_2(x)$ 必然是相应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个特解. 是否 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 就是此齐次方程的一般解呢?

【解】 这就要看 $y_1(x), y_2(x)$ 是否线性无关. 为此, 我们要验证, 若有常数 c_1, c_2 使

$$c_1 (y_3 - y_1) + c_2 (y_3 - y_2) = 0,$$

即 $(c_1 - c_2)y_3 - c_1 y_1 - c_2 y_2 = 0$.

只能有 $c_1 = c_2 = 0$. 这只要 $y_1(x), y_2(x)$ 和 $y_3(x)$ 是线性无关即可.

因此在 y_1, y_2, y_3 线性无关的假设下

$$c_1 (y_3(x) - y_1(x)) + c_2 (y_3(x) - y_2(x))$$

是齐次方程的一般解, 而原非齐次方程的一般解则为

$$c_1 (y_3(x) - y_1(x)) + c_2 (y_3(x) - y_2(x)) + y_3(x). \quad \text{【解毕】}$$

例 15 2 2 若 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 线性无关, 那么函数簇

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

是什么样的二阶微分方程的一般解呢?

【解】 为求相应于该双参数函数簇的微分方程, 通常用求导的方法, 形成方程组, 以消去参数, 由于有两个参数, 因而要用到二阶导数:

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = y'(x),$$

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = y(x), \quad (15.5)$$

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = y(x).$$

通常做法是从上述 3 个方程中的两个, 解出 c_1 和 c_2 , 再代入余下的一个方程, 得到含 $y(x), y'(x)$ 及 $y''(x)$ 的微分方程. 这里由于

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关的, 因而 a 和 c_2 有解.

不过, 若利用齐次线性代数方程有非零解的充要条件来解决该问题, 则会变得简便. 为此将 (15.5) 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y & y_1 & y_2 & -1 & 0 \\ y & y_1 & y_2 & a & 0 \\ y & y_1 & y_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

由于它总有非零解, 则其系数行列式必然总是零, 即

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

所求方程是

$$a_0 y + a_1 y + a_2 y = 0,$$

其中

$$a_0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

这个结果告诉我们, 关于线性方程解的结构理论中的条件与结论是充要的, 即: 二阶线性齐次方程的一般解是 $a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关; 反过来, 若 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关, 则 $a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ 一定是某二阶线性齐次方程之解.

【解毕】

当然, 对于非齐次线性方程亦是如此.

例 15.2.3 若 $y_1(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的特解, 则另一个解可以通过 $y_1(x)$ 求出.

【解】 为此可用“待定函数”的方法, 即令 $y(x) = c(x)y_1(x)$, 这样

$$\begin{array}{l|l}
 q(x) \cdot & y(x) = c(x) y_1(x) \\
 p(x) \cdot & y(x) = c(x) y_1(x) + c(x) y_1(x) \\
 +) \quad 1 \cdot & y(x) = c(x) y_1(x) + 2c(x) y_1(x) + c(x) y_1(x) \\
 \hline
 & 0 = 0 + c(x)(p(x) y_1(x) + 2y_1(x)) + c(x) y_1(x)
 \end{array}$$

即得关于函数 $c(x)$ 的新方程

$$y_1(x) c(x) + (p(x) y_1(x) + 2y_1(x)) c(x) = 0,$$

$$\frac{c(x)}{c(x)} = - \frac{p(x) y_1(x) + 2y_1(x)}{y_1(x)} = - p(x) - 2 \frac{y_1(x)}{y_1(x)},$$

$$\ln(c(x)) = - p(x) dx - \ln y_1^2(x),$$

$$c(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-p(x) dx},$$

$$c(x) = \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-p(x) dx} dx,$$

因而得到原方程的一般解

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \alpha y_1(x) \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-p(x) dx} dx. \quad \text{【解毕】}$$

例 15 2 4 若已知方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个无关解 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$, 则相应的非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的一般解亦可求得.

【解】 为此用“待定函数法”. 令 $Y(x) = \alpha(x) y_1(x) + \alpha(x) y_2(x)$ 及 $\alpha(x) y_1(x) + \alpha(x) y_2(x) = 0$, 则

$q(x)$	$Y(x) = a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x)$
$p(x)$	$Y(x) = a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x) + a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x)$
+) 1	$Y(x) = a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x) + a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x)$

$$f(x) = 0 + 0 + a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x)$$

得到关于 $a(x)$ 及 $e(x)$ 的微分方程

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = 0,$$

$$c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) = f(x).$$

解出

$$c_1(x) = \frac{-y_2 \cdot f}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \quad c_2(x) = \frac{y_1 \cdot f}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

令

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2(x) - y_1(x)y_2(x).$$

由 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的无关性, 保证了 $\Delta(x) \neq 0$, 从而

$$a(x) = - \frac{y_2(x)f(x)}{\Delta(x)} dx, \quad e(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{\Delta(x)} dx.$$

于是, 所求非齐次方程的一个特解为

$$Y(x) = - y_1(x) \cdot \frac{y_2(x)f(x)}{\Delta(x)} dx + y_2(x) \cdot \frac{y_1(x)f(x)}{\Delta(x)} dx.$$

而其一般解为

$$y(x) = a(x)y_1(x) + e(x)y_2(x) + Y(x). \quad \text{【解毕】}$$

根据上述两个例子可见, 对于二阶非齐次方程来说, 其求解问题变成仅须事先找到一个特解, 由此可以推出其一般解. 不过遗憾的是, 就是这一个特解的求出也非易事. 通常可以用观察待定或级

数解的方法来求.

15.3 线性常系数齐次微分方程的求解

n 阶线性常系数齐次方程的求解十分简单, 用的是待定常数方法. 即观察方程特点, 设出带有待定常数的形式解, 进而将微分方程求解变成代数方程求解.

(1) 特征方程

对二阶常系数齐次方程

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (15.6)$$

其解的特点是函数与各阶导数的线性组合为 0, 这注定其函数与各阶导函数是同类型, 可以相互进行合并运算. 显然, 指数函数具有这种性质, 要使其导数的系数有所变化, 则只能是如此的形式: $e^{\lambda x}$, 其中 λ 为待定常数. 在这里我们先观察出解的函数类型, 并带上待定常数. 如果 $e^{\lambda x}$ 是方程 (15.6) 的解, 代入必成恒等式, 即

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0.$$

由于 $e^{\lambda x} \neq 0$, 变成求解代数方程

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (15.7)$$

这就是 (15.6) 的特征方程, 其解 λ_1 和 λ_2 称为特征根.

(2) 对应特征根的特解形式

由于代数方程 (15.7) 的解有三种情况, 它们所对应的解 $e^{\lambda x}$ 也有 3 种形式:

1° $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是实根, 则两解为 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$, 方程 (15.6) 的一般解为 $\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}$.

2° $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 是实重根, 其一解为 $e^{\lambda x}$, 另一解可以用前述的待定函数法来求, 下面用极根方法求形式解.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda x} - e^{\lambda_1 x}}{\lambda - \lambda_1} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{(e^{\lambda x} - e^{\lambda_1 x})'}{(\lambda - \lambda_1)'} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} x e^{\lambda x} = x e^{\lambda_1 x}.$$

这只是说有可能是解,再代入方程可验证,确为其解.因而此时方程的一般解为

$$y(x) = \alpha e^x + \beta x e^x = (\alpha + \beta x)e^x.$$

3° 若方程有共轭复根, $\lambda = \pm i$, 由欧拉公式

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} &= e^{(\pm i)x} = e^x \cdot e^{\pm i x} \\ &= e^x (\cos x \pm i \sin x). \end{aligned}$$

由于讨论的是实系数方程,因而其解的实部与虚部均为原方程的解,这样对应的两个线性无关解为 $e^x \cos x$ 和 $e^x \sin x$.一般解为

$$y(x) = e^x (\alpha \cos x + \beta \sin x).$$

(3) 推广到高阶

对于高阶线性常系数齐次方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

其特征方程为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

其特征根与特解对应情况是:

一个单根 λ , 对应一个特解 $e^{\lambda x}$.

k 重根: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$, 对应 k 个特解: $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$.

单共轭复根: $\lambda = \pm i$, 对应两个特解: $e^x \cos x, e^x \sin x$.

k 重共轭复根: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \pm i$, 对应 $2k$ 个特解:

$$e^x \cos x, x e^x \cos x, \dots, x^{k-1} e^x \cos x;$$

$$e^x \sin x, x e^x \sin x, \dots, x^{k-1} e^x \sin x.$$

例 15.3.1 $y'' + 2y' = 0$ 对应的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0.$$

于是 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$, 故其一般解为 $y(x) = \alpha + \beta e^{-2x}$. **【解毕】**

例 15.3.2 $y'' + 2y' = 0$ 的特征方程为

$$\lambda^2 + 2 = 0.$$

于是 $\lambda = \pm 2i$, 故其一般解为 $y(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$.

【解毕】

例 15.3.3 $y^{(5)} + 2y^{(3)} + y = 0$ 有特征方程

$$\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0.$$

即 $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$, 于是 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm i$.

故其一般解为 $y(x) = a + (b + cx)\cos x + (d + ex)\sin x$. 【解毕】

15.4 线性常系数带非齐次项 $e^x P_n(x)$ 的方程的求解

以二阶为例.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = e^x P_n(x), \quad (15.8)$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式.

解这种方程, 仅需求出非齐次的一个特解. 根据方程特点, 易于观察出非齐特解中必有形如 $Q_m(x)e^x$ 之解, 值得指出的是待定的多项式的次数 m , 不一定有 $m = n$. 今代入 (15.8)

a	$Y(x) = e^x Q_m(x)$
a	$Y(x) = e^x Q_m(x) + e^x Q_m(x)$
$+) 1$	$Y(x) = \lambda^2 e^x Q_m(x) + 2 e^x Q_m(x) + e^x Q(x)$

$$e^x P_n(x) = e^x (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) Q_m(x) + (2 + a_1) Q_m(x) + Q(x)$$

即必须有

$$P_n(x) = (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) Q_m(x) + (2 + a_1) Q_m(x) + Q_m(x).$$

从上式可见, 这里有三种情形:

第一, 若 $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 \neq 0$, 即 λ 不是方程的特征根, 此时 $Q_m(x)$ 的次数应与 $P_n(x)$ 的次数相同, 即有 $m = n$. 设解 $Y(x) =$

$Q_n(x)e^x$.

第二, 若 $2 + a_1 + a = 0$, 即 $\lambda = 2 + a_1 + a$ 是其特征根, 但 $2 + a_1 \neq 0$, 即不是重根, 此时 $Q_m(x)$ 的次数应与 $P_n(x)$ 的次数相同, 即 $m = n + 1$, 设解为

$$Y(x) = xR_n(x)e^x.$$

设成 $Q_{n+1}(x) = xR_n(x)$ 是因为 $Q_{n+1}(x)$ 中的常数项 e^x 已是相应齐次方程的解.

第三, 若 $2 + a_1 + a = 0$, 且 $2 + a_1 = 0$, 即 $\lambda = 2 + a_1 + a$ 是重特征根, 此时 $Q_m(x)$ 应是 n 次多项式, 这样 $m = n + 2$, 因而设解为

$$Y(x) = x^2 R_n(x)e^x.$$

设成 $Q_m(x) = x^2 R_n(x)$ 是因为 e^x 及 xe^x 已是齐次方程的解.

例 15.4.1 解 $y'' - 4y' + 4y = 1 + \sin x + xe^{2x}$.

【解】 这里实际上要解三个方程, 今分别来解.

i) 对 $y'' - 4y' + 4y = 1$, 观察出解为常数, $Y_1 = \frac{1}{4}$.

ii) 对 $y'' - 4y' + 4y = \sin x$.

因为 $\sin x$ 是 e^{ix} ($i = \sqrt{-1}$) 的虚部, 所以 $\lambda = i$ 不是特征根. 本应设成 $Y = Ae^{ix}$ 来解, 这样做要解复数方程, 比较麻烦, 我们可以直接设成如下解的形式:

$$\begin{array}{r|l} 4 & Y_2(x) = A\sin x + B\cos x \\ -4 & Y_2(x) = -B\sin x + A\cos x \\ +) & 1 \quad Y_2(x) = -A\sin x - B\cos x \end{array}$$

$$\sin x = (3A + 4B)\sin x + (3B - 4A)\cos x$$

从而得方程 $\begin{cases} 3A + 4B = 1 \\ 3B - 4A = 0 \end{cases}$, 解出得 $A = \frac{-3}{25}$, $B = \frac{4}{25}$.

进而 $Y_2(x) = \frac{-3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$.

iii) 对 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$

这里 $\lambda = 2$ 是特征方程的重根, $P_1(x) = x$, 则

$$\begin{array}{r|l}
 4 & Y_3(x) = x^2(Cx + D)e^{2x} \\
 -4 & Y_3(x) = x^2(Cx + D)(e^{2x}) + (x^2(Cx + D))e^{2x} \\
 +) & 1 \quad Y_3(x) = x^2(Cx + D)(e^{2x}) + 2(x^2(Cx + D))(e^{2x}) + \\
 & \qquad \qquad \qquad (6Cx + 2D)e^{2x}
 \end{array}$$

$$xe^{2x} = 0 + 0 + (6Cx + 2D)e^{2x}$$

用比较系数的方法, 得到关于 C 和 D 的方程并解这二个方程得

$C = \frac{1}{6}$, $D = 0$, 从而有

$$Y_3(x) = \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

综合起来, 方程的一般解为

$$y(x) = C_1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x.$$

【解毕】

15.5 欧拉方程

这是变系数的线性方程, 以二阶为例, 形如

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x). \quad (15.9)$$

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0. \quad (15.10)$$

先解非齐次方程(15.10), 方程系数特点是, 对未知函数求一次导数, 系数乘上一次 x , 猜测有幂函数形式之解, 因而设解为

$$y(x) = x^r,$$

其中 r 为待定常数, 代入方程(15.10), 得

$$(r(r-1)x + a_1rx + a_2x) = 0,$$

于是得相应的特征方程

$$(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

$$\text{即 } \lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0. \quad (15.11)$$

类似常系数方程的讨论,有三种情形:

第一, λ_1, λ_2 为实根,有两个独立解 x^{λ_1} 和 x^{λ_2} .

第二, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为实重根,有解 x^λ 及 $\ln x \cdot x^\lambda$; 后一个解可形式地由

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \frac{x^\lambda - x^{\lambda_1}}{\lambda - \lambda_1} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} x^\lambda \ln x = \ln x \cdot x^{\lambda_1}$$

推出,而后再验证.

第三, $\lambda = \pm i$ 因

$$x^{\pm i} = e^{(\pm i) \ln x} = e^{\ln x} (\cos(\ln x) \pm i \sin(\ln x)),$$

因而有二个独立解: $e^{\ln x} \cos(\ln x)$, $e^{\ln x} \sin(\ln x)$.

从以上讨论可知,对欧拉方程,在对自变量作变换 $t = \ln x$ (即 $x = e^t$) 之下,方程(15.10)可以化成关于 t 的常系数线性方程,因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'(t) \cdot \frac{1}{x}, \quad \text{即 } x \frac{dy}{dx} = y'(t),$$

$$\frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} = y'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = y''(t) \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{即 } x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = y''(t) - x \frac{dy}{dx} = y''(t) - y'(t).$$

代入(15.10),得

$$y''(t) + (a_1 - 1)y'(t) + a_0 y(t) = 0. \quad (15.12)$$

这是相应的常系数方程,其特征方程正是(15.11).用这种方法来解它的非齐次方程(15.9)是比较合宜的,不过相应的非齐次项是

$$P_n(t)e^t = P_n(\ln x) \cdot e^{\ln x},$$

才方便些,即

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = P_n(\ln x) \cdot e^{\ln x},$$

这里 $P_n(\ln x)$ 是关于 $\ln x$ 的 n 次多项式.

例 15.5.1 求 $x^2 y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0$ 的一般解.

【解】 令 $y = x^\lambda$, 得特征方程为

$$(\lambda - 1) + \frac{5}{2}\lambda - 1 = 0,$$

于是 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -2$. 因此得到其一般解为

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-2}.$$

【解毕】

例 15.5.2 求 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ 的一般解.

【解】 令 $y = x^\lambda$, 得特征方程为

$$(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0,$$

故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 因此有一般解

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x.$$

【解毕】

例 15.5.3 求 $x^2 y'' + xy' + y = 0$ 的一般解.

【解】 令 $y = x^\lambda$, 得特征方程为

$$(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0,$$

故 $\lambda_{1,2} = \pm i$, 因此有一般解

$$y(x) = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x.$$

【解毕】

15.6 差分方程简介

差分方程是一种含数 y_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的递推关系的方程, 这里只讨论常系数线性一阶差分方程

$$y_{k+1} + ay_k = f(k) \quad (15.13)$$

及条件 $y_0 = \dots$.

和二阶差分方程

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = f(k) \quad (15.14)$$

及条件 $y_0 = \quad$, $y_1 = \quad$. 当 $f(k) = 0$ 时, 相应地称为齐次线性差分方程.

满足上述方程的任何数列 $y_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 称为差分方程的解.

(1) 差分方程的递推求解

对一阶差分方程(15.13), 可改写成递推形式

$$y_{k+1} = -a y_k + f(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= -a(-a y_{k-1} + f(k-1)) + f(k) = a^2 y_{k-1} + f(k) - a f(k) \\ &= -a^3 y_{k-2} + f(k) + a f(k-1) + a^2 f(k-2) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$y_{k+1} = (-a)^{k+1} y_0 + \sum_{l=0}^k (-a)^l f(k-l) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

对二阶差分方程, 用上述递推的解法, 在一般情形下比较复杂, 很难看到一般的规律. 这时我们必须另寻途径.

(2) 线性齐次差分方程的特征根法

这里以二阶方程

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \quad (15.15)$$

为例. 与二阶线性齐次微分方程类似, 其解的结构是: 若二阶线性齐次差分方程(15.15)有二个不成比例的解 y_k 和 $z_k (k = 0, 1, 2, \dots)$, 则它们的线性组合 $A y_k + B z_k$ 也是其解, 而且当 A, B 为任意常数时

$$w_k = A y_k + B z_k$$

是所有满足(15.15)之解.

这样一来, 我们仅需找出两个不成比例的解. 为此可用观察待定常数法, 令解

$$y_k = \lambda^k,$$

代入方程(15.15), 得

$$k^{k+2} + a_1 k^{k+1} + a_2 k^k = 0.$$

因 $k \neq 0$, 得特征方程

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

其根称为特征根.

这里又有三种情况:

第一, 当特征根为不等实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 其所有解可表成

$$A k^{\lambda_1} + B k^{\lambda_2}$$

第二, 当特征根为重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 时, 则两个不成比例的解是

k^λ 及 $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{k^{\lambda+1} - k^{\lambda}}{\lambda+1 - \lambda} = k \ln k$, 其所有解可表为

$$(A + B \ln k) k^\lambda.$$

第三, 当特征根 $\lambda = \pm i$ 时, 由于

$$k^{\pm i} = e^{(\pm i) \ln k} = e^{\ln k} (\sin(\ln k) + \cos(\ln k)).$$

因而有两个解 $k^\lambda (A \sin(\ln k) + B \cos(\ln k))$.

以上的任意常数可以根据给的条件 $y_0 = a$ 和 $y_1 = b$ 来确定, 从而得到一个确定的特解.

例 15.6.1 求解 $y_{k+2} - y_{k+1} - y_k = 0$.

【解】 其递推形式 $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$ 可生成著名的斐波那契数列, 只要令 $y_0 = y_1 = 1$ 即可. 为解此方程设解 $y_k = k^\lambda$, 代入得特征方程

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

从而, 其所有解可表成

$$y_k = A \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^k + B \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^k.$$

用 $y_0 = 1, y_1 = 1$ 代入得

$$1 = A + B,$$

$$1 = A \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{解出 } A = \frac{1}{5} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad B = -\frac{1}{5} \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

由此可知,斐波那契数列的通式是

$$y_{k+1} = \frac{1}{5} \frac{1+\sqrt{5}}{2}^{k+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

从上式可以看出 y_{k+1} 总是正整数,而且当 $k \rightarrow +\infty$ 时 y_k 有极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{y_k}{y_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^k}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}^{k+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}^{k+1}} = \frac{5-1}{2} = 0.618\dots$$

在优选法中的“0.618法”的最优性证明就要用到这个结果.

【解毕】

例 15.6.2 某试验性生产线每年 1 月进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新非熟练工补齐,新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分

$$\text{别为 } x_n \text{ 和 } y_n, \text{ 记成向量 } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ 当 } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ 时, 求 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = ?$$

(2000 年考研题)

【解】 此题来自数四考题,原本是考矩阵的特征值及其运算,但也可以用差分方程求解.

首先依题意列出递推的差分方程

$$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}x_n + y_n = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}x_n + y_n = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n.$$

在上述方程中消去变量 y_n , 得

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{9}{10}x_{n+1} + \frac{2}{5}y_{n+1} \\ &= \frac{9}{10}x_{n+1} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \\ &= \frac{9}{10}x_{n+1} + \frac{2}{50}x_n + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{2}x_{n+1} - \frac{9}{4}x_n \\ &= \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n. \end{aligned}$$

整理成

$$\begin{aligned} 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n &= 0, \\ x_1 &= \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{9}{10}x_1 + \frac{2}{5}y_1 = \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

该方程特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

特征根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, 其所有解为

$$x_{n+1} = A + B \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

利用初始条件定 A 和 B , 为此解方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= A + B, \\ \frac{13}{20} &= A + \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

解得, $A = \frac{8}{10}$, $B = \frac{-3}{10}$. 从而有

$$x_{n+1} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} \frac{1}{2}^n,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{10} x_n + \frac{3}{5} \frac{5}{2} x_{n+1} - \frac{9}{4} x_n = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \frac{1}{2}^n.$$

【解毕】

15.7 综合题

综例 15.7.1 函数簇 $y = a + c \tan x + \frac{x}{\cos x}$ 是什么微分方程的通解, 其中 a, c 为任意常数.

【解】 (方法 1) 用消去参数法求方程

$$a + c \tan x + \frac{x}{\cos x} - y = 0,$$

$$0 + c(\tan x) + \frac{x}{\cos x} - y = 0,$$

$$0 + c(\tan x) + \frac{x}{\cos x} - y = 0.$$

由关于 $(a, c, 1)$ 的系数行列式为 0, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & \tan x & \frac{x}{\cos x} - y \\ 0 & (\tan x) & \frac{x}{\cos x} - y \\ 0 & (\tan x) & \frac{x}{\cos x} - y \end{vmatrix} = 0,$$

即有

$$\begin{vmatrix} (\tan x) & \frac{x}{\cos x} \\ (\tan x) & \frac{x}{\cos x} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\tan x) & y \\ (\tan x) & y \end{vmatrix} = 0.$$

将行列式展开, 即得所求的二阶线性非齐次方程, 因以下有简便方

法, 此处就不继续计算了.

(方法 2) 由于函数簇可以写成

$$\cos x \cdot y(x) = a \cos x + c \sin x + x.$$

若令 $u(x) = \cos x \cdot y(x)$, 则函数簇

$$u(x) = a \cos x + c \sin x + x$$

是一个二阶常系数非齐次方程的一般解, 此方程的相应齐次方程的特征根为 $\pm i$, 特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 从而对应之二阶线性常系数齐次方程为

$$u'' + u = 0.$$

而非齐次项则由 $u = x$ 代入得

$$f(x) = u'' + u = 0 + x = x.$$

因为关于 $u(x)$ 的方程是 $u'' + u = x$, 再将

$$u(x) = \cos x \cdot y(x)$$

代入得关于 $y(x)$ 的方程是

$$(\cos x \cdot y(x))'' + \cos x \cdot y(x) = x,$$

即有

$$\cos x \cdot y'' - 2\sin x \cdot y' = x.$$

【解毕】

综例 15.7.2 设 $y = y(x)$ 满足条件

$$y'' + 2y' + 4y = 0,$$

$$y(0) = y'(0) = 2.$$

试证 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} y^2(x) dx$ 收敛, 并求其值.

【证】 首先特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0.$$

其特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm 3i.$$

因而一般解为

$$y(x) = e^{-x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x).$$

由于 $|y(x)| = (|\alpha| + |\beta|)e^{-x}$, 可见

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx \quad \text{与} \quad \int_0^{+\infty} y^2(x) dx$$

收敛.

下面求其值, 若先求出特解再积分, 那会是很繁杂的. 下面利用方程与初始条件直接来计算积分, 只是要利用到显然的结果:

$$y(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0,$$

$$y'(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0.$$

由于 $y' = \frac{-1}{4}(y' + 2y)$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y(x) dx &= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{4}(y' + 2y) dx = -\frac{1}{4}(y(x) + 2y(x)) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{4}(2 + 4) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

由 $y(y' + 2y + 4y) = 0$, 得

$$\int_0^{+\infty} yy' dx + 2 \int_0^{+\infty} yy dx + 4 \int_0^{+\infty} y^2 dx = 0.$$

$$\text{即有 } yy' \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} y^2 dx + 2 \frac{1}{2} y^2(x) \Big|_0^{+\infty} + 4 \int_0^{+\infty} y^2 dx = 0,$$

$$\text{整理得} \quad 4 \int_0^{+\infty} y^2 dx - \int_0^{+\infty} y^2 dx = +8.$$

再由 $y(y' + 2y + 4y) = 0$, 得

$$\int_0^{+\infty} yy' dx + 2 \int_0^{+\infty} y^2 dx + 4 \int_0^{+\infty} yy dx = 0,$$

$$\text{整理得} \quad \int_0^{+\infty} y^2 dx = 5.$$

将后式代入前式, 得

$$\int_0^{+\infty} y^2 dx = \frac{13}{4}.$$

【证毕】

综例 15.7.3 试问方程 $(x^2 - 1)y + ay = 0$ 中 a 为何值时, 方程有多项式函数的解, 并求出其一般解.

【解】 若方程有多项式解

$$y = Ax^n + \text{低次项}.$$

这里首先是要确定次数 n , 先代入方程看左端是否能成为多项式

$$(x^2 - 1)(n(n-1)Ax^{n-2} + \dots) + a(Ax^n + \dots) = 0,$$

考查最高次项的系数得

$$n(n-1)A + aA = 0.$$

因为 $A \neq 0$, 故必有 $a = -n(n-1)$. 可见只要 a 满足此条件, 方程有 n 次的多项式解.

为具体起见, 设 $a = -2(2-1) = -2$, 此时应有二次多项式之解, 设解为 $y = x^2 + px + q$, 代入方程得

$$(x^2 - 1)y - 2y = (x^2 - 1) \cdot 2 - 2(x^2 + px + q) = 0$$

比较系数得 $p = 0$, $q = -1$. 即方程

$$(x^2 - 1)y - 2y = 0$$

有一特解 $y_1 = x^2 - 1$. 事实上, 此解亦可观察得到.

今利用待定函数法求一般解

$$\begin{array}{l|l} -2 & y_2(x) = c(x)(x^2 - 1) \\ (x^2 - 1) & y_2(x) = c(x)(x^2 - 1) + 2c(x)(x^2 - 1) + c(x)(x^2 - 1) \\ \hline & 0 = 0 + (x^2 - 1)2c(x)(x^2 - 1) + (x^2 - 1)c(x)(x^2 - 1) \end{array}$$

即有方程:

$$\frac{c(x)}{c(x)} = -2 \frac{(x^2 - 1)}{x^2 - 1},$$

$$c(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2},$$

$$c(x) = \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}.$$

从而方程的一般解为

$$y(x) = a(x^2 - 1) + a(x^2 - 1) \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}. \quad \text{【解毕】}$$

综例 15.7.4 求 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 的通解. (1990 年考研题)

【解】 齐次方程有通解

$$(a + ax)e^{-2x}.$$

而非齐次方程的特解需要讨论 a 的取值.

当 $a \neq -2$ 时, 设解为 $Y = Ae^{ax}$ 代入方程, 得

$$A(a^2 + 4a + 4) = 1,$$

即

$$A = \frac{1}{(a+2)^2}.$$

当 $a = -2$ 时, 设解为 $Y = Ax^2 e^{-2x}$, 则

4	$Y = Ax^2 e^{-2x}$	
4	$Y = Ax^2 (e^{-2x}) + (Ax^2) e^{-2x}$	
+) 1	$Y = Ax^2 (e^{-2x}) + 2(Ax^2) (e^{-2x}) + 2Ae^{-2x}$	
	$e^{-2x} = 0$	$+ 0$
		$+ 2Ae^{-2x}$

故得 $A = \frac{1}{2}$. 最后得解

$$y(x) = \begin{cases} (a + ax)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2} e^{ax}, & a \neq -2, \\ a + ax + \frac{x^2}{2} e^{-2x}, & a = -2. \end{cases} \quad \text{【解毕】}$$

综例 15.7.5 先求齐次微分方程

$$(1 - x^2)y' + 2xy - 2y = 0$$

的多项式解, 而后求非齐次方程

$$(1 - x^2)y' + 2xy - 2y = -(1 - x^2)^2$$

的通解.

【解】 先求齐次方程的多项式解, 设

$$y = x^n + \text{低次项},$$

这里只定多项式的次数, 代入方程得

$$(1 - x^2)(n(n-1)x^{n-2} + \dots) + 2x(nx^{n-1} + \dots) - 2(x^n + \dots) = 0,$$

得最高次系数为

$$n^2 - 3n + 2 = 0.$$

可见, 此时多项式解的次数只可能是 $n=1$ 或 2 .

显然可以观察出, 该方程有 $y_1 = x$ 之解, 而另一解设为 $y_2 = x^2 + Bx + C$, 代入方程得

$$\begin{array}{r} -2y_2 = -2x^2 - 2Bx - 2C \\ 2xy_2 = 4x^2 + 2Bx \\ +) (1-x^2)y_2 = -2x^2 \qquad +2 \\ \hline 0 = 0 + 0 - 2C + 2 \end{array}$$

解得 $C=1$, B 任意. 因此有齐次方程的一般解

$$y = a(x^2 + 1) + cx.$$

再利用这个结果求非齐次方程之解, 为此设

$$Y(x) = a(x)x + c(x)(1+x^2), \quad c_1(x)x + c_2(x)(1+x^2) = 0.$$

则有

$$\begin{array}{l|l} -2 & Y(x) = a(x)x + c(x)(1+x^2) \\ 2x & Y(x) = a(x) \cdot 1 + c(x)(1+x^2) \\ +) 1-x^2 & Y(x) = a(x) \cdot 0 + c(x)(1+x^2) + a(x) + c(x) \cdot 2x \\ \hline & -(1-x^2)^2 = 0 + 0 + [a(x) + c(x) \cdot 2x](1-x^2) \end{array}$$

得方程组

$$\begin{aligned} xc_1(x) + (1+x^2)c_2(x) &= 0, \\ c_1(x) + 2xc_2(x) &= -(1-x^2). \end{aligned}$$

解得 $c_1(x) = -(1 + x^2)$, $c_2(x) = x$.

于是 $\alpha(x) = -(x + \frac{1}{3}x^3)$, $\alpha(x) = \frac{1}{2}x^2$.

$$Y(x) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

最后, 非齐次方程的一般解为

$$y(x) = \alpha(x^2 + 1) + \alpha x + \frac{x^2}{6}(x^2 - 3). \quad \text{【解毕】}$$

综例 15.7.6 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 使得曲线积分 $\int_C (xe^{2x} - 6f(x)) \sin y dx - (5f(x) - f'(x)) \cos y dy$ 与路径无关, 试求 $f(x) = ?$

【解】 这是一道利用曲线积分与路径无关的判定条件(称为可积性条件), 导出关于 $f(x)$ 的微分方程, 而后利用微分方程求解得出 $f(x)$ 的综合题.

首先, 利用可积性条件 $\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}$, 即

$$\frac{-5f(x) - f'(x) \cos y}{x} = \frac{xe^{2x} - 6f(x) \sin y}{y}$$

推出方程, 再加上初值条件, 得

$$\begin{aligned} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) &= xe^{2x}, \\ f(0) = 0, f'(0) &= 1. \end{aligned}$$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程的初值问题, 特征根是 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, 由于非齐次项 xe^{2x} 中, $\lambda = 2$ 是特征根, 因此可设解为

6	$Y = x(Ax + B)e^{2x}$
- 5	$Y = x(Ax + B)(e^{2x}) + (2Ax + B)e^{2x}$
+) 1	$Y = x(Ax + B)(e^{2x}) + 2(2Ax + B) \cdot 2e^{2x} + 2Ae^{2x}$
	$x = 0 - (2Ax + B) + 2A$

解上述方程得 $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$. 因此, 一般解为

$$f(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2} x(x+2)e^{2x}.$$

再利用初始条件 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 定出常数

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2.$$

最后可得

$$f(x) = -2e^{2x} + 2e^{3x} - \frac{x}{2}(x+2)e^{2x}. \quad \text{【解毕】}$$

综例 15.7.7 已知 $x'' + 2x' + 2x = f(t)$, 且 $x(0) = x'(0) = 0$, $t \in [0, +\infty)$, $|f(t)| < M$, 证明:

$$(1) \quad x(t) = \int_0^t f(t-u) e^{-t} \sin u \, du;$$

$$(2) \quad |x(t)| \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}}, \quad t \in [0, +\infty).$$

【证】 (1) 有两种证法, 第一种是用解的概念, 直接将 $x(t)$ 代入方程进行验证. 为此, 将积分利用 $u = t - \quad$ 进行变换, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(u) e^{-(t-u)} \sin(t-u) \, du \\ &= \int_0^t f(u) e^{-t} \cdot e^u (\sin t \cdot \cos u - \cos t \cdot \sin u) \, du \\ &= e^{-t} \sin t \int_0^t f(u) e^u \cos u \, du - e^{-t} \cos t \int_0^t f(u) e^u \sin u \, du. \end{aligned}$$

这样可以利用对变上限定积分的导数, 验证 $x(t)$ 确为其解.

第二个证法, 即利用待定函数法由齐次一般解来求非齐次特解.

令 $X(t) = c_1(t) e^{-t} \sin t + c_2(t) e^{-t} \cos t$ 以及

$$c_1(t) e^{-t} \sin t + c_2(t) e^{-t} \cos t = 0 \quad (*)$$

代入方程得 $c_1(t)(e^{-t} \sin t)' + c_2(t)(e^{-t} \cos t)' = f(t)$, $(**)$

利用(*), 化简(**)得

$$c_1(t)e^{-t}\cos t - c_2(t)e^{-t}\sin t = f(t), \quad (***)$$

(*)与(***)联立, 解得

$$c_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-t}\cos t \\ f(t) & -e^{-t}\sin t \end{vmatrix}}{-e^{-2t}} = f(t)e^t\cos t,$$

$$c_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t}\sin t & 0 \\ e^{-t}\cos t & f(t) \end{vmatrix}}{-e^{-2t}} = -f(t)e^t\sin t.$$

从而有

$$\alpha(t) = \int_0^t f(u)e^u \cos u du,$$

$$\alpha(t) = - \int_0^t f(u)e^u \sin u du.$$

于是

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-t}\sin t \int_0^t f(u)e^u \cos u du - e^{-t}\cos t \int_0^t f(u)e^u \sin u du \\ &= \int_0^t f(u)e^{u-t} \sin(u-t) du \\ &= \int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau} \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

由此得非齐次一般解为

$$x(t) = \alpha e^{-t}\sin t + \alpha e^{-t}\cos t + X(t),$$

利用初始条件 $x(0) = x'(0) = 0$, 可以方便地确定

$$\alpha = \alpha = 0.$$

因而满足方程及初始条件之解为

$$x(t) = \int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau} \sin \tau d\tau.$$

(2) 对于解 $x(t)$ 的估计, 比较粗略的是

$$|x(t)| \leq \int_0^t |f(t-\tau)| e^{-\tau} |\sin \tau| d\tau$$

$$\begin{aligned} & M \int_0^t e^{-t} dt \\ & = M(1 - e^{-t}). \end{aligned}$$

要做到题设的估计, 则必须更细致一些, 这主要是必须考虑 $\sin x$ 的变化, 为此, 作如此不等式放大:

$$\begin{aligned} |x(t)| & \leq \int_0^t |f(t-u)| e^{-t+u} |\sin u| du \leq M \int_0^t e^{-t+u} |\sin u| du \\ & = M \int_{k=0}^{(k+1)} e^{-t+u} |\sin u| du \quad (\text{做变换 } u = t - k) \\ & = M \int_0^1 e^{-t+k} \sin u du \\ & = M e^{-k} \int_0^1 e^{-u} \sin u du \\ & = \frac{M(1 + e^{-1})}{2} e^{-k} \\ & = \frac{M}{2} \cdot \frac{1 + e^{-1}}{1 - e^{-1}} < 0.5452 M. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 这里用的方法是注意到 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是同号的, 而且 $e^{-u} \sin u$ 在 $[0, \pi]$ 上的积分可以求出. 这种技巧的思想常用, 其考虑在于, 适当将不等式的估计放大一些, 而放大后的积分可以求出. 这里的关键在“适当”两字, 本题解法的两种估计用的是同一思想, 只是“适当”两字用的程度不同, 其结果的精细程度也就不同了.

综例 15.7.8 设有级数 $y = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- (i) 求收敛域;
- (ii) 证明满足微分方程 $y'' - y = -1$;
- (iii) 求其和函数. (1988 年考研题)

【解】 本题是级数和微分方程的综合题. 因为出题的方式已告诉

人们做题的步骤,因此这题并不是难题.

(1) 利用达朗贝尔法则求收敛域, 即由

$$|D_n| = \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!} \bigg/ \frac{|x^{2n}|}{(2n)!} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \quad 0$$

可知其收敛为 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 由于这是幂级数, 在其收敛区间内总可逐项求导, 从而可直接代入方程:

$$\begin{aligned} y'' - y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} - 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = -1. \end{aligned}$$

(3) 所求和函数正是初值问题

$$\begin{aligned} y'' - y &= -1, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

之解. 易求此方程的一般解为

$$y(x) = a e^x + c e^{-x} + 1,$$

代入初值求 a, c , 有方程

$$\begin{aligned} a + c &= 1, \\ a - c &= 0. \end{aligned}$$

解之得 $a = c = \frac{1}{2}$, 由此得到和函数是

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1 = \operatorname{sh} x + 1. \quad \text{【解毕】}$$

综例 15.7.9 设函数序列 $y_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 满足

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} + y_n(x) &= 0, \quad x \in [a, b], \\ y_n(a) &= y_n(b) = 0. \end{aligned}$$

其中 n 为常数, 且当 $n < m$ 时 $\int_a^b y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0$. 证明: " $n < m$, 有

$$\int_a^b y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0 .$$

【证】 (1) 先由方程将 $y_n(x)$ 表示出来, 得

$$n y_n(x) = - \frac{d}{dx} p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} ,$$

再做所求之积分

$$\begin{aligned} \int_a^b y_m(x) y_n(x) dx &= - \int_a^b y_m(x) \frac{d}{dx} p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} dx \\ &= - \int_a^b y_m(x) d p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} \\ &= - y_m(x) p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} \Big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b p(x) \frac{dy_n(x)}{dx} \cdot \frac{dy_m(x)}{dx} dx \\ &= \int_a^b p(x) y_n(x) \cdot y_m(x) dx . \end{aligned}$$

由对称性同样可得

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) dx = \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx .$$

(2) 以上两式相减, 得

$$(n - m) \int_a^b y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0 .$$

因为 $n < m$, 所以有

$$n < m, \quad \int_a^b y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0 . \quad \text{【证毕】}$$

在这里以及前面许多题目对微分方程有一个重要的理解, 即微分方程也是函数的一种表达形式, 它给出的是该函数及其导数间满足的某种关系, 因此, 我们可以利用这种关系来研究与确定函数的许多性质, 如单调性等; 也可以利用它来进行计算, 如求积分, 求导数, 甚至展开函数的泰勒级数等等.

综例 15.7.10 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, $f(0) = 1$ 且满足

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt.$$

(i) 求导数 $f'(x) = ?$

(ii) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^{-x} f(x) < 1$. (2000 年考研题)

【解】 这里就是用微分-积分方程来表示函数, 由此要求研究一些函数的性质. 遇到这种方程, 通常先化成微分方程. 为此将方程变成

$$(x+1)(f'(x) + f(x)) = \int_0^x f(t) dt,$$

两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} (x+1)f'(x) + (x+2)f(x) &= 0, \\ f(0) &= 1, \quad f'(0) = -1. \end{aligned} \quad (*)$$

后面的初始条件是由微分-积分方程将 $x=0$ 代入而得到的

$$f(0) + f(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

方程(*)既可看作高阶可降阶方程, 也可直接求解

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x+2}{x+1} = -\frac{x+1+1}{x+1} = -1 - \frac{1}{x+1},$$

$$(\ln |f(x)|)' = -1 - \frac{1}{x+1}.$$

因为 $f(0) = 1$, 故

$$\ln |f(x)| \Big|_0^x = -\int_0^x \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = -x - \ln(x+1),$$

$$|f(x)| = \frac{e^{-x}}{x+1},$$

$$f(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

(ii) 这一问要根据前一问所求导数的结果 $f(x) = -\frac{e^{-x}}{1+x}$ 来

估计 $f(x)$ 的范围. 只要对不等式积分即可. 因为 $f(0) = 1$, 又当 $x > 0$ 时

$$0 < f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+x} < -e^{-x},$$

两边积分得

$$0 < f(x) - f(0) < \int_0^x -e^{-x} dx,$$

即

$$1 < f(x) < 1 + (e^{-x} - 1) = e^{-x}. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 遇到 $\int_{x_0}^x \frac{g(x)}{g(x)} dx$ 时, 由于 $g(x_0)$ 是非零的具体数, 这样

$\ln |g(x)|$ 中的 $|g(x)|$ 必须确定正负号: 如果 $g(x_0) > 0$, 则取正号, 写成 $\ln g(x)$; 如果 $g(x_0) < 0$, 则取负号, 写成 $\ln(-g(x))$. 这是因为微分方程的一个特解必须是连续的, 而 $\ln |g(x)|$ 在 $g(x) = 0$ 处间断, 因此只能取其中一部分定义域所对应的函数.

综例 15.7.11 求微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$

的解.

【解】 对微分方程组的问题, 通常解法之一是利用求导消元法, 只留一个未知函数, 而消去其他未知函数. 对于本题来说, 可保留 $x(t)$. 为此将第一式对 t 求导

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt}$$

在第一个式中解出 $y = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} - x \right)$, 将第二个式中的 $\frac{dy}{dt}$ 及上面解出的 y 代入前一式得

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dx}{dt} + 2(4x + 3y) \\ &= \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 4x + \frac{3}{2} \frac{dx}{dt} - x.\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} - 5x &= 0, \\ y &= \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} - x.\end{aligned}$$

很容易求出

$$\begin{aligned}x(t) &= a e^{5t} + a e^{-t}, \\ y(t) &= 2a e^{5t} - a e^{-t}.\end{aligned}$$

【解毕】

第 16 章 微分方程的应用

16.1 引言

用微分方程来刻画许多自然科学、经济科学甚至社会科学领域中的一些规律,这是微分方程应用的重要领域,也是其发展的原动力.但这些方面的应用都伴随着有关领域的专业知识.因此在数学中研究这方面问题的着重点在于这种应用的基本方法和步骤,所涉及的范围一般有物理、力学和几何问题,也有少数简单的经济或社会等其他方面的问题.

微分方程解决实际问题主要有三个步骤:首先是列微分方程和确定定解条件;其二是解微分方程,求所需之解;最后是对所求解进行分析,是否与实际问题需要相符.从应用的角度来讲,列方程、定条件是关键,但一般来说多数超出数学内容范围;从数学上讲,重点在解方程.而第三步往往为人忽略,但在实际应用中确是十分重要的,一个真实的实际问题,往往要通过这一步再来反复修改所列方程及条件,直至达到需要为止.

从数学方法的角度看,列方程主要有两种基本方法.

第一个我们称之为“规律翻译法”,也就是把物理、力学等已有规律或原理,明确的几何关系等用数学的符号与相关概念将其“翻译”成微分方程.

第二个方法我们称之为“微量平衡分析法”,从数学上看即找未知函数微分的关系.这种方法在工程与其他学科中运用很多,特点是形象,实际意义明确.

16.2 微分方程在几何方面的应用

在几何上的应用主要是利用曲线 $y = y(x)$ 的切线斜率 $y'(x)$, 法线斜率 $-\frac{1}{y'(x)}$, 曲率 $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$, 曲边梯形面积 $\int_a^x f(x) dx$, 弧微分三角形关系 $dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 等等来描述一些所求曲线或图形的几何特性.

例 16.2.1 一曲线簇由微分方程

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

所确定, 求另一簇曲线, 它与前簇曲线在相交处均相互垂直, 即在交点处切线相互正交.

【解】 由方程解出此簇曲线在 (x, y) 点的切线斜率为 $y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}$. 由题设可知, 所求曲线簇在 (x, y) 点的斜率应是

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

这就是所求曲线簇的微分方程.

下面来解方程, 显然, 这是一个零齐方程, 属于一阶可积类型. 因此可以令 $u = \frac{y}{x}$ 来解. 但比较简单的方法还是用凑微分的解法,

先将方程改写成微分形式

$$(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0,$$

$$x^2 dy - ydx^2 - y^2 dy = 0,$$

$$\frac{x^2 dy - ydx^2}{y^2} - dy = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2}{y} - y\right) = 0.$$

即有

$$\frac{x^2}{y} + y = 2c,$$

$$x^2 + y^2 = 2cy.$$

这是一簇通过原点, 圆心在 $(0, c)$ 的圆.

最后分析一下结果的正确性, 从题给的方程 $y = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}$ 可以类似求出, 这也是一簇圆, 其方程为 $x^2 + y^2 = 2ax$, 它们是通过原点, 圆心在 $(a, 0)$ 的圆, 显然这两簇圆在交点处其切线是相互垂直的. 【解毕】

例 16.2.2 求通过 $(0, 1/k)$ 的曲线方程, 使其在区间 $[0, x]$ ($x > 0$) 上对应的曲边梯形面积与在此曲线的弧长成正比, 比例系数为 $1/k > 0$ 用 $\frac{1}{k}$ 是为使解题时书写简便些.

【解】 设曲线为 $y = y(x)$, 再把题设条件“翻译”成微分关系, 即得所求的微分方程

$$k \int_0^x y(x) dx = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

$$y(0) = 1/k.$$

即为 $k \int_0^x y(x) dx = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$
 $y(0) = 1/k.$

为解方程, 将 y 解出来得

$$y = \pm \sqrt{k^2 y^2 - 1},$$

$$y(0) = 1/k.$$

由于正负号对解无原则影响, 今先取正号来考虑其解. 这样一来有

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = dx,$$

$$\int_{1/k}^y \frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = \int_0^x dx,$$

$$\frac{1}{k} \ln(ky + k^2 y^2 - 1) = x.$$

下面将上式加以化简. 由于

$$\ln(ky + k^2 y^2 - 1) = kx,$$

则有

$$-\ln(ky - k^2 y^2 - 1) = \ln(ky + k^2 y^2 - 1) = kx,$$

从而

$$ky + k^2 y^2 - 1 = e^{kx},$$

$$ky - k^2 y^2 - 1 = e^{-kx}.$$

两式相加得

$$y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} = \frac{1}{k} \operatorname{ch}(kx). \quad \text{【解毕】}$$

【注】 此处用到的消去化简技巧是一种常用于对数函数化简的方法.

例 16.2.3 求一曲线过 $(1, 0)$ 点, 使它在每点处的切线与矢径(即从原点到该点的向量)成常角.

【解】 先根据题意列方程, 设曲线为 $y = y(x)$, 显然从图 16.1 所示可知有以下关系

$$\alpha = \theta + \beta,$$

又有

$$\tan \alpha = y', \quad \tan \beta = \frac{y}{x}.$$

从而根据

$$\tan \alpha = \tan(\theta + \beta) = \frac{\tan \theta + \tan \beta}{1 - \tan \theta \cdot \tan \beta}$$

求得微分方程

$$y' = \frac{y + kx}{x - ky},$$

$$y(1) = 0.$$

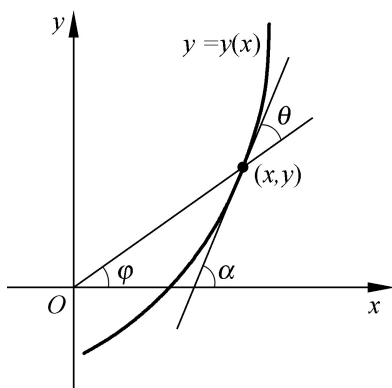


图 16.1

其中 $k = \tan \alpha$.

这是一个零齐次方程. 设 $u = \frac{y}{x}$, 可以将问题变成

$$\frac{1 - ku}{1 + u^2} du = \frac{k}{x} dx,$$

$$u(1) = 0 .$$

两边积分得

$$\int_0^u \frac{1 - ku}{1 + u^2} du = \int_1^x \frac{k}{x} dx,$$

$$\arctan u - \frac{k}{2} \ln(1 + u^2) \Big|_0^u = k \ln x \Big|_1^x .$$

代入 $u = \frac{y}{x}$, 并化简得

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{1}{k} \arctan \frac{y}{x}} .$$

对此微分方程亦可以利用积分因子来求解, 为此将方程写成微分形式

$$(x - ky) dy - (y + kx) dx = 0,$$

$$x dy - y dx - \frac{k}{2} d(x^2 + y^2) = 0,$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} - \frac{k}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\arctan \frac{y}{x} = \frac{k}{2} \ln(x^2 + y^2) + c.$$

代入初始条件 $y(1) = 0$ 得

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{1}{k} \arctan \frac{y}{x}}.$$

这个结果的极坐标形式很简单, 为

$$= e^{\frac{1}{k}}.$$

这就启发我们用极坐标系来列方程.

从极坐标系下微分三角形的关系(见图 16.2)可知

$$\tan \theta = \frac{d\rho}{\rho d\varphi} = k.$$

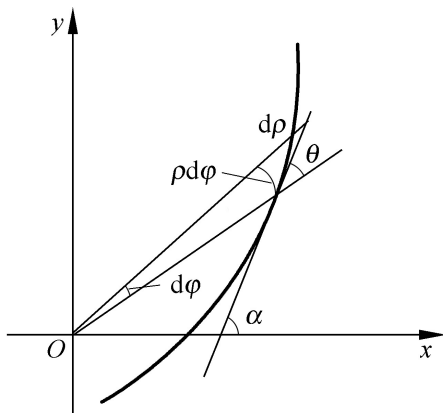


图 16.2

这就得到题设曲线在极坐标下的方程

$$\frac{d\rho}{\rho} = k d\varphi,$$

$$\ln \rho = k\varphi + c.$$

很容易地解出 $\rho = e^{\frac{1}{k} \varphi}$.

该曲线称为对数螺线, 在铣刀中得到应用.

【解毕】

例 16.2.4 求曲线 $y = y(x)$, 使其上每一点的法线是过此点之平行 x 轴的直线与过此点矢径交角之角平分线.

【解】 首先依题意列方程. 如图 16.3 所示有: 2 是过 P 点水平

线与矢径之交角；是过 P 点曲线法线与 x 轴之交角；为矢径与 x 轴之交角。

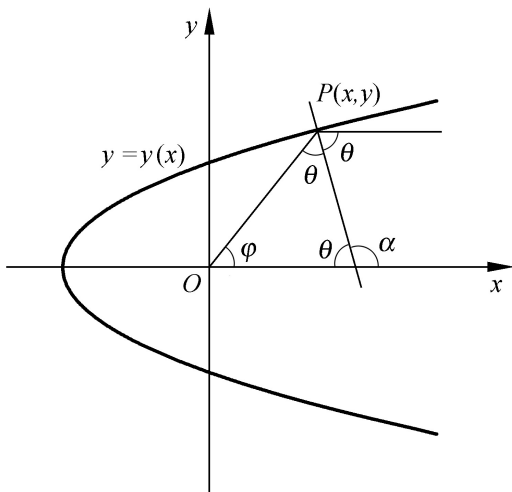


图 16.3

显然有

$$= + ,$$

$$= - .$$

消去 得 $2 = + , = \frac{1}{2} + / 2,$

而 $y(x) = -\frac{1}{\tan}$, 故

$$y = -\cot = -\cot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \tan \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos}{\sin} .$$

利用 $\tan = \frac{y}{x}$, $\sin = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\cos x = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 代入上述式子,

得

$$y = \frac{x^2 + y^2 - x}{y} .$$

这又是一个零齐方程,可令 $u = \frac{y}{x}$ 求解,但用积分因子更简单些,为此变成微分形式

$$ydy = x^2 + y^2 dx - xdx,$$

$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 dx,$$

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = dx,$$

$$x^2 + y^2 = x + c,$$

最后得

$$y^2 = 2cx + c.$$

这正好是一条焦点在原点的抛物线.

另外,方程

$$y = \frac{x^2 + y^2 - x}{y}$$

的右边,若使用有理化分子,则得

$$y = \frac{y}{x + \frac{x^2 + y^2}{y}}.$$

这也是零齐方程,但似乎不好用前面积分因子方法求解,现用零齐方程解法,由于方程右边的特点,最好化成

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + \frac{x^2 + y^2}{y}}{y},$$

并且令 $v(y) = \frac{x}{y}$, 即 $x(y) = vy$, 这样

$$v + vy = v + 1 + v^2,$$

$$\frac{dv}{1 + v^2} = \frac{dy}{y}.$$

解得

$$\ln(v + 1 + v^2) = \ln cy.$$

又利用对数特点

$$\ln(1 + v^2 - v) = -\ln cy.$$

即

$$1 + v^2 + v = cy,$$

$$1 + v^2 - v = \frac{1}{cy}.$$

联立解得

$$2v = cy - \frac{1}{cy},$$

$$2x = cy^2 + \frac{1}{c},$$

即

$$y^2 = 2cx - 1.$$

这正是抛物线.

上述方程其实也可用积分因子来解,为此将方程变成微分形式

$$ydx = xdy + (x^2 + y^2)dy.$$

移项

$$ydx - xdy - (x^2 + y^2)dy = 0,$$

变成

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} - dy = 0.$$

这不是全微分方程形式,但再除 y 即可

$$\frac{ydx - xdy}{y(x^2 + y^2)} - \frac{dy}{y} = 0,$$

$$\frac{d \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{dy}{y}.$$

这实际上就是前面我们令 $v = \frac{x}{y}$ 的形式.其解与前面是一样的,为

$$y^2 = 2cx - 1. \quad \text{【解毕】}$$

例 16 2 5 在上半平面求一条向下凸的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

【解】 根据题意, 将几何关系用曲率, 法线斜率等表示出来, 就可得到方程与初始条件.

设曲线为 $y = y(x)$, 则曲线在 $P(x, y)$ 点的法线方程是

$$Y = y - \frac{1}{y'(x)}(X - x).$$

它与 x 轴之交点为 $Q(x - yy', 0)$, 于是得到法线段 PQ 的长度是

$$(x - yy' - x)^2 + y^2 = (yy')^2 + y^2.$$

由题设条件得到微分方程及初始条件为

$$\frac{y}{(1 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2(1 + y^2)}, \quad (*)$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

化简成

$$\frac{y}{1 + y^2} = \frac{1}{y},$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

这是高阶可降阶方程, 属于 $y = f(y, y')$ 这种类型. 为此可令

$$p(y) = y', \text{ 则 } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

代入原方程, 得到关于 $p(y)$ 的方程与条件

$$\frac{-p}{1 + p^2} \frac{dp}{dy} = \frac{1}{y},$$

$$p(1) = 0.$$

解这个可分离变量型的方程, 得

$$\int_0^p \frac{-p}{1 + p^2} dp = \int_1^y \frac{dy}{y},$$

即

$$1 + p^2 = y^2 .$$

将 $\frac{dy}{dx} = p$ 代入, 得

$$y = \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

$$y(1) = 1 .$$

再积分, 得

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \int_1^x \pm dx,$$

即

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm (x - 1) .$$

利用对数函数的性质

$$\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) = \hat{e} (x - 1) .$$

从而得到

$$y = \frac{1}{2} e^{\pm(x-1)} + e^{\hat{e}(x-1)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{(x-1)} + e^{-(x-1)} = \text{sh}(x - 1) . \quad \text{【解毕】}$$

【注】 题设中曲线是下凸这个条件, 用在(*)处的方程中, 这里正反映了 $y > 0$ 这方面的要求 .

在几何方面列方程, 其基本方法是几何条件的分析及“翻译”. 一般是一阶方程较多, 二阶方程通常要涉及到曲率, 这时方程可能比较复杂, 若要能积分, 则多为二阶可降阶类型 .

16.3 微分方程在物理、力学方面的应用

在这方面涉及到的列方程问题, 其方法除规律“翻译”之外, 相当多地要用到“微量平衡分析法” .

例 16.3.1 高温物体冷却遵循所谓冷却定理: “物体冷却的速度

与该物体和周围介质的温差成正比。”设某物体开始温度为 100 ，放在 20 的空气中，头 600s 下降到 60 ，问从 100 下降到 25 ，需用多少时间？

【解】 设物体温度为 $T(t)$ ，冷却系数为 $k > 0$ ，则该问题的方程及条件为

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -k(T - 20), \\ T(0) &= 100.\end{aligned}$$

方程中的负号是因为介质温度 $20 < T$ 时，物体放热，是降温过程，此时 $\frac{dT}{dt} < 0$ 。

该方程是很简单的可分离变量型，也可以当作是一阶线性非齐次方程，其解是

$$T(t) = 80e^{-kt} + 20.$$

这里冷却系数 k 是未知的，它可由另一个条件：前 600s 物体温度下降到 60 ，即

$$T(600) = 60$$

来确定。将其代入解中，化简得

$$e^{-600k} = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{600} \ln 2.$$

由此求出，当 $T(t) = 25$ 时

$$25 - 20 = 80e^{-kt}.$$

解出 $t = 2400$ ，即 2400s 后，物体温度下降到 25 。 **【解毕】**

【注】 显然，这个冷却规律只是近似的。很清楚这里假定环境温度总是 20 ，就是一个近似。如果要把介质温度变化再考虑进去，微分方程就复杂多了。

这种与变化速率成比例的假定在物理规律中使用得许多：例如，放射性物质（如镭）的蜕变速度与存留的放射物质的质量成正比，如设镭的质量为 $m(t)$ ，蜕变系数为 $\lambda > 0$ ，则有微分方程

$$\frac{dm(t)}{dt} = -m(t),$$

$$m(0) = m_0.$$

这里的负号是因为蜕变时 $\frac{dm}{dt} < 0$, m_0 是初始质量.

还有细菌繁殖问题, 化学反应等都有这种假设, 其方程也差不多.

例 16.3.2 这里研究一个力学问题, 把绳子绕在一个圆树桩上, 求绳子的张力.

【解】 绳子从 A 点绕到 B 点, 以 A 点作起点, 弧长作自变量, 绳子张力 $T = T(s)$. 今考虑 $P(s)$ 处, $d\theta$ 角对应的小段绳子的受力情况.

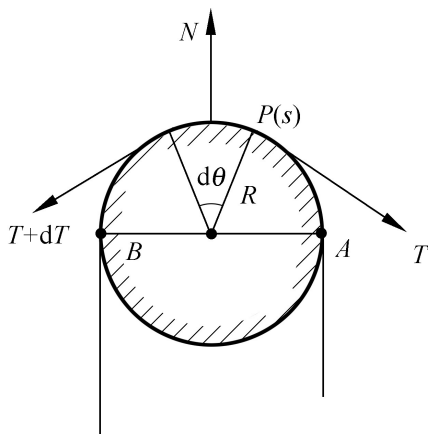


图 16.4

该微量受有三个力: 左、右两边绳子的张力 T 与 $T + dT$, 由于绳子压在树桩上, 树桩对它的反作用力 N , 它是垂直这小段弧的. 利用力的平衡关系有

$$dT = \mu N, \quad (\text{切线方向力的平衡关系})$$

$$N = 2T \sin \frac{d}{2} \quad Td. \quad (\text{法线方向力的平衡关系})$$

其中忽略了高阶部分. 在上式中消去 N 得

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\mu}{R} T,$$

其中, R 是树桩半径, μ 是摩擦系数, $ds = R d\theta$. 这个解也很简单, 因为它是可分离变量型, 亦是一阶线性常系数齐次方程, 其解为

$$T = T_0 e^{\frac{\mu}{R}s},$$

其中, T_0 是在 $s=0$ 时的张力. 这个力随弧长以指数律增长, 因此可产生极大的力量, 这就是为什么船能用绳子拴在树桩上的原因. 当然, 这里也是近似的, 但与实际情况是比较相符的.

另外, 这里用到列方程的方法就是“微量平衡分析法”. 此时要用到力的平衡方程式, 还要恰当地舍弃高阶无穷小. 【解毕】

在力学问题中利用牛顿第二定律

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

来列方程, 这是很普遍的一种方法, 在这种问题中, 要引起注意的是坐标系与方程的关系. 下面举几个例子.

例 16.3.3 一小球质量为 M 沿一与水平面成 α 角的斜面从高为 H 处, 由静止开始滚下, 设小球受到的空气阻力与其运动速度成正比, 比例系数为 c ($c > 0$), 忽略摩擦力, 求运动规律.

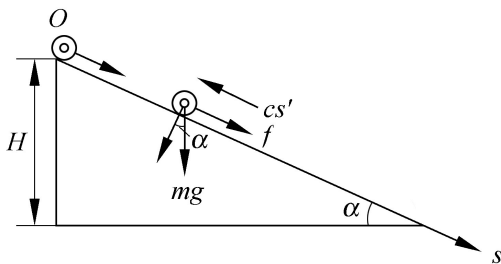


图 16.5

【解】 取斜面长 s 作坐标, 原点在斜面顶点 H 处. 设运动规律为

$$s = s(t).$$

根据牛顿第二定律则有

$$ms = mg \sin \alpha - cs,$$

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0.$$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程,可化简为

$$s + \frac{c}{m}s = g \sin \alpha,$$

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0.$$

其一般解是

$$s(t) = A + Be^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mgt}{c} \sin \alpha.$$

利用初始条件得到方程

$$A + B = 0,$$

$$-\frac{c}{m}B + \frac{mg}{c} \sin \alpha = 0,$$

解得 $A = -B$, $B = \frac{m^2}{c^2} g \sin \alpha$.

从而有

$$s(t) = \frac{m^2}{c^2} g \sin \alpha \left(-1 + e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mg}{c} \sin \alpha \cdot t \right).$$

最后,对具体问题要进行分析,此时的 $s(t)$ 不是定义在 $[0, +\infty)$ 上,而是只对斜面上的运动才成立.因此要确定 t 使得

$$s(t) = H \sin \alpha = \frac{m^2}{c^2} g \sin \alpha \left(-1 + e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{mg}{c} \sin \alpha \cdot t \right)$$

即要求解关于 t 的超越方程

$$\frac{H}{\sin^2 \alpha} \frac{c^2}{m^2 g} = -1 + e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m}t.$$

可以证明,这个方程在 $[0, +\infty)$ 内总是有解的,而且解是唯一的,这是因为函数

$$f(t) = -1 + e^{-\frac{c}{m}t} + \frac{c}{m}t$$

有: $f(0) = 0$, $f(t) = \frac{c}{m} (1 - e^{-\frac{c}{m}t})$.

设该解为 τ 时, 则所求之运动规律为

$$s(t) = \frac{m^2 g}{c^2} \sin \left[\frac{c}{m} t + e^{-\frac{c}{m}t} - 1 \right], \quad t \in [0, \tau] . \quad \text{【解毕】}$$

例 16.3.4 一质量为 m 的物体, 以初速度 v_0 垂直向上升高. 假定空气阻力与物体速度的平方成比例, 比例系数 $k^2 > 0$, 求物体上升的最大高度和从最高点返回到原处的速度, 以及物体上升、下降的时间.

【解】 建立如图 16.6 的坐标系, 物体受两个力: 向下的重力 mg 与 s 轴反向, 空气的阻力 f 与速度方向相反, 根据牛顿第二定律, 列出两组方程和相应条件.

上升方程:

$$m \dot{s} = -mg - k^2 (s)^2,$$

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = v_0 .$$

下降方程:

$$m \dot{s} = -mg + k^2 (s)^2,$$

$$s(\tau) = H, \quad \dot{s}(\tau) = 0 .$$

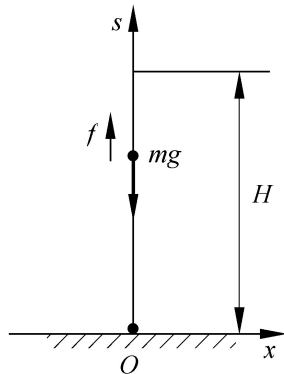


图 16.6

其中, H 是物体上升的最大高度, τ 是上升到最高处的时间. 两个方程中阻力项的符号不同, 是因为上升时, 速度与 s 轴同向, 而阻力就与 s 轴反向, 因而加负号; 下降时, 速度与 s 轴反向, 而阻力与速度反向, 因而它与 s 轴同向, 所以取正号. 第二个下降方程中的初始条件是根据运动规律与速度的连续性而设定的, 通常称为“连续性条件”.

(1) 先解上升方程, 这是二阶可降阶方程, 若令 $v(t) = \dot{s}$, 则有

$$v = -g - \frac{k}{m}v^2,$$

$$\frac{dv}{g + \frac{k}{m}v^2} = -dt,$$

$$\frac{1}{g + \frac{k}{m}v^2} \frac{dv}{v} = -dt.$$

积分后,有

$$t = \frac{m}{k} \arctan \frac{kv_0}{mg} - \arctan \frac{kv}{mg}. \quad (16.1)$$

令 $v(t) = 0$, 求得上升到顶点的时间 t_1 为

$$t_1 = \frac{m}{k} \arctan \frac{kv_0}{mg}. \quad (16.2)$$

(2) 为求上升的高度, 可以利用 (16.1), 解出 v , 而后由 $H = \int_0^{t_1} v(t) dt$ 来求, 这样问题变得十分复杂. 但若对描述上升过程的这个二阶可降阶方程作一种变换, 把路程看作自变量, 即令

$$s = v(s), \text{ 则 } s = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}.$$

这样上升方程变成

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg - k(v)^2,$$

$$v(0) = v_0.$$

解之得

$$\frac{v dv}{g + \frac{k}{m}v^2} = -ds,$$

积分有

$$\int_{v_0}^v \frac{v dv}{g + \frac{k^2}{m} v^2} = \int_0^s - ds,$$

$$\frac{m}{2k^2} \ln \left(g + \frac{k^2}{m} v^2 \right) \Big|_{v_0}^v = -s,$$

$$s = \frac{m}{2k^2} \ln \frac{g + \frac{k^2}{m} v_0^2}{g + \frac{k^2}{m} v^2} = \frac{m}{2k^2} \ln \frac{mg + k^2 v_0^2}{mg + k^2 v^2}.$$

当 $v=0$ 时, 求得上升最大高度 H 为

$$H = \frac{m}{2k^2} \ln \frac{mg + k^2 v_0^2}{mg} = \frac{m}{2k^2} \ln \left(1 + \frac{k^2}{mg} v_0^2 \right). \quad (16.3)$$

(3) 再解下降方程

由下降过程中 $s < 0$, 故由方程可知

$$-mg + k^2 v^2 = 0,$$

即有

$$mg - kv = 0.$$

为求落地速度, 还是得求 $s = s(v)$ 的关系. 此时令 $s = v(s)$, 则

$s = v \frac{dv}{ds}$, 如此下降方程变成

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg + k^2 v^2,$$

$$v(H) = 0.$$

解之得

$$\frac{v dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2} = - ds,$$

积分有

$$\int_0^v \frac{v dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2} = \int_H^s - ds,$$

$$+ \frac{m}{2k^2} \ln \left(g - \frac{k^2}{m} v^2 \right) \Big|_0^v = s - H,$$

$$\begin{aligned} s &= H + \frac{m}{2k^2} \ln \frac{g - \frac{k^2}{m} v^2}{g} \\ &= H + \frac{m}{2k^2} \ln \left(1 - \frac{k^2}{mg} v^2 \right). \end{aligned}$$

为求落地速度, 令 $s=0$, 得

$$H = \frac{-m}{2k^2} \ln \left(1 - \frac{k^2}{mg} v^2 \right).$$

利用(16.3)得

$$\ln \left(1 + \frac{k^2}{mg} v_0^2 \right) = - \ln \left(1 - \frac{k^2}{mg} v^2 \right).$$

解得

$$v_0^2 - v^2 - \frac{k^2}{mg} v_0 v = 0,$$

即落地速度

$$v^* = v_0 \frac{mg}{mg + k^2 v_0^2}.$$

(4) 求落地时间, 还是求 $v = v(t)$ 的关系. 此时令 $s = v(t)$, 下降方程变成

$$\begin{aligned} mv &= -mg + k^2 v^2, \\ v(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

解之得

$$\frac{dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2} = -dt,$$

$$\frac{1}{g} \int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{k^2}{mg} v^2} = \int_{t_1}^t -dt,$$

$$t = t_1 + \frac{m}{2k} \ln \frac{mg + kv}{mg - kv}.$$

于是得落地时间为

$$t^* = t_1 + \frac{m}{2k} \ln \frac{mg + kv^*}{mg - kv^*}.$$

整个运动过程中时间与速度的函数关系是

$$t = \begin{cases} \frac{m}{k} \arctan \frac{kv_0}{mg} - \arctan \frac{kv}{mg}, & \text{当 } t \in [0, t_1], \\ t_1 + \frac{m}{2k} \ln \frac{mg + kv}{mg - kv}, & \text{当 } t \in [t_1, t^*]. \end{cases}$$

【解毕】

例 16.3.5 一单摆摆长为 l , 吊一个质量为 m 的小球, 设其偏小角为 θ , 求其运动方程.

【解】 选择原点在 O 的极坐标系, 质点受重力的切向分力的作用而摆动. 设 $s = l(\theta)$, 由牛顿第二定律得

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta,$$

即

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad (16.4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

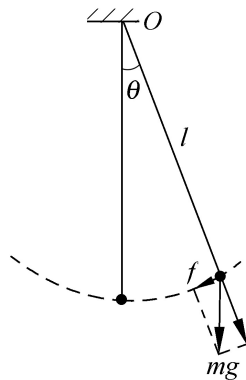


图 16.7

(1) 这是一个二阶可降阶方程, 缺自变量 t , 因此令 $v = \dot{\theta}$,

则 $\frac{dv}{dt} = v \frac{dy}{dy}$, 故得

$$v \frac{dy}{dy} = -\frac{g}{l} \sin y$$

令 $u = \frac{g}{l} y$, 则得

$$v dv = -\frac{g}{2l} \sin u \, du,$$

$$\int_0^v v dv = -\frac{g}{2l} \int_0^u \sin u \, du,$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{g}{2l} (\cos u - \cos u_0),$$

$$\frac{dy}{dt} = v = \sqrt{\frac{g}{l} (\cos y - \cos y_0)}.$$

关于 y 与 t 的关系是

$$\int_0^t \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

上式左边的积分虽不能表成初等形式, 但已确定了 $y = y(t)$ 的函数关系.

(2) 当摆动角度很小时, 可以有近似

$$\sin y \approx y$$

这样方程(16.4)可以近似成

$$\ddot{y} + \frac{g}{l} y = 0,$$

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

这是一个二阶线性齐次常系数方程, 其解为

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

代入初始条件得解为

$$y = y_0 \cos \omega t.$$

这正是简谐振动, 圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

【解毕】

16.4 其他方面应用举例

例 16.4.1 高为 H 的容器, 已知每个高度处的截面面积函数为 $S(h)$, 在底部开一小孔, 面积为 S_0 , 若流出流量 $q = \mu \sqrt{2gh}$, 其中 h 为水高, μ 是常系数. 当容器注满水后, 让小孔流水, 问多久能流完?

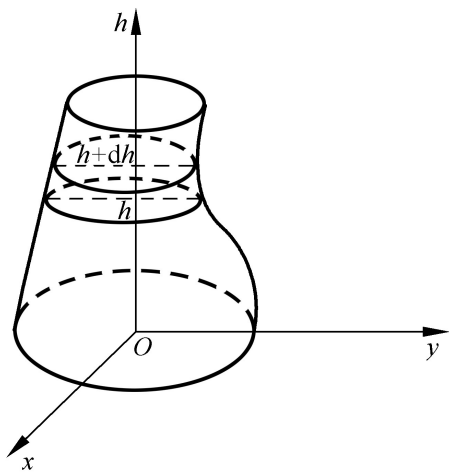


图 16.8

【解】 建立如图 16.8 的坐标系. 考虑在 t 到 $t + dt$ 这小段时间内, 流出水量的平衡关系.

在这段时间内, 水深变化 dh . 显然有如下关系:

$$S(h)dh = -\mu S_0 \sqrt{2gh} dt.$$

从而有方程

$$\frac{S(h)}{\sqrt{2gh}} dh = -\mu S_0 dt,$$

$$h(0) = H.$$

解之得

$$\int_H^h \frac{S(h)}{\sqrt{2gh}} dh = -\int_0^t \mu S_0 dt,$$

$$t = \frac{1}{\mu S_0} \int_0^H \frac{S(h) dh}{2g h}.$$

流完时间为

$$T = \frac{1}{\mu S_0} \int_0^H \frac{S(h) dh}{2g h}. \quad \text{【解毕】}$$

例 16.4.2 物质甲和物质乙化合生成新物质丙, 设反应不可逆. 开始反应时, 甲、乙物质各为 a 和 b , 没有物质丙. 假设在甲与乙化合的过程中, 丙物质生成率与甲、乙两物质剩余量之乘积成正比, 比例系数为 $k > 0$; 甲与乙物质以 1:1 的比例消失而生成丙, 丙的生成量正是甲、乙物质的消失量之和.

【解】 设丙物质的生成函数为

$$m = m(t),$$

则甲、乙物质在 t 时候的消失量分别为

$$a - \frac{1}{2} m(t), \quad b - \frac{1}{2} m(t).$$

这样方程为

$$\frac{dm(t)}{dt} = k \left(a - \frac{1}{2} m(t) \right) \left(b - \frac{1}{2} m(t) \right),$$

$$m(0) = 0.$$

解这个可分离变量方程可得

$$\frac{1}{b - a} \int_0^m \frac{1}{a - \frac{1}{2} m} \cdot \frac{1}{b - \frac{1}{2} m} dm = k \int_0^t dt.$$

积分而得

$$kt = \frac{1}{a - b} \ln \frac{ab(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{a}) - abm}{ab(1 - \frac{1}{2} \frac{m}{b}) - \frac{1}{2} m}. \quad \text{【解毕】}$$

例 16.4.3 技术革新推广模型: 设社会上有 N 个工厂老板, 一项技术革新在他们中推广, 假设采用这项技术的老板人数的增长与

已采用和未采用者人数的乘积成正比. 试研究这项技术推广情况.

【解】 设在 t 时刻采用新技术的老板数为 $P = P(t)$. 此时未采用者为 $N - P$. 因此方程为

$$\frac{dP}{dt} = cP(N - P),$$

$$P(0) = 1.$$

这是一个可分离变量型的方程, 容易求解, 得

$$P(t) = \frac{Ne^{cNt}}{N - 1 + e^{cNt}}$$

这里当 $t \rightarrow +\infty$ 时

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = N.$$

这说明这个模型有一定的合理性.

【解毕】

例 16.4.4 设一车间容量为 $V_0 = 10800\text{m}^3$, 其空气中含有 $= 0.12\%$ 的 CO_2 . 现送风机把含 $= 0.04\%$ CO_2 的新鲜空气以 $v = 25\text{m}^3/\text{s}$ 的速度输送到车间. 假定在任何时刻, 整个车间内 CO_2 浓度总是均匀的, 求送风机工作 600s 后车间空气中含 CO_2 的数量.

【解】 设在 t 时, 车间空气中含 CO_2 的数量为 $m(t)$, 现考察在 t 到 $t + dt$ 时段内 CO_2 量的平衡关系:

t 时刻车间中 CO_2 浓度为 $\frac{m(t)}{V_0}$, 因而此时 dt 时段被送走的 CO_2 量为

$$\frac{m(t)}{V_0} \cdot vdt,$$

而随新鲜空气带来的 CO_2 量为

$$vdt.$$

因此车间在 t 到 $t + dt$ 时段内, CO_2 的减少为

$$dm(t) = vdt - \frac{m(t)}{V_0} vdt$$

$$= -\frac{m(t)}{V_0} v dt.$$

从而得方程

$$\frac{dm(t)}{dt} = v - \frac{m(t)}{V_0},$$

$$m(0) = V_0.$$

这是一个一阶线性常系数非齐次方程(当然也可以看作是可分离变量型方程), 解之得

$$m(t) = ce^{-\frac{vt}{V_0}} + V_0.$$

代入初始条件得

$$V_0 = c + V_0,$$

$$c = (-) V_0.$$

t 时刻车间中 CO_2 含量的浓度为

$$\frac{m(t)}{V_0} = (-) e^{-\frac{vt}{V_0}} + .$$

将题设的数据代入得: 600s 后车间的空气中 CO_2 含量浓度为 0.06% .

【解毕】

第 17 章 向量代数

17.1 引言

在多元函数之前讨论向量代数,是把它摆在一种研究多元函数工具的地位.从“工具地位”来看向量代数,其内容主要是:

两种表示:向量的几何表示与代数表示;

五类运算:向量的加减、数乘、点积、叉积与混合积运算;

几个关系:向量的平行、共面及垂直关系.

这里主要的研究方法是几何直观与代数运算的灵活结合与互动,即利用几何想像来分析关系,通过代数推导来揭示规律.

因此向量代数是“几何直观”与“代数推演”结合的桥梁.

17.2 空间向量的表示方法

(1) 向量是有方向与大小的量,其背景是力、速度、位移、角速度等等必须考虑其大小与方向的一些量.

向量的任何表示方式都直接或间接地包含着表示方向与表示大小两个方面.

(2) 向量的几何表示是带箭头的直线,记成 \mathbf{a} 线段之长 $|\mathbf{a}|$ 表示大小,称为向量 \mathbf{a} 的模.这种表示很形象,但方向只是一种示意.为此引出一个固定的向量,叫单位向量 \mathbf{a} ,它的模 $|\mathbf{a}| = 1$,规定指向一个确定方向,这样,任何与它平行的向量 就可以写成

$$\begin{aligned} & \quad / \quad / \quad \mathbf{a}, \quad \text{当} \quad \text{与} \quad \mathbf{a} \quad \text{同向平行,} \\ = & \quad - / \quad / \quad \mathbf{a}, \quad \text{当} \quad \text{与} \quad \mathbf{a} \quad \text{反向平行.} \end{aligned} \quad (17.1)$$

\mathbf{a} 为由 \mathbf{a} 确定方向的单位向量, 因此有

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

和

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}. \quad (17.2)$$

(3) 向量的投影表示是

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (17.3)$$

这是一种代数性的向量表示, 其中 a_x , a_y 及 a_z 是向量 \mathbf{a} 分别在 x , y 与 z 轴上的投影. 在这种表示下, 向量的模是

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (17.4)$$

其方向由其单位向量

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad (17.5)$$

或

$$\mathbf{a} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} \quad (17.6)$$

表示. 其中

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}. \quad (17.7)$$

称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦, α , β , γ 是 \mathbf{a} 分别与 x , y 与 z 轴正方向的夹角, 其值在 0 到 π 之间.

(4) 除单位向量之外, 有几个常用的向量.

矢径, 即固定以坐标原点为起点的向量, 特别用

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (17.8)$$

表示, 这样空间任何一点 $P(x, y, z)$ 可以用它对应的矢径表示, 因此又称位置向量.

用起终点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 表示的有向线段 AB , 即

$$\mathbf{AB} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}. \quad (17.9)$$

如果用

$$\mathbf{r}_A = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_B = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}$$

分别表示 A, B , 则线段 AB 上任一点 C 的坐标 (x, y, z) 亦可以用参数 λ 表示为 \mathbf{r}_C , 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \lambda \\ &= (1 - \lambda) \mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B \\ &= (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2 \mathbf{i} + (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2 \mathbf{j} \\ &\quad + (1 - \lambda) z_1 + \lambda z_2 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

这里 $\lambda = \frac{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A|}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. 当 $\lambda \in [0, 1]$ 时, 点 C 在 A 与 B 之

间; 当 $\lambda < 0$ 时, C 在 AB 逆向延长线上起点 A 的一侧; 当 $\lambda > 1$ 时, C 在 AB 顺向延长线上 B 点一侧.

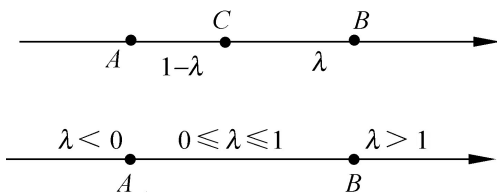


图 17.1

17.3 向量的运算

向量有五种运算, 每种运算都有几何意义与代数表示, 而且都有诸如交换律、分配律等性质描述.

1. 向量的加减法

在几何上向量的加减法表示为平行四边形对角线, 或三角形的另一边. 用投影表示两向量

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

则向量加减就与数量的加减联系起来,

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k}.$$

2. 向量的数乘($\lambda \mathbf{a}$)

在几何上表向量的伸缩和反向,具体是:

当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 同向平行, $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}|$;

当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 反向平行, $|\lambda \mathbf{a}| = -\lambda |\mathbf{a}|$;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 就是零向量.

在代数上

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k}) = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k}.$$

3. 向量的点(内)积($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$)

点积的物理背景是力在一定位移下所作的功,在几何上可表示一个向量在另一向量上的投影.具体定义是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

其中 θ 是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 间的夹角, $0 \leq \theta < \pi$.

力 \mathbf{F} 在位移 \mathbf{s} 下做功为 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. 向量 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影为 $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}| / |\mathbf{a}|$, \mathbf{a} 是 \mathbf{a} 方向的单位向量. 利用点积可以表示:

$$\text{向量 } \mathbf{a} \text{ 的模 } |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a},$$

$$\text{向量间夹角余弦 } \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|},$$

向量点积的代数运算式

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

即各同名投影乘积之和. 点积满足交换律与分配律.

4. 向量的叉积($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)

在物理上多用于表示角速度等向量; 在几何上用于表示由两个向量产生的与之垂直的第三个向量. 叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 这个向量定义有两个方面, 大小为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, 而方向符合从 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} 的

右手法则：即向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直于 \mathbf{a} 也垂直于 \mathbf{b} ，并且右手四指顺着 \mathbf{a} 到 \mathbf{b} ，其拇指方向为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向。

在代数上其运算可用行列式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

表示。这个公式的推出，是由于叉积满足分配律及 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ ， $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ， $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ， $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ 。特别重要的是，叉积不满足交换律，而有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

5. 向量的混合积 $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})$

混合积不是新运算，只是点积、叉积运算的混合，但在几何上表示了以三个向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} ， \mathbf{c} 为三个相邻边构成的平行六面体的代数体积。如果三个向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} ， \mathbf{c} 符合右手法则，该体积为正，否则为负。

混合积的代数计算式为

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

由此可知， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ 。通常将其简写成 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ，而且三者的任何一次对换使其值反号，即

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

等等。

17.4 用运算表示向量的几何关系

将向量间的几何关系，如平行、垂直、共面等用向量间的运算

表示,这是作为“工具”的重要内容.

(1) 两向量平行的充要条件

\mathbf{a} \mathbf{b} 存在,使得 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

对应投影成比例, $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

(如果三个比例中少一个,则规定此投影为 0).

(2) 两向量垂直的充要条件

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

(3) 三向量共面的充要条件

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面 $\exists \lambda_i$ 不全为 0, 使得 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 线性相关.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

(4) \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影 $(\mathbf{b})_{\mathbf{a}}$

$$(\mathbf{b})_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

17.5 综合题

综例 17.5.1 今有 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 计算下列各式:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (2) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (3) $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$

(4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, (5) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (6) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

【解】

$$(1) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$(2) \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

$$(3) \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$(4) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

另一方面 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$

$$(5) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}.$$

$$(6) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

【解毕】

【注】 我们从叉积定义可以知道, 向量 $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 垂直于 $\mathbf{e} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, 而 \mathbf{e} 又是垂直于 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 的, 因此叉积向量 \mathbf{d} 与由 \mathbf{b}, \mathbf{c} 向量形成的某个平行平面共面, 从而可设

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}.$$

上式两边点积向量 \mathbf{a} , 则有

$$0 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}),$$

由此有 $\frac{1}{-\mu} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}$. 令 $t = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})t$, $\mu = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})t$, 代入叉积的分解表示关系, 得

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = t[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}].$$

由于这是关于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的恒等式, 可选择特殊的三个向量来确定 t , 为此选

$$\mathbf{b} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{j}.$$

代入得到前式左端

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

前式的右端

$$t[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] = t[0 - \mathbf{k}].$$

由此推出 $t = 1$. 因此有公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

再用给定的数值验证一下:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\ &= (2 + 3)(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) - 1 \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}. \end{aligned}$$

这与前面(5)的结果是一致的.

综例 17.5.2 设 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. 求:

- (1) 使得 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$;
- (2) μ 使得 $(\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mu\mathbf{b})$;
- (3) 向量 \mathbf{c} 在由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 所构成的平面上的投影向量;
- (4) μ 使得 $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 共面.

【解】

(1) 欲使 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 垂直 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 当且仅当

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0,$$

由此得

$$|\mathbf{a}|^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{1 + 16 + 25}{1 + 1 + 4} = \frac{42}{6} = 7,$$

从而

$$|\mathbf{b}|^2 = \pm 7.$$

(2) 欲使 $\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}$, 当且仅当

$$(\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}) = 2\mu\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

由于 $\mathbf{b} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 故只有 $\mu = 0$, 即只能是 $\mathbf{a} = \mathbf{a}$. 这个结果在几何上毫不奇怪.

(3) 设 \mathbf{p} 是向量 \mathbf{c} 在由 \mathbf{a}, \mathbf{b} 所构成的平面上的投影向量; 再设 $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 这是垂直这个平面的向量. 这样一来有如下分解关系

$$\mathbf{c} = \mathbf{n} + \mathbf{p}.$$

两边点乘向量 \mathbf{n} , 因为 $\mathbf{n} \perp \mathbf{p}$, 从而得

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}.$$

解出

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}.$$

从而求得投影向量为

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} - \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}.$$

今由数据有

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

求出

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - \frac{1}{9}(3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= \frac{2}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}). \end{aligned}$$

(4) 由三向量共面的充要条件, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot [(\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})] &= \mathbf{c} \cdot [(\mu - \mu)\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \\ &= (\mu - \mu)(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$, 推出 $\mu = \mu$. 这个结果在几何上意义也很显然.

【解毕】

【注】 (3) 中的做法相当于线性代数中的直交分解, 即施密特正交

过程的做法.读者可自绘图形,明确几何关系.

综例 17.5.3 空间两条异面直线 L_1 与 L_2 , 相应的方向为 \mathbf{l} 和 \mathbf{l}' , 各在其上有两点 M_1 和 M_2 . 求这两条直线间的距离 d .

【解】 两直线间距离即两直线各取一点连线的最小长度, 因此这可以利用多元函数条件极值来求. 下面我们用向量代数的方法来解此题. 从几何上分析可知两直线间距离有如下性质: 在两条直线上各找出一点 P_1 和 P_2 , 若向量 P_1P_2 的模为所求的距离, 则其方向必垂直于由 \mathbf{l} 和 \mathbf{l}' 所构成的平面, 即平行该平面的法线向量 $\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$. 如果利用距离的这个几何性质, 通过向量运算就可求其值. 因为 $\mathbf{l} \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{l}' \perp \mathbf{n}$, 则对两条直线上任意两点 $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$, 必有

$$(\overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \mathbf{n} = (\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot \mathbf{n},$$

其值的绝对值就是所求的距离 d , 从而

$$\begin{aligned} d &= |(\overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \mathbf{n}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{l}')|}{|\mathbf{l} \times \mathbf{l}'|}. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 (1) 从上述结果看出, 这个距离还有另一种几何解释. 因为上式中的分子

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{l}')|$$

正是由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, \mathbf{l} 和 \mathbf{l}' 作棱形成的平行六面体的体积; 而分母 $|\mathbf{l} \times \mathbf{l}'|$ 正是由向量 \mathbf{l} 和 \mathbf{l}' 作成的平行四边形面积. 可见其距离 d 正是此体积在该底面上的高.

(2) 利用本题类似的思路, 可以很容易找到点到某平面的距离, 设平面的法线向量为 \mathbf{n} 且 M_0 为其上给定点, 今欲求 P 点到

平面的距离 d .

显然有向线段 $M_0 P$ 在 \mathbf{n} 上的投影的绝对值, 就是所求 P 点到平面的距离. 从而有

$$d = (M_0 P)_n = \left| \frac{M_0 P \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| .$$

如果今有

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}, \quad P(x, y, z), \quad M_0(x_0, y_0, z_0),$$

则

$$d = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

这就是点 $P(x, y, z)$ 到平面的距离公式 .

下面利用向量运算来证明一些明显的几何事实, 借此进一步理解和掌握向量运算中几何直观与代数推演之间的关系 .

综例 17.5.4 证明:

$$\left| \mathbf{x} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \right| = |\mathbf{x}| .$$

并说明其几何意义 .

【证】 一般这种关于模的等式或不等式的证明与计算, 多利用关系 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ 转化为点积的运算. 对此, 我们有

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{x} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \right|^2 = \left| \mathbf{x} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \right|^2 \\ &= |\mathbf{x}|^2 - 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \\ &= |\mathbf{x}|^2 - 4 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}{|\mathbf{a}|^2} + 4 \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}{|\mathbf{a}|^2} \\ &= |\mathbf{x}|^2 . \end{aligned}$$

【证毕】

上述式子表面上复杂, 改写一下就清晰多了 .

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} &= \mathbf{x} - 2 \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\ &= \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a} = \mathbf{x} - 2\mathbf{p}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{p} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}$ 正是向量 \mathbf{x} 在 \mathbf{a} 向量上的投影向量. 从图 17.2 可知, \mathbf{x} 与 $\mathbf{x} - 2\mathbf{p}$ 正是以 $2\mathbf{p}$ 为底的等腰三角形的两个腰.

【注】 如果我们要求一个向量 \mathbf{x} 关于一个平面的镜面反射的向量, 就可以利用本题类似思路来构造.

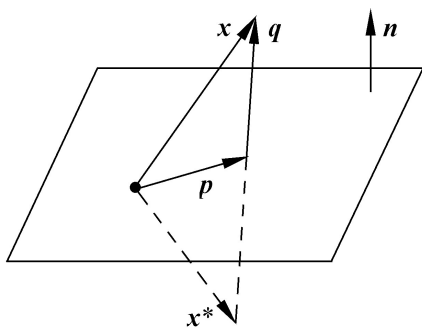


图 17.2

假设镜面平面的法线向量为 \mathbf{n} , 今欲求向量 \mathbf{x} 关于该镜面的反射向量 \mathbf{x}^* :

首先求 \mathbf{x} 在 \mathbf{n} 方向上的投影向量 \mathbf{q} , 得

$$\mathbf{q} = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}$$

由此得镜面反射向量

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - 2\mathbf{q} = \mathbf{x} - 2 \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})} \mathbf{n}$$

如果 \mathbf{x} 和 \mathbf{n} 作为列矩阵 \mathbf{x} 和 \mathbf{n} , 上述关系用矩阵运算表示, 因为 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}^T \mathbf{n}$, $(\mathbf{n}^T \mathbf{x}) \mathbf{n} = (\mathbf{m}^T) \mathbf{x}$, 故

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{x}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{n}^T \mathbf{x}) \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} = \frac{(\mathbf{m}^T) \mathbf{x}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}},$$

于是有

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - 2 \frac{(\mathbf{m}^T) \mathbf{x}}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \mathbf{m}^T \mathbf{x}.$$

这里 \mathbf{I} 是 3 阶单位矩阵, \mathbf{m}^T 是 3×3 矩阵. 这个结果可以推广到 n 维空间.

综例 17.5.5 利用向量运算可以证明正弦和余弦定理, 以及平行四边形定理.

【证】 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 构成封闭三角形.

(1) 由叉积的几何意义, 即两向量叉积的模等于二向量所构成的平行四边形的面积, 可知

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|,$$

即

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \beta = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \sin \gamma.$$

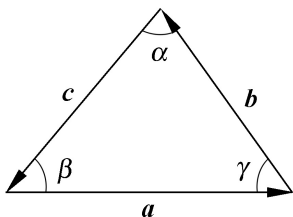


图 17.3

对上式同除 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|$, 就得正弦定理

$$\frac{\sin \alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sin \beta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\sin \gamma}{|\mathbf{c}|}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 } |\mathbf{c}|^2 &= (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 \\ &= (\mathbf{a})^2 + (\mathbf{b})^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha. \end{aligned}$$

这就是余弦定理.

(3) 因为

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a})^2 + (\mathbf{b})^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a})^2 + (\mathbf{b})^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

相加得 $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2[(\mathbf{a})^2 + (\mathbf{b})^2],$

即 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$

这就是平行四边形定理：平行四边形两对角线之平方和等于四边之平方和。 【证毕】

综例 17.5.6 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不共线的向量，证明它们构成封闭三角形的充要条件为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

【证】 今在 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共线的条件下，要证

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

先证必要性：因为 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ，两边同叉乘 \mathbf{c} 得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

同理有

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

即有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

再证充分性：因为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ ，取头一个等式，并移项，得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

即

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

同理可推出

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

从上面三式可见向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 平行同一向量 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ ，它们要么是共线，要么向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 。由假设排除了第一种可能，因而必有 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 。 【证毕】

综例 17.5.7 设 $\mathbf{l}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\mathbf{l}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ ， $\mathbf{l}_3 = (c_1, c_2, c_3)$ 。证明三直线

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

交于一点的充要条件是三向量共面,但 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 不共线.

【证】 将题设方程写成向量形式

$$z_3 = -x_1 - y_2. \quad (17.1)$$

先证必要性:由上述三直线交于一点,(17.1)表明,向量 \mathbf{l}_3 由 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ 线性表示,且这种表示是唯一的,这就证明了 \mathbf{l}_1 与 \mathbf{l}_2 不共线.

再证充分性:由于 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ 和 \mathbf{l}_3 共面,即存在不全为 0 的 x, y, z 使得

$$x \mathbf{l}_1 + y \mathbf{l}_2 + z \mathbf{l}_3 = \mathbf{0}.$$

又由于 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 不共线,必有 $z \neq 0$.这就得出唯一表达式

$$\mathbf{l}_3 = \frac{-x}{z} \mathbf{l}_1 + \frac{-y}{z} \mathbf{l}_2. \quad \text{【证毕】}$$

综例 17.5.8 已知向量 \mathbf{x} 与 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及 $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ 的点积分别是 3, 4, 5, 求 $\mathbf{x} = ?$

【解】 设 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ 依题意有

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 3,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 4,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 5.$$

即有方程

$$x_1 + x_2 = 3,$$

$$x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_3 + x_1 = 5.$$

解联立方程得 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$. 即有

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

【解毕】

【注】 此题可以变成向量分解的提法：若有三个不共面的向量 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , 今欲将向量 \mathbf{x} 表示成 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a} + x_2 \mathbf{b} + x_3 \mathbf{c}$, 已知条件是 \mathbf{x} 与 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 的点积分别为 , , .

这里把 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 作为坐标系, 给定的条件是

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= 0, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} &= \quad, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \quad, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \quad. \end{aligned}$$

写成线性方程组为

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) x_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) x_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) x_3 &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = \quad, \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) x_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) x_2 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) x_3 &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) = \quad, \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) x_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) x_2 + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) x_3 &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}) = \quad. \end{aligned} \tag{17.2}$$

其系数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{pmatrix} (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}). \end{aligned}$$

由此可知 \mathbf{H} 的行列式不为 0, 因此方程(17.2)有唯一解.

若 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} 是正交系, 则

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \mathbf{a} & \mathbf{a}^T \mathbf{b} & \mathbf{a}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{a} & \mathbf{b}^T \mathbf{b} & \mathbf{b}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{a} & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} / \mathbf{a} / ^2 & 0 & 0 \\ 0 & / \mathbf{b} / ^2 & 0 \\ 0 & 0 & / \mathbf{c} / ^2 \end{pmatrix},$$

方程组(17.2)的解为

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad / \quad / \mathbf{a} / ^2 \\ x_2 &= \mathbf{H}^{-1} \quad = \quad / \quad / \mathbf{b} / ^2 \\ x_3 &= \quad / \quad / \mathbf{c} / ^2 \end{aligned}$$

综例 17.5.9 若三个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足关系

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

求它们的长度及夹角.

【解】 (1) 由于 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 0$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

用同样方法可知 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}, \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, 即向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 相互垂直.

(2) 由于

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

可见 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$. 【解毕】

【注】 这里三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 成为右手正交系. 这是三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 构成右手正交系的充分必要条件.

综例 17.5.10 在什么条件下, 向量方程

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$$

关于 \mathbf{x} 有解? 有多少解? 解的一般形式是什么?

【解】 首先, 若存在 \mathbf{x} , 使得

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{x},$$

用 \mathbf{b} 点乘上式两边, 有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0.$$

由此可知, 方程 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ 关于 \mathbf{x} 有解的必要条件是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 垂直. 这一点从叉积的定义也是可以推出的.

再者, 若上述方程有解 \mathbf{x} , 即 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$, 则可断言, 其所有之解可表成

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{b},$$

其中 μ 为任意常数.

事实上, 将 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{b}$ 代入方程左边有

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}_0 = \mathbf{a},$$

即 $\mathbf{x} + \mu\mathbf{b}$ 是方程之解 .

反之, 若 \mathbf{y} 是另一解, 即有 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{y}$, 由于 $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$, 则有

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

这表明, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 与 \mathbf{b} 平行, 由此可知, 存在常数 μ , 使得 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mu\mathbf{b}$,

即 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mu\mathbf{b}$.

【解毕】

第 18 章 空间的平面、直线及 一些特殊曲面的方程

18.1 引 言

三维空间中的平面、直线以及像椭球等二次曲面不但是常见的空间图形,同时也是研究多元函数的几何工具.从微积分的要求来看,本章内容可概括为研究空间常见图形的方程及其相互关系.具体来说讨论:

(1) 平面与直线的方程及相互关系,从代数角度看是研究一次方程的几何意义;

(2) 椭球面等二次曲面的方程,从代数角度看是研究二次方程的几何意义,与线性代数中二次型的知识相呼应;

(3) 旋转面、柱面、锥面等特殊曲面的方程;

(4) 空间区域的表示.

研究方法上着重于抓住几何图形的特殊性质,再将这种性质利用代数的概念与运算表示出来.

18.2 平面与直线

1. 平面方程

平面的几何特征有多种描述,最基本的是由其上一点 M_0 和其法线向量 \mathbf{n} 所确定的投影特性,即点 P 在该平面上的充要条件是 PM_0 垂直 \mathbf{n} , 或者是 $PM_0 \cdot \mathbf{n} = 0$. 设 $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$,

$M_0(x_0, y_0, z_0), P(x, y, z)$, 则

$$\overrightarrow{PM_0} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}.$$

由此可得, 平面的方程为

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (18.1)$$

这就是平面方程的点法式.

反过来, 对任何一次方程

$$Ax + By + Cz = d, \quad (18.2)$$

总可以找一点 (x_0, y_0, z_0) 使得

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = d.$$

这样(18.2)可改写成

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

这说明任何一次方程(18.2), 其图形都是平面, 该平面的法线向量是

$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}. \quad (18.3)$$

重要的结论是: 空间平面的方程是三元一次方程, 任何三元一次方程的图形是空间平面.

2. 直线方程

当给定直线 L 上一点 M_0 和直线的方向 \mathbf{l} 时, 直线的特征性质是, 任何直线上的点 P 与 M_0 的连线必与直线方向平行, 即

$\overrightarrow{M_0P} \parallel \mathbf{l}$. 若令 $P(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\mathbf{l} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. 利用判断两向量平行的两个充要条件可以得到相应的两种形式的方程.

第一种, 直线的标准式

由 $\overrightarrow{M_0P} \parallel \mathbf{l}$, 可知 $\overrightarrow{M_0P} \times \mathbf{l} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

由每一分量为零,即可推出

$$\begin{aligned} n(y - y_0) &= m(z - z_0), \\ l(z - z_0) &= n(x - x_0), \\ m(x - x_0) &= l(y - y_0). \end{aligned}$$

整理成对称的形式,得到

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (18.4)$$

这就是直线方程的标准式或称点向式.

第二种,直线的参数式

由 $M_0 P$, 则存在 t , 使得 $M_0 P = t$, 即

$$\begin{aligned} x - x_0 &= lt, & x &= x_0 + lt, \\ y - y_0 &= mt, & \text{或} & & y &= y_0 + mt, \\ z - z_0 &= nt. & & & z &= z_0 + nt. \end{aligned}$$

这就是直线的参数式方程.

第三种,直线的交面式

由于直线又可看作两平面的交线,因此用两个通过直线 L 的平面也可表示直线方程,即

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2. \end{aligned} \quad (18.5)$$

在直线的这种表示中,该直线的方向向量必垂直这两个平面的法线向量,因而有

$$= \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}. \quad (18.6)$$

附带要指出的是,将(18.5)中两式作线性组合得

$$\mu(a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1) + (\alpha x + b y + c z - d_2) = 0. \quad (18.7)$$

这也是平面方程,其几何意义表示通过直线 L 的所有平面,称之为过 L 的平面束方程.

3. 平面、直线间的相互关系

这种相互关系是指平行、垂直、相交等几何位置关系.判别这种关系的依据是平面的法线向量、直线的方向向量之间的关系.

两平面间、两直线间是否垂直与平行是根据对应的两平面的法线向量、两直线的方向向量是否垂直与平行来判断.

但直线与平面间是否垂直是根据它们对应的方向向量与法线向量是否平行来判断;而直线与平面的平行是根据对应向量的垂直来判断.

直线、平面间的夹角,也是根据直线的方向向量、平面的法线向量间的夹角来确定.

关于直线、平面的相交与否问题,就是线性方程组的有解问题,这在线性代数中已有结论,但对于直线、平面问题来说,相应地有明显的几何解释.此处只讨论如何判别两条空间直线 L_1 和 L_2 是否相交的条件.

$$\text{若 } L_1: \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \mathbf{s}_1 = l \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j} + n_1 \mathbf{k},$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \quad \mathbf{s}_2 = l \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + n_2 \mathbf{k}.$$

再记 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则可得出 L_1 与 L_2 相交的充

要条件是三个向量 \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 和 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 共面,即

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m_1 & n_1 \\ l & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(18.8)

例 18.2.1 求三个平面的方程, 它们分别满足下列三个条件:

(a) 通过点 $P_0(1, 2, 3)$, 并平行于两个向量

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

(b) 通过点 $P_0(2, -3, 2)$ 和直线
$$\begin{cases} 6x + 4y + 3z + 5 = 0, \\ 2x + y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

(c) 通过点 $P_0(2, -1, -1)$ 和点 $P_1(1, 2, 3)$, 并平行于平面
$$2x + 3y - 5z - 6 = 0.$$

【解】 三个条件中均有平面上的一点, 关键在求平面的法线向量.

(a) 由于所求平面平行于 \mathbf{a} 及 \mathbf{b} , 所以其法线向量 \mathbf{n} 必垂直于 \mathbf{a} 及 \mathbf{b} , 这样

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

因此平面方程为

$$4(x - 1) + (y + 2) + 9(z - 3) = 0,$$

即

$$4x + y + 9z - 33 = 0.$$

(b) 有两种解法

(方法 1) 在给出的直线 $L: \begin{cases} 6x + 4y + 3z + 5 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ 上找出一

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$: 令 $x + y = 0$ 代入方程得关于 x, z 的联立方程

$$\begin{cases} 2x + 3z + 5 = 0, \\ x + z - 2 = 0. \end{cases}$$

解出得 $x_1 = 11, y_1 = -11, z_1 = -9$ 即 $P_1(11, -11, -9)$.

再求出直线 L 的方向

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

所求平面的法线向量

$$\mathbf{n} = \mathbf{P}_0 P_1 \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 9 & -8 & -11 \end{vmatrix} = -16\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

由此得所求的平面为

$$16x + 7y + 8z - 27 = 0.$$

(方法 2) 先写出通过直线 L 的平面束方程

$$\mu(6x + 4y + 3z + 5) + (2x + y + z - 2) = 0,$$

即

$$(6\mu + 2)x + (4\mu + 1)y + (3\mu + 1)z + (5\mu - 2) = 0.$$

代入点 $P_0(2, -3, 2)$ 的坐标, 来确定参数 μ , :

$$11\mu + 1 = 0.$$

取 $\mu = -1$, 则 $\lambda = 11$, 故得所求平面的方程为

$$16x + 7y + 8z - 27 = 0.$$

(c) 由于所求平面通过线段 $P_0 P_1$ 且垂直平面的法线向量 $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ 因而, 所求平面的法向量 \mathbf{n} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = P_0 P_1 \times \mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -27\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k} \\ &= -3(9\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}). \end{aligned}$$

所求平面的方程为

$$9x - y + 3z - 16 = 0.$$

【解毕】

例 18.2.2 求三条直线方程, 它们均过点 $P_0(2, -3, 5)$, 并分别满足以下三个条件:

(a) 垂直平面 $7x - 4y + 2z - 8 = 0$.

(b) 平行直线 L :
$$\begin{aligned} x - y + 2z + 4 &= 0, \\ 2x + 3y - 6z - 12 &= 0. \end{aligned}$$

(c) 通过点 $P_1(3, 6, -2)$.

【解】 为求直线方程, 仅需找出其方向向量

(a) 所求直线垂直所给平面, 从而其方向向量平行其法线向量 \mathbf{n} 可取

$$= \mathbf{n} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

从而所求直线的标准方程为

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{2}.$$

(b) 先求出所给直线的方向向量

$$\mathbf{s}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

所求直线与之平行. 从而有 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1$, 这样所求直线的标准方程为

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-5}{5}.$$

(c) 所求直线的方向向量 $\mathbf{s} = P_0 P_1$, 即

$$= \mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

其方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-5}{-7}.$$

【解毕】

18.3 二次曲面的方程

主要的要求是会识别二次曲面的几种标准方程. 从方法上讲, 应能利用平行坐标平面的“截割法”来大致想像出二次曲面的形状.

1. 球面与椭球面

球面: 球心在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 $R > 0$ 的球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (18.9)$$

任何缺交叉项 xy, yz, zx , 且 x^2, y^2, z^2 的系数相同的二次方程

$$x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0, \quad (18.10)$$

只要满足条件

$$-\frac{d^2 + e^2 + f^2}{4} + g < 0$$

就是球心在 $\frac{-d}{2}, \frac{-e}{2}, \frac{-f}{2}$ 的球面.

椭球面: 中心在 (x_0, y_0, z_0) 半轴分别为 $a, b, c (> 0)$ 的椭球面方程为

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1. \quad (18.11)$$

2. 一般二次曲面

对一般的二次曲面方程

$$ax^2 + bx^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx = g. \quad (18.12)$$

其图形比较复杂, 也有多种标准型, 对此应掌握两点:

第一, 对比较简单的标准型, 比如

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

会利用“平行切割法”大致绘出其图形, 像所给方程, 其图形对于任何垂直 z 轴的剖面, 割线为椭圆; 而对于垂直 x 轴或 y 轴的剖面得到的是虚轴为 z 轴的双曲线, 因而是椭圆双曲面.

第二, 对一般的二次方程(18.12)可以用二次型表示为

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g. \quad (18.13)$$

根据对称矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ 的特征值分成三类曲面. 若 \mathbf{A} 的三

个特征值同为正数(或负数)即 \mathbf{A} 为正定(或负定), 则(18.13)属

于椭球面类,当然可能是一个点或无图形;若 \mathbf{A} 无零特征值,但特征值异号,即为不定非奇矩阵时, (18.13) 是双曲面类;若 \mathbf{A} 有零特征值,则 (18.13) 是抛物面类.

这方面知识实际上是线性代数中二次型理论的几何解释.

例 18.3.1 大致绘出方程 $z = y^2 - x^2$ 的图形.

【解】 (1) 用垂直 z 轴的平面切割曲面时,有如下情形:当 $z > 0$ 时,得到虚轴为 x 轴的双曲线;当 $z < 0$ 时,得到虚轴为 y 轴的双曲线;当 $z = 0$ 时,得到两条交叉直线 $y = \pm x$.

(2) 用垂直 x 的平面切割时,得到开口朝向 z 的正方向的抛物线.

(3) 用垂直 y 轴的平面切割时,得到开口朝向负 z 的抛物线.

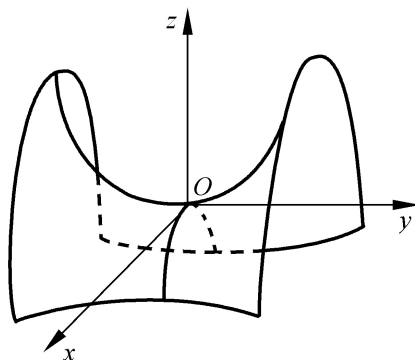


图 18.1

这种曲面称为双曲抛物面,俗称马鞍面、因形状像马鞍而得名(见图 18.1).将其曲面绕 z 轴旋转 $\frac{\pi}{4}$, 则得到比较简单的方程

$$z = xy. \quad \text{【解毕】}$$

例 18.3.2 判断 $\frac{z^2}{c} = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ 的图形 ($a, b, c > 0$).

【解】 以垂直 z 轴的平面相割,得到椭圆.

用 $x=0, y=0$ 的平面相割, 得到相交的直线 .

这种曲面是锥面 .

【解毕】

【注】 锥面方程的特点是方程中 x, y 有相同的次数 . 这一点在下面锥面的一般方程构造中可以得到 .

18.4 几种特殊曲面

1. 旋转面

只研究给定曲线绕坐标轴旋转而成的旋转曲面 . 例如, 给定曲线 L :

$$z = f(y),$$

$$x = 0 .$$

求 L 绕 z 轴旋转而生成的曲面 S .

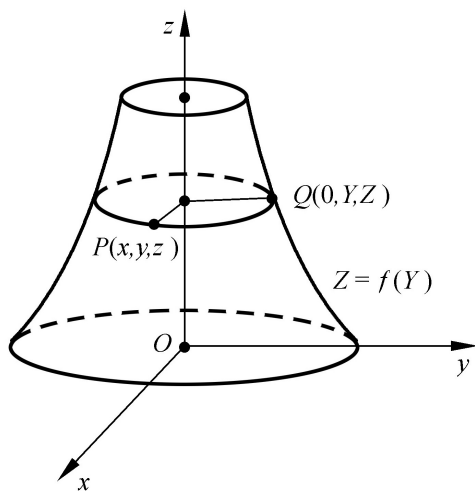


图 18.2

设 $P(x, y, z)$ 是空间一点, 由旋转面特性可知, P 在曲面 S 上的充要条件是: 存在点 $Q(0, Y, Z)$ 在曲线 L 上, P, Q 的 z 坐标相同, 且使得旋转半径相同, 即

$$\begin{aligned} z &= Z, \\ x^2 + y^2 &= Y^2. \end{aligned}$$

由于 $Q(0, Y, Z)$ 在曲线 L 上, 因此有

$$Z = f(Y).$$

再以 $P(x, y, z)$ 的坐标代入, 得到旋转面 S 的方程

$$z = f(x^2 + y^2).$$

【注】 在寻求旋转面方程时, 抓住其几何特点: 任何旋转面上的点 P , 一定相应于旋转曲线上的一点 Q , 这两点坐标关系是: 关于旋转轴坐标相同(像前面叙述中的 z 坐标), 简称同高, 即 $z = Z$; 还有是旋转半径相同, 即 $x^2 + y^2 = Y^2$.

利用这一特点, 即使 L 是一般由参数方程

$$\begin{aligned} Z &= Z(t), \\ Y &= Y(t), \\ Z &= Z(t). \end{aligned}$$

给出的空间曲线方程, 它绕某坐标轴, 例如 z 轴, 旋转而成的旋转面方程, 也不难求出. 这时只要利用关系

$$\begin{aligned} z &= Z(t), \\ x^2 + y^2 &= Z^2(t) + Y^2(t). \end{aligned}$$

从中消去参数 t , 即可得到关于 x, y, z 之间关系, 这就是旋转面的方程.

2. 锥面方程

锥面方程的一般提法是, 给定空间一条曲线 L 和不在 L 上的一个点 P_0 , 由 P_0 与 L 上任意点作直线, 由这些直线所构成的曲面叫做以 P_0 为顶点, L 为准线的锥面.

例如, 今给定空间曲线 L (即准线)是

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= 0, \\ Z &= h. \end{aligned}$$

顶点 P_0 是坐标原点, 求由此生成的锥面 .

若 $P(x, y, z)$ 是锥面 S 上的一点, 则必有 L 上的一点 $Q(X, Y, Z)$, 即

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= 0, \\ Z &= h. \end{aligned}$$

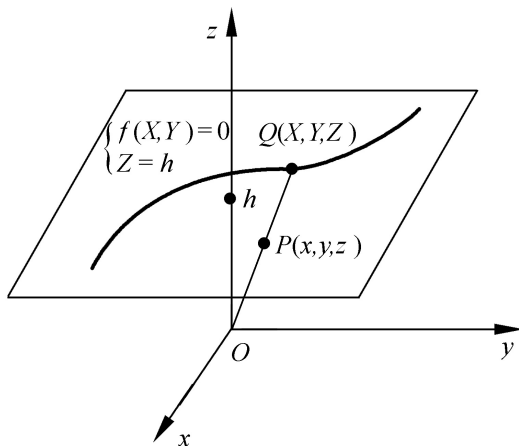


图 18.3

使得 Q 在由顶点 $(0, 0, 0)$ 与 $P(x, y, z)$ 所确定的直线上, 此直线方向向量为 $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 从而

$$\begin{aligned} X &= tx, \\ Y &= ty, \\ Z &= tz. \end{aligned}$$

将其代入 Q 点所应满足的关系, 必有

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 0, \\ tz &= h. \end{aligned}$$

解出 $t = \frac{h}{z}$, 代入头一方程得

$$f\left(h \frac{x}{z}, h \frac{y}{z}\right) = 0.$$

这就是所求的锥面方程 . 由此可见, 以原点为顶点的锥面关于 x, y, z 是齐次的 .

如果今有准线方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$z = 2,$$

则相应的锥面方程为

$$\frac{4}{a^2} \frac{x}{z}^2 + \frac{4}{b^2} \frac{y}{z}^2 - 1 = 0,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{4} = 0.$$

这正是一个椭圆锥.

3. 柱面方程

一般柱面是由一直线(称为母线),沿着一曲线 L (称为准线),平行移动而形成的曲面.例如,今给定准线方程为

$$f(x, y) = 0,$$

$$z = h.$$

而母线的方向为 $\mathbf{a}\mathbf{i} + \mathbf{b}\mathbf{j} + \mathbf{c}\mathbf{k}$.

设 $P(x, y, z)$ 是柱面上的一点,根据柱面性质,必在准线 L 上有相应点 $Q(X, Y, Z)$,使得 PQ .由此可以利用直线 PQ 的方程将 P, Q 点坐标间的关系找出来.即

$$X = x + at,$$

$$Y = y + bt,$$

$$Z = z + ct.$$

又由于 $Q(X, Y, Z)$ 在 L 上,即满足关系

$$f(X, Y) = 0,$$

$$Z = h.$$

用前式代入此式,由 $h = z + ct$ 得

$$t = \frac{h - z}{c}, \quad X = x + a \frac{h - z}{c}, \quad Y = y + b \frac{h - z}{c}.$$

从而有 x, y, z 之间的关系式

$$f(x + \frac{a}{c}(h - z), y + \frac{b}{c}(h - z)) = 0.$$

今若有母线方向 $= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 及准线方程

$$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \\ z = 0.$$

则柱面方程为

$$\frac{1}{a^2}(x - z)^2 + \frac{1}{b^2}(y - z)^2 = 1.$$

这是一个斜的椭圆柱面.

这里要特别指出的是,若母线平行坐标轴,则柱面变得很简单,如若 $= \mathbf{k}$ 而

$$L: \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ z &= h. \end{aligned}$$

此时 $X = x, Y = y$, 因而柱面就是

$$f(x, y) = 0.$$

同样道理,方程 $(y, z) = 0$ 和 $(z, x) = 0$ 分别是母线平行 x 轴与 y 轴的柱面方程.

4. 空间和平面区域的表示

在 xOy 平面上,方程 $f(x, y) = 0$ 表示曲线,而不等式 $f(x, y) > 0$ 通常就表示一个平面区域.例如

$$x^2 - y^2 - 1 > 0$$

表示以双曲线 $x^2 - y^2 - 1 = 0$ 为边界的一个区域.一般来说,一条平面曲线将平面分为若干部分,不等式所表示的那个区域可用“试点法”确定,即任取一点,例如 $(2, 1)$ 点,代入不等式有

$$4 - 1^2 - 1 > 0,$$

这说明 $(2, 1)$ 点在所示区域之内,同时,所有与 $(2, 1)$ 点能用不通过边界的曲线相连的点连同边界,就是这个不等式表示的区域.当然

能这样做的条件是作为二元函数的 $f(x, y)$ 要连续.

对于空间区域也是一样, 三元方程

$$f(x, y, z) = 0$$

一般表示曲面, 而不等式

$$f(x, y, z) \leq 0$$

则表示以 $f(x, y, z) = 0$ 为边界的区域, 这个区域在空间中所在的位置, 可以利用“试点法”来确定. 通常是, 空间被曲面 $f(x, y, z) = 0$ 分成了二个以上区域, 最好对每个区域中的点都试一下. 同样地, 这里的条件是作为三元函数的 $f(x, y, z)$ 应是连续的.

例 18.4.1 不等式组

$$x - y \leq 1,$$

$$x + y \leq 1,$$

$$x \geq 0.$$

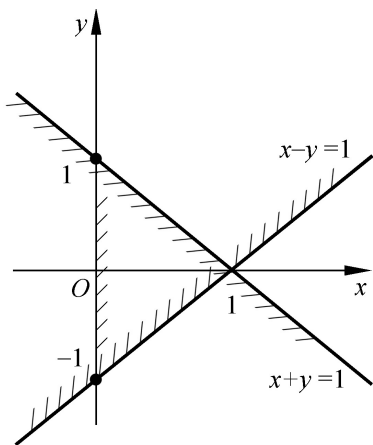


图 18.4

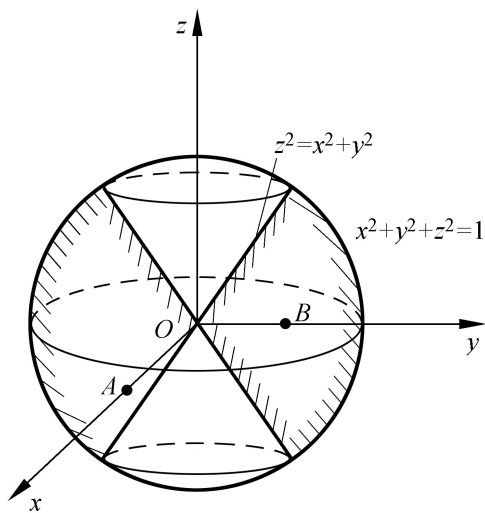


图 18.5

表示的区域, 可以由点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 试出, 如图 18.4 所示.

例 18.4.2 不等式组

$$\begin{aligned} z &\geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

表示的区域是：锥外，球内的共同部分(如图 18.5). 这可以试
 两点 $A \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 和 $B \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ 而得.

18.5 综合题

综例 18.5.1 直线 L 的方程为 $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3-A} = \frac{z-2}{4+B}$.

(1) A, B 为何值时, L 垂直 y 轴?

(2) A, B 为何值时, L 平行于直线

$$L: \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 1 = 0, \\ x - 6y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

$$x = 3 - t$$

(3) A, B 为何值时, L 与直线 $L_2: \begin{cases} y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$ 相交, 且平行于

$$z = t$$

平面 $x + y + z = 0$.

【解】 这是关于平面、直线间关系的综合题.

(1) 记 L 的方向向量为

$$= 2\mathbf{i} + (3 - A)\mathbf{j} + (4 + B)\mathbf{k}$$

根据 L 垂直 y 轴的条件可知, $\cdot \mathbf{j} = 0$, 即

$$(3 - A) \cdot 1 = 0.$$

因而只要 $A = 3$, 而 B 为任意即可. 此时直线为

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{n},$$

其中 n 为任意实数.

(2) 由于 L 垂直由两平面相交而成之直线, 因而 L 必垂直这两个平面的法线, 因此有方程

$$\cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 3A + 2B - 5 = 0,$$

$$\cdot (\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3A + B - 4 = 0.$$

解联立方程得 $A = B = 1$, 此时的直线为

$$\frac{x - 5}{2} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{5}.$$

(3) 根据两直线相交的条件: 两直线不平行且两直线的方向向量与两直线上各取一点的连线向量三者共面. 由此得第一个方程

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 - A & 4 + B \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 - 3 & -1 - 2 & 2 - 0 \end{vmatrix} = 22 - 4A - B = 0.$$

另一个方程由直线与所给平面法线垂直而得.

解联立方程

$$4A + B = 22,$$

$$A - B = 9.$$

得 $A = \frac{31}{5}$, $B = -\frac{14}{5}$. 此时的直线方程为

$$\frac{x - 5}{2} = \frac{y + 1}{16/5} = \frac{z - 2}{6/5}.$$

【解毕】

综例 18.5.2 求过 $M(2, 3, 1)$ 点, 且与直线

$$L_1: \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = 1 - 3y, \\ z = 2 - y. \end{cases}$$

都相交的直线.

【解】 (方法 1) 由于已有所求直线上的一点 M , 因此只需求出其方向向量即可. 设该向量为 $\mathbf{s} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

将 L 写成参数形式

$$x = -y,$$

$$L_1: y = y,$$

$$z = -4 + 2y.$$

因此在 L 上有点 $M_1(0, 0, -4)$ 及方向 $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$x = 1 - 3y,$$

同样可知 $L_2: y = y,$

$$z = 2 - y.$$

上有一点 $M_2(1, 0, 2)$ 及方向 $\mathbf{s}_2 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

由于 L 与 L_1 相交, 有 \mathbf{s}_1 与 MM_1 共面, 即

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = a - 9b + 5c = 0.$$

再由 L 与 L_2 相交, 有 \mathbf{s}_2 与 MM_2 共面, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2a + 4b + 10c = 0.$$

联立解出 $a = 55, b = 10, c = 7$. 故方程为

$$\frac{x-2}{55} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-1}{7}.$$

(方法 2) 如果还能找到直线 L 上的另一点 P , 则亦可列出方程. 为此求过 M 点与直线 L_1 的平面, 再求 L_2 与平面的交点, 此点即为所求之 P .

首先求平面的方程. 由于直线 L 由交面式给出, 因此可用平面束的方程

$$(x+y) + (x-y+z+4) = 0,$$

将所通过的 M 点坐标代入, 求得参数 $\lambda = -\frac{4}{5}$. 从而得到 的方

程为

$$x - 9y + 5z + 20 = 0 .$$

再求 与直线 L_2 的交点, 即解方程

$$x = 1 - 3y,$$

$$z = 2 - y,$$

$$x - 9y + 5z + 20 = 0 .$$

得 P 的坐标为 $-\frac{76}{17}, \frac{31}{17}, \frac{3}{17}$. 所求直线为 MP 所确定, 其方向向量为

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{76}{17} \mathbf{i} + 3 - \frac{31}{17} \mathbf{j} + 1 - \frac{3}{17} \mathbf{k} \\ &= \frac{110}{17} \mathbf{i} + \frac{20}{17} \mathbf{j} + \frac{14}{17} \mathbf{k} = \frac{2}{17} (55\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) . \end{aligned}$$

这就可以得到(方法 1)的答案.

(方法 3) 由于所求直线 L 过 M 点且与直线 L_1 相交, 则 L 必在过 M 与 L_1 的平面 π_1 上; 同理, 它也必须是在过 M 与 L_2 的平面 π_2 上. 由 π_1 和 π_2 联立的交面式直线方程, 即为所求之直线 L 的方程. 利用(方法 2)中的方法可以求出平面 π_1 的方程为 $x - 9y + 5z + 20 = 0$; 平面 π_2 的方程为 $x - 2y - 5z + 9 = 0$.

因此, 交面式

$$x - 9y + 5z + 20 = 0,$$

$$x - 2y - 5z + 9 = 0 .$$

为所求直线 L 的方程. 可以验证, 此直线的方向向量

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -9 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = +55\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 7\mathbf{k} .$$

与前面的解一致.

(方法 4) 我们也可以纯代数地来考虑这个问题, 为简单记, 令所求直线 L 的方程为

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{c},$$

写成联立方程形式

$$x - ay + 3a - 2 = 0,$$

$$cy - z + 1 - 3c = 0.$$

其中 a, c 为待定常数. 由于 L 与 L_1 有交点, 所以方程

$$x - ay + 3a - 2 = 0,$$

$$cy - z + 1 - 3c = 0,$$

$$x + y = 0,$$

$$x - y + z + 4 = 0.$$

即

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -a & 0 & 3a-2 & x & \\ 0 & c & -1 & 1-3c & y & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & z & \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 1 & \end{array} = \mathbf{0}$$

有非零解, 从而其系数行列式必为零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 3a-2 \\ 0 & c & -1 & 1-3c \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

从而得

$$5c + a = 9.$$

同理由于 L 与 L_2 有交点, 则由齐次方程性质, 又有

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 3a-2 \\ 0 & c & -1 & 1-3c \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-5c + a = 2.$$

联立以上两式, 解得 $a = \frac{55}{10}$, $c = \frac{7}{10}$, 这样又一次得到所求直线的

方向向量是

$$= \frac{55}{10}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{7}{10}\mathbf{k} = \frac{1}{10}(55\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 7\mathbf{k}).$$

这与前面解法的结果是一致的.

【解毕】

综例 18.5.3 求直线 L 的方程, 满足条件:

(i) 它过点 $A(1, 0, -2)$;

(ii) 它与平面 $\pi: 3x - y + 2z + 3 = 0$ 平行;

(iii) 它与直线 $L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ 相交.

(1987 年考研题)

【解】 此题亦有多种方法求解, 关键在于考虑用直线的哪一种表示形式.

(方法 1) 考虑用直线的标准式, 即点向式. 为此要求出直线的方向. 设所求直线 L 的方向向量是 \mathbf{s} ; 而已知的直线 L_1 的方向是 $\mathbf{s}_1 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, 其上有一点 $A_1(1, 3, 0)$. 同时, 给定的平面 π 的法线向量为 $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

根据条件 (ii), L 的方向向量 \mathbf{s} 垂直平面的法线向量 \mathbf{n} , 即 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$.

再根据条件 (iii), \mathbf{s} 必垂直由 AA_1 与 L_1 所确定的平面的法线向量 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{s}_1 \times \overrightarrow{AA_1}$.

由 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ 和 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, 可取

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \times (\mathbf{s}_1 \times \overrightarrow{AA_1}).$$

今有

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k},$$

从而

$$= \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 31\mathbf{k}.$$

于是得到所求直线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{50} = \frac{z+2}{31}.$$

(方法 2) 考虑用交面式表示所求直线 L . 根据条件 (ii) 先过 A 点, 作平行平面 π_1 的平面 π_1 :

$$3(x-1) - y + 2(z+2) = 0.$$

再根据条件 (iii) 作平面 π_2 通过点 A 和直线 L_1 , 该平面的法线向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \overrightarrow{AA_1} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

其方程为

$$7(x-1) + 8y - 12(z+2) = 0.$$

联立以上方程, 得到所求直线的交面式为

$$3x - y + 2z + 1 = 0,$$

$$7x + 8y - 12z - 31 = 0.$$

(方法 3) 设法求出所求直线与给定直线 L 的交点 $M(x, y, z)$. 首先, M 在直线 L_1 上, 将 L 表成参数式, 则 M 点的坐标可表成

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= t. \end{aligned} \quad (*)$$

由于线段 AM 平行平面 π_1 , 即 $\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$, 从而得

$$3(x-1) - y + 2(z+2) = 0.$$

将 (*) 式代入其中, 得到 $t = -\frac{1}{16}$, 再代回 (*) 中得到 M 点的坐标

为 $M \frac{3}{4}, \frac{25}{8}, \frac{-1}{16}$, $\mathbf{MA} = \frac{1}{16}(-4\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 31\mathbf{k})$, 这样可得到与(方法 1)同样的结果.

(方法 4) 我们还可以从动点轨迹的角度来求直线 L 的方程. 设 $P(x, y, z)$ 是直线 L 上的动点.

首先它与 A 的连线和给定直线 L 相交, 即满足条件: AP, AA_1 及 l_1 共面, 这里 $A_1(1, 3, 0)$ 是直线 L_1 上的点, $A(1, 0, -2)$ 是给定点. 这样就有动点 $P(x, y, z)$ 应满足的方程

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $-7(x-1) - 8y + 12(z+2) = 0$.

其次, 动点 P 与 A 的连线必须平行平面 π , 即必须垂直其法线向量, 从而由 $\mathbf{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$, 又有方程

$$3(x-1) - y + 2(z+2) = 0.$$

两者联立, 又得到与(方法 2)一致的结果, 但观察点是不一样的.

(方法 5) 利用待定系数的方法, 设过 $A(1, 0, -2)$ 的直线 L 方程为

$$\begin{aligned} x &= 1 + lt, \\ y &= mt, \\ z &= -2 + nt. \end{aligned}$$

首先, 直线 L 平行平面 π , 从而有其方向向量 $\mathbf{l} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ 垂直 π 的法向量 $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 从而有方程

$$3l - m + 2n = 0.$$

其次, L 与 L_1 相交, 将 L 的参数表示式代入 L_1 的方程得到联立方程

$$4mt + 2lt = 12,$$

$$4nt - lt = 8.$$

消去常数项得方程 $7l + 8m - 12n = 0$.

再解齐次联立方程

$$3l - m + 2n = 0,$$

$$7l + 8m - 12n = 0.$$

并令 $l = -4$, 解出 $m = 50, n = 31$, 代入原直线的设定方程, 得到 L 的参数式

$$x = 1 - 4t,$$

$$y = 50t,$$

$$z = -2 + 31t.$$

【解毕】

综例 18.5.4 今有直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$, 求:

(i) 与 L 关于原点对称的直线 L_1 方程;

(ii) 与 L 关于 xOy 平面对称的直线 L_2 的方程;

(iii) 与 L 关于平面 $x + y + z = 0$ 对称的直线 L_3 的方程.

【解】 这主要是利用点与直线方程关系的基本概念来求解.

(i) 对于任何在直线 L 上的点 $P(x, y, z)$, 由于 L 与 L 关于原点对称, 从而与 P 关于原点对称的点 $Q(-x, -y, -z)$ 必在 L 上, 这样就有关系

$$\frac{-x-1}{2} = \frac{-y}{1} = \frac{-z-3}{-2}$$

成立, 这就是说 L_1 的方程是

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2}.$$

另外, 我们也可以从对称的性质来求直线 L_1 的方程. 首先由于 $(1, 0, 3)$ 在原直线 L 上, 则关于原点的对称点 $(-1, 0, -3)$ 必在对称直线 L_1 上, 又 L_1 与 L 是平行的, 即方向不变, 这样由点向式

可得前面求得的方程 .

(ii) 利用(i)的相同思路;

$P(x, y, z)$ 在 L_2 上, 则关于 xOy 的对称点 $Q(x, y, -z)$ 必在 L 上, 从而有关系

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{-z-3}{-2}$$

成立, 这样 L_2 的方程是

$$\frac{x-1}{+2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{+2} .$$

如果要利用求直线 L_2 的所过点及其方向来求方程, 则首先因 $(1, 0, 3)$ 在 L 上, 由对称性可知 $(1, 0, -3)$ 在 L_2 上; 再者由于 L 的方向为 $= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 及 L_2 与 L 关于 xOy 平面对称, 则 L_2 的方向向量 与 L 的方向向量 之间的关系是在 xOy 平面上的分量相同, 在 z 方向上的分量反号, 即

$$\mathbf{s}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} .$$

从而 L_2 有方程

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2} .$$

(iii) 根据几何分析, L 与平面 之交点 O 也在所求的对称直线 L_3 上, 这点坐标可由方程

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2} ,$$

$$x + y + z = 0 .$$

联立而得 . 由上面的方程得

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2} &= \frac{x-1+y+z-3}{2+1-2} \\ &= \frac{(x+y+z)-4}{1} = -4 . \end{aligned}$$

从而有 O 的坐标为 $x = -7, y = -4, z = 11$.

利用综例 17.5.4[注]中的结果, L_3 的方向向量 s_3 可以如此求得

$$\begin{aligned} s_3 &= -2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ &= -2 \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{i} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 是直线 L 的方向向量, 而 $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 是平面的法线向量, 代入得直线 L_3 的方向向量为

$$\begin{aligned} s_3 &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} - \frac{2}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \frac{4}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{8}{3}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

因此所求关于平面 π 与 L 对称的直线 L_3 的方程为

$$\frac{x+7}{4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-11}{-8}. \quad \text{【解毕】}$$

综例 18.5.5 求平分由两个平面

$$\pi_1: x - 2y + 2z + 21 = 0,$$

$$\pi_2: 7x + 24z - 50 = 0$$

所成两面角的平分角平面的方程.

【解】 (方法 1) 利用点到平面距离公式及轨迹法来求此平面. 平分角平面是到这两个平面等距点的轨迹. 设动点为 $P(x, y, z)$, 则有

$$\frac{|x - 2y + 2z + 21|}{1 + 4 + 4} = \frac{|7x + 24z - 50|}{49 + 576},$$

化简得

$$\frac{x - 2y + 2z + 21}{3} = \pm \frac{7x + 24z - 50}{25}.$$

整理得两个方程

$$4x - 50y - 22z + 675 = 0,$$

和

$$46x - 50y + 122z + 375 = 0.$$

(方法 2) 利用点法式求平分角平面.

首先找出两平面上一个公共点, 为此可令 $z=0$, 代入两个方程, 解出公共点 P 的坐标

$$P \left(\frac{50}{7}, \frac{197}{14}, 0 \right).$$

再求平分角平面的法线向量. 设 \mathbf{n}^0 和 \mathbf{n}^0 分别为平面 π_1 和 π_2 的法线单位向量, 即

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3},$$

$$\mathbf{n}^0 = \frac{7\mathbf{i} + 24\mathbf{k}}{25}.$$

则根据平分角平面的几何特性, 这两个平分角平面的法线向量正是由 \mathbf{n}^0 和 \mathbf{n}^0 为边的平行四边形的两条对角线, 分别为

$$\mathbf{n}^0 \pm \mathbf{n}^0 = \frac{1}{3} \pm \frac{7}{25} \mathbf{i} + \frac{-2}{3} \pm 0 \mathbf{j} + \frac{2}{3} \pm \frac{24}{25} \mathbf{k}.$$

这样就可以得到前面写出的两个平面方程.

【解毕】

综例 18.5.6 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b & a \\ a_2 & b & a \\ a_3 & b & a \end{pmatrix}$ 满秩, 直线

$$L_1: \frac{x - a_1}{a_1 - a_2} = \frac{y - b}{b - b} = \frac{z - a}{a - a} \text{ 及}$$

$$L_2: \frac{x - a_1}{a_1 - a_3} = \frac{y - b}{b - b} = \frac{z - a}{a - a}$$

判断 L_1 和 L_2 是重合, 还是交于一点, 还是异面直线, 还是平行而不相交的两直线. (1998 年考研题)

【解】 猛一看似乎较复杂, 因为全是文字的. 但从几何上分析, 则十分明显.

(方法 1) 设三点为 $P_i(a_i, b, a)$ ($i=1, 2, 3$). 显然向量

\vec{OP}_i 是不共面的三个向量. 这是由矩阵 \mathbf{A} 的秩 = 3 而得. 由题设可知, L_1 是过 P_3 平行 $P_1 P_2$ 的直线, L_2 是过 P_1 平行 $P_2 P_3$ 的直线, 这样, 直线 L_1, L_2 与 $P_1 P_2, P_2 P_3$ 形成平行四边形.

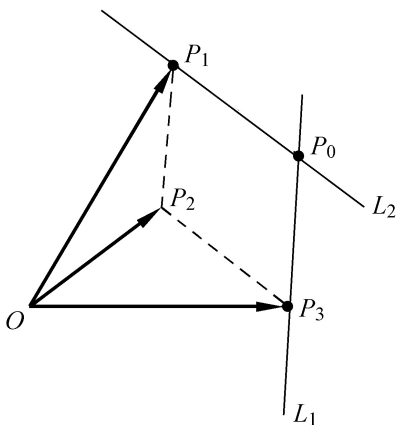


图 18.6

由图 18.6 可知, L_1 与 L_2 交于

$$P_0 = P_3 + (P_1 - P_2) = P_3 + P_1 - P_2,$$

代入 L_1 与 L_2 的方程可以直接验证这个结果.

(方法 2) 此题利用判断两空间直线相交的条件也很容易.

由于 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1 = P_1 P_2$, $\vec{s}_2 = P_2 P_3$. 两线上各取一点的连线为 $P_3 P_1$. 显然有混合积

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, P_3 P_1) = 0.$$

因为三点构成封闭三角形. 又 \vec{s}_1 与 \vec{s}_2 不平行, 所以两直线相交于一点. 【解毕】

综例 18.5.7 求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕直线 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 旋转

一周而成之曲面的方程 .

【解】 分析这种旋转面 S 的几何对称性质可知 .

点 $P(x, y, z)$ 在曲面 S 上的充要条件是存在直线 L 上的点 $Q(X, Y, z)$ 使得旋转半径与之相同, 即

$$OP = OQ$$

O 点为旋转轴上的点, 坐标为 $(2, 3, z)$, 如图 18.6 所示 . 具体有 (注意 Q 和 P 有相同的 z 坐标)

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (X - 2)^2 + (Y - 3)^2 . \quad (*)$$

现在只要在上面方程中, 将 X, Y 用 x, y, z 的关系代之, 就得到所求曲面的方程, 由于 $Q(X, Y, z)$ 在直线 L 上, 即

$$X = 3 + 2t,$$

$$Y = 1 + 3t,$$

$$z = -1 + t.$$

由第三个方程解出 $t = z + 1$, 代入前二个方程得

$$X = 2z + 5,$$

$$Y = 3z + 4.$$

最后代入 $(*)$ 式, 并整理, 得到旋转面的方程为

$$x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0.$$

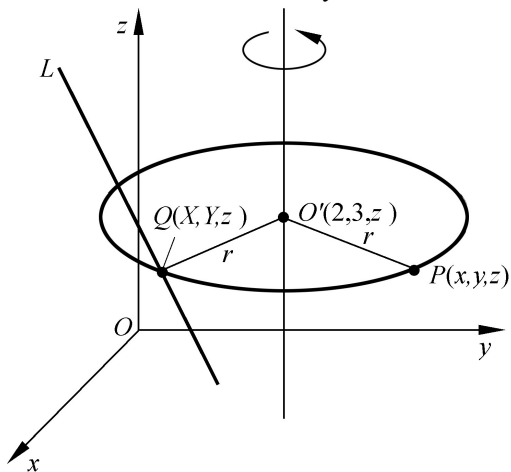


图 18.6

这是一个圆双曲面方程 .

【解毕】

综例 18.5.8 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周而成的曲面方程 . (1998 年考研题)

【解】 首先求投影直线 L_0 的方程 . 最直接的做法是过直线 L 作垂直平面 π 的平面, 它与 π 之交线即为所求 . 设所求平面的法向量为 \mathbf{n} , 则

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

从而

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

因此过 L 且垂直于 π 的平面方程为

$$(x - 1) - 3y - 2(z - 1) = 0.$$

从而所求的投影直线方程为

$$L_0: \begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

下面再求 L_0 绕 y 轴旋转而成之曲面 S 的方程 . 为此先把 L_0 改写成参数形式

$$\begin{aligned}X &= 2Y, \\ L_0: \quad Z &= -\frac{1}{2}(Y - 1).\end{aligned}$$

设 $P(x, y, z)$ 是曲面 S 上一点, 则必有 L_0 上一点 $Q(X, Y, Z)$ 使得

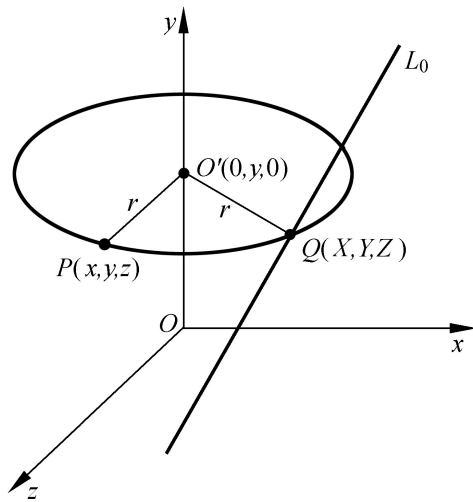


图 18.7

$$x^2 + z^2 = X^2 + Z^2,$$

$$Y = y,$$

$$X = 2Y = 2y,$$

$$Z = -\frac{1}{2}(Y - 1) = -\frac{1}{2}(y - 1).$$

将后面方程代入前一方程,消去 X, Z 得所求曲面方程为

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0.$$

【解毕】

第 19 章 多元函数的连续性与可微性

19.1 引言

多元函数是一元函数的发展,因此在内容及研究方法上继承性很强,其主要内容是讨论多元函数的许多分析性质,如连续性,可微性,可积性等等.只是由于自变量的增加,而使问题变得更多样与复杂一些.因此在讨论多元函数问题时,应注意两点:

第一,要注意多元函数的许多基本概念与计算公式与一元函数相应部分的密切联系.特别在研究方法上采用的把多元问题一元化的方法,应予以重视.

第二,要注意由于自变量增加而产生的新问题,从而带来的许多与一元函数不同之处.这里最为突出的是极限中自变量变化趋势的多样所带来的许多问题的复杂性.

19.2 多元函数的符号表示及其定义域

多元函数的定义与一元函数的定义没有什么原则差别,类似的有:给定 n 维空间 \mathbb{R}^n 中的一个点集 D ,若对于任意的点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$,都有确定的一个实数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与之对应,则称在集合 D 上给定了关于变量 x_1, \dots, x_n 的一个 n 元函数 f ,并简写成 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.集合 D 叫定义域,而集合 $Y = \{u \in \mathbb{R} \mid u = f(P), P \in D\}$ 叫做函数 $u = f(P)$ 的值域.

1. 多元函数的符号表示

通常有三种表示方式,即

显示表示: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

隐式表示: $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, 在隐式表示中应明确指出, 自变量与函数是什么.

参数表示, 例如有

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v).$$

这里也应指明自变量是什么, 如 x 和 y 是自变量, 而 z 是函数, 则参数就是 u 和 v . 实际上, 参数表示是显式与隐式的结合, 这三个方程的头两个可看作 u 和 v 作为 x 和 y 的隐式表示的函数, 而一旦将其解成 $u = u(x, y)$ 及 $v = v(x, y)$ 代入第三个方程, 这就是 z 关于 x, y 的显式表示了.

由于自变量多了, 这种符号的表示可以相当丰富, 比如二元函数

$$Z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, x^2 + y^2\right).$$

这就是一个复合函数, 它实际上包含有三个中间变量 $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$, $w = x^2 + y^2$, 通常没有必要明显写出来, 但在函数结构的分析上应当如此看待. 在具体问题中, 我们会遇到用一组方程来表示的函数. 例如

$$u = f(x, y, s, t),$$

$$(y, s, t) = 0,$$

$$(s, t) = 0.$$

如果明确 u 是函数, 那么自变量有几个呢? 通常可以如此计算:

$$\text{自变量个数} = \text{变量个数} - \text{方程个数}.$$

像上述问题中, 变量共有 5 个 (u, x, y, s, t), 方程是 3 个, 因而自变量只能有两个. 如假设为 x 和 y , 则变量 s 和 t 就是中间变量了. 这

种函数结构的分析,即明确谁是函数,谁是自变量以及谁是中间变量,对于求函数的导数以及积分都是重要的.

2. 空间的区域与函数的定义域

首先我们以三维空间为例,进一步列出一些与集合及区域有关的定义,这里记

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), \quad \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

有界闭集,若 D 是闭集,同时存在常数 $M > 0$,使得对任何 $\mathbf{x} \in D$ 均有 $\|\mathbf{x}\| \leq M$.例如

$$D_1 = \{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$$

是闭集,但无界.而

$$D_2 = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

则就是有界闭集了.

连通集 若集合 S 中任何两点均可用 S 中的连续曲线相连,则称 S 为(道路)连通集.例如集合 $\{|x_1| \leq 1 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ 就不是连通集,而 $\{|x_1| \leq 1 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ 是连通集.

区域 规定连通的开集称为区域.

关于函数定义域的求法,实际上与一元函数类似,是用多元的不等式来表示的集合.

例如,函数 $Z = x \cdot y(1 - x - y)$ 的定义域由下列 4 组不等式表示:

$$D_1 = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0 \end{matrix} \right.,$$

$$D_2 = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0 \end{matrix} \right.,$$

$$D_3 = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0 \end{matrix} \right.,$$

$$D_4 = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0 \end{matrix} \right..$$

定义域为

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 .$$

又如 $w = \frac{\ln(x + y + z - 1)}{x^2 + y^2 - z^2}$ 的定义域为

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z - 1 > 0, x^2 + y^2 - z^2 > 0\} .$$

19.3 多元函数的极限

以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例就极限的要点:二重极限与累次极限予以说明 .

二重极限就是通常的极限 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ 用 $\epsilon - \delta$ 的语言描述的定义是:

对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $0 < (P - P_0) < \delta$, 则

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon ,$$

这里 $P(x, y), P_0(x_0, y_0), (P - P_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

用几何语言来说就是,当 P 以无论怎样的路径趋向于 P_0 时,函数 $f(P)$ 趋向于常数 A .这里与一元极限相比,要着重指出的是 $P \rightarrow P_0$ 有无穷多种方式,而一元问题则实质上只有两种方式: $x \rightarrow x_0^+$ 和 $x \rightarrow x_0^-$.这种多元函数中自变量 $P \rightarrow P_0$ 的多路径性,造成了多元极限的复杂性 .

例如,幅角函数

$$(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}, & \text{当 } y \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } y = 0 . \end{cases}$$

在 $O(0, 0)$ 点,当 $P(x, y)$ 沿任何直线

$$\begin{aligned} x &= t \cos \theta, \\ y &= t \sin \theta . \end{aligned}$$

趋向于原点时,均有极限,但各不相同.当然

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x, y)$$

不存在.

一个函数,即使当 P 沿任何直线趋于 P_0 时,有相同的极限,也不一定能保证其极限存在.一个最直观的例子是函数 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(|e^x - 1 - y|)$, 其中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 是符号函数,即

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

显然,对任何实数 a 和 b 都有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ ay + by = 0}} f(x, y) = 1,$$

但

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = e^x - 1}} f(x, y) = 0.$$

从几何上看该函数除在曲线 $y = e^x - 1$ 上定义为 0 以外,在其他地方均为 1.

关于二重极限的计算,一般情况比较复杂,通常的做法是化成一元极限问题,并应用夹逼定理.例如

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = 0,$$

这是因为

$$0 \leq \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}.$$

又如,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} 1 + \frac{y}{x + y}^{x+y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} 1 + \frac{y}{x + y}^{\frac{x+y}{y} \cdot y} = e.$$

累次极限也是多元函数的一种极限,即先固定一个变量,对另一个变量求极限,然后再对这个变量求极限,如 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$ 或者 $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$. 这种极限实质是用“冻结变量”的方法,将多元问题一元化. 值得注意的是,在一般情形下,这两个极限不一定相等,更不一定等于二重极限. 例如:对函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在,但

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

即累次极限不存在,但重极限却存在. 事实上

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

这是因为

$$0 < \left| x \sin \frac{1}{y} \right| < |x| \rightarrow 0.$$

在一定条件下,由重极限的存在可保证累次极限的存在且与之相同. 有关内容可参阅内容较深的参考书. 但值得指出的是,在混合偏导数求导次序以及重积分与累次积分的关系等问题中,我们遇到的正是累次极限、重极限之间的关系处理.

多元函数中无穷小概念与一元函数相同,是极限为零的函数,即若 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = 0$, 则称当 $P \rightarrow P_0$ 时, $f(P)$ 是无穷小,记成 $f(P)$

$= o(1)$; 如果 $f(P)$ 和 $g(P)$ 都是无穷小,且 $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$, 则称 $f(P)$ 是 $g(P)$ 的高阶无穷小,并记作 $f(P) = o(g(P))$. 特别是当 $g(P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 时, $f(P) = o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$, 表示 $f(P)$ 是 P 到 P_0 距离的高阶无穷小.

19.4 多元函数的连续性

(1) 二元函数 $z = f(x, y)$ 连续性的定义有三种形式. 若 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域中有定义, 以下三条均可作为 $f(x, y)$ 在 P_0 点连续的定义:

第一, $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$.

第二, 记 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0.$$

第三, $f(x, y) = f(x_0, y_0) + o(\rho)$, 其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 是 $P \rightarrow P_0$ 的无穷小.

若以其中之一作为连续性定义, 则另外两条就是连续性的充要条件.

(2) 连续函数在有界闭域上的性质: 这些结论与一元函数一样, 但很重要, 有必要再列出来.

有界性质: $f(P)$ 在有界闭集 D 上连续, 则函数在 D 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $\forall P \in D, |f(P)| \leq M$.

极值性质: 若 $f(P)$ 在 D 上连续, D 是有界闭域, 则 $f(P)$ 在 D 上有最大值与最小值, 即存在 $P_1, P_2 \in D$, 使得

$$f(P_1) = \max_{P \in D} f(P), \quad f(P_2) = \min_{P \in D} f(P).$$

介值性质: 若 $f(P)$ 在 D 上连续, D 是连通集, 对任何 D 中两点 P_1 和 P_2 , 且 $f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$, 则存在 $P_0 \in D$, 使得 $f(P_0) = 0$. 特别是, 若 D 是凸域, 即 $P_1, P_2 \in D$, 则 $P_1 P_2$ 亦在 D 中, 当满足 $f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$ 时, 必在 $P_1 P_2$ 连线上有一点 P ,

$$P = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

使得 $f(P) = 0$.

在第 18 章中曾提出利用“试点法”来确定一个多元不等式, 比

如 $x^2 + y^2 - 1 < 0$, 指的是哪块区域. 这种方法的理论依据就是多元函数的连续性及其介值性质.

例 19.4.1 研究函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的连续性.

【解】 首先当 $x \neq 0$ 时 $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x}$ 是连续的.

若 $x = 0$, 今计算极限

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0}} y = y_0. \end{aligned}$$

由此可知 $f(x, y)$ 在 $x = 0, y \neq 0$ 时不连续. 但若将 $x = 0$ 时的函数值改成 y , 即

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0. \end{cases}$$

则在全平面内都是连续的.

【解毕】

19.5 偏导数与全微分

1. 偏导数的定义与计算

在多元函数中, 只让自变量中的某一个变化, 而将其他均视作常数, 这样多元函数就当作了一元函数, 此时, 函数对该变量的导数就称为多元函数关于此变量的偏导数. 从定义看, 偏导数与一元导数并无大的差异, 但要注意几点, 今仍以二元函数 $z = f(x, y)$

为例 .

第一, 在求偏导数时, 其他变量被视作常量, 因此可以在求某点导数时将其代入, 以简化计算, 例如若

$$f(x, y) = x^2 e^y + (x - 1) \arctan \frac{y}{x},$$

在求 $(1, 0)$ 的两个偏导数时, 可以先代入后计算, 即

$$\text{由 } f(x, 0) = x^2, \text{ 得 } \left. \frac{f(x, 0)}{x} \right|_{x=1} = \frac{f(1, 0)}{x} = 2;$$

$$\text{由 } f(1, y) = e^y, \text{ 得 } \left. \frac{f(1, y)}{y} \right|_{y=0} = \frac{f(1, 0)}{y} = 1.$$

但若要求混合偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, 则此法就不适用了 .

第二, 在几何上偏导数 $\left. \frac{f(x, y)}{x} \right|_{(x_0, y_0)}$, 实际上是空间曲线

$z = f(x, y)$
在 (x_0, y_0) 处的切线斜率 .
 $y = y_0$

第三, 在导数符号上要特别注意, 像记号 $\frac{f(x, y)}{x}$ 明确了 y 当作常数, 对 x 求导, 但遇到复合函数的情形, 如 $z = F \frac{y}{x}, x^2 + y^2$. 如果设中间变量 $u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$, 则 $\frac{F(u, v)}{u}$ 的意义就是将 v 视作常数, 对 u 求导. 但这样做有时很麻烦, 因此规定 $\frac{F(u, v)}{u} = F_u(u, v) = F_1(u, v)$, 而且 $F_1 \frac{y}{x}, x^2 + y^2$ 的意义是 $F_u(u, v) |_{u=\frac{y}{x}, v=x^2+y^2}$, 即是 F 对第一位置变量求导, 然后将数值 $u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$ 代入后的导数值 .

例如, 若 $z = F \frac{y}{x}, x^2 + y^2 = \frac{y}{x} \cdot \sin(x^2 + y^2)$, 令 $u = \frac{y}{x}$,
 $v = x^2 + y^2$, 则 $z = F(u, v) = u \cdot \sin v$. 于是有

$$F_1(u, v) = F_u(u, v) = \sin v,$$

即 $F_1 \frac{y}{x}, x^2 + y^2 = \sin(x^2 + y^2);$

$$F_2(u, v) = F_v(u, v) = u \cos v,$$

即 $F_2 \frac{y}{x}, x^2 + y^2 = \frac{y}{x} \cos(x^2 + y^2);$

$$\begin{aligned} F_x \frac{y}{x}, x^2 + y^2 &= -\frac{y}{x} \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) \\ &= -\frac{y^2}{x^2} \sin(x^2 + y^2) + \frac{y}{x} \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x. \end{aligned}$$

2. 高阶偏导数与求导次序无关的条件

考察二元函数 $z = f(x, y)$ 的混合偏导数 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 是否等于

$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, 其实质是累次极限的次序问题. 事实上,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\Delta y} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \\ &\quad - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \\ &\quad - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)] / \Delta x \Delta y \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}. \end{aligned}$$

同样方法可得

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\
&\quad - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)] / \Delta x \Delta y \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{x y}.
\end{aligned}$$

因此, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 是否等于 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ 即是累次极限

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{x y}$ 是否等于 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{x y}$ 的问题.

混合偏导数与求导次序无关的条件是该混合偏导数连续. 比如 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$ 的条件就是混合偏导数 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 连续.

这个证明可利用上面的展开式, 在 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 连续的条件下, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{x y} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{x y}$$

即可, 有兴趣的读者请自行验证, 主要是利用一元的有限增量公式与连续函数的性质, 与偏导数连续则可微的证明类似.

关于混合偏导数与次序有关的例子如下:

设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = y = 0. \end{cases}$$

可直接验证 $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = -1$, 但 $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1$.

事实上,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{f(0, y)}{x} = \begin{cases} -y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

得出 $\frac{\partial^2 f(0, y)}{\partial y \partial x} = -1$, 即 $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = -1$.

同样可得 $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1$.

3. 全微分的定义与性质

偏导数只是研究当只有一个自变量变化时所引起函数变化的问题, 因此不能全面反映多元函数随自变量变化的整体性质. 而全微分则反映了当自变量变化时函数变化的全面性质.

与一元函数一样, 全微分是函数增量中的“线性主部”. “线性”是指全微分是自变量增量的线性函数, 而“主部”是指全微分与函数增量之差是自变量变化的高阶无穷小. 以二元函数为例, 若函数为 $z = f(x, y)$, 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点, 如果函数增量可表示为

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + A(x_0, y_0) \Delta x + B(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \end{aligned}$$

则称函数 $f(x, y)$ 在 P_0 点可微, 且其中的线性部分, 记成 $df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0) \Delta x + B(x_0, y_0) \Delta y$, 称为 $f(x, y)$ 在 P_0 点的全微分.

关于全微分有两个重要的性质:

其一, f 在 P_0 点可微, 则 f 在 P_0 点连续, 偏导数存在, 且

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

其二, 若偏导数在 P_0 点连续, 则 f 在 P_0 点可微.

4. 函数连续, 偏导存在与可微的关系

对多元函数来讲, 上述几个概念的关系有些复杂, 下面整理一下. 仍以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例, 取 $P_0(x_0, y_0)$.

极限 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ 存在时, 要求函数 $f(x, y)$ 在 P_0 的某去心

邻域中有定义,并不要求 f 在 P_0 点有定义.

$f(P)$ 在 P_0 连续是指 $P \rightarrow P_0$ 时, $f(P)$ 的极限存在而且等于 $f(P_0)$. 这里显然要求 $f(P)$ 在 P_0 的某邻域中有定义,当然包括 $f(P_0)$ 有定义;从增量角度说, $f(P)$ 在 P_0 点连续,意味着函数在此点的增量是无穷小,即随 $P \rightarrow P_0$ 而趋于 0.

$f(P)$ 在 P_0 点可微,则要求函数在该点处增量不但是无穷小,而且可分出一个线性部分,使得两者之差是关于 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的高阶无穷小.在可微的假定之下,连续、偏导数存在都是必要条件.

由此可见极限存在、连续、可微三个概念,后者比前者要求高,后者以前者作为必要条件,或者说后者是前者的充分条件.

只是偏导数与前面三者关系有些特别,原因在于偏导数研究的是函数依赖于一个自变量变化时的性质.在一般情形下,它与函数极限存在、连续等性质无必要与充分的关系.比如,函数连续时,偏导数可以存在,也可能不存在;反过来,偏导数存在时,函数可能连续,也可能不连续.例如 $z = \operatorname{sgn}(xy)$ 在 $P_0(0, 0)$ 处,偏导数存在,但在 $P_0(0, 0)$ 处不连续; $z = |xy|$ 在 $P_0(0, 0)$ 处,函数是连续的,而偏导数不存在.

不但如此,偏导数 $\frac{f(x_0, y_0)}{x}$ 的存在,仅要求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x}$$

存在,这意味着函数 $f(x, y)$ 只要在线段 $y = y_0$ 上 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有定义,并不要求它在 P_0 点某邻域上有定义.

至于偏导数与全微分的关系则稍复杂一点.其中全微分存在一定有偏导数存在,这是容易理解的.但反过来,只有偏导数的存在,当然不能保证可微性(就是连续性也保证不了!),若加强为偏

导数连续,就能保证可微了,即这是可微的充分条件.请注意这不是必要条件,例如函数

$$z = \begin{cases} 0, & y \neq 0, \\ x^2, & y = 0. \end{cases}$$

在原点是可微的,因为

$$\begin{aligned} z(0,0) - z(x,y) &= z(0,0) - z(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0 \\ x^2, & y = 0 \end{cases} \\ &= 0 + o(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

即 $dz(0,0) = 0$,但在 $(0,0)$ 处的偏导数是不连续的.

5. 二元函数微分的几何意义

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点可微的几何意义是曲面 $z = f(x, y)$ 在 P_0 点有非垂直的(即不平行于 z 轴)的切平面,此切平面方程为

$$z - z_0 = \frac{f'(x_0, y_0)}{x} (x - x_0) + \frac{f'(x_0, y_0)}{y} (y - y_0),$$

即为过 (x_0, y_0, z_0) 点,法线向量为

$$\mathbf{n} = \frac{f'(x_0, y_0)}{x} \mathbf{i} + \frac{f'(x_0, y_0)}{y} \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

的平面.

反过来,若曲面 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 有非垂直的切平面,则函数 $f(x, y)$ 在 P_0 点可微.

这就是说非垂直切平面的存在,是函数可微的充要条件.

19.6 综合题

综例 19.6.1 解下列各题:

(i) 设 $z = x - y + f(x - y)$, 已知 $y = 0$ 时 $z = x^2$. 求函数 f 及 z .

(ii) 设 $f(x - y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y) = ?$

(iii) 设 $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x) = \cos x$, $(x) = \sin x$, 求

(a) $f((x), (x))$,

(b) $(f(x, y))$,

(c) $f_1((x), (x)), f_2(x, (x)), \frac{df((x), (x))}{dx}$.

【解】 (i) 由 $y=0$ 时 $z=x^2$ 代入 z 的函数关系得

$$x^2 = x + f(x),$$

即

$$f(x) = x^2 - x.$$

从而 $f(x - y) = (x - y)^2 - (x - y) = (x - y)(x - y - 1)$,

$$z = (x - y) + (x - y)(x - y - 1) = (x - y)^2.$$

$$u = x - y,$$

(ii) 令 $v = \frac{y}{x}$. 解出

$$x = \frac{u}{1 - v},$$

$$y = \frac{uv}{1 - v}.$$

代入给定关系: 当 $v \neq 1$ 时

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{u^2}{1 - v} - \frac{uv}{1 - v} = \frac{u^2(1 - v^2)}{(1 - v)^2} \\ &= \frac{u^2(1 + v)}{1 - v}, \end{aligned}$$

当 $v=1$ 时, $f(u, v)=0$. 由此推出

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(1+y)}{1-y}, & y \neq 1, \\ 0, & y = 1. \end{cases}$$

(iii) a) $f((x), (x)) = (x)^2 - (x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$,

$$(b) \quad (f(x, y)) = \cos(f(x, y)) = \cos(x^2 - y^2),$$

$$(c) \quad f_1(x, x) = 2(x) = 2\cos x,$$

$$f_2(x, x) = -2(x) = -2\sin x.$$

$$\frac{df(x, x)}{dx} = -2\sin 2x.$$

【解毕】

综例 19.6.2 设有不全为零的非负函数 $z = f(x, y)$ 满足如下条件:对任何 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 及 $P(x, y)$ 有

$$(i) \quad f(x, y) = |f(x, y)|, \text{ 或 } f(P) = |f(P)|;$$

$$(ii) \quad |f(P_1) - f(P_2)| \leq f(P_1 + P_2) \leq f(P_1) + f(P_2);$$

(iii) $f(P)$ 在 $(0, 0)$ 点连续.

证明:

(1) 函数 $z = f(P)$ 在整个平面 \mathbb{R}^2 上连续;

(2) 函数在 $(0, 0)$ 点不可微.

【证】 (1) 首先可知 $f(0, 0) = 0$. 因为对 " 有

$$f(0, 0) = f(0, 0) = |f(0, 0)|,$$

移项得方程

$$(1 - |f(0, 0)|)f(0, 0) = 0.$$

由于 $f(0, 0)$ 的任意性, 可知, 只能是 $f(0, 0) = 0$.

由于 f 在 $(0, 0)$ 连续, 从而有

$$\lim_{P \rightarrow (0,0)} f(P) = f(0, 0) = 0.$$

再证 f 在全平面连续, 为此任给 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 研究增量, 设 $P = (x, y)$, 则

$$f(P) = f(P_0 + P) - f(P_0).$$

由条件(ii)和(i)有

$$\begin{aligned} 0 & \leq |f(P)| = |f(P_0 + P) - f(P_0)| \\ & \leq |f(P_0 + P) - f(-P_0)| \\ & \leq f(P_0 + P - P_0) = f(P) \end{aligned}$$

由前面已证结果, 有

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = 0.$$

可见 $z = f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上连续.

(2) 现在证明在 $(0, 0)$ 点不可微, 为此只要证其偏导数不存在即可. 根据偏导数的定义, 应求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x}.$$

为求此极限, 今考虑做变量替换, 对于任意给定的 x_0 , 总可设 $x = x_0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, 0)}{x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, 0)}{x_0}.$$

由于 $\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, 0)}{x_0}$ 是不存在的, 而 $\frac{f(x_0, 0)}{x_0}$ 与 x_0 无关, 因而若上述极限存在,

它只可能是零, 由此推出 $\frac{f(x_0, 0)}{x_0} = 0$. 又由于 x_0 的任意性, 可推出 $f(x_0, 0) = 0$, 这就得出如下结论:

若 $\frac{f(x, 0)}{x}$ 存在, 必然有 " $x \neq 0, f(x, 0) = 0$."

同理可推出 若 $\frac{f(0, y)}{y}$ 存在, 必然有 " $y \neq 0, f(0, y) = 0$."

然而对 " $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 = f(x, y) = f(x + 0, 0 + y) = f(x, 0) + f(0, y) = 0,$$

这就推出 $f(x, y) = 0$, 与假设矛盾. 因此只能是偏导数 $\frac{f(0, 0)}{x}$,

$\frac{f(0, 0)}{y}$ 不存在, 当然这就推出了 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点是不可微的.

【注】 此题实际上就是关于平面上两点距离函数的推广, 这在线性代数中就是欧氏空间定义的距离函数.

综例 19.6.3 试研究下列函数在 \mathbb{R}^2 上的连续性与可微性:

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

$$(ii) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$$

【解】 (i) 函数 $z = f(x, y)$ 在 $(x, y) = (0, 0)$ 处是连续、可微的, 因此只须讨论在原点的情形.

首先, 可以看出 f 在 $(0, 0)$ 是连续的, 因为

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| x^2 + y^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \\ &\leq x^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

从而有 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

其次, 由于 $\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ 极限

不存在. 由此可知, 在 $(0, 0)$ 点不可微.

(ii) 同样只须讨论在 $(0, 0)$ 点的情况.

今考察特殊的路径 $y = kx$, 即 $(x, kx) \rightarrow (0, 0)$, 这时

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, kx) = \frac{kx^2}{(1 + k^2)^2 x^4}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{(1 + k^2)^2 x^2} = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \infty, & k \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

因而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续.

但值得指出的是, 若将 $y = a$ 看作常数, 则一元函数

$$f(x, a) = \begin{cases} \frac{ax}{(a + x^2)^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

对任何给定的 a (包括 $a=0$) 都是连续函数, 当然对单独的 y 来讲也一样. 这告诉我们, 多元函数中, 单独对每一个变量可能是连续函数, 但作为多元函数来说整体不一定是连续函数. 【解毕】

综例 19.6.4 设 $f(x, y) = x^2 + y^2$ (x, y), 其中 (x, y) 在 $(0, 0)$ 点连续, 证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微的充要条件是 $f'(0, 0) = 0$.

【证】 先证必要性: 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微, 则在此点的偏导数必存在, 而今

$$\begin{aligned} \frac{f(0, 0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} (x, 0). \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在, 因此若此极限存在必须有 $(x, 0) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, 而

(x, y) 在 $(0, 0)$ 连续, 从而有 $f'(0, 0) = 0$.

再证充分性. 若已有 $f'(0, 0) = 0$, 这样

$$f(0, 0) = x^2 + y^2 (x, y) - 0,$$

从而

$$\frac{f(0, 0)}{x^2 + y^2} = (x, y) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}}{\rightarrow} (0, 0) = 0.$$

这说明 $f(0, 0) = o(x^2 + y^2)$. 也就是说

$$df(0, 0) = 0. \quad \text{【证毕】}$$

所以函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

【注】 此题提供了一个例子, 若两个函数均不可微时, 其乘积函数仍然有可能是可微的. 进一步我们还可以猜测: 若一个函数可微, 另一个函数不可微时, 其乘积函数也有可能是可微的. 其条件有以下提法:

若 (x, y) 在 P_0 点可微, (x, y) 在 P_0 点连续但偏导数不存

在, 则乘积函数 $f(x, y) = (x, y) \cdot (x, y)$ 在 P_0 可微的充要条件是 $(P_0) = 0$.

先证, 若 $f(x, y)$ 在 P_0 点可微, 则必有 $(P_0) = 0$.

这是因为两个偏导数 $\frac{f(P_0)}{x}$ 及 $\frac{f(P_0)}{y}$ 存在推出的事实上

$$\begin{aligned} \frac{f(P_0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [(x_0 + x, y_0) (x_0 + x, y_0) - (x_0, y_0) \cdot (x_0, y_0)] / x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{ [(x_0 + x, y_0) - (x_0, y_0)] (x_0 + x, y_0) \\ &\quad + (x_0, y_0) [(x_0 + x, y_0) - (x_0, y_0)] \} / x \\ &= \frac{(x_0, y_0)}{x} \cdot (x_0, y_0) \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + x, y_0) - (x_0, y_0)}{x} (x_0, y_0). \end{aligned}$$

由于 $\frac{f(P_0)}{x}$ 存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + x, y_0) - (x_0, y_0)}{x}$ 不存在, 因此只能有

$$(x_0, y_0) = 0.$$

再证充分性. 设 $(x_0, y_0) = 0 = 0$, $(x_0, y_0) = 0$. 则

$$\begin{aligned} f(P_0) &= f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0) \\ &= (0 + (P_0)) \cdot (0 + (P_0)) - 0 \cdot 0 \\ &= 0 \cdot (P_0) + (P_0) \cdot (P_0) \\ &= (P_0) [0 + (P_0)]. \end{aligned}$$

由于在 P_0 连续, 则 $(P_0) = o(1)$.

在 P_0 可微, 故 $(P_0) = \frac{(P_0)}{x} x + \frac{(P_0)}{y} y + o(\quad)$, 代

入 $f(P_0)$ 中得

$$f(P_0) = (P_0) [0 + o(1)]$$

$$= o\left(\frac{\rho(P_0)}{x}\right) + o\left(\frac{\rho(P_0)}{y}\right) + o(\rho(P_0)) + o(1) \cdot \rho(P_0).$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho(P_0) \rightarrow 0} \frac{o\left(\frac{\rho(P_0)}{x}\right) + o\left(\frac{\rho(P_0)}{y}\right) + o(\rho(P_0)) + o(1) \cdot \rho(P_0)}{\rho(P_0)} \\ &= \lim_{\rho(P_0) \rightarrow 0} o\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{\rho(P_0) \rightarrow 0} \frac{o\left(\frac{\rho(P_0)}{x}\right)}{\rho(P_0)} + \frac{o\left(\frac{\rho(P_0)}{y}\right)}{\rho(P_0)} + o(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 $f(P)$ 在 P_0 可微, 且

$$df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) dy. \quad \text{【证毕】}$$

综例 19.6.5 关于函数可微性与偏导数连续的关系, 可以有以下似乎弱一点的条件: 若 $z = f(x, y)$ 在 P_0 点的某邻域中两个偏导数都存在, 其中一个, 比如 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在此邻域中连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 P_0 点可微.

【证】 首先将函数增量按两个方向分解

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \\ &\quad + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x \\ &\quad + \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \Delta y + o(\Delta y). \end{aligned}$$

第二项的来源是因为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

推出

$$\frac{f(x_0, y_0 + y) - f(x_0, y_0)}{y} = \frac{f(x_0, y_0)}{y} + o(1),$$

即

$$f(x_0, y_0 + y) - f(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0)}{y} y + o(1) \cdot y.$$

又由于 $\frac{f(x, y)}{x}$ 在 P_0 点邻域中连续, 从而有

$$\frac{f(x_0 + x, y_0 + y)}{x} = \frac{f(x_0, y_0)}{x} + o(1).$$

这样就有

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y) &= \frac{f(x_0, y_0)}{x} x + \frac{f(x_0, y_0)}{y} y \\ &\quad + x \cdot o(1) + y \cdot o(1) \\ &= \frac{f(x_0, y_0)}{x} x + \frac{f(x_0, y_0)}{y} y + o(\rho). \end{aligned}$$

也就是说 f 在 (x_0, y_0) 可微.

【证毕】

【注】 这里用到的这种全增量分解, 以及一元函数中函数增量的有限表示, 即拉格朗日有限增量公式 $f = f(\quad) x$, 与增量表示的无限形式, 即 $f = f(x_0) x + o(1) x$ 的灵活运用是很有用的.

综例 19.6.6 设函数 $z = z(x, y)$ 定义在圆域

$$D = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$$

上, 证明: $z = f(y)$ 的充要条件是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \forall (x, y) \in D$.

【证】 先证必要性. 由于 $z = z(x, y) = f(y)$, 则对 $(x, y) \in D$ 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{z(x_0 + x, y) - z(x_0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(y) - f(y)}{x} = 0.$$

再证充分性, 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在且恒为 0, 则对 $(x, y) \in D$ 有

$$z(x, y) - z(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{z(x, y)}{x} dx = 0.$$

从而得到 $z(x, y) = z(x_0, y) = f(y)$.

对于充分性亦可用微分中值定理证明:今取 $f(y) = z(x_0, y)$, 由于 D 是以 (x_0, y_0) 为圆心的圆域, 则对 $(x, y) \in D$ 均有 $(x_0, y) \in D$, 从而

$$z(x, y) - z(x_0, y) = \frac{z(x, y)}{x} (x - x_0) = 0.$$

从而求得

$$z(x, y) = z(x_0, y) = f(y). \quad \text{【证毕】}$$

【注】 这里圆域的条件很重要. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ 只是说明函数 $z = f(x, y)$, 在任何平行 x 轴的水平线上增量为 0, 即为常数, 这个常数事实上是依赖于起点 (x_0, y) 的选择, 若在域中, 不能找到共同的 x_0 , 则 $z(x, y)$ 不一定只与 y 有关. 因此对一般的域而言, 从 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 并不能推出函数 $z(x, y)$ 与 x 无关.

如果将条件换成 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ 在 \mathbb{R}^2 上成立, 则必有 $z = z(x, y)$ 中不包含 x , 仅是 y 的函数. 用类似方法亦可证明, 若 $z = z(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

则 $z(x, y) = f(x) + g(y)$.

这是因为, 可取 $(1, 1)$ 作为起始点, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ 得

$$0 = \int_1^x \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} dx = \frac{z(x, y)}{y} \Big|_{x=1}^{x=x}$$

$$= \frac{z(x, y)}{y} - \frac{z(1, y)}{y}.$$

再对 y 从 1 积分到 y , 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_1^y \frac{z(x, y)}{y} dy - \int_1^y \frac{z(1, y)}{y} dy \\ &= z(x, y) \Big|_{y=1}^{y=y} - z(1, y) \Big|_{y=1}^{y=y} \\ &= z(x, y) - z(x, 1) - z(1, y) + z(1, 1). \end{aligned}$$

从而有

$$z(x, y) = z(x, 1) + z(1, y) - z(1, 1).$$

设 $f(x) = z(x, 1)$, $g(y) = z(1, y) - z(1, 1)$, 则有

$$z(x, y) = f(x) + g(y).$$

综例 19.6.7 设函数 $x = (t,)$ 是微分方程初始值问题

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + x &= 1, \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

的解, 是实参数 .

(1) 写出解 $(t,)$ 的形式;

(2) 证明函数 $(t,)$ 在 t 全平面上连续且可微 .

【解】 (1) 这是一阶常系数非齐次方程初值问题, 求其解时要讨论 的取值情况 .

当 0 时

$$x = (t,) = \frac{1}{c} (c - e^{-t}),$$

根据初始值 $(0,) = 0$, 得 $c = 1$. 从而有

$$(t,) = \frac{1}{c} (1 - e^{-t}).$$

当 $= 0$ 时 . 很容易求得 $x = (t, 0) = t$.

综合起来, 得到

$$f(t, t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}), \quad 0, \\ f_t(t, t) = t, \quad = 0.$$

(2) 欲证 $f(t, t)$ 在 t 平面上可微, 仅需证明在 $(0, 0)$ 点可微, 为此只需证明偏导数 f_t 在 $(0, 0)$ 点连续. 事实上

$$\text{当 } t \neq 0 \text{ 时, } f_t = -\frac{1}{2}(1 - e^{-t}) + \frac{t}{e^{-t}}.$$

当 $t = 0$ 时, 需用定义求偏导数.

$$f_t(t, 0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-t-\Delta t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-t})}{\Delta t} = -\frac{e^{-t}}{2}.$$

而

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_t(t, \Delta t) - f_t(t, 0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2}(1 - e^{-t-\Delta t}) + \frac{t e^{-t-\Delta t}}{e^{-t-\Delta t}} \right. \\ \left. - \left(-\frac{e^{-t}}{2} \right) \right] = -\frac{e^{-t}}{2} = f_t(t, 0).$$

由于偏导数 f_t 及 f_t 在全平面上连续, 从而证明了函数 $f(t, t)$ 可微.

第 20 章 多元函数的微分法

20.1 引言

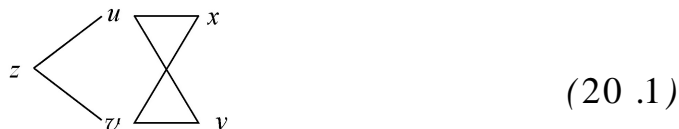
多元函数微分法的基本内容是求多元函数的各阶偏导数与混合偏导数;其基础是偏导数概念及一元的求导公式;而核心是多元的复合函数微分法;重点是用函数符号表示的种种复合函数、隐函数的微分.

复合函数微分法运用的关键是函数结构的分析,也就是所给的函数关系中哪些变量是函数?哪些变量是自变量?哪些变量是中间变量?在对具体函数求导时,容易出错的是二阶以上偏导数的计算,很容易漏掉对某些中间变量的求导.只要注意了这些方面,从原则上来讲,求函数的导数没有什么困难,遇到较繁杂一点的演算,如果仔细一点,计算不会有什么问题的.

20.2 多元函数的复合函数求导公式

复合函数导数公式

以 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 这种类型为例,其函数结构关系是:“一函二中二自”.即一个函数是 z ,二个中间变量 u 和 v ,以及两个自变量 x 和 y ;亦可图示之为:



具体公式为

$$\begin{aligned}\frac{z}{x} &= \frac{f}{u} \frac{u}{x} + \frac{f}{v} \frac{v}{x}, \\ \frac{z}{y} &= \frac{f}{u} \frac{u}{y} + \frac{f}{v} \frac{v}{y}.\end{aligned}\quad (20.2)$$

记成矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ \frac{z}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{u} & \frac{f}{v} \\ \frac{u}{x} & \frac{u}{y} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} \end{pmatrix} \cdot \quad (20.3)$$

此式用向量求导符号表示为

$$\frac{\underline{z}}{(x, y)} = \frac{f}{(u, v)} \frac{(u, v)}{(x, y)} \quad (20.4)$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\underline{z}}{(x, y)} &= \begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ \frac{z}{y} \end{pmatrix}, \\ \frac{f}{(u, v)} &= \begin{pmatrix} \frac{f}{u} & \frac{f}{v} \end{pmatrix}, \\ \frac{(u, v)}{(x, y)} &= \begin{pmatrix} \frac{u}{x} & \frac{u}{y} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (20.5)$$

在一般的情形下, 我们规定 $\frac{(u_1, u_2, \dots, u_m)}{(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ 表示一个 $m \times n$ 的矩阵, 这里 $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 第 i 行由函数 u_i 对 x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 的偏导数作元素构成, 即

$$\frac{(u_1, u_2, \dots, u_m)}{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{x_1} & \frac{u_1}{x_2} & \dots & \frac{u_1}{x_n} \\ \frac{u_2}{x_1} & \frac{u_2}{x_2} & \dots & \frac{u_2}{x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{u_m}{x_1} & \frac{u_m}{x_2} & \dots & \frac{u_m}{x_n} \end{pmatrix} \cdot \quad (20.6)$$

这个矩阵称为雅可比(Jacobi)矩阵.

因此对具有更多中间变量函数的求导问题,像

$w = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($j = 1, 2, \dots, n$)
的求导有公式

$$\begin{aligned} \frac{W}{x_j} &= \sum_{i=1}^m \frac{W}{u_i} \frac{u_i}{x_j} \\ &= \frac{W}{(u_1, u_2, \dots, u_m)} \cdot \frac{(u_1, u_2, \dots, u_m)}{x_j}. \end{aligned} \quad (20.7)$$

这是一般形式的多元复合函数导数公式,用语言来描述是:函数对某自变量的偏导数,等于函数对中间变量的偏导数与该中间变量对此自变量导数之积的所有项之和.有多少中间变量就有多少项,每项中有几层复合关系则有几个乘积.

例 20.2.1 $z = x^3 f(xy)$, $\frac{z}{x}$, 求 $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{x y}$.

【解】 这里函数 $f(u, v)$, $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ 的结构是“二中二自”.因此有

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= 3x^2 f + x^3 \frac{f}{x} \\ &= 3x^2 f + x^3 f_1 \cdot \frac{(xy)}{x} + f_2 \frac{y}{x} \\ &= 3x^2 f + x^3 y f_1 - xy f_2. \\ \frac{z}{x y} &= \frac{z}{y} \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \frac{f}{y} + x^3 f_1 + y \frac{f_1}{y} - x f_2 + y \frac{f_2}{y}. \end{aligned}$$

我们要特别指出:函数 f_1 和 f_2 关于中间变量与自变量的结构与函数 f 是一样的,在这里, f_1 与 f_2 仍是以 $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ 为中间变

量, 以 x, y 为自变量, 因此

$$\frac{f}{y} = f_1 \cdot \frac{(xy)}{y} + f_2 \cdot \frac{\frac{y}{x}}{y} = xf_1 + \frac{1}{x}f_2,$$

$$\frac{f_1}{y} = f_{11} \frac{(xy)}{y} + f_{12} \cdot \frac{\frac{y}{x}}{y} = xf_{11} + \frac{1}{x}f_{12},$$

$$\frac{f_2}{y} = xf_{21} + \frac{1}{x}f_{22}.$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 的式子中, 经过整理得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f_1 + 2xf_2 + x^4 y f_{11} - y f_{22} + x^2 y (f_{12} - f_{21}).$$

在二阶混合偏导数连续的条件下有 $f_{12} = f_{21}$, 这样

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f_1 + 2xf_2 + x^4 y f_{11} - y f_{22}. \quad \text{【解毕】}$$

归纳起来, 多元复合函数求导数公式, 要注意三点:

第一, 分析函数结构, 即明确函数, 中间变量及自变量;

第二, 求导公式中的每一项都是函数对某一中间变量的导数与该中间变量对自变量导数之积, 有多少中间变量就有多少项;

第三, 在求高阶导数时, 导函数的结构与原来函数一样, 即中间变量与自变量与原来的函数是一样的.

20.3 微分形式不变性与微分公式

设函数 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. 则其微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (20.8)$$

进一步再计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
 dz &= \frac{f}{u} \frac{u}{x} + \frac{f}{v} \frac{v}{x} \quad x + \frac{f}{u} \frac{u}{y} + \frac{f}{v} \frac{v}{y} \quad y \\
 &= \frac{f}{u} \frac{u}{x} \quad x + \frac{u}{y} \quad y + \frac{f}{v} \frac{v}{x} \quad x + \frac{v}{y} \quad y \\
 dz &= \frac{f}{u} du + \frac{f}{v} dv. \tag{20.9}
 \end{aligned}$$

比较(20.8)与(20.9)可见,如果将微分公式写成

$$dz = \frac{z}{x} dx + \frac{z}{y} dy.$$

这样,不管是自变量的微分 dx 与 dy , 还是中间变量的微分 du , dv , 只要前面的系数是对相应变量的导数,两个公式的形式是统一的,这个性质称为微分形式不变性.也就是说,对微分来说,不管是自变量还是因变量,函数的微分公式都是(20.8)或(20.9).公式(20.9)实质上是复合函数求导公式的微分形式.这个公式在计算及一些证明中是常用到的,其特点在于不必刻意区分自变量与中间变量.

在此基础上,可导出常用的一批微分公式,例如设 $u = u(x, y)$ 及 $v = v(x, y)$ 则有

$$\begin{aligned}
 d(u + v) &= du + dv, \\
 d(uv) &= u dv + v du, \\
 d \frac{v}{u} &= \frac{u dv - v du}{u^2}.
 \end{aligned}$$

例 20.3.1 若 $y = (\sin x)^{\cos x}$, 求 $y' = ?$

【解】 可当作 $y = f(u, v) = (u(x))^{v(x)}$ 用复合函数求导公式

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{f}{u} \frac{du}{dx} + \frac{f}{v} \frac{dv}{dx} \\
 &= v(x) (u(x))^{v(x)-1} u'(x) + (u(x))^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) \\
 &= \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\cos x} \cdot \ln \sin x (1 - \sin x) \\
 &= (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x) (\sin x)^{\cos x - 1}
 \end{aligned}$$

也可以利用微分公式来求

$$\begin{aligned} d(\sin x^{\cos x}) &= \cos x \cdot (\sin x)^{\cos x - 1} d(\sin x) \\ &\quad + (\sin x)^{\cos x} \cdot \ln \sin x d(\cos x) \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x)(\sin x)^{\cos x - 1} dx. \end{aligned}$$

利用微分概念, 则有前面的结果.

最后还可以利用对数运算的特点, 取

$$\ln y = \cos x \ln \sin x.$$

由于是隐函数形式, 两边对 x 求导得:

$$\begin{aligned} y'/y &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x \\ y &= \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x (\sin x)^{\cos x} \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x)(\sin x)^{\cos x - 1}. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 20.3.2 再做上一节的题目 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$.

【解】

$$\begin{aligned} dz &= f \cdot 3x^2 dx + x^3 df \\ &= 3x^2 f dx + x^3 (f_1 d(xy) + f_2 d \frac{y}{x}) \\ &= 3x^2 \cdot f dx + x^3 f_1 (x dy + y dx) + x^3 f_2 \frac{xdy - ydx}{x^2} \\ &= (3x^2 f + x^3 y f_1 - xy f_2) dx + (x^4 f_1 + x^2 f_2) dy. \end{aligned}$$

再由微分定义可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 f + x^3 y f_1 - xy f_2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^4 f_1 + x^2 f_2. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

在复合函数求导中, 常遇到隐函数的求导问题, 也就是由方程确定的多元函数求导数问题. 最简单的当然是一个方程, 两个变量

的形式

$$F(x, y) = 0.$$

在求导时,应该指明谁是函数,谁是自变量.若认为确定的是函数 $y = y(x)$,则有恒等式

$$F(x, y(x)) = 0.$$

利用复合函数求导,就有关于 $\frac{dy}{dx}$ 的线性方程

$$-\frac{F}{x} + \frac{F}{y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

解出 $\frac{dy}{dx}$, 得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F}{x} / \frac{F}{y}.$$

一般来说,在隐函数问题中可能会包含许多方程与许多变量,这时分析函数结构十分重要,一定要明确,谁是函数,谁是中间变量,谁是自变量.大体上说,它们在数量上的关系是:自变量个数等于变量个数减去方程式的个数,而其余的为函数与中间变量的个数.

例 20.3.3 若

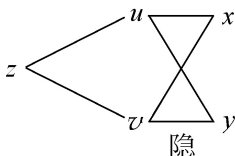
$$x = f(u, v),$$

$$y = g(u, v),$$

$$z = h(u, v).$$

确立了函数 $z = z(x, y)$. 求 $\frac{z}{x} = ?$, $\frac{z}{y} = ?$

【解】 这就是用参数方程表达的函数求导问题.这里函数结构关系是



即 z 是函数, u, v 是 x, y 的隐函数. 求导时, 先求出

$$\begin{aligned}\frac{z}{x} &= \frac{h}{u} \frac{u}{x} + \frac{h}{v} \frac{v}{x}, \\ \frac{z}{y} &= \frac{h}{u} \frac{u}{y} + \frac{h}{v} \frac{v}{y}.\end{aligned}$$

再利用隐函数关系求出关于 $\frac{u}{x}, \frac{u}{y}, \frac{v}{x}, \frac{v}{y}$ 来, 即将 $x = f(u, v)$ 对 $y = g(u, v)$

x 和 y 求导, 得

$$\begin{aligned}1 &= \frac{f}{u} \frac{u}{x} + \frac{f}{v} \frac{v}{x}, \\ 0 &= \frac{g}{u} \frac{u}{x} + \frac{g}{v} \frac{v}{x}, \\ 0 &= \frac{f}{u} \frac{u}{y} + \frac{f}{v} \frac{v}{y}, \\ 1 &= \frac{g}{u} \frac{u}{y} + \frac{g}{v} \frac{v}{y}.\end{aligned}$$

从而解出

$$\frac{u}{x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -f \\ 0 & -g \\ u & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -f & -f \\ u & v \\ -g & -g \\ u & v \end{vmatrix}}, \quad \frac{v}{x} = \frac{\begin{vmatrix} -f & 1 \\ -g & 0 \\ u & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -f & -f \\ u & v \\ -g & -g \\ u & v \end{vmatrix}}.$$

从而

$$\frac{z}{x} = \frac{h}{u} \frac{g}{v} - \frac{h}{v} \frac{g}{u} \left/ \begin{vmatrix} -f & -f \\ -g & -g \\ u & v \end{vmatrix} \right.$$

用雅可比矩阵形式可表成

$$\frac{z}{x} = \frac{(h, g)}{(u, v)} \bigg/ \frac{(f, g)}{(u, v)}. \quad (20.10)$$

同样地有

$$\frac{z}{y} = - \frac{(h, f)}{(u, v)} \bigg/ \frac{(f, g)}{(u, v)}. \quad (20.11)$$

【解毕】

上述结果, 如果利用由雅可比矩阵表示的复合函数求导公式, 就会十分清楚.

首先, 将 $z = h(u, v)$ 对 (x, y) 求导得

$$\frac{z}{(x, y)} = \frac{h}{(u, v)} \cdot \frac{(u, v)}{(x, y)}. \quad (20.12)$$

而矩阵 $\frac{(u, v)}{(x, y)}$ 由关系 $\begin{matrix} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{matrix}$ 对 (x, y) 求导得

$$\frac{(x, y)}{(x, y)} = \frac{(f, g)}{(u, v)} \frac{(u, v)}{(x, y)}, \text{ 由于 } \frac{(x, y)}{(x, y)} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix},$$

则有

$$\frac{(f, g)}{(u, v)}^{-1} = \frac{(u, v)}{(x, y)}, \quad (20.13)$$

表明矩阵 $\frac{(f, g)}{(u, v)}$ 与 $\frac{(u, v)}{(x, y)}$ 互为逆矩阵.

将(20.13)代入(20.12)得

$$\begin{aligned} \frac{z}{(x, y)} &= \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} = \frac{h}{(u, v)} \cdot \frac{(f, g)}{(u, v)}^{-1} \\ &= \frac{h}{u'} \cdot \frac{h}{v} \begin{matrix} -f & -f \\ u & v \end{matrix}^{-1} \\ &= \frac{h}{u'} \cdot \frac{h}{v} \begin{matrix} -g & -f \\ u & v \end{matrix} \bigg/ \begin{vmatrix} -f & -f \\ u & v \\ -g & -g \\ u & v \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

让上式两边行向量的两个分量分别相等, 即得到等式 (20.10) 及 (20.11) .

这里利用了简单的求二阶矩阵的逆矩阵公式 (由伴随矩阵而来)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

做一个具体例子, 若有

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ z &= z(x, y) . \end{aligned}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

首先

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial (x, y)} = \frac{\partial z}{\partial (r, \theta)} \frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)} .$$

再由 $\begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix}$ 两边对 (x, y) 求导, 得方程

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{\partial (r \cos \theta, r \sin \theta)}{\partial (r, \theta)} \frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)}, \\ \frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)}^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Bigg/ r . \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Bigg/ r .$$

即有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r} r \cos \frac{\partial z}{r} - \sin \frac{\partial z}{r} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r} r \sin \frac{\partial z}{r} + \cos \frac{\partial z}{r} .$$

由此得到两个有用公式

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r \frac{\partial z}{r}, \quad (20.14)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial z}{r} . \quad (20.15)$$

20.4 方向导数与梯度

1. 沿给定方向的导数

给定三元函数 $w = f(x, y, z)$, 考察在固定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处, 函数沿某方向 $= \cos \mathbf{i} + \cos \mathbf{j} + \cos \mathbf{k}$ 的导数, 其中 α, β, γ 分别是 \mathbf{l} 与 x, y 和 z 轴之夹角. 过 P_0 点, 方向向量为 \mathbf{l} 的直线上的点 $P_t(x_t, y_t, z_t)$ 可表为

$$x_t = x_0 + t \cos \alpha ,$$

$$y_t = y_0 + t \cos \beta ,$$

$$z_t = z_0 + t \cos \gamma .$$

定义: 若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_t) - f(P_0)}{t}$$

存在, 则称之为函数 $f(x, y, z)$ 在 P_0 点沿 \mathbf{l} 方向的方向导数, 记成 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(P_0)$.

2. 方向导数的计算

若 $z = f(P)$ 在 P_0 点可微, 则有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \cos \gamma .$$

事实上,若记函数

$$\begin{aligned} f(P_t) &= f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) \\ &= \varphi(t), \end{aligned}$$

则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_t) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0).$$

而

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{f(P_t)}{x} \cos\alpha + \frac{f(P_t)}{y} \cos\beta + \frac{f(P_t)}{z} \cos\gamma, \\ \varphi'(0) &= \frac{f(P_0)}{x} \cos\alpha + \frac{f(P_0)}{y} \cos\beta + \frac{f(P_0)}{z} \cos\gamma. \end{aligned}$$

由方向导数计算公式可见,在 P_0 点 $f(P)$ 沿方向 l 的方向导数,可表成向量

$$\frac{f(P_0)}{x} \mathbf{i} + \frac{f(P_0)}{y} \mathbf{j} + \frac{f(P_0)}{z} \mathbf{k}$$

在 l 方向的投影.因此对于研究函数在 P_0 点处沿各个方向的变化,上述向量是很重要的,称之为函数 $f(P)$ 在 P_0 点的梯度向量,记成

$$\text{grad } f(P_0) = \left. \frac{f}{x} \right|_{P_0} \mathbf{i} + \left. \frac{f}{y} \right|_{P_0} \mathbf{j} + \left. \frac{f}{z} \right|_{P_0} \mathbf{k}.$$

这样,方向导数公式可表成

$$\frac{df}{ds} = \text{grad } f(P_0) \cdot \mathbf{s}.$$

3. 梯度向量的性质

梯度作为一个向量,其模与方向对函数变化的特征有明确的意义:

第一,梯度方向是函数增加最快的方向.因为,如果我们记梯度方向的单位向量为

$$\mathbf{s} = \frac{\text{grad } f(P_0)}{|\text{grad } f(P_0)|} \quad \mathbf{0},$$

则

$$\begin{aligned} \frac{f(P_0)}{g} &= \text{grad} f(P_0) \cdot \frac{\text{grad} f(P_0)}{|\text{grad} f(P_0)|} \\ &= |\text{grad} f(P_0)| > 0. \end{aligned}$$

同时,对任何其他方向 的方向导数有

$$\frac{f(P_0)}{g} = \text{grad} f(P_0) \cdot$$

且有

$$\left| \frac{f(P_0)}{g} \right| = |\text{grad} f(P_0)| \cdot | \cdot | = |\text{grad} f(P_0)|,$$

即

$$0 \leq \left| \frac{f(P_0)}{g} \right| = \frac{f(P_0)}{g}.$$

这就说明了梯度方向正是该点处函数增加最快 因为 $\frac{f(P_0)}{g} > 0$ 最快 因为 $\frac{f(P_0)}{g} \left| \frac{f(P_0)}{g} \right|$ 的方向; 依此推出该 P_0 梯度的反方向是函数下降最快的方向, 通常称为最速下降方向.

第二, 梯度向量的模是梯度方向的方向导数值, 即

$$\frac{f(P_0)}{g} = |\text{grad} f(P_0)|.$$

对于二元函数 $z = f(x, y)$, 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度为

$$\text{grad} f(P_0) = \frac{f(P_0)}{x} \mathbf{i} + \frac{f(P_0)}{y} \mathbf{j}.$$

在 $P_0(x_0, y_0)$ 点沿 $\cos \mathbf{i} + \cos \mathbf{j}$ 方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{f(P_0)}{g} &= \frac{f(P_0)}{x} \cos + \frac{f(P_0)}{y} \cos \\ &= \text{grad} f(P_0) \cdot \end{aligned}$$

例 20.4.1 若函数 $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r}$, 求 $\text{grad } \frac{1}{r}$.

【解】 按定义

$$\frac{\frac{1}{r}}{x} = \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{r}{x} = \frac{-1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}.$$

同理有

$$\frac{\frac{1}{r}}{y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\frac{1}{r}}{z} = -\frac{z}{r^3}.$$

从而

$$\begin{aligned} \text{grad } \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^3} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

读者可以自己验证

$$\text{grad}(r) = \mathbf{n}.$$

【解毕】

20.5 综合题

综例 20.5.1 若 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2000 年考研题)

【解】 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_1 \frac{\partial(xy)}{\partial x} + f_2 \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial x} \\ &= y f_1 + \frac{1}{y} f_2 - \frac{y}{x^2} g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= f_{11} + y x f_{11} - \frac{x}{y^2} f_{12} + \frac{-1}{y^2} f_2 + \frac{1}{y} x f_{21} - \frac{x}{y^2} f_{22} \\ &\quad - \frac{1}{x^2} g + \frac{y}{x^3} g \\ &= f_{11} - \frac{1}{y^2} f_2 + x y f_{11} - \frac{x}{y^3} f_{22} - \frac{1}{x^2} g - \frac{y}{x^3} g . \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

综例 20.5.2 设 $u(x, y)$ 二阶导数连续, 且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, 2x) = x, \quad u_x(x, 2x) = x^2 .$$

试求: $u_{x^2}(x, 2x)$, $u_{xy}(x, 2x)$ 及 $u_{y^2}(x, 2x)$.

【解】 首先, 由 $u(x, 2x) = x$ 两边对 x 求导得

$$u_1(x, 2x) + 2u_2(x, 2x) = 1 .$$

将题设条件 $u(x, 2x) = x^2$ 代入, 得

$$u_2(x, 2x) = \frac{1 - x^2}{2} .$$

将上式再对 x 求导, 得

$$u_{21}(x, 2x) + 2u_{22}(x, 2x) = -x .$$

其次, 利用 $u(x, 2x) = x^2$, 对 x 求导得

$$u_{11}(x, 2x) + 2u_{12}(x, 2x) = 2x .$$

还有 $u_1(x, 2x) = u_2(x, 2x)$.

将上述三式联立而解之, 得

$$u_{11}(x, 2x) = u_{22}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x ,$$

$$u_{12}(x, 2x) = u_{21}(x, 2x) = \frac{5}{3}x . \quad \text{【解毕】}$$

【注】 此题对于函数导数的记号是一个很好的练习题 .

综例 20.5.3 设 $u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$. 求:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ?$$

【解】 函数 u 是“二中三自”，即二个中间变量，三个自变的结构。

首先， $\frac{u}{x} = f_1 + 2xf_2$ ，故

$$\frac{\frac{u}{x}}{x} = (f_{11} + 2xf_{12}) + 2f_2 + 2x(f_{21} + 2xf_{22}),$$

即

$$\frac{\frac{u}{x}}{x} = f_{11} + 4xf_{12} + 4x^2f_{22} + 2f_2.$$

利用函数结构中关于 x, y, z 的对称性(讲 x 与 y 对称是指, 在函数关系中将 x 与 y 地位互换, 函数不变)可得到另外两个二阶导数:

$$\frac{\frac{u}{y}}{y} = f_{11} + 4yf_{12} + 4y^2f_{22} + 2f_2,$$

$$\frac{\frac{u}{z}}{z} = f_{11} + 4zf_{12} + 4z^2f_{22} + 2f_2.$$

由此得

$$\begin{aligned} \frac{\frac{u}{x}}{x} + \frac{\frac{u}{y}}{y} + \frac{\frac{u}{z}}{z} &= 3f_{11} + 4(x + y + z)f_{12} \\ &\quad + 4(x^2 + y^2 + z^2)f_{22} + 6f_2. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

【注】 题中这种关于对称性的利用, 对一些具有此性质的问题可大大简化运算, 也可以校对计算的结果。

综例 20.5.4 设 $z = f(x, y)$ 是可微函数, 试证:

(i) 如果 $z = f(x, y)$ 满足方程

$$x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} = 0,$$

则 $z = z(\theta)$, 其中 $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

(ii) 如果 $z = f(x, y)$ 满足方程

$$y \frac{f}{x} - x \frac{f}{y} = 0,$$

则函数 $z = z(r)$, 即只与 $r = x^2 + y^2$ 有关.

【证】 (方法 1) 令

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

利用(20.14)和(20.15)的结果, 有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r \frac{\partial z}{\partial r},$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

从(i)有 $r \frac{\partial z}{\partial r} = 0$, 即 $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$. 可见 $z = g(\theta)$.

从(ii)有 $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$. 可见 $z = z(r)$.

(方法 2) 令

$$u = x^2 + y^2,$$

$$v = \frac{y}{x}.$$

此时将 $z = z(u, v)$ 看作以 u, v 为中间变量, x, y 为自变量的函数, 也可以将 $z = z(x, y)$, 看作 x, y 为中间变量, u, v 为自变量, 其导数关系由下式给出:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{-y}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} 2y + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{x}.$$

从而

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial u} = 2u \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2}{x^2} + 1 \frac{\partial z}{\partial v} = -(1 + v^2) \frac{\partial z}{\partial v}.$$

由(i)的条件有

$$\frac{z}{u} = 0,$$

从而

$$z = z(v) = z \frac{y}{x}$$

由(ii)的条件有

$$\frac{z}{v} = 0,$$

从而

$$z = z(u) = z(x^2 + y^2).$$

【证毕】

综例 20.5.5 若二阶连续可微函数 $u = u(x, y)$ 满足关系

$$A \frac{u^2}{x^2} + 2B \frac{u^2}{xy} + C \frac{u^2}{y^2} = 0,$$

其中 A, B, C 为常数, 且 $AC - B^2 < 0$, 求一线性变换

$$= x + y,$$

$$= x + \mu y.$$

将方程简化为

$$\frac{u^2}{x^2} = 0.$$

【解】 我们将 u 可看作以 x, y 为中间变量, 以 x, y 为自变量的函数, 亦可反过来将 x, y 看作中间变量而以 u 为自变量, 下面求其导数之间的关系. 以下将 u 当作中间变量, 而 x, y 当作自变量, 此时

$$\begin{aligned} \frac{u}{x} &= \frac{u}{x} + \frac{u}{x} \frac{u}{x} = \frac{u}{x} + \frac{u}{x} = \frac{u}{x} + \frac{u}{x} u, \\ \frac{u^2}{x^2} &= \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} \\ &= \frac{u^2}{x^2} + 2 \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} u = \frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{y} &= \frac{u}{y} + \frac{u}{y} = \frac{u}{y} + \mu \frac{u}{y} = \frac{u}{y} + \mu \frac{u}{y}, \\ \frac{u^2}{y^2} &= \frac{u^2}{y^2} + \frac{u^2}{y^2} \mu + \mu \frac{u^2}{y^2} + \frac{u^2}{y^2} \mu \\ &= \frac{u^2}{y^2} + 2\mu \frac{u^2}{y^2} + \mu^2 \frac{u^2}{y^2} = \frac{u^2}{y^2} + \mu^2 \frac{u^2}{y^2}. \end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{xy} &= \frac{u^2}{xy} + \frac{u^2}{xy} + \mu \frac{u^2}{xy} \\ &= \frac{u^2}{xy} + (\mu + \mu) \frac{u^2}{xy} + \mu \frac{u^2}{xy}. \end{aligned}$$

将以上结果代入题设式子得

$$\begin{aligned} A \frac{u^2}{x^2} + 2B \frac{u^2}{xy} + C \frac{u^2}{y^2} &= (A + 2B + C^2) \frac{u^2}{y^2} \\ &+ (A + 2B\mu + C\mu^2) \frac{u^2}{x^2} + 2(A + B(\mu + \mu) + C\mu) \frac{u^2}{xy} = 0. \end{aligned}$$

欲得到所需的简化形式, 需有

$$A + 2B + C^2 = 0,$$

$$A + 2B\mu + C\mu^2 = 0.$$

首先, 设 $C \neq 0$, 则由 $AC - B^2 < 0$, 得方程

$$A + 2B + C^2 = 0$$

有两个不同的实根, 一个取为 λ , 另一个取为 μ , 这样有

$$\lambda + \mu = -\frac{2B}{C}, \quad \mu = \frac{A}{C}.$$

从而方程简化为

$$(2A + 2B(\lambda + \mu) + 2C\mu) \frac{u^2}{xy} = 0,$$

$$(AC - B^2) \frac{u^2}{xy} = 0.$$

因 $AC - B^2 < 0$, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

再者, 如果 $C=0$, 而 $A \neq 0$, 则只要将线性变换改成

$$\begin{aligned} &= x + y, \\ &= \mu x + y. \end{aligned}$$

可以得到相同的结果.

若 $A=C=0$, 则方程就已化为所求形式, 不必进行变换了.

【解毕】

综例 20.5.6 若一阶连续可导函数 $z = f(x, y)$ 满足关系

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y), \quad t > 0 \quad (20.16)$$

称 f 为 k 次齐次函数. 证明: f 为 k 次齐次函数(简称 k 齐函数)的充要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = kf. \quad (20.17)$$

【证】 此题的必要性证明是很简单的, 只要在条件(20.16)中, 固定 x 和 y , 两边对 t 求导得

$$xf_1 + yf_2 = kt^{k-1} f.$$

再以 $t=1$ 代入, 则有

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = kf.$$

而关于充分性的证法比较多. 以下列举几个证法.

(方法 1) 今欲证(20.16)成立, 意味着要证函数

$$\varphi(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^k}$$

与 t 无关.

由于 $\varphi(1) = f(x, y)$, 只要证 $\varphi'(t) = 0$ 即可. 为此, 求导数

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{f(tx, ty)}{t^k}$$

$$= \frac{1}{t^k} t^k x \frac{f(tx, ty)}{x} + y \frac{f(tx, ty)}{y} - kt^{k-1} f(tx, ty) .$$

由条件(20.17)得

$$(tx) \frac{f(tx, ty)}{x} + (ty) \frac{f(tx, ty)}{y} = kf(tx, ty),$$

再代入上式,得

$$\frac{d}{dt}(t) = \frac{1}{t^k} [t^{k-1} kf(tx, ty) - kt^{k-1} f(tx, ty)] = 0 .$$

又由于 $(1) = f(x, y)$.从而

$$(t) = (1), \quad t > 0 .$$

这就是恒等式(20.16) .

(方法 2) 在条件(20.17)中,用 tx, ty 代入,则有

$$tx \frac{f(tx, ty)}{x} + ty \frac{f(tx, ty)}{y} = kf(tx, ty) .$$

记 $(t) = f(tx, ty)$, 在上式中对任何固定的 x, y , 则有关系

$$t \frac{d}{dt}(t) = k(t),$$

$$(1) = f(x, y) .$$

解这个关于 (t) 的一阶微分方程, 可得对任意的 $t > 0$ 有

$$(t) = (1) \cdot t^k,$$

这就是

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) .$$

(方法 3) 令

$$u = x,$$

$$v = \frac{y}{x},$$

对函数 $z = f(x, y)$ 作自变量变换, 得导数间关系

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{f}{y} = 0 + \frac{1}{x} \frac{f}{v}.$$

这样

$$kf = x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} = u \frac{f}{u},$$

即有

$$\frac{f_u}{f} = \frac{k}{u}, \quad (\ln f)_u = \frac{k}{u},$$

解之得

$$\ln f = k \ln u + \ln c(v),$$

$$f(x, y) = c(v) u^k = c \frac{y}{x} \cdot x^k.$$

再验证上述函数是 k 次齐次函数, 因为当 $t > 0$ 时

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= c \frac{y}{x} \cdot (tx)^k = t^k \cdot c \frac{y}{x} \cdot x^k \\ &= t^k f(x, y). \end{aligned}$$

这就证明了 $f(x, y)$ 是 k 次齐次函数.

(方法 4) 令

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

利用(20.14), 则使得关系(20.17)变成

$$r \frac{f}{r} = kf.$$

解得 $f = c r^{k^2}$, 即

$$f(x, y) = c \arctan \frac{y}{x} \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}.$$

显然满足

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

【证毕】

综例 20.5.7 设 $u = u(x, y)$ 由下列方程确定

$$\begin{aligned} u &= f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) &= 0, \\ h(z, t) &= 0. \end{aligned}$$

试计算 $\frac{u}{x}$ 与 $\frac{u}{y}$.

【解】 这个函数关系比较复杂. 这里 u 是函数, x, y 是自变量, z, t 是中间变量, 其中自变量 x 与中间变量 z, t 无关, 而自变量 y 与中间变量 z, t 是由后两个方程产生隐函数关系确定的. 首先有

$$\frac{u}{x} = \frac{f}{x},$$

但

$$\frac{u}{y} = \frac{f}{y} + \frac{f}{z} \frac{z}{y} + \frac{f}{t} \frac{t}{y},$$

而系数 $\frac{z}{y}$ 与 $\frac{t}{y}$ 由隐函数关系 $\begin{cases} g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$ 确定, 将方程分别对 y

求导, 得

$$\frac{-g}{y} + \frac{g}{z} \frac{z}{y} + \frac{g}{t} \frac{t}{y} = 0,$$

$$\frac{h}{z} \frac{z}{y} + \frac{h}{t} \frac{t}{y} = 0.$$

解关于 $\frac{z}{y}$ 及 $\frac{t}{y}$ 的方程得

$$\begin{aligned} \frac{z}{y} &= \frac{1}{\begin{vmatrix} (g, h) \\ (z, t) \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} h & -g \\ t & -g \end{vmatrix}} - \frac{g}{y}, \\ \frac{t}{y} &= \begin{vmatrix} (g, h) \\ (z, t) \end{vmatrix} - \frac{h}{z} - \frac{g}{z} \quad 0 \end{aligned}$$

代入得

$$\frac{u}{y} = \frac{f}{y} + \frac{-\frac{f}{z} \frac{h}{t} \frac{g}{y} + \frac{f}{t} \frac{h}{z} \frac{g}{y}}{\frac{-g}{z} \frac{h}{t} - \frac{g}{t} \frac{h}{z}}.$$

【解毕】

【注】 此题计算稍微麻烦一点,但由于关系比较曲折.若能搞清关系,成功计算出结果,对于掌握复合函数求导问题是有帮助的.

综例 20.5.8 设 $z = f(x, y)$ 定义在区域 D 中,且满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. 证明 $f(x, y)$ 在 D 中恒为常数.

【证】 要证 $f(x, y)$ 在 D 中为常数,则只须证明,取 D 中一点 $P_0(x_0, y_0)$,而对 D 中任一点 $P(x, y)$,都有

$$f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

由于区域 D 是连通开集,则对任给 D 中 P 点,我们总可以用有限段 D 中的折线将 P 与 P_0 连结起来,如果这每段折线上函数的增量都是零的话,显然就证明了 $f(P) = f(P_0)$.为此我们先证头一段折线 $P_0 P_1$ 上的函数增量为零.设 $P_1(x_1, y_1)$,则对在 $P_0 P_1$ 上的 $P_t(x_t, y_t)$ 有

$$x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) = x_0 + t x,$$

$$y_t = y_0 + t(y_1 - y_0) = y_0 + t y.$$

其中 $x = x_1 - x_0$, $y = y_1 - y_0$.

研究函数

$$\varphi(t) = f(x_t, y_t) = f(x_0 + t x, y_0 + t y).$$

从 P_0 到 P_1 函数的增量为

$$f(P_1) - f(P_0) = \varphi(1) - \varphi(0).$$

根据一元函数有限增量公式

$$\begin{aligned} f(P_1) - f(P_0) &= \frac{d(\varphi)}{dt} \cdot 1 \\ &= \frac{f(x_0 + t x, y_0 + t y)}{x} x \\ &\quad + \frac{f(x_0 + t x, y_0 + t y)}{y} y. \end{aligned}$$

由于点 $(x_0 + t x, y_0 + t y)$ 在 $P_0 P_1$ 上,故在 D 中,其偏导值为 0,

可见

$$f(P_1) - f(P_0) = 0.$$

类似地可证, 在折线上任何两相邻点 P_k, P_{k+1} 之间都有 $f(P_{k+1}) = f(P_k)$. 从而有 $f(P) = f(P_0)$. **【证毕】**

综例 20.5.9 设 $z = z(x, y)$ 满足方程 $\frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2}{y^2} - \frac{z^2}{x y} = 0$. 若把 $z = z(x, y)$ 中 y 看作 x 和 z 的函数, 即 $y = y(x, z)$. 证明它满足同样形式的方程

$$\frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2}{z^2} - \frac{z^2}{x z} = 0.$$

【证】 首先我们利用一阶微分形式不变性对关系 $z = z(x, y)$ 两边微分得

$$dz = \frac{z}{x} dx + \frac{z}{y} dy,$$

解出 dy 得

$$dy = -\frac{\frac{z}{x}}{\frac{z}{y}} dx + \frac{1}{\frac{z}{y}} dz.$$

可见有

$$\frac{y}{x} = -\frac{z}{x} \frac{1}{\frac{z}{y}}, \quad \frac{y}{z} = 1 \frac{1}{\frac{z}{y}}.$$

在求二阶导数之前, 注意函数的结构. 这里函数 $y = y(x, z)$ 由关系 $z = z(x, y)$ 确定, 因此, 函数 $z = z(x, y)$ 的结构是

$$y = y(x, z)$$

而且 $\frac{z}{x}$, $\frac{z}{y}$ 亦是有与此同样的结构.

这样由 $\frac{y}{x} = \frac{-z}{x} / \frac{z}{y}$, $\frac{y}{z} = 1 / \frac{z}{y}$, 可得

$$\frac{\frac{2}{z}y}{z} = \frac{-1}{z^2} \cdot \frac{z^2}{y^2} \cdot \frac{y}{z} = \frac{-1}{z^3} \frac{z^2}{y^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{x}y}{xz} &= \frac{-1}{z^2} \frac{z^2}{xy} + \frac{z^2}{y^2} \frac{y}{x} \\ &= \frac{-1}{z^3} \frac{z^2}{y} \frac{z}{xy} - \frac{z^2}{x} \frac{z}{y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{x^2}y}{x^2} &= \frac{-1}{z^2} \frac{z^2}{y} \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{xy} \frac{y}{x} - \frac{z^2}{x} \frac{z}{xy} + \frac{z^2}{y^2} \frac{y}{x} \\ &= \frac{-1}{z^2} \frac{z^2}{y} \frac{z}{x^2} - 2 \frac{z^2}{x} \frac{z}{xy} + \frac{\frac{z^2}{x}}{z} \frac{z^2}{y^2}. \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2}{z}y}{z} \cdot \frac{\frac{2}{x^2}y}{x^2} &= \frac{1}{z^5} \frac{z^2}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{z^2}{y^2} \\ &\quad - 2 \frac{z^2}{x} \frac{z^2}{xy} \cdot \frac{z^2}{y^2} + \frac{\frac{z^2}{x}}{z} \frac{z^2}{y^2}. \end{aligned}$$

将 $\frac{\frac{2}{z}y}{z} \cdot \frac{\frac{2}{x^2}y}{x^2} = \frac{z^2}{xy^2}$ 代入, 并整理得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{z^6} \frac{\partial^2 z}{y} \frac{\partial^2 z}{x y} \\
 &\quad - 2 \frac{\partial z}{x} \frac{\partial z}{y} \frac{\partial^2 z}{x y} \frac{\partial^2 z}{y^2} + \frac{\partial z}{x} \frac{\partial^2 z}{y} \\
 &= \frac{-1}{z^3} \frac{\partial z}{y} \frac{\partial^2 z}{x y} - \frac{\partial z}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{y^2} \\
 &= \frac{\partial^2 y}{x z} .
 \end{aligned}$$

【证毕】

第 21 章 多元微分学的应用

21.1 引言

多元函数微分学的应用主要在三方面,一是在几何上表示空间曲线的切线和空间曲面的切平面,可引申出微分几何的一些基本概念;第二方面是函数性质的研究,主要是用多元泰勒公式来讨论函数在一点附近增量的性态;第三是用于求多元函数的极值问题.

21.2 空间曲线的切线与法平面,空间曲面的切平面与法线

1. 空间曲线的切线与法平面

通常空间曲线 L 用参数方程

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}\tag{21.1}$$

来表示,这里假设 $(x(t), y(t), z(t))$ 是曲线的动点坐标,是三个连续可微的一元函数.

过曲线 L 上的两点 $P_0(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 和 $P(t) = (x(t_0 + t), y(t_0 + t), z(t_0 + t))$ 的直线方程是

$$\frac{x - x(t_0)}{x} = \frac{y - y(t_0)}{y} = \frac{z - z(t_0)}{z},$$

或者

$$\frac{x - x(t_0)}{x' t} = \frac{y - y(t_0)}{y' t} = \frac{z - z(t_0)}{z' t}.$$

其中

$$x = x(t_0 + t) - x(t_0),$$

$$y = y(t_0 + t) - y(t_0),$$

$$z = z(t_0 + t) - z(t_0).$$

曲线 L 在 $P_0(t_0)$ 点的切线方程就可看作是上述直线方程当 $t \rightarrow 0$ 时的极限, 即

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \quad (21.2)$$

这就是曲线 L 在 P_0 点的切线方程. 该切线的方向向量为

$$\mathbf{s} = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}. \quad (21.3)$$

相应的单位向量为

$$\mathbf{s}_0 = \frac{x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2}}. \quad (21.4)$$

曲线 L 在 $P_0(t_0)$ 点的弧微分向量为

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= dx(t)\mathbf{i} + dy(t)\mathbf{j} + dz(t)\mathbf{k} \\ &= (x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k})dt. \end{aligned} \quad (21.5)$$

曲线 L 在 P_0 点的法平面就是以 \mathbf{s}_0 为法线方向过 P_0 点的平面, 即

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0. \quad (21.6)$$

例 21.2.1 求曲线

$$x = e^t \cos t,$$

$$L: y = e^t \sin t,$$

$$z = e^t.$$

上任一点 $P(x, y, z)$ 处的切线与此点的矢径 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 间的夹角.

【解】 先求曲线 $P(x(t), y(t), z(t))$ 处切线的方向

$$\mathbf{s}(t) = [(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]e^t,$$

$$\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = e^t((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1)^{1/2} = 3e^t,$$

$$|\mathbf{r}(t)| = e^t(\cos^2 t + \sin^2 t + 1)^{1/2} = 2e^t,$$

$$\cos(\theta, \mathbf{r}) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) / (|\mathbf{r}'(t)| \cdot |\mathbf{r}(t)|) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t))}{|\mathbf{r}'(t)| \cdot |\mathbf{r}(t)|} = \frac{2}{3}.$$

所求夹角是个常角

$$(\theta, \mathbf{r}) = \arccos \frac{2}{3}. \quad \text{【解毕】}$$

空间两条曲线如果相交,在交点处两曲线的交角是指它们在该点处切线的交角,特别若交角为 $\frac{\pi}{2}$,称为两曲线在该点正交.判断正交的条件是两切线的方向向量的点积为零.

例 21.2.2 证明空间曲线

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = h. \end{cases} \quad (a > 0, h \text{ 为常数})$$

上任一点 $P(x, y, z)$ 与过此点与原点的连线总是正交的.

【证】先将曲线 L 参数化,为此引进 t ,变成

$$x = a \cos t,$$

$$L: y = a \sin t,$$

$$z = h.$$

它在 $P(x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, h)$ 点的切线方向为

$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j},$$

而连接原点与 P 点直线的方向为

$$\mathbf{r}_1 = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + h \mathbf{k}.$$

由于

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}_1 = -a^2 \sin t \cos t + a^2 \cos t \sin t = 0.$$

可见 $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}_1$.

【证毕】

2. 空间曲面的切平面

空间曲面 $S: z = f(x, y)$ 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) 的切平面, 可以用几种不同但等价的几何方法定义.

其一是从微分角度看, 曲面 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的切平面是这样的过 M_0 的平面, 在 $P_0(x_0, y_0)$ 附近曲面 S 上点 $M(x, y, z(x, y))$ 到该平面的距离当 $P \rightarrow P_0$ 时是 $d = |P_0 P|$ (其中 $P(x, y)$ 的高阶无穷小). 实际上, 容易证明, 在 $z = z(x, y)$ 可微条件下, 这与微分的定义

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{f(P_0)}{x}(x - x_0) + \frac{f(P_0)}{y}(y - y_0) + o(d) \end{aligned}$$

是一致的, 这里, 满足上述条件的平面正是

$$z - z_0 = \frac{f(P_0)}{x}(x - x_0) + \frac{f(P_0)}{y}(y - y_0), \quad (21.7)$$

这也正是微分的几何意义. 其中切平面的法向量是

$$\mathbf{n} = \frac{f(P_0)}{x}\mathbf{i} + \frac{f(P_0)}{y}\mathbf{j} - \mathbf{k}. \quad (21.8)$$

其二, 过 M_0 点切平面可当作: 过 M_0 点曲面 S 的割平面 (即再取曲面 S 上与 M_0 不共线的另外两点 M_1 与 M_2 , 由 M_0, M_1, M_2 三点确定的平面), 当 $M_1 \rightarrow M_0, M_2 \rightarrow M_0$ 时的极限. 这样也能得到 (21.8).

其三, 亦可当作两空间曲线

$$L_1: \begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0. \end{cases}$$

在交点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处两切线所确定的平面. 因为 L_1 与 L_2 的切线向量分别为

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{i} + \frac{f(x_0, y_0)}{x}\mathbf{k}, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{j} + \frac{f(x_0, y_0)}{y}\mathbf{k}.$$

相应的平面法线向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -\frac{f}{y} \\ 1 & 0 & -\frac{f}{x} \end{vmatrix} = \frac{f}{x}\mathbf{i} + \frac{f}{y}\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

这就是(21.8) .

空间曲面 S 的切平面方程的表示形式, 与曲面方程的表示形式有关. 公式(21.7) 是当曲面 S 是以显式形式表示时而得到的 .

若曲面 S 以隐式表示成

$$F(x, y, z) = 0,$$

则其在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程具有较对称的形式

$$-\frac{F}{x}(x - x_0) + \frac{F}{y}(y - y_0) + \frac{F}{z}(z - z_0) = 0. \quad (21.9)$$

其法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{F}{x}\mathbf{i} + \frac{F}{y}\mathbf{j} + \frac{F}{z}\mathbf{k}. \quad (21.10)$$

若曲面 S 以参数形式表示成

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v).$$

其中 u, v 为参数, 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (其中 $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$) 的切平面, 可看作空间曲线

$$x = x(u, v), \quad x = x(u, v_0),$$

$$L_1: y = y(u, v), \quad \text{及} \quad L_2: y = y(u, v_0),$$

$$z = z(u, v). \quad z = z(u, v_0).$$

在交点 (x_0, y_0, z_0) 处切线所构成的平面, 这两曲线的切线方向分别为

$$\mathbf{t}_1 = \frac{x}{v}\mathbf{i} + \frac{y}{v}\mathbf{j} + \frac{z}{v}\mathbf{k} \quad \text{和} \quad \mathbf{t}_2 = \frac{x}{u}\mathbf{i} + \frac{y}{u}\mathbf{j} + \frac{z}{u}\mathbf{k},$$

从而,它们确定了切平面的法线方向为

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (21.11)$$

由此不难求出相应的在参数方程表示下的切平面方程.

例 21.2.3 求球面的切平面在三种不同函数形式下的法向量.

【解】 显式形式: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{j} - \mathbf{k}. \end{aligned}$$

隐式形式: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$,

$$\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

参数形式:

$$x = R \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = R \cos \theta.$$

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos \theta \cos \phi & R \cos \theta \sin \phi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \phi & R \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \mathbf{i} + R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \mathbf{j} + R^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{k}$$

$$= R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}).$$

以上三种结果,实际上是一致的.

例 21.2.4 证明所有在曲面 S 上, 过 S 上 M_0 点的空间曲线, 在 M_0 处的切线均与该点处的切平面的法线向量正交.

【证】 设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 其中一点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 设有空间曲线 L :

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t), \quad t \in I.\end{aligned}$$

过 M_0 点且在曲面上, 即有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad t \in I.$$

对 t 求导得

$$\frac{F}{x}(t) + \frac{F}{y}(t) + \frac{F}{z}(t) = 0,$$

即

$$\frac{F}{x}\mathbf{i} + \frac{F}{y}\mathbf{j} + \frac{F}{z}\mathbf{k} \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) = 0.$$

而切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{F}{x}\mathbf{i} + \frac{F}{y}\mathbf{j} + \frac{F}{z}\mathbf{k}.$$

在 S 上过 M_0 的曲线 L 的切向量为

$$\mathbf{t} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

由于 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$, 即 $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$.

【证毕】

21.3 多元泰勒公式

在一元函数中泰勒公式是研究函数增量的有力工具, 在多元函数中可采用一元化的方法, 推导出相应的多元泰勒公式. 以下讨论亦以二元函数为例.

求函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点的泰勒公式.

对于给定的点 $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 考虑函数增量

$$f(P_0) = f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0).$$

令线段 $P_0 P$ 上的点 $P_t(x_t, y_t): x_t = x_0 + t x, y_t = y_0 + t y$. 研究关于 t 的一元函数

$$\varphi(t) = f(x_0 + t x, y_0 + t y).$$

这样

$$f(P_0) = \varphi(1) - \varphi(0).$$

在 $f(x, y)$ 为 $n+1$ 阶连续可微的条件下, $\varphi(t)$ 在 0 点有 n 阶泰勒公式, 从而 $f(P_0)$ 可以表示成

$$\begin{aligned} f(P_0) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{2!} \varphi'(0) + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

这里

$$\varphi(1) = f(x_0 + x, y_0 + y), \quad \varphi(0) = f(x_0, y_0)$$

$$\varphi'(t) = \frac{df}{dx} x + \frac{df}{dy} y = x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy},$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{d^2 f}{dx^2} x^2 + \frac{d^2 f}{dy^2} y^2 + \frac{d^2 f}{dx dy} x y + \frac{d^2 f}{dy dx} y x \\ &= x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + y^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + 2xy \frac{d^2 f}{dx dy}, \end{aligned}$$

.....

这里 $x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy}$ ($k=1, 2$) 是上述求偏导公式中的一个简写

记号. 用归纳法可以证明

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)}(t) &= \frac{d^m f}{dx^m} x^m + m \frac{d^m f}{dx^{m-1} dy} x^{m-1} y + \dots \\ &+ \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \frac{d^m f}{dx^k dy^{m-k}} x^k y^{m-k} \\ &+ \dots + \frac{d^m f}{dy^m} y^m \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{x} + \frac{y}{y} \frac{f}{y^m},$$

其中 $\frac{x^k}{x} \cdot \frac{y^{m-k}}{y} = \frac{x^k y^{m-k}}{x^k y^{m-k}}$.

因此 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的泰勒公式是

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y) &= f(x_0, y_0) + \frac{f'(P_0)}{x} x + \frac{f'(P_0)}{y} y \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right)^2 f''(P_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right)^n f^{(n)}(P_0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right)^{n+1} \\ &\quad \cdot f^{(n+1)}(x_0 + x, y_0 + y), \\ &\quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

由于高阶的泰勒公式写起来很长, 因此在实际上最常用的泰勒公式如下:

0 阶泰勒公式

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \frac{f'(P)}{x} x + \frac{f'(P)}{y} y;$$

1 阶泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y) &= f(x_0, y_0) + \frac{f'(P_0)}{x} x + \frac{f'(P_0)}{y} y \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{f''(P)}{x^2} x^2 + 2 \frac{f''(P)}{x y} x y \\ &\quad + \frac{f''(P)}{y^2} y^2 \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{f'(P)}{x} x + \frac{f'(P)}{y} y \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

或

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \frac{f'(P_0)}{x} x + \frac{f'(P_0)}{y} y + o(\rho);$$

2 阶泰勒公式

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y) &= f(x_0, y_0) + \frac{f'(P_0)}{x} x + \frac{f'(P_0)}{y} y \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\rho^2). \end{aligned}$$

其中 $x = x - x_0$, $y = y - y_0$, $P = (x_0 + x, y_0 + y)$ ($0 < \rho < 1$), $\rho = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$.

例 21.3.1 求函数

$$f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$$

在 $(2, -1)$ 点的泰勒公式.

【解】 由于这是一个三次多项式, 因此泰勒公式中最高次项为三次项.

首先求直到三阶的所有混合偏导数, 及其在点 $(2, -1)$ 的值:

$$\begin{aligned} \frac{f}{x} &= 3x^2 - 10x - y + 10, & \frac{f(2, -1)}{x} &= 3; \\ \frac{f}{y} &= -x + 2y + 5, & \frac{f(2, -1)}{y} &= 1; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1, & \frac{\partial^2 f(2, -1)}{\partial x \partial y} &= -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x - 10, & \frac{\partial^2 f(2, -1)}{\partial x^2} &= 2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2, & \frac{\partial^2 f(2, -1)}{\partial y^2} &= 2; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= 6, & \frac{\partial^3 f(2, -1)}{\partial x^3} &= 6. \end{aligned}$$

除此之外的导数全是零, 代入公式得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - (x - 2)(y + 1) \\ &\quad + (y + 1)^2 + (x - 2)^3. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 21.3.2 将函数 $f(x, y) = y^x$ 在 $(1, 1)$ 点展到泰勒公式的二次项.

【解】 首先有 $f(1, 1) = 1$, 再求二阶以下导数:

$$\begin{aligned} \frac{f}{x} &= y^x \ln y, & \frac{f(1, 1)}{x} &= 0; \\ \frac{f}{y} &= xy^{x-1}, & \frac{f(1, 1)}{y} &= 1; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^x (\ln y)^2, & \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x(x-1)y^{x-2}, & \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= y^{x-1}(x \ln y + 1), & \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x \partial y} &= 1. \end{aligned}$$

这样有

$$\begin{aligned} y^x &= 1 + (0, 1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x-1, y-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(2) \\ &= 1 + (y-1) + \frac{1}{2} [2(x-1)(y-1)] + o(2) \\ &= 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(2). \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 上式告诉我们, 在 $(1, 1)$ 点附近, 函数

$$z = y^x$$

可以用二次函数

$$z = 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) = 1 - x + xy$$

近似替代, 只差关于 2 的高阶无穷小 .

21.4 多元函数极值问题

这里有三方面内容 .

1. 函数的无条件极值问题

这是考虑一个函数的局部极值问题 . 函数 $w = f(P)$ 在 P_0 点取到极值, 是指存在 P_0 的某个邻域 $N(P_0)$, 使得对任何 $P \in N(P_0)$ 均有 $f(P) \leq f(P_0)$, 称 P_0 为极大点, $f(P_0)$ 为极大值; 或者有 $f(P) \geq f(P_0)$, 称 P_0 为极小点, $f(P_0)$ 为极小值 .

若 $f(P)$ 是可微函数, 则 P_0 为极值点的必要条件是 f 在 P_0 的梯度为零向量, 即

$$\text{grad} f(P_0) = \mathbf{0} .$$

求梯度为零的点, 实际上要解上述方程组 .

梯度为零的点称为函数 $f(P)$ 的驻点, 它不一定是极值点, 判断驻点是否是极值点, 可利用二阶泰勒公式 .

下面以二元与三元函数为例进行具体讨论 .

当 $z = f(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ 为驻点时, 由二阶泰勒公式有

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \mathbf{H}(P_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\rho^2) .$$

当 $w = f(x, y, z)$, 而 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为驻点时, 有

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{pmatrix} \mathbf{H}(P_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + o(\rho^2) .$$

因此, 若对 $\forall P = (x, y)^T \neq \mathbf{0}$ 或 $(x, y, z)^T \neq \mathbf{0}$ 均有 $P^T \mathbf{H}(P_0) P > 0$ 时 P_0 为极小点, $f(P_0)$ 为极小值;

当 $P^T \mathbf{H}(P_0) P < 0$ 时, P_0 为极大点, $f(P_0)$ 为极大值;

当 $P^T \mathbf{H}(P_0) P$ 可正可负时, P_0 不是极值点.

这里 $\mathbf{H}(P_0)$ 是函数 f 在 P_0 的海森矩阵, 对二、三元情形分别为

$$\begin{array}{cc|c} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \\ \hline & & P_0 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \\ \hline & & & P_0 \end{array}.$$

用矩阵二次型的语言来说是:

当 f 在 P_0 的海森矩阵 $\mathbf{H}(P_0)$ 正定时, P_0 为极小点;

当 f 在 P_0 的海森矩阵 $\mathbf{H}(P_0)$ 负定时, P_0 为极大点;

当 f 在 P_0 的海森矩阵 $\mathbf{H}(P_0)$ 不定时, P_0 不是极值点.

判断一个对称矩阵是否正定的充要条件是顺序主子式为正;

判断负定的充要条件是顺序主子式负正相隔.

二阶情形:

$$\mathbf{H} = \begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{array}.$$

当 $f_{xx} > 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ 时, \mathbf{H} 为正定;

当 $f_{xx} < 0$, $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$ 时, \mathbf{H} 为负定.

三阶情形:

$$\mathbf{H} = \begin{array}{ccc} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{array}.$$

$$\text{当 } f_{xx} > 0, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} > 0 \text{ 时,}$$

H 正定;

$$\text{当 } f_{xx} < 0, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} < 0 \text{ 时,}$$

H 负定 .

2. 函数的条件极值问题

问题是求一个多元函数 $f(P)$, 在满足条件, 比如 $g(P) = 0$ 下的极值问题. 通常称 $f(P)$ 为目标函数, $g(P) = 0$ 为约束条件. 以二、三元为例有如下形式:

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } z &= f(x, y), \\ \text{约束条件 } g(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (21.12)$$

或者

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } w &= f(x, y, z), \\ \text{约束条件 } g(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (21.13)$$

约束可以有两个, 如

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } w &= f(x, y, z) \\ \text{约束条件 } g_1(x, y, z) &= 0, g_2(x, y, z) = 0. \end{aligned} \quad (21.14)$$

求条件极值问题, 可以从约束中将中间变量解出来, 用自变量表示, 再代入目标函数中, 从而化成无条件极值问题. 这种方法在许多实际情况下是不可行的, 这就产生了所谓拉格朗日乘子法. 今以(21.13)为例加以叙述.

先构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

而后就将条件极值问题(21.13)转化为拉格朗日函数的无条件极值问题, 即求 $L(x, y, z, \lambda)$ 的驻点. 从而得

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{x} &= \frac{f}{x} + \frac{-g}{x} = 0, \\
 \frac{L}{y} &= \frac{f}{y} + \frac{-g}{y} = 0, \\
 \frac{L}{z} &= \frac{f}{z} + \frac{-g}{z} = 0, \\
 \frac{L}{1} &= g(x, y, z) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{21.15}$$

首先从几何上解释一下该方法的直观意义:若 P_0 是极值点, (21.15) 中前三个关系可用梯度形式写成

$$\text{grad } f(P_0) + \text{grad } g(P_0) = \mathbf{0}. \tag{21.16}$$

这个式子表示,在极值点 P_0 处函数 f 的梯度与约束函数的梯度平行.先看函数 f 的梯度 $\text{grad } f(P_0)$,它表示目标函数的增加最快的方向(反过来是下降最快的方向).又由于点的变化只能在约束的曲面 $S: g(x, y, z) = 0$ 上,曲面 S 实际是三元函数 $u = g(x, y, z)$ 的等值面,这个等值面在 P_0 处的法线向量是

$$-\frac{g}{x}\mathbf{i} + \frac{-g}{y}\mathbf{j} + \frac{-g}{z}\mathbf{k} = \text{grad } g(P_0).$$

它与等值面 $S: g(x, y, z) = 0$ 上任一条过 P_0 点的曲线的切线垂直(这是前面提到过的梯度向量的重要性质).因此条件(21.16)又可叙述为:在极值点 P_0 处,目标函数 $f(x, y, z)$ 的梯度 $\text{grad } f(P_0)$ 垂直于约束曲面 $S: g(x, y, z) = 0$ 上任何一条过 P_0 的曲线的切线.这也就是说,在 P_0 点附近,当点 P 在约束面 S 上变化时,其函数值 $f(P)$ 或者不可能大于 $f(P_0)$,此时 P_0 是在约束 $g(x, y, z) = 0$ 下的极小点;或者 $f(P)$ 不可能小于 $f(P_0)$,此时 P_0 是在约束下的极大点.

今将(21.16)改写一下成为

$$\text{grad}(f(P_0) + g(P_0)) = \mathbf{0}.$$

这说明,在 P_0 点给定 0 后,条件极值的极值点 P_0 ,正好是函数

$L(P, \lambda)$ 的无条件极值点 .

从而判断 P_0 是否是极值点, 此时可以利用拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda)$ 在 P_0 点的海森矩阵是否正定或负定来判别 .

3. 求多元连续函数在一个闭区域上的最值问题

例如, 求 $z = f(x, y)$, 在区域 $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ 上的最值 . 一般解法是, 先求函数 $z = f(x, y)$ 的无条件极值, 找出所有在 D 上的驻点, 与不可微的点, 比如是 P_1, P_2, \dots, P_k . 然后再解条件极值问题

目标函数 $f(x, y)$,

约束条件 $g(x, y) = 0$.

若所有极值点, 不可微点及端点为 Q_1, Q_2, \dots, Q_l , 这时, 只要计算出所有的 $f(P_i)$ 和 $f(Q_j)$, $i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, l$. 其中最大者为 D 上最大点; 最小者为 D 中最小点 .

特别要加以说明的是, 在实际问题中求最值问题通常有三步: 第一步是明确“三个什么?”, 即什么函数(目标函数), 在什么条件下(约束条件), 求什么最值(是最大还是最小) . 这一步是解决问题的关键 . 第二步是从导数等于零的方程中, 求驻点, 一般情况下求这种代数方程都比较困难 . 在具体求解时, 若注意到可能存在的方程中对变量的对称性, 对化简方程很有益处 . 第三步是分析得到的驻点是否是所求的极值或最值点, 若要从理论上分析, 一般只在比较简单的情形下才可能, 大多数是从实际问题的分析中确定有最值, 而今又只有唯一极值点, 从而确定为所求之点 .

例 21.4.1 求函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值 .

【解】 首先求出驻点, 即解方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0 .$$

求得两个驻点 $P_1(0, 0)$ 与 $P_2(1, 1)$.

为判断极值点性质, 求出海森矩阵

$$\mathbf{H}(P) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} .$$

在 $P_1(0, 0)$ 点处, $\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, 因 $a_{11} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$

$-9 < 0$, 是非定矩阵, 因此 P_1 不是极值点; 在 $P_2(1, 1)$ 点处,

$\mathbf{H}(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, 因 $a_{11} = 6 > 0$, $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$, 是正定

矩阵, 因此 P_2 是极小点 .

【解毕】

【注】 这里 x, y 在方程中是对称的, 因此其解必然对称 .

例 21.4.2 求隐函数 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 的极值 .

【解】 这有两种方法 .

(方法 1) 当作隐函数 $z = z(x, y)$ 按无条件极值, 求驻点

$$\begin{aligned} 4x + 2z \frac{-z}{x} + 2y - 2 - 4 \frac{-z}{x} &= 0, \\ 2y + 2z \frac{-z}{y} + 2x - 2 - 4 \frac{-z}{y} &= 0. \end{aligned} \quad (21.17)$$

由 $\frac{-z}{x} = \frac{-z}{y} = 0$, 得方程组

$$\begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ y + x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

得到驻点 $(0, 1)$. 代入原方程得到

$$z^2 - 4z + 3 = 0 .$$

解之得 $z_1 = z(0, 1) = 1$ 和 $z_2 = z(0, 1) = 3$.

为求隐函数 $z = z(x, y)$ 的二阶导数 . 将 (21.17) 两边再对 x 和

y 求导得

$$4 + 2 \frac{z}{x}^2 + 2z \frac{z}{x^2} - 4 \frac{z}{x^2} = 0,$$

$$2 \frac{z}{x} \frac{z}{y} + 2z \frac{z}{xy} + 2 - 4 \frac{z}{xy} = 0,$$

$$2 + 2 \frac{z}{y}^2 + 2z \frac{z}{y^2} - 4 \frac{z}{y^2} = 0.$$

用点 $(0, 1, 1)$ 代入得海森矩阵

$$\mathbf{H}(0, 1, 1) = \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{array} = \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array},$$

因 $a_1 = 2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, 所以 $\mathbf{H}(0, 1, 1)$ 是正定的, 因而 $(0, 1)$ 对 $z_1(x, y)$ 为极小点.

再将 $(0, 1, 3)$ 代入得海森矩阵

$$\mathbf{H}(0, 1, 3) = \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{array} = \begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array},$$

因 $a_1 = -2 < 0$, $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} > 0$, 所以 $\mathbf{H}(0, 1, 3)$ 是负定的, 因而 $(0, 1)$ 对 $z_2(x, y)$ 是极大点.

(方法 2) 看成条件极值

目标函数 $f(x, y, z) = z$,

约束条件 $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$
 $- 2x - 2y - 4z + 4 = 0.$

相应的拉格朗日函数是

$$L(x, y, z, \lambda) = z + \lambda g(x, y, z).$$

解函数 $L(x, y, z, \lambda)$ 关于变量 (x, y, z, λ) 的无条件极值

$$\frac{L}{x} = (4x + 2y - 2) = 0,$$

$$\frac{L}{y} = (2y + 2x - 2) = 0,$$

$$\frac{L}{z} = 1 + (2z - 4) = 0,$$

$$\frac{L}{g} = g(x, y, z) = 0.$$

显然 0 , 由头两个方程解出 $x=0, y=1$, 再代入最后一个方程得 $z=1, z=3$.

考察 $(0, 1, 1)$ 点, 代入第三个方程得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 检验函数

$L(x, y, z, \frac{1}{2})$ 在 $(0, 1, 1)$ 点的海森矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因 $2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$, 它是正定的, 故 $(0, 1, 1)$ 是极小点.

再考察 $(0, 1, 3)$ 点, 得 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $L(x, y, z, -\frac{1}{2})$ 的海森矩阵为

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

因 $-2 < 0, \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} < 0$, 它是负定的, 故

$(0, 1, 3)$ 是极大点 .

【解毕】

例 21.4.3 设 $f(x)$ 在 $[- ,]$ 中连续, 今欲作如下近似

$$f(x) = a + b\sin x + c\cos x .$$

选择常数 a, b, c , 使得均方误差的平均值

$$(a, b, c) = \frac{1}{2} \int (f(x) - a - b\sin x - c\cos x)^2 dx$$

为最小 .

【解】 这是一个无条件极值问题, 先简化目标函数 (a, b, c) 的表达式. 利用函数 $(1, \cos x, \sin x)$ 在区间 $[- ,]$ 上的正交性, 可得

$$(a, b, c) = \frac{1}{2} \int (f^2(x) - 2af(x) - 2bf(x)\sin x - 2cf(x)\cos x) dx + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} ,$$

$$\frac{\partial (a, b, c)}{\partial a} = - \frac{1}{2} \int f(x) dx + 2a = 0 ,$$

$$\frac{\partial (a, b, c)}{\partial b} = - \frac{1}{2} \int f(x) \sin x dx + b = 0 ,$$

$$\frac{\partial (a, b, c)}{\partial c} = - \frac{1}{2} \int f(x) \cos x dx + c = 0 .$$

解出 a, b, c 得

$$a = \frac{1}{2} \int f(x) dx ,$$

$$b = \frac{1}{2} \int f(x) \sin x dx ,$$

$$c = \frac{1}{2} \int f(x) \cos x dx .$$

由于函数 $(a, b, c) \geq 0$, 必有最小值, 又有唯一驻点, 可见这就是要求的最小点 .

【解毕】

【注】 所求结果正是 $f(x)$ 的傅里叶系数 .

21.5 综合例题

综例 21.5.1 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在某点 M 的切平面, 使其过直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$. (1988 年考研题)

【解】 该题综合了微分学几何应用的基本内容, 解法较多, 以下列举几种.

(方法 1) 把设定条件——“翻释”成数学式子, 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$. 首先列出在 M 点的切平面方程

$$x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 3z_0(z - z_0) = 0.$$

由于 M 在椭球面上, 即有 $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$, 代入以上方程, 得过 M 点的切平面方程 为

$$x_0 x + 2y_0 y + 3z_0 z = 21. \quad (21.18)$$

再利用直线 L 在 上的条件. 首先将 L 的方程改写成参数形式

$$x = 6 + 2t,$$

$$y = 3 + t,$$

$$z = \frac{1}{2} - t.$$

代入 的方程(21.18), 得关于 t 的恒等式

$$2x_0(3 + t) + 2y_0(3 + t) + 3z_0\left(\frac{1}{2} - t\right) = 21. \quad (21.19)$$

取 $t = -3$, 得 $z_0 = 2$, 取 $t = \frac{1}{2}$, 得 $x_0 + y_0 = 3$.

又由于 M 在曲面上, 得 $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$.

联立并解上述三个方程, 得两组解

$$z_0 = 2, x_0 = 1, y_0 = 2 \text{ 和 } z_0 = 2, x_0 = 3, y_0 = 0.$$

相应代入切平面方程(21.18), 得两个平面方程

$$x + 4y + 6z = 21 \text{ 和 } x + 2z = 7 .$$

【注】 1. 在解题中 (21.19) 是关于 t 的恒等式, 这样才可以任意选择 t , 得到关于 (x_0, y_0, z_0) 的比较简单方程. 但是用这种方法只能得到包含 (x_0, y_0, z_0) 的两个独立的方程. 事实上, 若将 (x_0, y_0, z_0) 当作流动坐标, (21.19) 就是关于 t 的一个平面束, 这些平面都过直线 L . 因此由此只能有两个平面方程是独立的, 其他可由这两个线性组合得到, 例如, 取 $t=0$ 得方程

$$6x_0 + 6y_0 + \frac{3}{2}z_0 - 21 = 0 .$$

这可由 $6(x_0 + y_0 - 3) + \frac{3}{2}(z_0 - 2) = 0$ 而得. 这就是为什么还必须利用 M 在椭球面上的第三个方程的理由.

2. 对一般由二次函数 $F(x, y, z) = (x, y, z) \mathbf{A} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = c$, 确定的二次曲面 $z = z(x, y)$, 其中 \mathbf{A} 是 3×3 的对称矩阵, c 为常数. 它过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程有简单形式

$$(x_0, y_0, z_0) \mathbf{A} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = c .$$

事实上, 过 M_0 的切平面方程

$$\frac{F(M_0)}{x} (x - x_0) + \frac{F(M_0)}{y} (y - y_0) + \frac{F(M_0)}{z} (z - z_0) = 0$$

可用函数 $F(x, y, z)$ 的梯度表示为

$$\begin{matrix} x & & x_0 \\ (\text{grad} f(M_0))^T & y & - (\text{grad} F(M_0))^T & y_0 & = 0 . \\ z & & z & & z_0 \end{matrix}$$

又

$$(\text{grad} F)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 2(x_0, y_0, z_0) \mathbf{A}.$$

代入上式得

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = c.$$

(方法 2) 利用几何关系分析. 设切点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则切平面的法线向量为 $\mathbf{n} = x_0 \mathbf{i} + 2y_0 \mathbf{j} + 3z_0 \mathbf{k}$; 再有直线的方向向量为 $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, 其上一点 $M_0(6, 3, \frac{1}{2})$. 这样, 平面的法向量应垂直于 \mathbf{s} , 即 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$, 从而得 $2x_0 + 2y_0 - 3z_0 = 0$.

同时 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{MM_0}$, 即

$$x_0(x_0 - 6) + 2y_0(y_0 - 3) + 3z_0(z_0 - \frac{1}{2}) = 0.$$

再者 M 在曲面上, 即 $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$. 联立求解上述三个方程可以得到相同结果.

(方法 3) 利用过 L 的平面束来做. 为此把 L 的方程写成

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2y + 2z + 7 = 0. \end{cases}$$

则过此直线的平面束为

$$(x - 2y) + 2y + 2z - 7 = 0. \quad (21.20)$$

以下, 利用其他几何条件来确定 λ 的值.

首先, 切平面的法向量 \mathbf{n} 必与 (21.20) 平面的法向量 \mathbf{n} 平行.

这里 $\mathbf{n} = x_0 \mathbf{i} + 2y_0 \mathbf{j} + 3z_0 \mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2(1 -)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 因此, 存在 t , 使得

$$\begin{aligned}x_0 &= t, \\y_0 &= (1 -)t, \\z_0 &= \frac{2}{3}t.\end{aligned}$$

为求 t 与 , 需有两个方程, 它们分别由以下两个条件确定:

$M(x_0, y_0, z_0)$ 在平面束的公共线上, 即满足 (21. 20)

$$^2 t + 2(1 -)^2 t + \frac{4}{3}t - 7 = 0.$$

又 M 在曲面上, 故

$$(t)^2 + 2(1 -)^2 t^2 + 3 \frac{4}{9} t^2 = 21,$$

联立求解上述两方程, 首先得 $= 1$ 和 $\frac{1}{3}$, 进一步, 又可得到 $x_0 = 3, 1, y_0 = 0, 2$ 及 $z_0 = 2, 2$. 于是又得到已求出的 2 个平面方程.

【解毕】

综例 21. 5. 2 光源置于 $M_0(5, 0, 0)$, 光线照在由空间曲线

$y^2 + z^2 = 9$, 绕 x 轴旋转一周而生成不透光曲面上, 求光线在 $x = 0$

yOz 平面上的投影区域及投影锥面的方程.

【解】 首先容易求得旋转曲面正是球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

又由于投影光线与球面相切, 其切点轨迹正是过 M_0 点的球面切平面切点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的轨迹 L , 即

$$L: \begin{cases} 2x_0(x_0 - 5) + 2y_0^2 + 2z_0^2 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9. \end{cases}$$

简化而成

$$L: \begin{cases} y_0^2 + z_0^2 = \frac{12}{5}^2, \\ x_0 = \frac{9}{5}. \end{cases} \quad (21.21)$$

因此光线形成的锥面是以 L 为准线, 以 $M_0(5, 0, 0)$ 为顶点的锥面. 设锥面上动点 $P(x, y, z)$, 则根据锥面性质, 在准线 L 上有一点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 在 M_0P 形成的直线上, 这就是说, Q 点可以用直线方程表示为

$$\begin{cases} x_0 = 5 + (x - 5)t, \\ y_0 = yt, \\ z_0 = zt. \end{cases}$$

将其代入 L 的方程(21.21), 首先由其第二个方程 $x_0 = \frac{9}{5}$, 得到

$$t = -\frac{16}{5} \frac{1}{x-5}, \quad y_0 = -\frac{16}{5} \frac{y}{x-5}, \quad z_0 = -\frac{16}{5} \frac{z}{x-5}.$$

再代入(21.21)的第一个方程, 消去 y_0, z_0 , 得到关于 (x, y, z) 的方程

$$16(y^2 + z^2) = 9(x - 5)^2.$$

这就是所求锥面的方程. 而在 yOz 平面上的投影线为圆方程

$$\begin{cases} 16(y^2 + z^2) = 9(x - 5)^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \frac{15}{4}^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

其投影区域为

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leq \frac{15}{4}^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

【解毕】

【注】 以上作法是具有一般性的求锥面方程的思路,但对于本题的具体情况,也可以用旋转面方程来做:因为从几何上的分析可知

所求锥面是由在 xOy 平面上的直线 M_0P :
$$\begin{cases} 4z + 3(x - 5) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
 绕 x

轴旋转一周而成之旋转面,根据旋转面的构成,由于旋转轴为 x ,在 M_0P 的方程中 x 不变,只将另一变量 z 用 $\sqrt{z^2 + y^2}$ (旋转半径)代之,则将是所求之旋转面,即

$$4\sqrt{z^2 + y^2} + 3(x - 5) = 0.$$

这就直接得到上面的解

$$16(y^2 + z^2) = 9(x - 5)^2.$$

综例 21.5.3 今有空间曲面 $z = f(x, y) = x^2 + 2axy + y^2 - 1$,其中 a 为常数,试在此曲面上确定一条空间曲线,它通过 $(0, 1, 0)$ 点,且在 xOy 平面上的投影曲线上每一点的切线方向,正是该点处函数 $z = f(x, y)$ 的最速下降方向,即负梯度方向.

【解】 首先求出 $z = f(x, y)$ 的梯度方向

$$\text{grad } f(x, y) = (2x + 2ay)\mathbf{i} + (2ax + 2y)\mathbf{j}.$$

设所求空间曲线在 xOy 上的投影方程为 $y = y(x)$, 根据题意,它满足微分方程及条件

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-(2x + 2ay)}{-(2ax + 2y)}, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

这是零次齐次方程,但可用简单积分因子求解.为此,将方程变成微分形式

$$2x dy - 2y dx + a^{-1} d(y^2 - x^2) = 0,$$

$$2 \frac{x dy - y dx}{y^2 - x^2} + a^{-1} \frac{d(y^2 - x^2)}{y^2 - x^2} = 0,$$

$$\frac{y - x}{y + x} \Big|_{(0,1)}^{(x,y)} = (y^2 - x^2)^a \Big|_{0,1}^{(x,y)}.$$

所求之解为

$$\frac{y-x}{y+x} = (y^2 - x^2)^{a-1} \text{ 或者 } (y+x)^{1+a} = (y-x)^{a-1}.$$

可得此空间曲线为

$$\begin{aligned} z &= x^2 + 2axy + y^2 - 1, \\ (y+x)^{1+a} &= (y-x)^{a-1}. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

综例 21.5.4 设二元函数 F 可微, 试证明由方程 $F \frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c} = 0$ 所确定的曲面的任一切平面都通过某定点.

【解】 (方法 1) 先求出切平面方程, 看是否通过一个固定点. 为此将曲面看作由方程

$$F \frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c} = 0 \quad (21.22)$$

确定的隐函数 $z = z(x, y)$. 利用隐函数求导方法, 计算 $\frac{z}{x}$ 及 $\frac{z}{y}$.

将(21.22)两边对 x 求导得

$$F_1 \cdot \frac{(z-c) - (x-a)z_x}{(z-c)^2} + F_2 \cdot \frac{-(y-b)z_x}{(z-c)^2} = 0,$$

解出 z_x 得

$$\frac{z}{x} = \frac{(z-c)F_1}{(x-a)F_1 + (y-b)F_2}.$$

同理可得

$$\frac{z}{y} = \frac{(z-c)F_2}{(x-a)F_1 + (y-b)F_2}.$$

过曲面上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的切平面方程为

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{(z_0 - c)F_1}{(x_0 - a)F_1 + (y_0 - b)F_2} (x - x_0) \\ &+ \frac{(z_0 - c)F_2}{(x_0 - a)F_1 + (y_0 - b)F_2} (y - y_0). \end{aligned}$$

从上式可见, 定点 (a, b, c) 总在切平面上, 因为

$$\frac{F_1(z_0 - c)(a - x_0) + F_2(z_0 - c)(b - y_0)}{(x_0 - a)F_1 + (y_0 - b)F_2} = c - z_0.$$

这正是切平面方程的左端.

(方法 2) 利用求微分的方法, 可以较简单地求得切平面方程. 为此, 对 (21.22) 两边求微分

$$F_1 \cdot d \frac{x-a}{z-c} + F_2 \cdot d \frac{y-b}{z-c} = 0,$$

$$F_1 \frac{(z-c)dx - (x-a)dz}{(z-c)^2} + F_2 \frac{(z-c)dy - (y-b)dz}{(z-c)^2} = 0.$$

整理得

$$F_1 \cdot (z-c)dx + F_2 \cdot (z-c)dy - (F_1 \cdot (x-a) + F_2 \cdot (y-b))dz = 0.$$

这里, (dx, dy, dz) 是在切点附近切平面上的弧微分向量. 它垂直于该点曲面的法向量, 这就是

$$\mathbf{n} = (z-c)F_1 \mathbf{i} + (z-c)F_2 \mathbf{j} - [(x-a)F_1 + (y-b)F_2] \mathbf{k},$$

因此, 切平面方程就是

$$(z_0 - c)F_1 \cdot (x - x_0) + (z_0 - c)F_2 \cdot (y - y_0) + [(x_0 - a)F_1 + (y_0 - b)F_2](z - z_0) = 0.$$

同样得到 (a, b, c) 总在切平面上的结论.

【解毕】

【注】 1 这种利用求全微分得到切平面, 对求隐函数的切平面是常用的, 此时仅需用 $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$ 替换 dx, dy 及 dz . 这也正是全微分几何意义的所在.

2 此曲面实际上是一个锥面, 它的准线方程为

$$L: \begin{cases} F(x-a, y-b) = 0, \\ z = c+1 \end{cases}, \text{ 而顶点是 } (a, b, c).$$

综例 21.5.5 今有曲面

$$ax + by + cz = F(x^2 + y^2 + z^2),$$

其中 a, b, c 为常数, F 是连续可导函数. 证明其上任一点的法线与

某定直线总相交 .

【解】 用全微分方法求切平面法线方向

$$\begin{aligned} adx + bdy + cdz &= F d(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 2F (xdx + ydy + zdz), \end{aligned}$$

整理得

$$(a - 2xF)dx + (b - 2yF)dy + (c - 2zF)dz = 0 .$$

由此而得, 过曲面上 $M(x, y, z)$ 点的法线的方向是

$$\mathbf{n} = (a - 2xF)\mathbf{i} + (b - 2yF)\mathbf{j} + (c - 2zF)\mathbf{k} .$$

方程为

$$\frac{X - x}{a - 2xF} = \frac{Y - y}{b - 2yF} = \frac{Z - z}{c - 2zF} .$$

再假设与之相交的直线的方向向量为 $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, 其上一点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则其方程为

$$\frac{X - x_1}{1} = \frac{Y - y_1}{1} = \frac{Z - z_1}{1} .$$

由两直线相交的条件可知

第一, \mathbf{n} 不平行 .

第二, $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) \cdot \overline{MM_1} = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} a - 2xF & b - 2yF & c - 2zF \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

利用行列式性质, 左边可分解为两个行列式之和

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2xF & 2yF & 2zF \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} + 2F \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 . \end{aligned}$$

显然,若取 $(a, b, c) = (a, b, c)$ 及 $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$, 则有第二个条件成立. 即此直线方程为

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c}.$$

到此证明了曲面上任何点 (x, y, z) 的法线都与过原点 $(0, 0, 0)$ 方向为 $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 的直线相交. 【解毕】

综例 21.5.6 若函数 $z = f(x, y)$ 在闭区域 D 上可微, 且 D 是单连通域(即 D 中任何闭曲线所围区域仍属于 D), 且 $\mathbf{n} = \text{grad} f(M) \neq \mathbf{0}$. 证明函数 $f(x, y)$ 在 D 内无封闭的等值线.

【证】 此题是反证法的典型题.

若在 D 中存在有一条封闭曲线 C , $f(x, y)$ 在 C 上之值为常数 z_c . 由于 $f(x, y)$ 在曲线 C 上及其内部连续, 即在有界闭域上连续, 从而必有最大值与最小值. 可以断言, 最大值点不可能取在 C 的内部, 因为若在 C 的内部, 则此点必为极值点, 其梯度必为零, 这与假设矛盾. 同理, 最小值点也不能取在内部. 由此推出, $z = f(x, y)$ 在 C 及其内部区域上的最大与最小点都在边界曲线 C 上. 而今在 C 上为常数 z_c , 可见函数在 C 的内部的值也是 z_c . 若如此, 这又与 $\text{grad} f \neq \mathbf{0}$ 的条件矛盾. 可见函数 $f(x, y)$ 在 D 内无封闭的等值线. 【证毕】

综例 21.5.7 若函数 $u = f(x, y)$, 在有界闭区域 D 上二阶连续可微, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u,$$

同时在 D 的边界上, 函数值都大于零. 试证明 $u = f(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in D$.

【证】 这又是一道反证法的典型题.

若在 D 内部存在一点 $M(x, y)$, 使得 $f(M) < 0$. 由于函数在有界闭域上连续, 在此域上必有最小点, 由于边界函数值为正, 内

部有负值, 则其最小点 $M_0(x_0, y_0)$ 必在 D 的内部, 且最小值 $u_0 = f(M_0) < 0$. 同时 M_0 为极小点, 从而有 $\text{grad} f(M_0) = \mathbf{0}$.

在 $M_0(x_0, y_0)$ 写出二阶泰勒公式

$$\begin{aligned} f(M) &= f(M_0) + (\text{grad} f(M_0))^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{H}(M_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\rho^2) \\ &= f(M_0) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\rho^2). \end{aligned}$$

因为 M_0 为极小点, 则二次型

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{H}(M_0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0.$$

这就是说海森矩阵 $\mathbf{H}(M_0)$ 是半正定的, 其特征值必须非负. 然而,

由于 $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} = f''(M_0) < 0$. 且半正定的海森矩阵对角

元素必均非负, 即 $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \geq 0$, 这与两项之和为负

矛盾. 可见在 D 内, 必有 $f(x, y) > 0$.

【证毕】

综例 21.5.8 求 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时函数

$$f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$$

在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的极值, 并由此证明不等式: 当 $a, b, c > 0$ 时,

$$ab^2 c^3 < 108 \frac{a+b+c}{6}^6.$$

【解】 首先解极值问题

$$\text{目标函数} \quad f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z,$$

$$\text{约束条件} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2.$$

做拉格朗日函数

$$L(x, y, z, r) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z + (x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2)$$

由必要条件, 得方程

$$\frac{L}{x} = \frac{1}{x} + 2x = 0,$$

$$\frac{L}{y} = \frac{2}{y} + 2y = 0,$$

$$\frac{L}{z} = \frac{3}{z} + 2z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2.$$

前三式分别乘 x, y, z 再求和, 再利用第四式, 得

$$6 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 6 + 12r^2 = 0.$$

解出 $r = -\frac{1}{2r^2}$, 进而有 $x = r, y = 2r$ 和 $z = 3r$.

由于函数 $f(x, y, z)$ 在第一卦象内, 当 $x, y, z \rightarrow 0^+$ 时, $f(x, y, z) \rightarrow -\infty$, 即在球面边界上无最大值点. 因此最大值必在第一卦象的半径为 $6r$, 球心在原点的球面上. 今有唯一的驻点, 可见必为最大点.

下面利用上述结果, 证明题给的不等式. 为此, 先求在所论区域中函数的最大值

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln(xy^2z^3) - \ln(6 \cdot 3r^6) \\ &= \ln 6 \cdot 3 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} - 3. \end{aligned}$$

简化得

$$xy^2z^3 - 6 \cdot 3r^6 = 6 \cdot 3 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} - 3.$$

用 $x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c$ 代入上式, 则有

$$ab^2c^3 - 108 \frac{a+b+c}{6} = 0.$$

【解毕】

综例 21.5.9 设有光滑曲面 $S: F(x, y, z) = 0$, 光线从点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 经曲面 S 上一点 P 反射到点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 按“光线按最短光程传播”原理, 证明:

(1) 入射线 AP , 反射线 PB 及 P 点的曲面法线三者在同一平面上;

(2) 入射角等于反射角, 即入射和反射光线与 P 点的法线成等角.

【证】 设入射点 P 的坐标为 (x, y, z) . 记

$$AP = \mathbf{r}_A = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}, \quad r_A = |\mathbf{r}_A|;$$

$$BP = \mathbf{r}_B = (x - x_2)\mathbf{i} + (y - y_2)\mathbf{j} + (z - z_2)\mathbf{k}, \quad r_B = |\mathbf{r}_B|.$$

则问题变成, 求如下条件极小问题

$$\text{目标函数} \quad f(P) = r_A + r_B,$$

$$\text{约束条件} \quad F(P) = 0.$$

做拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = r_A + r_B - \lambda F(x, y, z),$$

极值条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{r_A}{x} + \frac{r_B}{x} - \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{r_A}{y} + \frac{r_B}{y} - \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{r_A}{z} + \frac{r_B}{z} - \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

用梯度符号, 可简化成

$$\text{grad } r_A + \text{grad } r_B = \lambda \text{grad } F.$$

今可计算出

$$\text{grad } r_A = \frac{x - x_1}{r_A} \mathbf{i} + \frac{y - y_1}{r_A} \mathbf{j} + \frac{z - z_1}{r_A} \mathbf{k} = \frac{1}{r_A} \mathbf{r}_A = \frac{\mathbf{r}_A}{r_A},$$

$$\text{grad} r_B = \frac{x - x_2}{r_B} \mathbf{i} + \frac{y - y_2}{r_B} \mathbf{j} + \frac{z - z_2}{r_B} \mathbf{k} = \frac{1}{r_B} \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B^0.$$

这里 $\mathbf{r}_A^0, \mathbf{r}_B^0$ 分别是 $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ 方向的单位向量. 这样一来, 上面的梯度关系式可表示成

$$\mathbf{r}_A^0 + \mathbf{r}_B^0 = \text{grad} F = \mathbf{n}.$$

函数 $F(x, y, z)$ 的梯度 $\text{grad} F$, 正是曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的法线向量 \mathbf{n} .

(i) 由于 $\mathbf{r}_A^0 + \mathbf{r}_B^0 = \mathbf{n}$, 即该三向量线性相关, 因而三者共面, 而相应之直线有一个共同点 P , 可见相应的三线: 入射线、反射线及法线共面.

(ii) 又由于

$$\mathbf{r}_A^0 \times \mathbf{n} + \mathbf{r}_B^0 \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

即有

$$\mathbf{r}_A^0 \times \mathbf{n} = -\mathbf{r}_B^0 \times \mathbf{n}.$$

由叉积的定义, 有

$$\sin(\mathbf{r}_A^0, \mathbf{n}) = \sin(\mathbf{r}_B^0, \mathbf{n}).$$

即入射角等于反射角.

【证毕】

综例 21.5.10 三角形三边之和为一定, 问三边各为多少时, 它绕一边旋转所成的旋转体的体积最大?

【解】 设三边边长分别为 x, y, z , 并绕 x 边旋转, 三边之和为 $2l$. 这样问题变成求下列最大问题

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } f(x, y, z) &= \frac{1}{3} h^2 \cdot x \\ &= \frac{4}{3} \frac{l(l-x)(l-y)(l-z)}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{约束条件 } x + y + z = 2l.$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = A \frac{(l-x)(l-y)(l-z)}{x} + \lambda(x + y + z - 2l).$$

其中 $A = \frac{4}{3}l$ 则得

$$\frac{L}{x} = -\frac{4A}{x^2}(l-y)(l-z) + \lambda = 0,$$

$$\frac{L}{y} = -\frac{4A}{x}(l-x)(l-z) + \lambda = 0,$$

$$\frac{L}{z} = -\frac{4A}{x}(l-x)(l-y) + \lambda = 0,$$

$$x + y + z = 2l.$$

由上述方程组的第二、三个方程,或由对称性可以推出 $y = z$,再代入方程组并化简得

$$\frac{l(l-y)^2}{x^2} = \frac{(l-x)(l-y)}{x},$$

$$x = 2(l-y).$$

由第二个方程得 $\frac{l-y}{x} = \frac{1}{2}$,代入第一个方程得到

$$x = \frac{l}{2} \text{ 进一步得 } y = z = \frac{3}{4}l.$$

由于问题确有最大值,又有唯一驻点,所求的点为最大点. 【解毕】

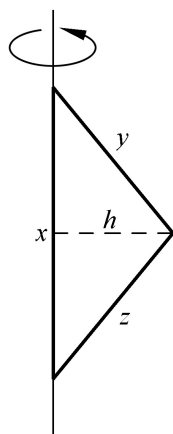


图 21.1

第 22 章 重积分概念与计算

22.1 引言

在概念上,二、三重积分仍是一种积分和式的极限,与定积分概念并无重大差别;在性质上亦可由定积分性质类似地得到基本相同的结论;在计算上,重积分也是通过化成累次定积分而求得的.因此要注意这种内容上的直接联系.但是由于自变量维数的扩充,定积分的积分区间变成为重积分的积分区域,因此随之而来的定积分定限的复杂性增加.首先是做和式时,对域分划的方法是多样的,反映在计算上就有在不同坐标系下的计算问题;还有在化成累次定积分时,又有积分次序问题,所有这些也正是重积分概念与计算中的关键之点.

22.2 重积分的概念与性质

1. 二重积分的概念与性质

二重积分的定义是二元函数在某区域上积分和式的极限.具体来说,设 $z = f(x, y)$ 定义在有界闭区域 D 上,若积分和式的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

存在,就称 $f(x, y)$ 在 D 上可积,而极限值叫做 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分.其中 $\Delta \sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是对区域 D 的任一种分划,一般 $\Delta \sigma_i$ 既表示分划中典型小块区域,也表示相应的面积,因此

$\delta_i > 0$, P_i 是 D_i 中任取的一点, δ_i 是 D_i 中的最大“直径”.

在这种概念的基础上,若在区间 D 上 $z = f(x, y) \geq 0$, 则二重积分 $\int_D f(x, y) d\sigma$ 正是以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, 以 D 为底的柱体的体积, 特别有, 半径为 R 的半球的体积为

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3} R^3,$$

以平面 $z = px + qy + c$ 为顶面, 以 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 为底的斜截圆柱的体积为

$$\int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (px + qy + c) d\sigma = c \cdot ab,$$

$d\sigma = D$ 的面积.

利用函数的奇偶性与区域的对称性, 可以简化许多具有这种性质的重积分计算. 例如, D 对称于 y 轴, 若 $f(x, y)$ 是关于 x 的偶函数, 则有

$$\int_D f(x, y) d\sigma = 2 \int_{D_1} f(x, y) d\sigma,$$

其中 D_1 是 D 中 $x > 0$ 的部分.

若 $f(x, y)$ 是关于 x 的奇函数, 则有

$$\int_D f(x, y) d\sigma = 0.$$

这种结果, 如果从积分和式的概念来理解, 就非常自然.

二重积分的性质与定积分很相似, 这里罗列几条重要的性质.

对区域的可知性: 若将区域划分为 $D = D_1 \cup D_2$, 则

$$\int_D f(x, y) d\sigma = \int_{D_1} f(x, y) d\sigma + \int_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

二重积分的存在性: 若 $f(x, y)$ 在 D 上除有限条曲线外均是连续的, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 即 $\int_D f(x, y) d\sigma$ 存在.

重积分的保号性: 若 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则有

$$\int_D f(x, y) d\sigma \geq \int_D g(x, y) d\sigma.$$

特别是若 $f(x, y) \geq 0$, 则必有

$$\int_D f(x, y) d\sigma \geq 0.$$

另外还有

$$\left| \int_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \int_D |f(x, y)| d\sigma.$$

重积分的估值定理与中值定理: 若二重积分 $\int_D f(x, y) d\sigma$ 存在, $z = f(x, y)$ 在 D 上必有界, 设 $m \leq f(x, y) \leq M$. 从而有估值定理

$$m \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(x, y) d\sigma \leq M$$

$|D|$ 表示 D 的面积.

若加上 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则有中值定理

$$\int_D f(x, y) d\sigma = |D| f(\xi, \eta).$$

其中 $(\xi, \eta) \in D$.

2. 三重积分的概念与性质

三重积分也是积分和式的极限, 它的定义及有关性质与二重积分没有什么区别. 在这里就不再赘述, 但是读者仍应自行总结一下.

现举两个例子, 说明积分概念的运用.

例 22.2.1 若 $f(x, y)$ 在闭区域 D 中连续, 且 $f(x, y) \geq 0$. 试证:

若 $\int_D f(x, y) d\sigma = 0$, 则在 D 上 $f(x, y) = 0$.

【证】 这显然只能用反证法.

若存在 $P_0(x_0, y_0)$ 属于 D 的内部, $f(P_0) > 0$, 由 $f(P)$ 的连续性可知, 必存在 D 内的一个半径为 $r > 0$ 的圆域 $N_r(P_0) \subset D$, 且

" $P \in N_r(P_0)$, $f(P) > \frac{1}{2} f(P_0) > 0$. 从而有

$$\int_D f(x, y) d\sigma > \int_{N_r(P_0)} f(x, y) d\sigma > \frac{1}{2} f(P_0) \cdot \pi r^2 > 0.$$

这与 $\int_D f(x, y) d\sigma = 0$ 的假设矛盾, 可见 $f(x, y)$ 在 D 的内部都是零, 又由于 f 在整个 D 上连续, 可见 f 在 D 的边界上也为零.

【证毕】

例 22.2.2 设 $u = f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 若对 Ω 内任一子区域 V , 均有

$$\int_V f(x, y, z) dv = 0.$$

证明 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上恒为零.

【证】 对属于 Ω 的内部的任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则存在以 P_0 为心, $r > 0$ 为半径的球 $N_r(P_0) \subset \Omega$. 根据条件有

$$\int_{N_r(P_0)} f(x, y, z) dv = 0.$$

根据中值定理

$$0 = \int_{N_r(P_0)} f(x, y, z) dv = f(P) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

其中 $P \in N_r(P_0)$ 两边对 $r \rightarrow 0$ 取极限, 利用函数 f 的连续性, 有

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} f(P) = f(P_0).$$

再一次利用 $f(P)$ 在 Ω 上的连续性, 则由于 $f(P)$ 在 Ω 内部为

零,可以推出在边界上亦为零.从而证明了 f 在上恒为零的结果. 【证毕】

22.3 二重积分的计算

二重积分计算的主要的途径是通过化成累次积分来实现,而能够化成累次积分的条件是二重积分存在,这样可利用某种特殊的对积分域的分法来达到目的.这种特殊的分法通常是用平行坐标线的曲线簇来作分划,这就是为什么进行二重积分计算时,先要选取坐标系的原因.

1. 在直角坐标系下的计算

今以在直角坐标系下化二重积分为累次积分为例加以说明(不是证明).设 $z = f(x, y)$, 积分域为 D , 如图 22.1 所示.假设

$f(x, y)$ 在 D 上连续, 则可积, 即
$$\int_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\sigma_k$$

存在.今用坐标线, 即 $x = x_i, y = y_i$ 分别等分区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$, 其典型的子域, 称为面积元

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta x \Delta y.$$

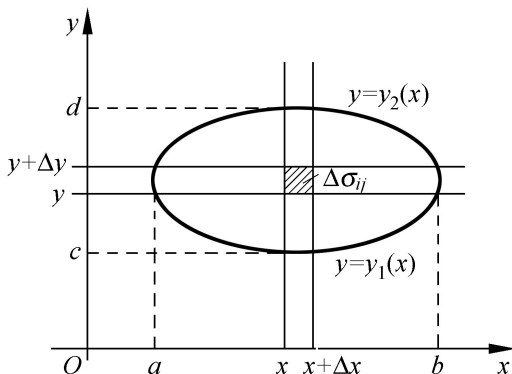


图 22.1

同时, 在每个 $\Delta\sigma_{ij}$ 中取点 $P_{ij} = (x_i, y_j)$. 这样, 可以有

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) \, d\sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x \Delta y \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y) \, dy \Delta x \\
 &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \\
 &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.
 \end{aligned}$$

另外, 从二重积分的几何意义上, 亦可以推出这个结果.

如图 22.2 所示, 设 $z = f(x, y)$ 是曲顶, 用平行 y 轴的线将 D 分成条, 曲顶柱体被分划成片状, 在 $x = x$ 处断面面积为

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

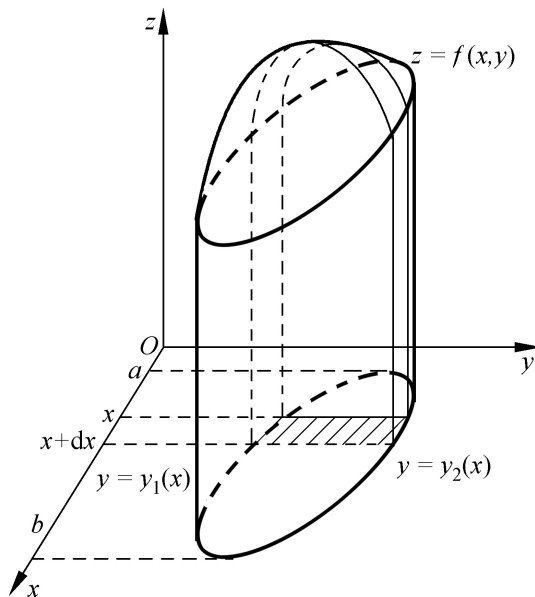


图 22.2

这样整个体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

这种重积分累次积分的实质又是重极限换成累次极限的问题.

例 22.3.1 求 $\int_D (x + 6y) d$, 其中

$$\begin{aligned} y - x &= 0, \\ D: 5x - y &= 0, \\ x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

【解】 首先把 D 的图形画出来. 再确定积分次序: 先对 x , 还是先对 y 积分. 此题先对 y 积分, 可能简单些, 为此, 在 D 域内作一平行于 y 轴的直线, 它与 D 域边界正好有两个交点, 其 y 坐标为 $y = x$ 和 $y = 5x$. 如此积分化成

$$\begin{aligned} \int_D (x + 6y) d &= \int_0^1 dx \int_x^{5x} (x + 6y) dy \\ &= \int_0^1 (xy + 3y^2) \Big|_{y=x}^{y=5x} dx \\ &= \int_0^1 (5x^2 + 75x^2 - x^2 - 3x^2) dx \\ &= \int_0^1 76x^2 dx = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

如果选择先对 x 积分, 此时积分域将分成两块. 其结果是

$$\begin{aligned} \int_D (x + 6y) d &= \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{5}}^y (x + 6y) dx + \int_1^5 dy \int_{\frac{y}{5}}^1 (x + 6y) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 6xy \right) \Big|_{x=\frac{y}{5}}^{x=y} dy + \int_1^5 \left(\frac{x^2}{2} + 6xy \right) \Big|_{x=\frac{y}{5}}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{132}{25} y^2 dy + \int_1^5 \left(\frac{1}{2} - \frac{61}{50} y^2 + 6y \right) dy \end{aligned}$$

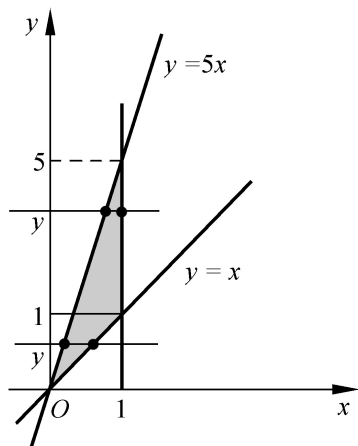


图 22.3

$$= \frac{44}{25} + \frac{1768}{75} = \frac{76}{3} .$$

【解毕】

例 22.3.2 求 $\int_D f(x)g(y)dy dx$, 其中 $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

【解】

$$\begin{aligned} \int_D f(x)g(y)dy dx &= \int_a^b \int_c^d f(x)g(y)dy dx \\ &= \int_a^b f(x) \int_c^d g(y)dy dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy . \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

例 22.3.3 $I = \int_0^a dx \int_x^a e^{-y^2} dy = ?$

【解】 这是一个先对 y 后对 x 的累次积分, 按此方式无法计算. 因为 $\int e^{-y^2} dx$ 无初等形式的原函数. 但若换一下积分次序, 此题有可能求解. 为此, 先将相应的二重积分的积分域画出来, 此处

$$D: \begin{matrix} 0 & x & a, \\ x & y & a. \end{matrix}$$

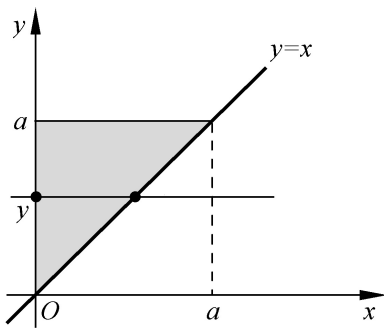


图 22.4

换成先对 x 后对 y 的积分有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a dy \int_0^y e^{-y^2} dx \\
 &= \int_0^a ye^{-y^2} dy \\
 &= -\int_0^a \frac{1}{2} e^{-y^2} dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^a \\
 &= \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) .
 \end{aligned}$$

【解毕】

例 22.3.4 求 $J = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x-y)^2 d\sigma$.

【解】 $J = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 - 2xy + y^2) d\sigma$.

利用圆形的对称性与被积函数的奇偶性可以得到

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 d\sigma ,$$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} xy d\sigma = 0 .$$

因此有

$$J = 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 d\sigma$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \, dy \, dx \\
 &= 8 \int_0^1 x^2 \, dx = 8 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} .
 \end{aligned}$$

结果是

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)^2 \, dy \, dx = \frac{1}{2} . \quad \text{【解毕】}$$

【注】 这个积分,若在极坐标系下进行计算会简单些.

2. 二重积分在极坐标系下的计算

极坐标系与直角坐标的关系为

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta , \\
 y &= r \sin \theta .
 \end{aligned}$$

所谓极坐标的坐标曲线是 $r = \text{常数}$ 与 $\theta = \text{常数}$ 的曲线簇.这是以原点为中心以 r 为半径的圆,及从原点出发、幅角为 θ 的射线,这时的面积元素

$$d\sigma = r \, dr \, d\theta .$$

用极坐标的两组坐标线来分割积分域,得到的是关于 r 和 θ 的累次积分.这样在计算二重积分时有

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta .$$

这里有“三变换”:

被积函数由 $f(x, y)$ 变换成 $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$;

面积元由 $d\sigma = dx \, dy$ 变成 $d\sigma = r \, dr \, d\theta$;

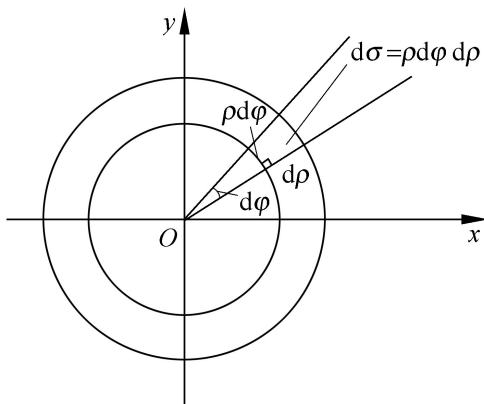


图 22.5

积分域由 D_{xy} 变成 D .

例 22.3.5 求 $J = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x-y)^2 dx dy$

【解】 在极坐标系下

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x-y)^2 dx dy \\
 &= 8 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 \theta \cdot r^2 dr d\theta \\
 &= 8 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .
 \end{aligned}$$

【解毕】

显然,这里的计算变得非常简单,最后的积分实际上是两个定积分之积,其原因是积分限很简单,是常数.积分限是常数的原因是积分域的边界,都是极坐标系下的坐标线.

通过上述几个简单例子,可以归纳出二重积分的计算步骤如下:

首先,选择坐标系,一般原则是以下两条综合考虑:其一考虑积分域的边界,若多数由某种坐标系的坐标线构成,在这种坐标系

下计算其积分,积分限将变得简单,甚至是常数;其二考虑被积函数在何种坐标系下表示会比较简单或有利于积分计算.

其次,确定积分次序,这也要从域的形状和被积函数两方面来考虑.一般来说,域 D 对哪个积分变量是凸的(指平行此坐标轴的直线与域最多只有一个交点),则可以先对其积分,以免积分分块太多.从被积函数考虑则为使积分简单,甚至只有在某种次序下,积分才可能积成初等形式.

最后,要强调的是在二重积分中面积元 $d\sigma > 0$,在计算中体现在化成累次定积分时,应确保上限不小于下限.

例 22.3.6 求 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$.

【分析】 这个积分在直角坐标下,是无法计算的.读者可自行尝试.但在极坐标下,则非常简单.

【解】 因为

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^a e^{-r^2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= (1 - e^{-a^2}) \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

【注】 这里引出一个计算重要积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的方法.

设 $A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, 显然有

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{r}{2}} \int_0^r e^{-r^2} \, d\sigma \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} (1 - e^{-r^2}) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

从而有

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. 在一般坐标系下的二重积分

若引进一般的坐标系

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v), \\
 y &= y(u, v).
 \end{aligned}$$

这里的坐标曲线簇为

$$\begin{aligned}
 v = v_0 \quad L_{v_0} : \quad & \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0). \end{cases} \\
 u = u_0 \quad L_{u_0} : \quad & \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v). \end{cases}
 \end{aligned}$$

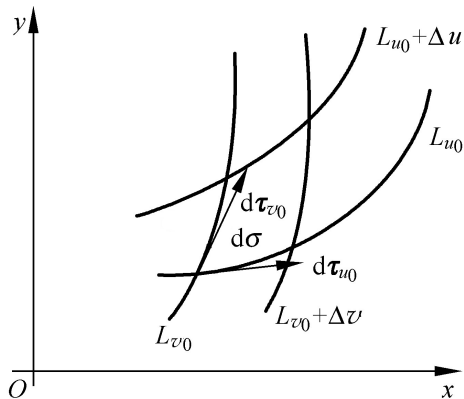


图 22.6

而用这种坐标线分划而成的面积元 $d\sigma$ 可看作是由 $d u_0$ 与 $d v_0$ 为边的平行四边形的面积, 其中 $d u_0$ 是在曲线 L_{u_0} 上, v 由 v_0 增至 $v_0 + \Delta v$ 时的一段弧长; $d v_0$ 是在曲线 L_{v_0} 上, u 由 u_0 增至 $u_0 + \Delta u$ 时

的一段弧长 .

这样就有

$$d u_0 = \frac{x}{v} d v \mathbf{i} + \frac{y}{v} d v \mathbf{j},$$

$$d v_0 = \frac{x}{u} d u \mathbf{i} + \frac{y}{u} d u \mathbf{j}.$$

$$\begin{aligned} |d v_0 \times d u_0| &= \begin{vmatrix} \frac{x}{u} & \frac{y}{u} \\ \frac{x}{v} & \frac{y}{v} \end{vmatrix} d u d v \\ &= \left| \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| d u d v. \end{aligned}$$

由于面积元 d 总是正的, 因此

$$d = \left| \left| \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| \right| d u d v.$$

在这种坐标系下的积分为

$$\int_{D_{xy}} f(x, y) d = \int_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \left| \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| \right| d u d v.$$

极坐标就是其中一例. 因为

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & \frac{(x, y)}{(r, \theta)} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{(x, y)}{(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1,$$

$$d = \left| \left| \frac{(x, y)}{(r, \theta)} \right| \right| d r d \theta = d r d \theta.$$

例 22.3.7 化二重积分 $\int_{D_{xy}} f(x+y) d$ 为定积分.

$|x|+|y| \leq 1$

【解】 做变换

$$x + y = u,$$

$$x - y = v.$$

即

$$x = \frac{u + v}{2},$$

$$y = \frac{u - v}{2}.$$

在这种坐标系下,坐标线是 $x + y = \text{常数}$ 和 $x - y = \text{常数}$,这正是域 $|x| + |y| \leq 1$ 的边界线.又有

$$\left| \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$d = \left| \left| \frac{(x, y)}{(u, v)} \right| \right| du dv = \frac{1}{2} du dv$$

二重积分为

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(u) \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \cdot \int_{-1}^1 f(u) du \\ &= \int_{-1}^1 f(u) du. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 其实此题不一定要用一般坐标系下的积分公式,而可直接由重积分的定义.为此将区域用 $x + y = u$ 来分划,这样 d 是宽为 2,高为 du 的矩形,即

$$d = 2 du, \quad x + y = 2u.$$

从而

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} f(2u) \cdot 2 du = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

22.4 三重积分的计算

三重积分在化累次积分时,选定坐标系之后,可直接化成三个累次定积分,每次对某一变量积分,也可以化成定积分与二重积分的累次计算.计算中的步骤与二重积分类似,仍有两个主要步骤:

首先是选择坐标系,三重积分中常用的坐标系有三种:直角坐标系,柱坐标系与球坐标系.选择坐标系的原则亦是根据域的边界及被积函数来确定.

第二步是选择积分次序,此时选择的可能性比二重积分更多一些,其中还包括可先作定积分再作二重积分,也可以反过来.

下面通过三重积分在不同坐标系中计算的例子来说明这些原则.

1. 三重积分在直角坐标系下的计算

选择直角坐标,实际上是用 $x = \text{常数}$ 、 $y = \text{常数}$ 及 $z = \text{常数}$ 的三组坐标面来分割积分域,此时的积分体积元是

$$dv = dx dy dz.$$

若积分区域 如图 22.7 所示,则有

$$\begin{aligned} f(x, y, z) dv &= \int_{D_{xy}} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \end{aligned}$$

其中 D_{xy} 是积分域 在 xOy 平面上的投影区域.

如果对给定的 z_0 , $z = z_0$ 与 域相割的区域由 $D(z_0)$ 表示,则三重积分也可以写成先作二重积分.即

$$f(x, y, z) dv = \int_{z_0}^h \int_{D(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

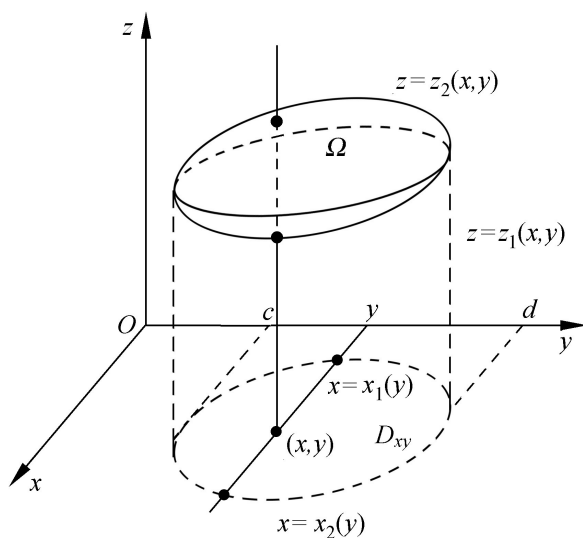


图 22.7

例 22.4.1 求 $I = \int (x + y + z) dv$. 其中 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$.

【解】 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 0$ 与 $z = 1$ 所围成的区域, 它在 xOy 平面的投影区域 D_{xy} 是 $x^2 + y^2 \leq 1$.

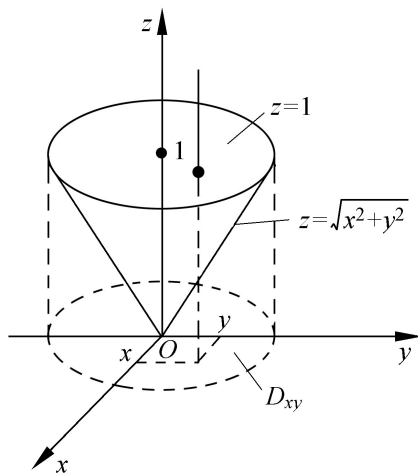


图 22.8

首先考虑对称性, 由于积分域 Ω 关于 x 和 y 是对称的, 而被积函数中 x 和 y 是奇函数, 因而

$$\begin{aligned}(x + y + z)dv &= xdv + ydv + zdv \\ &= zdv.\end{aligned}$$

选择积分次序时,考虑先对 z 积分,从而有

$$\begin{aligned}I &= \int_{D_{xy}} zdv = \int_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^1 z dz \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2}(1 - (x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy - \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

【解毕】

【注】 对此题由于被积函数是 z , 因此可考虑先对 x, y 作二重积分, 这样有

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 z dz \int_{D(z)} dx dy = \int_0^1 z dz \int_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy \\ &= \int_0^1 z \cdot \pi z^2 dz = \int_0^1 \pi z^3 dz = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

这里 $D(z)$ 是 $z = z$ 的平面与域 Ω 交面在 xOy 上的投影. 显然, 对该问题来说, 这样做是比较简单的.

2. 三重积分在柱坐标系下的计算

柱坐标系与直角坐标的关系是

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \\ z &= z.\end{aligned}$$

此时的坐标面是 $\rho = \text{常数}$ 为平行 z 轴的圆柱面 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\theta = \text{常数}$ 为垂直 xOy 平面的半平面; $z = \text{常数}$ 是平行 xOy 的平面.

用这三组坐标面分划区域, 得到的体积元为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz.$$

从而有

$$\int_{(x,y,z)} f(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

例 22.4.2 求 $I = \int_V z dv$, 其中 $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

【解】 这里域 V 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围的区域. 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1-\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{1-\rho} z \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{1-\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \rho^2 z d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{1-\sqrt{2}} \frac{1}{2} (1 - z^2 - z^2) dz = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

【解毕】

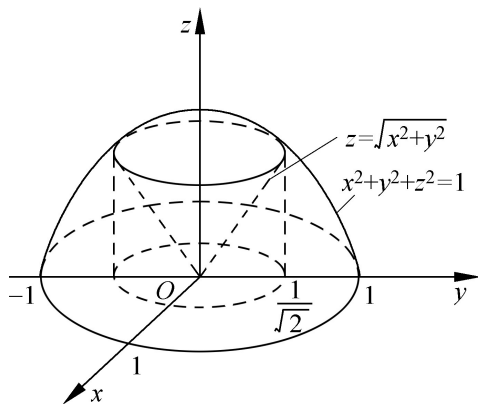


图 22.9

【注】 当然也可以先作二重积分, 但此时要分为两块来求.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_V z \, dv \\
 &= \int_0^1 z \, dz \int_{x^2+y^2 \leq z^2} dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 z \, dz \int_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 z^3 \, dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 z(1-z^2) \, dz = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

如果将域改成

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\
 & z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq z^2.
 \end{aligned}$$

这个域是由球面、锥面及坐标面 $z=0$ 所围成, 若用柱坐标系, 要分为两个域来计算, 此时

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{V_1} f(x, y, z) \, dv + \int_{V_2} f(x, y, z) \, dv \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z f(\cos \theta, \sin \theta, z) \, dz \\
 &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z^2} f(\cos \theta, \sin \theta, z) \, dz.
 \end{aligned}$$

在这种情形下, 利用球坐标来计算会使定限问题变得简单些.

3. 三重积分在球坐标下的计算

球坐标系为

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\
 z &= r \cos \theta.
 \end{aligned}$$

球坐标 (r, θ, φ) 如图 22.10 所示, 其中

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad r \geq 0.$$

其坐标面为: $r = \text{常数}$ 为球面; $\theta = \text{常数}$ 为锥面; $\varphi = \text{常数}$ 为半平面.

以这种坐标面来分划域, 得到的体积元

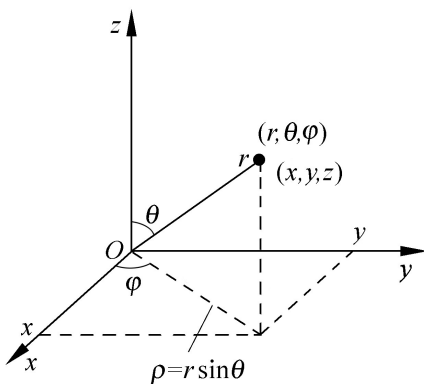


图 22.10

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi .$$

它可看成由三条边为 $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$ 的曲边长方体构成, 这样有

$$\int f(x, y, z) dv$$

$$= \int_{(r, \theta, \phi)} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi .$$

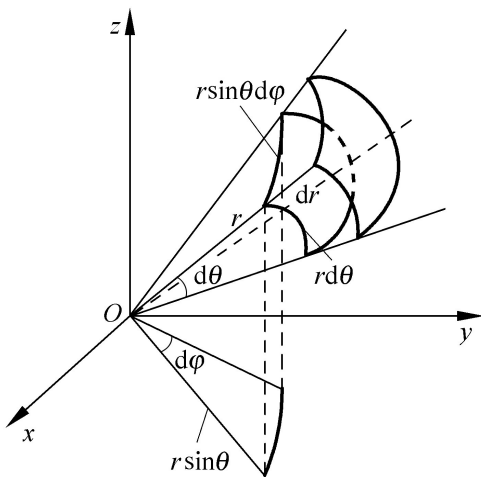


图 22.11

例 22.4.3 求 $I = \int z dv$. 其中 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} . \end{cases}$

【解】

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \int_0^1 r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \\
 &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \\
 &= 2 \left. \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right|_{\pi/4}^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

【解毕】

22.5 重积分的应用

1. 几何应用 求平面面积与体积

例 22.5.1 求 $y^2 = 2px + p^2$ 与 $y^2 = -2qx + q^2$, 所围图形的面积, 其中 p, q 为正常数.

【解】 求出两曲线之交点: $A \left(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq} \right), B \left(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq} \right)$.

$$S = \int_D dx = 2 \int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2 - p^2}{2p}}^{\frac{q - y^2}{2q}} dx = \frac{2}{3} (p + q) \sqrt{pq}.$$

例 22.5.2 求由 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x^2 + y^2 = a|x|$ ($a > 0$) 所围区域的体积.

【解】 利用极坐标, 则有

$$z^2 + z^2 = a^2, \quad z = a|\cos \theta|.$$

利用对称性有

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \int_0^{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} r \, dr \, d\theta \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{8}{3} \int_0^{\arccos \frac{2}{3}} [a^2 - 2]^{3/2} d \\
 &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\arccos \frac{2}{3}} (1 - \sin^2) d = \frac{4a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}. \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

2. 求图形的质心

平面图形 D 对 x 轴, y 轴的矩分别为

$$M_x = \int_D yd,$$

$$M_y = \int_D xd.$$

由此得图形 D 的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_D xd}{d}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D yd}{d}.$$

【注】 上面公式可写成

$$\int_D xd = \bar{x} d \quad \text{及} \quad \int_D yd = \bar{y} d.$$

它们在图形面积与质心已知的情况下, 又可以反过来计算积分

$$\int_D xd \quad \text{及} \quad \int_D yd.$$

对于空间区域 V 的质心有类似公式

$$\bar{x} = \frac{\int_V xd v}{v}, \quad \bar{y} = \frac{\int_V yd v}{v},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_V zd v}{v}.$$

同样地, 在知道一个空间图形的质心与体积时上述公式可以反过来求 $\int_V xd v$, $\int_V yd v$ 和 $\int_V zd v$.

例 22.5.3 求图形 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 在第一象限部分的质心坐标.

【解】 图形是关于 x 轴和 y 轴对称的, 因此质心在 $y = x$ 的直线上, 即质心坐标有 $\bar{x} = \bar{y}$. 为求质心, 先求矩.

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x \, d\sigma = \int_0^a x \, dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy \\ &= \int_0^a x (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx, \end{aligned}$$

利用定积分的变量替换

$$x = a \cos^3 t, \quad dx = -3a \cos^2 t \cdot \sin t dt.$$

$$M_y = 3a^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^5 t dt = \frac{8a^{\frac{3}{2}}}{105}.$$

$$\begin{aligned} A &= \iint_D d\sigma = \int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy \\ &= \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= 3a^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 3a^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{32}. \end{aligned}$$

因此有

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{M_y}{A} = \frac{8}{105} \cdot \frac{32}{3} a = \frac{256}{315} a. \quad \text{【解毕】}$$

例 22.5.4 求 $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ 在 $z > 0$ 部分所围区域的质心坐标.

【解】

$$V = \int_0^a \int_{D(z)} dx dy = \int_0^a D(z) dz$$

其中

$$D(z): \begin{cases} |x| < \sqrt{a^2 - z^2}, \\ |y| < \sqrt{a^2 - z^2}. \end{cases}$$

故

$$V = 4 \int_0^a (\sqrt{a^2 - z^2})^2 dz = \frac{8}{3} a^3,$$

$$\begin{aligned} M_{xOy} &= \int_0^a z dv = \int_0^a z D(z) dz \\ &= 4 \int_0^a z (\sqrt{a^2 - z^2})^2 dz = a^4. \end{aligned}$$

$$\bar{x} = a^4 \cdot \frac{3}{8a^3} = \frac{3}{8} a.$$

由于图形关于 x, y 对称, 从而 $\bar{y} = \bar{x} = 0$, 故图形质心为 $(0, 0, \frac{3}{8} a)$.

【解毕】

22.6 综合例题

综例 22.6.1 计算 $I = \int_D x dx dy$, 其中

$$\frac{y}{a} - \frac{x}{a} \leq 1,$$

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq ax, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

【解】 积分域 D 如图 22.12

$$I = \int_D x dx dy = \int_{D_1} x dx dy + \int_{D_2} x dx dy - \int_{D_3} x dx dy .$$

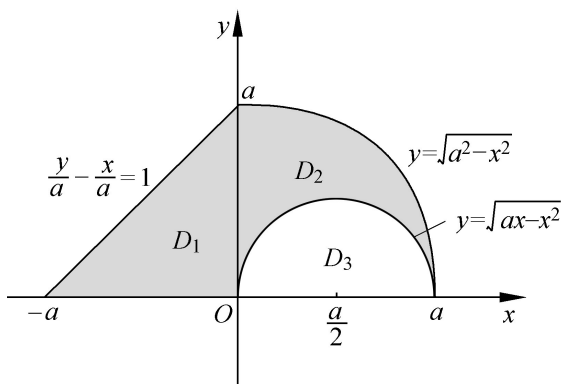


图 22.12

由于三角形面积与质心坐标易求,因此反用质心公式得

$$\int_{D_1} x dx dy = -\frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a^2 = -\frac{a^3}{6} .$$

在极坐标系下计算后面两个积分

$$\int_{D_2} x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \cos \theta \cdot r \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \cdot \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3} a^3 .$$

$$\begin{aligned} \int_{D_3} x dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \cos \theta \cdot r \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \frac{a^3}{3} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^3}{16} . \end{aligned}$$

结果为

$$\int_D x dx dy = -\frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} a^3 - \frac{a^3}{16} = -\frac{a^3}{16} . \quad \text{【解毕】}$$

【注】 此题由于域的构造是由基本图形拼组而成,因此有可能利用积分可加性而将其化成几个积分在简单域上积分的代数和.这对于在较复杂域上积分是有效的一个方法.另外题中用到质心公式,这也是常用的技巧.

综例 22.6.2 交换积分 $\int_0^2 dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$ 的次序.

【解】 先将积分范围:

$$x \in [0, 2], y \in [0, \sin x]$$

画出来, 利用坐标线方法定这个累次定积分的积分限

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy &= \int_0^2 dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\sin x} dy \int_0^{\sin x} f(x, y) dx - \int_{\sin x}^0 dy \int_0^{\sin x} f(x, y) dx \\ &= \int_{D_1} f(x, y) dy - \int_{D_2} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx \\ &\quad - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

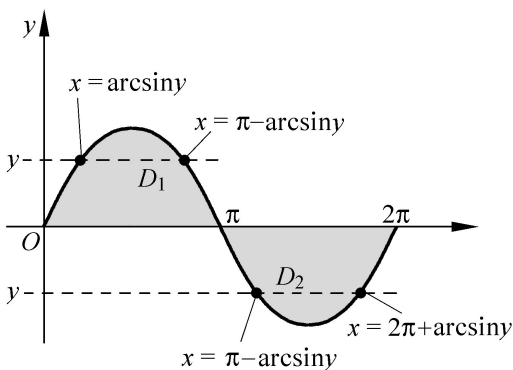


图 22.13

【注】 在求二重积分中, 我们强调面积元 $d > 0$, 在计算中体现为, 化成定积分的定限时, 总保持使上限大于下限. 但此题不是二重积分, 而是累次定积分, 因此其积分限中有上限小于下限的部分, 因此在换积分次序时, 由于先化成了相应的二重积分, 因此要考虑正负号问题, 这里

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy &= - \int_{D_2} f(x, y) dx dy . \\ &= - \int_{D_2} f(x, y) dx dy . \end{aligned}$$

就出于此种原因.

综例 22.6.3 计算 $I = \int_{(x-3)^2+(y-4)^2 \leq 25} (6x+8y) dx dy$.

【解】 (方法 1) 选择极坐标系, 则

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6x + 8y\} \\ &= \{(r, \theta) \mid 6r \cos \theta + 8r \sin \theta \geq r^2\} . \\ I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{6 \cos \theta + 8 \sin \theta} r^2 (6 \cos \theta + 8 \sin \theta) dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (6 \cos \theta + 8 \sin \theta)^4 d\theta , \end{aligned}$$

其中 $\theta_0 = \arctan \frac{3}{4}$, 对上述积分, 作变换 $\theta = \theta_0 + \alpha - \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \theta - \theta_0 + \frac{\pi}{2}$, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-6 \sin(\alpha) + 8 \cos(\alpha))^4 d\alpha \\ &= \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (A \sin \alpha + B \cos \alpha)^4 d\alpha , \end{aligned}$$

其中,

$$A = 4 \sin \theta_0 - 3 \cos \theta_0 = 0, \quad B = 4 \cos \theta_0 + 3 \sin \theta_0 = 5 .$$

从而

$$\begin{aligned} I &= \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B^4 \cos^4 \alpha d\alpha = \frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} B^4 \cos^4 \alpha d\alpha \\ &= \frac{32}{3} B^4 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot \pi}{4 \cdot 2 \cdot 2} = 2 B^4 . \end{aligned}$$

(方法 2) 利用变换坐标系, 设

$$x = u + 3,$$

$$y = v + 4.$$

$$\text{则 } dxdy = \frac{(x, y)}{(u, v)} du dv = du dv.$$

$$I = \int_{D_{uv}} (6u + 8v + 50) du dv = \int_{u^2+v^2 \leq 25} (6u + 8v + 50) du dv$$

$$= \int_{u^2+v^2 \leq 25} 50 du dv = 50 \cdot \pi \cdot 5^2 = 2\pi B^4.$$

(方法 3) 利用质心公式

$$\begin{aligned} I &= 6 \int_D x d\sigma + 8 \int_D y d\sigma = 6 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 5^2 + 8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \\ &= 50 \pi \cdot 5^2 = 2\pi B^4. \end{aligned}$$

(方法 4) 亦可在直角坐标系下计算, 这样会比较复杂, 读者不妨试一试, 至少把积分限定出来. 【解毕】

【注】 本题解法较多, 从比较中可看出坐标系选择的重要性. 在方法 1 中, 计算比较复杂一点, 但运用设定适当常数, 以简化计算过程表达的方法值得注意, 还有是极坐标中角度 θ 的积分限的确定也应予以关注.

在方法 2 中, 这种平移的坐标变换, 在一些问题中非常有效, 其优点是定限及面积元都比较简单, 而对计算的简化其作用很大. 在方法 3 中是利用质心公式来求形如 $\int_D x d\sigma$ 的积分的又一例证.

综例 22.6.4 计算 $I = \int_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) d\sigma$, 其中 $\operatorname{sgn} x$ 为符号函数.

【解】 这里积分域十分简单, 是个圆, 但被积函数有间断线: $x^2 - y^2 + 2 = 0$, 因此还要指出被积函数的连续区域. 根据被积函数的连续区域, 将域分成 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. 这样

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) \, d\sigma \\
 &= - \iint_{D_1} d\sigma + \iint_{D_2} d\sigma - \iint_{D_3} d\sigma \\
 &= \iint_D d\sigma - 4 \iint_{D_1} d\sigma = 4 \int_0^1 (4 - x^2) \, dx - 8 \int_0^1 \frac{4 - x^2}{2 + x^2} \, dx \\
 &= 4 \int_0^1 (4 - x^2 - \frac{2 + x^2}{2 + x^2}) \, dx.
 \end{aligned}$$

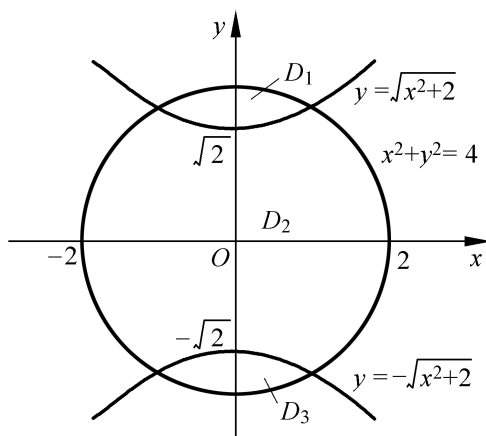


图 22.14

由于

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 (4 - x^2 - \frac{2 + x^2}{2 + x^2}) \, dx = \int_0^1 (4 - x^2) \, dx \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{2 + x^2}{2 + x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{4 - x^2}{4 - x^2} \, dx - \int_0^1 \frac{2 + x^2}{2 + x^2} \, dx, \\
 &2 \int_0^1 (4 - x^2 - \frac{2 + x^2}{2 + x^2}) \, dx \\
 &= \int_0^1 \frac{4}{4 - x^2} \, dx - \int_0^1 \frac{2}{2 + x^2} \, dx \\
 &= 4 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 - 2 \ln(x + \sqrt{2 + x^2}) \Big|_0^1
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} - 2\ln(1 + \sqrt{3}) + \ln 2.$$

所以有

$$I = \frac{4}{3} + 8\ln(1 + \sqrt{3}) - 4\ln 2.$$

【注】 本题是依被积函数连续性来划分积分域的典型题, 这类似于定积分中分段函数的积分问题.

综例 22.6.5 设函数 $z = f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 中有连续的混合偏导数, 且 $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 4$; 同时 $f(x, y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 的边界上均为零. 证明 $\left| \int_D f(x, y) d\sigma \right| \leq 1$.

【证】 (方法 1) 依题意要求从混合偏导数的有界性以及 $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ 在边界上取零值来估计二重积分的上界, 因此必须设法将积分用偏导数来表示, 这一般是用泰勒展开式或分部积分来实现. 下面先利用分部积分.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \\ &= \int_0^1 x f(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^1 x \frac{\partial f}{\partial x} dx = - \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dy \\ &= - \int_0^1 x y \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^1 y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy. \end{aligned}$$

估值

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right| = \int_0^1 \int_0^1 \left| xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| dx dy \leq 4 \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy$$

由于

$$\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \frac{1}{4}.$$

得到

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right| \leq 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

(方法 2) 利用泰勒公式来做此题, 由于此处题给的条件是混合偏导数的界, 因此只需用一元泰勒公式即可.

对于任给的 $(x, y) \in D$, 有 $f(0, y) = 0$, 由一元有限增量公式有

$$f(x, y) = f(0, y) + \frac{f(\cdot, y)}{x} x, \quad 0 < x < 1.$$

再者, 由于 $\frac{f(\cdot, 0)}{x} = 0$. 再运用一元有限增量公式

$$\frac{f(\cdot, y)}{x} = \frac{f(\cdot, 0)}{x} + \frac{\partial^2 f(\cdot, y)}{\partial y \partial x} y.$$

综合以上两式得 " $(x, y) \in D$, 存在 $(\cdot, \cdot) \in D$ 使得

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 f(\cdot, y)}{\partial y \partial x} xy.$$

从而有

$$\begin{aligned} |f(x, y)| & \leq \left| \frac{\partial^2 f(\cdot, y)}{\partial y \partial x} \right| xy \leq 4xy, \\ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right| & \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy \\ & \leq 4 \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = 1. \quad \text{【证毕】} \end{aligned}$$

【注】 题设条件中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 D 的边界上为零, 对本题的矩形域是多余

的,因为在证明中该条件只在 $\frac{f(x,0)}{x} = 0$ 被使用,而这一条件可由 $f(x,0) = 0$ 推导出来. 但给出 $\frac{f}{x}$ 在边界为零的条件,对于做题有提示作用,另外问题可推广到不是矩形域的情形. 另外 $f(x,y)$ 在 D 的边界上为零的条件,也有部分是不必要的,请读者根据证明中对这一条件的使用情况进行推断.

综例 22.6.6 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续、正的单调减函数,证明:

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

【分析】 通常积分不等式的证法有两条思路,其一是按一般证明不等式的方法,将其变成函数的某种性质的研究,比如正值区间或增减性问题;第二种思路是利用积分运算下不等关系的性质. 在证法 1 中我们先利用第二种思路.

【证】 (方法 1) 希望将问题化成非负函数的积分问题,为此,下面用不等式证明中常用的分析法.

欲证

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 f^2(y) dy}{\int_0^1 f(y) dy},$$

只需证

$$\int_0^1 x f^2(x) dx \cdot \int_0^1 f(y) dy \leq \int_0^1 x f(x) dx \cdot \int_0^1 f^2(y) dy.$$

为使用积分的运算,将上式化成二重积分

$$\int_0^1 \int_0^1 x f^2(x) f(y) dx dy \leq \int_0^1 \int_0^1 x f(x) f^2(y) dx dy.$$

由此,只需证

$$\int_0^1 \int_0^1 xf(x)f(y)[f(y) - f(x)]dxdy = 0.$$

以上结果,将 x 与 y 对换,仍是成立的,因此亦有关系

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 yf(y)f(x)[f(x) - f(y)]dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xf(x)f(y)[f(y) - f(x)]dxdy. \end{aligned}$$

这样又仅需证

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \int_0^1 xf(x)f(y)[f(y) - f(x)]dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)[f(y) - f(x)](y - x)dxdy = 0. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是单调减的函数,当 $x > y$ 时有 $f(y) > f(x)$, 即

$$(y - x)[f(y) - f(x)] > 0,$$

又 $f(x) > 0$, 得

$$f(x)f(y)[f(y) - f(x)] \cdot (y - x) > 0.$$

由此再向上逆推,就证明了所需的结论.

(方法 2) 这里也附带用证一般不等式方法来做一下. 先将问题化成研究函数的性质问题,该函数可取为

$$F(t) = \frac{\int_0^1 xf^t(x)dx}{\int_0^1 f^t(x)dx}.$$

要证明的结论是

$$F(2) \geq F(1).$$

我们可以证明 $F(t) > 0$, 而且 $F'(t) < 0$, 从而证明所需结果. 不过这里要用到含参数积分的求导问题,有兴趣的读者可以参阅有关教科书,这里就不赘述了. 【证毕】

【注】证法一中用到的主要技巧是二个定积分相乘与累次积分及二重积分的直接关系,以至可以用到二重积分运算下的不等式方

向不变性质. 类似的题还有: 若 $0 < f(x) \in C[0, 1]$, 则

$$\int_0^1 (f(x))^{-1} dx = \int_0^1 f(x) dx^{-1}.$$

综例 22.6.7 计算 $I = \int_D \frac{1}{xy} dx dy$. 其中域 $D: 2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 4$ 且 $2 \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4$.

$$\frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4.$$

【解】 本题的特点是积函数比较简单, 但积分区域复杂, 因而应主要从域来考虑坐标系的选择, 显然此题只有选极坐标系为宜.

为此先作略图, 将域用极坐标形式表示为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cos \theta &\leq r \leq \frac{1}{2} \cos \theta, \\ \frac{1}{4} \sin \theta &\leq r \leq \frac{1}{2} \sin \theta. \end{aligned}$$

再根据域关于 $y = x$ 对称, 由此可得

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{D_1} \frac{1}{xy} dx dy \\ &= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{4} \cos \theta}^{\frac{1}{2} \sin \theta} \frac{d}{r^2 \cos \theta \cdot \sin \theta} r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta \cdot \sin \theta} \ln \frac{\frac{1}{2} \sin \theta}{\frac{1}{4} \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan \theta} \ln(2 \tan \theta) \cdot d \tan \theta \\ &= 2 \left[\ln 2 \cdot \ln(\tan \theta) + \frac{1}{2} (\ln \tan \theta)^2 \right] \Big|_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2(\ln 2)^2 - (\ln 2)^2 = \ln^2 2. \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题要注意极坐标角度的定限及定积分中的计算技巧.

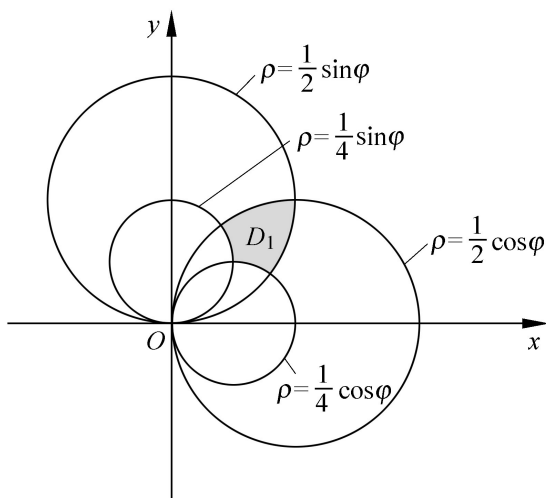


图 22.15

综例 22.6.8 计算积分 $I = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{2} - x^2 - y^2 \right| dx dy$.

【分析】 该题被积函数是分块可微的函数, 在积分中应按其不可微曲线对域进行分块. 这在前面有类似题目, 不过这里的问题其被积函数比较复杂, 为计算简单, 还需作些处理.

【解】 先变化被积函数, 明确不可微曲线, 为此设

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x+y}{2} - (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{4} - \left(x - \frac{2}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{2}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

取

$$\begin{aligned} D: x^2 + y^2 &\leq 1, \\ D_1: \left(x - \frac{2}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{4}\right)^2 &\leq \frac{1}{4}, \\ D_2: \left(x - \frac{2}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{4}\right)^2 &> \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D \left[f(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\
 &= \int_{D_1} f(x, y) dx dy - \int_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy.
 \end{aligned}$$

再求

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

这里用到了 $\int_D \frac{x+y}{2} dx dy = 0$.

为求积分 $I = \int_{D_1} f(x, y) dx dy$, 先平移坐标

$$\begin{aligned}
 u &= x - \frac{1}{2}, & x &= u + \frac{1}{2}, \\
 v &= y - \frac{1}{2}. & y &= v + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

即

在平移坐标系后, 面积元不变化, 即

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} du dv = du dv,$$

因此有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{D_1} \left[f(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy \\
 &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left[\frac{1}{2}(u+v)^2 - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (2uv) du dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left[u^2 v - \frac{1}{2} v^3 \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{27}{64} v - \frac{1}{32} v - \frac{1}{32} v^3 + \frac{1}{64} v^3 \right) dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{27}{32} v - \frac{1}{32} v^3 \right) dv \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{27}{64} v^2 - \frac{1}{128} v^4 \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{27}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{1}{128} \cdot \frac{81}{256} - \left(\frac{27}{64} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{256} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{243}{1024} - \frac{81}{32768} - \frac{27}{1024} + \frac{1}{32768} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{243 - 81}{32768} - \frac{27 - 1}{1024} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{162}{32768} - \frac{26}{1024} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{81}{16384} - \frac{13}{512} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{81 - 13 \cdot 32}{16384} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{81 - 416}{16384} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{-335}{16384} \right) \\
 &= -\frac{335}{32768}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 2 \int_0^2 d \int_0^{\frac{1}{2}} d \\
 &= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

最后的结果为

$$I = I_2 - I_1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}. \quad \text{【解毕】}$$

综例 22.6.9 均质半球下面联接一个半径相同的均质圆柱体, 欲使其质心仍在球心处, 求所接圆柱高与半径之比为何? 设球的密度为 ρ_1 , 柱的密度为 ρ_2 .

【解】 这是一个比较简单的三重积分应用题, 质心公式的运用是关键.

首先根据题设, 两个积分域分别为

$$\begin{aligned}
 1: \quad & \begin{cases} z > 0, \\ z < R^2 - x^2 - y^2, \end{cases} & 2: \quad \begin{cases} -h < z < 0, \\ x^2 + y^2 < R^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

根据题意, 得到关于 h 的方程

$$\rho_1 \int_1 z dV = \rho_2 \int_2 z dV,$$

其中

$$\int_1 z dV = \int_{x^2+y^2}^{R^2} \int_0^{R^2-x^2-y^2} z dz = \frac{1}{4} R^4.$$

利用质心公式计算得

$$\int_2 z dV = \frac{h}{2} \cdot R^2 h.$$

于是方程变成

$$\frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} h^2 R^2,$$

解出得

$$\frac{R}{h} = \frac{2}{1}.$$

【解毕】

综例 22.6.10 计算三重积分

$$I(h) = \frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dv}{x^2+y^2+(z-h)^2}.$$

【解】 本题是一个普通三重积分题,特殊之处在于含有参数 h , 当 $h > R$ 时,这是一个广义三重积分问题,因为被积函数无界,不过这个广义积分是收敛的,完全可以按通常计算方法求值. 本题的坐标系选择对问题的计算复杂性影响不很大,特别是用球或柱坐标都差不多,用直角坐标,会复杂一点. 以下用柱坐标计算.

$$\begin{aligned} I(h) &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{x^2+y^2+(z-h)^2} \\ &= \int_{-R}^R dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dx dy}{x^2+y^2+(z-h)^2} \\ &= \int_{-R}^R dz \int_0^{R^2-z^2} \frac{d}{r^2+(z-h)^2} \\ &= \int_{-R}^R (2 \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{1}{r^2+(z-h)^2} r dr) \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} dz \\ &= \int_{-R}^R 2 \left(\frac{1}{z-h} \left(\sqrt{R^2-z^2} - |z-h| \right) \right) dz. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^R (R^2 - 2hz + h^2) dz \\ &= \frac{1}{3h} (R^2 - 2hz + h^2) \Big|_{-R}^R \\ &= \frac{1}{3h} [(R+h)^3 - (R-h)^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3h} R^3 + 2hR, \quad \text{当 } h > R \text{ 时,} \\
 &= \frac{2}{3} h^2 + 2R^2, \quad \text{当 } h = R \text{ 时.} \\
 I_2 &= \int_{-R}^R |h - z| dz = \begin{cases} 2hR, & \text{当 } h > R \text{ 时,} \\ h^2 + R^2, & \text{当 } h = R \text{ 时.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

综合起来

$$\begin{aligned}
 I &= 2(I_1 + I_2) = \begin{cases} \frac{4}{3h} R^3, & \text{当 } h > R \text{ 时,} \\ 2R^2 - \frac{h^2}{3}, & \text{当 } h = R \text{ 时.} \end{cases} \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

【注】 本题的物理背景是密度为 1 半径为 R 的球体形成一个引力场. 求在离球心为 h 的地方的势函数 $I(h)$. 这个函数在 $h = R$ 处是连续的, 但不可微.

综例 22.6.11 若函数 $u = f(x, y, z)$ 偏导数连续, 且满足关系:

$\frac{-u}{x} + \frac{-u}{y} + \frac{-u}{z} = 1$, 证明 $f(x, y, z)$ 在球域 $\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2\}$ 上的平均值满足不等式

$$f(x_0, y_0, z_0) - \frac{3}{4}R \leq \bar{u} \leq f(x_0, y_0, z_0) + \frac{3}{4}R.$$

【证】 从题设分析, 欲从偏导数平方和, 即梯度模的上界, 估计在球域内函数平均值的上下界. 显然这非多元泰勒展开不行.

由于是球域, 利用泰勒公式可将域内任一点的函数值用 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的函数值和偏导数表示出来, 即

$$f(M) = f(M_0) + (\text{grad } f(M_0))^T \cdot (M - M_0),$$

这里 M 是 MM_0 连线中的某一点. 如此有

$$(f(M) - f(M_0)) dv = (\text{grad } f(M_0))^T \cdot (M - M_0) dv.$$

由于

$$\Omega = \frac{4}{3} R^3 \int_{\Omega} f(M) dv,$$

及

$$\left| \operatorname{grad} f(M)^T \cdot (M - M_0) \right| = \left| \operatorname{grad} f(M) \cdot \frac{M - M_0}{|M - M_0|} \right|.$$

其中

$$M - M_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

$$|M - M_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

从而得到不等式

$$\frac{4}{3} R^3 \left| \int_{\Omega} f(M) dv - f(M_0) \int_{\Omega} dv \right| \leq \int_{\Omega} \left[\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right] dv.$$

利用平移坐标计算上式右边的积分

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} dv \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{3}{4} R^4. \end{aligned}$$

由此得到结果

$$\left| \int_{\Omega} f(M) dv - f(M_0) \int_{\Omega} dv \right| \leq \frac{3}{4} R^4. \quad \text{【证毕】}$$

【注】 在三重积分计算中,在广义坐标系

$$x = x(u, v, w),$$

$$y = y(u, v, w),$$

$$z = z(u, v, w).$$

下的体积元素是

$$dv = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta$$

因而

$$\int_V f(x, y, z) dv$$

$$= \int_{V'} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta .$$

如果是平移, 即

$$x = x_0 + \xi,$$

$$y = y_0 + \eta,$$

$$z = z_0 + \zeta .$$

则

$$dx dy dz = d\xi d\eta d\zeta .$$

本题正是利用了这一结果.

第 23 章 第一、二型曲线积分

23.1 引言

曲线积分有四方面内容,首先是曲线积分的概念与性质,曲线积分仍是某种形式的和式极限,因此与前面研究过的重积分类似,但要注意有二类不同的曲线积分.曲线积分的计算是该部分内容的重点,基本的计算方法是化成定积分,但通过格林公式引入了闭路积分与二重积分的关系.第三部分内容是曲线积分与路径无关的问题,这部分知识综合性比较强,又有明确的物理背景.最后是曲线积分的应用,不外乎几何、力学和物理上的一些典型问题,如曲线弧长,柱面面积,曲线重心,沿曲线做功等.

23.2 曲线积分的概念

曲线积分虽是和式极限,但分成第一型(或对弧长的)曲线积分与第二型(或叫对坐标的)曲线积分,其定义分别如下:

先考虑平面曲线积分

给定函数 $z = f(x, y)$, 定义在曲线 L 上, 将 L 任意分成 n 段, 设第 i 段为 l_i , 为简便计, l_i 既表示这子弧段, 又表示其弧长, P_i 是此子弧段上任一点, 若和式极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) l_i$$

存在, 则称为 $f(P)$ 在 L 上的第一型曲线积分, 记成 $\int_L f(x, y) dl$.

若给定曲线方向为由 A 到 B , 且极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

存在, 则称为 $f(P)$ 沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分, 记作

$\int_{L_{AB}} f(P) dx$. 这里 Δx_i 是 l_i 中的最大长度, Δx_i 是弧向量 \mathbf{l} 在 x 轴上的投影.

关于二类曲线积分的概念, 有几点值得注意:

第一, 被积函数 $f(P)$ 的值是取于曲线 L 上, 也就是说曲线积分的值, 取决于被积函数与给定的曲线 L .

第二, 第一型曲线积分中 dl 是弧长, 因此在计算中要保证其非负性, 这体现在将其化成定积分, 在定积分限时, 应使上限不小于下限; 而在计算第二型曲线积分时, 相应的定积分的上下限则由曲线 L 的方向, 即起终点 A, B 的相应坐标来确定.

第三, 通常第二型曲线积分以组合积分形式出现:

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy,$$

这也可以视作是向量函数 $\mathbf{F}(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$ 的曲线积分, 表示成简洁的向量点积形式

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l}. \quad (23.1)$$

此处 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ 是弧微分向量.

第四, 对于三维空间中的曲线积分, 定义完全类似于平面曲线积分:

第一型曲线积分为

$$\int_L f(x, y, z) dl$$

其中 L 为空间曲线.

第二型曲线积分; 设有向量函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

及空间曲线 L , 对应的弧微分向量

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

则

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_L Xdx + Ydy + Zdz. \quad (23.2)$$

例 23.2.1 给定平面曲线 $L: x^2 + (y - r^2 - 1)^2 = r^2$, 计算:

$$\int_L (x - y)^2 dl.$$

【解】 曲线积分的第一步是将曲线表成参数形式.

(方法 1) 若将 x 作为参数则有

$$L: \begin{cases} x = x, \\ y = r^2 - 1 \pm \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \text{ 且}$$

$$x^2 + y^2 - 2(r^2 - 1)y = 1.$$

因此有

$$\begin{aligned} \int_L (x - y)^2 dl &= \int_L (x^2 + y^2 - 2xy) dl \\ &= \int_L (1 + 2(r^2 - 1)y - 2xy) dl \\ &= \int_L dl + 2(r^2 - 1) \int_L y dl - 2 \int_L xy dl. \end{aligned} \quad (23.3)$$

这里

$$\int_L dl = 2r,$$

$$\int_L y dl = \int_{L_1} y dl + \int_{L_2} y dl$$

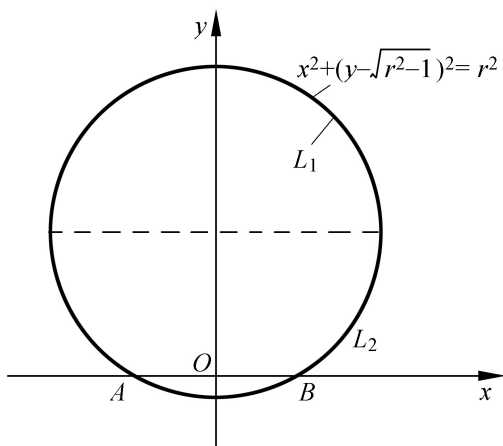


图 23.1

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-r}^{+r} r(\sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &\quad + \int_{-r}^r r(\sqrt{r^2 - 1} - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &= 4r \sqrt{r^2 - 1} \frac{1}{2} = 2r \sqrt{r^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_L xy dl &= \int_{L_1} xy dl + \int_{L_2} xy dl \\
 &= \int_{-r}^r x(\sqrt{r^2 - 1} + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &\quad + \int_{-r}^r x(\sqrt{r^2 - 1} - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &= 2 \int_{-r}^r x \frac{r^2 - 1}{\sqrt{r^2 - x^2}} r dx = 0.
 \end{aligned}$$

综合而得

$$\begin{aligned}
 \int_L (x - y)^2 dl &= 2r + 4 \sqrt{r^2 - 1} \cdot r \sqrt{r^2 - 1} \\
 &= 2r(2r^2 - 1).
 \end{aligned}$$

(方法 2) 用圆方程的另一种参数方程

$$L: \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = \sqrt{r^2 - 1} + r \sin t. \end{cases}$$

则 $dl = dx^2 + dy^2 = r dt$. 此时

$$\begin{aligned} \int_L (x - y)^2 dl &= \int_L (1 - 2\sqrt{r^2 - 1}y - 2xy) dl \\ &= 2r - 2\sqrt{r^2 - 1} \int_0^{2\pi} (\sqrt{r^2 - 1} + r \sin t) r dt \\ &\quad - 2 \int_0^{2\pi} r \cos t (\sqrt{r^2 - 1} + r \sin t) r dt \\ &= 2r - 2(\sqrt{r^2 - 1})^2 \int_0^{2\pi} r dt \\ &= 2r[2r^2 - 1]. \end{aligned}$$

(方法 3) 利用曲线的对称性及重心公式.

$$\begin{aligned} \int_L (x - y)^2 dl &= \int_L (1 + 2\sqrt{r^2 - 1}y - 2xy) dl \\ &= 2r + 2\sqrt{r^2 - 1} \int_L y dl - 2 \int_L xy dl \end{aligned}$$

利用重心公式有

$$\int_L y dl = \bar{y} \cdot 2r = \sqrt{r^2 - 1} \cdot 2r.$$

由于 L 关于 y 对称, 而被积函数关于 x 是奇函数, 从而

$$\int_L xy dl = 0.$$

这样非常简便地得到

$$\int_L (x - y)^2 dl = 2r + 4r(\sqrt{r^2 - 1}) = 2r[2r^2 - 1].$$

【解毕】

【注】 (1) 注意在式(23.3)中, 用到了被积函数 $(x - y)^2$ 是取值于 L 上. 在 L 上的点应满足 $x^2 + y^2 = 1 + 2\sqrt{r^2 - 1}y$, 这样才有(23.3)的简化形式.

(2) 以上列举的三种计算方法中, 方法 1 虽然繁一点, 但对于理解曲线积分概念是很有作用的; 方法 2 则是常用的计算方法; 而方法 3 似乎特殊一点, 但也是经常利用的技巧.

例 23.2.2 求 $I = \int_L (x - y)^2 dy$. 其中 L 为曲线 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 从 $A(1, 0)$ 经 $C(0, 2 + \sqrt{3})$ 到 $B(-1, 0)$ 的一段弧.

【解】 由于 L 可表示成 $x^2 + y^2 = 1 + 2\sqrt{3}y$, 从而有

$$\begin{aligned} \int_L (x - y)^2 dy &= \int_L (x^2 + y^2 - 2xy) dy \\ &= \int_L (1 + 2\sqrt{3}y - 2xy) dy \end{aligned}$$

将 L 用参数方程

$$x = 2\sin t$$

$$y = 3 + 2\cos t$$

表示, 这样 $dy = 2\sin t dt$, $A(1, 0)$ 对应于 $t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, $C(0, 2 + \sqrt{3})$ 对

应于 $t = 0$, $B(-1, 0)$ 对应于 $t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} [1 + 2\sqrt{3}(3 + 2\cos t) \\ &\quad - 4\sin t(3 + 2\cos t)] \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} 16 \sin^2 t (3 + 2\cos t) dt \\ &= \frac{2}{3} (10\sqrt{3} + 11). \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 这里将 L 的参数方程写成这种形式是根据 L 的形式, 使积

分区间呈对称形式, 以便于计算. 另外如果用 $\begin{matrix} x = 2\sin \\ y = 3 - 2\cos \end{matrix}$, 此时

A 对应于 $t = \frac{\pi}{6}$, B 对应于 $t = \frac{5\pi}{6}$, $dy = 2\sin t dt$, 而此时

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [1 + 2\sqrt{3}(3 - 2\cos t) - 4\sin t(3 - 2\cos t)] \sin t dt \\ &= \frac{2}{3}(2\sqrt{3} - 11). \end{aligned}$$

为什么这个值与上面计算之值不相同? 请研究一下.

例 23.2.3 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, 其中 L 为空间螺线:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z &= bt. \end{aligned}$$

【解】 弧微分 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} dt$, 则有

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2). \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 23.2.4 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dx$, 其中 L 为上题空间螺线由 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, 2b)$.

【解】 此题中 $dx = -a \sin t dt$, 则有

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dx = - \int_0^{2\pi} a(a^2 + b^2 t^2) \cdot \sin t dt = 0.$$

【解毕】

【注】 这里被积函数 $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, 但积分是零. 这是因为 dx 是有正负的!

23.3 格林公式

格林公式是平面曲线积分中的一个重要公式,它将闭路径的曲线积分与相应的一个二重积分联系起来.理解格林公式的证明对于掌握曲线积分的概念与计算是很有益的,因此我们就简单情况来证明格林公式.格林公式的实质是将二元函数偏导数在 D 上的二重积分化成在 D 的边界上的曲线积分,即

$$\begin{aligned}
 \int_D \frac{X}{y} dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{X}{y} dy \\
 &= \int_a^b X(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx \\
 &= \int_a^b (X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))) dx \\
 &= - \int_{L_2} X(x, y) dx - \int_{L_1} X(x, y) dx \\
 &= - \int_L X(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

上式的最后步骤是将定积分变成第二型的曲线积分,积分的定限请参见图 23.2.同样可得

$$\int_D \frac{Y}{x} dx = \int_L Y(x, y) dy.$$

合起来就是格林公式

$$\int_L X dx + Y dy = \int_D \frac{Y}{x} - \frac{X}{y} dy. \quad (23.4)$$

这里 L 的取向与域 D 的关系是满足“右手法则”:即四指并拢沿着 L 的方向,手心一侧必须是 D 域.对此公式有几点说明:

第一,公式使用的条件是 X 和 Y 的偏导数在 D 中连续,或者写成 $X, Y \in C^1(D)$,不满足该条件不能使用此公式.

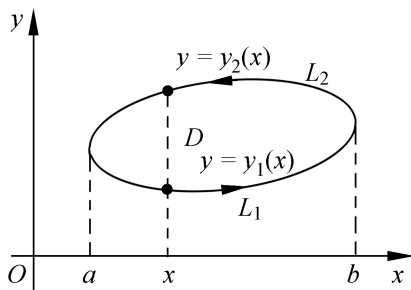


图 23.2

第二,在证明的过程中用到

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = X(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)},$$

这实际上就是一元函数的牛顿-莱布尼兹公式,因为这里 x 是固定的“常数”。

第三,为便于正确记忆格林公式,并与以后的 Stokes 公式统一,可将其用行列式形式表示成

$$\int_L X dx + Y dy = \int_D \begin{vmatrix} - & - \\ x & y \\ X & Y \end{vmatrix} d. \quad (23.5)$$

作为例子,首先,把上一节中的例 23.2.2 再计算一下。

为使用格林公式,在 L 上加上直线 BA ,使之成为封闭曲线 C ,则有

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x - y)^2 dy = \int_L (1 + 2 - 3y - 2xy) dy \\ &= \int_C (1 + 2 - 3y - 2xy) dy - \int_{BA} (1 + 2 - 3y - 2xy) dy \end{aligned}$$

在后一个积分中,由于在 BA 上 $dy = 0$,因此积分也是零;在第一项的积分式中加上 $0 \cdot dx$,再使用格林公式,就有

$$\begin{aligned} I &= \int_{D_C} (-2y - 0) d = -2 \int_{D_C} y d \\ &= -4 \int_0^{2+3} y dy - \int_0^{4-(y-3)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -4 \int_0^{2+\sqrt{3}} y^4 - (y-3)^2 dx \\
 &= -\frac{2}{3}(10\sqrt{3} + 11).
 \end{aligned}$$

做上述积分的过程中还是用变换替换

$$y - 3 = 2\cos t$$

为好.

例 23.3.1 $J = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = ?$

【解】 这是闭路径积分中运用格林公式的一道典型题. 因为被积函数不满足格林公式所需要的条件, 它在 $(0, 0)$ 点偏导数不连续, 因而先要运用曲线积分的概念中: 被积函数的值取在曲线 L 上的规定对其做变化.

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{R^2} \\
 &= \frac{1}{R^2} \int_{x^2+y^2=R^2} ydx - xdy \\
 &= \frac{1}{R^2} \int_{x^2+y^2=R^2} (-1 - 1)dy = \frac{-2}{R^2} \int_{x^2+y^2=R^2} dy \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 上式中之所以在变成 $ydx - xdy$ 后能使用格林公式是因为此时偏导数连续的条件已满足.

例 23.3.2 计算 $I = \int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 是任一条不过原点的封闭曲线.

【解】 首先考虑 C 不包围原点, 这样在由 C 作边界的域 D_C 中, 被积函数的偏导数连续, 因而可以直接利用格林公式. 由于

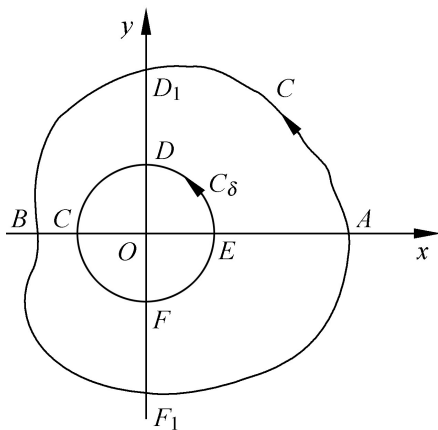


图 23.3

$$\begin{aligned} \frac{X}{y} &= \frac{1}{y} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{Y}{x} &= \frac{1}{x} \frac{-x}{x^2 + y^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

这样

$$I = \int_C Xdx - Ydy = \int_{D_C} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) d\sigma = 0.$$

如果 C 内包含了原点 $(0, 0)$, 自然破坏了格林公式的使用条件. 但是如果在 C 内作以 $(0, 0)$ 为圆心, δ 为半径的圆 C_δ (见图 23.3), 这样在闭曲线: 珙 $AD_1BCDEF CBF_1A$ 内, 格林公式条件满足, 这样就有

$$\int_{\text{珙}} Xdx - Ydy = \int_C Xdx - Ydy - \int_{C_\delta} Xdx - Ydy = 0.$$

从而有

$$\int_C Xdx - Ydy = \int_{C_\delta} Xdx - Ydy.$$

由于前面已求得 $\int_{C_\delta} Xdx - Ydy = -2$, 因而有

$$\int_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -2.$$

【解毕】

【注】 这个例题的作题过程, 提供了一个很有用的结果: 若向量函数

$$\mathbf{F}(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$$

满足以下条件:

第一, X 与 Y 的偏导数在以 C 为边界的域 D_c 内, 除一个点 P_0 外, 均连续, P_0 不在边界上.

$$\text{第二, 在 } D_c \text{ 内除 } P_0 \text{ 点有 } \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

则对于任何包含 P_0 点的简单闭曲线 C (即不自交的曲线), 积分

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C Xdx + Ydy$$

是一个常数. 或者说, 任何包含 P_0 的简单闭曲线上, 上述闭路径积分均相等, 因此我们在计算这种积分时, 只要计算其中一个在特殊闭路径上的积分就行了.

23.4 平面积分与路径无关的条件

1. 原函数

这里研究的是第二型曲线积分的一个重要性质, 设 $\mathbf{F} = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}$, 给定从 A 经曲线 L 到 B 的路径, 则积分

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_L Xdx + Ydy \text{ 在一般情形下, 其值不但与 } A \text{ 与 } B \text{ 有关,}$$

也与曲线 L 有关. 如果上述积分, 只与起终点 A, B 有关, 而与曲线 L 无关, 则称该积分与路径无关. 积分的这种性质有很强的物理背景, 因为

$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 表示质点在力 \mathbf{F} 的作用下, 沿 L 从 A 运动到 B 力场所作的功. 如果力场所作之功, 只与起终点有关, 而与所经路径无关, 这种力场在物理上称为有势场, 或保守场, 例如引力场就是

有势场.所谓“有势”是指对应于力场 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ 存在一个函数 $u = u(x, y)$, 使得

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = Xdx + Ydy = du(x, y),$$

从而有

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B du(x, y) = u(B) - u(A).$$

这个函数 $u = u(x, y)$ 就称为力场 $\mathbf{F}(x, y)$ 的势函数.

在数学上, 如果这种微分形式

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

正好等于一个函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

或者

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y(x, y).$$

则称 $u = u(x, y)$ 是微分形式 $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ 的一个原函数.

2. 积分与路径无关的条件

关于积分与路径无关的问题有下面两个重要的结果.

第一, 若 X, Y 在区域 D 中连续, 则以下三个条件是等价的, 即互为充要条件:

(i) 积分 $\int_L Xdx + Ydy$ 与路径无关, L 在 D 内;

(ii) 积分 $\int_C Xdx + Ydy = 0$, 对 D 中任何闭曲线 C ;

(iii) 在 D 中存在单值的原函数 $u = u(x, y)$.

这里(i)与(ii)互为充要性是明显的, 作为练习留给读者. 下面只证(i)与(iii)的等价性.

首先证明(i) (iii), 即已知 $\int_L Xdx + Ydy$ 与路径无关. 下面用一种构造性的证法, 即把原函数找出来. 为此, 在 D 内任取一点

$P_0(x_0, y_0)$, 做函数

$$u(x, y) = \int_{P_0}^P X dx + Y dy.$$

这样定义的函数是有意义的, 因为这个积分只取决于起终点, 由于固定起点, 因此这是终点 $P(x, y)$ 的函数.

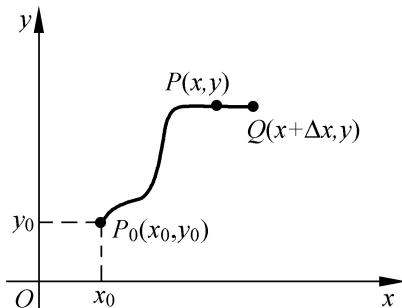


图 23.4

我们要证明, 这就是所求的一个原函数, 也就是说要证明

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Y.$$

为此先求

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{x} (u(x + \Delta x, y) - u(x, y)) \\ &= \frac{1}{x} \int_{P_0}^Q X dx + Y dy - \int_{P_0}^P X dx + Y dy \\ &= \frac{1}{x} \int_{PQ} X dx + Y dy \\ &= \frac{1}{x} \int_{PQ} X dx = \frac{1}{x} \int_x^{x+\Delta x} X(x, y) dx \\ &= X(x + \Delta x, y). \end{aligned}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 根据偏导数定义及 X 的连续性, 则有

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = X(x, y).$$

同样可以证明

$$\frac{u(x, y)}{y} = Y(x, y).$$

反过来,若已知存在 $u = u(x, y)$ 使得

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = du(x, y),$$

则对任一在 D 内从 A 到 B 的曲线

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

有 $dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt.$

$$A(x_1, y_1) = A(x_1(t), y_1(t)), \quad B(x_2, y_2) = B(x_2(t), y_2(t)).$$

利用上述条件,将曲线积分化成对 t 的定积分

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} X(x, y)dx - Y(x, y)dy \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (X(x(t), y(t))dx(t) + Y(x(t), y(t))dy(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d(u(x(t), y(t))). \end{aligned}$$

这一步是根据一阶微分形式不变性,继续上式得

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} Xdx + Ydy &= u(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &= u(x(t_2), y(t_2)) - u(x(t_1), y(t_1)) \\ &= u(B) - u(A). \end{aligned}$$

这就是欲证的结论.

需要指出的是,这里用到的定积分与曲线积分相互转化的处理是曲线积分中最基本的方法和技巧.

第二,当 X, Y 在单连通区域 D 内连续时,则对任何 D 中闭路径 C , $\int_C Xdx + Ydy = 0$ 的充要条件是可积性条件 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ 成立.

单连通域 D 是指,域中任何闭曲线所围的区域中都是 D 中的点.这里之所以要加上这一条件,就是因为要运用格林公式.这个

结论的证明方法,也比较典型,因此我们也叙述如下.

先证必要性:即已知 $\int_C Xdx + Ydy = 0$, 对任何 D 中闭曲线 C 成立. 由于 C 所围域满足格林公式条件, 从而对任何 $P_0 \in D$, 及以 P_0 为圆心, r 为半径的圆 $C(P_0)$ 有

$$0 = \int_{C(P_0)} Xdx + Ydy = \int_{D_C} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) dx dy.$$

由于 $\frac{Y}{x} - \frac{X}{y}$ 连续, 利用中值定理有

$$0 = \int_{D_C} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) dx dy = \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) \Big|_P \cdot \pi r^2.$$

P 是 D_C 中的一点. 当 $r \rightarrow 0$ 时, 必有 $P \rightarrow P_0$, 这样就有

$$\frac{Y(P_0)}{x} - \frac{X(P_0)}{y} = 0.$$

由于 P_0 的任意性, 这就证明了, 在 D 中都有 $\frac{Y}{x} = \frac{X}{y}$.

反过来, 若有 $\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}$, 直接利用格林公式马上就有所需的结果

$$\int_C Xdx + Ydy = \int_{D_C} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) dx dy = 0.$$

从上面的证明可知: 在 X, Y 连续的条件下 $\int_L Xdx + Ydy$ 与路径无关, $\int_C Xdx + Ydy = 0$ 以及存在单值原函数 $du = Xdx + Ydy$ 是等价条件. 而要用到可积性时, 要加上两个附加条件: X, Y 一阶偏导数连续和 D 为单连通域, 这是因为格林公式的要求.

因此, 在 D 为单连通区域和 $X, Y \in C^1(D)$ 的前提下, $\int_L Xdx + Ydy$ 与路径 L 无关, $\int_C Xdx + Ydy = 0$, 有单值原函数 $du = Xdx + Ydy$.

+ Ydy 及 $-\frac{X}{y} = -\frac{Y}{x}$ 四个条件是等价条件.

3. 求原函数的方法

如果微分形式 $Xdx + Ydy$ 满足可积性条件 $-\frac{X}{y} = -\frac{Y}{x}$, 通常用两种方法来求相应的原函数.

其一, 用曲线积分的方法. 这就是用证明中构造的原函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Xdx + Ydy.$$

在大多数情形下, 选择从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 沿平行 x 轴和 y 轴的两段直线积分(见图 23.5), 即

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{P_0Q} Xdx + \int_{QP} Ydy \\ &= \int_{x_0}^x X(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Y(x, y)dy. \end{aligned}$$

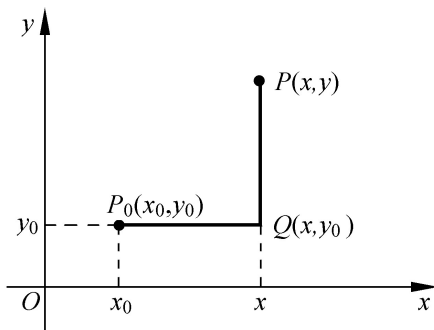


图 23.5

其二, 凑全微分的方法. 因为现在已知 $Xdx + Ydy = du(x, y)$, 只是 $u(x, y)$ 还不知道, 为此可利用在微分方程中解全微分方程的方法, 凑出全微分来.

例23.4.1 设 L 是从 $A(0, 0)$ 到 $B(x, y)$ 的任意曲线, 求:

$$\int_{L_{AB}} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

【解】 从题设条件看, 只有积分与路径无关时题目才有意义. 因此

先判断可积性条件是否满足

$$\frac{X}{y} = 2x - 2y, \quad \frac{Y}{x} = 2x - 2y.$$

可见积分与路径无关.

(方法 1)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{L_{AB}} X dx + Y dy \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{1}{3} y^3. \end{aligned}$$

这也是 $X dx + Y dy$ 的一个原函数.

(方法 2) 可以用凑全微分方法, 先求出原函数, 再求积分. 由于

$$\begin{aligned} &(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy \\ &= x^2 dx - y^2 dy + y dx^2 - x dy^2 - y^2 dx + x^2 dy \\ &= \frac{1}{3} dx^3 - \frac{1}{3} dy^3 + (y dx^2 + x^2 dy) - (x dy^2 + y^2 dx) \\ &= d \frac{x^3 - y^3}{3} + d(x^2 y) - d(xy^2) \\ &= d \frac{x^3 - y^3}{3} + x^2 y - xy^2, \end{aligned}$$

则积分

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(x,y)} X dx + Y dy &= \left. \frac{x^3 - y^3}{3} + x^2 y - xy^2 \right|_{(0,0)}^{(x,y)} \\ &= \frac{x^3 - y^3}{3} + x^2 y - xy^2. \end{aligned}$$

【解毕】

例 23.4.2 求 $I = \int_L y - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - x dy$.

L 沿曲线 $|x - 2| + |y - \pi| = 1$ 从 $A(3, \pi)$, 经 $B(2, \pi + 1)$ 到 $C(1, \pi)$.

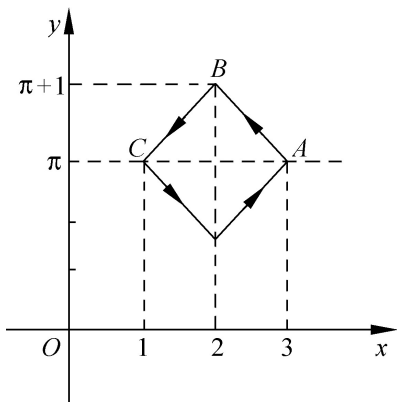


图 23.6

【解】 这个积分样子比较复杂, 先用可积性条件检查一下.

$$\begin{aligned} \frac{Y}{x} &= \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} - 1 \\ &= -2 \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x} - 1, \end{aligned}$$

$$\frac{X}{y} = 1 + \frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

由上式可见 $-\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} = \frac{y}{y} - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}$, 即相应这部分是全微分. 这样可分成两部分来求.

$$I_1 = \int_L -\frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy.$$

由于

$$\begin{aligned} & -\frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy \\ &= \sin \frac{y}{x} dy + \frac{xdy - ydx}{x^2} y \cos \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \frac{y}{x} dy + y \cos \frac{y}{x} d \frac{y}{x} \\
 &= \sin \frac{y}{x} dy + y d \sin \frac{y}{x} = d y \cdot \sin \frac{y}{x} .
 \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_L -\frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy \\
 &= \int_A^C d y \sin \frac{y}{x} = y \sin \frac{y}{x} \Big|_{(3, 1)}^{(1, 3)} \\
 &= 0 - \sin \frac{3}{3} = -\frac{3}{2} .
 \end{aligned}$$

再者

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_L y dx - x dy \\
 &= \int_{L \cup CA} y dx - x dy - \int_{CA} y dx - x dy \\
 &= \int_{ABC} -2 dx - \int_{CA} y dx \\
 &= -2 - \int_1^3 dx = -2 - 2 .
 \end{aligned}$$

综合而得

$$I = I_1 + I_2 = -2 - 2 + \frac{3}{2} .$$

另一解法是利用格林公式, 先补上线段 CA , 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{ABCA} -\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} dx - \int_{CA} -\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} dx \\
 &= \int_{ABC} d \left(-2 - \frac{3}{x} \right) = -2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} .
 \end{aligned}$$

【解毕】

23.5 综合例题

综例 23.5.1 计算 $I = \int_L (x + y) dl$, L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) 的第一象限部分的曲线.

【解】 按常规做法, 先将 L 用参数方程

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

表示, 则 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x + y) dl \\ &= \int_0^{\pi/2} (a \cos t + b \sin t) \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &\quad + b \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

以下分别计算这两个积分.

$$\begin{aligned} I_1 &= a \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= ab \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin^2 t \right) \cos t dt \\ &= ab \int_0^1 \left(1 + e^2 u^2 \right) du \\ &= \frac{ab}{e} \left[\frac{1}{2} e u \sqrt{1 + e^2 u^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \ln \left| e u + \sqrt{1 + e^2 u^2} \right|_0^1 \\ &= \frac{b}{2} \left(b + a \frac{a}{e} \ln(e + \sqrt{1 + e^2}) \right), \end{aligned}$$

其中 $e = \frac{a^2 - b^2}{b}$.

$$\begin{aligned} I_2 &= b \int_0^{1/2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \sin t dt \\ &= ab \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t\right) \sin t dt \\ &= ab \int_0^1 (1 - a^2 v^2) dv \\ &= \frac{ab}{e_1} \left. \frac{1}{2} (e + 1 + e^2) \right|_0^1 + \frac{1}{2} \arcsin(a v) \Big|_0^1 \\ &= \frac{b}{2} (e + 1 + e^2) + \frac{a}{e_1} \arcsin a , \end{aligned}$$

其中 $e_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}$, 即 $e_1 = \frac{b}{a} e$.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = b^2 + \frac{ab}{2} \frac{1}{e} \ln(e + 1 + e^2) + \frac{1}{a} \arcsin a \\ &= b^2 + \frac{ab}{2e} (e + 1 + e^2) + \frac{a}{b} \arcsin \frac{be}{a} . \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 该题除练习常规的第一类曲线积分的计算之外, 还综合考察了对定积分的灵活处理, 体现在 I_1 及 I_2 中两种不同的代换 .

综例 23.5.2 求 $\int_C x^2 dl$, 其中 C :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \quad (a > 0) . \\ x + y + z &= 0 . \end{aligned}$$

【解】 本题的难点在空间曲线 C 的表示比较复杂 . 围绕这一问题的解决有三种做法 .

(方法 1) 由于曲线关于 x, y 及 z 之间是对称的, 即 x, y, z 之间的互换, C 的表达式不变, 因此可以推断

$$\int_C x^2 dl = \int_C y^2 dl = \int_C z^2 dl .$$

从而

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dl &= \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl \\ &= \frac{1}{3} \int_C a^2 dl = \frac{a^2}{3} \cdot 2\pi a = \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

这是因为 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的一个大圆. 该做法是很简单又很巧妙的一种做法, 但是缺乏一般性. 下面的方法 2 则是利用常规的方法.

(方法 2) 其思路是设法化成对 x 的定积分. 为此, 首先把 dl 用 dx 表示出来, 由于 C 的弧微分向量为

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

$d\mathbf{l}$ 在 x 轴上的投影是 dx . 另外, 若曲线 C 的切线向量为 \mathbf{t} , 单位切线向量为 \mathbf{t}_0 , 则有

$$d\mathbf{l} = \mathbf{t}_0 dl = \cos \alpha dl \mathbf{i} + \cos \beta dl \mathbf{j} + \cos \gamma dl \mathbf{k}.$$

这里 $\mathbf{t}_0 = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

由此可得

$$\begin{aligned} dx &= \cos \alpha dl, \\ dl &= \left| \frac{1}{\cos \alpha} dx \right|. \end{aligned} \quad (23.6)$$

在本题中

$$\begin{aligned} C: \quad x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned} \quad (23.7)$$

其切线向量

$$\mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k},$$

从而

$$\mathbf{t}_0 = \frac{(y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}}{\sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}}.$$

利用 C 的表示式(23.7), 可得

$$\begin{aligned} & (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 \\ &= 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \\ &= 2a^2 - 2 \frac{-a^2}{2} = 3a^2. \end{aligned}$$

此处用到

$$xy + yz + zx = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{a^2}{2}.$$

这样就有

$$\cos \theta = \frac{y - z}{3a}.$$

再利用(23.7)可以解得

$$(y - z)^2 = 2a^2 - 3x^2.$$

与上式一起代入(23.6), 得

$$dl = \left| \frac{3ax dx}{2a^2 - 3x^2} \right|.$$

另外, 还是由(23.7)联立消去 z , 得到 C 在 xOy 平面上的投影曲线 C_{xy} 为

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (x + y)^2 = a^2, & \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 + xy - \frac{a^2}{2} = 0, \\ z = 0. & \quad \quad \quad z = 0. \end{aligned}$$

这条曲线是 xOy 平面上的椭圆, 可以解出 y , 得两个函数 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$, 这两个函数都定义在区间

$-\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a$ 上. 它们分别对应 C_{xy} 的两段弧, L_1 与 L_2 . 这

样, 原来的曲线积分可化成

$$\int_C x^2 dl = \int_{L_1} \frac{x^2 dx}{|\cos \theta|} + \int_{L_2} \frac{x^2 dx}{|\cos \theta|} = 2 \int_{-\frac{2}{3}a}^{\frac{2}{3}a} \frac{3ax^2}{2a^2 - 3x^2} dx.$$

令 $t = \frac{3}{2} \frac{x}{a}$, 则有

$$\int_C x^2 dl = \frac{4}{3} a^3 \int_{-1}^1 \frac{t}{1-t^2} dt = \frac{2}{3} a^3 .$$

(方法 3) 第三种做法的思路是将空间曲线 C 表示成参数方程. 由于 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $x + y + z = 0$ 切割的大圆. 如果先作坐标变换, 将平面 $x + y + z = 0$ 的法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 作为新坐标的一个坐标轴的方向, 而其他两个是在该平面上的两个正交向量, 这样在新坐标系下, 曲线 C 就是坐标平面上的一个半径为 a 的圆, 由此可以很简单地把参数方程写出来.

首先作坐标变换, 取新坐标系 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 使得

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{6} \end{pmatrix} .$$

这里 \mathbf{e}_1 是平面 $x + y + z = 0$ 的单位法线向量, 而 \mathbf{e}_2 与 \mathbf{e}_3 分别是平行该平面的两个相互垂直的向量. 设新坐标系的坐标为 (u, v, w) , 则其过渡矩阵 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

显然, \mathbf{T} 是正交矩阵, 从而有 $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$. 而且新旧坐标之间有关系

$$\begin{array}{r}
 u \\
 v \\
 w
 \end{array}
 = \mathbf{T}^{-1}
 \begin{array}{r}
 x \\
 y \\
 z
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\
 \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 x \\
 y \\
 z
 \end{array} . \quad (23.8)$$

在 (u, v, w) 坐标系下, 曲线 C 的表示为很简单的形式

$$\begin{array}{l}
 C: \quad \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = \dot{a}^2, \\
 \quad w = 0 \\
 \quad \dot{u}^2 + \dot{v}^2 = \dot{a}^2, \\
 \quad w = 0 .
 \end{array}$$

即

将其用参数方程表示有

$$\begin{array}{l}
 u = a \cos t, \\
 C: \quad v = a \sin t, \\
 \quad w = 0 .
 \end{array}$$

再利用 (23.8) 反回到原坐标系

$$\begin{array}{r}
 x \\
 y \\
 z
 \end{array}
 = \mathbf{T}
 \begin{array}{r}
 a \cos t \\
 a \sin t \\
 0
 \end{array}
 = a
 \begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \\
 \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} & \cos t \\
 0 & \frac{-2}{6} & \sin t
 \end{array} .$$

这就是曲线 C 的参数方程 .

由于坐标变换 \mathbf{T} 是正交变换, 因而

$$\begin{aligned}
 (dl)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 \\
 &= a^2 \sin^2 t (dt)^2 + a^2 \cos^2 t (dt)^2 = a^2 (dt)^2,
 \end{aligned}$$

$$dl = a dt,$$

$$x^2 = \frac{a}{2} \cos t + \frac{a}{6} \sin t^2 .$$

于是,原积分变成

$$\int_C x^2 dl = \int_0^{2\pi} a^3 \left(\frac{\cos t}{2} + \frac{\sin t}{6} \right)^2 dt = \frac{2}{3} a^3. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 这里三种做法都有一定的综合性和技巧.但从计算曲线积分的概念角度分析,都是基本内容,所用技巧与综合知识则是线性代数与几何方面的内容.

综例 23.5.3 求 $\int_C \frac{1}{x^3} \ln \frac{1}{r} dx - \frac{1}{y^3} \ln \frac{1}{r} dy$, 其中 $r =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$, C 为任一条不过原点的闭曲线,取逆时针方向.

【解】 先将导数求出来.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{r} &= -\frac{1}{x} (\ln r) = -\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{x} \\ &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^2}, \\ \frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{r} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{r^2} = -\frac{r^2 - 2x^2}{r^4}. \end{aligned}$$

利用 x 与 y 的对称性,可得

$$\frac{1}{y^2} \ln \frac{1}{r} = -\frac{r^2 - 2y^2}{r^4}.$$

由此可知

$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{y^2} \ln \frac{1}{r} = -\frac{2r^2 - 2(x^2 + y^2)}{r^4} = 0,$$

或者写成 $\frac{1}{r^2} \ln \frac{1}{r} = 0$. 这是一个有用的结果,即函数 $\ln \frac{1}{r}$ 满足 $\Delta f = 0$, 它是调和函数.

进一步检验可积性条件.令

$$X = \frac{1}{x^3} \ln \frac{1}{r}, \quad Y = -\frac{1}{y^3} \ln \frac{1}{r},$$

由此

$$\begin{aligned} \frac{Y}{x} - \frac{X}{y} &= -\frac{4}{x y^3} \ln \frac{1}{r} - \frac{4}{y x^3} \ln \frac{1}{r} \\ &= -\frac{2}{x y} \frac{2}{y^2} \ln \frac{1}{r} + \frac{2}{x^2} \ln \frac{1}{r} \\ &= -\frac{2}{x y} \ln \frac{1}{r} = 0. \end{aligned}$$

由此可知:当 C 为任一条不包含原点的闭曲线时,则有

$$\int_C X dx + Y dy = 0.$$

当 C 为包围原点的闭曲线时,取 C_0 为单位圆且取正向,则有

$$\int_C X dx + Y dy = \int_{C_0} X dx + Y dy.$$

由于

$$\begin{aligned} X &= \frac{3}{x^3} \ln \frac{1}{r} = \frac{1}{r^6} (8x^2 - 2r^2 x - 4r^2), \\ Y &= -\frac{3}{y^3} \ln \frac{1}{r} = \frac{-1}{r^6} (8y^2 - 2r^2 y - 4r^2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C X dx + Y dy &= \int_{x^2+y^2=1} X dx + Y dy \\ &= \int_{C_0} (8x^2 - 2x - 4) dx - (8y^2 - 2y - 4) dy \\ &= \int_{x^2+y^2=1} (0 + 0) d = 0. \end{aligned}$$

可见,对于任何不过原点的闭曲线,均有

$$\int_C \frac{3}{x^3} \ln \frac{1}{r} dx - \frac{3}{y^3} \ln \frac{1}{r} dy = 0. \quad \text{【解毕】}$$

【注】 本题亦可以求其原函数 $u(x, y)$.

首先用曲线积分求原函数.选路径由 $A(0, 1)$ 经 $B(x, 1)$ 至 $P(x, y)$, 即

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{ABP} X dx + Y dy \\
 &= \int_0^x \frac{3}{x^3} \ln \frac{1}{r} \Big|_{y=1} dx - \int_1^y \frac{3}{y^3} \ln \frac{1}{r} dy \\
 &= \frac{2}{x^2} \ln \frac{1}{r} \Big|_{(0,1)}^{(x,1)} - \frac{2}{y^2} \ln \frac{1}{r} \Big|_{(x,1)}^{(x,y)} \\
 &= - \frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \Big|_{(0,1)}^{(x,1)} + \frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \Big|_{(x,1)}^{(x,y)} \\
 &= - \frac{y^2 - x^2}{r^4} \Big|_{(0,1)}^{(x,y)} = - \frac{y^2 - x^2}{r^4} + 1.
 \end{aligned}$$

另外,亦可用凑微分的方法.因为

$$\frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = \frac{1}{y} \ln \frac{1}{r};$$

$$\frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} = -\frac{1}{x} \ln \frac{1}{r}.$$

由此有

$$\begin{aligned}
 &X dx + Y dy \\
 &= \frac{2}{x^2} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{r} dx - \frac{2}{y^2} \frac{1}{y} \ln \frac{1}{r} dy \\
 &= -\frac{2}{x^2} \frac{1}{y} \arctan \frac{y}{x} dx - \frac{2}{y^2} \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} dy \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x y} \arctan \frac{y}{x} dx + \frac{1}{y} - \frac{2}{x y} \arctan \frac{y}{x} dy \\
 &= d \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x y} \arctan \frac{y}{x} \right).
 \end{aligned}$$

即有原函数

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{y^2}{x} \arctan \frac{y}{x} \\ &= -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

这与前面的结果是一致的.

综例 23.5.4 若 $X(x, y), Y(x, y)$ 在区域 D 中连续, 证明以下估计的正确性: 对 D 中任何曲线 L 有

$$\left| \int_L X dx + Y dy \right| \leq lM.$$

式中, l 是积分路径 L 的长度, $M = \max_{(x, y) \in L} X^2 + Y^2$.

【证】 由于结果中涉及到 L 的弧长, 因此应该将其与第一型曲线积分联系起来, 为此, 令

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j},$$

及 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = \tau dl$,

其中 τ 是曲线 L 的单位切线, 且可设

$$\tau = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j},$$

分别是 τ 与 x 轴、 y 轴的夹角.

这样

$$\int_L X dx + Y dy = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{F} \cdot \tau) dl.$$

从而

$$\begin{aligned} \left| \int_L X dx + Y dy \right| &\leq \int_L |\mathbf{F} \cdot \tau| dl \\ &\leq \int_L |\mathbf{F}| |\tau| dl = \int_L |\mathbf{F}| dl \\ &\leq M \int_L dl = Ml. \end{aligned}$$

其中 $|\mathbf{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $M = \max_{(x, y) \in L} |\mathbf{F}|$. **【证毕】**

【注】 (1) 利用这个结果, 可以用来估计某些计算不出来的曲线积

分.例如,估计

$$J_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2 + xy)^2}.$$

因为

$$X^2 + Y^2 = \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2 + xy)^4},$$

先求

$$\max_{x^2+y^2=R^2} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + xy)^4} = \max_{x^2+y^2=R^2} \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4}.$$

可以换成求

$$\min_{x^2+y^2=R^2} (R^2 + xy)^4.$$

利用求条件极值的方法,可知当 $x = -y = \frac{R}{2}$ 时, $(R^2 + xy)^4$ 取到

最小值,即

$$\min_{x^2+y^2=R^2} (R^2 + xy)^4 = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^8}{16}.$$

从而有

$$M^2 = \max_{x^2+y^2=R^2} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + xy)^4} = \frac{16}{R^6}.$$

利用上面的估计公式得

$$|J_R| = \int_{x^2+y^2=R^2} \left| \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2 + xy)^2} \right| = \frac{4}{R^3} \cdot 2R = \frac{8}{R^2}.$$

(2) 对于函数 $\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + xy)^4}$ 在 $x^2 + y^2 = R^2$ 上最大值的计

算,亦可以利用不等式来估计.

$$\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + xy)^4} = \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4} = \frac{R^2}{(R^2 - |xy|)^4} = \frac{R^2}{R^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{R^2}{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R^2}{\frac{R^2}{2}} = 2.$$

$$= \frac{R^2}{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{16}{R^6}.$$

(3) 显然本题结果可以推广到空间的曲线积分, 即

$$\left| \int_L X dx + Y dy + Z dz \right| \leq Ml,$$

其中 $M = \max_{(x, y, z) \in L} (X^2 + Y^2 + Z^2)$, l 是曲线 L 的弧长.

综例 23.5.5 若 $X(x, y), Y(x, y)$ 在单连通区域 D 上连续可导, 且对任何属于 D 的圆周 C , 其线积分

$$\int_C X dx + Y dy = 0.$$

证明, 对任何 D 中闭曲线 C , 都有 $\int_C X dx + Y dy = 0$.

【证】 从条件与结果分析, 此积分应满足可积性条件, 即 $\frac{Y}{x} = \frac{X}{y}$. 首先我们来证明这一论断. 为此, 设 $P(x, y)$ 为区域 D 内任一点, 今断言 $\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} = 0$. 如若不然, 今有 D 内一点 $P_0(x_0, y_0)$, 使得

$$\left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right)_{(x_0, y_0)} > 0.$$

不失一般性, 设 $\left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right)_{(x_0, y_0)} > 0$.

由 $\frac{X}{y}$ 及 $\frac{Y}{x}$ 的连续性可知, 存在以 P_0 为圆心, 半径为 r 的圆域 C_r , 在其中 $\left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) > 0$. 从而

$$\begin{aligned} \int_{C_r} X dx + Y dy &= \int_{D_r} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) dx dy \\ &= \int_{D_r} \left(\frac{Y}{x} - \frac{X}{y} \right) dx dy > 0. \end{aligned}$$

与假设矛盾. 可见必有 $\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}$ 在 D 内成立.

再由于 D 是单连通域, 由曲线积分与路径无关的充要条件可知, 对 D 中任意闭路径 C , 均有

$$\int_C Xdx + Ydy = 0. \quad \text{【证毕】}$$

综例 23.5.6 设 $I = \int_L \frac{ydx - xdy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$, ($B^2 - AC < 0$). 其中 L 为不过原点的闭曲线, 取逆时针为正向, 试求 I .

【解】 要计算一般闭路径上的曲线积分, 最好计算一下 $\frac{Y}{x} - \frac{X}{y}$ 之值, 看利用格林公式是否会简单一些.

首先

$$\begin{aligned} & \frac{y}{y(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)} \\ &= \frac{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) - y(2Bx + 2Cy)}{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2} \\ &= \frac{Ax^2 - Cy^2}{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2}; \\ & \frac{-x}{x(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)} = -\frac{Cy^2 - Ax^2}{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2}. \end{aligned}$$

此积分满足可积性条件 $\frac{Y}{x} = \frac{X}{y}$.

因此, 对于任何不包围原点 $(0, 0)$ 的闭曲线其积分 $I = 0$.

而对于任何包围原点 $(0, 0)$ 的闭曲线, 其积分 $I = \int_L Xdx + Ydy$ 是一常数, 为计算简单计, 今取特殊闭路径 $L_0: Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$. 由于有 $B^2 - AC < 0$, 显然 L_0 是以 $(0, 0)$ 为中心的一个椭

圆. 这样

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_0} \frac{y dx - x dy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \int_{L_0} \frac{y dx - x dy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1} \\ &= \int_{L_0} \frac{y dx - x dy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1} = -2d \\ &= -2S(L_0). \end{aligned}$$

$S(L_0)$ 是由椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 所围之面积, 此面积的计算有多种方法. 下面利用代数中化二次型为标准型的结果, 来计算该椭圆的长、短半轴, 从而求出其面积.

由于 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 由特征值与

特征向量, 可知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

同时 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, 通过两单位化正交特征向量的变换, 可得

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1.$$

此处 λ_1, λ_2 为矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 的特征值. 这里进行的是旋转变换, 两

个半轴是 $\frac{1}{\lambda_1}$ 和 $\frac{1}{\lambda_2}$. 而由特征值的性质可知

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0.$$

椭圆 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 1$ 的面积 $S = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{1}{AC - B^2}$. 在正交变

换下, 图形面积不变, 它也就是 $S(L_0)$, 所以

$$\int_{L_0} \frac{y dx - x dy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{-2}{AC - B^2}.$$

综合起来得

$$\frac{\int_L ydx - xdy}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } C \text{ 不包围}(0,0) \text{ 点;} \\ \frac{-2}{AC - B^2}, & \text{当 } C \text{ 包围}(0,0) \text{ 点.} \end{cases}$$

【解毕】

综例 23.5.7 计算积分

$$J = \int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$$

其中 L 为由 $A(a, 0)$ 至 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

【解】 该题若直接通过将 L 表成参数方程计算, 会变得比较复杂. 下面利用部分全微分以及格林公式两种方法求解.

(方法 1) 利用部分全微分处理: 由于

$$\begin{aligned} & (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy \\ &= \sin y e^x + e^x d \sin y - my dx - m dy \\ &= d(e^x \sin y) - m dy - my dx, \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned} J &= \int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy \\ &= \int_{A(a,0)}^{O(0,0)} d(e^x \sin y - my) - m \int_{x^2+y^2=ax} y dx \\ &= (e^x \sin y - my) \Big|_{(a,0)}^{(0,0)} - m \int_a^0 y(x) dx \\ &= m \int_0^a y(x) dx = \frac{1}{2} m \cdot \frac{a}{2} = \frac{m}{8} a^2. \end{aligned}$$

这里 $\int_0^a y(x) dx$ 正是以 $\frac{a}{2}$ 为半径的半圆面积.

(方法 2) 为利用格林公式, 补上 O 到 A 的直线段, 由于

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0,$$

从而

$$\int_{L+OA} = \int_L + \int_{OA} = \int_L.$$

这样

$$\begin{aligned} \int_L &= \int_{L+OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\ &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{x^2+y^2} md = \frac{ma^2}{8}. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 本题是计算曲线积分的典型方法, 对该题还可以作以下推广:

$$J = \int_L [(y) e^x - my] dx + [(y) e^x - m] dy$$

式中 (y) 为导数连续的函数, L 为从点 $A(x_1, y_1)$ 到点 $B(x_2, y_2)$ 的任一路径.

由于

$$\begin{aligned} & [(y) e^x - my] dx + [(y) e^x - m] dy \\ &= (y) de^x + e^x d(y) - mdy - mydx \\ &= d((y) e^x - my) - mydx. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} J &= \int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} d((y) e^x - my) - \int_{L_{AB}} mydx \\ &= e^x (y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} - my \Big|_{y_1}^{y_2} - m \int_{x_1}^{x_2} y dx \\ &= e^{x_2} (y_2) - e^{x_1} (y_1) - m(y_2 - y_1) - mS(L_{AB}), \end{aligned}$$

其中 $S(L_{AB})$ 是在区间 $[x_1, x_2]$ 上曲线 L 与所夹之代数面积. 如果利用格林公式, 则有

$$L_{AB} = L_{AB+BA} - L_{BA} = \int_D m dx dy - \int_{AB} .$$

综例 23.5.8 设 $f(x)$ 二阶连续可导, 且满足条件:

$$(i) f(1) = f'(1) = 1 .$$

$$(ii) \int_C \left(\frac{y^2}{x} + xf' \left(\frac{y}{x} \right) dx + y - xf' \left(\frac{y}{x} \right) dy \right) = 0 \text{ 对任何不}$$

与 y 轴相交的封闭曲线 C 成立 .

求 $f(x) = ?$

【解】 这是一道微分方程与曲线积分综合的题目. 首先, 利用可积

性条件 $\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}$, 推出

$$\frac{1}{y} \frac{y^2}{x} + xf' \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} y - xf' \left(\frac{y}{x} \right) ,$$

即

$$\frac{2y}{x} + f' \left(\frac{y}{x} \right) = -f' \left(\frac{y}{x} \right) + xf' \left(\frac{y}{x} \right) \cdot \frac{y}{x^2} .$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则得微分方程初始值问题

$$uf'(u) - 2f'(u) = 2u ,$$

$$f(1) = f'(1) = 1 .$$

这是高阶可降阶方程, 令 $p(u) = f'(u)$, 则

$$p(u) - \frac{2}{u}p(u) = 2 ,$$

$$p(1) = 1 .$$

将方程两边同乘 $\frac{1}{u^2}$, 得 $\frac{p}{u^2} = \frac{2}{u^2}$,

$$\int_1^u \frac{p}{u^2} du = \int_1^u \frac{2}{u^2} du ,$$

$$\frac{p}{u^2} - 1 = \frac{2}{u} \Big|_u^1 = 2 - \frac{2}{u},$$

$$f(u) = p = 3u^2 - 2u,$$

$$f(u) - 1 = \int_1^u (3u^2 - 2u) du = u^3 - u^2,$$

即

$$f(u) = u^3 - u^2 + 1.$$

可以求出其原函数, 取积分路径 $(1, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,0)} \frac{y^2}{x} + x \frac{y^3}{x^3} - x \frac{y^2}{x^2} + x \, dx \\ &\quad + \int_{(x,0)}^{(x,y)} y - x \cdot 3 \frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \, dy \\ u(x, y) &= \int_1^x x dx + \int_0^y y - 3 \frac{y^2}{x} - 2y \, dy \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} y^3 \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{x} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【解毕】

第 24 章 第一、二型曲面积分

24.1 引言

曲面积分与曲线积分一样也分为第一型(对曲面)的曲面积分与第二型(对坐标)的曲面积分.最主要内容是两类曲面积分的计算以及高斯公式和斯托克斯公式的运用.

理解曲面积分在概念上没多大困难,因为仍是和式的极限,而在计算上却比较复杂.掌握好曲面积分计算的关键在于掌握好面微分向量的多种表示形式.

这部分内容一般综合性强,计算相对比较复杂,学习时注意这一特点.

24.2 曲面积分的概念与计算

1. 空间曲面的面微分向量的表示

在曲面积分中,我们总是考虑光滑的、或逐片光滑的具有双、侧的曲面.因此可以认为曲面上每点都有法线方向,而且法线方向在曲面上连续变化并指向同一侧.这样,我们可以把这样的空间曲面的一侧定为正向,这种确定有正向的曲面称为有向曲面,这种定向方法与空间曲线用其切线向量确定方向是类似的.

对于有向曲面 S 上一点 P ,以该点切平面上的微小面积作为该曲面的面微分元素,记成 dS ,若加上该点切平面之法线方向,就构成了空间曲面的面微分向量, $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$,其大小为面微分元面积 dS ,而方向为该点曲面指向正侧的单位法线向量 \mathbf{n} .

这样一来,只要给定了曲面的具体表达式,面微分元素 dS 与面微分向量就可以用给定的曲面函数关系表示出来.

通常我们将面微分向量写成向量的投影形式

$$d\mathbf{S} = dy \, dz \, \mathbf{i} + dz \, dx \, \mathbf{j} + dx \, dy \, \mathbf{k}. \quad (24.1)$$

这里 $dy \, dz, dz \, dx$ 和 $dx \, dy$ 表示面微分向量 $d\mathbf{S}$ 分别在坐标平面 yOz, zOx 及 xOy 上的投影,这种量是有正负的.这里用记号 $dy \, dz, dz \, dx$ 及 $dx \, dy$,而不用 $dydz, dzdx$ 及 $dx dy$ 是为了区别于二重积分的记号.

另一方面,由 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$,其中 \mathbf{n} 是曲面的单位法线向量

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \, \mathbf{i} + \cos \beta \, \mathbf{j} + \cos \gamma \, \mathbf{k}. \quad (24.2)$$

有

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = dS \cdot \cos \alpha \, \mathbf{i} + dS \cdot \cos \beta \, \mathbf{j} + dS \cdot \cos \gamma \, \mathbf{k}. \quad (24.3)$$

比较(24.1)与(24.3)可知

$$\begin{aligned} (d\mathbf{S})_{yOz} = dy \, dz &= dS \cdot \cos \alpha, \\ (d\mathbf{S})_{zOx} = dz \, dx &= dS \cdot \cos \beta, \\ (d\mathbf{S})_{xOy} = dx \, dy &= dS \cdot \cos \gamma, \end{aligned} \quad (24.4)$$

如果给定曲面用显式表示, $z = f(x, y)$, 则有

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{k}.$$

从而

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{k}}{\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{k}}, \quad \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

由(24.4)可得,面微分向量

$$d\mathbf{S} = \frac{dS}{\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \mathbf{k}} \left(\frac{-f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} dy \, dz \, \mathbf{i} + \frac{-f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} dz \, dx \, \mathbf{j} + dx \, dy \, \mathbf{k} \right)$$

$$+ \frac{f}{y} dz \quad dx \mathbf{j} - dx \quad dy \mathbf{k}, \quad (24.5)$$

面微分元素

$$dS = \left| \frac{dx \quad dy}{\cos} \right| = \frac{f^2}{x} + \frac{f^2}{y} + 1 dx dy. \quad (24.6)$$

如果给定曲面用隐函数表示为 $F(x, y, z) = 0$, 则其法线向量为

$$\mathbf{n} = \frac{F}{x} \mathbf{i} + \frac{F}{y} \mathbf{j} + \frac{F}{z} \mathbf{k},$$

从而

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{F}{x} \mathbf{i} + \frac{F}{y} \mathbf{j} + \frac{F}{z} \mathbf{k}}{\frac{F^2}{x} + \frac{F^2}{y} + \frac{F^2}{z}},$$

$$\cos = \frac{\frac{F}{z}}{\frac{F^2}{x} + \frac{F^2}{y} + \frac{F^2}{z}}.$$

因此得面微分向量

$$d\mathbf{S} = \frac{dS}{\frac{F^2}{x} + \frac{F^2}{y} + \frac{F^2}{z}} \frac{F}{x} dy \quad dz \mathbf{i}$$

$$+ \frac{F}{y} dz \quad dx \mathbf{j} + \frac{F}{z} dx \quad dy \mathbf{k}, \quad (24.7)$$

$$dS = \left| \frac{dx \quad dy}{\cos} \right|$$

$$= \frac{\frac{F^2}{x} + \frac{F^2}{y} + \frac{F^2}{z}}{\left| \frac{F}{z} \right|} dx dy. \quad (24.8)$$

例 24.2.1 锥面 $z = k \sqrt{x^2 + y^2}$ ($k > 0$), 求面微分向量表达式.

【解】 由于有

$$\frac{-z}{x} = k \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{-z}{y} = k \frac{y}{x^2 + y^2},$$

若取锥面外侧为正向, 此时, 法线方向 \mathbf{n} 与 z 轴总成钝角, 因此 \mathbf{n} 在 z 轴上投影总为负, 这样, \mathbf{n} 应表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{-z}{x} \mathbf{i} + \frac{-z}{y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ &= \frac{kx}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{ky}{x^2 + y^2} \mathbf{j} - \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$d\mathbf{S} = \frac{dS}{1 + k^2} (kx dy \quad dz \mathbf{i} + ky dz \quad dx \mathbf{j} - dx \quad dy \mathbf{k}),$$

$$dS = \sqrt{1 + k^2} dx dy.$$

若锥面用隐式表示成 $z^2 - k^2(x^2 + y^2) = 0$, 并规定包含 z 轴的部分为内侧, 并设外侧为正向. 此时

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{F}{x} \mathbf{i} + \frac{F}{y} \mathbf{j} + \frac{F}{z} \mathbf{k} \\ &= k^2 x \mathbf{i} + k^2 y \mathbf{j} - z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

因为, 当 $z > 0$ 时, 外侧的法线方向 \mathbf{n} 在 z 轴上投影为负, 即为 $-z$; 而当 $z < 0$ 时, \mathbf{n} 在 z 轴上投影为正, 也是 $-z$. 从而有

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \frac{dS}{k^4(x^2 + y^2) + z^2} (kx dy \quad dz \mathbf{i} \\ &\quad + ky dz \quad dx \mathbf{j} - z dx \quad dy \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{k^2 + 1/|z|} (kx dy \quad dz \mathbf{i} \\ &\quad + ky dz \quad dx \mathbf{j} - z dx \quad dy \mathbf{k}), \\ dS &= \sqrt{k^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

【解毕】

例 24.2.2 平面 $ax + by + cz = d$, a, b, c 不全为 0. 求面微分向量表达式.

【解】 由于法线方向可表示成

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

若 $c > 0$, 且规定法线正方向为与 z 轴成锐角, 此时

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{sgn} c}{a^2 + b^2 + c^2} (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + |c|\mathbf{k}),$$

$$d\mathbf{S} = \frac{\operatorname{sgn} c}{a^2 + b^2 + c^2} (a dy dz \mathbf{i} + b dz dx \mathbf{j} + |c| dx dy \mathbf{k}),$$

$$dS = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{|c|} dx dy.$$

这里 $\operatorname{sgn} c$ 是符号函数.

【解毕】

例 24.2.3 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, ($r > 0$) 且规定外侧为曲面的正向, 求面微分向量表达式.

【解】
$$\mathbf{n} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

若令 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 则 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$, 于是

$$\mathbf{n} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k} = \frac{1}{r}\mathbf{r} = \mathbf{n}_0.$$

这样

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x dy dz \mathbf{i} + y dz dx \mathbf{j} + z dx dy \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{r} (x dy dz \mathbf{i} + y dz dx \mathbf{j} + z dx dy \mathbf{k}) \\ &= \cos \alpha \cdot dy dz \mathbf{i} + \cos \beta \cdot dz dx \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot dx dy \mathbf{k} \\ &= \mathbf{n}_0 dS. \end{aligned}$$

这是因为, 在球面上 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的方向余弦有

$$\frac{x}{r} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{r} = \cos \beta, \quad \frac{z}{r} = \cos \gamma.$$

关系式

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{1}{r} \mathbf{r} dS$$

在球面上的曲面积分计算中,有时很有用.

由此可得面微分元素

$$dS = \frac{r}{|z|} dx dy.$$

对于球面上的面微分元素,当球面方程用参数方程表示时,即

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

此处 $r > 0$ 是常数, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. dS 有比较简单的表示,即

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

这种球面的面微分元素,在对球面的曲面积分中有时可大大简化计算. 【解毕】

2. 两类空间曲面积分的定义和性质

设函数 $u = f(x, y, z)$ 定义在一空间曲面 S 上.

第一型曲面积分是对曲面的积分和式的极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i = \int_S f(x, y, z) dS.$$

S_i 是对曲面 S 作任意分划的典型面积元素, (x_i, y_i, z_i) 是 S_i 上的一个点, S_i 也表示该面积元素的面积,注意 $S_i > 0$.

对第一型曲面积分的定义及性质只强调以下几点:

第一,被积函数 $f(x, y, z)$ 取值于给定的空间曲面上,因此实际上它是二元函数;另外面积元素 dS 是非负的;

第二,曲面积分对区域的可加性是很重要的;

第三,第一型曲面积分的不等式性质也成立,特别是有

$$\left| \int_S f(x, y, z) dS \right| \leq \int_S |f(x, y, z)| dS,$$

若在 S 上成立 $m \leq f(x, y, z) \leq M$, m 则有

$$mS \leq \iint_S f(x, y, z) dS \leq MS$$

其中 $S = \iint_S dS$ 是曲面 S 的面积.

第二型曲面积分是对坐标投影的积分和式的极限, 此时首先要要求 S 是定向的空间曲面, 具体来说

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta \sigma_{xy} = \iint_S f(x, y, z) dx dy,$$

这里 $\Delta \sigma_{xy}$ 是将有向曲面 S 任意分划成 n 有向面微元在 xOy 平面的投影, 这是有正负的值, 符号的正负取决于有向面微元的正法向与 x 轴夹角 α 是小于还是大于 $\frac{\pi}{2}$.

关于第二型曲面积分的定义作以下几点说明:

第一, 被积函数 $f(x, y, z)$ 取值于曲面 S 上, 因此实际上是二元函数, 这与第一型曲面积分一样; 但不同的是 $dx dy$ 是有向面微分向量 $d\mathbf{S}$ 在 xOy 坐标平面上的投影, 这是有正负的.

第二, 第二型曲面积分的实际背景是物理上通量的概念. 例如, 有一流速场, 设流速向量函数 $\mathbf{v} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$, 则通过曲面 S 的指定方向的流量就是

$$Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy).$$

第三, 对第二型曲面积分, 对区域的可加性仍然是十分重要的性质.

第四, 在目前大多数教材中, $dx dy, dy dz$ 和 $dz dx$ 也记成 $dx dy, dy dz$ 和 $dz dx$, 它们与二重积分面积元的区分, 就靠题意中是曲面积分还是二重积分而定。

3. 两型曲面积分的计算

曲面积分的计算与曲线积分类似, 首先是曲面及其面微分元素

或面微分向量的表示, 然后是化成二重积分求值. 具体来说如下:

若曲面 S 由 $z = f(x, y)$ 表示, 则通过“三变换”可化成二重积分.

首先, 对于第一型曲面积分 $\int_S f(x, y, z) dS$; 通过一变被积函数为 $f(x, y, z(x, y))$ (因为被积函数取值于曲面 S 上); 二变面微分元 $dS = \frac{dx dy}{|\cos r|}$; 三变曲面域 S 为在 xOy 坐标面上的投影域 D_{xy} , 即

$$\int_S f(x, y, z) dS = \int_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{\frac{f_x^2}{x^2} + \frac{f_y^2}{y^2} + 1} dx dy.$$

对于第二型曲面积分, 在计算中的“三变换”与前面不同的是“二变”面微分投影元 $dx dy$ 为二重积分的面微元 $dx dy$, 具体来说是, 当有向面的指定正向的法向量与坐标面 xOy 法向 \mathbf{k} 成锐角时, 取 $dx dy = dx dy$, 否则取 $dx dy = -dx dy$. 因此有

$$\int_S f(x, y, z) dx dy = \int_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) (\pm dx dy).$$

例 24.2.4 计算 $J = \int_S (x + y + 2z)^2 dS$, 其中

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (a > 0), \\ z \geq 0. \end{cases}$$

【解】 首先利用曲面 S 的表达式简化被积函数

$$J = \int_S (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4zx) dS.$$

显然有

$$\int_S xy dS = \int_S yz dS = \int_S zx dS = 0.$$

这是因为曲面 S 是关于 xOy 平面及 yOz 平面对称, 而被积函数是 x 或 y 的奇函数. 再利用在曲面 S 上有关系 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,

可将积分化成

$$J = \int_S (a^2 + 3z^2) dS.$$

下面用几种方法进行求解.

(方法 1) 将曲面表示成 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{-x}{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \frac{z}{y} = \frac{-y}{a^2 - x^2 - y^2}, \\ dS &= \frac{dx dy}{|\cos \theta|} = \sqrt{\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1} dx dy \\ &= \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_S z^2 dS &= \int_{x^2+y^2 \leq a^2} (a^2 - x^2 - y^2) \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ &= a \int_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{2}{3} a^4. \end{aligned}$$

上式最后结果是根据二重积分几何意义得到的, 因为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 是一个上半球面方程. 这样一来

$$\begin{aligned} J &= \int_S (a^2 + 3z^2) dS = \int_S a^2 dS + 3 \int_S z^2 dS \\ &= 2a^4 + 3 \cdot \frac{2}{3} a^4 = 4a^4. \end{aligned}$$

以下各种方法, 只计算 $\int_S z^2 dS$.

(方法 2) 若曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

$$dS = \frac{dx dy}{|\cos \theta|} = \frac{a}{|z|} dx dy.$$

于是有

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{z^2}{z} \cdot \frac{a}{z} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} az dz \\ &= \frac{2}{3} a^4. \end{aligned}$$

后一结果亦是利用二重积分几何意义求得的.

(方法 3) 由于 S 是球面, 可以利用球面坐标系下的面微分元, 即

$$\begin{aligned} x &= a \sin \theta \cos \varphi, \\ S: y &= a \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= a \cos \theta. \\ dS &= a^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} a^4. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 24.2.5 计算 $I = \iint_S (x + y + 2z)^2 dx dy$ 和 $I = \iint_S (x + y + 2z)^2 dy dz$. 其中

$$\begin{aligned} S: x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \quad (a > 0), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

取球的外侧为正向.

【解】 与例 24.2.4 类似, 首先化简被积函数为:

$$I = \iint_S (a^2 + 3z^2) dx dy,$$

$$I = \iint_S (a^2 + 3z^2) dy dz.$$

$$I = \int_{x^2+y^2 \leq a^2} [a^2 + 3(a^2 - x^2 - y^2)] dx dy,$$

这里 $dx dy = dx dy$ 是因为上半球外法线方向与 z 轴夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 这样一来

$$\begin{aligned} I &= 4a^2 \int_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy - 3 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} 3z dz dy \\ &= 4a^4 - 3 \frac{1}{2} a^4 = \frac{5}{2} a^4. \end{aligned}$$

对于 I 的计算, 由于 S 作为 x 的函数是双值的, 因此要分成两块:

$$S_1: \begin{cases} x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, \\ z \geq 0. \end{cases} \text{ 及 } S_2: \begin{cases} x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

由于 S 取外法线方向为正方向, 因此在 S_1 面上, 外法向与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 因而有

$$dy dz = dy dz.$$

而在 S_2 上, 外法向与 x 轴夹角大于 $\frac{\pi}{2}$, 因而有

$$dy dz = -dy dz.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_1} (a^2 + 3z^2) dy dz + \int_{S_2} (a^2 + 3z^2) dy dz \\ &= \int_{z=0}^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} (a^2 + 3z^2) dy dz + \int_{z=0}^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} (a^2 + 3z^2) (-dy dz) \\ &= \int_{z=0}^a (a^2 + 3z^2) \sqrt{a^2-z^2} dz - \int_{z=0}^a (a^2 + 3z^2) \sqrt{a^2-z^2} dz = 0. \end{aligned}$$

这个结果亦可以从和式极限的定义分析出来.

【解毕】

例 24.2.6 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 求 $I = \int_S z dS$, 当取 S 外侧为正向, 求 $J = \int_S z dx dy$.

【解】 关于 I 的计算, 我们可以像在例 24.2.4 中那样有多种途径, 其结果是 $I = \int_S z dS = 0$. 另外也可以利用球面的重心公式得出这个为零的结果.

下面计算 J , 这时须将 S 分成两块: $S_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $S_2: z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 由于 S 取外法向为正, 则在 S_1 上, $dx dy = dx dy$, 在 S_2 上, $dx dy = -dx dy$. 这样一来

$$\begin{aligned} J &= \int_S z dx dy = \int_{S_1} z dx dy + \int_{S_2} z dx dy \\ &= \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &\quad + \int_{x^2+y^2 \leq R^2} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} (-dx dy) \\ &= 2 \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

其结果正是半径为 R 的球的体积, 这一点从 J 的几何意义也可以分析出来.

【解毕】

【注】 这个例题中 $\int_S z dS = 0$ 可以利用曲面 S 及被积函数的对称性而分析出来, 因为 S 关于 xOy 平面对称, 而 z 是奇函数, 由此得出结果为零. 但是对于第二型积分 $\int_S z dx dy$, 其被积函数及曲面

S 的性质没变, 但结果并不是零, 其原因是, 还有 dx dy 的正负性要考虑. 因此, 在计算第二型曲面积分时, 曲面的对称性与被积函数奇偶性的利用要特别小心, 要把面微分向量投影的因素考虑在其中.

4. 第一型曲面积分与第二型曲面积分的关系

前面强调了第一与第二型曲面积分之间的区别, 但在一些问题的研究中往往要将这两类积分进行互换, 其互换的关键在于面微分元素 dS 与面微分向量 $d\mathbf{S}$ 之间的关系. 这一点我们在 24.2 中特别给予了阐述, 其中最重要的关系是(24.7)和(24.8). 有了这种关系, 我们很容易将第二型曲线积分化成第一型曲线积分. 通常都是对向量函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

进行讨论, 对给定的曲向 S 的正方向有

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S (Xdy \quad dz + Ydz \quad dx + Zdx \quad dy) \\ &= \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S (X\cos \quad + Y\sin \quad + Z\cos \quad) dS. \end{aligned}$$

例如, 当 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 的外侧时, 由于

$$\mathbf{n} = \frac{1}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}.$$

这里 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 此时

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} dS = \int_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS \\ &= \int_S \frac{(xX + yY + zZ)}{r} dS \\ &= \frac{1}{r} \int_{x^2 + y^2 + z^2 = r^2} (xX + Yy + zZ) dS. \end{aligned}$$

利用这个关系,我们可以容易地计算

$$\begin{aligned} & \int_S (x dy + y dz + z dx + x dy) \\ &= \frac{1}{r} \int_S (y^2 + z^2 + x^2) dS = \frac{r^2}{r} \int_S dS = 4 r^3. \end{aligned}$$

在 S 是球面下,由于 $\mathbf{n} = \mathbf{r}$, 这样

$$\begin{aligned} dS &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) dS = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS) \\ &= (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}), \end{aligned}$$

因此,可以将第一型曲面积分化成第二型曲面积分,即

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) dS &= \int_S f(x, y, z) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \frac{f(x, y, z)}{r} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \frac{f(x, y, z)}{r} (x dy + y dz \\ &\quad + z dx + x dy). \end{aligned}$$

24.3 高斯公式与斯托克斯公式

1. 高斯(Gauss)公式

高斯公式建立了在封闭面上的曲面积分与三重积分之间的关系.设在区域 V 及其边界 S 上,向量函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

各分量 X, Y, Z 及其一阶偏导数都连续,则以下高斯公式成立:

$$\begin{aligned} & \int_V (X dx + Y dy + Z dz) \\ &= \int_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv. \quad (24.9) \end{aligned}$$

其中曲面 Ω 是逐片光滑的有向曲面, 其正方向为其外侧.

本公式的证明过程对理解与掌握曲面积分、重积分的概念与计算很有益处. 这里对区域 Ω 为如图 24.1 这种最简单的情形作出证明.

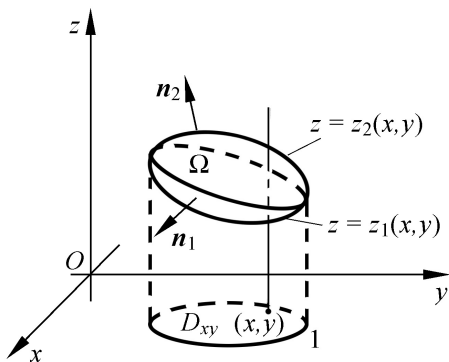


图 24.1

设

$$S_1: \begin{cases} z = z_1(x, y), \\ (x, y) \in D_{xy}. \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} z = z_2(x, y), \\ (x, y) \in D_{xy}. \end{cases}$$

D_{xy} 是区域 Ω 在 xOy 坐标面上的投影. 在 (24.9) 中若取 $X = Y = 0$, 则有

$$\iint_{\Omega} Z dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{Z}{z} dv.$$

下面证明这个结论.

我们可以从右边证到左边, 正如在证明格林公式中时所做的那样; 我们也可以从左边证到右边, 这次用这种思路. 这个证明过程是, 先将第二型曲面积分变成二重积分, 而后再由二重积分化成三重积分. 具体来说, 根据图 24.1 有

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} Z dx dy &= \iint_{S_1} Z dx dy + \iint_{S_2} Z dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} Z(x, y, z_2(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{D_{xy}} Z(x, y, z_1(x, y)) (-dx dy) \\
= & \int_{D_{xy}} [Z(x, y, z_2(x, y)) - Z(x, y, z_1(x, y))] dx dy \\
= & \int_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{Z(x, y, z)}{z} dz \\
= & \int \frac{Z}{z} dv.
\end{aligned}$$

这里用到一元的牛顿-莱布尼兹公式, 即

$$\begin{aligned}
& Z(x, y, z_2(x, y)) - Z(x, y, z_1(x, y)) \\
& = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{Z(x, y, z)}{z} dz.
\end{aligned}$$

用同样的方法, 可以证明有

$$X dy dz = \frac{X}{x} dv, \quad Y dz dx = \frac{Y}{y} dv.$$

这样就证明了高斯公式(24.9)。

例 24.3.1 求 $I = \int_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 S :

$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, 外侧为正向。

【解】 这是运用高斯公式计算曲面积分的典型问题。运用该公式, 有

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2=2ax} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

利用球坐标系, 则

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\
y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\
z &= r \cos \theta. \\
dv &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

积分区域 $: x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 变为 $0 \leq r \leq 2a \sin \theta$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \sin \theta} 3r^2 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \\ &= \frac{96}{5} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \, d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{96 \times 4}{5} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \, d\theta \\ &= \frac{96 \times 4}{5} \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{32}{5} a^5. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

2. 斯托克斯(Stokes)公式

这是将空间闭路径的曲线积分与空间曲面积分互化的公式, 设 $\mathbf{F} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ 是区域 V 中的一阶偏导数连续的向量函数, 若 S 是 V 中的有向曲面, ∂S 是其封闭的边界曲线, ∂S 与 S 的方向关系遵守右手法则: 即以右手拇指为 S 的正法线方向, 四指环绕 ∂S 的正是 ∂S 的正方向. 这时有如下的斯托克斯公式:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} X dx + Y dy + Z dz &= \int_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy \, dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz \, dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (24.10) \end{aligned}$$

我们在比较简单的曲面 S 的情况下证明以上公式, S 用 $z = z(x, y)$ 表示, 如图 24.2 所示, ∂S 是 S 的边界, L_{xy} 是 S 在 xOy 面上的投影. 像证高斯公式一样, 我们取 $Y = Z = 0$, 则(24.10)变成

$$\int_{\partial S} X dx = \int_S \left(\frac{\partial X}{\partial z} dz \, dx - \frac{\partial X}{\partial y} dx \, dy \right).$$

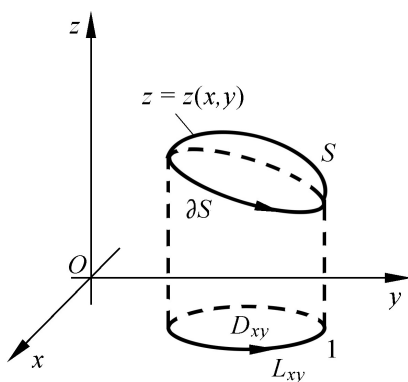


图 24.2

下面从左边到右边证明这个关系 .

首先将空间曲线积分,化成在 xOy 平面上的平面曲线积分

$$\int_S X(x, y, z) dx = \int_{L_{xy}} X(z, y, z(x, y)) dx .$$

再利用平面曲线积分的格林公式得

$$\int_{L_{xy}} X(x, y, z(x, y)) dx = \int_{D_{xy}} \left(-\frac{X}{y} + \frac{X}{z} \frac{z}{y} \right) dx dy .$$

再从二重积分化成 S 上的曲面积分 .由于在所设条件下

$$dx dy = dx \quad dy,$$

$$\frac{dz}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{\cos dS}{\cos dS} = \frac{-\frac{z}{x}}{1} = -\frac{z}{x} .$$

这是因为

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1} \left(-\frac{z}{x} \mathbf{i} - \frac{z}{y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right), \text{ 从而有}$$

$$\begin{aligned} \int_S X(x, y, z) dx &= \int_{D_{xy}} \left(-\frac{X}{y} dx dy - \frac{X}{z} \cdot \frac{z}{y} dx dy \right) \\ &= - \int_S \frac{X}{y} dx \quad dy + \int_S \frac{X}{z} dz \quad dx \end{aligned}$$

$$= \int_s \frac{X}{z} dz \quad dx - \frac{X}{y} dx \quad dy .$$

这就是要证明的结果. 同样可证

$$\int_s Y(x, y, z) dy = \int_s \frac{Y}{x} dx \quad dy - \frac{Y}{z} dy \quad dz,$$

$$\int_s Z(x, y, z) dz = \int_s \frac{Z}{y} dy \quad dz - \frac{Z}{x} dz \quad dx .$$

例 24.3.2 计算曲线积分

$$\int_C y dx + z dy + x dz .$$

式中 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$ 其取向是从 Ox 轴的正向看, 该圆依逆

时针方向进行.

【解】 该题利用斯托克斯公式比较简便, 即

$$\begin{aligned} \int_C y dx + z dy + x dz &= \int_s \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_s (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

这里 S 是以 C 为边界的任一空间曲面, 为简单计, 当然就取

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

这样 $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, 因此有

$$\begin{aligned} \int_C y dx + z dy + x dz &= - \int_s (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \frac{3}{3} \int_s dS = - 3 a^2. \quad \text{【解毕】} \end{aligned}$$

例 24 3 3 计算积分

$$I = \int_{L_{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz.$$

曲线 L_{AB} 是沿螺线

$$x = a\cos t,$$

$$y = a\sin t,$$

$$z = \frac{b}{2}t.$$

从 $A(a, 0, 0)$ 至 $B(0, 0, b)$.

【解】 此题若利用直接化成定积分计算是可行的, 不过工作量较大, 若利用斯托克斯公式则会简单一些. 为此连接直线 BA 形成封闭曲线, 这样

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &\quad - \int_{BA} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{S} + \int_0^b z^2 dz \\ &= 0 + \frac{b^3}{3} = \frac{b^3}{3}. \end{aligned}$$

【解毕】

24.4 梯度、散度、旋度与有势场**1. 梯度**

对于任一数量函数 $u = f(x, y, z)$, 通常称之为数量场, 它有梯度向量

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

前面讲过梯度与函数 u 在 $\mathbf{l} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ 方向的方向导数的关系是

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f \cdot \mathbf{l} .$$

梯度向量有两个重要性质, 其一是在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的梯度方向是函数 $u = f(x, y, z)$ 在该点增加的最快的方向, 其反方向称为最速下降方向, 因而与过该点的函数等值面垂直; 其二, 在该点梯度的模 $|\text{grad} f(P_0)|$ 是 P_0 点沿梯度方向的方向导数值.

在平面问题中, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的梯度向量是 $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$. 要注意的是这是自变量平面上的平面向量, 它与曲面 $z = f(x, y)$ 的法线向量 $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}$ 是不一样的, \mathbf{n} 是空间向量, 在如此表示的法向量下, \mathbf{n} 在 xOy 平面上的投影才是梯度向量.

为了简便和易于记忆, 通常引进所谓哈密顿算符, 或叫倒三角算符 ∇ , 其中

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

表示多元函数中的几个重要的导数运算. 用 ∇ 可将梯度向量表示成

$$\begin{aligned} \text{grad} f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} f = \nabla f . \end{aligned}$$

类似于“向量 数乘 f ”.

例如, 若 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 则 $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{r}{x} \mathbf{i} + \frac{r}{y} \mathbf{j} + \frac{r}{z} \mathbf{k} \\ &= \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} = \frac{1}{r} \mathbf{r} = \mathbf{e}_r , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{x}[f(r)]\mathbf{i} + \frac{1}{y}[f(r)]\mathbf{j} + \frac{1}{z}[f(r)]\mathbf{k} \\
 &= f(r) \frac{r}{x}\mathbf{i} + \frac{r}{y}\mathbf{j} + \frac{r}{z}\mathbf{k} \\
 &= f(r) \quad r = f(r) \frac{1}{r}\mathbf{r}, \\
 \frac{1}{r} &= \frac{-1}{r^2} \quad r = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}, \\
 &(f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)) \\
 &= \frac{(f \cdot g)}{x}\mathbf{i} + \frac{(f \cdot g)}{y}\mathbf{j} + \frac{(f \cdot g)}{z}\mathbf{k} \\
 &= (f) \cdot g + f \cdot g.
 \end{aligned}$$

例 24.4.1 若有空间曲面 $S: F(x, y, z) = 0$, 求函数 $u = u(x, y, z)$ 在 S 上 $P(x, y, z)$ 点沿该点法线方向 \mathbf{n} 的方向导数.

【解】 由于

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \frac{F}{x}\mathbf{i} + \frac{F}{y}\mathbf{j} + \frac{F}{z}\mathbf{k}, \\
 \mathbf{n} &= \frac{F}{x}\mathbf{i} + \frac{F}{y}\mathbf{j} + \frac{F}{z}\mathbf{k} \Big/ \sqrt{\frac{F^2}{x^2} + \frac{F^2}{y^2} + \frac{F^2}{z^2}}, \\
 u &= \frac{u}{x}\mathbf{i} + \frac{u}{y}\mathbf{j} + \frac{u}{z}\mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{n} &= \text{grad } u \cdot \mathbf{n} = u \cdot \mathbf{n} \\
 &= \frac{\frac{u}{x} \cdot \frac{F}{x} + \frac{u}{y} \cdot \frac{F}{y} + \frac{u}{z} \cdot \frac{F}{z}}{\frac{F^2}{x^2} + \frac{F^2}{y^2} + \frac{F^2}{z^2}}.
 \end{aligned}$$

同时还有

$$\begin{aligned}
 \int_S \frac{u}{n} dS &= \int_S (u \cdot \mathbf{n}) dS \\
 &= \int_S u \cdot (\mathbf{n} dS) = \int_S u \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \int_S \left(\frac{u}{x} dy dz + \frac{u}{y} dz dx + \frac{u}{z} dx dy \right). \quad \text{【解毕】}
 \end{aligned}$$

2. 散度

对向量函数(或称向量场)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$$

的微分运算

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

称为向量场 \mathbf{F} 的散度, 它可比作是“向量 ∇ 与向量 \mathbf{F} 的点积”

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \cdot (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}) \\
 &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

例如, 若 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 于是

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\frac{-1}{r^3} \mathbf{r} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{-1}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-z}{r^3} \right) \\
 &= - \frac{r^3 - 3r^2 \frac{x^2}{r}}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2 \frac{y^2}{r}}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2 \frac{z^2}{r}}{r^6} \\
 &= - \frac{1}{r^6} [3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)] = - \frac{1}{r^6} [3r^3 - 3r^3] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

又如,若 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 于是

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \frac{1}{r} &= \frac{-1}{r^2} \mathbf{r} = -\frac{1}{r^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}), \\ &= -\frac{1}{r^2} \mathbf{r} = -\frac{1}{r^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}), \\ &\cdot \frac{1}{r^2} \mathbf{r} = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{x}{r^2} + \frac{y}{r^2} \right) \\ &= -\frac{r^2 - 2r \frac{x^2}{r}}{r^4} - \frac{r^2 - 2r \frac{y^2}{r}}{r^4} \\ &= \frac{-1}{r^4} [2r^2 - 2(x^2 + y^2)] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (f(r)\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) \\ &= f(r) \frac{\partial}{\partial x} x + f(r) + f(r) \frac{\partial}{\partial y} y + f(r) \\ &\quad + f(r) \frac{\partial}{\partial z} z + f(r) \\ &= f(r) \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right) + 3f(r) \\ &= f(r)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + f(r)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\ &= f(r)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + 3f(r) = rf(r) + 3f(r). \end{aligned}$$

利用算符,若向量函数 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ 在空间区域 V 及其边界 S 上一阶偏导数的连续性,则高斯公式可用散度简捷地表示出来

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{F} dV = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV.$$

如果 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, S 是以 P_0 为心, R 为半径的在 V 中的球面,取外侧为正向,则可以证明

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0).$$

事实上

$$\frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{V} \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

这里 V 既表示由 S 所围的球域, 又表示其体积. 由于 X, Y, Z 偏导数连续, 从而

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z}$$

亦连续, 由三重积分中值定理, 存在 $P \in V$, 使得

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P) \int_V dV.$$

这样

$$\lim_0 \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_0 \operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0).$$

由此可知向量场 \mathbf{F} 在 P_0 点的散度 $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ 是单位体积内产生的“通量”, 以流体场来说, 这就是源强的度量. 因此一个向量场的散度反映了这个场源的分布情况.

3. 旋度

若 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ 是一阶偏导数连续的向量场, 称向量

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{i} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

为向量场 \mathbf{F} 的旋度. 它可以看作是“向量 \mathbf{i} 与向量 \mathbf{F} 的叉积”.

例如, 若 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 于是

$$\mathbf{i} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} (f (r) \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\quad}{x} & \frac{\quad}{y} & \frac{\quad}{z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} \\
 &= zf(r) \frac{y}{r} - yf(r) \frac{z}{r} \mathbf{i} \\
 &\quad + zf(r) \frac{x}{r} - xf(r) \frac{z}{r} \mathbf{j} \\
 &\quad + yf(r) \frac{x}{r} - xf(r) \frac{y}{r} \mathbf{k} = \mathbf{0} .
 \end{aligned}$$

可见所有的有心场(即可表成 $\mathbf{F} = f(r) \mathbf{r}$ 的场), 其旋度都是零.

再如, 若 $u = f(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 则

$$u = \frac{f}{x} \mathbf{i} + \frac{f}{y} \mathbf{j} + \frac{f}{z} \mathbf{k},$$

其旋度

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\text{grad } u) &= \mathbf{x} (\quad u) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\quad}{x} & \frac{\quad}{y} & \frac{\quad}{z} \\ \frac{u}{x} & \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}}{\quad} - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}}{\quad} \mathbf{i} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}}{\quad} - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}}{\quad} \mathbf{j} \\
 &\quad + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{\quad} - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}}{\quad} \mathbf{k} = \mathbf{0} .
 \end{aligned}$$

可见任何函数的梯度形成的向量场 $\mathbf{F} = \text{grad } u$, 通常称为梯度场, 其旋度一定为零.

有了旋度的概念, 可将斯托克斯公式用简捷形式表示为

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\quad \mathbf{x} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

4. 有势场

如果向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ 正好是某数量函数 $u = u(x, y, z)$ 的梯度, 即

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{F}(x, y, z).$$

或者说

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z.$$

又可以说

$$du(x, y, z) = Xdx + Ydy + Zdz,$$

则称向量场 \mathbf{F} 是有势场, 或称保守场, 而函数 $u(x, y, z)$ 称为 \mathbf{F} 的势函数.

在平面问题中, 我们已就这方面问题进行过讨论, 此处的研究方法及结论与以前的结果基本上一致. 具体来说有以下两个重要结论:

第一, 当 X, Y, Z 在区域 Ω 中连续时, 以下三个条件是相互等价的:

空间曲线积分

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

与路径 L 无关, 只与起终点有关.

对任何 Ω 中的空间闭路径 C , 均有

$$\int_C Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

向量场 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ 有势函数 $u(x, y, z)$, 且这个势函数可由曲线积分

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz$$

表示.

第二, 在 Ω 为单连通区域及 X, Y, Z 一阶偏导数连续的假设

下, 向量场 $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ 有势函数 $u(x, y, z)$ 的充要条件是 $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

例 24.4.2 向量场 $\mathbf{F} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$ 是有势场, 求其势函数.

【解】 首先, 在前面我们已有

$$\mathbf{r} \times \frac{-1}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

可见有势函数存在. 求势函数的方法常用的有曲线积分法, 即直接由

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \frac{-1}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}$$

来求势函数 u ; 另一种是用凑全微分的方法, 本题用凑全微法比较简便. 因为

$$\begin{aligned} \frac{-1}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{-1}{r^3}(xdx + ydy + zdz) \\ &= -\frac{1}{2r^3}dr^2 = -\frac{1}{r^2}dr \\ &= d\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

可见势函数为 $u(x, y, z) = \frac{1}{r} + c$.

【解毕】

【注】 由此题可推广到有心向量场.

$$\mathbf{F} = f(r) \cdot \mathbf{r}$$

是有势场, 其中 $f(r)$ 是连续函数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 这是因为

$$\begin{aligned} f(r)\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} &= f(r)(xdx + ydy + zdz) \\ &= f(r)\frac{1}{2}dr^2 = f(r)rd r. \end{aligned}$$

故有势函数

$$u(x, y, z) = \int_{r_0}^r f(r)dr.$$

24.5 综合例题

综例 24.5.1 求曲面积分

$$u(r) = \int_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + (z - r)^2}.$$

其中 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$.

【解】 根据被积函数与积分曲面的特点, 用球面坐标为好, 此时

$$x = a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$S: y = a \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = a \cos \theta.$$

$$dS = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad x^2 + y^2 + (z - r)^2 = a^2 + r^2 - 2racos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

于是

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + (z - r)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{a^2 + r^2 - 2racos \theta} \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{a^2 + r^2 - 2racos \theta} \\ &= \frac{2}{ra} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d(a^2 + r^2 - 2racos \theta)}{a^2 + r^2 - 2racos \theta} \\ &= \frac{2}{r} \int_0^{2\pi} \left. \ln |a^2 + r^2 - 2racos \theta| \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi \\ &= \frac{2}{r} \int_0^{2\pi} [(a+r) - |a-r|] d\varphi \\ &= \begin{cases} 4a, & \text{当 } r < a \text{ 时,} \\ \frac{4a^2}{r}, & \text{当 } r > a \text{ 时,} \\ 4a, & \text{当 } r = a \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 本题的物理背景是求球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 形成的引力场, 求离球心为 r 处一点的势函数 $u(r)$. 该势函数在球面及其球面内为常数 $4a$, 在球面之外, 则相当于将球壳质量集中在球心形成的引力场的势函数.

综例 24.5.2 计算积分 $g(u) = \int_{x^2+y^2+z^2=u^2} f(x, y, z) dS \quad (u > 0)$,

其中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{当 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } z < \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 时.} \end{cases}$$

【解】 本题可以在直角坐标系下计算, 也可以在球面坐标系下计算. 先在直角坐标系下求值.

由于 $S: x^2 + y^2 + z^2 = u^2$, 从而有

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\frac{F_x^2}{x^2} + \frac{F_y^2}{y^2} + \frac{F_z^2}{z^2}}}{\left| \frac{-F_z}{z} \right|} dx dy = \frac{u}{|z|} dx dy \\ &= \frac{u}{u^2 - x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

再根据被积函数的非零区域 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, 得球面 $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$ 上被积函数 $f(x, y, z)$ 的非零区域在 xOy 平面上的投影区域

D_{xy} 由曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$ 在 xOy 平面的投影所围成, 即

$$D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{u^2}{2}, \\ z = 0. \end{cases}$$

因此有

$$g(u) = \int_{x^2+y^2+z^2=u^2} f(x, y, z) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x^2+y^2 \leq \frac{u^2}{2}} (x^2 + y^2) \frac{u}{u^2 - x^2 - y^2} dx dy \\
&= \int_0^2 u \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{u^2 - r^2}{u^2 - r^2} dr \\
&= \int_0^2 u \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{u^2 - r^2}{u^2 - r^2} dr = \int_0^2 u \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{u^2 - r^2 + r^2}{u^2 - r^2} dr \\
&= \int_0^2 u^3 \int_0^{\frac{u}{2}} \frac{dr}{u^2 - r^2} - \int_0^2 u \int_0^{\frac{u}{2}} r^2 \frac{dr}{u^2 - r^2} \\
&= (2 - \frac{2}{2}) u^4 - \frac{(4 - \frac{2}{2})}{6} u^4 \\
&= \frac{(8 - 5 - 2)}{6} u^4.
\end{aligned}$$

【解毕】

综例 24.5.3 求 $\int_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z}$, 其中 $S: \frac{x^2}{a^2} +$

$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 外侧为正向.

【解】 先求

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{dx dy}{z} &= \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} c \frac{dx dy}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\
&\quad - \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} c \frac{-dx dy}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \\
&= \frac{2}{c} \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \frac{dx dy}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.
\end{aligned}$$

利用广义极坐标 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, 则 $dx dy = ab d\theta d\theta$, 于是

$$\begin{aligned} \int_S \frac{dx}{z} \frac{dy}{z} &= \frac{2ab}{c} \int_0^1 \frac{d}{1-d^2} d \\ &= \frac{4ab}{c} \left(-\frac{1}{2} \ln |1-d^2| \right) \Big|_0^1 = \frac{4ab}{c}. \end{aligned}$$

利用循环对称关系, 可知

$$\begin{aligned} \int_S \frac{dx}{y} \frac{dz}{y} &= \frac{4ac}{b}, \\ \int_S \frac{dy}{x} \frac{dz}{x} &= \frac{4bc}{a}. \end{aligned}$$

最后的结果为

$$\int_S \frac{dy}{x} \frac{dz}{x} + \int_S \frac{dz}{y} \frac{dx}{y} + \int_S \frac{dx}{z} \frac{dy}{z} = \frac{4}{abc} (b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2).$$

【解毕】

【注】 此题不能用高斯公式.

综例 24.5.4 设函数满足 $x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} + z \frac{f}{z} = n f(x, y, z)$, n 为正整数, 曲面 $S_1: f(x, y, z) = 0$ 与平面 $S_2: ax + by + cz = d$ 所围区域为 V , 取外法线作正向, 计算

$$I = \frac{1}{3} \int_V (x dy dz + y dz dx + z dx dy).$$

【解】 设 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}$, 则

$$I = \frac{1}{3} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{3} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

在曲面 S_1 上

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{r} \cdot \frac{f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} \\ &= \frac{xf_x + yf_y + zf_z}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + (f_z)^2}} = 0. \end{aligned}$$

在平面 S_2 上

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{r} \cdot \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{3} \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= 0 + \frac{d}{3(a^2 + b^2 + c^2)} \int_{S_2} dS = \frac{1}{3} H \cdot S. \end{aligned}$$

这里, H 是原点到平面 S_2 的距离, S 是曲面 S_1 在平面 S_2 上切下图形的面积.

本题用高斯公式更为简单.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_V (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \\ &= \frac{1}{3} \int_V \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} + \frac{z}{z} \right) dV \\ &= \int_V dV = \frac{1}{3} H \cdot S. \end{aligned} \quad \text{【解毕】}$$

【注】 积分 $I = \frac{1}{3} \int_V (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy)$ 可以作为计算体积的公式.

综例 24.5.5 设 $u = u(x, y, z)$ 是闭路 Γ 上的调和函数, 即函数 u 满足方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

(1) 若 $\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 求

$$I = \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS,$$

其中, \mathbf{r} 是矢径, 即 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{n} 是 dS 的法线方向.

(2) 若 Ω 是任一不包含原点作为内点的闭域, 求

$$I = \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS.$$

(3) 若 Ω 是任一包含原点作为内点的闭域, 求

$$I = \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS.$$

(4) 若 Ω 是任一包含 $P_0(a, b, c)$ 点作为内点的闭域, 求

$$I = \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS,$$

其中, \mathbf{r} 是以 P_0 为起点的矢径, 即

$\mathbf{r} = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{n} 是 dS 的法线方向, Ω 是开集.

【解】 设 $\mathbf{r} = \frac{1}{r}\mathbf{r}$, $\mathbf{n} = \frac{1}{n}\mathbf{n}$, 则有

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{n} dS) \\ &= \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{r}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{n} dS &= (\text{grad } u \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= u \cdot (\mathbf{n} dS) = u \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

(1) 若 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 则此时

$$r = R, d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\mathbf{r}}{R} dS = \frac{\mathbf{r}}{r} dS.$$

在 $I = \iint_S u \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{r} \iint_S u \cdot d\mathbf{S}$ 中, 首先

$$\begin{aligned}
& u \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = u \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS \\
& = u \frac{1}{r^3} r dS = \frac{1}{R^2} u dS, \\
& \frac{1}{r} u \cdot d\mathbf{S} \\
& = \frac{1}{R} u \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{R} \cdot (u) dv \\
& = \frac{1}{R} \int \int \int \frac{1}{r^2} u dv = 0.
\end{aligned}$$

最后

$$I = \int \int \int u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS = \frac{1}{R^2} \int \int \int u dS.$$

(2) 若 Ω 是任一不包含原点作为内点的闭域, 则对

$$I = \int \int \int u \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int \int \frac{1}{r} u \cdot d\mathbf{S}$$

可利用高斯公式.

注意

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}) &= \frac{r}{x} \mathbf{i} + \frac{r}{y} \mathbf{j} + \frac{r}{z} \mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}, \\
\frac{1}{r^3} \mathbf{r} &= \frac{1}{r^2} \mathbf{n} = \frac{1}{r^2} (\mathbf{r}) = - \frac{1}{r^3} \mathbf{r}, \\
\int \int \int \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} &= - \int \int \int \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0,
\end{aligned}$$

首先

$$\int \int \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = - \int \int \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_S u \cdot \frac{1}{r} dV \\
&= - \iint_S u \cdot \left(\frac{1}{r} + u^2 \frac{1}{r} \right) dV \\
&= - \iint_S u \cdot \frac{1}{r} dV, \\
\frac{1}{r} \iint_S u \cdot dS &= \iint_S \frac{1}{r} u dV \\
&= \frac{1}{r} \cdot \iint_S u + \frac{1}{r} \cdot \iint_S u^2 dV \\
&= \frac{1}{r} \cdot \iint_S u dV.
\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-u}{n} dS \\
&= \frac{1}{r} \cdot \iint_S u dV - \frac{1}{r} \cdot \iint_S u dV \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

(3) 若 Ω 是任一包含原点作为内点的闭域, 在 Ω 内作以原点为球心, 半径为 $r > 0$ 的球 S , 则

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-u}{n} dS \\
&= \iint_S u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-u}{n} dS \\
&\quad - \iint_{S'} u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-u}{n} dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0 + u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS \\
 &= \frac{1}{2} u dS = 4 P .
 \end{aligned}$$

其中, P

$$I = \lim_0 \frac{1}{2} u dS = P(0, 0, 0) .$$

(4) 若 Ω 是任一包含 $P_0(a, b, c)$ 点作为内点的闭域, \mathbf{r} 是以 P_0 为起点的矢径, 即

$\mathbf{r} = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, \mathbf{n} 是 dS 的法线方向. 则

$$I = \int_{\Omega} u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{n} dS = P_0(a, b, c) . \quad \text{【解毕】}$$

综例 24.5.6 若函数 $f(x, y, z)$ 在 R^3 中连续, 具有一阶连续的偏导数, 设

$$u(t) = \frac{1}{4} \int_S t f(tx, ty, tz) dS,$$

其中 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求证:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} u'(t) = 0 .$$

【证】 (1) 第一结果的证明很容易, 因为

$$u(t) = \frac{t}{4} \int_S f(tx, ty, tz) dS,$$

而 f 在 S 上有界, 从而对 $t \in [-1, 1]$ 有

$$\left| \int_S f(tx, ty, tz) dS \right| \leq M,$$

即有界, 于是

$$0 \leq |u(t)| \leq \frac{|t|}{4} M .$$

从而得

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0.$$

(2) 为证 $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = 0$, 先求出 $u(t)$.

$$u(t) = \frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) dS + \frac{t}{4} \frac{d}{dt} \int_S f(tx, ty, tz) dS.$$

先研究

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dt} \int_S f(tx, ty, tz) dS \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_S [f((t+\Delta t)x, (t+\Delta t)y, (t+\Delta t)z) \\ &\quad - f(tx, ty, tz)] dS \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_S \left[x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{t=t+\Delta t} dS \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_S \left[x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{t=t} dS. \end{aligned}$$

由于 f 的一阶偏导数连续, 在 S 上, 当 $t \in [-1, 1]$ 时, 有界, 即存在常数 A 使得 $\left| x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right| < A$, 这样就有

$$|I| = \left| \frac{d}{dt} \int_S f(tx, ty, tz) dS \right| \leq 4A,$$

从而

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{4} \frac{d}{dt} \int_S f(tx, ty, tz) dS = 0.$$

再讨论

$$J = \frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) dS.$$

由于在球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上有

$$\mathbf{n} = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$dS = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S},$$

因此

$$J = \frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

因为在 S 上, $r=1$, 这样又有

$$J = \frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

利用高斯公式得

$$J = \frac{1}{4} \int_{x^2+y^2+z^2=1} (\mathbf{r}) dV,$$

而

$$\begin{aligned} \cdot (\mathbf{r}) &= \frac{(xf)}{x} + \frac{(yf)}{y} + \frac{(zf)}{z} \\ &= x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} + z \frac{f}{z} = t + 3f, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} J &= \frac{t}{4} \int_{x^2+y^2+z^2=1} x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} + z \frac{f}{z} dV \\ &\quad + \frac{3}{4} \int_{x^2+y^2+z^2=1} f(tx, ty, tz) dV. \end{aligned}$$

这里显然有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{4} \int_{x^2+y^2+z^2=1} x \frac{f}{x} + y \frac{f}{y} + z \frac{f}{z} dV = 0.$$

另外

$$J_1 = \frac{3}{4} \int_{x^2+y^2+z^2=1} f(tx, ty, tz) dV.$$

$$u = tx,$$

在变量置换 $v = ty$, 下

$$w = tz.$$

$$dv = \frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} du dv dw = \frac{1}{t^3} du dv dw, \text{ 故}$$

$$J_1 = \frac{3}{4} \int_{u^2+v^2+w^2 \leq t^2} \frac{1}{t^3} f(u, v, w) du dv dw$$

利用三重积分中值定理, 在球 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 中存在点 $P(x, y, z)$ 使得

$$J_1 = \frac{3}{4} f(P) \cdot \frac{1}{t^3} \cdot \frac{4}{3} t^3 = f(P).$$

这样就有

$$\lim_{t \rightarrow 0} J = \lim_{t \rightarrow 0} f(P) = f(0, 0, 0),$$

即

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = f(0, 0, 0).$$

【证毕】

【注】 利用 $f(x, y, z)$ 的连续性也可以直接证明

$$\frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) dS = f(0, 0, 0).$$

也就是要证明

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_S f(tx, ty, tz) dS - f(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{4} \int_S [f(tx, ty, tz) - f(0, 0, 0)] dS \\ & \rightarrow 0. \end{aligned}$$

事实上, 由于 $f(x, y, z)$ 在 $(0, 0, 0)$ 连续, 则 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 z^2} < \delta$ 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 时

$$|f(tx, ty, tz) - f(0, 0, 0)| < \epsilon.$$

这样, 当 $|t| < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left| \int_S (f(tx, ty, tz) - f(0, 0, 0)) dS \right| \\ & \frac{1}{4} \int_S |f(tx, ty, tz) - f(0, 0, 0)| dS \\ & \overline{\int_S dS} = . \end{aligned}$$

即得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int_S (f(tx, ty, tz) - f(0, 0, 0)) dS = 0 .$$

附录 1 清华大学微积分试题与答案

清华大学微积分第一学期期中考试试题

一、单项选择题与填空题(共 30 分)

1. 设 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 为可导函数, $y = f(\varphi(x)) \cos \frac{1}{x}$, 则 $dy =$ _____ .

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有定义, 且 $x_0 \neq -2$, $f(x) = \frac{1}{(2+x_0)} \cdot (x-x_0) + o((x-x_0)^2)$ 则 $f'(x_0) =$ _____ .

3. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \ln t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____ .

4. 设 $g(x) = x(x+1)(2x+1)(3x-1)$, 则方程 $g(x) = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内实根个数恰为 _____ .

5. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, 则 _____ .

(A) $x_n < y_n$; (B) $\forall n, x_n < y_n$;

(C) $\forall N$ (自然数), 使当 $n > N$ 时, $x_n < y_n$;

(D) x_n 与 y_n 大小关系不定.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处

(A) 不连续; (B) 连续但不可导;

(C) 可导, 但导函数不连续; (D) 导函数连续.

7. 若 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x) > 0$, 且 $f(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内有_____.

(A) $f(x) > 0, f(x) < 0$; (B) $f(x) > 0, f(x) > 0$,

(C) $f(x) < 0, f(x) < 0$; (D) $f(x) < 0, f(x) > 0$.

8. 设 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$, 则_____.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值; (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

9. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1 - \cos \frac{1}{n}} - 1}{\tan(n^{-k})} = a \neq 0$, 则_____.

(A) $k = 2$ 且 $a = \frac{1}{2}$; (B) $k = -2$ 且 $a = \frac{1}{2}$;

(C) $k = 2$ 且 $a = -\frac{1}{2}$; (D) $k = -2$ 且 $a = -\frac{1}{2}$.

二、计算题(共 50 分)

1. 设曲线 $y = x^{2n}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴交点为 $(\frac{1}{n}, 0)$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 设 $f(x) = (x+1)^2 \ln(1-x)$, 求 $f^{(n)}(-1)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导, 且 $f(0) = 1, f'(0) = 2$, 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}}}.$$

5. 求函数 $f(x) = \frac{(3x^2 + 1)(e^x - 1)}{x - 1}$ 的渐近线.

三、解答题(共 20 分)

1. 设 $1 < x < 3e$, 证明不等式 $1 - (\ln 3)^2 < \ln x^2 - \ln^2 x < 1$.
2. 试证明函数 $f(t) = \frac{2}{3}t - \frac{1}{2} \sin t$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一最小值.
3. 设可导函数 $f: [a, b] \rightarrow (a, b)$, 满足条件 $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| < 1$. 证明:

(1) 函数 $g(x) = \frac{1}{2}(x + f(x))$ 在 $[a, b]$ 中有不动点, 即存在 $x^* \in [a, b]$, 使得 $x^* = g(x^*)$;

(2) 对任意给定的初值 $x_0 \in [a, b]$, 由迭代公式: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 所确定的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 $g(x)$ 的不动点.

清华大学微积分第一学期期末考试试题

一、单项选择题与填空题(共 36 分)

1. 当 p 的取值范围为_____时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x-1)^{p-1}}$ 收敛.
2. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $a > 0$, 则 $\int \frac{f(ax)}{a} dx =$ ().
 (A) $\frac{\sin ax}{a^3 x} + c$; (B) $\frac{\sin ax}{a^2 x} + c$;
 (C) $\frac{\sin ax}{ax} + c$; (D) $\frac{\sin ax}{x} + c$.
3. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ 的上凸区间为_____.
4. 设 $a_n > 0, p > 1$, 且极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n] = 1$, 则当 p 的取值范围为_____时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
5. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{\sin x} f(x-t) dt$, 则 $F'(x) =$ _____.
6. $f(x) = e^{x^2} - 1$ 在 $x = 0$ 处带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式为_____.
7. 设有底边长为 $2a$, 高为 h 的等腰三角形平板, 将其竖直放入水中, 使底边与水面重合, 水的密度为 1, 则该平板所受的水压力为_____.
8. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续且无零点, $F(x) = \int_a^x f(t) dt +$

$\int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$, 则方程 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内根的个数恰为().

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

9. 设 $f(x)$ 为已知单调可导函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,

则 $\frac{d}{dx} \int_1^{f(x)} \frac{g(t)}{t} \sin t dt = ()$.

(A) $\frac{f(x)}{x} \sin(f(x)) f'(x)$; (B) $\frac{x}{f(x)} \sin(f(x))$;

(C) $\frac{x}{f(x)} \sin(f(x)) f'(x)$; (D) $\frac{x \sin x}{f(x)} f'(x)$.

10. 已知连续曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ ($a > 0$) 对称, 则 $\int_{-c}^c f(a-x) dx = ()$, $c \in \mathbb{R}$,

$\int_{-c}^c f(a-x) dx = ()$.

(A) $2 \int_0^c f(2a-x) dx$; (B) $2 \int_{-c}^0 f(2a-x) dx$;

(C) $2 \int_0^a f(c-x) dx$; (D) 0.

11. 设曲线 L 由
$$\begin{cases} x = \int_0^t 1 + u du \\ y = \int_0^t 1 - u du \end{cases}$$
 确定, 则该曲线对应于 t

2 的弧长为_____.

12. 设 $a > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内恒有 $f(x) > 0$, 且 $|f(x)|$

x^2 , 记 $I = \int_{-a}^a f(x) dx$, 则必有().

(A) $I = 0$; (B) $I > 0$; (C) $I < 0$; (D) 不确定.

二、计算题(共 44 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{x e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$.

2. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2x dx$.

3. 设 n 为正整数, 求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \sin^{2n} x dx$.

4. 设曲线 $y = -x^2 + x + 2$ 与 y 轴交点为 P , 过 P 点作该曲线的切线, 求切线与该曲线及 x 轴围成的区域绕 x 轴旋转一周生成的旋转体体积.

三、解答题(共 20 分)

1. 设 $p \in \mathbb{R}$. 证明:

(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx \right|$ 收敛;

(2) 当 $0 < p < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x^p + 1} dx$ 收敛;

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $g(x) \in C^1[0, 1]$, $g(x) \geq 0$, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $\int_0^1 g(x) f(x) dx = 0$, 试证明:

(1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有零点; (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内可导, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有零点.

清华大学微积分第二学期期中考试试题

一、填空(每空 3 分, 共计 33 分)

1. 曲面 $z = 2x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 相平行的切平面方程为_____.

2. 设曲线方程为 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$, 则在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程为_____.

3. 设 $R > 0$, 则二重积分 $\int_{x^2+y^2 \leq R^2} (x+y)^2 d\sigma =$ _____.

三重积分 $\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x+y+z)^2 dV =$ _____.

4. 二重积分 $\int_0^2 dx \int_x^{3x} f(x^2 + y^2) dy$ 在极坐标系下先对 θ , 而后对 r 的累次积分表达式为_____.

5. 设 Ω 为由 $2z = x^2 + y^2, 3z = x^2 + y^2$ 和 $x^2 + y^2 = x$ 围成的封闭区域, f 为连续函数, $I = \int_{\Omega} f(x, y, z) dV$, 则 I 在柱坐标系下的累次积分表达式(先对 z , 后对 θ , 再对 r 积分)为_____.

6. 设 $u = x^2 + y^2 - xyz$, 在 $P_0(1, 1, 1)$ 处的梯度方向为 G , 则 $\frac{-u}{G} \Big|_{P_0} =$ _____.

7. 设 $f(x, y) = \frac{1}{|xy|}$, 则 $f_x(0, 0) =$ _____, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微性结论是_____.

8. 设函数 $z = z(x, \frac{y}{x})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

二、选择题(每小题 5 分, 共计 15 分)

1. 设函数 $z = f(x, y)$ 有 $f_x(0, 0) = -3$, $f_y(0, 0) = 1$, 则().

(A) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的全微分必是 $-3dx + dy$;

(B) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义;

(C) 极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 必存在;

(D) 曲线 $\begin{matrix} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{matrix}$ 在点 $(0, 0)$ 的一个切线矢量为 $(1, 0, -3)^T$.

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = 2$ 点收敛, 则 a 的取值范围是().

(A) $1 < a < 3$; (B) $1 < a < 3$;

(C) $2 < a < 3$; (D) $2 < a < 3$.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2 + 2)$ 的收敛性结论是().

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 与 x 有关.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展成周期 $T = 2$ 的正弦级数, 则 $S - \frac{5}{2}$ 为().

(A) 0; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $-\frac{1}{4}$; (D) 1.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和为().

(A) $2e^{-1}$; (B) $2e - 1$; (C) $2e$; (D) $2e^{-1} - 1$.

三、计算题(每小题 8 分, 共计 40 分)

1. 已知 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. 考查 $f(x, y) = e^{x^2 - y} (5 - 2x + y)$ 的局部极值.

3. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算:

$$\int_D (2xy - 1) dx dy.$$

4. 计算 $\frac{d}{dx^2 + y^2 + z^2}$, 其中

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. 求 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ 在 $x = 2$ 处的幂级数展开式, 指明收敛域.

四、证明题(12分)

1. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 + y^2)^n e^{-n(x^2 + y^2)}$$
 在 D 上的一致收敛性.

2. 设非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, a_1, a_2, \dots, a_n 为一组不全为零的实常数, 求证:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

清华大学微积分第二学期期末考试试题

一、填空题(每题 4 分,可得 1, 2, 3, 4 分,共 20 分)

1. $f(x, y)$ 连续, 交换积分顺序 $\int_{-1}^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 是位于锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 之上, 球面 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ 之下的区域, 在球坐标下 $\int f(x, y, z) dV$ 的累次积分为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $F(x, y, z)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内有二阶连续偏导数, 则 $\text{rot}(\text{grad} F) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为 $3 + x^2, e^{-x} + 3 + x^2$, 且相应齐次方程的一个解为 x , 则该非齐次方程的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 二阶常系数线性微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 有一个形如 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的特解(不必确定系数).

二、单项选择(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0$; $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则().

(A) $\int_S x dS = 4 \int_{S_1} x dS$; (B) $\int_S y dS = 4 \int_{S_1} y dS$;

(C) $\int_S z dS = 4 \int_{S_1} z dS$; (D) $\int_S xyz dS = 4 \int_{S_1} xyz dS$.

2. 设 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, r 为 \mathbf{r} 的模, 设 $S_1: r = 1$ 外侧为正, $S_2: r = \frac{1}{2}$

外侧为正, \mathbf{n} 为 S_1, S_2 外侧法线矢量. 若 $\int_{S_1} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = I$, 则

$$\int_{s_2} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^3} dS = (\quad).$$

- (A) I ; (B) $\frac{1}{2} I$; (C) $2I$; (D) 0 .

3. 设 L 是从点 $A(1, \frac{1}{2})$ 沿曲线 $2y = x^2$ 到点 $B(2, 2)$ 的弧段, 则曲线积分 $\int_L \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$ 的值等于().

- (A) -3 ; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 3 ; (D) 0 .

4. 设 C 为正向闭曲线: $|x| + |y| = 2$, $\oint_C \frac{axdy - bydx}{|x| + |y|} = (\quad).$

- (A) $4(a + b)$; (B) $8(a + b)$;
(C) $4(a - b)$; (D) $8(a - b)$.

5. 设 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧为正, 则 $\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = (\quad).$

- (A) 4 ; (B) -4 ; (C) $\frac{4}{3}$; (D) $-\frac{4}{3}$.

三、解答题(48分)

1. 求方程 $xy + y = 3$ 满足条件 $y(1) = 0, y(1) = 1$ 的解.(9分)

2. 计算曲面积分 $\int_S (2y + z) dz dx + z dx dy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.(9分)

3. 设有半径为 R , 质量为 m 的圆柱形浮筒垂直放置水中, 在重力和浮力的作用下处于平衡状态(浮筒密度小于 1, 水足够深), 重力加速度为 g , 现把浮筒向下压至顶部与水平面重合后突然放手, 已知阻力与浮筒运动速度成正比, 比例常数为 $2k > 0$.

(1) 列出浮筒运动满足的微分方程;

(2) k 满足什么条件时浮筒在水中作上下衰减振动, 求出此时

方程的通解。(10分)

4. 设 $Q(x, y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy$. 求函数 $Q(x, y)$. (10分)

5. 设 $f(x) \in C^1(0, +\infty)$, 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 满足 $\int_0^1 f(tx) dt = 2 \int_0^x f(t) dt + xf(x) + x^3$, 且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$. (10分)

四、证明题(17分)

1. 设空间一光滑曲面 S 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 S 外的一点. 证明: 若 S 上的点 Q 使得线段 P_0Q 是 P_0 与 S 上任意一点连线的最短线段, 则向量 P_0Q 必与曲面 S 在该点的切平面垂直. (8分)

2. 设 $x = x(t)$ 是微分方程定解问题 $\frac{dx}{dt} + x = 1$ 的解, $x|_{t=0} = 0$

为参数.

- (1) 写出解 $x(t)$ 的表达式;
 (2) 证明 $x(t)$ 在 t 全平面连续且可微. (9分)

清华大学微积分第一学期期中考试试题答案

一、单项选择题与填空题(共 30 分)

$$1. dy = f'(x) \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} f(x) \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$2. f(x_0) = \frac{1}{(2+x_0)}.$$

$$3. \frac{dy}{dx} = -t, \frac{d^2y}{dx^2} = t^2.$$

4. 2.

5. C.

6. C.

7. B.

8. B.

9. A.

二、计算题(共 50 分)

$$1. \lim_n \frac{1}{n} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{(2xy \ln x)} = -\frac{y}{2x \ln x}.$$

$$3. f^{(n)}(-1) = n(n-1) \frac{-(n-3)!}{2^{n-2}} = -\frac{n!}{2^{n-2}(n-2)}.$$

$$4. \lim_n f \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}} = e^4.$$

5. 函数 $f(x) = \frac{(3x^2 + 1)(e^x - 1)}{x - 1}$ 的渐近线结论:

有垂直渐近线 $x = 1$; 无水平渐近线; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 没有斜渐近线; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 有斜渐近线 $y = -3(x + 1)$.

三、解答题(共 20 分)

解答略.

清华大学微积分第一学期期末考试试题答案

一、单项选择题与填空题(共 36 分)

1. $1 < p < 2$. 2. A. 3. $(0, 1)$. 4. $p > 2$.

5. $f(x) - (1 - \cos x)f(x - \sin x)$.

6. $e^{x^2} - 1 = e^2(1 + 2^{-2})x^2$ (介于 0 与 x 之间).

7. $\frac{1}{3}ah^2$. 8. B. 9. C. 10. D. 11. 3 2. 12. B.

二、计算题(共 44 分: 12, 12, 10, 10 分)

1. $\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + c$. 2. $2^2 - 1$.

3. $\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!}$ 4. $V = \frac{29}{30}$.

三、解答题(共 20 分, 每题 10 分)

解答略.

清华大学微积分第二学期期中考试试题答案

一、填空(每空 3 分, 共计 33 分)

1. $8x + 8y + 8z + 3 = 0$.

2. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

3. 二重积分 $\int_{x^2+y^2 \leq R^2} (x+y)^2 d\sigma = \frac{1}{2}R^4$,

三重积分 $\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x+y+z)^2 dV = \frac{4}{5}R^5$.

4. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos} f(\) d\theta$.

$$5. \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^{\cos z} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} f(\cos x, \sin x, z) dz.$$

6. 3.

7. 不可微.

$$8. \frac{z}{x} = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} - \frac{z}{x^2}, \quad \frac{z^2}{x^2 y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}.$$

二、选择题(每小题 5 分, 共计 15 分)

1. D. 2. B. 3. B. 4. C. 5. C.

三、计算题(每小题 8 分, 共计 40 分)

$$1. \frac{z}{x} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{z^2}{x^2} = \frac{-z^2}{(x+z)^3} \quad (x+z \neq 0).$$

2. 驻点(1, -2), 非极值点, 无局部极值.

$$3. \frac{1}{4}(2\ln 2 + 1).$$

$$4. \frac{1}{3}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n; \text{收敛域为}(1, 3).$$

四、证明题(12 分)

证明略.

清华大学微积分第二学期期末考试试题答案

一、填空题(每题 4 分, 可得 1, 2, 3, 4 分, 共 20 分)

$$1. \int_0^{-1} dy \int_{-1}^y f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos \theta} f(\sin \theta \cos \theta, \sin \theta \sin \theta, \cos \theta)^2 d\theta$$

3. 0.

$$4. 3 + x^2 + ax + ae^{-x}.$$

$$5. Axe^x.$$

二、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

$$1. B. \quad 2. C. \quad 3. D. \quad 4. A. \quad 5. A.$$

三、解答题(48 分)

$$1. y = 3x - 2\ln x - 3.$$

$$2. -\frac{1}{2}.$$

3. 取平衡位置为 x 坐标轴原点, 则位移 x 与浮力/重力合力(恢复力)方向相反, 由牛顿定律列出方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + R^2 gx = 0.$$

当 $k < mgR$ 时方程有衰减震荡解, 一般解为

$$x(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (\alpha e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t}), \text{ 其中 } \omega = \frac{mgR^2 - k^2}{m}, \text{ 或}$$

$$x(t) = e^{-\frac{k}{m}t} (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) \quad 0 (t > 0).$$

$$4. Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

$$5. f(x) = \frac{3}{4x^2} - \frac{3x^2}{4}.$$

四、证明题(17 分)

证明略.

附录 2 常用初等函数的导数公式

$$1. (c)' = 0 \quad (c \text{ 为任意实数}).$$

$$2. (x^a)' = ax^{a-1} \quad (a \text{ 为任意实数}).$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); (e^x)' = e^x.$$

$$4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0); (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$5. (\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\tan x)' = \sec^2 x; (\cot x)' = -\csc^2 x.$$

$$7. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$8. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$9. (\sec x)' = \tan x \sec x; (\csc x)' = -\cot x \csc x.$$

附录 3 常用初等函数的积分公式

$$1. 0 \cdot dx = c.$$

$$2. 1 \cdot dx = x + c.$$

$$3. x dx = \frac{1}{+1} x^{+1} + c \quad (-1).$$

$$4. \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c.$$

$$5. a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \quad (a > 0).$$

$$6. e^x dx = e^x + c.$$

$$7. \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$8. \cos x dx = \sin x + c.$$

$$9. \sec^2 x dx = \tan x + c.$$

$$10. \csc^2 x dx = -\cot x + c.$$

$$11. \sec x dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c = \ln | \sec x + \tan x | + c.$$

$$12. \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c.$$

$$13. \frac{dx}{1 - x^2} = \arcsin x + c.$$

$$14. \quad \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$$

$$15. \quad \frac{dx}{a^2-x^2} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

$$16. \quad \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan x + c.$$

$$17. \quad \ln x dx = x \ln x - x + c.$$

$$18. \quad \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

$$19. \quad \frac{dx}{a^2+x^2} = \ln \sqrt{x + \sqrt{a^2+x^2}} + c.$$

$$20. \quad \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + c.$$

$$21. \quad \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + c.$$

$$22. \quad \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + c.$$

$$23. \quad \frac{dx}{x^2-a^2} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + c.$$

$$24. \quad \int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx.$$