激光原理与激光技术

俞宽新
江铁良　编著
赵启大

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书共分三部分：论述了光和物质相互作用的基本物理过程和速率方程理论，在此基础上分析了连续激光器的工作特性；介绍了谐振腔的几何理论与衍射理论基础，平行平面腔、对称共焦腔和一般稳定球面腔的模式特征，论述了高斯光束的传输规律；介绍了调 Q 与锁模脉冲技术，选频、选模、稳频等激光器技术。本书结构安排合理，语言精炼，论述准确，每章后附有适量习题，可供教学时选用。

本书适合于高等院校应用物理专业本科生使用，也可供从事光电子技术研究的科研人员和工程技术人员参考。

激光原理与激光技术

俞宽新　江铁良　赵启大　编著

※

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

※

1998 年 3 月第 1 版　1998 年 3 月第 1 次印刷

850mm× 1168mm　32 开本　9.375 印张　233 千字

印数：1～2000 册

ISBN 7-5639-0626-6/T · 62

定价：12.00 元

前　　言

本书根据高等工业院校应用物理专业“激光原理与激光技术”的教学大纲编写，总学时72学时，共分三部分。第一部分(第一章～第四章)讲授激光振荡理论，第二部分(第五章～第八章)讲授光学谐振腔理论，第三部分(第九章～第十一章)讲授几种激光器的腔内技术。

光与物质的相互作用是激光振荡的物理基础，第一章～第四章的重点放在阐明光和物质相互作用的基本物理过程和主要理论分析方法——速率方程理论上，在此基础上分析了连续激光器的工作特性。

光学谐振腔是激光器的重要组成部分，第五章～第八章介绍了谐振腔的几何理论与衍射理论基础，并介绍了平行平面腔、对称共焦腔和一般稳定球面腔的模式特征，讨论了高斯光束的传输规律。

脉冲技术是提高激光功率与能量的重要技术，第九章、第十章介绍了调Q与锁模两种最重要的脉冲技术。第十一章介绍了选频、选模、稳频等几种激光器技术，这些技术对提高激光的光束质量具有重要意义。

本书采用SI国际单位制，每章后附有少量习题，可供学生练习用。

本书可作为高等工业院校应用物理专业本科生“激光原理与激光技术”课程的教材，也可供从事光电子技术研究的科研人员和工程技术人员参考。

本教材第一章§1～§6、第二章～第四章、第六章～第八章

由俞宽新编写; 第九章～第十一章由江铁良编写; 第一章§ 7 及第五章由赵启大编写。

限于编者水平, 书中难免会有一些错误和不妥之处, 恳请读者不吝指正。

编　者

1997 年 1 月

目　　录

第一章　激光基本原理

本章概述激光器的基本工作原理，包括光的相干性、光的自发辐射、受激辐射与受激吸收的概念，激光器的结构、工作原理以及激光的特性等。另外，为了便于第二章～第四章的学习，本章最后一节简单介绍了有关光学谐振腔的知识，包括谐振腔模式的概念、谐振腔的损耗、无源腔本征模式线宽以及菲涅耳数等内容。

§1.1　光源相干性

激光器区别于普通光源的最重要的一条是它的良好的相干性，为了理解激光的这一本质特性，我们先来讨论有关一般光源的相干性的概念。光源相干性分时间相干性与空间相干性。

一、时间相干性

光源的时间相干性描述的是某一个空间点在不同的时刻光波场之间的相干性。用相干时间 t_c 定量描述，它定义为光传播方向上某点处，可以使得两个不同时刻的光波场之间有相干性的最大时间间隔。这个时间间隔实际上就是光源所发出的有限长波列的持续时间。可以将光传播方向上任一点的光场振动随时间变化的规律写为

$$E(t)=\begin{cases}E_0 e^{i2\pi\nu_0 t}, & 0<t<t_c\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{1-1-1}$$

式中：ν——光振动的频率。

对上式进行付里叶变换，然后再求它的模平方，便可得到此光源的光强随频率变化的函数关系即光源频谱为

$$I(\nu) = \left| F[E(t)] \right|^2$$

$$= \left| \int_0^{\tau_c} E_0 e^{i2\pi\nu_0 t} e^{-i2\pi\nu t} dt \right|^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

忽略常数比例因子后，可以算出：

$$I(\nu) = \mathrm{sinc}^2[\pi(\nu - \nu_0) t_c] \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

式中 sincx 称辛格函数，定义为 $\mathrm{sinc}x = \sin x / x$。由（1-1-3）式画

图 1-1-1　光波列频谱曲线

出的频谱曲线如图 1-1-1 所示。通常定义光强下降到最大值一半的两个频率间隔为光源的频谱线宽 $\Delta\nu$，由 sinc 函数的定义，不难求出

$$\Delta\nu = \frac{1}{t_c} \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

该式说明，光源的时间相干性实际上描述了光源的单色性能。单色性能越好，即频谱线宽越窄，光源的时间相干性就越好，相干时间越长。

二、空间相干性

光源的空间相干性描述的是某一时刻不同空间点处的光波场之间的相干性。按所研究的空间点的位置的不同，又有纵向空间相干性与横向空间相干性之分。

(一) 纵向空间相干性

光源的纵向空间相干性可以用相干长度 L_c 来描述。它定义为可以使光传播方向上两个不同点处的光波场具有相干性的最大空间间隔。这个空间间隔实际上就是光源所发出的光波列长度，显然它与相干时间 t_c 有如下关系:

$L_c = t_c$ ¡¤c (1-1-5)

式中: c—— 光速。

将 (1-1-4) 式代入上式，有

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu} \qquad (1\text{-}1\text{-}6)$$

该式说明，光源的相干时间 t_c 与相干长度 L_c 的实质是一样的，它们都反映了光源的单色性能的好坏。

(二) 横向空间相干性

光源的横向空间相干性通常用相干面积 A_c 来描述，它定义为可以使得在垂直于光传播方向的平面上任两个不同地点处光波场具有相干性的最大面积。为推导相干面积的计算公式，我们来考察图 1-1-2 中所示的杨氏双缝实验。为了使观察屏中心 O 点处能看到干涉条纹，要求宽度为 2a 的光源上下端点 S_1 与 S_2 分别通过二缝 P_1 与 P_2 到达 O 点的光程差之差不得大于光波长 λ，用式子表示即为:

$$(S_1P_2 - S_1P_1) - (S_2P_2 - S_2P_1) \leq \lambda \qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

设光源到双缝的距离为 D，二缝间距为 2b，若 D m a+ b，可以证明:

图 1-1-2　杨氏双缝实验示意图

$$S_1P_2 = S_2P_1 = [D^2 + (b+a)^2]^{\frac{1}{2}} = D + \frac{(b+a)^2}{2D} \tag{1-1-8}$$

$$S_1P_1 = S_2P_2 = [D^2 + (b-a)^2]^{\frac{1}{2}} = D + \frac{(b-a)^2}{2D} \tag{1-1-9}$$

将 (1-1-8) **式与** (1-1-9) **式代入** (1-1-7) **式，并令** $A_c = (2b)^2$，$A_s = (2a)^2$，**可得到**：

$$A_c \cdot A_s \leq \lambda^2 D^2 \tag{1-1-10}$$

A_c **可视为光源的面积。此式表明，当光源面积给定时，在距离光源为** D **处并与光传播方向垂直的平面内，光场具有相干性的各空间点限制在面积为** $\lambda^2 D^2 / A_s$ **的范围内。该面积就是相干面积。换句话说，为了使相干面积** A_c **范围内各点的光场具有相干性，要求光源面积不得超过** $\lambda^2 D^2 / A_c$。**因此又可称** A_s **为光源的相干面积。**

(三) **综合空间相干性**

为了综合描述纵向及横向的空间相干性，可把相干长度 L_c **分别乘到光源面积** A_s **与相干面积** A_c **上，则**

$$V_s = L_c A_s \tag{1-1-11}$$

$$V_c = L_c A_c \tag{1-1-12}$$

由 (1-1-10) 式可以得到 V_c 与 V_s 满足关系:

$$V_c V_s \leq L_c^2 \lambda^2 D^2 \tag{1-1-13}$$

此式说明, 光源面积 A_s 及光谱线宽 $\Delta\nu$ 给定后, 在距光源为 D 处, 光场具有相干性的各空间点应限制在体积为

$$V_c = \frac{c\lambda^2 D^2}{A_s \Delta\nu} \tag{1-1-14}$$

的范围内。此体积称相干体积。或者说, 为了使处在相干体积 V_c 范围内的各点光场具有相干性, 要求光源体积不能超过

$$V_s = \frac{c\lambda^2 D^2}{A_c \Delta\nu} \tag{1-1-15}$$

这一体积又可称为光源的相干体积。从 (1-1-14) 式可以看出, 相干体积是光源单色性与光源线度的综合反映。

§ 1.2　光波模式与光子态

近代物理的量子电动力学从理论上把光的电磁理论 (即波动说) 与光子理论 (即微粒说) 在电磁场的量子化描述的基础上统一了起来, 从而阐明了光的波粒二象性。本节分别讨论激光工作原理中与这两种理论相对应的光波模式与光子态的概念, 以及这两个概念与光相干性之间的关系。

一、光波模式

按照经典的电磁理论, 电磁波的运动规律由麦克斯韦 (C.Maxwell) 方程组决定, 单色平面波是该方程的一个特解, 它的通解可表示为一系列的单色平面波的线性叠加。在自由空间里, 具

有任意波矢 k 的单色平面波都可以存在，但在一个有边界条件限制的空间如激光器的光学谐振腔内，只可能存在一系列独立的具有特定光波矢的单色平面驻波。这种可以存在于谐振腔内，并以波矢 k 为标志的单色平面驻波称为光波模式。不同波矢的单色平面驻波为不同的光波模式。考虑到每一个电磁波有两种独立的偏振状态, 故每一个波矢对应两个具有不同偏振方向的光波模式。下边我们来求解一个体积为 $V=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ 的立方体空腔中可以独立存在的光波模式数。该空腔示意图如图 1-2-1 所示，由驻波条件可

图 1-2-1　立方体空腔

知，存在于此立方体空腔内的光波模式的波矢量必须满足下列条件:

$$
\begin{aligned}
k_x\,\Delta x &= m\pi \\
k_y\,\Delta y &= n\pi \\
k_z\,\Delta z &= q\pi
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}2\text{-}1)
$$

其中 m、n、q 都为正整数。每一组不同的 m、n、q 数值的组合便对应了一个光波矢，或两个不同偏振态的光波模式。在以 k_x、k_y、k_z 为坐标轴的波矢量空间坐标系的第一卦限内，每一个点代表一个允许存在的光波矢，如图 1-2-2 所示。由（1-2-1）式可知，在

波矢空间中，相邻两个光波矢对应点之间的间隔沿三个坐标轴方向的分量分别为:

$$\Delta k_x = \frac{\pi}{\Delta x}$$

$$\Delta k_y = \frac{\pi}{\Delta y}$$

$$\Delta k_z = \frac{\pi}{\Delta z}$$

图 1-2-2　波矢空间

$$(1\text{-}2\text{-}2)$$

因此，每个光波矢在波矢空间中所占有的体积元为:

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\pi^3}{V} \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

在波矢空间中，数值大小处在 k～k+ dk 范围内的波矢量 k 对应点都在以原点为球心、以 k 为半径、以 dk 为厚度的薄球壳内。考虑到波矢量驻波条件决定了它的三个分量只能取正值，因此，可以存在于体积为 V 的空腔内的光波矢在波矢空间中所占体积是该球壳体积的 1/8，即$\frac{1}{2}\pi k^2 dk$。用它除以每个光波矢在波矢空间的体积元（1-2-3）式，可得出在体积为 V 的空腔内、波矢量数值处于 k～k+ dk 范围内的光波矢量数为:

$$H = \frac{k^2 dk}{2\pi^2} V \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

由于 $k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$，$dk = 2\pi\Delta\nu/c$，可以算出在 V 体积空腔内、频率处于 $\nu \sim \nu + d\nu$ 范围内的光波矢量数为:

$$H = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3} V \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

因为光波模式数是光波矢量数的二倍，故最后得到存在于体积为

V 的空腔内、频率为 $\nu \sim \nu + d\nu$ 范围内的光波模式数为:

$$M = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} V \qquad (1\text{-}2\text{-}6)$$

二、光子态

按照光的量子学说, 光是一种以光速 c 运动的光子流。光子具有以下基本性质:

(1) 光子与其它基本粒子一样, 具有能量、动量与质量。光子的这些粒子属性与光的波动属性紧密相连, 这可以由光子的能量、动量、质量的计算公式反映出来:

$$E = h\nu \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

$$P = \frac{h}{2\pi} k \qquad (1\text{-}2\text{-}8)$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \qquad (1\text{-}2\text{-}9)$$

式中: ν——光频率;

k——光波矢;

h——普郎克常数。

(2) 光子具有两种可能的独立偏振状态, 对应于光波场的两个独立偏振方向。

(3) 光子服从玻色—爱因斯坦统计分布, 也就是说, 处于同一状态的光子数没有限制。

经典质点的运动状态完全由空间坐标 (x、y、z) 和动量 (p_x、p_y、p_z) 确定, 光子的运动状态则遵守量子力学中的测不准关系:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \qquad (1\text{-}2\text{-}10)$$

这说明, 在由 x、y、z、p_x、p_y、p_z 六个坐标所支撑的六维相空间

中，相同状态的光子都处在同一个六维体积元 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z$ 中，称之为相格，它的大小就等于 h^3。光子的某一运动状态只能定域在一个相格中，而不能确定它在相格内部的对应位置。也就是说，同一相格中的光子是无法区分的，它们属于同一光子态。

现在，我们来证明光波模式与光子态两个概念之间的等价性。为简单起见，我们先不考虑光波模式与光子态的偏振状态。由光子动量与光波矢量的关系式（1-2-8）知，每个波矢量在相空间中沿 p_x、p_y、p_z 轴方向的线度为：

$$\Delta p_x=\frac{h}{2\pi}\Delta k_x$$

$$\Delta p_y=\frac{h}{2\pi}\Delta k_y \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

$$\Delta p_z=\frac{h}{2\pi}\Delta k_z$$

因为每个光波模式都是由两个沿反方向传播的行波组成的驻波，这两个行波的波矢量大小相等、方向相反。因此，每个光波模式在 p_x、p_y、p_z 轴上的线度是（1-2-11）式的二倍，故

$$\Delta p_x=\frac{h}{\pi}\Delta k_x$$

$$\Delta p_y=\frac{h}{\pi}\Delta k_y \qquad (1\text{-}2\text{-}12)$$

$$\Delta p_z=\frac{h}{\pi}\Delta k_z$$

由上式有：

$$\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z=\frac{h^3}{\pi^3}\Delta k_x\Delta k_y\Delta k_z \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

将（1-2-3）式代入（1-2-13）式中，可得到:

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{V} \qquad (1\text{-}2\text{-}14))$$

再把 $V=\Delta x \Delta y \Delta z$ 代入上式，并将它乘到等式的左边，便可得出每个光波模式在六维相空间中所占的体积也等于 h^3。这说明，一个光波模式在相空间中也占有一个相格，故每个光波模式等价于一个光子态。

三、光波模式与光子态的相干性

为了说明光波模式、光子态与光的相干性之间的关系，我们再从光子的观点来分析杨氏双缝干涉实验。如图 1-2-3 所示，从光

图 1-2-3　双缝实验的光子观点解释

源中心所发出的限于立体角 Δθ内的光子可产生相干，这些光子的动量测不准量分别为:

$$\Delta p_x = \Delta p_y = |p|\Delta\theta = \frac{h\nu}{c}\Delta\theta \qquad (1\text{-}2\text{-}15)$$

$$\Delta p_z = \Delta|p| = \frac{h}{c}\Delta\nu \qquad (1\text{-}2\text{-}16)$$

其中 Δθ在很小的情况下，可用下式表示:

$$\Delta\theta = \frac{\overline{A_c}}{D} \qquad (1\text{-}2\text{-}17)$$

式中：A_c——距光源为 D 处的相干面积。

将（1-2-17）式代入（1-2-15）式中，并与（1-2-16）式相乘，可得到：

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3 \nu^2 A_c}{c^3 D^2} \Delta\nu \qquad (1\text{-}2\text{-}18)$$

另外，由（1-2-10）式可知，每个相格的空间坐标体积为：

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{h^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} \qquad (1\text{-}2\text{-}19)$$

因为相干的光子可以认为是运动状态相同、处于同一光子态的光子，它们是处在同一个相格内的。因此，可以把（1-2-18）式代入（1-2-19）式中，得到每个相格的空间坐标体积为：

$$\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{c^3 D^2}{\nu^2 A_c \Delta\nu} \qquad (1\text{-}2\text{-}20)$$

不难看出，此式即（1-1-15）式。这表明相格的空间坐标体积恰好等于光源的相干体积。

综上所述，关于光波模式与光子态的相干性，我们可以得到以下几点结论。

（1）同一光波模式的光波以及同一光子态的光子是相干的。不同光波模式之间以及不同光子态的光子之间是不相干的。

（2）同一光波模式以及同一光子态的光子在三维的空间坐标系中所占据的体积是相等的，并等于光源的相干体积。

（3）我们定义处在同一光子态的光子数为光子简并度，因此，光子简并度可以有几种不同的叙述方法：

① 同一光子态的光子数。

② 同一光波模式内的光子数。

③ 处于相干体积或光源相干体积内的光子数。

④ 处于同一相格内的光子数。

§ 1.3 自发辐射、受激辐射与受激吸收

光与物质之间的共振相互作用是激光器发光的物理基础。1900 年普朗克提出量子化假说，成功地解释了黑体辐射的实验规律。1913 年波尔又利用量子化假说，成功地解释了氢原子光谱的实验规律。在此基础上，爱因斯坦于 1917 年首次提出了受激辐射的概念。四十年后，这个概念在激光技术中得到了广泛的应用。本节首先讨论黑体辐射的普郎克公式，然后介绍自发辐射、受激辐射与受激吸收这三种与激光发光机理有关的跃迁过程，最后讨论三种跃迁中引入的爱因斯坦系数之间的关系。

一、黑体辐射的普郎克公式

处于任何温度下的任意一个物体，都能够吸收或辐射电磁波，这种由于物体中的分子或原子受到热激发而发射电磁辐射的现象称为热辐射。如果存在一种物体，它能够完全吸收任何波长的电磁辐射，我们就称它为黑体。空腔辐射体可近似看成是一种理想的黑体。黑体热辐射的大小由单色能量密度 u_ν 描述，它定义为在单位体积内，频率处于 ν 处的单位频率间隔内的电磁辐射能量，即：

$$u_\nu = \frac{dE}{dVd\nu} \tag{1-3-1}$$

实验证明，u_ν 的大小与 ν 和温度 T 有关。为了解释实验测定的 $u_\nu \sim \nu$ 曲线，许多科学家从经典物理学的观点出发，做了大量的尝

试，但都归于失败。普郎克大胆地提出了与经典观点不相容的辐射能量量子化假说，并得到了与实验结果相当符合的黑体辐射普郎克公式，他认为，原子中的电子运动可视为是一维的谐振子，它所吸收或发射的电磁辐射能量不能连续变化，只能以与振子的振动频率成正比的能量子作为基元，取它的整倍数。能量子的大小为:

$$E = h\nu \tag{1-3-2}$$

式中: h —— 普郎克常数;

ν—— 振动频率。

根据普郎克的能量量子化假说和玻尔兹曼的统计规律，可以得出黑体辐射分配到腔内每个模式上的平均能量为:

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \tag{1-3-3}$$

式中: K —— 玻尔兹曼常数，其值为 1.38×10^{-23}焦耳/度。

由（1-2-6）式可以写出腔内单位体积处于频率为 ν处的单位频率间隔中的光波模式数（或称为单色模式密度）为:

$$m_\nu = \frac{M}{Vd\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{1-3-4}$$

把（1-3-3）与（1-3-4）两式相乘，便可得到黑体辐射的单色能量密度为:

$$u_\nu = E \cdot m_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \tag{1-3-5}$$

此式即为普郎克公式。

二、跃迁

玻尔在解释氢原子光谱实验规律时，将经典的理论与普郎克

的能量量子化概念结合在一起，认为原子中的电子可以在一些特定的轨道上运动，处于定态，并具有一定的能量。这样一来，每种原子就有一系列的与不同定态对应的能级，各能级间的能量不连续。当原子从某一能级吸收了能量或释放了能量，变成另一能级时，我们就称它产生了跃迁。凡是吸收能量后从低能级到高能级的跃迁称为吸收跃迁，释放能量后从高能级到低能级的跃迁称辐射跃迁。跃迁时所吸收或释放的能量必须等于发生跃迁的两个能级之间的能级差。如果吸收或辐射的能量都是光能的话，此关系可表示为:

$$E_2 - E_1 = h\nu \tag{1-3-6}$$

E_2 与 E_1 分别是两个能级的能量。$h\nu$是吸收或释放的光子的能量。爱因斯坦从辐射与原子相互作用的量子论观点出发提出，这个相互作用包括原子的自发辐射跃迁、受激辐射跃迁和受激吸收跃迁三种过程。在激光器的发光过程中，始终伴随着这三个跃迁过程。下边我们分别叙述这三个跃迁过程。

(一) 自发辐射

处于高能级 E_2 的原子自发地向低能级 E_1 跃迁，并发射出一个频率等于 $\nu=(E_2-E_1)/h$ 的光子的过程称为自发辐射跃迁。示意图见图 1-3-1。这个过程可以用自发跃迁几率 A_{21}来描述，它定

图 1-3-1 自发辐射跃迁

义为发光材料在单位时间内，从高能级上产生自发辐射的发光粒子数密度占高能级总粒子数密度的比值。也就是:

$$A_{21} = \left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} \frac{1}{n_2} \tag{1-3-7}$$

式中: dn_{21}——dt 时间内自发辐射粒子数密度;

n_2——E_2 能级总粒子数密度。

下标 sp 表示是自发辐射跃迁。自发辐射跃迁的过程是一种只与原子本身的性质有关, 而与辐射场 $u(\nu)$ 无关的自发过程。A_{21}的大小与原子处在 E_2 能级上的平均寿命 τ 有关。现在我们来推导 A_{21}与 τ 之间的关系。E_2 能级上的粒子数密度 n_2 随时间的变化率, 在不考虑其它辐射跃迁的情况下可以写成:

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = -\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} = -A_{21}n_2(t) \tag{1-3-8}$$

解此微分方程, 可得到 $n_2(t)$ 随时间变化的规律为:

$$n_2(t) = n_2(0)e^{-A_{21}t} \tag{1-3-9}$$

式中: $n_2(0)$ —— 计时起点 t= 0 时的粒子数密度。

上式表明, E_2 能级上的粒子数密度因自发辐射作用随时间按指数规律衰减。我们定义 $n_2(t)$ 的数值由 t= 0 时的 $n_2(0)$ 衰减到它的 1/e 时所用时间为 E_2 能级的平均寿命 τ, 从 (1-3-9) 式不难推出:

$$t_2 = \frac{1}{A_{21}} \tag{1-3-10}$$

A_{21}又可称为自发辐射跃迁爱因斯坦系数。

(二) 受激辐射

处于高能级 E_2 上的原子在频率为 $\nu= (E_2 - E_1)/h$ 的辐射场激励作用下, 或在频率为 $\nu= (E_2 - E_1)/h$ 的光子诱发下, 向低能级 E_1 跃迁并辐射出一个与激励辐射场光子或诱发光子的状态(包括频率、运动方向、偏振方向、相位等) 完全相同的光子的过程称为受激辐射跃迁。其示意图见图 1-3-2。我们用受激辐射跃迁几

图 1-3-2　受激辐射跃迁

率 W_{21}来描述受激辐射，它定义的方式类似于自发辐射跃迁几率：

$$W_{21} = \left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{st}\frac{1}{n_2} \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

式中：dn_{21}——dt 时间内受激辐射粒子数密度。

下标 st 表示是受激辐射跃迁。受激辐射过程区别于自发辐射的地方在于，它是在辐射场的作用下产生的，因此，其跃迁几率 W_{21}不仅与原子本身的性质有关，还与辐射场 u_ν成正比，这种关系我们可以表示为：

$$W_{21} = B_{21}u_\nu \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

式中：B_{21}——受激辐射跃迁爱因斯坦系数。

(三) 受激吸收

处于低能级 E_1 上的一个原子在频率等于 $\nu=(E_2-E_1)/h$ 的辐射场作用下，吸收一个光子后向高能级 E_2 跃迁的过程称为受激吸收跃迁。其示意图如图 1-3-3。它与受激辐射跃迁的过程恰好相反，其跃迁几率为：

图 1-3-3　受激吸收跃迁

$$W_{12} = \left(\frac{dn_{12}}{dt}\right)_{st}\frac{1}{n_1} \qquad (1\text{-}3\text{-}13)$$

式中：dn_{12}——dt 时间内受激吸收粒子数密度；

n_1——E_1 能级粒子数密度。

因受激吸收跃迁过程也是在辐射场 u_ν 作用下产生的，故其跃迁几率 W_{12} 也应与辐射场大小成正比，即

$$W_{12} = B_{12} u_\nu \tag{1-3-14}$$

式中：B_{12} —— 受激吸收跃迁爱因斯坦系数。

正是由于有受激吸收过程的存在，才使得由（1-3-5）式所描述的腔内黑体辐射场具有稳定的数值。

三、三个爱因斯坦系数之间的关系

腔内黑体辐射场 $u(\nu)$ 与物质原子相互作用的结果，维持黑体处于热平衡状态。在这种热平衡状态下，腔内物质的粒子数密度按能级分布应服从玻尔兹曼分布：

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{KT}} \tag{1-3-15}$$

式中：n_1 —— E_1 能级的粒子数密度；

n_2 —— E_2 能级的粒子数密度；

T —— 热平衡状态的温度。

（1-3-15）式中已假设 E_1 与 E_2 两个能级的统计权重相等。在热平衡的条件下，E_1 与 E_2 两个能级上的粒子数密度应保持不变，即：

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} + \left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{st} = \left(\frac{dn_{12}}{dt}\right)_{st} \tag{1-3-16}$$

或

$$n_2 A_{21} + n_2 B_{21} u_\nu = n_1 B_{12} u_\nu \tag{1-3-17}$$

将（1-3-5）式代入（1-3-17）式中，可得：

$$\frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\left(e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1\right) = \frac{B_{21}}{A_{21}}\left(\frac{B_{12} n_1}{B_{21} n_2} - 1\right) \tag{1-3-18}$$

再将（1-3-15）式代入（1-3-18）式中，并考虑到 $E_2 - E_1 = h\nu$，可以得到：

$$\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\left(e^{\frac{h\nu}{KT}}-1\right)=\frac{B_{21}}{A_{21}}\left(\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{\frac{h\nu}{KT}}-1\right) \qquad (1\text{-}3\text{-}19)$$

该式对任何温度 T 都成立，由此可得出三个爱因斯坦系数 A_{21}、B_{21}、B_{12}之间的关系为:

$$B_{12}=B_{21} \qquad (1\text{-}3\text{-}20)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \qquad (1\text{-}3\text{-}21)$$

§ 1.4 激光基本知识

虽然在 1917 年爱因斯坦就预言了受激辐射的存在，但在一般热平衡情况下，物质的受激辐射总是被受激吸收所掩盖，未能在实验中观察到。直至 1960 年，第一台红宝石激光器才面世，它标志了激光技术的诞生。从此激光技术的发展十分迅速，现已在几百种工作物质中实现了光放大或制成了激光器。激光的出现是对传统光源的一次革命，它应用于工业、农业、军事、交通、科研以至日常生活等几乎所有的国民经济领域。它大大丰富了传统光学的内容，并发展形成了数门，乃至数十门新型的边缘科学。本节介绍激光产生的最基本的原理、激光器的基本结构以及激光工作物质的能级系统等基础知识。

一、激光产生的基本原理

在受激辐射跃迁的过程中，一个诱发光子可以使处在上能级上的发光粒子产生一个与该光子状态完全相同的光子，这两个光子又可以去诱发其它发光粒子，产生更多状态相同的光子。这样，在一个入射光子的作用下，可引起大量发光粒子产生受激辐射，并产生大量运动状态相同的光子。这种现象称受激辐射光放大。由

于受激辐射产生的光子都属于同一光子态，因此它们是相干的。通常，受激辐射与受激吸收两种跃迁过程是同时存在的，前者使光子数增加，后者使光子数减少。当一束光通过发光物质后，究竟是光强增大还是减弱，要看这两种跃迁过程哪个占优势。在正常条件下，即常温条件以及对发光物质无激发的情况下，发光粒子处于下能级 E_1 的粒子数密度 n_1 大于处在上能级 E_2 的粒子数密度 n_2。此时当有频率等于 $\nu=(E_2-E_1)/h$ 的一束光通过发光物质时，受激吸收将大于受激辐射，故光强减弱。如果采取诸如用光照、放电等方法从外界不断地向发光物质输入能量，把处在下能级的发光粒子激发到上能级上去，便可使上能级 E_2 的粒子数密度超过下能级 E_1 的粒子数密度，我们称这种状态为粒子数反转。只要使发光物质处在粒子数反转的状态，受激辐射就会大于受激吸收。当频率为 ν 的光束通过发光物质，光强就会得到放大。这便是激光放大器的基本原理。即便没有入射光，只要发光物质中有一个频率合适的光子存在，便可像连锁反应一样，迅速产生大量相同光子态的光子，形成激光。这就是激光振荡器或简称激光器的基本原理。因此可见，形成粒子数反转是产生激光或激光放大的必要条件，为了形成粒子数反转，须要对发光物质输入能量，我们称这一过程为激励、抽运或者是泵浦。

二、激光器构造

通常的激光器都是由三部分组成的，即激光工作物质、泵浦源和光学谐振腔。下边我们分别进述这三部分的结构及其作用。

为了形成稳定的激光，首先必须要有能够形成粒子数反转的发光粒子，我们称之为激活粒子。它们可以是分子、原子或离子。这些激活粒子有些可以独立存在，有些则必须依附于某些材料中。为激活粒子提供寄存场所的材料称为基质，它们可以是固体或液体。基质与激活粒子统称为激光工作物质。

为了形成粒子数反转，须要对激光工作物质进行激励，完成这一任务的是泵浦源。不同的激光工作物质往往采取不同的泵浦源。例如固体激光器一般是用普通光源如氙灯作泵浦源，对激光工作物质进行光照，又称光泵。对于气体激光工作物质，常常是将它们密封在细玻璃管内，两端加电压，通过放电的方法来进行激励。

仅仅使激光工作物质处于粒子数反转状态，虽可获得激光，但它的寿命很短，强度也不会太高，并且光波模式多、方向性很差。这样的激光几乎没有什么实用价值。为了得到稳定持续、有一定功率的高质量激光输出，激光器还必须有一个光学谐振腔。它是由放置在激光工作物质两边的两个反射镜组成，其中之一是全反射镜，另一个作为输出镜用，是部分反射、部分透射的半反射镜。光学谐振腔的作用主要有以下两个方面。

(1) 产生与维持激光振荡。光在粒子数反转的激光工作物质中传播时得到放大，由于有光学谐振腔的存在，一方面在它提供的光学正反馈作用下，腔内光子数因不断往返通过激光工作物质而被放大；另一方面由于谐振腔存在各种损耗(如输出损耗、衍射损耗、吸收与散射损耗等)，腔内光子数又不断减少。当放大与衰减互相抵消时，就可以形成稳定的光振荡，输出功率稳定的激光。

(2) 改善输出激光的质量。由于激光束的特性与谐振腔的结构有着不可分割的联系，因此可以通过改变腔参数的方法达到控制光束特性的目的，如提高激光的方向性、单色性、输出功率等。

三、激活粒子的能级系统

产生激光的必要条件是实现粒子数反转，而为了实现粒子数反转就必须要有适合的能级系统的激活粒子。在这些激活粒子的能级系统中，首先必须要有激光上能级和激光下能级，除此之外，往往还需有一些与产生激光有关的其它能级。常用激光器的激活

粒子能级系统大致可分成两大类：三能级系统与四能级系统。现分别叙述如下。

(一) 三能级系统

图 1-4-1 画出了两种三能级系统的示意图。其中 (a) 图中的

图 1-4-1　三能级系统

E_1 为基态, 作为激光下能级, 泵浦源将激活粒子从 E_1 能级抽运到 E_3 能级, E_3 能级的寿命很短, 激活粒子很快地经非辐射跃迁方式到达 E_2 能级。所谓非辐射跃迁, 是指不发射光子的跃迁, 它是通过释放其它形式的能量如热能而完成的。E_2 能级的寿命比起 E_3 来要长得多, 称为亚稳态, 并作为激光上能级。只要抽运速率达到一定程度, 就可以实现 E_2 与 E_1 两个能级之间的粒子数反转, 为受激辐射创造了条件。例如固体激光器中的红宝石激光器激活粒子——铬离子就属于这类能级系统。(b) 图中的 E_1 也是基态, 但它不作为激光下能级, 而是以 E_3 和 E_2 分别作为激光的上、下能级。在这种三能级系统里, E_3 的寿命比 E_2 要长, E_2 能级在热平衡条件下基本上是空的。因此, 只要抽运一些粒子到达 E_3 能级, 就很容易实现粒子数反转, 经受激辐射后到达 E_2 的粒子可迅速通过非辐射跃迁的方式回到基态 E_1。例如气体激光器中的氩离子激光器的激活粒子——氩离子就属于此类能级系统。

（二）四能级系统

图 1-4-2 画出了两种四能级系统的示意图。(a) 图中的 E_1 是基态，泵浦源将激活粒子从基态抽运到 E_4 能级，E_4 能级的寿命很

图 1-4-2　四能级系统

短，立即通过非辐射跃迁的方式到达 E_3 能级。E_3 能级的寿命较长，是亚稳态，作激光上能级用。E_2 能级的寿命很短，热平衡时基本上是空的，作激光下能级用。E_2 能级上的粒子主要也是通过非辐射跃迁回到基态。这种能级系统也很容易实现粒子数反转。例如固体激光器中的钕玻璃激光器以及掺钕钇铝石榴石激光器(YAG) 中的激活粒子——钕离子便属于这类能级系统。(b) 图中的 E_1 也是基态，E_4 和 E_3 分别为激光的上、下能级，E_2 能级是 E_3 与 E_1 之间的一个中间能级。E_3 能级的寿命很短，当受激辐射的粒子由 E_4 能级到达 E_3 能级后，很快会通过非辐射跃迁跳到 E_2 能级，并再通过非辐射跃迁回到基态。同样地，只要泵浦源将基态粒子抽运到 E_4 能级，很容易就可以实现 E_4 与 E_3 能级间的粒子数反转。例如气体激光器中氦氖激光器的激活粒子——氖原子与二氧化碳激光器中的激活粒子——二氧化碳分子都是属于这类四能级系统。

§ 1.5 激光器举例

按工作物质的类型不同，激光器可以分成四大类：固体激光器、气体激光器、液体激光器和半导体激光器。下边我们对这些激光器分别举例简述。

一、固体激光器

固体激光器一般使用晶体或玻璃作基质，在其中掺入不同离子作激活粒子。固体激光器的结构大体一致，如图 1-5-1 所示。晶

图 1-5-1　固体激光器的结构

1—晶体棒；2—反射膜；3—氙灯；4—电源

体棒或玻璃棒的直径由 1cm 到几个 cm 不等，长度由十几个 cm 到几十个 cm 不等。棒的两端面磨的很光滑，平行度很高，镀上反射膜以后就可以当成反射镜组成光学谐振腔。泵浦源使用普通强光源，如氙灯等。固体激光器的优点是输出功率大，体积小，坚固，贮存能量的能力较强，适合实现 Q 开关、锁模等技术。下边我们分别以红宝石激光器和掺钕离子激光器为例，简介其工作原理。

(一) 红宝石激光器

红宝石激光器用红宝石晶体棒 (Al_2O_3) 作基质，掺入少量铬离子 (Cr^{+3})，镶嵌在三氧化二铝的晶格中，铬离子的能级系统属于三能级系统，图 1-5-2 是它的能级图。基态能级为 $^4A_2$，用强光照射红宝石棒，将处在基态的铬离子抽运到激发态 $^4F_1$ 与 $^4F_2$ 上，这两个激发态各自包括一些相离很近的能级，但这些能级的寿命

图 1-5-2 红宝石激光器 Cr^{+3} 能级图

很短，铬离子很快便经非辐射跃迁落到 ^2E 能级上。^2E 能级由两个相距非常近的能级 $2\bar{A}$ 和 $\bar{E}$ 组成，它们的寿命相对长一些，称为亚稳态。如果抽运速率大到一定程度，将基态上一半以上的铬离子抽运到 ^2E 能级上，便可在 ^2E 能级与基态 $^4A_2$ 之间形成粒子数反转。从 $\bar{E}$ 到 $^4A_2$ 的跃迁产生 R_1 谱线，光波长为 0.6943 μm。从 $2\bar{A}$ 到 $^4A_2$ 的跃迁产生 R_2 谱线，光波长为 0.6929 μm。由于 $2\bar{A}$ 和 $\bar{E}$ 两个能级靠得近，热运动使得这两个能级间的粒子交换十分频繁，可以认为它们的粒子数始终相等。又因为 R_1 谱线和 R_2 谱线的荧光强度之比为 7∶5，也就是说，当反转粒子数逐渐增大时，R_1 线首先起振产生激光。此时 $\bar{E}$ 能级上的粒子数大量消耗，$2\bar{A}$ 上的粒子便迅速补充到 $\bar{E}$ 能级上来，致使 R_2 线始终不能起振。所以通常在

红宝石激光器中只有 0.6943 μm 的 R_1 线才能形成激光输出。另外，又由于铬离子的能级系统要想实现粒子数反转对抽运速率的要求较高，故红宝石激光器不易实现连续激光输出，通常都是脉冲式工作。

(二) 掺钕激光器

钕玻璃激光器与掺钕钇铝石榴石激光器（YAG）都是用钕离子（Nd^{+3}）作为激活粒子的。前者是用玻璃作基质，后者用钇铝石榴石晶体作基质，这种晶体是由 Y_2O_3 和 Al_2O_3 按照 3∶5 的比例化合而成，又称 YAG 晶体。钕离子的能级系统属于四能级系统，如图 1-5-3 所示，基态能级是 $^4I_{9/2}$，当钕离子吸收了光泵的能量以后，从基态跃迁到很宽的吸收带中，然后以非辐射跃迁的方式落到 $^4F_{3/2}$ 能级上，此能级寿命较长，很容易实现它与 $^4I_{11/2}$ 能级之间的粒子数反转，造成对 1.06 μm 光的增益作用。钕离子受激辐射后从 $^4I_{11/2}$ 能级再通过非辐射跃迁的方式回到基态。钕玻璃作为激光工作物质，具有尺寸长、均匀性好、易加工、价格低等优点。并且有较高的效率，因而可以做成大能量器件。但是玻璃的导热率低，在大能量工作的情况下，须要进行水冷却。另外，钕玻璃激光器输出的激光单色性很差，包含的模式多，所以它常常被用于锁模激光器。与钕玻璃相比，YAG 晶体作为激光工作物质其优越性大致有以下四点：① YAG 晶体的导热率是玻璃的 14 倍，因此工作过程中的热量很容易散发。② YAG 的熔点为 1970℃，而玻璃的软化点约为 660℃，这样 YAG 激光器可以承受

图 1-5-3　钕激光器 Nd^{+3} 能级图

更高的辐射功率。③ YAG 输出激光的单色性能比钕玻璃激光器好。④ YAG 激光器产生激光振荡所须满足的阈值条件比钕玻璃激光器更低些，因此它可以连续输出激光，而钕玻璃激光器一般仍是脉冲输出。

二、气体激光器

气体激光器使用气体作为激光工作物质，它是目前应用最为广泛的一类激光器，激活粒子可以是原子、分子或离子，如氦氖激光器是原子气体激光器，二氧化碳激光器是分子气体激光器，氩离子激光器是离子气体激光器。通常，气体激光器靠气体放电来进行泵浦，可以是直流放电，也可以是交流放电。气体激光器的最大优点是单色性、方向性都比其它激光器要好。输出激光的频率很稳定。由于大多数气体激光器的激光下能级为非基态，对泵浦功率的要求不高，因此很容易获得稳定连续的激光输出。它广泛应用于测量、通讯、全息术、机械加工等方面。这里以最典型的氦氖激光器、二氧化碳激光器及氩离子激光器为例来分析它们的工作原理。

(一) 氦氖激光器

氦氖激光器(He-Ne) 是继红宝石激光器后出现的第二种激光器，也是目前使用最为广泛的激光器。图 1-5-4 是它的示意图。在

图 1-5-4　氦氖激光器的结构

1—阳极；2—阴极；3—反射镜；4—放电管；5—布儒斯特窗

放电毛细管内充有氦气与氖气的混合气体，两种气体的压强比约为 7∶1，总压强在 100Pa～400Pa。放电管用水晶制成，内径约几个 mm，长度由十几个 cm 到几十个 cm 不等。在放电管的两端贴有布儒斯特窗，也是用水晶片制成。窗口平面的法线与放电管轴线间的夹角恰好等于水晶的布儒斯特角，约 56°。安装布儒斯特窗口可以使激光器输出的激光为在纸面内振动的偏振光，沿该方向振动的偏振光通过布儒斯特窗时不会反射，因此有利于减少损耗，提高输出功率。放电管上方的阴极筒用高纯铝制成。图 1-5-4 所示的结构称外腔式，这种结构的激光器允许自行调整，并可在腔内插入其它光学元件。虽然氦氖激光器的激活粒子是氖原子，但在氖原子的激发过程中，氦原子是不可缺少的。为了叙述氖原子形成粒子数反转的过程，现将氦原子与氖原子的能级图画在图 1-5-5 中。在热平衡条件下，氖原子与氦原子基本上都处在各自的基态上，当气体放电管有电流通过时，阴极发射的电子高速向阳极运动，电子在运动过程中与大量的基态氦原子发生非弹性碰撞，使氦原子从基态跃迁到 2^1S 和 2^3S 态上。这两个能级都是亚稳态，它可以积累大量处在激发态的氦原子。这些氦原子又与基态的氖原子发生非弹性碰撞，将氖原子激发到与氦原子的 2^1S 与 2^3S 十分

图 1-5-5　He 与 Ne 原子能级图

接近的 $3S_2$ 与 $2S_2$ 能级上。这个过程称为原子能量的共振转移，其转移几率相当大。另外，氖原子的 $2P_4$ 与 $3P_4$ 能级的寿命很短，基本上无粒子。$2P_4$ 能级的能量低于 $2S_2$、$3P_4$ 能级低于 $3S_2$，因此在 $3S_2 \to 3P_4$、$3S_2 \to 2P_4$、$2S_2 \to 2P_4$ 三对能级之间都可以形成粒子数反转，所形成的激光波长分别为 3.39 μm、0.6328 μm、1.15 μm。其中 0.6328 μm 是可见光，是氦氖激光器中应用最广泛的一种谱线。氖原子的 1S 态是激光下能级与基态之间的一个中间能级，当发光氖原子受激辐射后经此能级回到基态。由上述分析可见，氖原子的能级系统也是四能级系统，它和钕离子的四能级系统所不同的是，前者形成激光的上、下能级分别为第四和第三能级，而后者则为第三和第二能级。由于氦原子在激发氖原子的过程中起着非常重要的作用，适当选择两种气体的分压比和总气压可以使输出功率得以提高。实验发现，氦气与氖气的分压比为 7∶1 时为最佳分压比，总气压与毛细放电管直径之积为 400Pamm～500Pamm 时为最佳。

（二）二氧化碳激光器

二氧化碳激光器的结构如图 1-5-6 所示，这是最常见的闭管内腔式二氧化碳激光器。放电管由玻璃或石英材料制成，直径从 1cm 到几 cm，管长从 1m 到几 m。放电管内充有氮气（N_2）、氦气（He）和二氧化碳气（CO_2），三者的比例为 3∶16∶1。作为激活粒子的 CO_2 分子由三个原子组成，每个原子在其平衡位置附近振动。按照分子振动理论，CO_2 分子有三种不同的振动方式，每种振动方式存在一组相应的能级，每组振动能级中的各能级间几乎是等间距的。第一组中各能级命名为 100，200，300，…；第二组中各能级命名为 010，020，030，…；第三组中各能级命名为 001，002，003，…，基态为 000。CO_2 分子的能级图如图 1-5-7 所示。当放电管中有电流通过时，首先将 N_2 分子激发起来，在 N_2 分子与 CO_2 分子碰撞过程中，N_2 分子将能量转移给 CO_2 分子，使它从基

图 1-5-6　二氧化碳激光器的结构

1—反射镜；2—水冷套管；3—出水口；4—电极

5—放电管；6—进水口

图 1-5-7　CO_2 分子能级图

态跃迁到 001 能级。此时 001 与 100、020 之间将产生粒子数反转，001→100 的受激辐射可产生 10.6 μm 的远红外激光，这是二氧化碳激光器最重要的谱线。010 能级为激光下能级与基态之间的中间能级。CO_2 分子的能级系统是四能级系统，其能级模型与 Ne 原子能级模型完全一样，CO_2 激光器的抽运过程是靠激发态的 N_2 分子将能量转移给 CO_2 分子的，这种间接激发的方式比起直接激发的效率要高得多。充入氦气有两个作用：首先它可以减少处在激光下能级 100 上的 CO_2 分子数，这样有利于提高反转粒子数。其

次它对 CO_2 气体具有冷却作用。由于二氧化碳激光器所产生的激光属远红外波段，因此它工作时会产生大量的热量。为了保证激光器正常工作，须及时将这些热量散发掉，一般在放电管外常常须要再加水冷套管进行冷却。

二氧化碳激光器是一种比较重要的气体激光器，它具有以下几个突出优点：功率大，能量转换效率高。一般的二氧化碳激光器可以做到几十 W 的连续输出功率，近年来发展的大功率的气动二氧化碳激光器则达到了几十万 W 的输出功率。二氧化碳激光器有丰富的谱线，在 10 μm 附近有几十条谱线，高气压的二氧化碳激光器甚至可做到从 9 μm 到 10 μm 的连续可调谐输出。由于二氧化碳激光器中的 10.6 μm 光谱线正好处在大气窗口中，也就是大气对此波长的透明度较高。因此二氧化碳激光器输出的激光束能在大气中传输较远的距离。由二氧化碳激光器的上述优点，决定了它在国民经济和国防上都有着许多重要的应用，如各种机械加工(包括打孔、切割、焊接等)、激光通讯、激光雷达、激光武器以及激光治疗等。

(三) 氩离子激光器

氩离子激光器的结构如图 1-5-8 所示。在放电管外附加一轴

图 1-5-8　氩离子激光器的结构

1—反射镜；2—出水口；3—气旁路管；4—阴极；5—进水口；6—水冷套管；7—放电管；8—线圈；9—阳极；10—布儒斯特窗

向磁场，以增加激光的功率，同时由于放电时输入电功率很大，为防止放电管因热而破裂，须要有水冷装置。放电管内径一般为 3mm～5mm，长为几十个 cm。由于在放电中氩离子有向一端积累的趋势，所以在两个电极之间加上一个气旁路管，用来调节放电管中的气压，使之保持均匀。氩离子（Ar^+）的能级图见图 1-5-9。当大放电电流通过放电管时，一部分氩原子受到电子的撞击，形成氩离子，这些氩离子再经过电子的撞击，就会受到激发，从基态跃迁到激发态 4P，4P 能级由若干个相距很近的能级组成，在 4P 能级下边还有由一组能级组成的 4S 能级。由于它的寿命短，所以很容易在 4P 各能级与 4S 各能级之间形成粒子数反转。输出激光的波长可有十余种，其中最强的为 0.488 μm（兰色）和 0.5145 μm（绿色）。

图 1-5-9　Ar^+ 能级图

三、液体激光器

液体激光器使用激光溶液作为激光工作物质，溶剂有无机溶剂和有机溶剂两类。其中有机溶液激光器中，染料激光器使用较为广泛，它的基本结构除有染料池、谐振腔、泵浦光源以外，还有染料溶液的循环及过滤系统。工作方式可以有连续的或脉冲的。其最大特点是通过改变溶液的组成，染料的种类、浓度和温度，染料池的长度，可以使输出激光的波长从 0.34 μm～1.2 μm 的范围内连续可调。此外，染料激光器的增益、效率都比较高，价格低廉，容易制备。由于激光溶液能循环操作，所以它的光学均匀性好，有利于冷却。缺点是发散角较大，某些溶液有毒性和腐蚀

性。

四、半导体激光器

半导体激光器使用半导体材料作激光工作物质，如单元素的碲，双元素的砷化镓、硫化锌等，三元素的铟镓砷、铅锡碲等。图 1-5-10 为砷化镓激光器的示意图。其主要部分是一个 P-N 结，形状为长方形，长约 250 μm，宽大约 100 μm。整个激光器的体积就只有针孔大小。它的两个端面磨光，并互相平行，构成谐振腔的两个反射镜。当 P-N 结两端不加电压时，N 区中的多数载流子——电子与 P 区中的多数载流子——空穴互相扩散，形成一个内建电场，使 P-N 结相当于一个阻挡层。当在 P-N 结上加正向电压，即 N 极接负极、P 极接正极，阻挡层被削弱，注入 N 区的大量电子流向 P 区，并在结区内与空穴复合，放出光子而形成激光。这一过程也可描述为，由于 P-N 结未加电压时，N 区电子的能级比 P 区空穴的能级低，加上正向电压后，使 N 区电子的能级高于 P 区空穴的能级，大量电子处在高能级上，实现了粒子数反转。电子流向 P 区与空穴复合的过程就是电子由高能级向低能级跃迁的过程。与其它激光器相比，半导体激光器的体积最小，重量最轻，与其它光学元件一起可实现集成光路。但它的功率小，发散角大，单色性差，输出特性受温度的影响比较明显。各种不同材料的半导体激光器的输出光波长不一样，砷化镓激光器在室温下输出光波长为 0.9 μm。半导体激光器适合用于激光通讯中。

图 1-5-10　半导体激光器的结构

1—电源；2—P-N 结

§ 1.6 激光特性

激光器具有与普通光源很不相同的特性，一般称为激光的四性：单色性好、方向性好、相干性好以及能量集中。激光的这些特性不是彼此独立的，它们相互之间有联系。实际上，正是由于激光的受激辐射本质决定了它是一个相干光源，因此其单色性和方向性好，能量集中。本节将分别叙述激光的这些特性。

一、单色性

光源的单色性由光源谱线的绝对线宽 $\Delta\nu$或相对线宽 R 来描述，即

$$R = \frac{\Delta\nu}{\nu} \tag{1-6-1}$$

式中：ν——输出激光的中心频率。

利用 $\nu = c/\lambda$ 不难证明用光波长描述的相对线宽 R 为：

$$R = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tag{1-6-2}$$

式中：$\Delta\lambda$——输出激光的波长范围；

λ——输出激光的中心波长。

一般光源的线宽是相当宽的，既使是单色性最好的氪灯，线宽也有 10^4Hz～10^6Hz。而激光的线宽相当窄，理论上可以证明(见第四章§ 4)，单纵模激光器的谱线宽度存在一个理论极限，如氦氖激光器的线宽极限可以达到约 10^{-4}Hz 的数量级，显然这是极高的单色性。实际上，理论上的线宽极限很难达到，这是由于温度的变化、激光器的振动、气体激光器中激光工作物质存在的气流以及外界的泵浦等因素会导致谐振频率的不稳定。激光器工

作时的频率漂移往往早就超过了理论上的线宽极限，故单纵模激光器的单色性主要是由频率稳定性决定的。目前单色性能最好的激光器是单纵模稳频气体激光器，如氦氖激光器，它的线宽可达到几个 Hz。激光器的单色性还与振荡模式数及激光工作物质有关，多纵模激光器的单色性显然比单纵模激光器要差，固体激光器的单色性比气体激光器差，单色性最差的激光器要属半导体激光器了。使用选模技术和稳频技术（见第十一章）对改善激光器的单色性能有重要意义。

二、方向性

光源的方向性由光束的发散角 θ来描述，普通光源发出的光是向各方向传播的，发散角很大。激光的发散角却很小，它几乎是一束平行光。若将一束激光射到几千米处，光束扩散的直径还不到 10cm。而使用具有抛物形反射面的探照灯，也要扩散到几十米。根据光的衍射理论，任何光通过输出孔径时都要产生衍射，衍射角的大小与光波长成正比，与孔的直径成反比，即

$$\theta = \frac{\lambda}{d} \qquad (1\text{-}6\text{-}3)$$

可以证明，单基横模激光器的光束发散角为:

$$\theta = \frac{4\lambda}{\pi d} \qquad (1\text{-}6\text{-}4)$$

式中：d —— 激光腰直径。

比较（1-6-3）式与（1-6-4）式，说明激光的发散角已很接近衍射极限值。例如一个腰直径为 3mm 的氦氖激光由（1-6-3）式计算出的衍射角极限为 2×10^{-4}rad，由（1-6-4）计算出的发散角为 3×10^{-4}rad。激光的方向性与振荡模式、腔长、工作物质等都有关系。基横模的发散角最小，横模的阶次越高，发散角越大。因此，采用适当的选横模技术，使激光器工作在基横模状态是有利于改

善激光的方向性的。谐振腔越长，激光方向性越好。在各类激光器中，气体激光器的方向性最好，固体激光器次之，半导体激光器最差。

三、相干性

激光器的相干性能比普通光源要强得多，一般称激光为相干光，普通光为非相干光。相干性有时间相干性与空间相干性之分，我们分别来讨论激光的这两种相干性。

(一) 时间相干性

光源的时间相干性 (或称纵向空间相干性，见本章§ 1.1) 与单色性相联系。由 (1-1-4) 式可知，光源的谱线宽度 $\Delta\nu$越窄，相干时间 t_c 就越长。激光的线宽非常窄，故它的时间相干性比起普通光源来要好得多。

(二) 空间相干性

这里所讲的空间相干性，主要是指横向空间相干性，它与光源的方向性相联系。对于普通光源来说，它所发出的光分属众多的模式，只有在一定范围空间中的光子才是相干的。因此，可以使用§ 1 中定义的相干面积来描述光的空间相干性。对于激光来说，只有属于同一个横模模式的光子才是空间相干的，不属于同一横模模式的光子则是不相干的。因此，激光的空间相干性由激光器的横模结构所决定。如果激光器是单横模，则它是完全空间相干的。如果激光器是多横模，则它的空间相干性能变差。此外，在前边所叙述的激光方向性中，谈到过单基横模的方向性最好，横模阶次越高方向性越差。这表明激光的方向性越好，它的空间相干性程度就越高。

激光的相干性有很多重要应用，如使用激光干涉仪进行检测，比普通干涉仪速度快、精度高。用激光作为全息照像的光源，也是利用它的相干性能好的特点。

四、能量集中性

衡量光源能量集中程度可用亮度来定义，即

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta S \ \Delta\Omega\Delta t} \tag{1-6-5}$$

式中：ΔS —— 光源表面积；

$\Delta\Omega$ —— 光源发射的光束立体角；

Δt —— 发光时间；

ΔE —— Δt 时间内从光源发射到 $\Delta\Omega$ 立体角范围内的能量。

普通光源所发出的光是连续的，并且射向四面八方，能量非常分散。即使用透镜进行聚焦，也很难将全部能量汇聚到很小的范围内，故亮度不高。激光器发出的激光方向性好，能量在空间高度集中。使用脉冲技术，还可使激光能量在时间上也高度集中。因此，激光器的光亮度远比普通光源要高得多。如设有一台脉冲激光器，脉宽为 10^{-9}s，每次脉冲输出能量为 1J。若光束的远场发散角是 10^{-3}rad，则光束立体角是 $\pi\times 10^{-6}$。另有一台表面积相同的普通光源，设发光功率为 1W，而所发光束的立体角是 2π。这样，由（1-6-5）式可计算出，这台激光器的亮度将是该普通光源的 2×10^{15}倍。此外，激光还可以用透镜进行聚焦，将全部的激光能量集中在极小的范围内。例如，将一个 GW 级的调 Q 激光脉冲聚焦到直径为 5 μm 的光斑上，可以获得 10^{15}W/ cm^2 的功率密度，产生几千度，乃至上万度的高温，这是普通光源根本无法做到的。激光能量的高度集中性使它广泛用于机械加工、激光武器及激光医疗等领域中。

§ 1.7 光学谐振腔的基本知识

在第五章～第八章中将详细讨论有关光学谐振腔的知识，但

为了更好地理解第二章～第四章的内容，本节将简单介绍有关谐振腔的基本知识，包括谐振腔与激光模式、无源腔损耗、无源腔本征纵模线宽、谐振腔本征纵模的频率间隔以及谐振腔的菲涅耳数等问题。

一、谐振腔与激光模式

光学谐振腔的两个反射镜构成腔的边界，它对腔内的激光场产生约束作用，使激光场的分布以及振荡频率都只能存在一系列分立的本征状态，每一个本征态称为一种激光模式。从光子的角度说，每一种激光模式就是腔内可以区分的一种光子态。激光模式有两类：一类称为纵模，它是指可能存在于腔内的每一种驻波场，用模序数 q 描述沿腔轴线的激光场的节点数。另一类是横模，指可能存在于腔内的每一种横向场分布，用模序数 m 和 n 描述。如果谐振腔由两面方形孔径的反射镜组成，则 m 和 n 分别表示沿镜面直角坐标系的水平和竖直坐标轴的激光场节线数。如果谐振腔由两面圆形孔径反射镜组成，则 m 和 n 分别表示沿镜面极坐标系的角向和径向的激光场节线数。因此，每一个激光模式可以用三个独立的模序数表示，记成 $TEM_{q,m,n}$。单独表示横模时可记成 $TEM_{m,n}$。如 TEM_{00} 表示基横模。图 1-7-1 中画出方形镜谐振腔的几个低阶横模示意图，图 1-7-2 中画出圆形镜谐振腔的几个低阶横模示意图。激光横模式的特征与谐振腔的几何结构紧密相连，知道了腔的几何参数，如腔长、两个反射镜面的孔径尺寸和曲率半径，就可以确定腔内可能存在的

图 1-7-1　方形镜谐振腔横模示意图

各种激光模式的性质，例如场的横向分布、谐振频率、单程衍射损耗率、远场发散角等。

图 1-7-2 圆形镜谐振腔横模示意图

二、无源腔损耗

激光工作物质被泵浦源激发后，对光的放大作用主要表现在它能补偿激光模式的能量损耗，使之满足振荡的阈值条件，从而形成并维持激光模式的振荡。它对光场的空间分布、谐振频率、损耗、发散角等模式特征的影响是次要的。我们把虽有激光工作物质，但未被激发从而无放大作用的激光器谐振腔称作无源腔，把经过激发有放大作用的激光器谐振腔称作有源腔。本节讨论的腔损耗，都是指无源腔。腔损耗是指光在腔内传播时，由于各种物理因素造成光强的衰减，它是评价一个光学谐振腔的重要指标，可用三个相互有联系的物理量来描述：平均单程功率损耗率 δ、腔寿命 τ、腔 Q 值。下边分别加以叙述。

(一) 平均单程功率损耗率

设初始光强为 I_0，腔内往返一周以后，光强衰减到 I_1，则定义平均单程功率损耗率为：

$$\delta = \frac{1}{2}\ln\frac{I_0}{I_1} \qquad (1\text{-}7\text{-}1)$$

称此定义式为对数定义式。按此定义不难算出 I_1 为：

$$I_1 = I_0 e^{-2\delta} \qquad (1\text{-}7\text{-}2)$$

当损耗 $\delta \ll 1$ 时，上式可近似为：

$$I_1 = I_0(1-2\delta) \qquad (1\text{-}7\text{-}3)$$

再由 (1-7-3) 式可推出 δ 的计算公式为：

$$\delta = \frac{I_0 - I_1}{2I_0} \tag{1-7-4}$$

此式又可称作是 δ的代数定义式。

产生损耗的原因有很多, 按照它们是否与激光横模模式有关可分成两大类: 选择性损耗与非选择性损耗。选择性损耗与横模模式有关, 主要有衍射损耗和几何损耗。所谓衍射损耗指的是, 当光从一个反射镜向另一个反射镜沿腔轴线传播时, 由于光的衍射作用及反射镜面的有限尺寸, 使得一部分光能量未被镜面覆盖而逸出腔外所造成的损耗。因为不同横模的横向光场的分布不同, 故衍射损耗也不同。基横模的衍射损耗最小, 模的阶次越高, 衍射损耗就越大。下边我们以均匀平面波为例, 对单程衍射损耗率做粗略的估算。如图 1-7-3 所示, 设光束从左镜面向右镜面沿水平轴线方向传播, 由于衍射作用, 横截面积由 S_1 扩大到 S_2 而不能被右镜面完全覆盖。未覆盖部分的光逸出腔外造成损耗, 按照单程功率损耗率的定义, 我们可用下式计算:

图 1-7-3　衍射损耗率计算示意图

$$\delta = \frac{S_2 - S_1}{S_1} \tag{1-7-5}$$

设谐振腔的两镜面都为半径是 a 的圆形镜, 则有:

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi a^2 \\ S_2 &= \pi (a + L\theta)^2 \end{aligned} \tag{1-7-6}$$

式中: L —— 腔长;

θ—— 衍射角。

按照一般物理光学的理论，衍射角 θ可以如下公式计算：

$$\theta = \frac{\lambda}{2a} \tag{1-7-7}$$

因为一般总有 $a \gg \lambda$，所以 θ很小，忽略 S_2 展开式中 $L^2\theta^2$ 项，将 (1-7-6) 式和 (1-7-7) 式代入 (1-7-5) 式中，可得到 δ的计算公式为：

$$\delta = \frac{L\lambda}{a^2} \tag{1-7-8}$$

几何损耗指的是，光线在腔内经有限次往返传播后，从腔的侧面横向逸出。几何损耗的大小与腔结构有关，第五章中将要讲到的两大类光学谐振腔中，稳定腔的几何损耗极小，非稳腔的几何损耗较大。几何损耗的大小还与横模的模式有关，例如平行平面腔内的高阶模与低阶模相比，其光线传播方向与腔轴线的夹角要大，因此损耗也大。下边我们以平行平面腔为例，讨论两种几何损耗。

1. 斜射光线的几何损耗

设平行平面腔的两个镜面 M_1 与 M_2 平行，光线与腔轴线之间成 θ角。光线往返 m 次以后逸出腔外，如图 1-7-4 所示。光在腔内传播所用时间为：

图 1-7-4　斜射光线的几何损耗

$$\tau = mt \tag{1-7-9}$$

式中：t —— 光在腔内往返一次所用时间。

t 的大小可如下计算：

$$t = \frac{2nL}{c} \tag{1-7-10}$$

式中：L —— 腔长；

n —— 激光工作物质的折射率；

c —— 光在真空中的速度。

当光线与腔轴线之间的夹角 θ 很小时，有:

$$2mL\theta = D \qquad (1\text{-}7\text{-}11)$$

式中: D —— 反射镜面的横向尺寸。

将 (1-7-10) 式与 (1-7-11) 式代入 (1-7-9) 式中，可求出:

$$\tau = \frac{\eta D}{c\theta} \qquad (1\text{-}7\text{-}12)$$

τ 又称作腔寿命，它与单程功率损耗率是密切相关的，稍后我们将证明 τ 与 δ 之间的关系式 (1-7-26)，利用 (1-7-12) 式可得出斜射光线的几何损耗率为:

$$\delta = \frac{\eta L}{c\tau} = \frac{L\theta}{D} \qquad (1\text{-}7\text{-}13)$$

由此可见，δ 与 θ 成正比，与腔的径长比 D/ L 成反比。

2. 腔镜倾斜的几何损耗

实际的平行平面腔的两个镜面很难调整得完全平行，两个镜面 M_1 与 M_2 之间有一个小角度 β 时，光线在腔内往返有限次后，必然会逸出腔外。如图 1-7-5 所示，设开始时光线与一个镜面 M_1 垂直，当它在两镜面间多次反射后，入射光与反射光之间的夹角 θ 将依次为 2β，4β，6β，…。光线每往返一次，在镜面上移动的距离为 $L\theta$，其中 L 为腔长。设光线在腔内往返 m 次后逸出腔外，则有:

图 1-7-5　腔镜倾斜的几何损耗

$$2\beta L + 6\beta L + \cdots + 2(2m-1)\beta L = D \qquad (1\text{-}7\text{-}14)$$

式中: D —— 镜面横向尺寸。

由 (1-7-14) 式可求得:

$$m = \left(\frac{D}{2\beta L}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}7\text{-}15)$$

光线在腔内往返一次所用时间由(1-7-10)式计算,因此腔寿命为:

$$\tau = m \cdot t = \frac{n}{c}\left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}7\text{-}16)$$

然后再利用 τ 与 δ的关系式 (1-7-26), 可得:

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta L}{2D}} \qquad (1\text{-}7\text{-}17)$$

可见 δ与二镜面夹角 β的平方根成正比,与腔的径长比 D/L 的平方根成反比。

非选择性损耗与横模模式无关, 主要有腔镜反射不完全所引起的损耗, 材料中的非激活吸收和散射, 腔内插入物 (如布儒斯特窗、调 Q 元件、调制器等) 所引起的损耗等。在这些损耗中, 腔镜反射不完全所引起的损耗最重要。特别是作为输出激光的半反镜必须要有一定的透射率, 这种损耗又称输出损耗, 它是无法避免的。设两个反射镜的光强反射率各为 r_1 与 r_2, 则输出损耗的平均单程损耗率由定义式 (1-7-1) 可推出为:

$$\delta = -\frac{1}{2}\ln r_1 r_2 \qquad (1\text{-}7\text{-}18)$$

特别地, 当两个反射镜中一个反射率为 100% (即全反) 时, 另一个为 r (即半反) 时, 则 δ为:

$$\delta = -\frac{1}{2}\ln r \qquad (1\text{-}7\text{-}19)$$

如果腔损耗的各种因素同时存在, 每一种因素引起的损耗用相应的单程功率损耗率 δ_i 来描述, 则总的单程损耗率为:

$$\delta = \sum_i \delta_i \qquad (1\text{-}7\text{-}20)$$

(二) 腔寿命

设初始时刻腔内的光强为 I_0，光在腔内传播一段时间后，由于腔损耗必然使光强要衰减，任意时刻 t 的光强 $I(t)$ 随 t 的变化规律为：

$$I(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau_c}} \qquad (1\text{-}7\text{-}21)$$

其中 τ 的物理意义为，光强从初始值 I_0 衰减到 I_0 的 $1/e$ 所用时间，我们称之为腔寿命。它与腔平均单程功率损耗率 δ 的关系可推导如下：

由（1-7-2）式，可以写出光在腔内往返 m 次后的光强为：

$$I_m=I_0e^{-2m\delta} \qquad (1\text{-}7\text{-}22)$$

视 I_0 为 $t=0$ 时的光强，则 t 时刻光在腔内的往返次数 m 为：

$$m=\frac{tc}{2L'} \qquad (1\text{-}7\text{-}23)$$

式中：L'——谐振腔的光学长度。

当谐振腔腔长与激光工作物质长度不相等时，L 的计算方法为：

$$L'=L+(n-1)l \qquad (1\text{-}7\text{-}24)$$

式中：L——腔长；

l——激光工作物质长度；

n——激光工作物质折射率。

将（1-7-23）式代入（1-7-22）式，并将 I_m 改写为 $I(t)$，有：

$$I(t)=I_0e^{-\frac{\delta c}{L'}t} \qquad (1\text{-}7\text{-}25)$$

比较（1-7-21）式与（1-7-25）式，可以得到：

$$\tau=\frac{L'}{\delta c} \qquad (1\text{-}7\text{-}26)$$

即腔损耗率 δ 越大，腔寿命 τ 越短。

另外，腔寿命 τ 也可以解释为腔内光子的平均寿命，下边对此加以证明。由于光强与光子数密度成正比，即：

$$I=\phi w \qquad (1\text{-}7\text{-}27)$$

式中: ϕ——光子数密度;

v——光在激光工作物质中的速度。

因此, t 时刻腔内的光子数密度 $\phi(t)$ 与 t 的关系可仿照(1-7-21)式写成:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}} \tag{1-7-28}$$

式中: ϕ_0——$t=0$ 时刻的光子数密度。

在 $t \sim t+dt$ 时间内因损耗而减少的光子数密度为:

$$-d\phi = \frac{\phi_0}{\tau_c} e^{-\frac{t}{\tau_c}} dt \tag{1-7-29}$$

这些光子在腔内存在的时间可以认为都是 t, 故所有在 $t=0$ 时刻就存在于腔内的光子的平均寿命为:

$$\frac{1}{\phi_0}\int_0^{\infty} t(-d\phi) = \frac{1}{\tau_c}\int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{\tau_c}} dt = \tau_c \tag{1-7-30}$$

因此, τ_c 即是腔寿命, 也是光子寿命, 还可以称为激光模式的寿命。

若腔内各种损耗所引起的腔寿命分别为 τ_i, 则腔的总寿命为:

$$\frac{1}{\tau_c} = \sum_i \frac{1}{\tau_i} \tag{1-7-31}$$

(三) 腔 Q 值

与 LC 谐振电路相似, 光学谐振腔也可以用品质因数 Q 来描述腔的特性。它的定义为:

$$Q = 2\pi\nu\frac{E}{P} \tag{1-7-32}$$

式中: E ——储存在腔内的总能量;

P ——单位时间所损耗的能量;

ν——腔内电磁场的振荡频率。

t 时刻腔内的总能量是:

$$E(t) = \phi(t) h\nu V \tag{1-7-33}$$

式中：V——腔体积

t 时刻的 P 值可由 $E(t)$ 对 t 求导得到，即

$$P(t) = -\frac{dE(t)}{dt} = -h\nu V\frac{d\phi(t)}{dt} \tag{1-7-34}$$

将（1-7-28）式代入上式得：

$$P(t) = h\nu V\frac{\phi(t)}{\tau} \tag{1-7-35}$$

将（1-7-33）式、（1-7-35）式代入（1-7-32）式中，可得：

$$Q = 2\pi\nu\tau \tag{1-7-36}$$

或者将（1-7-26）式代入上式得：

$$Q = 2\pi\nu\frac{L'}{\delta c} \tag{1-7-37}$$

可见，平均单程功率损耗率 δ、腔平均寿命 τ 与腔品质因数 Q 值三个物理量相互之间是关连的，损耗率 δ 值越大，腔寿命 τ 越短，腔 Q 值也就越小。

如果腔内同时存在几种损耗，每种损耗对应的腔 Q 值分别为 Q_i，则总 Q 值为：

$$\frac{1}{Q} = \sum_i \frac{1}{Q_i} \tag{1-7-38}$$

三、无源腔本征纵模线宽

由于无源腔存在损耗，使得腔内本征纵模的光场振幅随时间按指数规律衰减。由频谱分析理论可知，这种光场的谱线将有一定的线宽，下边我们就来推导它。

因为光强与光场振幅的平方成正比，根据（1-7-21）式，可以写出光场振幅随时间的变化规律为：

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau_c}} \qquad (1\text{-}7\text{-}39)$$

式中: A_0——$t=0$ 时刻的光场振幅。

设光场的振动频率为 ν, 则光场振动可写成:

$$E(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau_c}} e^{-j2\pi\nu_0 t} \qquad (1\text{-}7\text{-}40)$$

先对此式进行付里叶变换, 然后再求它的模平方, 这样便可得到无源腔本征纵模的频谱为:

$$I(\nu) = \left| F[E(t)] \right|^2 = \frac{1}{\frac{1}{4\tau_c^2} + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \qquad (1\text{-}7\text{-}41)$$

求出从最大值 $I(\nu)$ 下降一半所对应的两个频率之间的间隔, 就是本征纵模的线宽:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_c} \qquad (1\text{-}7\text{-}42)$$

将 (1-7-26) 式和 (1-7-36) 式分别代入此式中, 还可 (1-7-41) 写出 $\Delta\nu$ 分别与 δ 和 Q 的关系:

$$\Delta\nu = \frac{c\delta}{2\pi L}, \qquad (1\text{-}7\text{-}43)$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu}{Q} \qquad (1\text{-}7\text{-}44)$$

这说明, 描述无源腔损耗的 δ、τ、Q 三个物理量不仅相互间有关系, 而且它们又都决定了本征纵模的模式线宽。

四、谐振腔本征纵模频率间隔

我们以两个相互平行的平面镜谐振腔为例子, 来讨论本征纵模的频率间隔。每个本征纵模就是可能存在于腔内的驻波场。驻波条件可以叙述为: 光波从腔内某一点出发, 经过往返一周的传播以后, 再回到原来的位置上时应与出发时同相位, 也就是光波经往返一周后的位相延滞等于 2π 的整数倍。这个条件可用数学式子表示为:

$$2L'\frac{2\pi}{\lambda} = q' \cdot 2\pi \qquad (1\text{-}7\text{-}45)$$

式中: λ——光在真空中的波长;

q'——整数;

L'——谐振腔光学长度。

上式可简化为:

$$L' = q' \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (1\text{-}7\text{-}46)$$

它表明, 只有 L' 等于光的半波长整数倍时, 才可在腔内形成稳定的驻波场。因为 $\lambda = c/\nu$ (1-7-46) 式可改写为:

$$\nu = q'\frac{c}{2L'} \qquad (1\text{-}7\text{-}47)$$

该式的物理意义是, 当谐振腔光学长度 L' 给定以后, 它只能对频率满足 (1-7-47) 式的激光模式提供正反馈, 使之产生振荡。满足这个谐振条件的驻波场或本征纵模有无数多个。本节开头引入的纵模模序数 q 与这里的 q' 有一简单关系: $q = q' - 1$。从 (1-7-46) 式可以看出, q' 是个相当大的整数, 这是由于对一般的谐振腔来说, $L' \gg \lambda/2$。因此 q' 与 q 的区别可以不考虑, 用 q 代替 q' 后, (1-7-47) 式变成:

$$\nu_q = q \cdot \frac{c}{2L'} \qquad (1\text{-}7\text{-}48)$$

ν 加下标 q, 表示对应于摸序数 q 的本征纵模的频率。由此可得出相邻两个本征纵模之间的频率间隔应为:

$$\Delta\nu_q = \frac{c}{2L'} \qquad (1\text{-}7\text{-}49)$$

例如, $L = 10\text{cm}$ 的气体激光器 (设折射率 $n = 1$) 的 $\Delta\nu_q$ 为 1500MHz。$L = 10\text{cm}$ 的红宝石激光器 (设折射率 $n = 1.76$) 的 $\Delta\nu_q$ 为 850MHz。同样长度的谐振腔, 固体激光器的本征纵摸频率间隔要小于气体激光器。而同种激光工作物质的激光器, 谐振腔越短,

本征纵摸的频率间隔就越大。

五、菲涅耳数

在描述光学谐振腔的工作特性时，经常用到菲涅耳数这个概念，它的定义为:

$$F = \frac{a^2}{L\lambda} \qquad (1\text{-}7\text{-}50)$$

式中: a —— 反射镜线度。

菲涅耳数的物理意义可以有多种不同的解释，下边我们分别加以讨论。

(1) 衍射光在腔内的最大往返次数。这可以由图 1-7-6 加以说明。设从左边镜面的中心发出一条沿腔轴线的光线，此光线的衍射角 θ由 (1-7-7) 式描述。当它传播到右边镜面时，偏离镜面中心的距离称单程偏移量 x，它等于:

图 1-7-6　菲涅耳数物理意义

$$x = \theta L = \frac{\lambda L}{2a} \qquad (1\text{-}7\text{-}51)$$

往返偏移量为 2x，设从镜面中心开始传播的光线，往返 F 次后逸出腔外，则有:

$$2x \cdot F = a \qquad (1\text{-}7\text{-}52)$$

将 (1-7-51) 式代入，计算出 F 的值后即可发现，往返次数 F 就是菲涅耳数。

(2) 从一面镜子的中心看另一面镜子的菲涅耳半波带数。用图 1-7-7 来说明。设两镜面都是圆形，以左镜面园心 O 点作为观察点，则右镜面所划分的菲涅耳半波带都是以右镜面园心 O 为圆心

的同心圆环，各相邻圆环的边缘到 O 点的距离彼此相差 $\lambda/2$。因此从左镜圆心 O 到右镜边缘的距离就应该为 $L+F\dfrac{\lambda}{2}$，其中 F 就是右镜所划出的菲涅耳半波带数。不难看出：

$$L+\frac{F\lambda}{2}=\sqrt{L^2+a^2} \qquad (1\text{-}7\text{-}53)$$

图 1-7-7　菲涅耳数物理意义

对于一般的谐振腔，都有 $L \gg a$，因此（1-7-53）式的右边可近似计算而得到：

$$L+\frac{F\lambda}{2}=L+\frac{a^2}{2L} \qquad (1\text{-}7\text{-}54)$$

由上式算出 F 值，恰好就是菲涅耳数。因此菲涅耳数代表从任一镜中心看另一镜面的菲涅耳半波带数。

（3）单程衍射损耗率的倒数。由（1-7-8）式可以看出，单程衍射损耗率 δ 的倒数即为菲涅耳数 F。

习　题　一

（1）为使氦氖激光器的相干长度达到 1km，它的单色性 $\Delta\lambda/\lambda$ 应为多大？

（2）$\lambda=5000$ Å 的光子单色性 $\Delta\lambda/\lambda=10^{-7}$，求此光子的位置不确定量 Δx。

（3）CO_2 激光器的腔长 $L=100$cm，反射镜直径 $D=1.5$cm，两镜的光强反射系数分别为 $r_1=0.985$，$r_2=0.8$。求由衍射损耗及输出损耗所分别引起的 δ、τ、Q、$\Delta\nu$。（设 $n=1$）

（4）有一个谐振腔，腔长 $L=1$m，两个反射镜中，一个全反，一个半反。半反镜反射系数 $r=0.99$，求在 1500MHz 的范围内所

包含的纵模个数，及每个纵模的线宽。(不考虑其它损耗)

(5) 某固体激光器的腔长为 45cm，介质长 30cm，折射率 $n=1.5$，设此腔总的单程损耗率 0.01π。求此激光器的无源腔本征纵模的模式线宽。

(6) 氦氖激光器相干长度为 1km，出射光斑的半径为 $r=0.3mm$。求光源线宽及 1km 处的相干面积与相干体积。

第二章　辐射场与物质的相互作用

激光器的物理基础是光频电磁场与物质的原子、分子或离子之间的共振相互作用。为了揭示这些相互作用的本质，掌握激光器工作的特性，须建立激光器理论。激光器理论有非常严格的，也有近似的。本章首先简介几种激光器理论，然后讨论激光谱线的线型函数，以及各种谱线加宽的机理，最后引出激光器的速率方程。

§ 2.1　激光器的几种理论

激光器的严格理论是建立在量子电动力学基础上的，它原则上可以描述激光器的全部特性，但由于它的复杂性，我们在讨论激光器的某些现象时不一定非得采用它，而是使用不同近似程度的理论去描述不同层次的问题。下面简介激光器的四类不同理论的出发点及其应用范围。

一、经典理论

该理论将原子系统与光频电磁场都作经典处理，即用经典电动力学的麦克斯韦方程组描述电磁场，将原子中的运动电子视为服从经典力学的振子。该理论成功地解释了物质对光的吸收与色散现象，说明了原子的自发辐射及谱线宽度。本章§ 2.2 所讨论的谱线加宽与线型函数，第四章§ 4.5 所讨论的频率牵引现象，都将引用经典理论的结论。

二、半经典理论

该理论仍采用经典的麦克斯韦方程组描述光频电磁场，而使用量子力学理论描述物质的原子。采用这种方法建立激光器理论的工作是由兰姆（W.E.Lanb）于 1946 年开始的，又称激光器的兰姆理论。该理论可以较好地揭示激光器中的大部分物理现象，如强度特性、增益饱和效应、模式竞争效应、频率牵引现象及频率推斥效应等。但它也掩盖了与场的量子化特性有关的物理现象，如自发辐射的产生以及由它所引起的激光振荡线宽极限、振荡过程中的量子起伏效应（噪声和相干性）。由于该理论的数学处理相当复杂，超出本书范围，故不讨论。

三、量子理论

这是量子电动力学处理方法，它对光频电磁场以及物质原子都作量子化处理，将两者作为统一的物理体系加以研究。这种激光器全量子理论只是在须要严格确定激光相干性和噪声以及线宽极限等问题时才是必要的。这些内容也超出了本书范围。

四、速率方程理论

这是量子理论的一种简化形式。因为它是从光子（即量子化的辐射场）与物质原子的相互作用出发的，并忽略了光子的相位特性与光子数的起伏特性，而使得该理论具有非常简单的形式。这个理论的基础是自发辐射、受激辐射和受激吸收几率与爱因斯坦系数间的关系，由此导出激光器的速率方程。利用速率方程可以讨论激光器的强度特性，如反转粒子数的烧孔效应、兰姆凹陷现象、增益饱和现象，并且可以给出对模式竞争、线宽极限等现象的粗略解释。但该理论不能揭示增益介质对光的色散现象以及由此而引起的频率牵引现象。本书所讨论的绝大多数有关激光的理

论主要采用的是速率方程理论。

§ 2.2 谱线加宽与线型函数

光谱线的线型函数及线宽对激光器的工作特性有很大的影响，本节讨论这两个概念以及自然加宽的线型函数和线宽。

一、线型函数

将光源所发出的光通入光谱仪，在照相底板上的不同位置便可得到由若干条亮度不等的线所组成的光谱。其中每一条线称光谱线，它代表光源发光中的某一波长成分。不同光源所发光的波长成分不一样，也就是有不同的光谱。由于发光粒子处在上能级的寿命是有限的，故自发辐射发光的功率并不是全部集中在由跃迁上、下能级所决定的中心频率处，而是分布在此中心频率附近的很小频率范围内。可以用单色辐射功率 P_ν 来描述这一分布规律，它定义为发光粒子在频率 ν 处、单位频率间隔内的自发辐射功率，它是频率 ν 的函数。在中心频率 ν 处，单色辐射功率最大。偏离中心频率时，单色辐射功率便按一定的规律衰减。为了描述单色辐射功率随频率变化的规律，我们引入光谱线的线型函数，它定义为：

$$g(\nu,\nu)=\frac{P_\nu}{P} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

式中：P —— 总自发辐射功率。

因为 $P_\nu d\nu$ 可表示发光粒子在 $\nu \sim \nu+d\nu$ 范围内的自发辐射功率，因此总自发辐射功率为：

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} P_\nu d\nu \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

线型函数曲线如图 2-2-1 所示。由（2-2-1）式与（2-2-2）式很容易得出线型函数满足所谓归一化条件。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu,\nu)\,d\nu = 1 \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

图 2-2-1　线型函数曲线

它说明，图 2-2-1 中线型函数曲线与横轴所围的面积等于 1。由线型函数的定义，可看出它的量纲为秒。

一般说来，线型函数曲线是以中心频率 ν 处为中心的对称曲线，$\nu = \nu$ 处的函数值 $g(\nu,\nu)$ 最大，设在 $\nu = \nu$ 和 $\nu = \nu$ 处线型函数值降至最大值的一半:

$$g(\nu,\nu) = g(\nu,\nu) = \frac{1}{2} g(\nu,\nu) \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

我们就称 ν 与 ν 之差 $\Delta\nu = \nu - \nu$ 为光谱线的宽度，或称线宽。

二、自然加宽

处于激发态的发光粒子，在自发辐射的发光过程中，辐射功率不断衰减，导致光谱线有一定的宽度。发光粒子的这种谱线加宽是不可避免的，称作自然加宽。现在我们从经典电子论的观点出发，推导自然加宽的线型函数及其线宽。经典电子论认为一个

原子可以看成是个偶极子，它由一个正电中心和一个负电中心组成，当正电中心与负电中心之间的距离 r 按照简谐振动的规律变化时，此原子便发射出同频率的电磁波。用 ν 表示振动频率，则 r 可以表示成：

$$r = r_0 \cos 2\pi\nu t \tag{2-2-5}$$

原子的能量在发射电磁波的过程中不断衰减，相应的辐射电磁场也不断衰减。以发射开始的瞬间作为计时起点，并采用复数形式表示振动，就可以将发光原子自发辐射产生的光频电磁场随时间变化的规律写成：

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-\gamma t} e^{i2\pi\nu_0 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2-2-6}$$

式中：γ——衰减因子。

(2-2-6) 式所描述的电磁场可用图 2-2-2 表示。显然，发光原子所发射的电磁波不是严格的简谐波，其中包含有许多不同频率的简谐波。对 (2-2-6) 式进行付里叶变换，然后再取模平方，便可得到发光原子的自发辐射单色辐射功率为：

图 2-2-2　原子自发辐射的电磁场

$$P_\nu = |F[E(t)]|^2 = \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2} \tag{2-2-7}$$

将 (2-2-7) 式代入 (2-2-2) 式以及 (2-2-1) 式中，可求出这种自然加宽的线型函数为：

$$g_N(\nu,\nu_0)=\frac{\dfrac{\gamma}{2\pi}}{\left(\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2+(\nu-\nu_0)^2}\tag{2-2-8}$$

当 $\nu=\nu_0$ 时，函数值取最大值:

$$g_m=g_N(\nu_0,\nu_0)=\frac{2}{\gamma}\tag{2-2-9}$$

当 $\nu=\nu_0\pm\dfrac{\gamma}{2\pi}$ 时，函数值降至最大值的一半，故线型函数的线宽为:

$$\Delta\nu=\frac{\gamma}{\pi}\tag{2-2-10}$$

将（2-2-10）**式代入**（2-2-8）**式中，有**:

$$g_N(\nu,\nu_0)=\frac{\dfrac{\Delta\nu}{2\pi}}{\left(\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)^2+(\nu-\nu_0)^2}\tag{2-2-11}$$

或者改写成:

$$g_N(\nu,\nu_0)=\frac{\left(\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\Delta\nu}{2}\right)^2+(\nu-\nu_0)^2}g_m\tag{2-2-12}$$

$$g_m=\frac{2}{\pi\Delta\nu}\tag{2-2-13}$$

为了推导自然线宽 $\Delta\nu$ 的计算公式，我们先来看一下由（1-3-9）**式所描述的因自发辐射所造成的上能级粒子数密度随时间衰减的规律。因为自发辐射功率与粒子数密度成正比，故自发辐射功率随时间的变化规律也可以写成类似的形式**:

$$P(t)=P(0)e^{-A_{21}t}\tag{2-2-14}$$

另一方面，取 (2-2-6) 式的模平方，可得到单个发光原子自发辐射功率随时间变化的规律为:

$$|E(t)|^2 = E_0^2 e^{-2\gamma t} \tag{2-2-15}$$

整个光源的自发辐射功率与它成正比，故有:

$$P(t) = P(0)e^{-2\gamma t} \tag{2-2-16}$$

比较 (2-2-14) 式与 (2-2-16) 式，可得到:

$$A_{21} = 2\gamma \tag{2-2-17}$$

由 (1-3-10) 式知，自发辐射的跃迁几率 A_{21} 与发光原子处在上能级的寿命 τ_N 互为倒数，因此有:

$$\gamma = \frac{1}{2\tau_N} \tag{2-2-18}$$

将它代入 (2-2-10) 式中，便可得到自然线宽为:

$$\Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi\tau_N} \tag{2-2-19}$$

例如，红宝石激光器中的发光粒子 Cr^{+3} 离子处在激光上能级 E_2 的寿命大约为 $\tau_N = 3\times 10^{-3}$s，因此 Cr^{+3} 离子在激光上、下能级之间的自发辐射跃迁所产生的谱线自然线宽就为 $\Delta\nu_N = 50$Hz。氦氖激光器中的 Ne 原子处在激光上能级的寿命约为 10ns～20ns，故它的自然线宽约为 $\Delta\nu_N = 8$MHz～16MHz。二氧化碳激光器中的 CO_2 分子处在激光上能级的寿命约 10^{-4}s～10^{-5}s，故自然线宽约为 $\Delta\nu_N = 1600$Hz～16000Hz。YAG 激光器中的 Nd^{+3} 离子处在激光上能级的寿命约为 420μs，故 $\Delta\nu_N = 380$Hz。我们称由 (2-2-12) 式与 (2-2-13) 式所描述的线型函数为洛仑兹型。

§ 2.3 均 匀 加 宽

由§ 2.2 中 (2-2-12) 与 (2-2-13) 两式描述的线型函数及 (2-2-19) 式描述的线宽，表示的是单个发光粒子自发辐射时产生

的自然光谱线线型函数与自然线宽。由成千上万个发光粒子组成的光源的光谱线是由每个发光粒子的光谱线叠加而成。事实证明，光源的光谱线往往比单个发光粒子的光谱线要宽些，称为谱线加宽。它是由光源中各发光粒子所处环境的各种物理因素所造成的。按照加宽机理的特点不同，谱线加宽可分成两大类：一类为均匀加宽，另一类为非均匀加宽。本节先讨论均匀加宽。所谓均匀加宽，是指在光源的发光粒子系统中，每个粒子由于某种物理因素的影响，使光谱线在原来的自然光谱线线宽的基础上又加宽了，而中心频率保持不变，并且所有发光粒子的谱线加宽完全一样。这样，整个光源的光谱线中心频率仍与单个发光粒子的中心频率一致，而且经过归一化以后的线型函数也与单个粒子的线型函数相同。换句话说，也就是不能把光源的光谱线某一频率处的线型函数值与特定的发光粒子联系起来，所有发光粒子对任一频率处的光源谱线都有贡献。

不同工作物质的激光器产生均匀加宽的物理因素也不尽相同。对于气体激光器来说，产生均匀加宽的原因主要是由于气体分子或原子间的碰撞作用使发光粒子突然中断发光所造成的。如图 2-3-1 所示的波列，在 t_1 时刻因碰撞而中断。显然它比起图 2-2-2 中的自然衰减波列来，偏离简谐波的程度更大，因此，它势必引起谱线的进一步增宽，我们称这种加宽为碰撞加宽。由于碰撞的发生完全是随机的，我们只能了解它们的统计平均性质。设任意一个发光粒子与其它粒子发生碰撞的平均时间间隔为 τ，它描述了气体原子或分子之间碰撞的频

图 2-3-1　碰撞原子自发辐射电磁场

繁程度，称为平均碰撞时间，它也就是由于碰撞而导致发光粒子处在激光上能级的寿命。由此可见，每个发光粒子由于碰撞而引起的谱线加宽与自然加宽的机理是一样的。因而碰撞加宽的线型函数与自然加宽的线型函数一样，即：

$$g_L(\nu,\nu_0)=\frac{\left(\frac{\Delta\nu_L}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_L}{2}\right)^2+(\nu-\nu_0)^2}g_m \tag{2-3-1}$$

$$g_m=\frac{2}{\pi\Delta\nu_L} \tag{2-3-2}$$

$$\Delta\nu_L=\frac{1}{2\pi\tau_L} \tag{2-3-3}$$

式中：$\Delta\nu_L$——碰撞线宽。

由于光源中各个发光粒子因碰撞作用而产生的谱线加宽基本上都是一样的，中心频率没有发生变化，只是线宽加大。因此，碰撞加宽属于均匀加宽。气体激光器的碰撞线宽 $\Delta\nu_L$ 的数值可由实验测定。经验表明，当放电管中的气压不太高时，$\Delta\nu_L$ 与压强成正比：

$$\Delta\nu_L=\alpha p \tag{2-3-4}$$

式中：p——气体压强，单位为 Pa；

α——比例系数，单位为 MHz/Pa。

例如，二氧化碳激光器 $\alpha=0.049$MHz/Pa，氦氖激光器 $\alpha=0.75$MHz/Pa（氦气与氖气的混合比为 7∶1）。

将自然加宽与碰撞加宽的线型函数（2-2-12）与（2-3-1）式合并起来，称气体激光器的均匀加宽线型函数，它也是洛仑兹型：

$$g_H(\nu,\nu_0)=\frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2+(\nu-\nu_0)^2}g_m \tag{2-3-5}$$

$$g_m = \frac{2}{\pi \Delta\nu_H} \tag{2-3-6}$$

$$\Delta\nu_H = \Delta\nu_N + \Delta\nu_L$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_N} + \frac{1}{\tau_L}\right) \tag{2-3-7}$$

式中: $\Delta\nu_H$ ——均匀加宽线宽。

τ_N —— 自然加宽寿命, 即发光粒子处在激光上能级的平均寿命;

τ_L ——碰撞加宽寿命, 即发光粒子的平均碰撞时间间隔。

对一般气体激光器来说, 有 $\Delta\nu_L \gg \Delta\nu_N$, 均匀加宽主要由碰撞加宽决定, 只有当气体压强极低时, 自然加宽才会显出来。

固体激光器产生均匀加宽的因素比起气体激光器来要复杂得多, 它主要有以下三个因素:

(1) 原子与原子间的相互作用。虽然在晶体中原子基本上是不动的, 但每个原子也受到相邻原子的耦合作用而在某一无规时刻改变自己的运动状态, 我们也可以称之为“碰撞”, 由此造成的谱线加宽与气体的碰撞加宽相同, 也属均匀加宽。

(2) 原子晶格热弛豫过程产生的无辐射跃迁。它导致发光原子在激光态能级的寿命缩短, 故也属于均匀加宽。

(3) 晶格热振动。由于晶格原子的热振动, 发光离子处在随时间周期性变化的晶格场中, 导致它的能级位置在某个范围内变化, 而引起谱线加宽。由于晶格热振动对所有发光离子的影响基本上相同, 所以它也属均匀加宽。

与晶格热振动比较起来, 原子间的耦合作用与原子晶格热弛豫过程都较弱, 故固体激光器中的均匀加宽主要是由晶格热振动引起的。

§ 2.4　非均匀加宽

光源中发光粒子由于某种物理因素的影响，使得中心频率发生变化。不同的发光粒子因所处的物理环境不同，造成中心频率的变化也不同，这就使由各发光粒子光谱线叠加而成的光源光谱线加宽。光源光谱线的线型函数取决于各发光粒子中心频率的分布，它不再与单个发光粒子的光谱线线型函数相同，我们称这种加宽为非均匀加宽。它的特点是，不同发光粒子只对光源光谱线的相应部分有贡献。

对于气体激光器来说，产生非均匀加宽的主要物理因素是多普勒频移效应。声波的多普勒频移现象在日常生活中是司空见惯的，当我们站在火车站月台上听进站火车汽笛长鸣时，会感觉汽笛的音调要比静止的火车汽笛音调高些。相反，听出站火车汽笛长鸣时，感觉汽笛音调比静止火车汽笛音调低。音调高低反映声波频率的高低，这说明，如果声源与接收器相对运动时，接收器所接收到的声波频率将随两者的相对速度的不同而改变。和它相同，当光源与光接收器之间有相对运动时，光接收器接收到的光波频率也会随两者间的相对运动速度的不同而改变。这一现象称为光波多普勒频移效应。设光源与接收器之间的相对运动速度比光速 c 小得多，则光接收器探测到的光波频率为:

$$\nu_0' = \nu\left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

ν 为光源发出的光波频率，v 是光源与接收器的相对速度，如果两者是互相接近运动，则 v 取+ 号，如果两者是相互远离，则 v 取 - 号。气体激光器放电管内的发光原子或分子始终处在无规则的热运动状态中。如果以放电管轴线方向作为 z 轴，激光输出方向为

正方向，气体粒子沿 z 轴的速度分量各不相同。这种具有不同速度分量 v_z 的发光粒子数可以用分布函数 $f(v_z)$ 描述。它定义为在热平衡条件下，速度 z 分量处在 v_z 处时单位速度间隔内的粒子数占总粒子数的百分比：

$$f(v_z) = \frac{dN}{N\,dv_z} \tag{2-4-2}$$

式中：N —— 总粒子数；

dN —— 速度 z 分量处于 v_z- v_z+dv_z 内的粒子数。

按玻尔兹曼统计方法可以得出分布函数的解析表达式为：

$$f(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} \tag{2-4-3}$$

式中：m —— 气体粒子的质量；

T —— 温度；

k —— 玻尔兹曼常数。

这个分布是高斯分布，分布曲线如图 2-4-1 所示。它说明，放电管中气体粒子沿管轴线速度分量为零的几率最大，沿轴线向两个不同方向运动的几率均等。假设有一个光接收器放在谐振腔输出镜的一侧，向接收器运动的发光粒子所发光的中心频率测量值将高于这些粒子静止时所发光的中心频率，而背离接收器运动的发光粒子中心频率测量值则低于静止时的中心频率。我们称接收器所测量到的运动粒子中心频率值 ν_0' 为表观中心频率。尽管发光粒子体系中各粒子的固有中心频率是一样的，但由于表

图 2-4-1　气体粒子按速率分量的分布曲线

观中心频率不同了，所以，由各粒子光谱线叠加而成的整个光源光谱线便加宽了。这种加宽称为多普勒加宽，属非均匀加宽。下边我们来推导气体激光器中由于多普勒加宽而形成的光谱线的线型函数。从 (2-4-2) 式出发，可定义气体粒子按表观中心频率 ν_0' 的分布函数为:

$$f(\nu_0') = \frac{dN}{N\,d\nu_0'} \tag{2-4-4}$$

它的物理意义是: 气体粒子的表观中心频率处于 ν_0' 处时单位频率间隔内的粒子数与总粒子数之比。并可改写为:

$$f(\nu_0') = f(v_z)\frac{dv_z}{d\nu_0'} \tag{2-4-5}$$

由 (2-4-1) 式可得到:

$$v_z = \frac{\nu_0' - \nu_0}{\nu_0}c \tag{2-4-6}$$

$$\frac{dv_z}{d\nu_0'} = \frac{c}{\nu_0} \tag{2-4-7}$$

将 (2-4-3)、(2-4-6)、(2-4-7) 式代入 (2-4-5) 式中，可得到:

$$f(\nu_0') = \frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2(\nu_0'-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} \tag{2-4-8}$$

将表观中心频率 ν_0' 改用 ν 表示，上式可重新改写为:

$$f(\nu) = \frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} \tag{2-4-9}$$

用 N_ν 表示在表观中心频率 ν 处时单位频率间隔内的粒子数，即:

$$N_\nu = \frac{dN}{d\nu} = f(\nu)N \tag{2-4-10}$$

而单色辐射功率 P_ν 与 N_ν 成正比，又 N_ν 与 $f(\nu)$ 成正比，故 P_ν 与 $f(\nu)$ 成正比。根据线型函数的定义，有:

$$g_D(\nu,\nu_0)=\frac{f(\nu)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(\nu)d\nu}=f(\nu) \qquad (2\text{-}4\text{-}11)$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty}f(\nu)d\nu=1$ 是因为 $f(v_z)$ 与 $f(\nu)$ 等分布函数本身就满足归一化条件。当 $\nu=\nu_0$ 时，线型函数值达最大:

$$g_m=g_D(\nu_0,\nu_0)=\frac{c}{\nu_0}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}4\text{-}12)$$

令 $g_D(\nu,\nu_0)=\frac{1}{2}g_m$，可求出所对应的两个频率为:

$$\nu=\nu_0\pm\frac{\nu_0}{c}\left(\frac{2kT\ln2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}4\text{-}13)$$

因此线宽为:

$$\Delta\nu_D=\frac{2\nu_0}{c}\left(\frac{2kT\ln2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}4\text{-}14)$$

将 (2-4-14) 式代入 (2-4-9) 式、(2-4-11) 式和 (2-4-12) 式中，可得到多普勒加宽的线型函数为:

$$g_D(\nu,\nu_0)=g_m e^{-4\ln2\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (2\text{-}4\text{-}15)$$

$$g_m=\frac{2}{\Delta\nu_D}\left(\frac{\ln2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}4\text{-}16)$$

图 2-4-2 为多普勒加宽线性函数，是高斯型。图中画出它与各粒子光谱线的关系。每个粒子发出的光谱线都是均匀加宽的洛仑兹线型，因为频率为 ν_0 处的发光粒子最多，因此叠加的结果使得

图 2-4-2　多普勒加宽线型函数

总光谱线最高，频率从 ν_0 处向二边变化，相应的发光粒子数对称地减小，致使总光谱线也对称地降低。如果将 (2-4-14) 式中的发光粒子的质量 m 表示为 $m = 1.66 \times 10^{-27} M$，单位为 kg，M 为发光粒子的原子量或分子量，并将各物理常数代入 (2-4-14) 式，可得到：

$$\Delta\nu_D = \frac{215}{\lambda}\left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-4-17}$$

λ 为与中心频率 ν_0 对应的中心波长，如果它用 μm 为单位，则 $\Delta\nu_D$ 的单位为 MHz。如氦氖激光器的 $\lambda = 0.6328$ μm，M = 20，令 T = 400K，可求得 $\Delta\nu_D = 1500$ MHz。二氧化碳激光器的 $\lambda = 10.6$ μm，M = 44，当 T = 400K 时，$\Delta\nu_D = 60$ MHz。气体激光器的非均匀加宽往往只有多普勒加宽一项，因此，非均匀加宽的线型函数及其线宽就是多普勒加宽的线型函数及多普勒线宽：

$$g_i(\nu, \nu_0) = g_D(\nu, \nu_0) \tag{2-4-18}$$

$$\Delta\nu_i = \Delta\nu_D \tag{2-4-19}$$

固体激光器中的发光粒子不能像气体激光器中的那样自由运动，因此，它不存在多普勒加宽。但也有引起非均匀加宽的物理因素，其中最主要的是晶格缺陷的影响，如位错、空位等。在晶

格缺陷的部位，晶格场将与无缺陷部位的理想晶格场不同，处在缺陷部位的发光粒子能级会发生位移，导致其发光谱的中心频率发生变化。由于晶体的不同缺陷部位处发光粒子的中心频率也不一样，使得整个光源的总光谱线加宽，这种加宽属于非均匀加宽，它在均匀性差的晶体中表现得最为突出。固体激光器的非均匀加宽线型函数一般很难从理论上求得，只可由实验测定。

§ 2.5　综合加宽

激光器中引起均匀加宽和非均匀加宽的物理因素往往是同时存在的。例如气体激光器中，碰撞加宽与多普勒加宽同时存在；固体激光器中，由于晶格热振动和晶格缺陷所引起的加宽也是同时存在的。我们称由均匀加宽与非均匀加宽同时引起的光源谱线加宽为综合加宽，它的线型函数等于均匀加宽的线型函数与非均匀加宽的线型函数的卷积，即：

$$g(\nu,\nu_0) = g_H(\nu,\nu_0) \cdot g_i(\nu,\nu_0) \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

当均匀加宽的线宽 $\Delta\nu_H$ 比非均匀加宽的线宽 $\Delta\nu_i$ 大得多时，可近似认为是均匀加宽，反之认为是非均匀加宽。现将两种常用气体激光器的各种线宽数据列在此。

氦氖激光器：

自然线宽　　$\Delta\nu_N \approx 10\ \mathrm{MHz}$

多普勒线宽　　$\Delta\nu_D \approx 1500\ \mathrm{MHz}$

碰撞线宽　　$\Delta\nu_L = 0.75p\ \mathrm{MHz}$

p 为放电管气压，单位为 Pa。一般情况下，$p = 100\mathrm{Pa} \sim 400\mathrm{Pa}$，此时 $\Delta\nu_H = \Delta\nu_N + \Delta\nu_L$ 的数值远小于 $\Delta\nu_D$，因此，氦氖激光器常被视作是非均匀加宽。

二氧化碳激光器：

自然线宽　　$\Delta\nu_N = 10^3\ \mathrm{Hz} \sim 10^4\ \mathrm{Hz}$

多普勒线宽　　　　$\Delta\nu = 60$ MHz

碰撞线宽　　　　　$\Delta\nu = 0.049p$ MHz

p 的意义和单位同上。由此可见，当 $p = 1200$Pa 左右时为综合加宽；当 p n 1200Pa 时为非均匀加宽；当 p m 1200Pa 时为均匀加宽。

§ 2.6　速率方程

速率方程是讨论激光器的反转粒子数与增益的基础。虽然实际激光工作物质的能级结构和跃迁特性很复杂，但我们可以从中归纳出一些主要的物理过程，对简化的并具有代表性的能级结构来讨论其速率方程的形式。这里我们分别讨论以红宝石激光器为代表的三能级系统和以 YAG 为代表的四能级系统的速率方程组。

一、三能级系统速率方程组

图 2-6-1 为红宝石激光器 Cr^{+3} 离子的能级结构。E_1 为基态，

图 2-6-1　三能级系统的速率方程组

作为激光下能级。E_2 为亚稳态，是激光上能级。E_3 为抽运高能级。发光粒子在这些能级间的各种跃迁过程简述如下：

(1) E_1 与 E_3 之间主要有三种跃迁，W_{13}为泵浦源，它将发光粒子由基态抽运到高能级上去的速率称抽运几率，定义为单位时间从单位体积内被抽运到 E_3 能级的粒子数占该体积总粒子数比值。A_{31}、S_{31}分别表示 E_3 能级的粒子以自发辐射、非辐射形式回到基态的跃迁几率。

(2) E_3 与 E_2 能级之间的跃迁主要是 E_3 的粒子以非辐射形式(即热驰豫过程）转移到 E_2 能级，跃迁几率是 S_{32}，它比起 A_{31}和 S_{31}来要大得多。

(3) E_2 与 E_1 能级间，也就是激光上、下能级间有四种不同跃迁。其中 A_{21}与 S_{21}分别是 E_2 能级的粒子以自发辐射和非辐射形式向 E_1 能级的跃迁，它们的跃迁几率都比较小。W_{12}与 W_{21}分别是受激吸收与受激辐射的跃迁几率。由于 A_{21}与 S_{21}很小，当粒子抽运速率大到一定程度，就可以形成 E_1 与 E_2 能级间的粒子数反转状态，即 $n_2 > n_1$。在此状态下，受激辐射与受激吸收跃迁便占绝对优势。

根据图 2-6-1，我们可以写出各能级粒子数密度随时间而变化的方程组为:

$$\frac{dn_3}{dt} = n_1 W_{13} - n_3(S_{32} + A_{31} + S_{31}) \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2(A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \qquad (2\text{-}6\text{-}2)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n_0 \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

式中：n_0——总粒子数密度。

这里$\frac{dn_1}{dt}$的速率方程未列出，是因为它不是独立的方程。红宝石激光器在室温条件下各跃迁几率的数据为：$S_{32} \approx 0.5 \times 10^7$ 1/s，$A_{31} \approx 3 \times 10^5$ 1/s，$A_{21} = 0.3 \times 10^3$ 1/s，$S_{21} \approx 0$，$S_{31} \approx 0$。

现在再来分析激光器谐振腔内的光子数密度随时间变化的规律。假设腔内只有一种激光模式，则该模式中的光子数密度在受

激吸收和受激辐射共同作用下随时间所产生的增长率为:

$$\frac{d\phi}{dt} = n_2 W_{21} - n_1 W_{12} \tag{2-6-4}$$

此外，由于谐振腔存在损耗，它对上述光子数密度的增长率会产生影响。由第一章§ 1.7 中的公式 (1-7-28) 可以看出，在腔损耗作用下，光子数密度增长率为:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\phi}{\tau} \tag{2-6-5}$$

式中: τ——谐振腔平均寿命或光子平均寿命。

将 (2-6-4) 与 (2-6-5) 两式合在一起，可写成:

$$\frac{d\phi}{dt} = n_2 W_{21} - n_1 W_{12} - \frac{\phi}{\tau} \tag{2-6-6}$$

为了进一步揭示 W_{21} 与 W_{12} 的大小，我们需要对第一章§ 1.3 中引入的爱因斯坦系数及其关系进行更深入的讨论。为此，现将 (1-3-12)、(1-3-14) 和 (1-3-21) 三式重抄于此:

$$W_{21} = B_{21} u_\nu \tag{1-3-12}$$

$$W_{12} = B_{12} u_\nu \tag{1-3-14}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = h\nu m_\nu \tag{1-3-21}$$

u_ν 与 m_ν 分别为单色的辐射能量密度及模密度，即它们描述的都是在频率 ν 处时单位频率间隔内的相应物理量，故它们都是 ν 的函数。而 A_{21}、W_{21}、W_{12} 所定义的跃迁几率，因为没有考虑谱线加宽的因素，实际上指的都是总跃迁几率。显然，在引入谱线加宽的线型函数概念以后，这三个公式便不尽合理了。首先我们定义三个单色爱因斯坦系数:

$$A_{21}(\nu) = A_{21} g(\nu, \nu_0) \tag{2-6-7}$$

$$B_{21}(\nu) = B_{21} g(\nu, \nu_0) \tag{2-6-8}$$

$$B_{12}(\nu) = B_{12}g(\nu, \nu_0) \quad (2\text{-}6\text{-}9)$$

这里 $A_{21}(\nu)$ 有比较明确的物理意义，即它表示在总自发辐射跃迁几率 A_{21} 中，分配到频率 ν 处，单位频率间隔内的自发辐射跃迁几率。故它又称为单色自发辐射跃迁几率，是 ν 的函数。需要指出的是（2-6-7）式～（2-6-9）式中的线型函数是发光粒子的自然加宽谱线的线型函数。现在，我们可以将（1-3-12）式、（1-3-14）式和（1-3-21）式三式修正为：

$$W_{21}(\nu) = B_{21}(\nu)u_\nu \quad (2\text{-}6\text{-}10)$$

$$W_{12}(\nu) = B_{12}(\nu)u_\nu \quad (2\text{-}6\text{-}11)$$

$$\frac{A_{21}(\nu)}{B_{21}(\nu)} = h\nu n_\nu \quad (2\text{-}6\text{-}12)$$

这样每个公式两边的相应物理量都是单色的了。将（2-6-7）式与（2-6-8）式代入（2-6-12）式后发现，单色爱因斯坦系数 $A_{21}(\nu)$ 与 $B_{21}(\nu)$ 的关系和 A_{21}、B_{21} 的关系一样。$W_{12}(\nu)$ 与 $W_{12}(\nu)$ 分别称单色受激辐射与单色受激吸收的跃迁几率，总的受激辐射与受激吸收跃迁几率分别为：

$$W_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} B_{21}(\nu)u_\nu d\nu \quad (2\text{-}6\text{-}13)$$

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} B_{12}(\nu)u_\nu d\nu \quad (2\text{-}6\text{-}14)$$

下边以受激辐射为例，讨论（2-6-13）的计算。将（2-6-8）式代入（2-6-13）式：

$$W_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{21}g(\nu, \nu_0)u_\nu d\nu \quad (2\text{-}6\text{-}15)$$

该积分在一般情况下是比较复杂的，但对于激光器来说，由于辐射场基本上是准单色的，其谱线宽度远比发光粒子本身的自然线

宽小得多，这样我们就可以将 u_ν 写成中心频率为 ν 的 δ 函数的形式，即：

$$u_{\nu'}(\nu') = u\delta(\nu'-\nu) \qquad (2\text{-}6\text{-}16)$$

式中：u —— 总辐射能量密度。

这里将自变量 ν 改写成 ν' 的形式。这种准单色辐射场与原子相互作用的谱线关系如图 2-6-2 所示。由于在 $u_{\nu'}(\nu')$ 函数的极窄的范围内，发光粒子的自发辐射线型函数可近似看成不变，利用 δ 函数的性质，(2-6-15) 式的计算结果为：

图 2-6-2 原子与准单色场的作用

$$W_{21} = B_{21}ug(\nu,\nu) \qquad (2\text{-}6\text{-}16)$$

式中：$g(\nu,\nu)$ —— 发光粒子自发辐射的线型函数在辐射场中心频率 ν 处的函数值。

同时，总受激吸收的跃迁几率为：

$$W_{12} = B_{12}ug(\nu,\nu) \qquad (2\text{-}6\text{-}17)$$

(2-6-16) 与 (2-6-17) 两式的物理意义是，由于发光粒子的谱线加宽，与它相互作用的单色光频率 ν 不一定精确等于粒子中心频率 ν 时才发生受激跃迁。在 $\nu = \nu$ 附近的频率范围内，都能产生受激跃迁。当 $\nu = \nu$ 时跃迁几率最大，ν 偏离 ν 跃迁几率就急剧下降。

引起受激跃迁的辐射场能量密度为：

$$u = \phi\nu \qquad (2\text{-}6\text{-}18)$$

式中：ϕ —— 激光模式的光子数密度。

将该式代入 (2-6-16) 式与 (2-6-17) 式中，因 $B_{12} = B_{21}$，故：

$$W_{21}=W_{12}=B_{21}\phi\nu g(\nu,\nu_0) \qquad (2\text{-}6\text{-}19)$$

再用 (1-3-21) 式, 可得到:

$$W_{21}=W_{12}=\frac{A_{21}}{n_\nu}g(\nu,\nu_0)\phi \qquad (2\text{-}6\text{-}20)$$

现在我们可回到速率方程的讨论上来, 将 (2-6-20) 式代入 (2-6-2) 式与 (2-6-4) 式中, 将三能级系统的速率方程组重写如下:

$$\frac{dn_3}{dt}=n_1W_{13}-n_3(S_{32}+A_{31}+S_{31}) \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

$$\frac{dn_2}{dt}=-\Delta n\frac{A_{21}}{n_\nu}g(\nu,\nu_0)\phi-n_2(A_{21}+S_{21})+n_3S_{32}$$

$$(2\text{-}6\text{-}21)$$

$$n_1+n_2+n_3=n_0 \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\Delta n\frac{A_{21}}{n_\nu}g(\nu,\nu_0)\phi-\frac{\phi}{\tau} \qquad (2\text{-}6\text{-}22)$$

式中: Δn——反转粒子数密度, 定义为 n_2-n_1。

二、四能级系统速率方程组

图 2-6-3 为 YAG 激光器 Nd^{+3} 离子的能级图。E_1 为基态能级; E_4 为抽运高能级; E_3 为亚稳态能级, 作为激光上能级; E_2 为激光下能级。各跃迁几率的意义同三能级系统, 不再赘述。对一般激光器来说, 有 S_{41}、$A_{41}\ll S_{43}$, $S_{32}\ll A_{32}$。另外, 激光下能级 E_2 到基态 E_1 的非辐射跃迁几率 S_{21}称为抽空速率, 它的数值一般也是相当大的, 这样便可保证激光下能级平时总是空的, 只要将粒子从基态抽运到高能级上去, 便很容易实现 E_3 与 E_2 能级间的反转粒子数状态。根据与三能级系统完全相同的考虑, 四能级系统的速率方程组可写成:

图 2-6-3　四能级系统速率方程组图

$$\frac{dn_4}{dt} = n_1 W_{14} - n_4(S_{43} + A_{41} + S_{41}) \tag{2-6-23}$$

$$\frac{dn_3}{dt} = -\Delta n \frac{A_{32}}{m_\nu} g(\nu\ \nu)\phi - n_3(A_{32} + S_{32}) + n_4 S_{43} \tag{2-6-24}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = n_2 S_{21} - n_1 W_{14} \tag{2-6-25}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_0 \tag{2-6-26}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta n \frac{A_{32}}{m_\nu} g(\nu\ \nu)\phi - \frac{\phi}{\tau} \tag{2-6-27}$$

$\frac{dn_2}{dt}$**的速率方程未列出，也是因它不是独立的。**

三、受激辐射跃迁几率与自发辐射跃迁几率的关系

在推导速率方程的过程中，我们得到了 (2-6-20) **式，如果将该式的两边同时除以总光子数** ϕV**，则有**

$$W_\nu = A_\nu \tag{2-6-28}$$

其中

$$W_{\nu}=\frac{W_{21}}{\phi V} \qquad (2\text{-}6\text{-}29)$$

代表频率为 ν 的激光模式中，一个光子引起的受激辐射跃迁几率。而

$$A_{\nu}=\frac{A_{21}g(\nu,\nu_0)}{m_{\nu}V} \qquad (2\text{-}6\text{-}30)$$

代表的是什么物理意义呢？A_{21} 为发光粒子在激光上、下能级间自发辐射的总跃迁几率，$A_{21}g(\nu,\nu_0)$ 为分配到 ν 处的单位频率间隔内的自发辐射跃迁几率，而 $m_{\nu}V$ 表示在 ν 处单位频率间隔内的模式数。因此，两者之商表示分配到频率为 ν 的模式上的自发辐射跃迁几率。(2-6-28) 式给出这样一个物理概念：某个激光模式中的一个光子所引起的受激辐射跃迁几率等于分配到该模式上的自发辐射跃迁几率。

习　题　二

(1) 自然加宽的线型函数为 $g_N(\nu,\nu_0)=\dfrac{\frac{1}{\tau}}{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2+4\pi^2(\nu-\nu_0)^2}$，求：

① 线宽。

② 若用矩形线型函数代替（两函数高度相等），再求线宽。

(2) 发光原子以 0.2c 的速度沿某光波传播方向运动，并与该光波发生共振，若此光波波长 $\lambda=0.5\,\mu\text{m}$，求此发光原子的静止中心频率。

(3) 某发光原子静止时发出 $0.488\,\mu\text{m}$ 的光，当它以 0.2c 速度背离观察者运动，则观察者认为它发出的光波长变为多大？

(4) 激光器输出光波长 $\lambda=10\,\mu\text{m}$，功率为 1W。求每秒从激光上能级向下能级跃迁的粒子数。

(5) 某激光器的上、下能级分别为 E_2、E_1 (设二能级的简并度相等)，粒子数密度分别为 n_1、n_2。求:

① 当 $\nu=\frac{E_2-E_1}{h}=3000\text{MHz}$，且 $T=300\text{K}$ 时的 $\frac{n_2}{n_1}$;

② 若 $\lambda=\frac{hc}{E_2-E_1}=1\mu\text{m}$，且 $\frac{n_2}{n_1}=0.1$ 时的 T。

(6) 红宝石调 Q 激光器中，有可能将几乎全部的 Cr^{+3} 激发到激光上能级，并产生激光巨脉冲。设红宝石棒直径为 1cm，长为 7.5cm，Cr^{+3} 的浓度为 $2\times10^{9}\text{cm}^{-3}$，脉冲宽度 10ns。求输出激光的最大能量和脉冲功率。

(7) 静止氖原子 $3S_2\rightarrow2P_4$ 谱线中心波长为 $0.6328\mu\text{m}$，求当它以 $0.1c$ 速度向观察者运动时，中心波长变为多大?

(8) 迈克尔逊干涉仪所用光源波长为 λ，试用多普勒频移原理证明，当可动镜移动距离 L 时，接收屏上的干涉光强周期性变化 $2L/\lambda$ 次。

(9) 红宝石激光器为三能级系统，已知 $S_{32}=0.5\times10^{7}\ 1/\text{s}$，$A_{31}=3\times10^{5}\ 1/\text{s}$，$A_{21}=0.3\times10^{3}\ 1/\text{s}$。其余跃迁几率不计。试问当抽运几率 W_{13} 等于多少时，红宝石晶体将对 $\lambda=0.6943\mu\text{m}$ 的光是透明的。

第三章　介质对光的增益

激光工作物质对光的增益作用是产生激光的前提条件，而产生增益作用的前提条件又是使激光上能级的粒子数密度大于下能级的粒子数密度，形成粒子数反转，即 $\Delta n = n_2 - n_1 > 0$（这里已假设激光上、下能级的能级简并度相等）。本章将分别讨论在激光很弱时的小信号反转粒子数密度和小信号增益系数，以及当激光很强时，由于受激辐射使激光上能级的粒子数减少而导致的增益饱和作用。这种饱和作用将是激光器稳定工作状态建立的重要基础。

§3.1　小信号反转粒子数

激光工作物质对光是有增益作用还是有吸收作用，取决于激光上、下能级间的粒子数分布情况。如果反转粒子数密度 $\Delta n > 0$，即上能级粒子数密度大于下能级粒子数密度，则介质对光具有放大作用。若 $\Delta n < 0$，则介质对光具有吸收作用。在光强 I 很小的小信号情况下，受激辐射对反转粒子数密度 Δn 的影响可以忽略不计。下边我们从速率方程组出发，在近似条件下估算小信号反转粒子数密度，分别按照三能级系统和四能级系统进行计算。

一、三能级系统的小信号反转粒子数密度

三能级系统的速率方程由（2-6-1）式、（2-6-20）式、（2-6-3）式和（2-6-21）式给出，在一般情况下，有 $S_{32} \gg A_{31}$、S_{31}，$A_{21} \gg S_{21}$，在小信号条件下可以忽略 W_{12} 与 W_{21}，即忽略因受激辐射产生的光子数密度 ϕ 在这些近似条件下，我们可将速率方程重新简

化为:

$$\frac{dn_3}{dt} = n_1 W_{13} - n_3 S_{32} \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_3 S_{32} - n_2 A_{21} \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n_0 \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

在连续工作的状态下, 应有$\frac{dn_3}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$, 另外, 由于 S_{32}比起 W_{13}来也大得多, E_3 能级基本上存不住粒子, 可近似认为 $n_3 \approx 0$, 将这些关系代入速率方程组中去, 可得到:

$$n_1 W_{13} = n_2 A_{21} \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

$$n_1 + n_2 = n_0 \qquad (3\text{-}1\text{-}4)$$

将这两个公式联立, 解出 n_1 与 n_2 分别为:

$$n_1 = \frac{A_{21}}{A_{21} + W_{13}} n_0 \qquad (3\text{-}1\text{-}5)$$

$$n_2 = \frac{W_{13}}{A_{21} + W_{13}} n_0 \qquad (3\text{-}1\text{-}6)$$

因此, 小信号反转粒子数密度 Δn 为:

$$\Delta n \equiv n_2 - n_1 = \frac{W_{13} - A_{21}}{W_{13} + A_{21}} n_0 \qquad (3\text{-}1\text{-}7)$$

或者由 $A_{21} = \frac{1}{\tau}$, τ为激光上能级 E_2 的平均寿命, (3-1-7) 式可改写为:

$$\Delta n \equiv \frac{W_{13}\tau - 1}{W_{13}\tau + 1} n_0 \qquad (3\text{-}1\text{-}8)$$

二、四能级系统的小信号反转粒子数密度

四能级系统的速率方程由式 (2-6-22) 式～(2-6-26) 式给出，一般情况下有 $S_{43} \gg A_{41}$、S_{41}，$A_{32} \gg S_{32}$，在小信号条件下忽略 W_{32} 与 W_{23} 后，可将速率方程重写如下:

$$\frac{dn_4}{dt} = n_1 W_{14} - n_4 S_{43} \tag{3-1-9}$$

$$\frac{dn_3}{dt} = n_4 S_{43} - n_3 A_{32} \tag{3-1-10}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = n_2 S_{21} - n_1 W_{14} \tag{2-6-24}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_0 \tag{2-6-25}$$

连续工作时，$\frac{dn_4}{dt} = \frac{dn_3}{dt} = \frac{dn_1}{dt} = 0$，又因为通常 S_{43}、S_{21} 比 W_{14} 大许多，可以近似认为 $n_2 = n_4 = 0$，将这些关系代入速率方程中，可以得到:

$$n_1 W_{14} = n_3 A_{32} \tag{3-1-11}$$

$$n_1 + n_3 = n_0 \tag{3-1-12}$$

解出 n_3，即小信号反转粒子数密度 Δn^0 为:

$$\Delta n^0 = n_3 = \frac{W_{14}}{W_{14} + A_{32}} n_0 \tag{3-1-13}$$

或由 $A_{32} = \frac{1}{\tau_3}$，$\tau_3$ 为激光上能级 E_3 的平均寿命，(3-1-14) 式可改为:

$$\Delta n^0 = \frac{W_{14} \tau_3 n_0}{W_{14} \tau_3 + 1} \tag{3-1-14}$$

§ 3.2　小信号增益系数

当激光工作物质处在粒子数反转状态时，一束光强为 I_0 的单色光入射后，由于受激辐射作用，光强会不断被放大。我们引入增益系数 G 来描述光强经过单位距离后的增长率。设有光强为 I_0 的光自增益介质端面 $(z=0)$ 入射，传播到 z 处时，光强增至 $I(z)$，在 $z+dz$ 处时光强为 $I(z+dz)=I(z)+dI(z)$，则增益系数定义为:

$$G=\frac{dI(z)}{I(z)dz} \tag{3-2-1}$$

图 3-2-1　增益系数的定义

图 3-2-1 画出 (3-2-1) 式中各量关系。如果增益系数是个恒定的常数，由 (3-2-1) 式很容易解出光强 $I(z)$ 随 z 坐标变化的函数关系为:

$$I(z)=I_0e^{Gz} \tag{3-2-2}$$

由 (3-2-2) 式画出的光强变化曲线如图 3-2-2 所示。增益系数的量纲为1/m。其测量方法是：测出入射到激光介质的光强 I_0 及出射光强 I' 并量出激光介质的长度 L，由 (3-2-2) 式可以算出:

$$G=\frac{1}{L}\ln\frac{I'}{I_0} \tag{3-2-3}$$

增益系数与反转粒子数密度间有密切的关系，下边我们来推导这个关系。

从四能级系统速率方程组中的光子数密度方程(2-6-27)式出发(三能级系统的讨论方法完全相同，只须将 A_{32} 改为 A_{21})，并考虑到在讨论受激辐射引起的增益作用时，可不计损耗。现将该方程重写如下：

图 3-2-2　增益介质中光强度化曲线

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta n \frac{A_{32}}{m_\nu} g(\nu,\nu)\phi \tag{3-2-4}$$

因为光强与光子数密度成正比，即 $I = \phi h\nu v$ (参见 1-7-27 式)，故光强对 z 坐标的导数可写为：

$$\frac{dI}{dz} = \frac{dI}{dt}\frac{dt}{dz} = \frac{d\phi}{dt} h\nu \tag{3-2-5}$$

将 (3-2-4) 式代入 (3-2-5) 式，然后由增益系数的定义可得到：

$$G = \frac{\Delta n A_{32}}{v m_\nu} g(\nu,\nu) \tag{3-2-6}$$

单色模密度 m_ν 由(1-3-4)式给出，但光速是用真空光速 c 表示的，现在的讨论是在激光工作物质中，因此用 v 代替 c 后，并将 m_ν 计算公式代入 (3-2-6) 式，得：

$$G = \frac{\Delta n A_{32} v^2}{8\pi\nu^2} g(\nu,\nu) \tag{3-2-7}$$

该式表明，激光增益介质对频率为 ν 的准单色光的增益系数是随 ν 而变化的，由于一般说来，激光介质的光谱线型函数 $g(\nu,\nu)$ 的线宽从数量级上讲比起线型函数的中心频率 ν 要小好几级，因此，

为简化增益系数的表达式，可以用中心频率 ν_0 去代替 (3-2-7) 式中分母上的 ν，同时将增益系数写成频率的函数的形式：

$$G(\nu) = \Delta n \frac{A_{32}v^2}{8\pi\nu_0^2} g(\nu,\nu_0) \qquad (3\text{-}2\text{-}8)$$

如果 (3-2-8) 式中反转粒子数密度 Δn 取小信号反转粒子数密度 Δn^0，则相应的增益系数就是小信号增益系数 $G^0(\nu)$。因为小信号反转粒子数密度 Δn^0 是个与频率无关的常数，由 (3-2-8) 式可以看出，小信号增益系数与激光介质的线型函数成正比。分别将均匀加宽和非均匀加宽的线型函数 (2-3-5) 式与 (2-4-15) 式代入 (2-3-8) 式中，可得均匀加宽介质的小信号增益系数为：

$$G_H^0(\nu) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 + (\nu-\nu_0)^2} G_m \qquad (3\text{-}2\text{-}9)$$

其中：

$$G_m = G_H^0(\nu_0) = \frac{A_{32}v^2\Delta n^0}{4\pi^2\nu_0^2\Delta\nu_H} \qquad (3\text{-}2\text{-}10)$$

非均匀加宽介质的小信号增益系数为：

$$G_i^0(\nu) = G_m e^{-\frac{4\ln 2(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (3\text{-}2\text{-}11)$$

其中：

$$G_m = G_i^0(\nu_0) = \frac{A_{32}v^2\Delta n^0}{4\pi^2\nu_0^2\Delta\nu_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3\text{-}2\text{-}12)$$

由 (3-2-9) 式与 (3-2-11) 式画出小信号增益系数随 ν 变化的曲线，称小信号增益曲线。如图 3-2-3 所示，其中 (a) 为均匀加宽小信号增益曲线，属洛仑兹型，(b) 为非均匀加宽小信号增益曲线，属

高斯型。中心频率处的小信号增益系数，也就是增益系数最大值 G_m，可以由实验测定。对于常用激光器，也可以由经验公式求出。例如两个常用气体激光器在最佳放电条件下，最大增益系数分别为：

氦氖激光器 $G_m = 3 \times 10^{-4}\ 1/d$

二氧化碳激光器 $G_m = 1.4 \times 10^{-2}\ 1/d$

式中：d —— 放电管的直径，单位取 mm。

图 3-2-3 小信号增益曲线

(a) 均匀加宽；(b) 非均匀加宽

§ 3.3 大信号反转粒子数

在讨论小信号的反转粒子数密度及增益系数时，由于入射光很弱，故受激跃迁对 Δn 的影响可以忽略不计。当入射光强增大到一定程度，以致受激辐射跃迁几率可以与激光上能级的其它跃迁几率相比时，受激辐射对反转粒子数密度 Δn 的影响就不能忽略了。下边我们仍以四能级系统为例，分别讨论均匀加宽与非均匀

加宽介质的大信号反转粒子数密度的计算方法。

一、均匀加宽大信号反转粒子数密度

四能级系统速率方程(2-6-24)式第一项不能忽略，考虑到 $A_{32} \gg S_{32}$，$n_4 S_{43} = n_1 W_{14}$，以及 $\frac{dn_3}{dt} = 0$，可以得到：

$$-\Delta n \frac{A_{32}}{m_\nu} g(\nu, \nu) \phi - n_3 A_{32} + n_1 W_{14} = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

对于四能级系统，$\Delta n \ll n_3$，故：

$$\Delta n = \frac{n_1 W_{14}}{A_{32}\left(1 + \frac{\phi}{m_\nu} g(\nu, \nu)\right)} \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

再由（3-1-11）式可知：

$$\frac{n_1 W_{14}}{A_{32}} = n_3 = \Delta n^{0} \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

因此

$$\Delta n = \frac{\Delta n^{0}}{1 + \frac{\phi}{m_\nu} g(\nu, \nu)} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

下边我们对均匀加宽的激光工作物质写出当入射强光的频率为 ν、光强为 I_{ν_1} 时的大信号反转粒子数密度 $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$ 的表达式为：

$$\Delta n(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{\Delta n^{0}}{1 + \frac{\phi_1}{m_\nu(\nu)} g_H(\nu, \nu)} \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

这里 ϕ_1 表示频率为 ν 的强光的光子数密度，它与光强 I_{ν_1} 的关系为：

$$I_{\nu_1} = \phi_1 h\nu v \tag{3-3-6}$$

$m_\nu(\nu)$为频率 ν 处的单色模密度，即:

$$m_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{v^3} \tag{3-3-7}$$

$g_H(\nu, \nu_1)$为均匀加宽介质在 $\nu=\nu_1$ 处的线型函数值:

$$g_H(\nu, \nu_1) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 + (\nu_1 - \nu_0)^2} g_m \tag{3-3-8}$$

将 (3-3-6) 式、(3-3-7) 式和 (3-3-8) 式代入 (3-3-5) 式，并考虑到 (3-3-8) 式中 g_m 的表达式 (3-3-6) 式，可得到:

$$\Delta n(\nu_1, I_{\nu_1}) = \frac{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)} \Delta n^0 \tag{3-3-9}$$

其中:

$$I_s = \frac{4\pi^2\nu_1^3 h\Delta\nu_H}{v^2} \tag{3-3-10}$$

由于 ν_1 与 ν_0 之差远远小于 ν_0，为简单起见，将上式中 ν_1 改为均匀加宽介质的中心频率 ν_0，即:

$$I_s = \frac{4\pi^2\nu_0^2 h\Delta\nu_H}{v^2} \tag{3-3-11}$$

这样一来，I_s 便成为一个与入射强光频率 ν_1 及光强 I_{ν_1} 无关的常数。从 (3-3-9) 式可以看出，当入射光强 $I_{\nu_1} = 0$ 时，$\Delta n = \Delta n^0$，即小信号反转粒子数密度。当入射光强 $I_{\nu_1} \neq 0$，$\Delta n < \Delta n^0$，入射光强越大，反转粒子数密度减小的也越多，我们称这种现象为反转粒子数密度的饱和作用。(3-3-11) 式定义的 I_s 具有光强的量纲，我

们称为饱和光强，其物理意义是：当入射光强 I_{ν_1} 达到可以与 I_s 相比拟时，受激辐射跃迁所造成的激光上能级粒子数的衰减率便可与其它跃迁造成的粒子数衰减率相比。I_s 的数值决定于增益介质的性质，它可以由实验测定，或由经验公式确定。如两种常用气体激光器的 I_s 值如下：

氦氖激光器：　　$I_s = 0.1\mathrm{W/mm^2} \sim 0.3\ \mathrm{W/mm^2}$

二氧化碳激光器：$I_s = \dfrac{72}{d^2}\ \mathrm{W/mm^2}$

式中：d —— 放电管直径，单位为 mm。

下边我们对大信号反转粒子数密度的计算公式 (3-3-9) 式作进一步深入讨论。

（一） $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$ 与 I_{ν_1} 的关系

设 $\nu = \nu_0$，则 (3-3-9) 式变成：

$$\Delta n(\nu_0, I_{\nu_0}) = \frac{\Delta n^\circ}{1 + \dfrac{I_{\nu_0}}{I_s}} \qquad (3\text{-}3\text{-}12)$$

图 3-3-1 画出 $\Delta n \sim I_{\nu_0}$ 之间的关系，当 $I_{\nu_0} = 0$ 时，$\Delta n = \Delta n^\circ$；当 $I_{\nu_0} = I_s$ 时，$\Delta n = \dfrac{1}{2}\Delta n^\circ$。这表明，反转粒子数密度的饱和作用随入射光强的增大而增大。

图 3-3-1　均匀加宽介质大信号反转粒子数密度与入射光强的关系 $(\nu = \nu_0)$

（二） $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$ 与 ν 的关系

设 $I_{\nu_1} = I_s$，则 (3-3-9) 式变成：

$$\Delta n(\nu, I_s) = \frac{(\nu - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}{(\nu - \nu)^2 + 2\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}\Delta n^{\circ} \qquad (3\text{-}3\text{-}13)$$

图 3-3-2 分别画出 $I_{\nu_1} = 0$ 与 $I_{\nu_1} = I_s$ 时的 $\Delta n \sim \nu$ 曲线。可以看

图 3-3-2　均匀加宽介质大信号反转粒子
数密度与入射光频率的关系 ($I_{\nu_1} = I_s$)

出，$I_{\nu_1} = 0$ 时，$\Delta n = \Delta n^{\circ}$。这是一条水平直线，表明小信号反转粒子数密度是个常数，与频率 ν 无关。当 $I_{\nu_1} = I_s$ 时，$\Delta n \sim \nu$ 曲线在中心频率 $\nu = \nu$ 处有一凹陷。当 $\nu = \nu$ 时，$\Delta n(\nu, I_s) = \frac{1}{2}\Delta n^{\circ}$；当 $\nu = \nu \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu$ 时，$\Delta n\left(\nu \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu, I_s\right) = \frac{3}{4}\Delta n^{\circ}$。也就是说，$\nu = \nu \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu$ 时的饱和作用是 $\nu = \nu$ 时的饱和作用的一半。在入射光强不变化的前提条件下，频率越靠近中心频率 ν，Δn 的饱和作用就越强。这是由于中心频率处受激辐射跃迁几率最大，故入射光造成的反转粒子数密度的下降也最严重。

通常认为，当饱和作用小于中心频率处的饱和作用的一半时，可以忽略饱和效应。下边我们来推导当给定入射光强 I_{ν_1} 时，可以

产生饱和作用的频率范围。设 $\nu_1=\nu$ 时的饱和作用为 $\nu_1=\nu_0$ 时的

图 3-3-3　均匀加宽介质大信号反转粒子
数密度与入射光频率的关系

饱和作用的一半，由图 3-3-3 可以看出，$\Delta n(\nu_1, I_{\nu_1})$ 的值恰好等于 $\Delta n(\nu_0, I_{\nu_1})$ 与 Δn^0 的平均值，即:

$$\frac{(\nu_1-\nu_0)^2+\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1-\nu_0)^2+\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)}\Delta n^0=\frac{1}{2}\left[\Delta n^0+\frac{\Delta n^0}{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\right]$$

由此式可求出：$\nu_1=\nu_0\pm\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\cdot\frac{\Delta\nu_H}{2}$。因此，只有当入射光强的频率 ν_1 处于 $\nu_0-\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\cdot\frac{\Delta\nu_H}{2}\sim\nu_0+\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\cdot\frac{\Delta\nu_H}{2}$ 范围内时，才可以引起显著的饱和作用。这一频率范围的宽度为:

$$\delta\nu=\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\cdot\Delta\nu_H \qquad (3\text{-}3\text{-}14)$$

二、非均匀加宽大信号反转粒子数密度

对于非均匀加宽的激光介质来说，由于每一种特定类型的粒子只发射某一特定频率的光，所以它的小信号反转粒子数密度 Δn^0 对频率有一个分布：

$$\Delta n^0(\nu_0, \nu) = \Delta n^0 g_i(\nu_0, \nu) \qquad (3\text{-}3\text{-}15)$$

如果有一个频率为 ν_1、光强为 I_{ν_1} 的强光入射时，它将只造成表观中心频率为 ν_1 的那部分粒子的饱和。实际发光系统中，除了存在非均匀加宽的因素以外，总是同时还存在均匀加宽的因素，起码有自然加宽。因此表观中心频率为 ν_1 的粒子在 I_{ν_1} 强光的诱发下，发射一条中心频率为 ν_1、线宽为 $\Delta\nu_H$ 的均匀加宽的光谱线，这部分粒子的饱和行为可以用均匀加宽情况下所得到的公式来描述。

现在，我们用图 3-3-4 来分析非均匀加宽介质在强光入射时

图 3-3-4　非均匀加宽介质大信号反转粒子数密度的烧孔效应

的大信号反转粒子数密度的变化规律。首先，由 (3-3-15) 式可以画出小信号时的反转粒子数密度对频率 ν 的分布曲线。这是一个与非均匀加宽介质的线型函数相同的高斯型曲线。当有个频率为 ν_1、光强为 I_{ν_1} 的强光入射时，表观中心频率在 ν_1 附近的粒子受到

强光作用产生受激辐射，造成反转粒子数密度的下降。其中 ν_1 处下降的最厉害，此时的大信号反转粒子数密度 $\Delta n(\nu_1)$ 可用图中 A′点对应，大小可以通过 (3-3-9) 式计算，令式中的 ν 等于 ν_1，并用该频率的小信号反转粒子数密度 $\Delta n^0(\nu_1)$ 代替式中的 Δn^0，可得：

$$\Delta n(\nu_1) = \frac{\Delta n^0(\nu_1)}{1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}} \tag{3-3-16}$$

$\Delta n^0(\nu_1)$ 在图中用 A 点表示。当频率偏离 ν_1 变成 ν 时，大信号反转粒子数密度 $\Delta n(\nu)$ 可令 (3-3-9) 式的 $\nu = \nu_1$，并用 $\Delta n^0(\nu)$ 代替 Δn^0 求得，即：

$$\Delta n(\nu) = \frac{(\nu - \nu_1)^2 + \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_1)^2 + \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)}\Delta n^0(\nu) \tag{3-3-17}$$

这在图中用 B 点下降到 B′点表示。由 (3-3-14) 式可以知道，当频率再进一步偏离 ν_1，变成 $\nu = \nu_1 + \sqrt{1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}} \cdot \dfrac{\Delta\nu_H}{2}$ 时，可以认为无明显的饱和作用了，即反转粒子数密度不再下降，$\Delta n(\nu) = \Delta n^0(\nu)$，这在图中表现为 C 点不下降了。由以上分析可以得出这样的结论：在频率为 ν_1、光强为 I_{ν_1} 的强光作用下，使表观中心频率处在 $\nu_1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}} \cdot \dfrac{\Delta\nu_H}{2}$ 范围内的粒子产生受激辐射，因此在 $\Delta n(\nu) \sim \nu$ 曲线上形成一个以 ν_1 为中心的“烧孔”，其孔宽度为：

$$\delta\nu = \sqrt{1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\,\Delta\nu_H \tag{3-3-18}$$

孔深度为:

$$\Delta n^{0}(\nu) - \Delta n(\nu) = \frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_1} + I_s}\Delta n^{0}(\nu) \qquad (3\text{-}3\text{-}19)$$

因此孔面积为:

$$\delta S = \Delta n^{0}(\nu)\,\Delta\nu_H \cdot \frac{\dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}}{1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}} \qquad (3\text{-}3\text{-}20)$$

通常将上述现象称为反转粒子数密度的烧孔效应，非均匀加宽介质中受激辐射所产生的光子数密度或受激辐射功率正比于烧孔的面积。

§ 3.4 大信号增益系数

入射光强很微弱时，反转粒子数密度基本上未被消耗，可以看成是一个常数，因此，激光介质对光的增益系数也是个常数。而当光强增大到一定程度，即可以与饱和光强 I_s 相比时，由于反转粒子数密度的下降，导致增益系数的下降，我们称这种现象为增益饱和现象。本节分别对均匀加宽介质与非均匀加宽介质讨论大信号增益系数。§ 3.2 中 (3-2-8) 式描述了反转粒子数密度与增益系数之间的关系，如果 Δn 表示的是大信号反转粒子数密度，则 G 就为大信号增益系数。

一、均匀加宽大信号增益系数

当频率为 ν_1、光强为 I_{ν_1} 的强光入射时，均匀加宽的激光介质对该强光以及对另一频率为 ν 的弱光的增益系数都有饱和作用，我们分别对这两种情况进行分析。

(一) 对 ν 强光的增益系数

当频率为 ν、光强为 I_{ν_1} 的强光入射时，均匀加宽激光工作物质的反转粒子数下降到 $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$，因此，对 ν 强光的增益系数按 (3-2-8) 式可写为：

$$G(\nu, I_{\nu_1}) = \Delta n(\nu, I_{\nu_1}) \frac{A_{32} v^2}{8\pi\nu^2} g_H(\nu, \nu_0) \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

这里仍以四能级系统为例，对不同的能级系统，只须改变自发辐射几率 A 的下标即可。另外式中已用了均匀加宽的线型函数。将 $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$ 表达式 (3-3-9) 和均匀加宽线型函数式 (2-3-5) 和式 (2-3-6) 代入 (3-4-1) 式中，可以得到：

$$G_H(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)} G_m \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

式中 $G_m = G_H^0(\nu_0)$，其大小由 (3-2-10) 式决定。

现在我们对 (3-4-2) 式进行讨论。令 $I_{\nu_1} = 0$，有：

$$G_H(\nu, 0) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} G_m \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

不难看出，该式实际上就是均匀加宽小信号增益系数的计算公式 (3-2-9) 式。这时无增益饱和现象。光强 I_{ν_1} 增大，增益系数下降，$I_{\nu_1} = I_s$ 时有：

$$G_H(\nu, I_s) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + 2\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} G_m \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

将 $I_{\nu_1}=0$ 与 $I_{\nu_1}=I_s$ 时的增益曲线画在图 3-4-1 中，其中 $I_{\nu_1}=0$ 的曲线即小信号增益曲线。$\nu_1=\nu_0$ 时增益系数达最大值 G_m，$\nu_1=\nu_0\pm\frac{\Delta\nu_H}{2}$ 时，降至 $\frac{1}{2}G_m$，故曲线的线宽为 $\Delta\nu_H$。在 $I_{\nu_1}=I_s$ 大信号增益曲线中，$\nu_1=\nu_0$ 时有 $G_H(\nu_0, I_s)=\frac{1}{2}G_m$，即增益系数降至小信号的一

图 3-4-1　均匀加宽介质对强光的大信号增益曲线

半。$\nu_1=\nu_0\pm\frac{\Delta\nu_H}{2}$ 时有 $G_H\left(\nu_0\pm\frac{\Delta\nu_H}{2}, I_s\right)=\frac{1}{3}G_m$，即增益系数降至小信号时的 2/3。这说明饱和作用的强弱与入射光的频率有关，频率越接近增益曲线的中心频率 ν_0，饱和作用就越厉害，偏离中心频率 ν_0 越远，饱和作用就越弱。另外，不同频率处，曲线下降的不一样，这说明曲线下降是非均匀的。由于中心频率处的相对下降量大于其它频率处，因此，大信号增益曲线的线宽比小信号增益曲线要更宽些。事实上，当 $\nu_1=\nu_0\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu_H$ 时，有 $G_H\left(\nu_0\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu_H, I_s\right)=\frac{1}{4}G_m$，为 $G_H(\nu_0, I_s)=\frac{1}{2}G_m$ 的一半，故 $I_{\nu_1}=I_s$ 的大信号增益曲线的线宽加大到 $\sqrt{2}\Delta\nu_H$。对于入射光强 $I_{\nu_1}\neq I_s$ 的一般情况，也可求出下降后的增益曲线线宽 $\Delta\nu_H'$ 首先先求出当

$\nu=\nu$、$I_{\nu_1}=I_{\nu_0}$时的增益系数为:

$$G_H(\nu, I_{\nu_0}) = \frac{G_m}{1+\frac{I_{\nu_0}}{I_s}} \tag{3-4-5}$$

再令 $G_H(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{1}{2}G_H(\nu, I_{\nu_0})$，将(3-4-2)式与(3-4-5)式代入，注意在这里光强 I_{ν_0} 与 I_{ν_1} 同是入射光强，应相等，求出 $\nu=\nu\pm\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\,¡¤\frac{\Delta\nu_H}{2}$。因此，均匀加宽介质在 I_{ν_1} 强光入射时，对 ν 强光的大信号增益曲线线宽为:

$$\Delta\nu=\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\,\Delta\nu_H \tag{3-4-6}$$

(二) 对 ν 弱光的增益系数

均匀加宽的激光工作物质对各种频率入射光的放大作用全都是使用相同的反转粒子数，因此，ν 强光消耗的反转粒子数势必会影响对 ν 弱光的增益系数，此时(3-2-8)式中的 Δn 仍用 $\Delta n(\nu, I_{\nu_1})$ 代替，线型函数则用 $g_H(\nu, \nu)$。这样，均匀加宽介质在 I_{ν_1} 强光入射的条件下对 ν 弱光的大信号增益系数便可写成:

$$G_H(\nu, I_{\nu_1}) = \Delta n(\nu, I_{\nu_1})\frac{A_{32}v^2}{8\pi\nu^2}g_H(\nu, \nu) \tag{3-4-7}$$

再将(3-3-9)式、(2-3-5)式和(2-3-6)式代入(3-4-7)式，可得:

$$G_H(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{(\nu-\nu)^2+\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu-\nu)^2+\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)}G_H^0(\nu, \nu) \tag{3-4-8}$$

其中 $G_H^0(\nu_1, \nu_0)$ 为小信号增益系数:

$$G_H^0(\nu_1, \nu_0) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} G_m \qquad (3\text{-}4\text{-}9)$$

现在，我们来对 (3-4-8) 式进行讨论。首先，我们来看这种大信号增益曲线的下降特点。当给定入射强光的频率 ν_1 和光强 I_{ν_1} 后，$G_H^0(\nu_1, \nu_0)$ 左边因子的数值是个小于 1 的定值。这说明在每一个频率 ν 处，大信号增益曲线 $G_H(\nu)$ 从小信号增益曲线 $G_H^0(\nu)$ 的相对下降是都一样，整个曲线的下降是均匀的，下降后的曲线线宽与原小信号时的线宽相等。其次，我们讨论增益饱和的大小与入射强光的频率和光强的关系。先看与光强 I_{ν_1} 的关系，当 $I_{\nu_1} = 0$ 时，由 (3-4-8) 式可以看出 $G_H(\nu_1, 0) = G_H^0(\nu_1, \nu_0)$，即无饱和作用。$I_{\nu_1}$ 越大，增益系数的值下降的越厉害。当 $I_{\nu_1} = I_s$ 时，有:

$$G_H(\nu_1, I_s) = \frac{(\nu_1 - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_1 - \nu_0)^2 + 2\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} G_H^0(\nu_1, \nu_0) \quad (3\text{-}4\text{-}10)$$

再看饱和与强光频率 ν_1 的关系。$I_{\nu_1} = I_s$ 且 $\nu_1 = \nu_0$ 时，由 (3-4-10) 式得 $G_H(\nu_1, I_s) = \frac{1}{2} G_H^0(\nu_1, \nu_0)$，此时大信号增益曲线由小信号曲线下降一半而得。而 $I_{\nu_1} = I_s$ 且 $\nu_1 = \nu_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu_H$ 时，$G_H(\nu_1, I_s) = \frac{3}{4} G_H^0(\nu_1, \nu_0)$，大信号曲线由小信号曲线下降 1/4 而得。这说明 $\nu_1 = \nu_0$ 时饱和作用最大。ν_1 偏离 ν_0 越远饱和越弱。图 3-4-2 画出小信号曲线及 $I_{\nu_1} = I_s$ 且 $\nu_1 = \nu_0$、$I_{\nu_1} = I_s$ 且 $\nu_1 = \nu_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\nu_H$ 两条大信号曲线。均匀加宽介质中每个发光粒子对谱线不同频率的增益都有贡献，当 ν_1 强光消耗了激发态粒子后，同时也减少了对 ν 弱光

的增益。故在均匀加宽激光器中，一个模式的起振会使其它模式的增益降低，因而阻止其它模式的振荡。因此，均匀加宽激光器中往往可以实现单纵模输出。

图 3-4-2　均匀加宽介质对弱光的大信号增益曲线

二、非均匀加宽大信号增益系数

在频率为 ν_1、光强为 I_{ν_1} 的强光入射条件下，非均匀加宽介质的大信号增益系数也分对 ν 强光及 ν 弱光二种。

(一) 对 ν 强光的增益系数

非均匀加宽激光工作物质除有非均匀加宽的因素以外，同时还存在均匀加宽的因素，起码有属于均匀加宽的自然线宽。所以表观中心频率在 $\nu_0' \sim \nu_0' + d\nu_0'$ 范围内的粒子所发射的谱线可以认为全都是中心频率为 ν_0'、线宽为 $\Delta\nu_H$ 的均匀加宽谱线。这部分粒子对频率 ν 强光的增益系数的贡献可以用均匀加宽大信号增益系数公式 (3-4-2) 进行计算：

$$dG_i = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0')^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1 + \frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)} G_H^0(\nu_0') \quad (3\text{-}4\text{-}11)$$

其中 $G_H^0(\nu_0')$ 为中心频率 ν_0' 的均匀加宽小信号增益系数最大值。考虑到非均匀加宽介质的小信号反转粒子数密度对频率的分布规律(3-3-15) 式, 表观中心频率在 $\nu_0' \sim \nu_0' + d\nu_0'$ 范围的小信号反转粒子数密度是:

$$\Delta n^0(\nu_0', \nu)\,d\nu_0' = \Delta n^0 g_i(\nu_0', \nu)\,d\nu_0' \qquad (3\text{-}4\text{-}12)$$

再由 G_m 的计算公式 (3-2-10), 可以写出 $G_H^0(\nu_0')$ 为:

$$G_H^0(\nu_0') = \frac{A_{32}v^2\Delta n^0 g_i(\nu_0', \nu)\,d\nu_0'}{4\pi^2\nu_0'^2\Delta\nu_H} \qquad (3\text{-}4\text{-}13)$$

将 (3-4-13) 式代入 (3-4-11) 式, 并对 ν_0' 积分, 便可求出非均匀加宽介质对入射 ν 强光的大信号增益系数 $G_i(\nu, I_{\nu_1})$。为使积分便于计算, 首先将 (3-4-13) 式中 $g_i(\nu_0', \nu)$ 改为 $g_i(\nu, \nu)$, 这是由于对 ν 强光增益能有所贡献的粒子, 其中心频率 ν_0' 与 ν 之间的差距不可能太大。其次再将 (3-4-13) 式分母上的 ν_0' 改为 ν, 其理由仍然是由于一般激光介质的线宽数量级远小于中心频率的数量级。这样简化以后, 便可按下述步骤算出 $G_i(\nu, I_{\nu_1})$, 即:

$$G_i(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{A_{32}v^2\Delta n^0 g_i(\nu, \nu)}{4\pi^2\nu^2\Delta\nu_H}\cdot\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu_0'}{(\nu-\nu_0')^2+\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}\right)}$$

$$= \frac{A_{32}v^2\Delta n^0}{8\pi\nu^2\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}}g_i(\nu, \nu) \qquad (3\text{-}4\text{-}14)$$

将非均匀加宽线型函数表达式 (2-4-15) 和式 (2-4-16) 代入 (3-4-14) 式中, 可以得到:

$$G_i(\nu, I_{\nu_1}) = \frac{G_m}{1 + \dfrac{I_{\nu_1}}{I_s}} e^{-\frac{4\ln 2(\nu_1 - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (3\text{-}4\text{-}15)$$

式中 $G_m = G_i^0(\nu)$, **由** (3-2-12) **式决定。**

现在来讨论 (3-4-15) **式。当** $I_{\nu_1} = 0$ **时有**:

$$G_i(\nu, 0) = G_m e^{-\frac{4\ln 2(\nu_1 - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (3\text{-}4\text{-}16)$$

此式就是小信号增益系数计算公式 (3-2-11), **这说明此时无增益饱和作用。而当** $I_{\nu_1} = I_s$ **时有**:

$$G_i(\nu, I_s) = \frac{1}{2} G_m e^{-\frac{4\ln 2(\nu_1 - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (3\text{-}4\text{-}17)$$

分别将 $I_{\nu_1} = 0$ **与** $I_{\nu_1} = I_s$ **的两条增益曲线画在图** 3-4-3 **中, 其中** $I_{\nu_1} = 0$ **的增益曲线就是小信号增益曲线。**$\nu = \nu$ **时增益系数达最大值** G_m, **曲线线宽为** $\Delta\nu$。$I_{\nu_1} = I_s$ **的大信号增益曲线在各频率处都是小信号曲线的** $1/\sqrt{2}$, **即整个曲线均匀下降, 线宽不变。**

图 3-4-3　**非均匀加宽介质对强光的大信号增益曲线**

非均匀加宽介质与均匀加宽介质的对 ν 强光大信号增益系数相比较，有两点区别：

(1) 非均匀加宽饱和作用比均匀加宽弱一些。

(2) 非均匀加宽大信号增益曲线均匀下降，下降后的曲线线宽不变，而均匀加宽大信号增益曲线则是非均匀下降，下降后曲线线宽加大。

(二) 对 ν 弱光的增益系数

在§ 3.3 中我们讨论过非均匀加宽工作物质的大信号反转粒子数密度烧孔效应，与此相类似，在 ν 强光入射的条件下，非均匀加宽介质的对 ν 弱光增益曲线也将在 ν 频率处产生烧孔效应。这是由于频率为 ν 的强光只能对表观中心频率处在 ν 附近、宽度为 $\sqrt{1+\frac{I_{\nu_1}}{I_s}}\Delta\nu_H$ 范围内的发光粒子产生受激辐射，并引起反转粒子数密度的饱和，而对表观中心频率处在此频率范围之外的反转粒子数密度基本没什么影响。因此，当入射的 ν 弱光频率在此范围内时，介质对它的增益系数将因反转粒子数的减少而降低，在此范围外时，介质对它的增益系数仍等于小信号增益系数。烧孔宽度与反转粒子数密度的烧孔宽度完全一样，仍由 (3-3-18) 式决定。烧孔深度则为：

$$G_i^0(\nu) - G_i(\nu) = G_i^0(\nu)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{I}{I}}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}18)$$

如果激光介质为非均匀加宽的固体介质，上述大信号增益曲线烧孔效应只在入

图 3-4-4 非均匀加宽气体介质大信号增益曲线的烧孔效应

射强光频率 ν 处产生，只有一个烧孔。但如果为具有多普勒加宽因素的气体介质，则烧孔效应将在频率 ν 与 2ν- ν 两处产生，这两个烧孔对称地分布在中心频率 ν 的两侧，如图 3-4-4 所示。下边分析产生两个烧孔的原因。设 ν 强光沿+ z 轴(输出激光方向) 传播，它和表观中心频率也等于 ν 的粒子产生共振，使之受激辐射。这些粒子的运动速度在 z 轴上的分量为:

$$v_z = c\left(\frac{\nu}{\nu} - 1\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}19)$$

若 ν> ν，则 $v_z > 0$，即这些粒子具有沿+ z 方向的速度分量。若 ν < ν，则 $v_z < 0$，它们就具有沿- z 方向的速度分量。因此 ν 强光沿+ z 传播时，便消耗满足 (3-4-19) 式的粒子。而当 ν 强光沿- z 轴传播时，与它发生共振的粒子速度分量应满足

$$v_z = c\left(1 - \frac{\nu}{\nu}\right) \qquad (3\text{-}4\text{-}20)$$

而这些粒子的表观中心频率可以将 (3-4-20) 式代入 (2-4-1) 式中算得，为 $\nu_0' = 2\nu - \nu$。所以 ν 强光在激光器中往返传播时，便会在非均匀加宽气体介质的大信号增益曲线 $G_i(\nu, I_{\nu_1})$ 上对称地烧两个孔。当然，对于单方向传播的激光放大器来说，即使是多普勒加宽的气体介质，其增益曲线也只能烧一个孔。

§ 3.5 发射截面与吸收截面

本节我们从另一角度分析 (3-2-8) 式，若定义:

$$S_{32}(\nu, \nu) = \frac{A_{32}v^2}{8\pi\nu^2} g(\nu, \nu) \qquad (3\text{-}5\text{-}1)$$

则有:

$$G(\nu)=\Delta n S_{32}(\nu) \tag{3-5-2}$$

其中 $S_{32}(\nu)$ 具有面积的量纲，我们称为发射截面。其物理意义为：将激光介质中每个发光粒子视为小光源，所发光强即为该粒子所在处的光强，而发射截面就是此光源的横截面积。为解释这一点，设想一厚度为 dz 的激光介质片，截面积为 S（如图 3-5-1 所示）。单位体积内可受激辐射的粒子数即反转粒子数密度 Δn，而 $\Delta n S_{32} S dz$ 就是激光介质中的所有小光源总横截面积。设此介质片所在坐标为 z，入射光强为 $I(z)$，每个小光源所发光强即是 $I(z)$。因此，从激光介质片出射的光强便从 $I(z)$ 增至 $I(z)+dI(z)$，而

图 3-5-1　发射截面的物理意义

$$\begin{aligned} dI(z) &= \frac{\Delta n S_{32} S\, dz I(z)}{S} \\ &= \Delta n S_{32}\, dz I(z) \end{aligned} \tag{3-5-3}$$

将增益系数的定义（见 3-2-1 式）代入上式，便可得到（3-5-2）式。从发射截面的定义式（3-5-1）可以看出，它是频率 ν 的函数。如果发射的激光频率 ν 恰好等于激活介质的中心频率 ν_0，发射截面取最大值，对均匀加宽和非均匀加宽，其值分别为：

$$S_H(\nu_0,\nu_0)=\frac{A_{32}v^2}{8\pi\nu^2}g_H(\nu_0,\nu_0)=\frac{A_{32}v^2}{4\pi^2\nu^2\Delta\nu_H} \tag{3-5-4}$$

$$S_i(\nu,\nu_0) = \frac{A_{32}v^2}{8\pi\nu^2}g_i(\nu,\nu_0) = \frac{\sqrt{\ln 2}A_{32}v^2}{4\pi^{3/2}\nu^2\Delta\nu_D} \tag{3-5-5}$$

与上述分析相类似，如果激光工作物质的反转粒子数密度小于零，此时激光介质不但没有放大作用，而且还会对入射激光产生吸收作用，使光强减弱。我们可以用类似增益系数的定义方法，来定义激光介质的吸收系数为：

$$\beta = \frac{-\,\mathrm{d}I(z)}{I(z)\,\mathrm{d}z} \tag{3-5-6}$$

在这种介质中，由于光吸收作用，光强的变化规律应描述为：

$$I(z) = I_0 e^{-\beta z} \tag{3-5-7}$$

吸收系数的定义与增益系数的定义只差一个负号，故有：

$$\beta(\nu,\nu_0) = \Delta n(\nu,\nu_0)S_{23}(\nu,\nu_0) \tag{3-5-8}$$

$S_{23}(\nu,\nu_0)$称吸收截面，当激光上、下能级的简并度相等时$S_{32}(\nu,\nu_0) = S_{23}(\nu,\nu_0)$。它的物理意义可描述为：将激光介质中每个吸收光强的粒子视为一个小光栅，它将入射到介质中的光挡掉，而吸收截面就是这个小光栏的横截面积。为了解释这一点，仍可用图 3-5-1 说明，只不过原来的小光源此时变成小光栏，所有光栅的总横截面积为 $\Delta n S_{23} S\Delta z$，入射光强为 $I(z)$，出射时光强减至 $I(z)+\mathrm{d}I(z)$，其中 $\mathrm{d}I(z)$为负值：

$$\mathrm{d}I(z) = -\frac{\Delta n S_{23} S\,\mathrm{d}z}{S}I(z) = -\Delta n S_{23}\,\mathrm{d}z\,I(z) \tag{3-5-9}$$

不难看出，将吸收系数定义式（3-5-6）代入上式就可得出（3-5-8）式。吸收截面与发射截面的计算方法相同，也可由实验测定，一般用实验方法测量吸收截面较为方便。

习　题　三

（1）若光束通过 1m 长的激光介质以后，光强增大了一倍，求

此介质的增益系数。

(2) 计算 YAG 激光器中的峰值发射截面 S_{32}，已知 $\Delta\nu = 2\times 10^{11}$ Hz，$\tau_3 = 2.3\times 10^{-4}$ s，$n = 1.8$。

(3) 计算红宝石激光器当 $\nu = \nu_0$ 时的峰值发射截面，已知 $\lambda = 0.6943\ \mu$m，$\Delta\nu = 3.3\times 10^{11}$ Hz，$\tau = 4.2$ms，$n = 1.76$。

(4) 有频率为 ν_1、ν_2 的两束强光入射，试求在均匀加宽及非均匀加宽两种情况下:

① 频率为 ν 的弱光增益系数表达式。

② 频率为 ν_1 的强光增益系数表达式。

(画出增益曲线示意图)

(5) 激光上、下能级 (E_3、E_2) 的粒子数密度方程可写为:

$$\frac{dn_3}{dt} = R_3 - \frac{n_3}{\tau_3} - (n_3 - n_2)W(\nu)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} + \frac{n_3}{\tau_{32}} + (n_3 - n_2)W(\nu)$$

式中 R_2、R_3 为单位时间激励至 E_2、E_3 能级的粒子数密度，τ_2、τ_3 分别为 E_2、E_3 能级的寿命，τ_{32} 为 E_3 至 E_2 能级的荧光寿命。$W(\nu) = A_{32}g(\nu,\nu_0)/n_\nu$。

① 证明: 在稳态情况下，均匀加宽介质中反转粒子数 Δn 为:

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \Phi\tau_3 W(\nu)}$$

式中: $\Phi = \delta\left[1 + \frac{\tau_2}{\tau_3}(1-\delta)\right]$

$$\delta = \frac{\tau_3}{\tau_{32}}$$

Δn^0 为小信号反转粒子数密度。

② 写出饱和参量 I_s 的表达式。

③ **证明：当** $\frac{\tau_2}{\tau_3} \ll 1$ **时，** Δn **与** I_s **可分别表示为：**

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \dfrac{A_{32} g(\nu, \nu_0) \tau_3 n I_\nu}{m_\nu h \nu c}}$$

$$I_s = \frac{4\pi^2 h c \Delta\nu_H}{n \lambda_0^3} \frac{\tau_{32}}{\tau_3}$$

(6) **腔内均匀加宽增益介质具有最佳增益系数** G_m **及饱和参量** I_{sG}，**同时腔内还存在一均匀加宽的吸收介质，其最大吸收系数为** α_m，**饱和参量为** $I_{s\alpha}$，**如果** $\alpha_m > G_m$，$I_{s\alpha} < I_{sG}$。**问：**

① **此激光器能否起振？**

② **如果瞬时输入一足够强频率的相应的光信号，激光器能否稳定振荡？求腔内光强。(忽略所有损耗)**

第四章　连续激光器的稳态工作特性

本章着重分析连续激光器中稳定激光的形成过程和稳态工作特性。包括输出功率、模式竞争、频率牵引以及线宽极限等问题。

§4.1　激光形成的阈值条件

谐振腔内的激光工作物质如果处在粒子数反转状态，频率处在它的谱线线宽范围内的微弱光信号就会因增益作用而被放大。另一方面，腔内又存在各种不同的损耗，使光信号不断衰减。因此，激光器中的各激光模式能否产生振荡，便取决于增益与损耗的大小。如果光在腔内往返一周所获得的增益大于或等于各种损耗的总和，激光便可产生，否则激光便不能产生。所以，激光模式要想起振，存在一个阈值条件，本节讨论这个条件，并在此基础上讨论满足阈值条件的起振模式数。

一、阈值条件

激光模式起振的阈值条件主要有三种：阀值增益系数、阈值反转粒子数密度、阈值上能级粒子数密度。

(一)　阀值增益系数

第一章中讨论过无源腔的各种损耗，并用平均单程功率损耗率 δ 来描述，按 (1-7-1) 式的定义，光在无源腔内往返一周后的光强为：

$$I_1 = I_0 e^{-2\delta} \tag{4-1-1}$$

式中：I_0—— 初始光强。

如果不考虑损耗，由增益系数定义式（3-2-1）可写出在无损耗的有源腔中光往返一周后的光强为：

$$I_1 = I_0 e^{2G^0 l} \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

式中：l——激光工作物质的长度。

由于我们讨论的是激光形成的阈值，在阈值附近腔内光强还很弱，相当于小信号情况。因此（4-1-2）式中的增益系数用的是小信号增益系数 G^0。把（4-1-1）式与（4-1-2）式合在一起，当增益和损耗同时存在时有：

$$I_1 = I_0 e^{2(G^0 l - \delta)} \qquad (4\text{-}1\text{-}3)$$

显然，为使 $I_1 \geq I_0$，必须有 $2(G^0 l - \delta) \geq 0$，即：

$$G^0 \geq \frac{\delta}{l} \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

这便是形成激光的阈值条件，我们定义 δ/l 为阈值增益系数：

$$G_t = \frac{\delta}{l} \qquad (4\text{-}1\text{-}5)$$

不同的纵模可以有相同的单程损耗率，因而具有相同的阈值增益系数。不同的横模因具有不同的横向光场分布，因而有不同的单程衍射损耗，进而有不同的阈值增益系数。高阶横模的衍射损耗大，阈值增益系数便比低阶模大。图 4-1-1 画出的是激光器的起振

图 4-1-1　激光器起振模谱

模谱示意图。其中 TEM_{00} 模与 TEM_{01} 模的阈值增益系数分别为 G_t^{00} 与 G_t^{01}，且有 $G_t^{01} > G_t^{00}$。图示中的 TEM_{00q}、TEM_{00q+1}、TEM_{01q} 三个模式的小信号增益系数大于各自的阈值 G_t，故可起振。

(二) 阈值反转粒子数密度

根据 (3-2-8) 式所表示的增益系数和反转粒子数密度间的关系可知，与增益系数存在阈值相对应，反转粒子数密度也存在阈值:

$$\Delta n_t = \frac{8\pi\nu_0^2 G_t}{A_{32} v^2 g(\nu, \nu_0)} \tag{4-1-6}$$

将 (4-1-5) 式代入 (4-1-6) 式中，并用激光上能级的平均寿命 τ_3 代替自发辐射几率，即 $\tau_3 = 1/A_{32}$，可将 (4-1-6) 式改写如下:

$$\Delta n_t = \frac{8\pi\nu_0^2 \tau_3 \delta}{v^2 l g(\nu, \nu_0)} \tag{4-1-7}$$

如果考虑起振的激光模式正好处在激光介质增益曲线的中心频率 ν_0 处，(4-1-7) 式中的 $g(\nu, \nu_0)$ 可用 $g_m = g(\nu_0, \nu_0)$ 代替，将均匀加宽的 g_m 表达式 (2-3-6) 与非均匀加宽的 g_m 式 (2-4-16) 分别代入上式中，可得:

$$\Delta n_t = \frac{4\pi^2\nu_0^2 \tau_3 \delta \Delta\nu_H}{v^2 l} \tag{4-1-8}$$

$$\Delta n_t = \frac{4\pi\nu_0^2 \tau_3 \delta \Delta\nu_D}{v^2 l} {\frac{\pi}{\ln 2}}^{\frac{1}{2}} \tag{4-1-9}$$

(三) 阈值上能级粒子数密度

由于反转粒子数密度存在阈值，激光上能级的粒子数密度也将存在阈值。

例如红宝石激光器为三能级系统，激光下能级为 E_1 基态，上能级为 E_2，E_3 能级基本上是空的，各能级上的反转粒子数密度有

以下关系:

$$n_1 + n_2 = n_0 \tag{4-1-10}$$

$$n_2 - n_1 = \Delta n \tag{4-1-11}$$

式中: n_0——总粒子数密度;

Δn——反转粒子数密度。

将这两式联立, 可解出上能级粒子数密度 n_2:

$$n_2 = \frac{n_0 + \Delta n}{2} \tag{4-1-12}$$

其中 Δn 用阈值 Δn_t 代替, 可得:

$$n_{2t} = \frac{n_0 + \Delta n_t}{2} \tag{4-1-13}$$

对于四能级系统的氦氖激光器, 由于激光下能级基本上是空的, 故激光上能级的粒子数密度就约等于反转粒子数密度 $n_3 \approx \Delta n$, 因而上能级的阈值粒子数密度就等于阈值反转粒子数密度:

$$n_{3t} = \Delta n_t \tag{4-1-14}$$

这里我们给出红宝石激光器与氦氖激光器的计算实例。有关数据如下。

红宝石激光器: $\nu = 4.32 \times 10^8$ MHz, $\Delta\nu = 3.3 \times 10^5$ MHz, $\tau = 3 \times 10^{-3}$ s, $n_0 = 1.6 \times 10^{19}$ 1/cm^3, 折射率 $n = 1.75$。

氦氖激光器: $\nu = 4.74 \times 10^8$ MHz, $\Delta\nu = 1.5 \times 10^3$ MHz, $\tau_3 = 2 \times 10^{-8}$ s, 折射率 $n = 1$。

设谐振腔长 $l = 10$cm, 两反射镜的反射系数分别为 100% 和 98%, 忽略其它损耗。可以算得红宝石激光器的阈值为 $\Delta n_t = 2.5 \times 10^{22}$ 1/m^3, $n_{2t} = 8 \times 10^{24}$ 1/m^3。而氦氖激光器的阈值为 $\Delta n_t = n_{3t} = 2 \times 10^{14}$ 1/m^3。可见四能级系统的阈值比三能级系统要小得多。

实际工作中经常使用外界提供给激光器的能量作为激光器阈值, 如阈值泵浦能量或阈值泵浦功率等。对固体激光器来说, 是

指光泵的能量或功率；对气体激光器来说，是指放电管中的放电电流。

二、起振模式数

当激光器的外界激发作用足够强时，由于抽运速率足够大，将使小信号反转粒子数密度超过阈值，从而使小信号增益系数也超过阈值。我们定义小信号增益系数的最大值 G_m 与增益系数的阈值 G_t 之比为激发参数：

$$\alpha = \frac{G_m}{G_t} \qquad (4\text{-}1\text{-}15)$$

把（4-1-5）式代入上式得：

$$\alpha = \frac{G_m l}{\delta} \qquad (4\text{-}1\text{-}16)$$

激发参数 α反映了激光器的外界激发作用的大小与谐振腔的损耗大小。我们定义激光器小信号增益曲线中大于阈值增益系数的那部分曲线所对应的频率范围为振荡带宽 $\Delta\nu$。对于均匀加宽介质，由（3-2-9）式，令 $G_H^0(\nu) = G_t$，有：

$$\frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \alpha}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2} = 1 \qquad (4\text{-}1\text{-}17)$$

从此式解出 ν的两个解为：

$$\nu_{1,2} = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu_H}{2}\sqrt{\alpha - 1} \qquad (4\text{-}1\text{-}18)$$

因此振荡线宽 $\Delta\nu_T = \nu_2 - \nu_1$ 为：

$$\Delta\nu_T = \sqrt{\alpha - 1}\,\Delta\nu_H \qquad (4\text{-}1\text{-}19)$$

对非均匀加宽介质，由（3-2-11）式，令 $G_i^0(\nu) = G_t$ 后可解出：

$$\nu_{1,2} = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu_D}{2}\sqrt{\frac{\ln\alpha}{\ln 2}} \qquad (4\text{-}1\text{-}20)$$

振荡线宽为：

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{\ln\alpha}{\ln 2}}\,\Delta\nu_D \qquad (4\text{-}1\text{-}21)$$

从（4-1-19）式和（4-1-21）式可以看出，振荡线宽与激光工作物质、泵浦、谐振腔等因素都有关系。

在第一章中我们曾阐述过，只有满足谐振腔驻波条件的本征纵模才可以存在，这些本征纵模的频率间隔由（1-7-50）式决定。只有那些频率处在增益曲线的振荡线宽范围内的本征纵模才满足起振条件，如图 4-1-2 所示。因此，起振纵模数的计算公式为：

$$\Delta q = \left[\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_q}\right] + 1 \qquad (4\text{-}1\text{-}22)$$

式中：[x] 表示对 x 的值取整。可见，外界的激发作用越强、谐

图 4-1-2　激光器起振纵模数示意图

振腔本身的损耗越小、腔长越长，起振的纵模个数就越多。

起振后的激光模式能否形成一个稳定的振荡模式而输出，还要考虑模式竞争的情况。均匀加宽激光器往往由于模式间的竞争，最后只有靠近中心频率附近的一个模式取胜而形成稳定的振荡。非均匀加宽激光器则因各模式间的竞争不激烈或无竞争，而使得起振的各模式同时形成稳定振荡而共存。对于某些实际应用如精密计量、激光通讯等，需要单色性能极好、频率稳定的激光束。这时，我们希望激光器只以单纵模运转。为达此目的，可选择均匀加宽激光器，也可以尽量减小谐振腔的腔长，使纵模频率间隔 $\Delta\nu_q$ 加大。但是，这些方法都具有一定的局限性，例如腔长缩短，势必会影响输出功率。目前已发展了许多有效的纵模选模技术，如在腔内引入色散元件，(像 F-P 标准具) 采用复合腔结构，在半导体激光器中采用注入锁定技术以及分布反馈和分布喇格反射器等。在利用锁模技术获得超短脉冲时，我们往往希望同时振荡的纵模个数越多越好，因此，可选择增益系数高、线宽大的固体、液体和染料激光器，并设法尽量减小纵模的频率间隔。

§ 4.2 模式竞争

上节中我们讲到，可以起振的激光纵模既要满足谐振腔几何参数所决定的驻波条件，又要满足由激光工作物质、谐振腔及外界激发作用等因素共同决定的振荡条件。但起振的纵模有的还不一定能维持下去，这是由于有些模式使用的是相同的反转粒子数，它们之间存在着所谓模式竞争现象。下边我们分别就均匀加宽、非均匀加宽介质来讨论这些模式间的竞争作用。

一、均匀加宽激光器的模式竞争

如果有多个模式的谐振频率落在均匀加宽工作物质的增益曲

线振荡线宽范围内，由于各模式尽管频率不同，但使用的都是相同的反转粒子数密度，因此它们之间的竞争是很激烈的。图 4-2-1 画出了这一过程。为了讨论方便，假设有三个模式，频率分别为 ν_{q-1}、ν_q、ν_{q+1}，开始时，这三个模式的小信号增益系数都大于阈值增益系数 G_t，因而三个模式的光强 I_{q-1}、I_q、I_{q+1}都逐渐增大。但由于增益饱和作用，整个增益曲线将随光强的增大而下降。当增益曲线下降到图示中的曲线 1 时，ν_{q+1}模式的增益系数等于阈值 G_t，因而 I_{q+1}不再增大。但此时 ν_q、ν_{q-1}两个模式的增益系数仍大于阈值，I_q、I_{q-1}还继续增大，整个增益曲线仍继续下降。这样很快就使得 ν_{q+1}模式的增益系数小于阈值 G_t，故该模式的光强 I_{q+1}很快减弱，直至熄灭。同理，当增益曲线下降到图示中的曲线 2 时，ν_{q-1}模的增益系数等于阈值 G_t，因而 I_{q-1}不再增大，但 ν_q的增益系数仍大于 G_t，I_q继续增大，整个增益曲线还要下降，这又将导致 I_{q-1}很快熄灭。当增益曲线下降到图示中的曲线 3 时，ν_q的增益系数等于阈值 G_t，I_q光强达到稳定值，不再增大。整个增益曲线也就不再下降。最后，谐振腔内只有 ν_q一个模式形成稳定的振荡。这说明，均匀加宽激光器中满足阈值条件的纵模在振荡过程中互相竞争，结果总是靠近中心频率 ν 附近的纵模取胜，其它模式都被抑制熄灭。

图 4-2-1　均匀加宽激光器的模式竞争

在均匀加宽激光器中，如果激发很强时，除了中心频率附近

的模式可形成稳定振荡，也有可能会出现其它较弱的模式，激发越强，出现的振荡模式也就越多。这种现象可以这样来解释：当频率为 ν_q 的强激光振荡时，它在腔内沿轴线方向的光强分布并不是均匀的，而是形成了一个驻波场，波腹处光强最大，波节处光强最小。这样，腔内各点处的增益系数也就不同，波腹处光强大，用去的反转粒子数多，造成增益系数下降的也大。波节处恰好相反，增益系数下降的少。但 ν_q 模式的平均增益系数在稳态时仍等于阈值增益系数。我们称这种反转粒子数密度或增益系数在腔内轴线上的具有某种分布的现象为空间烧孔效应。频率等于 $\nu_{q'}$ 的另一个激光模式所形成的驻波场一般说来与 ν_q 的驻波场不一定重合，如果 $\nu_{q'}$ 的波腹与 ν_q 的波节重合，则 $\nu_{q'}$ 模式也有可能得到较高的增益系数而形成振荡。这说明，由于腔轴线方向的空间烧孔效应，不同纵模使用空间不同部分的反转粒子数而同时产生振荡，我们称这一现象为纵模的空间竞争。为了获得单纵模，可以设法将纵模在腔内形成的驻波场变为行波场，使光强沿轴线方向均匀分布，以消除空间模竞争。例如用环形腔代替一般的谐振腔便可达到此目的。图 4-2-2 画出了上述轴向空间烧孔效应。其中图 4-2-2(a) 是 ν_q 模在腔内的光强分布，图 4-2-2(b) 是只有 ν_q 模存在时的反转粒子数密度的分布，图 4-2-2(c) 为 $\nu_{q'}$ 模的光强分布。在 $z = z_0$ 处，恰好 $\nu_{q'}$ 模的波腹与 ν_q 模的波节重合，使 $\nu_{q'}$ 模也可以获得增益而维持稳定的振荡。如果激光工作物质中的激活粒子空间转移的速度很快，空间烧孔便无法形成。例如气体激光器中，发光粒子作无规则的热运动，无法形成空间烧孔，也就不存在空间模式竞争的现象。因此，均匀加宽的高气压气体激光器最容易实现单纵模输出。固体激光器中的激活粒子都是被束缚在晶格上的，不能消除空间烧孔现象，如果不采取特殊的选模措施，均匀加宽的固体激光器一般也都是多纵模振荡。

在均匀加宽激光器中，除了存在轴向的空间烧孔现象以外，还

图 4-2-2　均匀加宽激光器空间烧孔效应

存在横向的空间烧孔现象。这是由于不同横模其横向光场分布也不同，它们分别使用不同空间的激活粒子。因此，如果激活粒子的空间转移的速度很慢，不能消除横向烧孔效应的话，当激励足够强时，就可能形成多横模振荡。

均匀加宽激光器中模式竞争效应会引起激光器的所谓跳模现象，特别是在内腔式气体激光器刚点燃时很明显。精细测量输出激光的频率，会发现它随时间不断的起伏，如图 4-2-3 所示。随时间的延续，光频率逐渐减小，到某一时刻又突然发生跳变，增大到某一数值，然后又重复上述过程。但激光频率始终在谱线中心频率 ν_0 附近变化。我们可以用图 4-2-4 来解释这种现象。图 4-2-4(a) 中画的是激光器刚点燃时的情况。设此时频率为 ν_q 的纵模比 ν_{q+1} 模更靠近中心频率 ν_0，因此，ν_q 模具有比较大的小信号增

图 4-2-3　均匀加宽激光器的跳模现象

图 4-2-4　跳模现象的图解

益系数，两个模式竞争的结果，ν_q模取胜，ν_{q+1}模被抑制。图 4-2-4(b) 中画的是激光器点燃一段时间后的情况。由于腔内温度的升高，放电管热膨胀，使得粘贴在放电管两端的两个反射镜片之间的距离加大，也就是谐振腔的腔长变大。由 (1-7-49) 式知，这将使得各本征纵模的谐振频率向低频方向漂移，输出激光的频率也随之减小。当 ν_{q+1}模的频率变成比 ν_q模频率更接近中心频率 ν_0 时，ν_{q+1}模就可能战胜 ν_q模取而代之，输出光频率便由 ν_q突然增至 ν_{q+1}，产生一次跳模。腔长每伸长一个半波长，就会产生一次跳模，激光频率就在 $\nu_0 \pm c/4L$ 范围内来回变化，L 为谐振腔的光学长度。

二、非均匀加宽激光器的模式竞争

非均匀加宽激光器中，如果有多个纵模满足起振条件，由于某个纵模光强的增加，不会使整个增益曲线下降，而只是在增益曲线的相应频率处产生一个或两个烧孔，只要起振的几个纵模频率间隔足够大，各纵模形成的烧孔不重叠，那么各模式所消耗的反转粒子数互不相关。所以，非均匀加宽激光器的各纵模之间实际上没有模式竞争，所有小信号增益系数大于阈值增益系数的纵模都能形成稳定振荡。因此，非均匀加宽激光器通常都是多纵模振荡。图 4-2-5 画的是非均匀加宽激光器的这种多纵模振荡的情况。当外界的激发越强时，小信号增益曲线就越高，满足振荡条件的纵模个数也越多。

图 4-2-5　非均匀加宽激光器的多纵模振荡

非均匀加宽激光器中的模式竞争存在于那些频率间隔小的纵模之间，由于相邻纵模的烧孔部分重叠，共用相同的反转粒子数而产生竞争。但这种竞争一般不会像均匀加宽那样能将竞争对手完全熄灭。只有在非均匀加宽的气体激光器中，两个频率恰好对

中心频率对称的纵模同时满足起振条件时，因这两个模式的烧孔完全重合，使得它们之间的竞争变得激烈，结果是它们的输出功率无规则起伏。

§ 4.3　连续激光器的输出功率

连续激光器稳定工作时，由于激光工作物质的光放大作用，腔内的损耗系数分布不均匀，各纵模的驻波效应，光场的横向高斯分布等因素，使得腔内光强分布不均匀，因而，精确计算各点的光强是个非常复杂的问题。本节从增益饱和效应出发，计算激光器在稳态工作时腔内的平均光强，并在此基础上计算激光器的输出功率。

激光器在外界激发作用很弱时，激活介质的小信号增益系数小于阈值增益系数，激光器无激光输出。如果外界激发作用增强到小信号增益系数超过阈值时，腔内光强便会不断地增大。但是腔内的光强不会无限制地增加下去，因为当光强越强，消耗的反转粒子数便越多，由于激活介质的增益饱和作用而使增益系数下降。只要增益系数尚未降至阈值，上述过程便会继续下去，即光强继续增大，增益系数继续下降。直至增益系数下降到阈值时，增益与损耗达到平衡，光强不再增大，这时的激光器建立起了稳定的工作状态。如果外界的激发作用再增强，小信号增益系数又增大，腔内光强必须增加到一个更高的水平才能使增益系数下降到阈值，并重新建立起新的稳定工作状态。因此，外界激发增强，激光器的输出功率就会增大。但是，不管外界的激发是强还是弱，稳态工作时激活介质的增益系数总是等于阈值增益系数：

$$G(\nu, I_{\nu_q}) = \frac{\delta}{l} \tag{4-3-1}$$

式中：ν——稳定振荡模式的频率；

I_{ν_q} —— ν_q 模式的稳定光强。

下边我们从（4-3-1）式出发，分别讨论均匀加宽激光器与非均匀加宽激光器在稳定工作时腔内的光强、输出功率、谐振腔输出镜的最佳透射率以及最佳输出功率等问题。

一、均匀加宽激光器

我们主要讨论驻波型激光器，稳定工作时，腔内存在着沿腔轴线方向传播的光强 I_+ 与反方向传播的光强 I_-（见图 4-3-1）。当增益不太大时，$I_+ = I_-$，腔内平均光强 $I_{\nu_q} = I_+ + I_- \approx 2I_+$，这两个光强同时参与增益饱和作用。设腔内只有一个纵模形成稳定振荡，频率为 ν_q，若 $\nu_q \neq \nu_0$，则由（3-4-2）式知，激光介质对该模式的大信号增益系数为：

图 4-3-1　驻波型激光器

$$G(\nu_q, I_{\nu_q}) = \frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu_q - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\left(1 + \frac{I_{\nu_q}}{I_s}\right)} G_m \quad (4\text{-}3\text{-}2)$$

由（4-3-1）式便可以求出腔内的稳定光强：

$$I_{\nu_q} = \left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \alpha - (\nu_q - \nu_0)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2} - 1\right] I_s \quad (4\text{-}3\text{-}3)$$

如果 $\nu_q = \nu_0$，上式便可简化为：

$$I_{\nu_q} = (\alpha - 1) I_s \quad (4\text{-}3\text{-}4)$$

设激光束的有效截面积为 S，两个反射镜透过率分别为 0 和 T，则激光器输出功率为：

$$P_{\nu_q} = STI_+ = \frac{1}{2}STI_{\nu_q} \tag{4-3-5}$$

将(4-3-3)式与(4-3-4)式代入(4-3-5)式中，可分别得到振荡频率 $\nu_q=\nu_0$ 与 $\nu_q\neq\nu_0$ 的输出功率为:

$$P_{\nu_0} = \frac{1}{2}STI_s(\alpha-1) \tag{4-3-6}$$

$$P_{\nu_q} = \frac{1}{2}STI_s\left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2\alpha-(\nu_q-\nu_0)^2}{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}-1\right] \tag{4-3-7}$$

(4-3-7)式中的 α 由(4-1-16)式决定。

如果用 a 表示除输出损耗以外的其它往返损耗率，则相应的平均单程损耗率为 $a/2$。再设谐振腔两面反射镜的透过率分别是 0 和 T，则当 $T \ll 1$ 时，输出损耗的平均单程损耗率为 $T/2$。各种损耗都考虑，总的平均单程损耗率可以表示为:

$$\delta = \frac{T+a}{2} \tag{4-3-8}$$

把(4-3-8)式代入(4-3-6)式中，可以把均匀加宽激光器中振荡频率为 ν_0 的模式的输出功率写成:

$$P_{\nu_0} = \frac{1}{2}STI_s\left(\frac{2G_m l}{a+T}-1\right) \tag{4-3-9}$$

从这个式子不难看出，为了提高激光器的输出功率，可以加大外界的激发作用而增大 G_m，减小谐振腔的损耗率 a，加大激光工作介质的长度 l 以及横截面积 S。输出反射镜的透射率 T 对输出功率则存在两个相反的影响。T 增大，一方面提高了透射光比例而有利于提高输出功率，另一方面却又使阈值增加而导致腔内光强的

下降。因此，存在一个使输出功率达到极大值的最佳透射率 T_m，图 4-3-2 画出了往返损耗率 a 取不同数值，$2G_m l = 3$ 时的输出功率与输出镜透射率之间的关系曲线。将 (4-3-9) 式对 T 求导，并令 $\frac{dP}{dT} = 0$，可求出最佳透射率为：

图 4-3-2　输出功率与透射率的关系

$$T_m = \sqrt{2G_m l a} - a \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

再将 (4-3-10) 式代回 (4-3-9) 式中，可求出当输出镜具有最佳透射率时，激光器的最大输出功率为：

$$P_m = \frac{1}{2} S I_s \left(\sqrt{2G_m l} - \sqrt{a} \right)^2 \qquad (4\text{-}3\text{-}11)$$

图 4-3-3 画的是往返损耗率 a 取不同数值时输出镜的最佳透射率 T_m 与 $2G_m l$ 之间的关系。

图 4-3-3　最佳透射率曲线

二、非均匀加宽激光器

我们讨论的仍是驻波型激光器，并且主要是气体激光器。与

均匀加宽激光器所不同的是，当 $\nu_q \neq \nu_0$ 时，I_+ 与 I_- 两束光在增益曲线上分别产生两个不同的烧孔。每个光强只对其中一个烧孔起饱和作用。因此，频率为 ν_q 的稳定振荡模式所具有的大信号增益系数按照（3-4-15）式应为：

$$G(\nu_q, I_{\nu_q}) = \frac{G_m}{1 + \frac{I_+}{I_s}} e^{-4\ln 2 \frac{(\nu_q - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \qquad (4\text{-}3\text{-}12)$$

再利用（4-3-1）式，可以写出：

$$\begin{aligned} I_+ &= I_s \left[\left(\alpha e^{-4\ln 2 \frac{(\nu_q - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \right)^2 - 1 \right] \\ &= I_s \left[\alpha^2 e^{-8\ln 2 \frac{(\nu_q - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} - 1 \right] \end{aligned} \qquad (4\text{-}3\text{-}13)$$

因此，该模式的输出功率为：

$$P_{\nu_q} = S I_+ T = S T I_s \left[\alpha^2 e^{-8\ln 2 \frac{(\nu_q - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} - 1 \right] \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

当 $\nu_q = \nu_0$ 时，I_+ 与 I_- 同在增益曲线中心处产生一个烧孔，这种情况与均匀加宽激光器类似，稳定振荡模式的光强 $I_{\nu_0} = I_+ + I_- \approx 2I_+$，它所具有的大信号增益系数为：

$$G(\nu_0, I_{\nu_0}) = \frac{G_m}{1 + \frac{2I_+}{I_s}} \qquad (4\text{-}3\text{-}15)$$

由（4-3-1）式可写出：

$$I_+ = \frac{1}{2} I_s (\alpha^2 - 1) \qquad (4\text{-}3\text{-}16)$$

因此输出功率为：

$$P_{\nu_0} = S T I_+ = \frac{1}{2} S T I_s (\alpha^2 - 1) \qquad (4\text{-}3\text{-}17)$$

（4-3-17）式比（4-3-14）式多了一个因子 1/2，它可以这样来理解：当振荡模式 $\nu_q \neq \nu_0$ 时，往返传播的光在增益曲线上烧两个孔，而 ν_q

= ν 时，往返传播的光只烧一个孔，因此，ν= ν 时的输出功率在不考虑孔面积大小的前提下自然应比 $\nu \neq \nu$ 时小一半。但实际上不同频率处的烧孔面积并不相等，ν= ν 时虽只烧出一个孔，但此孔的面积却最大。而 ν 偏离 ν 时可烧两孔，但孔面积随着偏离 ν 越远而越小。如果以非均匀加宽气体激光器的输出光频率 ν 作为横轴，输出光功率 P 作为纵轴，画出 P～ν 曲线，如图 4-3-4(a) 所示，在中心频率 ν 处出现一极小值，我们称曲线的这一凹陷为兰姆凹陷。下边我们来定性地解释这个凹陷产生的原因。图 4-3-4(b) 中画的是小信号增益曲线，当 ν= ν 时，小信号增益系数

图 4-3-4　兰姆凹陷

(a) P～ν 曲线；(b) 兰姆凹陷的形成

$G^0(\nu_1)=G_t$，输出功率 $P_1=0$。$\nu=\nu_2$ 时，小信号增益系数 $G^0(\nu_2)>G_t$，激光振荡模式将在 ν_2 及 $\nu_2'=2\nu_0-\nu_2$ 两处形成两个烧孔，激光器的输出功率 P_2 与这两个孔面积之和成正比。当 $\nu=\nu_3$ 时，由于两个烧孔的面积增大，故输出功率 P_3 比 P_2 要大，按照图示，$\nu=\nu_3$ 时的两个烧孔刚好未重叠，只要频率再稍大于 ν_3 一点，两个烧孔就开始重叠，孔面积之和小于 ν_3 时的孔面积之和。因此，$\nu=\nu_3$ 时的输出功率 P_3 达到极大值。$\nu=\nu_0$ 时，两个烧孔完全重合，虽然每个孔面积达到最大，但两孔合为一个，孔面积之和却是极小值，相应的输出功率 P_0 也是个极小值。当 ν 再继续增大，输出功率的变化情况类似上述过程，最后在 $P\sim\nu$ 曲线上出现兰姆凹陷。凹陷宽度大约与烧孔宽度相等，由烧孔宽度的计算公式 (3-3-18) 式可知，激活介质的谱线宽度越宽，凹陷宽度就越大，因此，加大气体激光器放电管中的气压，使碰撞线宽变大，可使兰姆凹陷变宽、变浅。当气压很高时，碰撞线宽超过了多普勒线宽，这时气体激光器变成以均匀加宽为主，兰姆凹陷也就消失了。图 4-3-5 画出在不同气压下输出功率随频率变化的曲线，其中 $P_3>P_2>P_1$。另外，由图 4-3-4 还可以定性地看出，激发参数 α越大，$\nu=\nu_3$ 时的两个烧孔面积之和比起 $\nu=\nu_0$ 时的一个烧孔面积来就大的越多，因此兰姆凹陷也就越深。当激发参最 α减小时，兰姆凹陷变浅。

图 4-3-5　不同气压下的兰姆凹陷

§ 4.4　激光器的线宽极限

激光束具有优异的单色性，正是这种单色性能使它在精密计

量及全息术等方面获得极重要的应用。激光的谱线线宽从理论上讲不可能为零，本节主要讨论的就是这个线宽极限的大小。

第一章中我们曾给出过无源腔中本征模式的频带宽度的计算公式（1-7-43），为简单起见，这里设激光介质的长度等于谐振腔长，则腔的光学长度 $L' = nL$，n 为介质折射率。因此，（1-7-43）式可写为：

$$\Delta\nu = \frac{v\delta}{2\pi L} \tag{4-4-1}$$

式中：δ——无源腔平均单程损耗率；

L——腔长；

v——光在激光介质中的传播速度。

当激光器正常工作时，激光介质的增益系数大于零，对光有放大作用，此时的谐振腔为有源腔。同时，考虑到谐振腔的损耗和激活介质的增益作用，有源腔的单程净损耗率为：

$$\delta' = \delta - G(\nu, I_\nu)L \tag{4-4-2}$$

则有源腔本征模式的线宽应为：

$$\Delta\nu' = \frac{v\cdot\delta'}{2\pi L} \tag{4-4-3}$$

如前所述，激光器在稳态工作时，大信号增益系数 $G(\nu, I_\nu)$ 应该等于阈值增益系数 G_t，即 $G(\nu, I_\nu) = \delta/L$，由（4-4-2）式和（4-4-3）式似乎应得出 $\delta' = 0$ 及 $\Delta\nu' = 0$ 的结论。显然，这只是一种理想的情况，这种理想激光器发光的物理图景是：腔内的受激辐射能量补充了损耗的能量，而且由于受激辐射所产生的光波与原来的光波具有相同的位相，两者相干叠加使腔内光波的振幅始终保持恒定。因而，输出激光在此理想情况下是一个无限长的波列，其线宽等于零。实际情况是，自然界不可能存在绝对的单色光，即使单纵模激光器输出的激光线宽也不会等于零。产生这种分歧的

原因是，我们在分析激光器产生稳定振荡模式的过程中，忽略了自发辐射的存在。实际上自发辐射是始终存在的，由于与受激辐射相比，自发辐射对输出激光功率的贡献极其微弱，在讨论激光器的振荡阈值条件、腔内稳定光强、输出功率等问题时，自发辐射完全可以忽略。但是在考虑激光的线宽极限这个问题时，就必须考虑了。下边我们对此问题进行粗略的分析。

由四能级系统的速率方程出发，腔内频率等于 ν 的激光模式的光子数密度 ϕ 随时间的变化率为：

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta n \frac{A_{32}}{m_\nu} g(\nu, \nu) \phi - \frac{\phi}{\tau} \tag{4-4-4}$$

将增益系数与反转粒子数密度之间的关系式 (3-2-8) 与光子平均寿命计算公式 (1-7-26) 代入上式中，有：

$$\frac{d\phi}{dt} = G(\nu, I_\nu)\phi v - \frac{\phi \cdot \delta \cdot v}{L} \tag{4-4-5}$$

其中第一项是受激辐射的贡献，第二项是腔损耗的影响。考虑到自发辐射对频率 ν 的模式光子数密度增长率的贡献，(4-4-5) 式可以修改为：

$$\frac{d\phi}{dt} = G(\nu, I_\nu)\phi v + A_\nu n_3 - \frac{\phi \delta v}{L} \tag{4-4-6}$$

式中：n_3——激光上能级 E_3 的粒子数密度；

A_ν——分配到频率为 ν 的模式上的自发辐射几率。

当激光器稳定振荡时应有 $\frac{d\phi}{dt} = 0$，再由 (4-4-2) 式可得：

$$\delta = \frac{A_\nu n_3 L}{v\phi} \tag{4-4-7}$$

这个公式说明，由于有自发辐射的存在，稳定振荡时的单程增益略小于单程损耗，净损耗率 δ 不等于零，故输出激光并非是个无

限长的波列，而是个略有衰减的有限长波列，因此，有源腔输出的激光是有一线宽极限 $\Delta\nu$ 的。由于分配到一个振荡模式上的自发辐射几率 A_ν 很小，所以有源腔净损耗率 δ 比无源腔损耗率 δ 要小得多，从而 $\Delta\nu$ 比 $\Delta\nu$ 也要小得多。

为了求出理论上的激光线宽极限，必须求出（4-4-7）式中的 A_ν 与 ϕ 的计算公式。以均匀加宽激光器为例，由（4-3-5）式可重新写出频率为 ν 的单模输出功率为：

$$P_\nu = \frac{1}{2} S T I_\nu \tag{4-4-8}$$

式中：I_ν——腔内该模式光强。

I_ν 与 ϕ 具有如下关系：

$$I_\nu = \phi h \nu \tag{4-4-9}$$

如果忽略除输出损耗以外的其它损耗，也就是令 $\delta = T/2$，由（4-4-8）式和（4-4-9）可得：

$$\phi = \frac{P_\nu}{\delta S h \nu} \tag{4-4-10}$$

另外，由第二章§2.6 知，分配到频率为 ν 模式上的自发辐射跃迁几率由（2-6-30）式计算，现将该式代回（4-4-4）式中去，可得：

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta n \phi L S A_\nu - \frac{\phi}{\tau} \tag{4-4-11}$$

令 $\frac{d\phi}{dt} = 0$，并将光子平均寿命的计算公式（1-7-26）式代入，可得 A_ν 的计算公式为：

$$A_\nu = \frac{\delta V}{\Delta n S L^2} \tag{4-4-12}$$

将 (4-4-10) 式与 (4-4-12) 式代入 (4-4-7) 式中可得:

$$\delta = \frac{n_3 \delta_s^2 h\nu}{\Delta n L P_\nu} \tag{4-4-13}$$

最后, 把 (4-4-13) 式与 (4-4-1) 式代入 (4-4-3) 式中, 便可得出频率为 ν的单纵模激光的线宽极限为:

$$\Delta\nu = \frac{n_3}{\Delta n} \cdot \frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2 h\nu}{P_\nu} \tag{4-4-14}$$

当该激光模式的频率恰好等于激光工作介质的中心频率时, 可把 (4-4-14)式中的 ν改为 ν_0。例如对于 $L = 30\text{cm}$、$T = 0.02$、$P_\nu = 1\text{mW}$ 的氦氖激光器, 由 (4-4-1) 式可计算出 $\Delta\nu_c = 1.6\times 10^6\text{Hz}$, 由 (4-4-14) 式可计算出 $\Delta\nu = 6\times 10^{-3}\text{Hz}$。(设 $\Delta n = n_3$) 可见 $\Delta\nu$ 比 $\Delta\nu_c$ 小得多。激光的线宽极限是由于自发辐射的存在而形成的, 因而它是无法排除的。实际上, 激光器由于存在诸多不稳定的因素, 纵模频率本身的漂移就已经大大超过了线宽极限的数值, 所以实际激光器很难做到如此窄的线宽。

§ 4.5 频率牵引现象

无源腔中激光工作物质的折射率可视为常数, 但在实际工作着的有源腔中, 激光工作物质的折射率不再是常数, 它随频率而变化, 我们称此现象为色散。在色散的作用下, 激光器中可以出现一种称为频率牵引的现象。本节先讨论受激吸收与色散现象的经典理论, 并给出激光工作物质的折射率随频率而变化的色散关系式, 最后在此基础上讨论激光的频率牵引现象。

一、受激吸收和色散的经典理论

在第三章中我们曾从速率方程出发, 推导了物质的增益系数

或吸收系数的表达式。但是由速率方程的理论不能给出物质的色散关系。这里我们从原子的经典模型出发，分析当频率为 ω 的单色平面光波通过物质时原子所产生的受激吸收以及物质的色散现象，并导出物质的吸收系数（或增益系数）与折射率的表达式，进而给出折射率与增益系数之间的普遍关系。

受激吸收和色散现象是物质中的原子与电磁场相互作用的结果。物质原子在电磁场的作用下产生感应电极化强度，感应电极化强度使物质的介电常数发生变化，因而电磁波的传播常数也随之发生变化，从而导致物质对电磁波的吸收和色散。下面我们就从这一概念出发来求吸收系数与折射率的经典表达式。

根据电磁场理论，在物质中沿 z 方向传播的单色平面波，其 x 方向的电场强度可以表示为：

$$
\begin{aligned}
E(z,t) &= E(z)e^{i\omega t} \\
&= E_0 e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,z} e^{i\omega t}
\end{aligned}
\tag{4-5-1}
$$

式中：ε——物质的相对介电常数；

μ——物质的相对磁导率。

在一般的介电物质中有 $\mu = 1$，而 ε 则应根据物质在电场强度 $E(z,t)$ 的作用下的极化过程求得。设物质由单原子组成，作用在电子上的电场力为：

$$
f = -eE(z,t) = -eE(z)e^{i\omega t} \tag{4-5-2}
$$

在此电场力作用下，电子的运动方程可以写成：

$$
\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m}E(z)e^{i\omega t} \tag{4-5-3}
$$

若无外电磁场作用时，电子作自由振动，即在恢复力与阻尼作用下做振幅衰减的阻尼谐振动。其固有圆频率为 ω，阻尼系数为 γ。产生阻尼是由于电子在谐振动过程中要向外辐射能量。(4-5-3) 方程的特解可写成：

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} \tag{4-5-4}$$

这里没有考虑通解中代表自由阻尼振荡的项，这是因为它对感应电矩没有贡献。把（4-5-4）**式代入**（4-5-3）**式，得到**:

$$x_0 = \frac{-\frac{e}{m}E(z)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \tag{4-5-5}$$

我们只对共振相互作用的情况感兴趣，此时有 $\omega_0 \approx \omega$，**上式可近似写成**:

$$x_0 = \frac{-\frac{e}{m}E(z)}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma\omega_0} \tag{4-5-6}$$

一个原子的感应电矩为:

$$p(z,t) = -ex(z,t)$$

$$= \frac{\frac{e^2}{m}E(z)}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma\omega_0} e^{i\omega t} \tag{4-5-7}$$

对气压不太高的气体工作物质，原子间相互作用可以忽略，因而感应电极化强度可以通过对单位体积中原子电矩的求和而得到:

$$P(z,t) = np(z,t)$$

$$= \frac{\frac{ne^2}{m}}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma\omega_0} E(z,t) \tag{4-5-8}$$

式中: n ——**单位体积物质中所含原子数。**

另外，物质的感应电极化强度还可以表示为:

$$P(z,t) = \varepsilon_0 \chi E(z,t) \tag{4-5-9}$$

式中: χ ——**工作物质的电极化系数。**

比较（4-5-8）**式与**（4-5-9）**式，可得出** χ **为**:

$$\chi = \frac{ne^2}{m\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\omega(\omega - \omega) + i\gamma\omega}$$

$$= \frac{-ine^2}{m\omega\varepsilon\gamma} \cdot \frac{1}{1 + i\dfrac{2(\omega - \omega)}{\gamma}} \qquad (4\text{-}5\text{-}10)$$

χ为复数，令 $\chi = \chi' + i\chi''$，则电极化系数的实部 χ'与虚部 χ''分别为:

$$\chi' = \frac{ne^2}{m\omega\varepsilon\gamma} \frac{\dfrac{2(\omega - \omega)}{\gamma}}{1 + \dfrac{4(\omega - \omega)^2}{\gamma^2}} \qquad (4\text{-}5\text{-}11)$$

$$\chi'' = -\frac{ne^2}{m\omega\varepsilon\gamma} \frac{1}{1 + \dfrac{4(\omega - \omega)^2}{\gamma^2}} \qquad (4\text{-}5\text{-}12)$$

物质的相对介电常数 ε与电极化系数 χ之间的关系为:

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \chi' + i\chi'' \qquad (4\text{-}5\text{-}13)$$

由于一般说来有 $|\chi| \ll 1$，所以:

$$\sqrt{\varepsilon} \approx 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{\chi'}{2} + i\frac{\chi''}{2} \qquad (4\text{-}5\text{-}14)$$

令 $\sqrt{\varepsilon} = n + iq$，则可得:

$$n = 1 + \frac{\chi'}{2} \qquad (4\text{-}5\text{-}15)$$

$$q = \frac{\chi''}{2} \qquad (4\text{-}5\text{-}16)$$

再将 $\sqrt{\varepsilon} = n + iq$ 代入 (4-5-1) 式中，可得:

$$E(z,t)=E_0 e^{\frac{\omega}{c}qz} e^{i\left(\omega t-\frac{\omega}{c/n}z\right)} \tag{4-5-17}$$

不难看出，n 就是物质的折射率。又根据增益系数的定义式 (3-2-1)，并考虑到 $I(z)\propto |E(z,t)|^2$，可得：

$$G=\frac{2\omega}{c}q \tag{4-5-18}$$

由 (4-5-16) 式知：

$$G=\frac{\omega}{c}\chi'' \tag{4-5-19}$$

把 (4-5-11) 式代入 (4-5-15) 式，(4-5-12) 式代入 (4-5-19) 式，我们便可得到物质的增益系数 (即吸收系数) 和折射率的表达式分别为：

$$G=-\frac{n e^2}{m\varepsilon\gamma c}\frac{1}{1+\frac{4(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2}} \tag{4-5-20}$$

$$n=1+\frac{n e^2}{m\omega\varepsilon\gamma}\cdot\frac{\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}}{1+\frac{4(\omega-\omega_0)^2}{\gamma^2}} \tag{4-5-21}$$

其中已经运用了条件 $\omega\approx\omega_0$。如果再令 $\Delta\nu=\frac{\gamma}{2\pi}$，上述两式还可以改写为：

$$G=-\frac{n e^2}{4m\varepsilon c}\frac{\frac{\Delta\nu}{2\pi}}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \tag{4-5-22}$$

$$n=1+\frac{n e^2}{16\pi^2 m\nu\varepsilon}\frac{\nu-\nu_0}{(\nu-\nu_0)^2+\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \tag{4-5-23}$$

(4-5-22) 式表明，由于自发辐射的存在，物质的吸收谱线为洛仑兹线型，$\Delta\nu_H$ 为线宽。而 (4-5-23) 式表明，物质在 ν 附近呈现出强烈的色散现象。若把 (4-5-22) 式与 (4-5-23) 式合在一起，还可得到物质折射率与增益系数之间的关系，即:

$$\eta = 1 + \frac{(\nu - \nu_0)c}{\Delta\nu_H\,\omega} G \qquad (4\text{-}5\text{-}24)$$

二、激光工作物质的色散关系式

从 (4-5-24) 式可以看出，激光工作物质在其增益曲线的中心频率 ν 附近将出现强烈的色散现象，并且随着工作物质增益系数的增大而增大。当增益系数为零时，折射率为常数，记为 n^0，((4-5-24) 式中的 $n^0 = 1$) 而当增益系数不为零时，折射率是频率的函数，记为 $n(\nu)$，故:

$$n(\nu) = n^0 + \Delta n(\nu) \qquad (4\text{-}5\text{-}25)$$

其中 $\Delta n(\nu)$ 表示折射率随频率而变化的部分，由 (4-5-24) 式可写出它的表达式为:

$$\Delta n(\nu) = \frac{(\nu - \nu_0)c}{\Delta\nu_H\,\omega} G \qquad (4\text{-}5\text{-}26)$$

下边我们分别对均匀加宽和非均匀加宽的激光工作物质写出 $\Delta n(\nu)$ 的具体表达形式。

(一) 均匀加宽工作物质的色散关系式

将 (4-5-26) 式中的 G 用 $G_H(\nu, I_\nu)$ 代替，并注意到 $\omega = 2\pi\nu$ 因此，均匀加宽工作物质的色散关系式可表示为:

$$\Delta n_H(\nu) = \frac{(\nu - \nu_0)c}{2\pi\nu\Delta\nu_H} G_H(\nu, I_\nu) \qquad (4\text{-}5\text{-}27)$$

其中:

$$G_H(\nu, I_\nu) = \frac{A_{32} v^2 \Delta n^0}{4\pi^2 \nu^2 \Delta\nu_H} \frac{\left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \dfrac{I_\nu}{I_s}\right)}$$

(4-5-28)

(二) **非均匀加宽工作物质的色散关系式**

非均匀加宽介质中，粒子必须按表观中心频率分类，设表观中心频率在 $\nu_0' \sim \nu_0' + d\nu_0'$ **范围内的反转粒子数密度为** $\Delta n^0 g_i(\nu_0', \nu) d\nu_0'$，**由** (4-5-27) **式可以求出这部分反转粒子数对折射率变化量** Δn **的贡献为**:

$$d[\Delta n] = \frac{c(\nu - \nu_0')}{2\pi\nu\Delta\nu_H} \cdot \frac{A_{32} v^2 \Delta n^0 g_i(\nu_0', \nu)}{4\pi^2 \nu^2 \Delta\nu_H} \times \frac{\left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0')^2 + \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \dfrac{I_\nu}{I_s}\right)} d\nu_0'$$

(4-5-29)

全部反转粒子数对折射率变化量的贡献是所有不同表观中心频率的粒子贡献的总和，即:

$$\Delta n_i(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} d[\Delta n]$$

$$= \frac{c}{2\pi\nu\Delta\nu_H} \cdot \frac{A_{32} v^2 \Delta n^0 \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}{4\pi^2 \nu^2 \Delta\nu_H} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu - \nu_0') g_i(\nu_0', \nu)}{(\nu - \nu_0')^2 + \left(\dfrac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2 \left(1 + \dfrac{I_\nu}{I_s}\right)} d\nu_0'$$

$$= \frac{c}{4\pi^2\nu} G_i^0(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu - \nu_0') e^{-4\ln 2 \frac{(\nu_0' - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}}}{(\nu - \nu_0')^2 + \left(\frac{\Delta\nu_a}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{I_\nu}{I_s}\right)} d\nu_0' \tag{4-5-30}$$

令:

$$t = 2\sqrt{\ln 2}\, \frac{\nu_0' - \nu_0}{\Delta\nu_D} \tag{4-5-31}$$

$$\xi = 2\sqrt{\ln 2}\, \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \tag{4-5-32}$$

$$\zeta = 2\sqrt{\ln 2}\, \frac{\frac{\Delta\nu_a}{2}\sqrt{1 + \frac{I_\nu}{I_s}}}{\Delta\nu_D} \tag{4-5-33}$$

上述积分式可改写为:

$$\Delta n_i(\nu) = \frac{c}{4\pi^2\nu} G_i^0(\nu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - t) e^{-t^2}}{(\xi - t)^2 + \zeta^2} dt \tag{4-5-34}$$

定义以 ξ 与 ζ 为变量的复变量误差函数为:

$$W(\xi + i\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{(\xi + i\zeta - t)} \tag{4-5-35}$$

按实、虚部分开有:

$$W(\xi + i\zeta) = W_R(\xi + i\zeta) + iW_I(\xi + i\zeta) \tag{4-5-36}$$

其中实部和虚部分别为:

$$W_R(\xi + i\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-t^2}}{(\xi - t)^2 + \zeta^2} dt \tag{4-5-37}$$

$$W_I(\xi + i\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - t) e^{-t^2}}{(\xi - t)^2 + \zeta^2} dt \tag{4-5-38}$$

因此，(4-5-34) 式可表示为：

$$\Delta n_i(\nu) = \frac{c}{4\pi\nu} G_i^0(\nu_0) W_I(\xi + i\zeta) \tag{4-5-39}$$

对非均匀加宽介质来说，有 $\Delta\nu_D \gg \Delta\nu$，因此，由 (4-5-33) 式可知，$\zeta \ll 1$，按照复变量误差函数的理论，在 $\zeta \ll 1$ 的情况下，(4-5-38) 式可近似成：

$$W_I(\xi + i\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{t^2} dt \tag{4-5-40}$$

将它代入 (4-5-39) 式中有：

$$\Delta n_i(\nu) = \frac{c}{2\pi^{3/2}\nu} G_i^0(\nu_0) e^{-4\ln 2 \frac{(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \int_0^{\xi} e^{t^2} dt \tag{4-5-41}$$

如果只考虑 ν_0 附近的色散现象，可认为 $\nu - \nu_0 \ll \Delta\nu_D$，上式积分只在很小的范围内进行，在此范围内有 $t \ll 1$，被积函数 $e^{t^2} \approx 1$，因此，(4-5-41) 式可写成：

$$\Delta n_i(\nu) = \frac{c(\nu-\nu_0)}{\pi^{3/2}\nu\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2}\, G_i^0(\nu_0) e^{-4\ln 2 \frac{(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \tag{4-5-42}$$

或者用大信号增益系数表示为：

$$\Delta n_i(\nu) = \frac{c(\nu-\nu_0)}{\pi^{3/2}\nu\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2} \sqrt{1 + \frac{I_\nu}{I_s}}\, G_i(\nu, I_\nu) \tag{4-5-43}$$

式中：

$$G_i(\nu, I_\nu) = \frac{G_i^0(\nu_0)}{\sqrt{1 + \frac{I_\nu}{I_s}}} e^{-4\ln 2 \frac{(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}} \tag{4-5-44}$$

三、频率牵引现象

由（4-5-27）式与（4-5-43）式描述的 Δn 与 ν 之间的关系都具有如图 4-5-1 所示的形状，即在 $\nu = \nu_0$ 处有 $\Delta n(\nu) = 0$，当 $\nu > \nu_0$ 时，$\Delta n(\nu) > 0$，介质折射率比无源腔时大，并存在一个极大值。当 $\nu < \nu_0$ 时，$\Delta n(\nu) < 0$，介质折射率比无源腔时小，并存在一个极小值。正是由于有源腔中的激活介质折射率在中心频率附近的这种色散作用。使得有源腔纵模频率比无源腔更靠近中心频率。我们

图 4-5-1　激光介质的色散曲线

称这种现象为频率牵引现象。下边我们来解释产生这种现象的原因。由第一章的公式（1-7-49）知，无源腔本征纵模的频率为:

$$\nu_q^0 = \frac{qc}{2n^0 L} \tag{4-5-45}$$

而有源腔的相应纵模频率可以将（4-5-45）式中的 n^0 换成 $n(\nu)$，$n(\nu)$ 由（4-5-25）式所描述。因此，有源腔纵模频率为:

$$\nu_q = \frac{qc}{2[n^0 + \Delta n(\nu)]L} \tag{4-5-46}$$

我们定义有源腔与无源腔的同一模参数的纵模频率之差为频率偏

移量，由（4-5-45）式与（4-5-46）式，并考虑到一般情况下有 $\Delta n(\nu_q)/n^0 \ll 1$，因此可写出如下关系：

$$\nu_q - \nu_q^0 = -\frac{\Delta n(\nu_q)}{n^0}\nu_q^0 \qquad (4\text{-}5\text{-}47)$$

由此式可以看出，当 $\nu_q^0 > \nu_0$ 时，因 $\Delta n(\nu_q) > 0$，故 $\nu_q - \nu_q^0 < 0$，即有源腔纵模频率小于无源腔。当 $\nu_q^0 < \nu_0$ 时，因 $\Delta n(\nu_q) < 0$，故 $\nu_q - \nu_q^0 > 0$，即有源腔纵模频率大于无源腔。无论纵模频率是在中心频率的哪一侧，都是有源腔的纵模频率比无源腔更接近中心频率。这一现象如图 4-5-2 所示，图中虚线代表有源腔纵模，实线代表无源腔纵模。

图 4-5-2　频率牵引现象

我们定义有源腔与无源腔的频率偏移量和有源腔频率到中心频率的频率间隔之比为牵引参量 σ，即：

$$\sigma = -\frac{\nu_q - \nu_q^0}{\nu_q - \nu_0} \qquad (4\text{-}5\text{-}48)$$

这是一个无量纲的纯数，它反映了频率牵引现象的大小。现在我们分别对均匀加宽激光器和非均匀加宽激光器来计算牵引参量的值。考虑到一般有源腔与无源腔的频率偏离量不会太大，即 $\nu_q \approx \nu_q^0$，以及激光器在稳态工作时，大信号增益系数等于阈值增益系数。将均匀加宽时的 $\Delta n(\nu_q)$ 计算公式（4-5-27）代入（4-5-47）式中，可得：

$$\nu_q - \nu_q^0 = -\frac{c\delta(\nu_q - \nu_0)}{2\pi n^0 L \Delta\nu_H} \qquad (4\text{-}5\text{-}49)$$

再将（4-5-49）式代到（4-5-48）式中，并利用无源腔本征纵模线宽公式（1-7-43），便可得到均匀加宽激光器的牵引参量为：

$$\sigma_H = \frac{\Delta\nu_c}{\Delta\nu_H} \qquad (4\text{-}5\text{-}50)$$

同样地，可得非均匀加宽激光器的牵引参量为:

$$\sigma_i = 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\,\frac{\Delta\nu_c}{\Delta\nu_D}\sqrt{1+\frac{I_{\nu_q}}{I_s}} \qquad (4\text{-}5\text{-}51)$$

习　题　四

(1) 红宝石激光器腔长 $L = 11.25\text{cm}$，红宝石棒长 $l = 10\text{cm}$，折射率 $\eta = 1.75$，荧光线宽 $\Delta\nu_F = 2\times 10^5\text{MHz}$。当激发参数 $\alpha = 1.16$ 时，求:

① 满足阈值条件的纵模个数;

② 为使满足阈值条件的纵模数限制到只有一个，α应限制在什么范围内?

(2) 氦—氖激光器腔长 1m，放电管直径 2mm，两镜反射率分别为 100%、98%，单程衍射损耗率 $\delta = 0.04$，若 $I_s = 0.1\text{W/mm}^2$，$G_m = 3\times 10^{-4}\frac{1}{d}$，求:

① $\nu_q = \nu_0$ 时的单模输出功率;

② $\nu_q = \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu_D$ 时的单模输出功率。

(设气体折射率 $\eta = 1$)

(3) 氦氖激光器放电管长 $l = 0.5\text{m}$，直径 $d = 1.5\text{mm}$，两镜反射率分别为 100%、98%，其它单程损耗率为 0.015，荧光线宽 $\Delta\nu_D = 1500\text{MHz}$。求满足阈值条件的本征模式数。($G_m = 3\times 10^{-4}\frac{1}{d}$)

(4) He—Ne 激光器放电管直径 1.2mm，两反射镜反射率分别为 0.97 和 1。设 $\Delta\nu_D = 1500\text{MHz}$。为使它单纵模运行，求腔长应多大? ($\eta = 1$)

(5) CO_2 激光器腔长 $L = 1\text{m}$，放电管直径 $d = 10\text{mm}$，两反射

镜的反射率分别为 0.92 和 0.8。放电管气压 3000Pa。可视为均匀加宽，并假设工作在最佳放电条件下。求:

① 激发参数 α

② 振荡带宽 $\Delta\nu$;

③ 满足阈值条件的纵模个数;

④ 稳定工作时腔内光强。(频率为介质中心频率 ν)

经验公式: $\Delta\nu = 0.094p$

$$G_m = 1.4 \times 10^{-2}\frac{1}{d}$$

$$I_s = \frac{72}{d^2}$$

(6) He_ Ne 激光器放电管直径 $d = 0.5mm$，长 $l = 10cm$，两反射镜反射率分别为 100% 和 98%。不计其它损耗，稳态功率输出 0.5mW。求腔内光子数。(设腔内只有 ν 一个模式，且腔内光束粗细均匀)

(7) CO_2 激光器长 $l = 1m$，放电管直径 $d = 10mm$，单程衍射损耗率 $\delta = 0.5\%$，两镜面散射损耗率分别为 1.5%，两镜透过率分别为 2% 及 10%，其它损耗不计。当它工作在室温 (300K) 条件下时，求:

① 激发参数;

② 碰撞线宽及多普勒线宽，并判断它属于哪种加宽类型; (设放电管中气压为最佳气压)

③ 计算在最佳放电条件下稳定工作时，腔内的光强;

④ 若输出有效面积按放电管截面积的 0.8 计，此激光器的最大输出功率是多大?

有关公式: $G_m = 1.4 \times 10^{-2}\frac{1}{d^2}$

$$I_s = \frac{72}{d^2}$$

$$p \cdot d = 2.67 \times 10^{4}\,\mathrm{Pa\,mm}$$

$$\Delta\nu_L = 0.094p$$

$$\Delta\nu_D = 7.16 \times 10^{-7} \left(\frac{T}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(8) He_ Ne 激光器放电管气压 $p = 270\mathrm{Pa}$，上、下能级寿命分别为 $\tau_3 = 2 \times 10^{-8}\mathrm{s}$，$\tau_2 = 2 \times 10^{-8}\mathrm{s}$。求:

① $T = 300\mathrm{K}$ 时的多普勒线宽 $\Delta\nu_D$;

② 计算均匀线宽及 $\Delta\nu_D / \Delta\nu_H$;

③ 计算烧孔宽度 $\delta\nu = 2\Delta\nu_H$ 时的腔内光强;

④ 计算 $\nu = \nu_0$ 及 $\nu \neq \nu_0$ 时的输出功率;(输出反射镜透射率为 T，光束有效直径为 d)

⑤ 当腔内光强为接近零和 $10\mathrm{W/cm^2}$ 时，分别求腔长为多大时才可使烧孔重叠。

(9) 长 10cm 红宝石棒置于 20cm 的谐振腔内，已知其自发辐射寿命 $\tau_{21} = 4 \times 10^{-3}\mathrm{s}$，$\Delta\nu_H = 2 \times 10^{5}\mathrm{MHz}$，腔的单程损耗率 $\delta = 0.01$。求:

① 阈值反转粒子数密度 Δn_t;

② 当先泵激励产生 $\Delta n = 1.2\Delta n_t$ 时，有多少纵模可以起振?

($n = 1.76$)

第五章　光学谐振腔的基本理论

本章讨论作为激光器的重要组成部分—— 光学谐振腔的基本理论。这里所讨论的谐振腔是开腔。基本理论包括几何理论与衍射理论两部分: 几何理论的主要内容是以光学变化矩阵为基础, 讨论谐振腔的稳定性条件; 衍射理论的主要内容则是从菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式出发, 建立起谐振腔自再现模所满足的积分方程, 通过求解积分方程讨论各类谐振腔的模式特点。本章讨论几何理论与衍射理论中的积分方程的建立与解的物理意义。第六七两章详细讨论平行平面腔与稳定球面腔的模式特征。

§ 5.1　光学变换矩阵

光学变换矩阵是指傍轴光线通过光学元件后, 描述其传播特性的参数发生变化的矩阵表达方法。任何一条傍轴光线在某一给定横截面内都可以用两个坐标参数来表征, 一个是光线离轴线的距离 r, 另一个是光线与轴线之间的夹角 θ。我们规定如下的符号规则: 光线位置在轴线上方时 r 取正, 否则取负; 光线的出射方向在轴线上方时 θ 取正, 否则取负。将两个坐标值组成的列向量 $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ 称为光线在某一截面处的坐标向量。通过光学元件后, 坐标向量的变化可用下边的矩阵形式表示:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{5-1-1}$$

式中 $\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ ——光学元件的出射截面处的光线坐标向量;

$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ ——光学元件的入射截面处的光线坐标向量;

T ——该光学元件的光学变换矩阵，$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是个 2 × 2 阶矩阵。

下边我们来讨论几种光学元件系统的光学变化矩阵。

一、自由空间传播 L 距离

设光线出发时坐标为 (r_1, θ_1)，传播 L 距离后变为 (r_2, θ_2)。由图 5-1-1 容易得到:

图 5-1-1　传播 L 距离的光学变换矩阵

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + L\,\mathrm{tg}\,\theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \tag{5-1-2}$$

对傍轴光线来说，θ_1 很小，有 $\mathrm{tg}\,\theta_1 = \theta_1$。故有:

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + L\theta_1 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \tag{5-1-3}$$

写成矩阵表达形式为:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \tag{5-1-4}$$

因此，自由空间传播 L **距离的光学变换矩阵为**:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-1-5}$$

二、球面反射镜

以凹面反射镜为例，设入射光线在镜面上的坐标为 (r_1, θ_1)，**出射光线在镜面上的坐标为** (r_2, θ_2)。**如图** 5-1-2 **所示**，O **为反射镜面曲率中心**，A **为光线入射点**，OA **为曲率半径，用** R **表示**，B **为镜面中心**，α**为入射或反射线与** A **点处镜面法线间夹角**，β**为** AB**所对圆心角。由图可写出**:

图 5-1-2　**球面反射镜的光学变换矩阵**

$$r_1 = r_2 \tag{5-1-6}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 2\alpha \tag{5-1-7}$$

$$\beta = \alpha + \theta_1 \tag{5-1-8}$$

式中 r_1 **和** r_2 **为** A **点到轴线的距离**，θ_1 **和** θ_2 **只代表大小，未考虑符号。傍轴近似条件下**，β**为**:

$$\beta = \frac{r_1}{R} \tag{5-1-9}$$

将（5-1-8）式与（5-1-9）式代入（5-1-7）式中，考虑到图示情况下 θ_1 取正、θ_2 取负，将 θ_2 变号后可以得到：

$$\theta_2 = -\frac{2}{R} r_1 + \theta_1 \qquad (5\text{-}1\text{-}10)$$

把（5-1-6）式与（5-1-10）式合在一起，得到球面反射镜的光学变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}1\text{-}11)$$

可以证明，此变换矩阵不仅适用于图 5-1-2 所示的入射光线的情况，也适用于任何一种情况的入射光线。还可证明，它不仅适用于凹面反射镜，也适用于凸面反射镜和平面反射镜。对凸面镜，只要 R 取负即可。对平面反射镜，R 取∞，结果变换矩阵变成单位矩阵，也就是说，此时出射光线的两个坐标参数与入射光线的坐标参数完全相等。

三、共轴球面谐振腔

现在，我们来讨论光线在由两个共轴球面反射镜组成的球面谐振腔内的坐标变换规律。先讨论往返一周的光学变换矩阵。如图 5-1-3 所示，设光线从 M_1 反射镜出发，坐标为 $\begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$；经腔长 L 距离的直线传播后，到达 M_2 反射镜，其坐标变为 $\begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$，变换矩阵为 T_1；经过 M_2 的反射，坐标变为 $\begin{bmatrix} r_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$，变换矩阵为 T_2；然后又直线传播 L 距离，回到 M_1 镜，坐标变为 $\begin{bmatrix} r_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$，变换矩阵为 T_3；最后再经 M_1 镜反射，坐标变为 $\begin{bmatrix} r_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$，变换矩阵为 T_4。因此，光线在

图 5-1-3　球面谐振腔的光学变换矩阵

腔内往返一周的总的变换矩阵应是:

$$T = T_4T_3T_2T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5-1-12}$$

式中　R_1, R_2**——分别为** M_1 **与** M_2 **的曲率半径。**

此变换矩阵称往返矩阵，它的四个元素经计算后分别为:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{2L}{R_2} \\ B &= 2L\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \\ C &= \frac{4L}{R_1R_2} - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \\ D &= \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{2L}{R_2}\right) - \frac{2L}{R_1} \end{aligned} \tag{5-1-13}$$

如果光线在球面谐振腔内往返 n **次，则它的光学变换矩阵就应该是往返矩阵** T **的** n **次方，按照矩阵理论，如果** $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

则:

$$T^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\varphi}\begin{pmatrix} A\sin n\varphi - \sin(n-1)\varphi & B\sin n\varphi \\ C\sin n\varphi & D\sin n\varphi - \sin(n-1)\varphi \end{pmatrix} \tag{5-1-14}$$

式中:

$$\varphi = \arc\cos\frac{1}{2}(A + D) \tag{5-1-15}$$

T^n 称为 n 次往返矩阵。若用 $\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ 表示初始出发时的光线坐标，$\begin{pmatrix} r_n \\ \theta_n \end{pmatrix}$ 表示经过 n 次往返后的光线坐标，则有:

$$\begin{aligned} r_n &= A_n r_1 + B_n\theta_1 \\ \theta_n &= C_n r_1 + D_n\theta_1 \end{aligned} \tag{5-1-16}$$

§ 5.2　光学谐振腔的稳定性条件

如果光线在共轴球面谐振腔内能够往返任意次而不横向逸出腔外，这样的谐振腔我们就称为稳定谐振腔，简称稳定腔。否则就称为非稳腔。那么，谐振腔的几何参数满足什么样的条件时为稳定腔或为非稳腔呢? 这就是本节所要讨论的谐振腔的稳定性条件问题。由上节的 (5-1-14) 式和 (5-1-15) 式可看出，只要 n 次往返矩阵 T^n 的元素 A_n、B_n、C_n、D_n 对于任意大的 n 值均保持为有限大小，就可以认为这样的谐振腔就是稳定腔。下边我们就从这点出发，先来推导谐振腔的稳定性条件，然后利用稳定性条件来讨论各种谐振腔的分类，最后给出稳区图及谐振腔的稳定性判定方法。

一、稳定性条件

为了使 T^n 矩阵中各元素 A_n、B_n、C_n、D_n 对于任意大的 n 值都能保持有限大小，就必须使（5-1-15）式计算出的 ϕ值为实数。因为，当 ϕ为实数时，$\sin n\phi$与 $\sin(n-1)\phi$的值随 n 的增大只能在 $+1$ 与 -1 之间变化，从而使 A_n、B_n、C_n、D_n 的数值以及 r_n 与 θ_n 的数值随 n 的增大也只能发生振荡式的变化。无论 n 有多大，这些数值均保持有限大小，只要反射镜的镜面横向尺寸足够大，就可以保证傍轴光线能在腔内往返无限多次而不会从侧面横向逸出。反之，若 ϕ值不是实数，由于有虚部，必然导致 $\sin n\phi$与 $\sin(n-1)\phi$的值随 n 值的增大按指数规律而增加。从而导致 A_n、B_n、C_n、D_n 以及 r_n、θ_n 的值都随 n 增大而增大。这样一来，傍轴光线在腔内往返有限次后便可逸出腔外。另外，由（5-1-14）式还可看出，若 ϕ虽为实数，但取值 0 或 π时，因 $\sin\phi$ $\sin n\phi$ $\sin(n-1)\phi$的值都为 0，这时 T^n 矩阵各元素的值为不定式，这种谐振腔是稳定腔还是非稳腔不可一概而论，需要具体腔具体分析，我们称之为临界腔。

由上述分析可知，ϕ值为实数且不等于 0 或 π时，谐振腔为稳定腔。ϕ值有虚部时，谐振腔为非稳腔。ϕ等于 0 或 π时，谐振腔是临界腔。由 ϕ的计算公式（5-1-15）不难得出上述结论的数学描述为，满足条件

$$-1 < \frac{1}{2}(A+D) < 1 \tag{5-2-1}$$

时，谐振腔是稳定腔。满足条件

$$\frac{1}{2}(A+D) > 1 \text{ 或 } \frac{1}{2}(A+D) < -1 \tag{5-2-2}$$

时，谐振腔是非稳腔。满足条件

$$\frac{1}{2}(A+D)=1 \text{ 或 } \frac{1}{2}(A+D)=-1 \tag{5-2-3}$$

时，谐振腔是临界腔。为了得到稳定性条件的更为简明的形式，将 (5-1-13) 式中的 A、D 表达式代入上述各式，并经适当简化和引入谐振腔的下述几何参数

$$\begin{aligned} g_1 &= 1-\frac{L}{R_1} \\ g_2 &= 1-\frac{L}{R_2} \end{aligned} \tag{5-2-4}$$

以后，共轴球面谐振腔的稳定性条件可叙述如下，当

$$0 < g_1 \text{¡¤} g_2 < 1 \tag{5-2-5}$$

时为稳定腔。当

$$g_1 \text{¡¤} g_2 > 1 \text{ 或 } g_1 \text{¡¤} g_2 < 0 \tag{5-2-6}$$

时为非稳腔。当

$$g_1 \cdot g_2 = 1 \text{ 或 } g_1 \cdot g_2 = 0 \tag{5-2-7}$$

时为临界腔。在计算 g_1 与 g_2 的值时，仍规定凹面反射镜的 R 取正，凸面反射镜的 R 取负。

从上边的稳定性条件推导过程可以看出，往返矩阵 T 和 n 次往返矩阵 T^n 均与光线的初始坐标参数无关，但可能与光线的往返行进次序有关。(5-1-13) 式给出的 A、B、C、D 表达式是以图 5-1-3 中光线由 M_1 出发往返一周而计算出来的，如果令光线由 M_2 出发往返一周，则 T 矩阵的各元素具体表达形式将有所不同。但可以证明，对于一定几何结构的共轴球面腔来说，$\frac{1}{2}(A+D)$ 则是一个不变量，与光线的往返行进次序无关。因此，上述讨论的共轴球面腔各稳定性条件都是普遍适用的。

二、共轴球面腔的分类

按照共轴球面腔的稳定性条件,我们可将谐振腔分为稳定腔、非稳腔、临界腔三大类。现在,我们分别讨论这三种腔的特点。

(一) 稳定腔

满足 $0 < g_1 g_2 < 1$ 条件的共轴球面腔都是稳定腔,其特点是任意傍轴光线在腔内能往返无限多次而不横向逸出腔外。换句话说,这种腔的几何损耗为零。稳定腔内的光束可分为两种:一种是经有限次往返后可形成闭合光路,称简并光束;一种是虽可往返多次,但始终不能自行闭合,称非简并光束。图 5-2-1 画出两种简并光束,(a) 为 $R_1 = R_2 = 2L$ 的对称双凹腔中的简并光束,(b) 为 $R_1 = R_2 = \frac{2}{3}L$ 腔中的简并光束。下面我们列举几种稳定腔的构成方法。

图 5-2-1　简并光束

1. 双凹稳定腔

由两个凹面镜组成的共轴球面腔为双凹腔。这种腔的稳定性条件又有两种情况。

其一为:

$$R_1 > L, R_2 > L \tag{5-2-8}$$

腔结构如图 5-2-2 所示。证明如下:

因为 $$R_1 > L$$

所以 $$0 < \frac{L}{R_1} < 1$$

图 5-2-2　双凹稳定腔（一）

$$0 < 1 - \frac{L}{R_1} < 1$$

即　$0 < g_1 < 1$

同理　$0 < g_2 < 1$

所以　$0 < g_1 \cdot g_2 < 1$

其二为:

$$R_1 < L \quad R_2 < L \text{ 且 } R_1 + R_2 > L \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

腔结构如图 5-2-3 所示。证明如下:

图 5-2-3　双凹稳定腔（二）

因为　$R_1 < L$

所以　$1 - \frac{L}{R_1} < 0$

即　$g_1 < 0$

同理　$g_2 < 0$

所以　$g_1 g_2 > 0$

又因为　$L < R_1 + R_2$

所以　$\frac{L^2}{R_1 R_2} < \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} L$ 或 $1 - \frac{L}{R_1} \quad 1 - \frac{L}{R_2} < 1$

即　$g_1 \cdot g_2 < 1$

如果两个凹面反射镜的曲率半径相等，则此双凹腔为对称双凹腔，上述的两种稳定条件可以合并成一个，即:

$$R_1 = R_2 = R > \frac{L}{2} \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

2. 平凹稳定腔

由一个凹面反射镜和一个平面反射镜组成的谐振腔称为平凹腔。其稳定条件为:

$$R > L \tag{5-2-11}$$

腔的结构示意图见图 5-2-4。此时,平面镜曲率半径 $R_2 = \infty$, 故 $g_2 = 1$。由 (5-2-11) 式知, 凹面镜参数 $0 < g_1 < 1$, 故有 $0 < g_1 g_2 < 1$。如果平凹腔的凹面镜曲率半径 R 等于腔长 L 的 2 倍, 即 $R = 2L$, 则此时的谐振腔恰好是对称共焦腔 (见后边的临界腔) 的一半, 称之为半共焦腔。显然, 半共焦腔满足式 (5-2-11), 它是稳定腔。

图 5-2-4　平凹稳定腔

3. 凹凸稳定腔

由一个凹面反射镜和一个凸面反射镜组成的共轴球面腔为凹凸腔。它的稳定条件是:

$$R_1 < 0,\ R_2 > L \text{ 且 } R_1 + R_2 < L \tag{5-2-12}$$

腔结构如图 5-2-5 所示。证明方法从略。

图 5-2-5　凹凸稳定腔

(二) 非稳腔

满足 $g_1 g_2 > 1$ 或 $g_1 g_2 < 0$ 的共轴球面腔为非稳腔, 其特点是傍轴光线在腔内经有限次往返后必然从侧面逸出腔外, 故此类腔具有较高的几何损耗。一般非稳腔用于大功率激光器中, 因为在

这种激光器里，主要要解决的是如何获得尽可能大的模体积以及好的横模鉴别能力。下边我们讨论几种非稳腔的构成方法。

1. 双凹非稳腔

双凹非稳腔的非稳条件有两种情况。

其一是:

$$R_1 < L、R_2 > L \tag{5-2-13}$$

其结构如图 5-2-6 (a) 所示，可以证明，此时 $g_1g_2 < 0$。

另一种为:

图 5-2-6　双凹非稳腔

$$R_1 + R_2 < L \tag{5-2-14}$$

其结构如图 5-2-6 (b) 所示，可以证明，此时 $g_1g_2 > 1$。

2. 平凹非稳腔

平凹非稳腔的非稳条件是:

$$R < L \tag{5-2-15}$$

腔结构见图 5-2-7。

3. 凹凸非稳腔

凹凸非稳腔的非稳条件也有两种。

一种是:

图 5-2-7　平凹非稳腔

$$R_2 < 0、0 < R_1 < L \tag{5-2-16}$$

腔结构见图 5-2-8 (a)，可从证明，此时 $g_1g_2 < 0$。

另一种为:

$$R_2 < 0, \quad R_1 + R_2 > L \tag{5-2-17}$$

腔结构见图 5-2-8 (b)，可以证明，此时 $g_1g_2 > 1$。

图 5-2-8　凹凸非稳腔

4. 双凸非稳腔

由两个凸面反射镜组成的共轴球面腔称为双凸腔，它总是满足 $g_1g_2 > 1$，故所有双凸腔都为非稳腔。腔结构如图 5-2-9 所示。

图 5-2-9　双凸非稳腔

5. 平凸非稳腔

由一个凸面反射镜与一个平面反射镜组成的共轴球面腔称为平凸腔。由于平凸腔都满足 $g_1g_2 > 1$，所以，平凸腔也全都为非稳腔，腔结构如图 5-2-10 所示。

(三) 临界腔

图 5-2-10　平凸非稳腔

所有满足 $g_1g_2 = 0$ 或 $g_1g_2 = 1$ 的共轴球面腔为临界腔。它属于一种极限情况，其稳定性视不同的腔而不同。在谐振腔的理论研究和实际应用中，临界腔具有非常重要的意义。下边我们讨论几种具有代表意义的临界腔。

1. 对称共焦腔

我们称两个反射镜的焦点重合的共轴球面腔为共焦腔。共焦腔分实共焦腔与虚共焦腔两类。公共焦点在腔内的共焦腔是实共焦腔，它是双凹腔。公共焦点在腔外的共焦腔是虚共焦腔，是凹凸腔。图 5-2-11 画出了这两类共焦腔，F 为公共焦点。可以看出，无论是实共焦腔还是虚共焦腔都是非稳腔，且有关系 $R_1 + R_2 = 2L$。两个反射镜曲率半径相等的共焦腔称为对称共焦腔，它必然是实共焦的双凹腔。腔参数具有关系 $R_1 = R_2 = R = L$，即腔中心为两镜面的公共焦点。此时 $g_1 = g_2 = 0$，$g_1g_2 = 0$，故对称共焦腔是个

图 5-2-11　对称共焦腔

(a) 实共焦腔；(b) 虚共焦腔

临界腔，图 5-2-12 为对称共焦腔的结构。可以证明，在对称共焦

图 5-2-12　对称共焦腔

腔内，任意傍轴光线可往返多次而不横向逸出，而且经两次往返后即可自行闭合。如图 5-2-13 所示的三种简并光束，类似的简并光束还有无限多种。因此，对称共焦腔是一个稳定腔。以后我们将会看到，整个稳定球面腔的模式理论都可建立在共焦腔振荡理论的基础上，因此，对称共焦腔是最重要的和最具有代表性的一种稳定腔。

图 5-2-13　对称共焦腔中的简并光束

由共焦腔的任一个凹面反射镜与放在公共焦点处的平面镜所组成的平凹谐振腔是半共焦腔，其腔参数具有关系 $R=2L$，g_1 与 g_2 的数值一个为 1，一个为$\frac{1}{2}$，故 $g_1g_2=\frac{1}{2}$，它是稳定腔，结构如图 5-2-14。

2. 平行平面腔

由两个平面反射镜组成的共轴谐振腔为平行平面腔。此时有 $R_1=R_2=\infty$，$g_1=g_2=1$，$g_1g_2=1$，它是临界腔。平行平面腔内沿与轴线平行的光线能往返无限多次而不逸出腔外，且一次往返即自行闭合，这一点类似稳定腔。但所有沿非轴向的光线则在有限

图 5-2-14　半共焦腔

次往返后必然会逸出腔外，这一点又类似非稳腔。故平行平面腔是介于稳定腔与非稳腔之间的一种介稳腔。图 5-2-15 画出平行平面腔以及腔内的一条简并光束及一条非简并光束。

图 5-2-15　平行平面腔
(a) 结构；(b) 光束

图 5-2-16　共心腔
(a) 实共心腔；(b) 虚共心腔

3. 共心腔

两个球面反射镜的曲率中心重合的共轴球面腔为共心腔。它也分为实共心腔与虚共心腔两类，前者是双凹腔，后者是凹凸腔。图 5-2-16 中画出了这两类共心腔，O 点为公共曲率中心，这两类共心腔都有 $R_1+R_2=L$。容易证明，这两种共心腔都有 $g_1g_2=1$，只是实共心腔 g_1 与 g_2 都为负，虚共心腔 g_1 与 g_2 都为正。共心腔为临界腔，腔内既有简并光束，也有非简并光束。例如，凡过公

共中心的光束为简并光束，不过中心的为非简并光束。如图 5-2-17 所示。所以共心腔也是一种介于稳定腔与非稳腔间的介稳腔。

图 5-2-17　共心腔的光束

用共心腔的任一个凹面镜与放在中心的平面镜所组成的平凹腔称半共心腔。腔参数具有关系 $R=L$，g_1 与 g_2 的值一个为 1，一个为 0，因此，$g_1g_2=0$，故它也是临界腔。腔内凡过凹镜曲率中心的光线为简并的，其余非简并，它是介稳腔。图 5-2-18 与图 5-2-19 分别为腔结构及腔内光束。

图 5-2-18　半共心腔　　　　图 5-2-19　半共心腔光束

三、稳区图

图 5-2-20 为稳区图，可直观看出谐振腔的工作区域。以坐标轴 $g_1=0$、$g_2=0$ 和 $g_1g_2=1$ 的两支曲线所围成的区域为稳定区(阴影区)，其它区域则为非稳区（无阴影区)，两区域的边界线为临界线。任意一个球面腔可以由腔参数 R_1、R_2 和 L 所决定，只要给定了这三个腔参数，便可唯一地确定 g_1 和 g_2 的数值，也就可以在稳区图上唯一地对应一个点。若该点落在稳定区内，则此腔为稳定腔，若落在非稳区内，则此腔为非稳腔，落在临界线上，则为临界腔。例如，对称共焦腔在点（0，0）处，对称共心腔在点（-1，-1）处，平行平面腔在点（1，1）处。半共焦腔则可以在

图 5-2-20　稳区图

1—平行平面腔；2—半共焦腔；3—半共心腔；
4—对称共焦腔；5—对称共心腔

$1, \frac{1}{2}$ 处或 $\frac{1}{2}, 1$ 处，半共心腔可以在 $(1, 0)$ 处或 $(0, 1)$ 处。

需要指出的是，在稳区图上的任意一点，并不能单值地确定谐振腔的腔参数 R_1、R_2 和 L 的数值。

四、稳定性判别法

实际应用中，我们可以使用一些比较简易直观的方法来判别谐振腔是否为稳定的。这里我们介绍一种方法。如果将腔的任一个反射镜的曲率中心与顶点称为该反射镜的两个特征点，则当谐振腔中两个反射镜的两个特征点之间只包含另一个反射镜的一个

特征点时，这个谐振腔就是稳定腔。如果某个反射镜的两个特征点之间包含了另一反射镜的两个特征点或不包含另一反射镜的特征点时，该谐振腔就是非稳腔。如果两个反射镜的特征点之间有重合，则该谐振腔就是临界腔。

最后需要说明的是，我们这里所谓的腔的稳定性，只是指傍轴光线能否在腔内往返无限多次而不横向逸出，也就是指无源腔内傍轴光束的几何损耗的高低，并不是指有源腔在满足起振的阈值条件下，谐振腔的工作状态是否稳定。由于稳定腔的几何损耗小，所以对增益不高的工作物质容易起振。而非稳腔的几何损耗大，在中、小功率的激光器中很少采用。但是，对于增益较高的工作物质，它仍然可以起振，并且同样可以稳定地工作。

§ 5.3　谐振腔的衍射理论基础

激光器中所使用的谐振腔是一种开腔，在这种没有侧面边界的区域内是否存在电磁场的本征态，即不随时间而变化的稳态场分布？如何求出这种场分布？这些问题需要用谐振腔的衍射理论来解决。本节首先给出理想开腔的模型——孔阑传输线，在此基础上引入稳态场分布——自再现模的概念。

一、孔阑传输线

我们先来考虑由两个平面反射镜相隔一定距离而组成的平行平面腔。为了讨论在这种开腔内如何形成稳定的光场分布，可用所谓孔阑传输线来模拟谐振腔。它是由一系列同轴的与平面反射镜的尺寸和形状完全相同的孔径所构成。这些孔径开在平行放置着的无限大完全吸收屏上，相邻两孔的距离等于腔长。图 5-3-1 所示为圆形孔径的孔阑传输线。光波在谐振腔内的往返传播，可视为在孔阑传输线上的单方向传播，开腔中稳定光场分布的形成，可

图 5-3-1　孔阑传输线

用光在孔阑传输线上的传播来说明。设想初始时刻有一均匀平面波垂直入射到第一个孔上，此时，该孔径内的场分布是均匀的，由于衍射作用，穿过此孔以后的光场分布将产生若干旁瓣而不再是均匀平面波了。当光波传播到第二个孔阑时，有部分光场扩展到孔外被吸收屏完全吸收，其边缘部分的光场小于中心部分，孔面也不再是等相位面了。经过第二个孔阑后，再发生衍射作用，到第三个孔阑处时，又有部分光场的能量由于扩展到孔外而被吸收，使得孔边缘处的光场更弱。这样，每经过一次孔阑，光场的振幅与相位分布就发生一次改变，当通过的孔阑数足够大以后，光场的振幅与相位分布逐渐受衍射的影响越来越小，以至于形成了一种稳定的分布而不再变化，图 5-3-2 画出了这一过程。

图 5-3-2　自再现模的形成

光场在谐振腔内形成稳定分布主要是光的衍射作用所致，谐振腔的其它损耗，如光的吸收、散射等只是使得横截面上各点的

场按同样比例衰减，对场的空间分布不发生什么影响。如果需要考虑这些损耗时，可在孔阑传输线的每一个孔面上加一个衰减滤光片即可，若谐振腔的反射镜不是平面镜，而是球面镜的话，可以在每个孔阑处装上相应焦距的透镜，这样孔阑传输线实际上变成透镜波导。

二、自再现模

上面我们用孔阑传输线来模拟激光器中的开腔，现在我们再回到腔内。设初始时刻在镜面 M_1 上有某一个光场分布 u_1，到达镜 M_2 上由于衍射损失一部分能量而变成了新的光场分布 u_2，经 M_2 镜反射再传播回到 M_1 镜时又变成了 u_3。如此不断进行下去，不管初始分布 u_1 的具体特征如何，只要经过足够多次的往返渡越后，所生成的场分布都将明显地带有衍射的痕迹，也就是镜面边缘处的场振幅比起镜面中心部分的场振幅要小得多，这几乎是一切开腔模的场分布的共同特点。反之，具有这种特点的场分布也将不再受衍射作用的影响，形成一种稳定的场分布。这种稳态场经一次往返后，唯一可能的变化只是镜面上各点的场振幅按同样比例衰减，各点的相位发生同样大小的滞后。我们称这种存在于镜面处，且往返渡越后仍能再现的稳态光场分布为自再现模，也就是我们早在第一章内便引入的横模。由于自再现模的形成是多次衍射的结果，故初始场分布 u_1 的形状在一定意义上是无关紧要的。不同的初始场分布 u_1 可得到不同的稳态场分布，这说明开腔的横模模式是多种的。最后，我们叙述自再现模形成的物理过程。开腔中的任何振荡都是从某种偶然的自发辐射开始的，而自发辐射遵从统计规律，故而可以提供各种不同的初始场分布。衍射作用在此起到一种“筛子”的作用，它将所有可能存在的各种自再现模筛选出来。

§ 5.4　自再现模的积分方程

自再现模的求解是谐振腔衍射理论的重要部分，本节将首先给出自再现模积分方程的数学基础—— 菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式,然后在此公式的基础上建立自再现模所满足的积分方程,并讨论该方程的解的物理意义。至于方程的求解方法及求解结果随不同的腔结构而不同，我们在第六七两章中将对平行平面腔和稳定球面腔作详细研究。

一、菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式

惠更斯为了描述波的传播过程，提出了关于子波的概念。他认为波面上每一点可看作次球面子波的波源，下一时刻新的波前形状由次级子波的包络面所决定。菲涅耳引入干涉的概念，补充了惠更斯的原理。他认为子波源所发的波应是相干的，空间光场是各子波干涉叠加的结果。基尔霍夫将惠更斯—菲涅耳原理用数学公式的形式反映出来。如图 5-4-1 所示，设波阵面 Σ上任一源点 P′ 的光场场强为 u′(P′)，则空间任一观察点 P 的光场场强 u(P) 由下列积分式计算:

图 5-4-1　惠更斯—菲涅耳原理

$$u(P) = \frac{ik}{4\pi}\iint_{\Sigma} u'(P')\,\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta)\,ds' \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

式中　ρ—— 源点 P′ 与观察点 P 之间的距离;

θ—— 源点 P′ 处的法线 n 与 ρ的夹角;

k——光波矢，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，λ为光波长；

ds'——源点 P'处的面元。

由（5-4-1）式可以看出，波面 Σ上各点发出的次级子波为非均匀的球面波。因子$\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}$表明了波是球面波，因子 $1+\cos\theta$称为倾斜因子，它反映出子波这种球面波是非均匀的。

二、自再现模积分方程

对于激光器开腔来说，若给定某一镜面上的光场分布函数，如何计算当光波渡越到另一镜面处时所形成的新光场分布函数呢？图 5-4-2 所示为一个圆形镜的平行平面腔，假设镜面 M'上的光场分布已知，也就是 M'上任一源点 $P'(x',y')$ 的光场强度 $u'(x',y')$ 为已知，这里（x',y'）是 P' 点的坐标。为了计算 M 镜上的场分布函数，我们只须标出 M 镜上任意一个观察点 P（x，y）的光场强度 u（x，y），它实际上就是 M 镜的光场分布，（x，y）是 P 点在 M 镜面上的坐标。利用衍射积分公式（5-4-1），可写出：

图 5-4-2　积分方程

$$u(x,y)=\frac{ik}{4\pi}\iint_{M'}u'(x',y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta)ds' \quad (5\text{-}4\text{-}2)$$

积分沿整个镜面 M' 进行。

为了导出自再现模的积分方程，我们再假设 $u_q(x',y')$ 为经

过 q 次渡越后在某一镜面上所形成的场分布，$u_{q+1}(x, y)$ 表示光波再渡越一次腔长距离后，到达另一镜面所形成的光场分布，按照（5-4-1）式，u_{q+1}与 u_q 之间应满足如下的迭代关系：

$$u_{q+1}(x, y) = \frac{ik}{4\pi}\iint u_q(x', y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1 + \cos\theta)ds' \quad (5\text{-}4\text{-}3)$$

为使问题简化，我们将只考虑对称开腔的情况。按照自再现模的概念，除了一个表示振幅衰减和相位移动的常数因子以外，u_{q+1}应能够将 u_q 再现出来，两者之间应有关系：

$$u_{q+1} = \sigma u_q \quad (5\text{-}4\text{-}4)$$

式中 σ是一个与坐标无关的复常数。将（5-4-4）式代入（5-4-3）式中，有：

$$\sigma u_q(x, y) = \frac{ik}{4\pi}\iint u_q(x', y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1 + \cos\theta)ds' \quad (5\text{-}4\text{-}5)$$

去掉式中光场分布函数的下标 q，用 $u(x, y)$ 表示稳态场分布函数，则（5-4-5）式便可改写为自再现模积分方程：

$$\sigma u(x, y) = \frac{ik}{4\pi}\iint u(x', y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1 + \cos\theta)ds' \quad (5\text{-}4\text{-}6)$$

由于式中的 ρ与 θ都是源点及观察点的坐标 x'、y'、x、y 的函数，这样的积分方程运算起来相当麻烦，我们可以先对此方程做一些近似处理。对于一般的激光谐振腔来说，腔长 L 与反射镜曲率半径 R 通常都远大于反射镜的线度 a，而 a 又远大于光波长 λ 即：

$$L, R \gg a \gg \lambda \quad (5\text{-}4\text{-}7)$$

在此条件下，可对（5-4-6）式做两点近似。首先，式中 θ的值一般很小，可认为 $\cos\theta \approx 1$，故因子 $1+\cos\theta$用 2 代替。其次，分母中的 ρ可以用腔长 L 来代替。这里要注意的是，指数中的 ρ一般情况下是不能用 L 来代替的，这是由于指数因子中与 ρ相乘的光

波矢 k 的值是很大的，用 L 代替 ρ会引起较大的误差，只能根据不同的腔面形状再做不同的近似处理。我们将在第六七两章中对于平行平面腔和对称共焦腔讨论 ρ的展开和近似处理的方法。把上述的两点近似结果代入（5-4-6）式后，我们便可得到自再现模所满足的积分方程为:

$$\sigma_{mn}u_{mn}(x,y)=\iint K(x,y,x',y')u_{mn}(x',y')ds'$$

$$K(x,y,x',y')=\frac{ik}{2\pi L}e^{-ik\rho(x,y,x',y')}$$

$$=\frac{i}{\lambda L}e^{-ik\rho(x,y,x',y')}$$

（5-4-8）

式中 $K(x, y, x', y')$ 称为积分方程的核。u_{mn}与 σ_{mn}的下标表示该方程存在一系列的不连续的本征函数解与本征值解，这说明在某一给定开腔中，可以存在许多不同的自再现模或横模。这些不同的横模用不同的模参数加以区别。由于积分方程是二维的，故需要两个模参数来区分这些不同的横模。

三、积分方程解的物理意义

积分方程（5-4-8）是个本征方程，它的解包括两个方面：一是本征函数 $u(x, y)$，一是本征值 σ。本征函数一般为复函数，模代表对称开腔任一镜面上的光场振幅分布，幅角则代表镜面上光场的相位分布。不同横模的场分布函数也不一样。本征值一般也是个复数，模反映了自再现模在腔内单程渡越时所引起的功率损耗。这里所讲的损耗包括衍射损耗和几何损耗，但主要是衍射损耗。为叙述方便，今后我们就简称它为单程衍射损耗。事实上，由（1-7-3）式定义的单程功率损耗 δ用对称开腔中的自再现模来表

示，可写为:

$$\delta = \frac{|u_q|^2 - |u_{q+1}|^2}{|u_q|^2} \tag{5-4-9}$$

将 (5-4-3) 式代入该式后，可得到:

$$\delta_{mn} = 1 - |\sigma_{mn}|^2 \tag{5-4-10}$$

这里加上横模参数 m 和 n, 表明单程衍射功率损耗与横模式有关。$|\sigma_{mn}|$越小，δ_{mn}就越大。本征值幅角与自再现模腔内单程渡越后所引起的总相移有关。事实上，由 (5-5-3) 式，我们可以写出:

$$\arg u_{q+1} = \arg \sigma + \arg u_q \tag{5-4-11}$$

而自再现模在对称开腔中单程渡越所产生的总相移定义为:

$$\delta = \arg u_{q+1} - \arg u_q \tag{5-4-12}$$

因此有:

$$\delta = \arg \sigma \tag{5-4-13}$$

另外，自再现模在对称开腔中的单程总相移一般并不等于由腔长 L 所决定的几何相移 kL，它们有关系:

$$\delta = -kL + \Delta \tag{5-4-14}$$

Δ 表示腔内单程渡越时相对于几何相移的单程附加相移, 或简称为单程相移。当 $\Delta > 0$ 时表示有附加相位超前，当 $\Delta < 0$ 时表示有附加相位滞后。由 (5-4-14) 式与 (5-4-13) 式可写出:

$$\Delta_{mn} = kL + \arg \sigma_{mn} \tag{5-4-15}$$

这说明本征值 σ的幅角还与单程附加相移有关, 并且不同的横模, 单程附加相移也不同。

当腔内存在激活物质时，为了使自再现模在往返传播过程中

能形成稳定的振荡，必须满足所谓的谐振条件。即光波在腔内往返一周的总相移应等于 2π的整数倍。用公式写出来为:

$$2\delta = 2q\pi \quad (q = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5-4-16}$$

利用 (5-4-14) 式，并考虑到光波矢 k 与谐振频率 ν之间具有的关系:

$$k = \frac{2\pi n}{c}\nu \tag{5-4-17}$$

式中: c —— 光在真空中的速度;

n —— 激活物质的折射率。

不难看出, 可以稳定存在于开腔中的激光振荡模式的谐振频率为:

$$\nu_{mnq} = \frac{qc}{2L'} + \frac{c}{2\pi L'}\Delta_{mn} \tag{5-4-18}$$

式中: q —— 纵模的模参数;

L′—— 腔的光学长度。

因此，谐振频率既与纵横有关，也与横模有关。

综上所述，对于对称开腔来说，自再现模积分方程的本征函数决定了镜面上的不同横模的光场分布, 包括振幅和相位分布。本征值决定了不同横模的单程衍射功率损耗、单程相移以及谐振频率。对于非对称开腔的情况，则应按光场在腔内往返一周才能自再现这一条件写出相应的积分方程。这时，方程的本征函数解只能确定某一个镜面上的稳态场分布，本征值 σ的模确定的将是往返衍射功率损耗, 幅角确定的也将是往返总相移或往返附加相移。

至此，我们推出了对称开腔中的自再现模积分方程，并讨论了方程解的物理意义。剩下的问题是如何去求解这个积分方程。方程 (5-4-8) 是个具有连续对称核的线性齐次积分方程，在积分方程的理论中称为第二类弗里德霍姆方程，数学上可以证明，这种方程的解析解是存在的。但是，至今仍未找到一般的解析求解方法, 只能对不同结构的腔采用不同的方法。如对于平行平面腔，我

们用迭代法进行数值计算，结果也只能用图或表的形式给出。对于对称共焦腔，则可用解析法求出方程的精确解以及近似解的解析表达式。

习　题　五

(1) 证明：两种介质（折射率分别为 n_1 与 n_2）的平面界面对入射傍轴光线的变换矩阵为：

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$$

(2) 证明：两种介质（折射率分别为 n_1 与 n_2）的球面界面对入射傍轴光线的变换矩阵为：

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n_2-n_1}{n_2R} & \dfrac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$$

其中 R 为球界面的曲率半径。

(3) 分别按图 5-5-1 (a)（b）中的往返顺序，推导傍轴光线往返一周的光学变换矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，并证明这两种情况下的 $\frac{1}{2}(A+D)$ 相等。

图 5-5-1

(4) **利用往返矩阵证明共焦腔为稳定腔，即任意傍轴光线在其中可以往返无限多次，而且两次往返即自行闭合。**

第六章　平行平面腔

平行平面腔是历史上最早被采用的，如世界上第一台红宝石激光器就是用的平行平面腔，平行平面腔的优点是，光束方向性好，模体积大，容易获得单横模振荡。缺点是调整精度要求很高，稳定性介于稳定腔与非稳腔之间，衍射损耗、几何损耗都比较大。因此，小增益激光器不适用平行平面腔，目前，平行平面腔在中等以上功率的激光器中仍有普遍应用。平行平面腔的自再现模积分方程至今尚未得到精确的解析解，可用迭代法对积分方程做数值计算，其结果用图表反映。本章介绍条形、方形、圆形镜面的平行平面腔的积分方程解法以及模式特征。

§ 6.1　条形与方形镜平行平面腔

平行平面腔的自再现模的积分方程至今仍未能找到精确的解析解。福克斯和厉鼎毅首先提出用迭代法进行数值计算，并给出了自再现模的各种特征，包括场振幅、场相位分布曲线，单程衍射功率损耗和单程附加相移曲线等。本节首先讨论形状最简单的平行平面腔——条形腔的自再现模积分方程的迭代计算方法以及计算结果，然后将此结果推广到方形镜腔。

条形镜是指在 x 坐标方向上镜的尺寸有限，而 y 坐标方向的尺寸无限。或反之，y 方向有限而 x 方向无限。它的自再现模积分方程实际上变成一维的，可由（5-4-8）式将两个变量分离开而得到。在变量分离之前，先将积分核中的 $\rho(x, y, x', y')$ 表达式展开，舍去无关紧要的高阶小量，做进一步简化。以线度为 2a 的

图 6-1-1　方形镜平行平面腔

方形镜为例，在如图 6-1-1 所示的坐标系中，ρ的计算公式为：

$$\rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+L^2} \tag{6-1-1}$$

将 ρ按照$\frac{x-x'}{L}$，$\frac{y-y'}{L}$的幂级数展开：

$$\rho(x,y,x',y')=L\sqrt{1+\left(\frac{x-x'}{L}\right)^2+\left(\frac{y-y'}{L}\right)^2}$$

$$=L+\frac{(x-x')^2}{2L}+\frac{(y-y')^2}{2L} \tag{6-1-2}$$

上述的近似条件为 $L \gg a \gg \lambda$，$\frac{a^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2$。将 (6-1-2) 式代入 (5-4-8) 式中，可得积分方程的核为：

$$K(x,y,x',y')=\frac{i}{\lambda L}e^{-ikL}e^{-ik\left[\frac{(x-x')^2}{2L}+\frac{(y-y')^2}{2L}\right]} \tag{6-1-3}$$

由该式可以看出，方形镜平行平面腔的自再现模的积分方程对 x、y 两个坐标是对称的。只要令

$$\begin{aligned} u_{mn}(x,y) &= u_m(x)u_n(y) \\ \sigma_{mn} &= \sigma_m\sigma_n \end{aligned} \tag{6-1-4}$$

就可以将含两个变量的积分方程(5-4-8)式分离为两个分别只含一个变量的积分方程，即：

$$\sigma_m u_m(x) = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}} e^{-ikL} \int_{-a}^{a} e^{-ik\frac{(x-x')^2}{2L}} u_m(x') dx'$$

$$\sigma_n u_n(y) = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}} e^{-ikL} \int_{-a}^{a} e^{-ik\frac{(y-y')^2}{2L}} u_n(y') dy' \qquad (6\text{-}1\text{-}5)$$

上述两个方程的形式完全一样，其中任意一个方程就是条形腔的积分方程。方形镜腔与条形镜腔的区别仅仅是维数的不同，求解方程的方法以及解的结果都是相同的。

下边我们用迭代法来求解条形腔的自再现模积分方程。所谓迭代法是指，从迭代公式(5-4-3)或它的简化形式

$$u_{q+1} = \iint K u_q ds' \qquad (6\text{-}1\text{-}6)$$

出发，首先假设一初始场分布函数 u_1，代入迭代公式中计算出第一次渡越后所生成的场分布函数 $u_2 = \iint K u_1 ds'$，然后将 u_2 归一化，取 $|u_2|_{max} = 1$，代回上式算得 $u_3 = \iint K u_2 ds'$。如此反复进行下去，直至对相当大的 q 值能满足：

$$\begin{aligned} u_{q+1} &= \sigma u_q \\ u_{q+2} &= \sigma u_{q+1} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (6\text{-}1\text{-}7)$$

其中的 σ为同一个复常数。这说明场分布不再发生变化，而形成了稳定不变的自再现模。初始场分布函数假设的不同，最后得到的稳态自再现模分布函数也将不同，即对应了不同的横模模式。例如，设 $u_1 = 1$，即用均匀平面波作为头一个镜面上的初始激发波，这时整个镜面光场振幅均匀，并是等相位面。由这种初始激发波迭代计算后得到的稳态自再现模就是基模，记为 TEM_0。如果设

$$u_1=\begin{cases}+1, & 0<x'<a\\ -1, & -a<x'<0\end{cases}$$

即条形镜的上半部分与下半部分的光场振幅相等，位相差 π 由这种初始激发波迭代计算后得到的模为一阶模，记为 TEM_1 等等。近代法的计算相当繁杂，但它有两个优点:

(1) 能加深我们对模形成过程的理解，这是由于它的计算过程与波在腔内往返传播形成自再现模的过程是相对应的，其结果使我们能形象具体地认识模的各种特征。

(2) 原则上适用于任何几何形状的开腔模式的计算，因此它具有普遍性。

下边我们来讨论条形腔积分方程解的结果所反映的自再现模的基本特性。

一、镜面上的光场分布特点

镜面上的光场分布特点包括光场振幅分布特点与光场相位分布特点。

(一) 光场振幅分布特点

图 6-1-2 画出了菲涅耳数不同时的振幅分布曲线，迭代次数约 300 次左右。其中图 6-1-2 (a) 为基模，图 6-1-2 (b) 为一阶模。由这些曲线我们可以看出，基模振幅分布曲线具有如下特点:

(1) 整个曲线为偶对称，从镜面中心到镜边缘光场振幅逐渐减小，但并不是平滑地降落，而是有若干小的起伏，起伏数等于菲涅耳数。

(2) 菲涅耳数越大，镜边缘处的相对振幅越小。

(3) 当菲涅耳数为偶数时，镜面中心处的振幅并不是最大值，只有当菲涅耳数为奇数时，中心的振幅才最大。

高阶模振幅分布曲线具有如下特点:

图 6-1-2　条形平面腔振幅分布曲线

(a) 基模; (b) 一阶模

（1）振幅分布曲线出现零点，也就是在镜面上出现节线，节线数与阶数一致。

（2）对于相同菲涅耳数的腔，高阶模的镜边缘相对场振幅比基模要大。阶数越高，大的也越多。这说明阶数越高，镜面上形成的光斑尺寸也就越大。

（二）光场相位分布特点

图 6-1-3 画出菲涅耳数不同时的相位分布曲线，迭代次数约 300 次左右。其中图 6-1-3（a）为基模，图 6-1-3（b）为一阶模。

图 6-1-3　条形平面腔相位分布曲线

（a）基模；（b）一阶模

由这些曲线可以看出，基模的相位分布曲线不是直线，而是有起伏的曲线，起伏数决定于菲涅耳数。这说明镜面不是等相面。但对于菲涅耳数比较大的腔来说，在镜面中心附近可近似认为是等相面，只是在镜面边缘处相位产生滞后。高阶模的相位分布则在越过节线时有相位跃变存在。

二、单程衍射损耗

求出自再现模以后，便可计算单程衍射损耗和单程附加相移。方法是在任一镜面上取定一点，计算单程渡越到另一镜面的相应点处的振幅与相位的变化，便可求出单程衍射损耗及单程相移。图 6-1-4 所示为条形平行平面腔中的 TEM_0 模与 TEM_1 模的单程衍射损耗 δ与菲涅耳数 F 之间的关系曲线。表 6-1 列出不同 F 值的 TEM_0 模与 TEM_1 模的单程衍射损耗 δ 与 δ 的大小。从这些图表中，我们可以得出以下结论：

(1) 同一横模，δ唯一地由 F 值决定。F 越大，δ越小。当 F 较大时，在对数尺度中，δ与 F 近似成直线关系。

图 6-1-4　条形平面腔 δ~F 曲线

表 6-1　条形腔模的单程衍射损耗

F	0.5	2	2.5	5	6.25	10
δ_0 (%)	18		3		0.688	
δ (%)		13		3.9		1.6

(2) 菲涅耳数相同时，基模的 δ最低，模的阶次越高，δ越大。

三、单程相移

计算结果表明，单程相移 Δ 为正，即附加相位是超前的。图 6-1-5 画出条形腔 TEM_0 模与 TEM_1 模的单程相移 Δ 与菲涅耳数 F 之间的关系曲线。表 6-2 列出了不同 F 值时 TEM_0 模与 TEM_1 模的单程相移 Δ_1 与 Δ_2 的值。

图 6-1-5　条形平面腔 Δ～F 曲线

表 6-2　条形腔模的单程相移

F	0.5	2	2.5	5	6.25	10
Δ_0	14°		3.15°		1.59°	
Δ_1		18°		8°		4°

由这些图表中，我们可以得出以下结论:

(1) 同一横模，Δ 唯一地由 F 值决定，F 越大，Δ 越小。当 F 值较大时，在对数尺度中，Δ 与 F 近似成直线关系。

(2) 菲涅耳数相同时，基模的 Δ 最小，模的阶次越高，Δ 越大。

四、谐振频率

由上述单程相移的计算结果，利用 (5-4-18) 式便可计算条形腔自再现模的谐振频率。若将 (5-4-18) 式中 c/2L 因子提出，即:

$$\nu_{mq} = \frac{c}{2L'}\left(q + \frac{\Delta_m}{\pi}\right) \tag{6-1-8}$$

q 为纵模参数，我们先给它的大小一个数量级的概念。因激光器输出的光波长与谐振频率有关系 $\nu = c/\lambda$，而 $\nu = cq/2L'$，故有:

$$q = \frac{2L'}{\lambda} \tag{6-1-9}$$

取 $\eta = 1$，$L = 1$m，λ取可见光范围，可估算出 $q = 10^6$。这说明，一般情况下 q 是个相当大的整数。而从表 6-2 中可知 Δ 的数值只有几度或十几度，因此，Δ/π的值远小于 1，比起 q 的值来，完全可以忽略不计。所以，对条形平行平面腔来说，自再现模的谐振频率完全可以用

$$\nu_q = \frac{cq}{2L'} \tag{6-1-10}$$

来计算。此式与第一章中视光波为均匀平面波所得的结论（1-7-48）式完全一样。由（6-1-10）式还可得出，同一横模、两个相邻纵模间的频率间隔为:

$$\Delta\nu_q = \frac{c}{2L}, \tag{6-1-11}$$

而相同纵模、两个相邻横模间的频率间隔 $\Delta\nu_m$ 比起 $\Delta\nu_q$ 要小得多。

对于尺寸为 $2a\times 2a$ 的方形镜平行平面腔来说，计算方法与条形镜腔完全相同。图 6-1-6 画出了几个不同初始激发波的场分布函数示意图。图中不同的箭头方向表示场强方向的不同，每个箭

图 6-1-6　方形平面腔的初始场

头所在区域内的场强大小是均匀的。这些初始场分布对应于不同的横模 TEM_{mn}。m 和 n 为横模模参数。m 代表沿 x 轴方向的节线数目，n 代表沿 y 轴方向的节线数目。计算结果表明，方形镜平行平面腔的自再现模的各项特征，包括场振幅与场相位分布规律、单程相移和谐振频率等都与条形腔相同，只是单程衍射损耗应由下式计算:

$$\delta_{mn}(F) = \delta_m(F) + \delta_n(F) \tag{6-1-12}$$

式中　δ_m（F）——菲涅耳数为 F 的条形腔中 m 阶模的单程衍射

损耗;

$\delta(F)$ ——菲涅耳数为 F 的条形腔中 n 阶模的单程衍射损耗。

§ 6.2　圆形镜平行平面腔

如果平行平面腔的反射镜为圆形，在镜面上使用极坐标是合适的。此时积分方程 (5-4-8) 式中的 ρ将是 r、φ、r'、φ'四个坐标的函数。如图 6-2-1 所示，ρ表达式可按下述方法展开:

图 6-2-1　圆形镜平行平面腔

$$\rho(r,\varphi,r',\varphi') = \sqrt{L^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$= L + \frac{1}{2L}\left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi-\varphi')\right] \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

上式近似条件为 $L \gg a \gg \lambda$，$\frac{a^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2$，其中 a 为圆形镜面半径。将 (6-2-1) 式代入 (5-4-8) 式中有:

$$\sigma u(r,\varphi) = \int_0^a \int_0^{2\pi} K(r,\varphi,r',\varphi')\, u(r',\varphi')\, r'\, dr'\, d\varphi'$$

$$(6\text{-}2\text{-}2)$$

$$K(r,\varphi,r',\varphi') = \frac{i}{\lambda L} e^{-ikL} e^{-ik\left[\frac{r^2+r'^2}{2L} - \frac{rr'\cos(\varphi-\varphi')}{L}\right]}$$

为了将 (6-2-2) 式进行变量分离，可将 $u(r,\varphi)$ 写成如下形式:

$$u_{mn}(r,\phi) = R_{mn}(r)e^{-im\phi} \tag{6-2-3}$$

其中 $R_{mn}(r)$ **所满足的积分方程可证明为**:

$$\sigma_{mn}R_{mn}(r)\sqrt{r} = \int K_m(r,r')R_{mn}(r')\sqrt{r'}\,dr'$$

$$K_m(r,r') = \frac{i^{m+1}k}{L}e^{-ikL}J_m\left(k\frac{rr'}{L}\right)e^{-ik\frac{r^2+r'^2}{2L}}\sqrt{rr'} \tag{6-2-4}$$

式中: J_m **——第** m **阶具塞尔函数。**

该积分方程的解不止一个。不同的解用不同的参数 n **来表示。图** 6-2-2 **中画出了几个不同初始激发波的场分布函数示意图,不**

图 6-2-2　**圆形平面腔的初始场**

同箭头方向代表场强的方向不同,每个箭头所在区域内的振幅大小均匀。这些初始场对应于不同的横模 TEM_{mn}, m **和** n **为横模参数。**m **代表沿幅角** ϕ**方向的节线数目,**n **代表沿半径** r **方向上的节线数目。通过求解圆形镜平行平面腔的积分方程,可以得到自再现模的模特征。图** 6-2-3 **和图** 6-2-4 **分别给出了圆形镜平行平面腔基模** TEM_{00}**模的振幅分布曲线和相位分布曲线,从这些曲线中所得出的结论与条形腔完全相同,这里不再赘述。图** 6-2-5 **和图** 6-2-6 **分别给出了圆形镜平行平面腔最低的高阶模** TEM_{10}**模的振幅分**

图 6-2-3　圆形平面腔 TEM_{00}模振幅分布曲线

图 6-2-4　圆形平面腔 TEM_{00}模相位分布曲线

布曲线与相位分布曲线，其结论也与条形腔完全相同。

图 6-2-7 与图 6-2-8 分别画出的是圆形镜平行平面腔的单程衍射损耗与单程相移随菲涅耳数变化的曲线，其特点也与条形腔相同。

最后，我们给出一个圆形镜平行平面腔基模单程衍射损耗的近似计算公式:

$$\delta_0 = 0.207 \cdot \left(\frac{1}{F}\right)^{1.4} \tag{6-2-5}$$

例如，某 CO_2 激光器腔长 $L = 1m$，放电管半径 $a = 0.5cm$，取 $n =$

图 6-2-5　圆形平面腔 TEM_{10} 模振幅分布曲线

图 6-2-6　圆形平面腔 TEM_{10} 模相位分布曲线

1，则 $F = 2.36$，由（6-2-5）式可算出 $\delta_{00} = 6.22\%$。一般气体激光器的菲涅耳数 F 不大，因此衍射损耗不可忽略。又如某红宝石激光器腔长 $L = 7cm$，晶体棒端面半径 $a = 3.5mm$，$n = 1.76$，光波长取 $0.6943\ \mu m$，则 $F = 443$，$\delta_{00} = 0.032\%$。可见，对一般固体激光器来说，F 很大，衍射损耗很低，完全可以忽略不计。

图 6-2-7 **圆形平面腔 δ～F 曲线**

图 6-2-8 **圆形平面腔 Δ～F 曲线**

第七章　稳定球面腔

稳定球面腔的模式理论是腔模理论中比较成熟的部分。由于大多数中、小功率的激光器都采用稳定球面腔，故它的模式理论具有更广泛和更重要的实践意义。因一般稳定球面腔的模式理论是以对称共焦腔模的解析理论为基础，因此，本章首先介绍方形镜与圆形镜共焦腔自再现模积分方程的解析解，讨论它们的自再现模以及自再现模而激发的行波场的特征。然后建立一般稳定球面腔与共焦腔之间的等价性，从而将对称共焦腔模式的解析理论的结果推广到一般的稳定球面腔。

§ 7.1　方形镜对称共焦腔

方形镜对称共焦腔的两个凹面反射镜的孔径是方形的。我们首先将积分方程（5-4-8）的核对于方形共焦腔进行近似简化，然后介绍方程的解析解，并在此基础上讨论自再现模与行波场的特征。

图 7-1-1 为对称共焦腔的示意图，因镜面孔径是方形，故镜面坐标采用直角坐标。由图可见:

$$\rho(x, y, x', y') = P_1P_2 = P'_1P'_2 - P'_1P_1 - P'_2P_2 \tag{7-1-1}$$

根据（6-1-2）式，在满足$\frac{a^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{a}\right)^2$的条件下有:

$$P'_1P'_2 = L + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2L} \tag{7-1-2}$$

图 7-1-1 方形镜对称共焦腔

而 $P_1'P_1$ 与 $P_2'P_2$ 可近似认为等于图示中的 Δ_1 与 Δ_2，利用球面镜的几何关系(见图 7-1-2)，可推出 Δ的计算公式为:

$$\Delta = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R} \tag{7-1-3}$$

近似条件为 $R \gg r$，R 为反射镜曲率半径，r 为镜面上观察点 P 到镜面坐标原点的距离。这个近似条件通常都可以满足的。将 Δ表达式用于方形镜共焦腔，并注意到 $R_1 = R_2 = L$，则有:

图 7-1-2 球面镜的几何关系

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{x^2 + y^2}{2L} \\ \Delta_2 &= \frac{x'^2 + y'^2}{2L} \end{aligned}\right\} \tag{7-1-4}$$

将(7-1-2)式和(7-1-4)式代入(7-1-1)式中，可得:

$$\rho(x, y, x', y') = L - \frac{1}{L}(xx' + yy') \tag{7-1-5}$$

再将此式代入积分方程(5-4-8)**中,便有线度为** $2a\times 2a$ **的方形镜对称共焦腔的积分方程为**:

$$\sigma_{mn}u_{mn}(x,y)=\frac{i}{\lambda L}e^{-ikL}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}u_{mn}(x',y')e^{ik\frac{xx'+yy'}{L}}dx'dy' \tag{7-1-6}$$

博伊德和戈登首先对此方程求解。他们设:

$$X=\frac{\sqrt{c}}{a}x,\quad Y=\frac{\sqrt{c}}{a}y$$
$$c=\frac{a^2k}{L}=2\pi F \tag{7-1-7}$$

并做如下变量分离:

$$u_{mn}(x,y)=F_m(X)G_n(Y)$$
$$\sigma_{mn}=\sigma_m\sigma_n \tag{7-1-8}$$

将(7-1-6)**式变成两个一维的积分方程**:

$$\sigma_m F_m(X)=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-ikL}\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}F_m(X')e^{iXX'}dX'$$
$$\sigma_n G_n(Y)=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-ikL}\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}}G_n(Y')e^{iYY'}dY' \tag{7-1-9}$$

由于两个方程的形式相同,故只需求解其中一个就可以。当 c **值为有限大小时,该方程本征函数的精确解析解为**:

$$u_{mn}(X,Y)=S_{0m}\left(c,\frac{X}{\sqrt{c}}\right)S_{0n}\left(c,\frac{Y}{\sqrt{c}}\right) \tag{7-1-10}$$

本征值的精确解析解为:

$$\sigma_{mn}=4Fe^{-i\left[kL-(m+n+1)\frac{\pi}{2}\right]}R_{0m}^{(1)}(c,1)R_{0n}^{(1)}(c,1) \tag{7-1-11}$$

式中:$S_{0m}\left(c,\frac{X}{\sqrt{c}}\right)$、$S_{0n}\left(c,\frac{Y}{\sqrt{c}}\right)$ **——角向长椭球函数**;

$R_{0m}^{(1)}(c,1)$、$R_{0n}^{(1)}(c,1)$ ——径向长椭球函数。

这些椭球函数都为实函数。当 $c \ll 1$ 时，上述本征函数与本征值的精确解都可用近似解析解表示，其中本征函数的解在用 x、y 代回 X、Y 后为：

$$u_{mn}(x,y)=c_{mn}H_m\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}x\right)H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}} \qquad (7\text{-}1\text{-}12)$$

本征值的近似解为：

$$\sigma_{mn}=e^{-i\left[kL-(m+n+1)\frac{\pi}{2}\right]}$$

式中：c_{mn} —— 与模式有关的常数；

$H_m(\zeta)$ —— 第 m 阶厄米多项式。

下边写出几个低阶厄米多项式：

$$\begin{aligned}H_0(\zeta)&=1\\H_1(\zeta)&=2\zeta\\H_2(\zeta)&=4\zeta^2-2\\H_3(\zeta)&=8\zeta^3-12\zeta\end{aligned} \qquad (7\text{-}1\text{-}14)$$

下边我们分别讨论自再现模与行波场的特征。

一、自再现模的特征

(一) 镜面光场分布

积分方程的本征函数 (7-1-12) 式决定了镜面上的光场分布，其中本征函数的模决定振幅分布，幅角决定相位分布。

1. 振幅分布

(7-1-12) 式为实函数，它实际上就是镜面振幅分布函数。令 m= n= 0，我们可以得到基模 TEM_{00} 的振幅分布函数为：

$$u_{00}(x, y) = c_{00} e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda\pi}} \tag{7-1-15}$$

相应的分布曲线见图 7-1-3, (图示为一维曲线) 它是高斯型曲线。

图 7-1-3　共焦腔基模振幅分布曲线

镜面中心振幅最大, 从中心向边缘振幅平滑衰减。当距离中心为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \tag{7-1-16}$$

时, 振幅降至最大值的$\frac{1}{e}$。通常称半径为 r 的圆为基模光斑, 故共焦腔镜面的基模光斑半径就等于由 (7-1-16) 式决定的 r 值, 并记为 w_{0s}:

$$w_{0s} = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \tag{7-1-17}$$

式中: L —— 共焦腔腔长;

λ —— 激光波长。

此式说明, 镜面光斑大小与镜面线度无关。利用 (7-1-17) 式可将 (7-1-12) 式重新改写如下:

$$u_{mn}(x,y) = c_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_{0s}}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_{0s}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}} \tag{7-1-18}$$

并由此式可写出各阶横模的振幅分布函数为:

$$u_{00}(x,y) = c_{00}e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}$$

$$u_{10}(x,y) = c_{10}\frac{2\sqrt{2}}{w_{0s}}xe^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}$$

$$u_{20}(x,y) = c_{20}\left(\frac{8x^2}{w_{0s}^2} - 2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}$$

$$u_{30}(x,y) = c_{30}\left(\frac{16\sqrt{2}}{w_{0s}^3}x^3 - \frac{12\sqrt{2}}{w_{0s}}x\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{0s}^2}}$$

$$\tag{7-1-19}$$

图 7-1-4 给出 TEM_{10}、TEM_{20}、TEM_{30}的振幅分布曲线。由 (7-1-19) 式可计算出 TEM_{10}模在 $x = 0$ 处有三条节线, TEM_{20}在 $x = \pm\frac{1}{2}w_{0s}$处有两条节线, TEM_{30}在 $x = 0$、$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}w_{0s}$处有三条节线。一般模式 TEM_{mn}在 x 方向有 m 条节线, 在 y 方向有 n 条节线。这些节线的分布并不均匀, 靠近中心节线较密。

高阶模的光斑半径须分别沿不同坐标来计算, 通常定义沿 x、y 方向的光斑半径分别为:

$$\begin{aligned} w_{ms} &= \sqrt{2m+1}\,w_{0s} \\ w_{ns} &= \sqrt{2n+1}\,w_{0s} \end{aligned} \tag{7-1-20}$$

可见, 阶次越高, 光斑半径越大, 光强分布越偏离中心。方形镜共焦腔不同横模的强度花样可参见图 1-7-1。

2. 相位分布

由于 $u_{mn}(x, y)$ 为实函数, 说明镜面各点的光场相位相同, 共焦腔反射镜面本身构成光场的一个等相位面。

(二) 单程衍射损耗

由(5-4-10)式计算单程衍射损耗, 如果 σ_{mn} 代近似解(7-1-13)式, 则有 $\delta_{mn}=0$。因此, 要想讨论单程衍射损耗, σ_{mn} 必须用精确解(7-1-11)式。σ_{mn} 与菲涅耳数有关, 说明 δ_{mn} 也与菲涅耳数有关。δ_{mn} 与 F 关系的计算曲线如图 7-1-5 所示。为了便于比较, 图中还画出平行平面腔与均匀平面波的曲线。表 7-1 列出这三种情况下的基模单程衍射损耗与菲涅耳数之间关系的数据。此外, 方形镜共焦腔基模的单程衍射损耗还可以用下述经验公式做近似计算:

$$\delta_0 = 10.9\times 10^{-4.94F} \tag{7-1-2}$$

图 7-1-4　共焦腔高阶模振幅分布曲线

(a) TEM_{10} 模; (b) TEM_{20} 模; (c) TEM_{30} 模

表 7-1　几种腔的基模单程衍射损耗

F		1	2	4	5	10
δ_0	平面波		0.5	0.25	0.2	0.1
	平面腔	0.18	0.08	0.03	0.022	0.0082
	共焦腔	$10^{-3.9}$	$10^{-8.48}$	$10^{-18.76}$	$10^{-23.7}$	$10^{-48.4}$

图 7-1-5　方形镜共焦腔的 δ~F 曲线

由上述的图表及公式，我们不难得出方形镜共焦腔内单程衍射损耗具有以下特点:

(1) 对同一模式，δ_{mn}随 F 的增大急剧减小。

(2) F 相同时，基模的 δ最小，阶次越高 δ越大。这是由于基模能量集中在镜中心，高阶模的阶次越高，光斑越大，能量分布越偏离中心。利用共焦腔的这种横模鉴别能力可进行横模选择。

(3) 与平行平面腔比较，共焦腔的单程衍射损耗要小好几个

数量级。这是由于共焦腔的反射镜有会聚作用，而平行平面腔的反射镜则没有会聚作用。共焦腔中的傍轴光线无几何损耗，而平行平面腔的 δ中实际上除了衍射损耗以外还包含有几何损耗。

(三) 单程相移

由 (7-1-13) 式可得方形镜共焦腔单程相移为:

$$\Delta_{mn} = (m + n + 1)\frac{\pi}{2} \tag{7-1-22}$$

可见其附加相位超前，其超前量随横模阶数而变，但与菲涅耳数无关，这一点与平面腔有所不同。图 7-1-6 画出方形镜共焦腔的几

图 7-1-6 方形镜共焦腔的 Δ～F 曲线

个横模的 Δ 。

(四) 谐振频率

由 (5-4-18) 式可得方形镜共焦腔的谐振频率:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{1}{2}(m + n + 1)\right] \qquad (7\text{-}1\text{-}23)$$

同一横模、两个相邻纵模的频率间隔仍为 $\Delta\nu_q = c/2L$，而同一纵模两个相邻的横模之间的频率间隔则为 $\Delta\nu_m = \Delta\nu_n = \frac{1}{2}\Delta\nu_q$。也就是说，$\Delta\nu_m$、$\Delta\nu_n$ 与 $\Delta\nu_q$ 同属于一个数量级，不再可以忽略，这说明横模参数对频率的影响要比平面腔大得多。这样一来，共焦腔对谐振频率出现了高度简并的现象，即所有 $2q+m+n$ 相等的模式都将具有相同的谐振频率。如 TEM_{mnq}，$TEM_{m-1,n+1,q}$，$TEM_{m-2,n,q+1}$，…等都有相同的谐振频率。这种现象对激光器的工作状态会产生不良影响，因为，所有频率相等的模式都处在激活介质的增益曲线的相同位置处，从而彼此间产生强烈的竞争作用，导致多模振荡，使输出激光质量变坏。图 7-1-7 画的是方形镜共焦腔的振荡频谱。

图 7-1-7　方形共焦腔的振荡频谱

二、行波场的特征

求出镜面上的光场以后，利用菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式可求出腔内任一点的光场。博伊德和戈登证明，方形镜共焦腔的这个计算结果，也就是行波场可用以下解析式表示 (坐标原点选在腔轴线的中点):

$$E_{mn}(x, y, z) = A_{mn}E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{-i(x,y,z)} \qquad (7\text{-}1\text{-}24)$$

式中 A_{mn}为与模式有关的常数, E_0 为与坐标无关的常数。除去这些常数以外, 解析式剩余部分可划分为三大部分。第一部分$\frac{w_0}{w(z)}$称为衰减因子, 它反映出随着行波场的传播, 场振幅的大小衰减的规律。$w(z)$ 是 z 坐标处的基模光斑半径, 计算公式为:

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}} = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} \qquad (7\text{-}1\text{-}25)$$

w_0 为 $z = 0$ 处的基模光斑半径, 由此式可看出 w_0 为 $w(z)$ 的最小值, 故又称腰斑半径。L 为共焦腔腔长, f 为共焦腔凹面反射镜的焦距, 其大小恰好等于腔长 L 的一半, f 又称共焦腔的焦参数。两个反射镜面处的 z 坐标为 $z = \pm\frac{L}{2}$, 由 (7-1-25) 式可算出镜面处基模光斑半径 w_{0s}与腰斑半径 w_0 的关系为:

$$w_{0s} = \sqrt{2}\, w_0 \qquad (7\text{-}1\text{-}26)$$

因此, w_0 的大小可由 (7-1-17) 式推出, 即:

$$w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{f\lambda}{\pi}} \qquad (7\text{-}1\text{-}27)$$

第二部分 $H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$ 称为横向振幅分布因子, 它反映出各模式在不同 z 坐标处的横截面内的振幅分布。它是厄米—高斯分布。第三部分 $e^{-i(x,y,z)}$称为位相因子, (x, y, z) 的表达式是:

$$(x,y,z)=kz+k\frac{x^2+y^2}{2R(z)}-(m+n+1)\,tg^{-1}\frac{z}{f}$$

(7-1-28)

这个表达式中共有三项。第一项 kz **称为传播因子，反映行波场从** $z=0$ **处传到** z **坐标所产生的几何相移。第二项** $k\frac{x^2+y^2}{2R(z)}$ **称为位相弯曲因子，它表明在** z **坐标处行波场的等相位面是个球面，该球面的曲率半径就是** $R(z)$**。它随** z **坐标而变，计算公式为：**

$$R(z)=z+\frac{L^2}{4z}=z+\frac{f^2}{z}=z\left[1+\left(\frac{f}{z}\right)^2\right]=f\left(\frac{z}{f}+\frac{f}{z}\right)$$

(7-1-29)

第三项 $(m+n+1)\,tg^{-1}\frac{z}{f}$ **称为附加相移因子，它反映行波场传播一段距离后，除由传播距离决定的几何相移外，还有一附加相移。几何相移与横模模式无关，附加相移与横模模式有关。**

下边我们来讨论方形镜共焦腔的行波场，或简称共焦场的特征。

(一) 振幅分布

共焦场的振幅分布为 E_{mn} **的模，即：**

$$|E_{mn}(x,y,z)|=A_{mn}E_0\frac{w_0}{w(z)}H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w(z)}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w(z)}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$

(7-1-30)

其中基模为：

$$|E_{00}(x,y,z)|=A_{00}E_0\frac{w_0}{w(z)}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \quad (7\text{-}1\text{-}31)$$

这说明，基模共焦场在任一 z **坐标处的横截面内都是高斯分布。不**

同 z 坐标处的基模光斑半径也不同，$w(z)$ 与 z 的关系曲线为一双曲线：

$$\frac{w^2(z)}{w_0^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1 \qquad (7\text{-}1\text{-}32)$$

如图 7-1-8 所示。

图 7-1-8　基模共焦场的光斑半径

(三)　模体积

模体积指的是该模式在腔内所能扩展的空间范围。模体积越大，说明对该模式的振荡有贡献的激活粒子就越多，因此可获得越大的输出功率。对称共焦腔的基模模体积通常可以用下式进行估算：

$$V_{00} = \frac{1}{2} L \pi w_{0s}^2 = \frac{1}{2} \lambda L^2 \qquad (7\text{-}1\text{-}33)$$

高阶模模体积则为：

$$V_{mn} = \frac{1}{2} L \pi w_{ms}^2 w_{ns}^2 = \sqrt{(2m+1)(2n+1)}\ \frac{\lambda L^2}{2} \qquad (7\text{-}1\text{-}34)$$

(三)　等相位面分布

共焦场的相位分布由　(x, y, z) 决定。与腔轴线相交于 z_0 点处的等相位面方程可以由

$$(x, y, z) = (0, 0, z_0) \tag{7-1-35}$$

所决定。忽略由于 z 坐标微小变化所引起的附加相移因子，我们可得到 z_0 处等相位面方程为：

$$z - z_0 = -\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \tag{7-1-36}$$

严格地讲，(7-1-36) 式为抛物面方程，顶点在 $z = z_0$ 处，抛物面焦距的大小是：

$$f(z) = \frac{1}{2}\left|R(z)\right| \tag{7-1-37}$$

如果我们只考虑近轴情况，共焦场的等相位面就可近似认为是球面，该球面的曲率半径就是 $R(z)$。由 (7-1-29) 式，当 $z > 0$ 时 $R(z) > 0$；当 $z < 0$ 时 $R(z) < 0$。因此，当我们考察 (3-1-36) 式时，不难判断，当 $z_0 > 0$ 时，因 $R(z_0) > 0$，故有 $z - z_0 < 0$，这时的等相位面应凹向坐标原点，即腔中心。当 $z_0 < 0$ 时，因 $R(z_0) < 0$，故有 $z - z_0 > 0$，即等相位面也应凹向腔中心。这就是说，共焦场的等相位面无论在什么地方都是凹向腔中心的球面。这里需要注意的是，等相位面曲率半径 $R(z)$ 的符号意义与以前所讲的谐振腔球面反射镜曲率半径 R 的符号意义是有区别的。前者实际上是以凸向 z 轴正方向时为正，而后者则是以凹向反射镜为正。由 (7-1-29) 式我们可以看出，$z = 0$ 时，$R(0) \to \infty$。$z \to \infty$ 时，$R(\infty) \to \infty$。这说明在腔中点或距腔中点无限远处的等相位面都是垂直于腔轴线的平面。可以证明，$z = \pm\frac{L}{2}$ 时，$\left|R\left(\pm\frac{L}{2}\right)\right|$ 具有最小值，即共焦场在两个镜面处的等相位面曲率半径的数值最小，且恰好等于镜面本身的曲率半径。共焦场中等相位面的分布情况如图 7-1-9 所示。

（四）基模远场发散角

图 7-1-9　共焦场等相位面

前边说过，共焦腔的基模光束按双曲线规律从腔中心向外扩展，我们就定义双曲线的两条渐近线之间的夹角为基模远场发散角（全角）：

$$\theta = \lim_{z \to \infty} \frac{2w(z)}{z} \tag{7-1-38}$$

将（7-1-25）式代入，有：

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi f}} = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}} = \frac{2\lambda}{\pi w_0} \tag{7-1-39}$$

例如共焦腔氦氖激光器腔长 $L = 30\text{cm}$，光波长 $\lambda = 0.6328\,\mu\text{m}$，则 $\theta = 2.3 \times 10^{-3}\text{rad}$。共焦腔 CO_2 激光器 $L = 1\text{m}$、$\lambda = 10.6\,\mu\text{m}$，则 $\theta = 5.2 \times 10^{-3}\text{rad}$。可见，共焦腔基模光束的理论发散角具有毫弧度的数量级，说明它的方向性相当好。由于高阶模的发散角是随着模的阶次的增大而增大，所以多模振荡时，光束的方向性要比单基模振荡差。

§ 7.2　圆形镜对称共焦腔

圆形镜对称共焦腔两反射镜孔径为圆形，设半径为 a，镜面处坐标以极坐标为宜。它的积分方程可由方形镜积分方程（7-1-6）式出发，令 $x = r\cos\phi$，$y = r\sin\phi$，$x' = r'\cos\phi'$，$y' = r'\sin\phi'$，从而得到：

$$\sigma_{mn}u_{mn}(r,\phi)=\frac{i}{\lambda L}e^{-ikL}\int_0^a\int_0^{2\pi}u_{mn}(r',\phi')e^{ik\frac{rr'\cos(\phi-\phi')}{L}}r'\,dr'\,d\phi'$$

(7-2-1)

对（7-2-1）式进行变量分离，令:

$$u_{mn}(r,\phi)=R_{mn}(r)e^{-im\phi} \qquad (7\text{-}2\text{-}2)$$

其中 $R_{mn}(r)$ 满足的积分方程可证明为如下形式:

$$\sigma_{mn}R_{mn}(r)\sqrt{r}=\int_0^a K_m(r,r')R_{mn}(r')\sqrt{r'}\,dr'$$

$$K_m(r,r')=\frac{k\,i^{m+1}}{L}e^{-ikL}J_m\left(k\frac{rr'}{L}\right)\sqrt{rr'},$$

(7-2-3)

此积分方程不同的解由参数 n 来区分。

可以证明，当腔菲涅耳数 $F\to\infty$ 时，圆形镜共焦腔积分方程的本征函数的近似解析解可表示为拉盖尔—高斯函数:

$$u_{mn}(r,\phi)=C_{mn}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w_{0s}}\right)^m L_n^m\left(\frac{2r^2}{w_{0s}^2}\right)e^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}}\cos m\phi \qquad (7\text{-}2\text{-}4)$$

式中 C_{mn} 为与模式有关的归一化常数，w_{0s} 仍是镜面上的基模光斑半径，计算方法同方形镜共焦腔。$L_n^m(\xi)$ 称为缔合拉盖尔多项式，现写出几个多项式如下:

$$L_0^m(\xi)=1$$

$$L_1^m(\xi)=1+m-\xi$$

$$L_2^m(\xi)=\frac{1}{2}\left[(1+m)(2+m)-2(2+m)\xi+\xi^2\right]$$

(7-2-5)

本征值的近似解为:

$$\sigma_{mn} = e^{-i\left[kL - (m+2n+1)\frac{\pi}{2}\right]} \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

下边我们分别叙述圆形镜共焦腔的自再现模及行波场的特征。

一、自再现模的特征

(一) 镜面光场分布

1. 振幅分布

(7-2-4) 式为实函数,故它实际上就是镜面上光场振幅的分布函数。我们写出基模及若干高阶模的场振幅分布如下:

$$
\begin{aligned}
u_{00}(r,\phi) &= c_{00}e^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}} \\
u_{10}(r,\phi) &= c_{10}\frac{\sqrt{2}}{w_{0s}}re^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}}\cos\phi \\
u_{01}(r,\phi) &= c_{01}\left(1-\frac{2r^2}{w_{0s}^2}\right)e^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}} \qquad (7\text{-}2\text{-}7)\\
u_{11}(r,\phi) &= c_{11}\frac{2\sqrt{2}}{w_{0s}}r\left(1-\frac{r^2}{w_{0s}^2}\right)e^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}}\cos\phi \\
u_{02}(r,\phi) &= c_{02}\left(\frac{2r^4}{w_{0s}^4}-\frac{4r^2}{w_{0s}^2}+1\right)e^{-\frac{r^2}{w_{0s}^2}}
\end{aligned}
$$

显然,基模的振幅分布与方形镜共焦腔完全一样,高阶模的振幅分布出现节线或节圆。TEM_{mn}模沿幅角 ϕ方向的节线数为 m,沿径向 r 的节圆数为 n。各节圆沿 r 方向不是等距分布。如 TEM_{01}模的节圆半径为 $w_{0s}/\sqrt{2}$,TEM_{02}模的两个节圆半径分别为 $\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}w_{0s}$。高阶模的光斑半径比基模大,阶次越高,光斑半径越大,并且光斑随 n 的增大比 m 更快些。对圆形镜共焦腔来说,高

阶模的光斑半径可定义为振幅降至最外边的极大值的$\frac{1}{e}$处到镜面中心的距离。它无解析表达式, 表 7-2 列出了几个高阶模的镜面光斑半径 w_{mns}的计算结果。圆形镜共焦腔不同横模的强度花样可参看图 1-7-2。

表 7-2　圆形共焦腔镜面的光斑半径

横模阶次	TEM_{00}	TEM_{10}	TEM_{20}	TEM_{01}	TEM_{11}	TEM_{21}
w_{mns}	w_{0s}	$1.5w_{0s}$	$1.77w_{0s}$	$1.92w_{0s}$	$2.21w_{0s}$	$2.38w_{0s}$

2. 相位分布

由于 (7-2-4) 式为实函数, 故圆形镜共焦腔的镜面本身也是等相位面。

(二) 单程衍射损耗

由 σ_{mn}的近似解也将得出 $\delta_{mn}=0$ 的结论。要解决单程衍射损耗问题, 仍须用精确解。这里只定性给出计算结果。图 7-2-1 画出了几个模式的 δ随 F 变化的曲线, 从中可得出如下结论:

(1) 所有模式的 δ均随 F 的增大而急剧减小。

(2) 基模的 δ最小, 模阶次越高, δ越大。

(3) 比平面腔低得多, 但比方形镜共焦腔大。这是由于一方面线度相同时方形镜孔径面积比圆形镜大, 另一方面阶数相同时方形镜共焦腔光斑比圆形镜共焦腔小。

(三) 单程相移

由 (7-2-6) 式可写出圆形镜共焦腔模的单程相移为:

$$\Delta_{mn}=(m+2n+1)\frac{\pi}{2} \tag{7-2-8}$$

可见其附加相位超前, 超前量随横模阶数而变, 但与菲涅耳数无关。图 7-2-2 画出圆形镜共焦腔几个横模的 Δ, 其特点与方形镜

图 7-2-1　圆形共焦腔的 δ—F 曲线

共焦腔类似。所不同的是，圆形镜共焦腔中参数 n 对 Δ 的影响大于 m，而方形镜共焦腔中两者对 Δ 的影响是一样的。

(四) 谐振频率

由 (5-4-18) 式可得出圆形镜共焦腔的谐振频率为:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{1}{2}(m + 2n + 1)\right] \tag{7-2-9}$$

同一横模、两个相邻纵模的频率间隔 $\Delta\nu_q = \frac{c}{2L}$，而同一纵模、两个相邻横模的频率间隔则有 $\Delta\nu_m = \frac{1}{2}\Delta\nu_q$，$\Delta\nu_n = \Delta\nu_q$。这说明横模参数对频率的影响不可忽略，同时它对频率也是高度简并的，如 TEM_{mnq}、$TEM_{m+2,n,q-1}$、$TEM_{m,n+1,q-1}$ 等模式的频率都是相同的。

图 7-2-2 圆形共焦腔的 Δ～F 曲线

二、行波场的特征

计算可得，圆形镜共焦腔的行波场为：

$$E_{mn}(r,\phi,z)=A_{mn}E_0\frac{w_0}{w(z)}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w(z)}\right)^m L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}\cos m\phi^{\,i(r,\phi,z)} \qquad (7\text{-}2\text{-}10)$$

式中 A_{mn}，E_0——常数；

$\frac{w_0}{w(z)}$——衰减因子；

$\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w(z)}\right)^m L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}\cos m\phi$——横向振幅分布因子；

$e^{i\Phi(r,\phi,z)}$——位相因子。

$\Phi(r,\phi,z)$ 的表达式为:

$$\Phi(r,\phi,z) = kz + k\frac{r^2}{2R(z)} - (m + 2n + 1)tg^{-1}\frac{z}{f}$$

(7-2-11)

上述式中的 w (z) 与 R (z) 的表达式及意义都与方形共焦腔场完全一样。圆形共焦场特性的讨论与方形共焦场也都完全一样，这里不再重复。

§ 7.3 一般稳定球面腔

共焦腔模式理论不仅能够定量说明共焦腔模式本身的特征，更重要的是，它的结论可以推广到整个稳定球面腔系统。这一推广是谐振腔理论中的一个重大进展。

前边已经讲过，无论是方形镜还是圆形镜，共焦场中在腔轴上 z 坐标处的等相位面曲率半径都可以由 (7-1-29) 式计算。在不同地方，等相位面曲率半径不同，而等相位面的分布情况由图 7-1-9 表示。我们可以设想，如果在共焦场的任意两处放置两个与该处等相位面大小形状完全相同的球面反射镜，则从每个反射镜反射出去的场将准确地沿原入射方向返回，整个共焦场不受任何扰动。(严格证明见第八章§ 8.3) 这样一来，我们便得到了一个新的谐振腔，该腔产生的行波场与原共焦场完全一致。我们说此球面腔与激发原来共焦场的共焦腔等价。由于任何一个共焦腔所激发的共焦场有无穷多个等相位面，所以，我们用此方法可构造出无数多个等价的球面腔。换句话说，任一个共焦腔可与无穷多个球面腔等价，而且可以证明，这些球面腔都是稳定腔。如图 7-3-1 所示，在给定共焦腔的共焦场内任取两点 z_1 ($z_1 < 0$) 和 z_2 (z_2

图 7-3-1 共焦腔的等价球面腔

1—共焦腔；2—等价球面腔

> 0)，这两点的等相位面曲率半径分别为 $R(z_1)$ 与 $R(z_2)$。如果用 R_1 与 R_2 分别代表替换等相位面的等价球面腔反射镜曲率半径，按前述符号规则有：

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -R(z_1) = -z_1 - \frac{f^2}{z_1} \\
R_2 &= R(z_2) = z_2 + \frac{f^2}{z_2}
\end{aligned}
\tag{7-3-1}
$$

用 L 表示等价球面腔的腔长，则：

$$
L = z_2 - z_1 \tag{7-3-2}
$$

为证明由（R_1，R_2，L）组成的等价球面腔为稳定的，可计算：

$$
\begin{aligned}
g_1 &= 1 - \frac{L}{R_1} = \frac{f^2 + z_1 z_2}{z_1^2 + f^2} \\
g_2 &= 1 - \frac{L}{R_2} = \frac{f^2 + z_1 z_2}{z_2^2 + f^2}
\end{aligned}
\tag{7-3-3}
$$

不难证明 $0 < g_1 g_2 < 1$，即等价球面腔是稳定的。

反过来，任意一个满足稳定性条件的球面腔只可唯一地与一个共焦腔等价。下边我们来证明这个结论。如图 7-3-2 所示，给定稳定球面腔以双凹腔为例，两镜面 M_1 与 M_2 的曲率半径分别为

图 7-3-2　球面腔的等价共焦腔

1—球面腔；2—等价共焦腔

R_1 和 R_2，腔长为 L。假设所要求的等价共焦腔的共焦参数为 f，以等价共焦腔中点为 z 坐标的原点，M_1、M_2 两镜的 z 坐标为 z_1 和 z_2。按图示情况，我们仍可写出与（7-3-1）式和（7-3-2）式相同的三个方程，将此三个方程联立，可唯一地解出一组 z_1、z_2 与 f^2 的数值，即：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{L(R_2 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} \\
z_2 &= \frac{-L(R_1 - L)}{(L - R_1) + (L - R_2)} \\
f^2 &= \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{[(L - R_1) + (L - R_2)]^2}
\end{aligned}
\qquad (7\text{-}3\text{-}4)
$$

如果 R_1、R_2、L 满足 $0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1$ 时，不难证明 $z_1 < 0$、$z_2 > 0$、$f^2 > 0$，这说明给定稳定球面腔可唯一确定一个等价共焦腔。下边我们利用（7-3-4）式与共焦腔的自再现模、行波场的特征来讨论一般稳定球面腔（腔参数分别为 R_1、R_2、L）的自再现模与行波场的特点。

一、镜面的基模光斑半径

一般稳定球面腔镜面上的光斑半径等于它的等价共焦腔在球面腔镜面处的光斑半径。为此，只需将 (7-3-4) 式中 f^2 与 z_1 代入 (7-1-25) 式，便可得到 M_1 镜面的基模光斑半径 w_{s1}，将 f^2 与 z_2 代入 (7-1-25) 式中，可得 M_2 镜面的基模光斑半径 w_{s2}:

$$w_{s1} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}\left[\frac{R_1^2(R_2 - L)}{L(R_1 - L)(R_1 + R_2 - L)}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$w_{s2} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}\left[\frac{R_2^2(R_1 - L)}{L(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

二、谐振频率

由 (7-1-28) 式可写出方形镜一般稳定球面腔的两上反射镜面顶点处的位相因子分别为:

$$(0, 0, z_1) = kz_1 - (m + n + 1)\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{z_1}{f}$$

$$(0, 0, z_2) = kz_2 - (m + n + 1)\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{z_2}{f} \qquad (7\text{-}3\text{-}6)$$

按谐振条件 $(0, 0, z_1) - (0, 0, z_2) = q\pi$ 可得谐振频率为:

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left[q + \frac{1}{\pi}(m + n + 1)\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{z_1}{f} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{z_2}{f}\right)\right] \qquad (7\text{-}3\text{-}7)$$

为简化此式，可令 $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{z_1}{f}$，$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\frac{z_2}{f}$，则:

$$\mathrm{tg}(\alpha - \alpha) = \frac{f(z_1 - z_2)}{f^2 + z_1 z_2} \qquad (7\text{-}3\text{-}8)$$

将（7-3-4）式代入（7-3-8）式，并利用三角变换可得：

$$\cos(\alpha - \alpha) = \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

因此，方形镜一般稳定球面腔的谐振频率为：

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left\{q + \frac{1}{\pi}(m + n + 1)\cos^{-1}\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

同理，圆形镜一般稳定球面腔的谐振频率为：

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L}\left\{q + \frac{1}{\pi}(m + 2n + 1)\cos^{-1}\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}11)$$

由于谐振频率公式中出现因子 $\cos^{-1}\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}$，使得频率简并现象比共焦腔要弱的多。

三、单程衍射损耗

由共焦腔模式理论可知，每种横模的单程衍射损耗单值地由腔的菲涅耳数决定。由菲涅耳数定义 $F = \frac{a^2}{L\lambda}$ 与共焦腔镜面上基模光斑半径公式（7-1-17），可将共焦腔的菲涅耳数表示为：

$$F = \frac{a^2}{\pi w_{0s}^2} \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$

它的物理意义是菲涅耳数正比于镜面面积与镜面上光斑面积之比，显然 F 越大，衍射损耗越小。根据波动光学的一般原理，衍射作用除与孔径大小、光波长有关外，还与入射到孔径上的光波

的具体性质有关，即视此波是平面波还是球面波以及波阵面上振幅分布是均匀的还是非均匀的。由于一般稳定球面腔与它的等价共焦腔所激发的行波场结构完全一样，且反射镜与镜所在处等相位面重合，所以，我们可以认为它们的衍射损耗遵循相同的规律。将(7-3-12)式用于一般稳定腔，即定义它为稳定球面腔的等效菲涅耳数：

$$F_{ef} = \frac{a_i^2}{\pi w_{0si}^2} \tag{7-3-14}$$

式中　a_i——稳定球面腔反射镜半径；

w_{0si}——镜面基模光斑半径。

对非对称腔来说，两个镜的参数不一定相等，故下标 $i=1, 2$ 可取两个值。将(7-3-5)式代入(7-3-13)式，可分别得到两个反射镜的等效菲涅耳数：

$$\begin{aligned} F_{ef1} &= \frac{a_1^2}{L\lambda}\sqrt{\frac{L(R_1-L)(R_1+R_2-L)}{R_1^2(R_2-L)}} \\ F_{ef2} &= \frac{a_2^2}{L\lambda}\sqrt{\frac{L(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{R_2^2(R_1-L)}} \end{aligned} \tag{7-3-14}$$

求出两个等效菲涅耳数后，按共焦腔衍射损耗曲线查出球面腔两镜面处的损耗值 δ_{mn}^1 与 δ_{mn}^2，则平均单程损耗为：

$$\delta_{mn} = \frac{1}{2}(\delta_{mn}^1 + \delta_{mn}^2) \tag{7-3-15}$$

四、模体积

按共焦腔模体积相同的考虑方法，一般稳定球面腔的基模模体积可以定义为：

$$V_{00} = \frac{1}{2}L\pi\left(\frac{w_{s1}+w_{s2}}{2}\right)^2 \tag{7-3-16}$$

只要将（7-3-5）式代入后，就可求出 V_{00}。

五、基模远场发散角

将（7-3-4）式中 f 表达式代入共焦腔远场发散角（全角）公式（7-1-39）中，便可求出一般稳定球面腔的基模远场发散角。

习　题　七

（1）平凹腔中凹面镜曲率半径为 R，腔长 $L=0.2R$，光波长为 λ，求由此平凹腔激发的基模高斯光束的腰斑半径。

（2）对称双凹腔长为 L，反射镜曲率半径 $R=2.5L$，光波长为 λ，求镜面上的基模光斑半径。

（3）稳定双凹球面腔腔长 $L=1\text{m}$，两个反射镜曲率的半径分别为 $R_1=1.5\text{m}$，$R_2=3\text{m}$。求它的等价共焦腔腔长，并画出它的位置。

（4）有一凹凸腔，腔长 $L=30\text{cm}$，两个反射镜的曲率半径大小分别为 $R_1=50\text{cm}$，$R_2=30\text{cm}$，见图 7-4-1。使用 He-Ne 做激光工作物质。

图 7-4-1

①利用稳定性条件证明此腔为稳定腔；

②此腔产生的高斯光束焦参数；

③此腔产生的高斯光束的腰斑半径及腰位置；

④此腔产生的高斯光束的远场发散角。

(5) 有一平凹腔，凹面镜曲率半径 R= 5m，腔长 L= 1m，光波长 λ= 0.5 μm。求:

(1) 两镜面上的基模光斑半径;

(2) 基模高斯光束的远场发散角。

(6) 求方形镜共焦腔镜面上的 TEM_{30}模的节线位置(可以 w_{0s} 为参数)。

(7) 从镜面上的光斑大小来分析，当它超过镜子的线度时，这样的横模就不可能存在。试估算在 L= 30cm，2a= 0.2cm 的 He-Ne 激光方形镜共焦腔中所可能出现的最高阶横模的阶次是多大?

第八章　高斯光束

使用稳定球面腔的激光器所发出的基模激光将以高斯光束的形式在空间传播。本章主要研究高斯光束的传输规律，介绍高斯光束的 q 参数，并研究简单透镜系统对高斯光束的变换。在此基础上讨论高斯光束的聚焦、准直、以及两个高斯模之间的匹配问题。这些问题都是激光理论与实际应用中经常遇到的具有重要意义的问题。

§ 8.1　高斯光束的基本性质

无论是方形镜共焦腔还是圆形镜共焦腔，它们所激发的基模行波场都是一样的，由于其横向振幅分布为高斯函数，所以称之为基模高斯光束，或简称高斯光束。现将沿 z 轴方向传播的高斯光束解析表达式重写如下:

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{-i\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right)-tg^{-1}\frac{z}{f}\right]} \tag{8-1-1}$$

式中:

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{f}\right)^2}$$

$$R(z) = z + \frac{f^2}{z} \tag{8-1-2}$$

z 轴坐标原点设在光束的腰处，w_0 为高斯光束的腰斑半径，f 为产

生高斯光束的共焦腔焦参数，也称高斯光束的焦参数。w_0 与 f 存在如下关系：

$$f = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, w_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \tag{8-1-3}$$

式中 $R(z)$，$w(z)$ ——分别表示 z 坐标处高斯光束的等相位面曲率半径及等相面上的光斑半径。

本节讨论高斯光束的基本性质，并讨论它的特征参数。

一、高斯光束的基本性质

（一）振幅分布及光斑半径

高斯光束在任一 z 坐标处，其横向振幅分布为高斯分布，光斑半径随 z 坐标而变，即：

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2}$$

$$= w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \tag{8-1-4}$$

在 $z = 0$ 处，$w(0) = w_0$ 为腰斑半径，在 $z = \pm f$ 处，$w(\pm f) = \sqrt{2}w_0$。

（二）等相位面分布

沿高斯光束轴线每一点处的等相位面都可以视为球面，曲率半径也随 z 坐标而变，即：

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{f}{z}\right)^2\right]$$

$$= z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \tag{8-1-5}$$

在 $z=0$ 及 $z=\infty$ 处，$R(0)$ 与 $R(\infty)$ 都为∞，表明在高斯光束的腰处及离腰无穷远处的等相位面都是平面。在 $z=\pm f$ 处，$|R(\pm f)|=2f$，这是等相位面曲率半径数值的极小值。当 $z>0$ 时，$R(z)>0$，等相应面凸向 z 轴正方向，当 $z<0$ 时，$R(z)<0$，等相位面凸向 z 轴负方向。图 8-1-1 画出了五个位于 $z>0$ 范围内的等相位面及其曲率中心的位置示意图。其中面 1 在 $z=0$ 处，中心则在 $z=-\infty$ 处；面 2 在 $0<z<f$ 范围内，因此时有 $R(z)>2f$，故中心在 $z<-f$ 内；面 3 在 $z=f$ 处，因 $R(z)=2f$，故中心在 $z=-f$ 处；面 4 在 $z>f$ 范围内，因有 $z<R(z)<z+f$，故中心在 $-f<z<0$ 范围内；面 5 在 $z=+\infty$ 处，中心则在 $z=0$ 处。

图 8-1-1　高斯光束等相位面的分布

(三) 远场发散角

高斯光束的远场发散角的定义即 (7-1-38) 式，它的大小为：

$$\theta=2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi f}}=\frac{2\lambda}{\pi w_0} \tag{8-1-6}$$

由此式可见，腰斑越小，发散角越大。

综上所述，高斯光束既不是平面波，也不是一般的球面波。在傍轴近似条件下，可以将它看成是一种曲率中心与曲率半径都随传播过程而不断改变的非均匀球面波，这是因为它的等相位面是球形，但等相位面上的光场振幅分布却是非均匀的高斯分布。

二、高斯光束的特征参数

为了描述高斯光束，需要用一些特征参数。这些参数要具备这样的性质，一旦参数的数值给定，高斯光束的结构及位置也就确定。这里我们介绍三组不同的特征参数。

(一) 腰斑 w_0 (或焦参数 f) 与腰位置

由 (8-1-1) 式不难看出，只要给定高斯光束的腰斑 w_0，整个光束的结构就随之确定，如与腰相距 z 距离处的光斑半径、等相位面曲率半径、该处相对于腰的位相滞后以及整个光束的发散角等都可以确定。所以，用 w_0 加上腰位置可以作为一组高斯光束的特征参数。由于焦参数 f 与腰斑半径 w_0 之间有确定的互换关系，所以用 f 与腰位置也可以作为一组特征参数。

(二) 任一 z 坐标处的光斑半径 w (z) 及等相面曲率半径 R (z)

由 (8-1-4) 式与 (8-1-5) 式可知，如果给定了 w (z) 和 R (z) 的数值，便可解出 w_0 及腰位置 (即 z 坐标值)：

$$w_0 = w(z)\left[1 + \left(\frac{\pi w^2(z)}{\lambda R(z)}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = R(z)\left[1 + \left(\frac{\lambda R(z)}{\pi w^2(z)}\right)^2\right]^{-1} \qquad (8\text{-}1\text{-}7)$$

因此，w (z) 与 R (z) 也可以做为高斯光束的特征参数。

(三) q 参数

用 w (z) 与 R (z) 可以定义一个新的参数：

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \qquad (8\text{-}1\text{-}8)$$

我们称之为 q 参数。一旦给定 q 参数，w (z) 与 R (z) 便可确定：

$$\frac{1}{R(z)} = R_e \frac{1}{q(z)}$$

$$\frac{1}{w^2(z)} = -\frac{\pi}{\lambda} I_m \frac{1}{q(z)} \tag{8-1-9}$$

因此，用 q **参数也可作为高斯光束的特征参数。由**（8-1-8）**式我们可以得到** q **参数的一个重要结论，即腰处的** q **参数为**：

$$q_0 = q(0) = i\frac{\pi w_0^2}{\lambda} = if \tag{8-1-10}$$

用 q **参数表示高斯光束的解析表达式，**（8-1-1）**式可改写为**：

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)}} e^{-i\left(kz - tg^{-1}\frac{z}{f}\right)} \tag{8-1-11}$$

上述三组特征参数各具特点，使用时，要根据实际问题的需要灵活选择。用 w_0（**或** f）**与腰位置、**w（z）**与** R（z）**来描述高斯光束比较直观，用** q **参数来研究高斯光束的传输规律则非常方便。**

§ 8.2 高斯光束 q 参数的传输规律

用高斯光束的 q **参数来研究其传输规律比用其它参数要方便得多。本节先讨论普通球面波的传输规律，然后引深到高斯光束的传输规律。它们都可以用统一的规律来描述通过光学系统的行为，这一规律称为** ABCD **定律。**

一、普通球面波的传输规律

我们来考察一束在自由空间沿 z **轴方向传播的普通球面波。如图** 8-2-1 **的所示，曲率中心为** O，**波阵面曲率半径随** z **坐标的变化规律为**：

图 8-2-1　球面波的传播

$$R(z) = z \tag{8-2-1}$$

这里，我们将 $R(z)$ 作为球面波的特征参数。当它从 z_0 坐标处沿 z 轴传播 L 距离，到达 z_2 坐标处时，它的 $R(z)$ 参数有如下关系：

$$R_2(z) = R_1(z) + L \tag{8-2-2}$$

式中　$R_1(z) = R(z_1)$ ——z_1 处的 R 参数；

　　　$R_2(z) = R(z_2)$ ——z_2 处的 R 参数。

我们再来看一下球面波通过焦距为 F 的薄透镜时 R 参数的变化规律。以图 8-2-2 所示的凸透镜为例，设 $R_1(z)$ 为入射到透镜表面处的发散球面波 R 参数，$R_2(z)$ 为从透镜出射的汇聚球面波的 R 参数。按凸向 z 轴正方向的等相位面曲率半径取正的符号规则，$R_1(z) > 0$，$R_2(z) < 0$。由熟知的透镜成像公式，我们有：

图 8-2-2　透镜对球面波的变换

$$\frac{1}{R_2(z)} = \frac{1}{R_1(z)} - \frac{1}{F} \tag{8-2-3}$$

此式可推广到任何一种透镜，焦距 F 的符号规则为凸透镜取正，凹透镜取负。

在第五章中，我们引入过傍轴光线通过光学系统的变换矩阵 $T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，其中光线在自由空间传播 L 距离的变换矩阵为 $T_L=\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，焦距为 F 的薄透镜对傍轴光线的变换矩阵为 $T_F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{F} & 1\end{pmatrix}$。不难验证，球面波在自由空间以及通过薄透镜的传输规律可以统一写成一个公式：

$$R_2(z)=\frac{A\cdot R_1(z)+B}{C\cdot R_1(z)+D} \tag{8-2-4}$$

我们就称这一规律为 ABCD 定律。

二、高斯光束的传输规律

用 q 参数来描述高斯光束，我们可以证明它通过自由空间 L 距离和通过焦距为 F 的薄透镜时，其传输规律可统一写为：

$$q_2(z)=\frac{A\cdot q_1(z)+B}{C\cdot q_1(z)+D} \tag{8-2-5}$$

其中 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 为光学系统的光学变换矩阵。先来看高斯光束通过自由空间 L 距离。将 (8-1-4) 式与 (8-1-5) 式代入 q 参数定义式 (8-1-8) 中，经适当计算后，我们可以得到：

$$q(z)=q_0+z \tag{8-2-6}$$

q_0 为腰处 ($z=0$) 的 q 参数。设想一高斯光束沿 z 轴传播，从 z_1 坐标经 L 距离到达 z_2 坐标，则 q 参数的传输规律为：

$$q_2(z)=q_1 9z)+(z_2-z_1)=q_1(z)+L \tag{8-2-7}$$

式中　$q_1(z) = q(z_1)$ ——z_1 处的 q 参数;

$q_2(z) = q(z_2)$ ——z_2 处的 q 参数。

再来看高斯光束通过焦距为 F 的薄透镜时的情况。如图 8-2-

图 8-2-3　透镜对高斯光束的变换

3 所示，M_1 为高斯光束入射到透镜表面上时的等相位面，它是个球面，曲率半径为 R_1。通过透镜后，它被变成另一球面的等相位面 M_2 而出射。M_2 的曲率半径为 R_2。R_1、R_2 与透镜焦距 F 的关系为:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F} \tag{8-2-8}$$

由于透镜很薄，所以可以认为，在紧挨着透镜两侧的等相位面 M_1 与 M_2 上的光斑大小及光强分布都应该一样。以 w_1、w_2 分别代表 M_1 与 M_2 上的光斑半径，则有:

$$w_1 = w_2 \tag{8-2-9}$$

过了透镜后，得到的是另一个具有球面形状的等相面，并在等相面上为高斯型强度分布的光波。这样，在透镜像方继续传输的光束仍为高斯光束。用 $q_1(z)$ 表示入射光束在透镜表面处的 q 参数，$q_2(z)$ 为出射光束在透镜表面处的 q 参数。利用 (8-2-8) 式和 (8-2-9) 式，我们有:

$$\frac{1}{q_2(z)} = \frac{1}{R_2} - i\frac{\lambda}{\pi w_2^2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F} - i\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

$$= \frac{1}{q_1(z)} - \frac{1}{F} \tag{8-2-10}$$

从 (8-2-7) 式与 (8-2-10) 式可见，高斯光束的 q 参数传输规律与普通球面波的 R 参数传输规律完全一样，故 q 参数也遵行 (8-2-5) 式的 ABCD 定律。这一定律的优点是，只要我们知道了光学系统的变换矩阵 $\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$ ，就可以求出通过光学系统以后的高斯光束 q 参数，并且可求出光束的光斑大小及等相位面曲率半径。在下一节中，我们将利用 q 参数计算透镜对高斯光束的变换特点，并以此进一步讨论高斯光束的聚焦与准直的问题。

§ 8.3　高斯光束的聚焦与准直

在实际应用中经常遇到激光束的聚焦与准直问题。本节首先利用 q 参数的传输规律推导透镜对高斯光束的变换公式，然后利用变换公式讨论高斯光束的聚焦与准直。

一、透镜对高斯光束的变换公式

用图 8-3-1 来研究透镜对高斯光束的变换。假设入射高斯光束的腰斑半径为 w_0 (相应地共焦参数为 f)，腰到透镜的距离为 l，透镜焦距为 F。我们的任务是，求出入射高斯光束的腰斑半经 w'_0 (或相应地共焦参数 f') 及腰到透镜的距离 l'。设入射高斯光束腰处的 q 参数为 $q_1(z)$，出射高斯光束腰处的 q 参数为 $q_2(z)$，则:

图 8-3-1　透镜对高斯光束的变换

$$q_1(z) = if$$

$$q_2(z) = if' \tag{8-3-1}$$

而高斯光束从入射束腰处到出射束腰处经历了自由传播 l**、通过** F **透镜、自由传播** l **三个过程。相应地光学变换矩阵分别为** T_l、T_F、$T_{l'}$，**总的变换矩阵为**:

$$T = T_{l'}T_F T_l = \begin{bmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{l'}{F} & \frac{Fl' + Fl - ll'}{F} \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{l}{F} \end{bmatrix} \tag{8-3-2}$$

由 ABCD **定律可得**:

$$\frac{\left(1 - \frac{l'}{F}\right) if + \frac{Fl' + Fl - ll'}{F}}{-i\frac{f}{F} + 1 - \frac{l}{F}} = if' \tag{8-3-3}$$

令等式两边的实部与虚部分别相等，我们可以得到下边两个公式:

$$f' = \frac{F^2 f}{(l - F)^2 + f^2} \tag{8-3-4}$$

$$l' = \frac{l(l - F) + f^2}{(l - F)^2 + f^2}F \tag{8-3-5}$$

利用 w_0 **与** f **之间关系式** (7-1-27)，**也可将** (8-3-4) **式改写为**:

$$w'_0 = \frac{F}{\sqrt{(l - F)^2 + f^2}}w_0 \tag{8-3-6}$$

如果将入射高斯光束看成物光束，腰看成物点，而把出射高斯光束当作像光束，腰为像点，l 与 l 就成为物距和像距。容易证明，在满足条件

$$l - F \gg f \tag{8-3-7}$$

的情况下，(8-3-5) 式与 (8-3-6) 式将与几何光学成像公式一致。事实上，由于 f 比 l- F 小许多，可忽略 (8-3-5) 式中分子与分母上的 f^2，故有:

$$l' = \frac{lF}{l - F} \tag{8-3-8}$$

此式稍作变换就是成像公式:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{F} \tag{8-3-9}$$

再略去 (8-3-6) 式分母上的 f^2，可有:

$$k = \frac{w_0'}{w_0} = \frac{F}{l - F} = \frac{l'}{l} \tag{8-3-10}$$

k 为像与物光束腰斑之比，即放大倍数。而近似条件 (8-3-7) 式的物理意义是，物光束的腰到透镜后焦面的距离必须远大于高斯光束本身的共焦参数。粗略地讲，也就是要求物光束的腰与透镜相距足够远。如果将物光束的腰移近透镜到一定的程度，此时，高斯光束的行为将与通常几何光学中傍轴光线的行为截然不同。例如，当 $l = F$ 时，由 (8-3-5) 式知 $l' = F$。也就是说，把物光束腰放在透镜后焦面上，则像光束的腰就在前焦面上，这与几何光学中后焦点上的物成像在无穷远处的结论完全不同。又如，当 $l < F$ 甚至 $l = 0$，由 (8-3-5) 式都可求出 l 的数值，这说明，无论物光束的腰怎么移近透镜，甚至移到透镜表面上，仍可得到像高斯光束。而几何光学中物体移到透镜焦点之内后，就得不到实像了。

二、高斯光束的聚焦

在许多实际应用中，如激光加工、激光信息的存储与读取等经常遇到须对激光进行聚焦的情况。这里我们只讨论单透镜对激光的聚焦作用。为此，我们先来仔细分析一下（8-3-6）式和（8-3-5）式。w_0' 和 l' 随 l、F、w_0（或 f）三个因素而变化，我们只讨论与 l 和 F 两个因素变化的情况，并且先令某个因素固定不变。

（一）F 固定，w_0' 与 l' 随 l 的变化

图 8-3-2 是按（8-3-6）式画的 $w_0' \sim l$ 曲线，（假设 $F > f$）。图 8-3-3 是按（8-3-5）式画的 $l' \sim l$ 曲线（同样假设 $F > f$）。下边我们就 l 的几种不同取值的情况进行讨论。

图 8-3-2　$w_0' \sim l$ 曲线

1. $l = 0$

即物光束的腰在透镜表面上。此时，有：

$$l' = \frac{F}{1 + \left(\frac{F}{f}\right)^2} < F \qquad (8\text{-}3\text{-}11)$$

$$w_0' = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F}\right)^2}} < w_0 \qquad (8\text{-}3\text{-}12)$$

图 8-3-3 $l'\sim l$ 曲线

像光束腰在透镜焦平面以内，有聚焦作用，且 F 越小聚焦作用越好。

2.$l=F$

即物光束的腰正好在透镜后焦面上。此时有:

$$l'=F \tag{8-3-13}$$

$$w_0'=\frac{F}{f}w_0 \tag{8-3-14}$$

像光束腰在前焦面上，而且是否有聚焦作用还要由 F 与 f 的大小来决定。如果 $F>f$，无聚焦作用，当 $F<f$ 时才有聚焦作用。

3.$0<l<F$

物光束腰在透镜与后焦面之间，从图 8-3-2 可以看出，像光束的腰将在透镜与前焦面之间，是否有聚焦作用要看 F、f 与 l。$F<f$ 总能聚焦。$F>f$ 时就要看 l 的大小了，由图 8-3-1 可知，只有 $l<F-\sqrt{F^2-f^2}$ 时才能聚焦。

4.$l>F$

即物光束的腰在透镜后焦面之外，离透镜较远。当 $F<f$ 总能聚焦，当 $F>f$，要视 l 大小，只有 $l>F+\sqrt{F^2-f^2}$ 时才有聚焦作用。

(二) l 固定，w_0'、l 随 F 的变化

图 8-3-4 是按 (8-3-6) 式画的 $w_0' \sim F$ 曲线，下边我们讨论 F 的几种不同取值的情况。

图 8-3-4　$w_0' \sim F$ 曲线

1. $F = \frac{1}{2}R\ (l)$

这里的 $R\ (l)$ 表示的是物光束在透镜入射表面上的等相位面曲率半径。由 (8-1-5) 式可求出:

$$R(l) = \frac{l^2 + f^2}{l} \qquad (8\text{-}3\text{-}15)$$

将 $F = \frac{l^2 + f^2}{2l}$代入 (8-3-6) 式与 (8-3-5) 式有 $w_0' = w_0$、$l' = l$。这说明，此时物光束与像光束的结构完全一样，位置也是以透镜为中心左右对称。我们称此时的透镜对高斯光束实现的是自再现变换。由于透镜与球面反射镜对光束的变换规律是完全相同的，我们自然可以认为，用焦距 $F = \frac{1}{2}R\ (l)$ 的球面反射镜代替透镜，反射高斯光束将与入射高斯光束完全重合，也就是实现自再现变换。由于球面反射镜曲率半径等于其焦距的 2 倍，所以，当反射镜曲率半径恰好等于等相位面曲率半径时，或者说当反射镜面与高斯

光束等相位面重合时，反射镜能对高斯光束实现自再现变换。这就是我们在第七章§ 7.3 中所说的，任意共焦腔可等价于用两个与场等相位面重合的反射镜组成的球面腔。

2. $F < \frac{1}{2}R(l)$

由于 $w_0' < w_0$，说明有聚焦作用。

3. $F > \frac{1}{2}R(l)$

由于 $w_0' > w_0$，说明无聚焦作用。由 $\frac{dw_0'}{dF} = 0$ 不难求出，当 $F = R(l) = \frac{l^2 + f^2}{l}$ 时，w_0' 有一极大值 $w_0' = \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2}\, w_0$，这种情况最不利于聚焦。

由以上分析，我们可以得出这样的结论，为了获得较好的聚焦效果，有两种办法：

(1) 减小 F，使用短焦距透镜。

(2) 加大 $R(l)$，也就是尽量让入射高斯光束在透镜表面处的等相位面曲率半径大。这又有两种方法，或者把入射光束的腰放在远离透镜的地方，或者把它放在透镜表面上。

三、高斯光束的准直

在许多实际应用中，如光信号处理、全息摄影、全息测量等经常需要方向性好、光束横截面面积大的激光，这时要对由激光器输出的光束进行准直扩束。这个问题与激光束的聚焦正好相反，因为高斯光束的远场发散角与腰斑半径成反比（参见 8-1-6 式），要减小发散角，就必须扩大腰斑。因此，激光的准直往往总是伴随着扩束。

从 (8-3-6) 式可以看出，对于给定的激光 w_0 或 f，无论如何取 F 与 l 的值，都不可能使得 $w_0' \to \infty$，从而也不可能使像光束发

散角 $\theta'\to 0$。这说明，使用单个透镜将高斯光束变成平面波，从原则上说是不可能的。我们现在的问题是，什么情况下使用单透镜可改善高斯光束的方向性呢？显然，只有令 $w'_0 > w_0$，才有 $\theta' < \theta$。图 8-3-1 告诉我们，为使 $w'_0 > w_0$ 且取极大值，须有两个条件：首先 $l = F$，其次 $F > f$。只要将物高斯光束的腰放在透镜后焦面上，并使用焦距 F 大于物光束 f 参数的透镜。这提示我们，一方面用 F 尽量大的透镜；另一方面，为减少物光束 f 参数，可先用一个小焦距透镜对高斯光束进行聚焦，减小它的腰斑，从而也就减小了 f。这种用一个大 F、一个小 F 的两个透镜组合起来的系统，实际上是一个倒望远镜系统，如图 8-3-4 所示。L_1 为短焦距透镜，焦距为 F_1，L_2 为长焦距透镜，焦距为 F_2。设入射光束为腰斑 w_0、焦参数 f、发散角 θ，经 L_1 聚焦后，三个参数分别变为 w'_0、f'、θ'。

图 8-3-5　激光束的扩束与准直

经 L_2 后变为 w''_0、f''、θ''。其中 w'_0 的位置恰好是 L_2 的后焦面，而是否为 L_1 的前焦面，要视 w_0 的位置。不过正如下边所分析的那样，不管 w_0 的位置属两种情况中的哪一种，w'_0 基本上也在 L_1 的前焦面附近。因此，图 8-3-4 中两个透镜之间的距离基本上等于两镜焦距之和。按照前边讲的聚焦方法，既可以将 w_0 放在远离 L_1 的地方，即 $l \gg F_1$。也可以将 w_0 放在 L_1 表面处，即 $l = 0$。下边我们分别就这两种情况来讨论整个系统的准直倍率。

（一）$l \gg F_1$

由（8-3-5）式和（8-3-6）式，当 $l \gg F_1$ 时，有：

$$l' = F_1 \tag{8-3-16}$$

$$w_0' = \frac{F_1}{\sqrt{l^2 + f^2}} w_0 \tag{8-3-17}$$

l 为 w_0' 到 L_1 的距离。这说明 L_1 前焦面与 L_2 后焦面重合。如果用 l 表示 w_0' 到 L_2 的距离，则由 $l'' = F_2$，按（8-3-6）式可有：

$$w_0'' = \frac{F_2}{f} w_0' = \frac{F_2 \lambda}{\pi w_0'} \tag{8-3-18}$$

将（8-3-17）式代入（8-3-18）式，可得：

$$w_0'' = \frac{F_2 \lambda \sqrt{l^2 + f^2}}{\pi F_1 w_0} = \frac{F_2 \sqrt{l^2 + f^2}}{F_1 f} w_0 \tag{8-3-19}$$

我们定义准直倍率为：

$$M = \frac{\theta}{\theta''} = \frac{w_0''}{w_0} \tag{8-3-20}$$

将（8-3-19）式代入（8-3-20）中，有：

$$M = \frac{F_2}{F_1} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{f}\right)^2} \tag{8-3-21}$$

（二）$l = 0$

由（8-3-6）式和（8-3-5）式，可得：

$$l' = \frac{f^2}{F_1^2 + f^2} F_1 \tag{8-3-22}$$

$$w_0' = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_1}\right)^2}} \tag{8-3-23}$$

因 L_1 为短焦矩透镜，一般可满足 $F_1 \ll f$，由(8-3-22)式知 $l \doteq F_1$。l 为 w_0' 到 L_1 的距离，故仍然使 L_1 前焦面与 L_2 后焦面重合。同理：

$$w_0'' = \frac{F_2\lambda}{\pi w_0'} = \frac{F_2\lambda\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_1}\right)^2}}{\pi w_0}$$

$$= \frac{F_2\sqrt{1+\left(\frac{f}{F_1}\right)^2}}{f} w_0 \qquad (8\text{-}3\text{-}24)$$

将 (8-3-24) 式代入 (8-3-20) 式，有：

$$M = \frac{F_2}{F_1}\sqrt{1+\left(\frac{F_1}{f}\right)^2} \qquad (8\text{-}3\text{-}25)$$

在 $F_1 \ll f$ 的情况下，(8-3-25) 式近似为：

$$M = \frac{F_2}{F_1} \qquad (8\text{-}3\text{-}26)$$

比较一下 (8-3-21) 式和 (8-3-26) 式后可知，$l \approx F_1$ 情况下的准直倍率要大于 $l = 0$ 情况下的准直倍率。

§ 8.4　高斯模的匹配

在实践中常常遇到这样一个问题，如何将一个稳定腔所产生的高斯光束与另一个稳定腔的高斯光束相匹配。它的重要性在于，当某稳定腔发生的单模高斯光束注入到另一个稳定腔中时，如果两腔的模式是匹配的，则它在第二个腔中只激发同样的模式。如果两个腔的模式不匹配，则它会与第二个腔中的各不同模式相耦合，从而产生模式的交叉激发，这在很多情况下是不希望的。设

w_0 与 w_0' 分别为两个不同结构的高斯光束的腰斑半径，f 与 f' 分别为两光束的焦参数。为使这两个高斯模匹配，须在适当位置上插入一个适当焦距 F 的薄透镜，让这两束高斯光束互为物像共轭光束。高斯模的匹配问题有两种不同的情况，匹配方法也有不同之处，现分别叙述如下。

一、两个高斯模的位置不确定

若两个稳定球面腔的位置可自由调整，也就是与之相应的两个高斯模位置不固定，这时的模匹配自由度较大，透镜焦距的选择有很大的余地。

由（8-3-5）式可得:

$$l' - F = \frac{(l - F)F^2}{(l - F)^2 + f^2} \tag{8-4-1}$$

将（8-3-4）式与（8-4-1）式相比较，可得:

$$\frac{l' - F}{l - F} = \frac{f'}{f} \tag{8-4-2}$$

另外，由（8-3-4）式还可写出:

$$(l - F)^2 = \frac{F^2 f}{f'} - f^2 \tag{8-4-3}$$

由（8-4-2）式与（8-4-3）式可推出关系式:

$$(l - F)(l' - F) = F^2 - ff' \tag{8-4-4}$$

把 $l - F$、$l' - F$ 视为两个未知数，联立（8-4-2）式与（8-4-4）式可解出:

$$l - F = \pm \sqrt{F^2 - ff'}\sqrt{\frac{f}{f'}},$$

$$l' - F = \pm\sqrt{F^2 - ff'}\sqrt{\frac{f}{f'}} \tag{8-4-5}$$

上边这两个公式中的正负号应保持一致。设:

$$f_0 = \sqrt{ff'} = \frac{\pi w_0 w_0'}{\lambda} \tag{8-4-6}$$

再将 w_0 与 w_0' 代替 f 与 f'，(8-4-5) 式便可改写为:

$$\begin{aligned} l &= F \pm \frac{w_0}{w_0'}\sqrt{F^2 - f_0^2} \\ l' &= F \pm \frac{w_0'}{w_0}\sqrt{F^2 - f_0^2} \end{aligned} \tag{8-4-7}$$

当 w_0 与 w_0' 给定时, 为了确定 l 与 l 的值, 还必须给定 F 的值。由 (8-4-7) 式可见, F 值选定只须满足

$$F > f_0 \tag{8-4-8}$$

即可, 选定了 F, 由 (8-4-7) 式可计算出两组不同的 l 与 l 值。l 与 l 的值决定了两个高斯模的腰分别到透镜的距离。

二、两个高斯模位置的确定

如果两个稳定腔的位置由于某些条件的限制必须固定, 这时两高斯模的腰之间的距离便是一个常数, 此约束条件可写为:

$$l + l' = l_0 \tag{8-4-9}$$

在这种情况下, 透镜的焦距就不能随意选取。首先我们先来确定 F 的大小。将 (8-4-7) 的两式相加, 再利用 (8-4-9) 式可得:

$$2F \pm \sqrt{F^2 - f_0^2}A = l_0 \tag{8-4-10}$$

其中 A 定义为:

$$A=\frac{w_0}{w_0'}+\frac{w_0'}{w_0} \tag{8-4-11}$$

将 (8-4-10) 式两边平方，并做些简单整理后有:

$$(4-A^2)F^2-4l_0F+(l_0^2+A^2f_0^2)=0 \tag{8-4-12}$$

这是关于 F 的一元二次方程，只要注意到

$$A=\frac{w_0}{w_0'}+\frac{w_0'}{w_0}>2 \tag{8-4-13}$$

不难证明 (8-4-12) 式的判别式总大于零。即只要给定 l_0，总可解出 F。另外，由 (8-4-12) 式还可知，F 的二个根一个为正，一个为负。F 取负无意义，所以只能得到一个 F 的值，即:

$$F=\frac{A\sqrt{(A^2-4)f_0^2+l_0^2}-2l_0}{A^2-4} \tag{8-4-14}$$

求出 F 以后，再由 (8-4-7) 式分别求出 l 与 l′。从 (8-4-10) 式可以看出，求出的 F 如果比$\frac{l_0}{2}$小，计算 l 与 l 时的 (8-4-7) 式中应取正号。反之，F 大于$\frac{l_0}{2}$的话应取负号。

习　题　八

(1) 某激光器 ($\lambda=0.9\,\mu m$) 采用平凹腔，腔长 L=1m，凹面镜曲率半径 R=2m。求:

①它产生的基模高斯光束的腰斑半径及腰斑位置。

②它产生的基模高斯光束的焦参数。

③它产生的基模高斯光束的远场发散角。

(2) 某高斯光束的腰斑半径 $w_0=1.14$mm，光波长 $\lambda=10.6\,\mu m$。求与腰斑相距 z=30cm 处的光斑半径及等相位面曲率半径。

(3) 某高斯光束的腰斑半径为 $w_0=0.3$mm，光波长 $\lambda=$

0.6328 μm。求腰处、与腰相距 30cm 处的 q 参数。

(4) 某高斯光束的腰斑半径为 w_0 = 1.2mm, 光波长 λ= 10.6 μm, 今用焦距 F = 2cm 的透镜对它进行聚焦。设光腰到透镜的距离分别为 10m 及 0m 时, 求聚焦后的腰斑半径及其位置。

图 8-5-1

(5) 两支 He-Ne 激光器都采用平凹腔, 它们的尺寸以及相对位置如图 8-5-1 所示。问在何处插入一个焦距为多大的透镜, 可使这二个激光器所激发的高斯模之间实现匹配?

(6) 激光器采用腔长为 L 的半共焦腔, 凹面镜为输出镜, 光波长为 λ, 现在距离输出镜为 L 的地方放置一个焦距 F = L 的透镜。试用 q 参数求出经透镜变换后的高斯光束腰斑半径与腰位置。(见图 8-5-2)

图 8-5-2

(7) 用两个凹面镜构成双凹谐振腔, 两镜半径分别为 R_1 = 1m, R_2 = 2m, 腔长 L = 0.5m。求如何选择高斯光束的腰斑半径及

腰位置，才可使之成为此腔中的自再现光束？（设光波长 $\lambda = 10.6\ \mu m$）

第九章　调 Q 技术

普通的一台脉冲激光器，光脉冲的宽度约在 ms 级，峰值功率也只有几十 kW。为了适应激光的某些应用，进一步压缩脉宽和提高功率成为迫切需要解决的问题。为此，在激光被发现不久后的 1961 年，就有人提出了调 Q 的概念。并于 1962 年制成了第一台调 Q 激光器。它的出现，使激光脉冲输出性能得到了几个数量级的改善。

如今的调 Q 激光器，脉冲宽度可以压缩到 ns 秒级，峰值功率已到 MW。这对于激光测距、激光雷达、激光加工和动态全息照像等应用方面的发展起到了决定性作用。同时，还因强光所引起的光学现象而开辟了一系列的新学科。

本章将对调 Q 技术的基本原理和基本装置作一介绍。

§ 9.1　概　　述

一、脉冲激光器的尖峰振荡效应

不加任何特殊装置的固体脉冲激光器，在一次输出中，激光脉冲的宽度大约是 ms 的数量级。经过仔细的观察和分析会发现，这个脉冲并不是平滑的，而是包含着很多宽度更窄的短脉冲序列，其中每一个短脉冲宽度只在 μs 量级，而且随着激励的增强短脉冲的时间间隔越小。这种现象被人称做弛豫振荡效应或尖峰振荡效应。在图 9-1-1 就是这种输出的示意图。

这种尖峰振荡效应可以做如下的定性解释：一个短脉冲的形

图 9-1-1　弛豫（尖峰）振荡效应示意图

成和消失，可以由激光系统反转粒子数密度的增减变化来解释。造成系统反转粒子数密度增加的因素是光泵的激励，其增加速率在一个短脉冲的长消过程中可以看成是不变的。使反转粒子数密度减少的因素是受激辐射，其减少速率则因腔内光子数密度的多少而变化。从图 9-1-2 我们可以看到，一个短脉冲的生成过程可以分成四个阶段。

图 9-1-2

第一阶段为 $t_1 \sim t_2$。起始时，光泵激励使反转粒子数密度 Δn 增加。在 $t = t_1$ 时，受激辐射尚未开始，所以 Δn 的增长速率占优

势。当 Δn 达到阈值时（$\Delta n = \Delta n_t$），开始产生激光，激光器内光子数密度 ϕ 急剧增加。由于是受激辐射，所以 Δn 的减少速率也逐渐变大。但应注意，只要光泵造成的增加速率还大于受激辐射造成的减少速率时，Δn 仍然在增加，直到 $t = t_2$ 时二速率相等，Δn 达到了极值。

第二阶段为 $t_2 \sim t_3$。在 t_2 以后，此阶段 $\Delta n > \Delta n_t$ 仍成立。所以激光继续产生，腔内光子数密度 ϕ 仍急剧增加，受激辐射造成的 Δn 减少速率也继续变大，于是就超过了光泵激励造成的增加速率，这时 Δn 开始减小。到 t_3 时又回到阈值（$\Delta n = \Delta n_t$）。

第三阶段为 $t_3 \sim t_4$。时间过 t_3 之后，又有 $\Delta n < \Delta n_t$ 成立。但 Δn 仍大于零，受激辐射并未停止。这样就造成两种后果：一是此时 $\Delta n < \Delta n_t$，即增益小于损耗，腔内光子数密度必急剧减少；二是由于受激辐射的存在，Δn 将继续减少。此两者综合结果是 Δn 的减少速率逐渐变小了。等到 $t = t_4$ 时，Δn 的减少速率又等于光泵激励所造成的增加速率。

第四阶段为 $t_4 \sim t_5$。时间经 t_4 之后，Δn 的增加速率又占了优势。到 t_5 时，Δn 又达到阈值 Δn_t 之后，第二个尖脉冲又得以重复。在整个光泵激励时间内，这种过程要多次反复发生，这就形成了一连串的尖峰结构。且光泵功率越大，尖峰形成就越快，尖峰的时间间隔就越小。

二、尖峰振荡效应的几个特点

由上述的尖峰结构可见，脉冲激光输出具有如下几个特点：

(1) Δn 总在 Δn_t 附近振荡变化，Δn 的总水平不高，因此，增益也就达不到较高的值，总输出水平不会太高。

(2) 在光泵灯闪光的整个时间宽度中，激光出现的时间较早，结束较晚，也就是指整个激光脉冲宽度很宽。

(3) 激光脉冲不够平滑。

为了改善这些不足之处，以得到高峰值功率、窄脉宽的激光输出，调 Q 技术就是一个重要手段。

§ 9.2 调 Q 激光器的速率方程

为了描述调 Q 脉冲的形成和分析各个参量对脉冲输出的影响，可以借助于速率方程理论。在讨论过程中需要作一些简化，不同的作者对简化的程度和简化的次序都略有不同，因此在理论的表达过程中模型、公式的形状也不尽相同，不过最后的结果都是一样的。在这里我们将选择一种较为简洁的论述方式。

为了方便起见，先将本节所用的符号介绍如下。

L：谐振腔长，且假定它就等于增益介质的长度。

n：增益介质的折射率。

G：增益系数，且令 G_t 表示阈值增益系数。

r：谐振腔反射镜的反射率，并假设腔的两端反射率相等，即 $r_1 = r_2 = r$。

τ：无源谐振腔中光子的寿命。由第一章§ 1.7 中知道，它等于 $\frac{L'}{c(1-r)}$。

ϕ 腔内光子数密度。

Φ：腔内总光子数。若令 V 为腔内增益介质的体积，则 $\Phi = \phi V$。另外，我们令 Φ_i 代表脉冲开始时腔内总光子数，Φ_f 为脉冲结束时腔内总光子数。

n_2：激光上能级粒子数密度。

n_1：激光下能级粒子数密度。

ΔN：总反转粒子数。显然 $\Delta N = (n_2 - n_1) V$。并令 Δn_i 和 Δn_f 分别代表脉冲起始和结束时之 ΔN 值。

n_t：反转粒子数的阈值。

若在增益介质中不考虑自发辐射[1]，仅由受激过程光子数密度随距离的增长率为:

$$\frac{d\phi}{dz} = \phi G$$

光子数密度随时间的增长率为:

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_1 = \frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \phi G \frac{c}{n}$$

式中: c/n——介质中的光速。

由于衰减，光子数密度的变化率为:

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_2 = -\frac{\phi}{\tau}$$

因此，光子数密度的总变化率为:

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi\left(G\frac{c}{n} - \frac{1}{\tau}\right)$$

总光子数的变化率为:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi\left(G\frac{c}{n} - \frac{1}{\tau}\right) \quad (9\text{-}2\text{-}1)$$

在阈值的情形下，$\frac{d\Phi}{dt} = 0$，此时:

$$0 = \frac{d\Phi}{dt} = \Phi\left(G_t\frac{c}{n} - \frac{1}{\tau}\right)$$

于是可得:

$$G_t = \frac{n}{c\tau}$$

---

[1] 对红宝石激光器，受激跃迁几率为 $3.5\times 10^{9}s^{-1}$，而射到光轴上小立体角内的自发辐射几率仅为 $2\times 10^{-5}s^{-1}$。(见: 兰信距: 激光技术)

定义一个新的时标，令

$$\tau = \frac{t}{\tau_c}$$

则

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Phi\left(\frac{\tau_c G c}{n} - 1\right) = \Phi\left(\frac{G}{G_t} - 1\right) \qquad (9\text{-}2\text{-}2)$$

增益系数 G 和反转粒子数密度是成正比的。因此，$\frac{G}{G_t} = \frac{\Delta N}{\Delta n_t}$，代入上式有:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi\left(\frac{\Delta N}{\Delta n_t} - 1\right) \qquad (9\text{-}2\text{-}3)$$

将上式写成

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \Phi\frac{\Delta N}{\Delta n_t} - \Phi \Big/ 1$$

可以看到，$\Phi\frac{\Delta N}{\Delta n_t}$的意义相当于在以 τ 为单位的单位时间内（τ= 1）受激过程所产生的光子数。我们记做:

$$\left.\frac{d\Phi}{d\tau}\right|_1 = \Phi\frac{\Delta N}{\Delta n_t}$$

对于一个三能级系统，产生一个光子的过程（$\Delta\Phi$= 1）相当于上能级粒子减少一个，而下能级粒子增加一个。故有:

$$\Delta N = (\Delta n_2 - \Delta n_1)V = -2$$

即

$$\Delta N = -2\Delta\Phi$$

故

$$\frac{d(\Delta N)}{d\tau} = 2\left.\frac{d\Phi}{d\tau}\right|_1 = -2\Phi\frac{\Delta N}{\Delta n_t} \qquad (9\text{-}2\text{-}4)$$

将（9-2-3）式和（9-2-4）式联立:

$$\frac{d\Phi}{d\tau}=\Phi\left(\frac{\Delta N}{\Delta n_t}-1\right)$$

$$\frac{d(\Delta N)}{d\tau}=-2\Phi\frac{\Delta N}{\Delta n_t}$$

即是在我们作如上简化下的调 Q 激光器的速率方程。

下面我们由它们出发，看一看激光脉冲的特性。

由（9-2-3）式和（9-2-4）式得:

$$\frac{d\Phi}{d(\Delta N)}=\frac{\Delta n_t}{2\Delta N}-\frac{1}{2}$$

将此式积分有:

$$\Phi-\Phi_i=\frac{1}{2}\Delta n_t\ln\frac{\Delta N}{\Delta n_i}-(\Delta N-\Delta n_i)$$

设脉冲开始时腔内光子数 $\Phi_i=0$，则:

$$\Phi=\frac{1}{2}\Delta n_t\ln\frac{\Delta N}{\Delta n_i}-(\Delta N-\Delta n_i) \qquad (9\text{-}2\text{-}5)$$

当 $t\gg\tau$ 时，$\Phi=\Phi_f=0$，即:

$$0=\Phi_f=\frac{1}{2}\Delta n_t\ln\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i}-(\Delta n_f-\Delta n_i)$$

解出

$$\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i}=\exp\frac{\Delta n_i-\Delta n_f}{\Delta n_t} \qquad (9\text{-}2\text{-}6)$$

如果令

$$X=\frac{\Delta n_f}{\Delta n_t},\ a=\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t}$$

则方程（9-2-6）有 $\frac{x}{a}=\exp(x-a)$ 的形式。将此隐函数图解，让 $\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t}$ 为纵坐标，$\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i}$ 为横坐标，得到图 9-2-1。当起始的反转粒子数 Δn_i 超过阈值 Δn_t 越多时，$\frac{\Delta n_f}{\Delta n_i}$ 就越接近于零，即能量利用率越高。

这就说明了为什么在调 Q 激光器中, 要尽量先将 Δn_i“憋”得很高, 然后突然降低 Δn_t, 使脉冲开始时有较大的$\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t}$。

激光输出功率可以用下式表示:

$$P = \frac{\Phi}{\tau} \cdot h\nu = \frac{h\nu}{2\tau} \cdot \left[\Delta n_t \ln\frac{\Delta N}{\Delta n_i} - (\Delta N - \Delta n_i)\right] \qquad (9\text{-}2\text{-}7)$$

将上式求极值, 即$\frac{P}{(\Delta N)} = 0$时, 得到当 $\Delta N = \Delta n_t$ 时, 输出功率 P 达到极大值 P_{max}。此时有:

$$P_{max} = \frac{h\nu}{2\tau}\left[\Delta n_t \ln\frac{\Delta n_t}{\Delta n_i} - (\Delta n_t - \Delta n_i)\right] \qquad (9\text{-}2\text{-}8)$$

考虑到初始时反转粒子数密度 Δn_i 比阈值 Δn_t 高很多, 则 (9-2-8) 式变成:

$$P_{max} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\Delta n_i h\nu}{\tau} \qquad (9\text{-}2\text{-}9)$$

将 $\Delta n_i \gg \Delta n_t$, $\Delta N = \Delta n_t$ 代入 (9-2-5) 式中, 得到输出功率达到峰值时腔内的光子数 Φ_{max}为:

$$\Phi_{max} \approx \frac{1}{2}(\Delta n_i - \Delta n_t) \approx \frac{1}{2}\Delta n_i$$

图 9-2-2 给出了反转粒子数密度 Δn 和光子数密度 ϕ随时间的变化曲线。

在脉冲开始时 (t= 0), 腔内光子数密度 $\phi= 0$, 反转粒子数密度 $\Delta n = \Delta n_i$。随着脉冲的发展, Δn 逐渐下降。当 $\Delta n = \Delta n_t$ 时, 光子数密度 ϕ达到极大

图 9-2-1

值，相当于输出功率达到峰值。随后，腔内的损耗大于增益。因而腔内的光子数开始下降，Δn 也同时下降。待脉冲终止时，光子数趋于零，而 Δn 趋向于 Δn_f 。

图 9-2-3 是几种不同情况下的光脉冲波形的计算值。由图可见，当$\frac{\Delta n_i}{\Delta n_t}$增大时，脉冲的上升时间逐渐缩短，而脉冲下降时间基本上保持为 τ 值。

在上面的分析中，我们假定了增益介质为三能级系统，由此建立了关系式(9-2-4)。对于四能级系统的 YAG 或钕玻璃激光器，也可以作这种简化，这是因为调 Q 的激光脉冲宽度很窄，激光物质下能级的寿命可以和脉冲时间相比拟。在脉冲发生的过程中，从激光物质上能级跳到下能级的粒子不能立即自下能级消失，因此下能级不能再被认为是空的。也就是说，在调 Q 激光器中四能级的特点不再显著，和三能级系统比较接近，所以上述所有的分析对它们也都是适用的。

不过，上面的论述还是因为有这些简化而显得粗糙。例如，我们认为 Q 值是突变的；我们又忽略了 Q 开关打开前因自发辐射而造成的初始光子数 Φ；我们也忽略了 Q 开关打开后，光泵继续抽运的作用。如果要求更精确的图象，则需要将具体条件代入严格的速率方程中，再求方程的数值解。

§ 9.3 转镜调 Q 技术

在激光谐振腔中，谐振腔两端反射镜的平行度直接影响着腔的 Q 值。转镜调 Q 技术就是利用改变反射镜的平行度来达到此项目的。它是一种比较简易的调 Q 方法。

图 9-2-2

图 9-2-3

一、转镜调 Q 装置

图 9-3-1 是转镜调 Q 激光器的示意图。它是在脉冲激光器的

图 9-3-1　转镜调 Q 激光器示意图

基础上，用一个被高速马达带动旋转的全反镜代替原来的固定全反镜而构成的。这个全反镜通常多采用直角棱镜，将它装在马达的转子上。由于全反镜绕垂直于谐振腔的轴线作周而复始的旋转，所以就构成一个 Q 值作周期变化的谐振腔。如转镜处于图 9-3-1 (b) 中虚线所示的位置时，腔的 Q 值很低，不能形成激光振荡。因此在此后的一段时间内，上能级的粒子数不断积累。待到棱镜逐渐转到接近与腔的轴绕垂直的位置时，(如图 9-3-1 (b) 中实线所示的位置) 腔的 Q 值升高，形成激光振荡，输出一个强的激光脉冲。

自氙灯点燃 (泵铺开始) 到转镜形成高 Q 值腔需要一段延迟时间。准确的控制延迟时间，对获得稳定的最大功率是十分重要的。由上节内容可知，自氙灯点燃后需要一定的延迟时间，以保证反转粒子数获得积累。延迟时间的长短不同，就影响到激光开始时的 Δn_i 值的不同。因此，过早或过迟的出现激光振荡都是不理想的。最佳的延迟时间可以通过实验来确定。

为了准确的控制延迟时间，必须设计一个同步装置。常用的装置如图 9-3-2 所示。

在棱镜架上装上一块磁钢，它和棱镜一起高速旋转，当磁钢转到与磁头相切时，磁头线圈中就产生一个感应脉冲信号，将该信号放大，用以控制氙灯的触发电路，点燃氙灯，磁头的位置可以调整。工作时要将它调至如下的位置上：即当棱镜面 ABCD 的法线方向与谐振腔的轴线方向间成 ϕ 角时，小磁钢正好通过磁头触发点燃氙灯。尖角 ϕ 称为延迟角，与其对应的便是延迟时间 t_1。若马达的转速为 n r/min，则必有如下的关系：

$$t_1 = \frac{60\phi}{2\pi n} \qquad (9\text{-}3\text{-}1)$$

式中各量的单位分别是：t_1 —— s；ϕ —— rad；n —— r/min。

延迟时间与工作物质上能级的粒子寿命、氙灯的放电波形以及谐振腔的结构都有关系。不同的工作物质，其最佳延迟时间相差很大。如红宝石的最佳延迟时间约 1.5ms；钕玻璃约为 250 μs；YAG 约为 120 μs。在实际工作中，可以从示波器上观测氙灯波形，估计氙灯放电达到极值时的时间 t_0，将延迟时间暂定在 t_0 的 1.5 倍左右，再由公式 (9-3-1) 确定延迟角 ϕ的值，随后把棱镜面的法线方向置于偏离轴线为 ϕ角的位置，同时把磁头放置在面对小磁钢的位置上并固紧，这样就可进行运转实验了，在实验过程中不断调整磁头的位置，直至获得最强的激光输出为止。

转镜调 Q 激光器的运转过程可由图 9-3-3 来表示。

由图可以看到：这种调 Q 方法的 Q 值变化不是严格突变的。也就是说 Q 值变化的曲线不够陡直。下面我们讨论一下这个问题。

由几何光学可知，当棱镜面法线和腔轴成 θ角时，引起光的单程损耗 δ_θ为：

图 9-3-2

图 9-3-3

$$\delta_\theta = \left(\frac{L\theta}{2d}\right)^{1/2}$$

式中: L —— **腔长**;

d —— **棒的直径**。

如果以 δ **表示其他因素造成的单程损耗**, G **为单程增益**, r **为部分反射镜的反射率**, **则阈值条件为**:

$$G' = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{r} + \delta_i + \delta_\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1}{r} + \delta_i + \left(\frac{L\theta}{2d}\right)^{1/2}。$$

解得阈值允许的偏离角 θ_s **为**:

$$\theta_s = \frac{2d}{L}\left(G' + \frac{1}{2}\ln r - \delta_i\right)^2。\qquad (9\text{-}3\text{-}2)$$

由此式可知，只要 $\theta < \theta_s$，就能形成激光振荡。通常称 θ_s 为开关角。并定义开关时间 t_s 为：

$$t_s = \frac{\theta_s}{\omega} \tag{9-3-3}$$

式中：ω——转镜的角速度。

由（9-3-2）、（9-3-3）两式可以看到，t_s 可随 G 的增大（也相当于随增益介质中反转粒子数密度 Δn_i 的增大）而增大。却随谐振腔腔长 L 的增加和马达的转速（角速度 ω）的增大而减小。

对小型钕玻璃调 Q 器件，常用马达的转速为 20000r/min～6000r/min，开关时间约为几百 ns，开关角约为几分。

二、加速装置

为了进一步压缩脉冲宽度，提高峰值功率，使 Q 突变的曲线更为陡直，就要尽量减小 t_s 值。由（9-3-3）式有：

$$t_s = \frac{\theta_s}{\omega}$$

为达此目的，最简单的途径是提高电机的转速，不过要使电机自 60000r/min 的转速再进一步提高，机械上的困难是很大的。另一种减小 t_s 的方法是采用适当的光学系统来增大光线的偏转角。这种装置因和提高电机转速等效，所以习惯上称为加速装置。下面仅举三例略加说明。

（一）折迭腔

图 9-3-4（a）即为折迭腔。介质膜由两部分合成，下半部为全反射膜，上半部为部分反射膜。光线经过增益介质后，由棱镜反射到介质膜上全反射部分返回后再经棱镜、再过介质，由部分反射端输出。

这样，光线在腔内走一个循环要通过棱镜两次。当棱镜面法线与腔轴线成 φ 角时，一个循环后光线偏角为 4φ 和直腔式偏转

角只是 2ϕ 相比，这就是说，在同样的电机转速下，它的开关角压缩了。或者说，开关时间相应的减小了。这也就等效于提高了电机的转速。同时，这种装置会使腔长增大一倍，也就进一步的压缩了开关角。

图 9-3-4　折迭腔

（二）棱镜加速

这种装置如图 9-3-5 所示。图中，M_1 为透反镜，旋转棱镜 M_2 的侧面装有一块固定的全反棱镜 M_3，其反射面法线与谐振腔轴线垂直。下面分析一下在这种装置中光线的几何关系。

图 9-3-5　棱镜加速装置示意图

当棱镜转过 ϕ 角时，入射光线 1 经转镜 M_2 反射成光线 2，以 2ϕ 角投到 M_3，被反射成光线 3，再经 M_3 反射成为光线 4。现在只须看光线 4 和光线 1 之间的夹角 α 和 ϕ 的关系。

在 ΔDBC 中，$BC \parallel$ 光轴，$DC \perp$ 光轴，且

$$\angle DBC = 90^\circ - 2\phi$$

$$\angle ABC = 45^\circ + \phi$$

所以 $$\angle\beta = \angle DBA = \angle DBC - \angle ABC$$
$$= 90° - 2\varphi - (45° + \varphi)$$
$$= 45° - 3\varphi$$

又 $$\angle\alpha = \angle ABC - \angle\beta = 45° + \varphi - (45° - 3\varphi) = 4\varphi$$

由此可以看到，其加速原理和折迭腔是一样的，只是它的腔长并不增加一倍。

(三) 四次加速装置

如果将上面两种装置结合起来 (示意图如图 9-3-6)，就是四次加速装置。在这个装置中，当棱镜 M_2 转动一个角 φ 时，出射光与入射光的夹角为 8φ 大于直腔式的夹角 2φ 的 4 倍，也即开关角压缩小了 4 倍，故有四次加速之称。

图 9-3-6　四次加速装置示意图

表 9-1 给出了相同条件下三种转镜调 Q 方式的实验数据。

表 9-1　三种转镜调 Q 方式实验数据

项目 / 装置	静态阈值(J) / 动态阈值(J)	单脉冲最大输入(J) / 相应输入(J)	单脉冲最大效率	脉冲上升时间(ns)	脉冲半宽度(ns)	峰值功率(MW)
直腔 L = 120mm	23.5/39	0.32/58	0.55%	22	24	13.3
二次加速腔 L = 120mm	26.0/54	0.59/78	0.76%	12	20	29.5
四次加速腔 L = 120mm	26.0/61	0.68/116	0.58%	8	12	56.6

图 9-3-7

三、单峰域和延迟时间

转镜调 Q 技术如果运用不当，还可能产生多脉冲。这是我们不希望看到的。下面我们分析一下产生的原因及克服它的方法。

(一) 电机转速较低

电机转速较低时激光输出可能出现多脉冲。试以红宝石激光器的一组计算值为例来说明多脉冲形成的原因。图 9-3-7 是对下列参数的红宝石激光器的计算结果。

红宝石棒长：10cm；

红宝石直径：10mm；

腔长：$L = 10cm$;

介质膜反射率：$r_1 = 1$；$r_2 = 0.7$;

转镜转速：5000r/min（$\theta = 9'$）。

图中 $\Delta n = \frac{n_2 - n_1}{n_0}$。式中 n_2、n_1 和 n_0 分别为上下能级及总的粒子数密度。Δn_t 为阈值时的 Δn 值。Φ为总光子数。$\phi = \frac{\Phi}{n_0}$是归一化的光子数。

由图上可以看到，在光泵作用下形成反转粒子数 Δn_i。当转镜到开关角 θ_s时，开始出现激光振荡（A 点）。开始时光子数密度较低，受激发射率也低，Δn 下降很慢，ϕ上升也很慢。当转镜继续转动，逐渐接近成腔位置时，静态阈值 Δn_t 不断下降，ϕ上升加快，Δn 下降也加快。到某一时刻 $\Delta n = \Delta n_t$ 时，ϕ（对应输出功率）达到极大，形成第一个尖峰（B 点）。然后 ϕ下降，Δn 也继续下降。由于 ϕ的逐渐减小使受激发射相应减小，到一定程度时 Δn 不再变化。但转镜还在不断靠近与腔轴垂直的位置，静态阈值 Δn_t 继续下降。到 c 点后，Δn 又大于了 Δn_t。待过 c 点后，Δn_t 继续下降，又开始形成激光振荡，出现了第二个激光脉冲。这个现象和未使用调 Q 脉冲激光所出现的现象类似，关键就在于转镜的转速不够。进一步的分析可知，当 $\Delta n_i \gg \Delta n_t$ 时，由于转镜转速不够，会造成多脉冲的输出且 $\Delta n_i / \Delta n_t$ 越高脉冲数目就越多。对于一定的转速，对应有一个 $\Delta n_i'$ 值。当 $\Delta n_i > \Delta n_i'$时，就会出现多脉冲。$\Delta n_i'$随转速的增加而变大，通常称之为单峰域。据前节可知，输出功率的峰值正比于 Δn_i，所以转速越高，单脉冲的峰值功率也就可以越高。

另外，当转速和其他条件一定时，临界角越大也就越易出现多脉冲。由式（9-3-2）

$$\theta = \frac{2d}{L}(G' + \frac{1}{2}\ln r - \delta)^2$$

可知，上句话的意思也就是说，静态阈值越低的激光棒就越易出现多脉冲。

(二) 电机转速太高

当电机转速太高时，又会出现影响脉冲输出功率的问题。倘若转速太高，当激光发展到峰值时，转镜已经越过了与腔轴垂直的位置，此时腔的损耗变大，系统的效率下降。因此，输出功率也就下降了，脉冲宽度也变宽了，而且激光束将偏离棒轴的方向。

为了得到高峰值功率的单脉冲输出，就要控制在转镜达到成腔位置时恰使激光强度达到峰值。通常，在转镜速度不变的条件下可控制延迟时间，(即自光泵点燃时起，到转镜形成腔位置时止的时间间隔) 若未达到上述目的，也可通过改变腔长等其他途径，这里面，过多的技术细节就不再详述了。

§ 9.4 电光调 Q 和声光调 Q

由前面的分析知道，调 Q 的装置主要是在泵浦氙灯烛发点燃后，经过一段时间 t_1，突然地将 Q 值提高，即可达到获得高功率巨脉冲的目的。这段时间 t_1 至关重要。在转镜调 Q 技术中是利用电机转速和触发磁头的几何位置来确定的。除此，我们还可以利用某些晶体的电光效应或声光效应来起到这种延时作用。这一节就叙述它们的工作原理。

一、晶体电光调 Q 原理

所谓电光效应，就是说，对于某些晶体经过特殊方向的切割后，如果在某个特定方向上外加电压，就可以使通过它的线偏振光改变振动方向。外加电压的数值和振动方向的改变之间有一定的函数关系。关于电光效应的详细内容将在其他的课程中，如晶

体光学或光电子学等来作深入的探讨，此处我们只利用电光效应的结果。也就是我们利用具有电光效应的晶体，再配备其他光学元件，使之构成一个快速的光学开关，从而完成调 Q 的目的。

首先看一看电光调 Q 的工作原理。如图 9-4-1 所示，电光调 Q 激光器，就是在脉冲激光器的谐振腔内，加入一组由起偏器、电光晶体和检偏器所构成的电光开关。

工作物质（如 YAG）在氙灯的激励下产生无规则的偏振光，通过起偏器后，变成线偏振光。在其后放置一个电光晶体，并加一个适当电压（通常称之为半波电压，其值因晶体而异）$U_{\lambda/2}$。由于这块电光晶体的作用，使原来进入它的线偏振光通过之后，振动方向旋转 90°。由物理光学的知识可知，此时的电光晶体相当于是一个 1/2 波片。因此，在振动方向转了 90°的线偏振光就不再能够通过随后放置的检偏器了，（设检偏器的偏振轴和起偏器的偏振轴平行）这一状态相当于光开关处于关闭状态，故此时腔的 Q 值很低。如果瞬间退除电光晶体上的电压，则偏振光的振动方向不再被旋转而能通过检偏器，这相当于光开关被打开，使 Q 值突然加大。利用电路特性来控制氙灯的触发和电光开关动作，将很容易控制两者间的时间差。这样就可达到调 Q 而产生巨脉冲的目的。这就是电光调 Q 的基本工作过程。

实际工作的电光调 Q 装置是五花八门的。不同设计的目的，无非是设法减少元件的数目和改善工作的条件。我们在这里仅介绍一种发展较早、应用较广的装置。至于其他的类型，读者可由

图 9-4-1　电光调 Q 激光器

更专门的书籍或文献中找到。

图 9-4-2 是一个带起偏器的电光调 Q 开关装置原理图。工作

图 9-4-2　只有一个起偏器的电光调 Q 装置

物质选用 YAG 晶体，起偏器采用方解石空气隙棱镜（格兰一付克棱镜）；用 KD*P（磷酸二氯钾）晶体作电光调制晶体。这种装置的调 Q 作用过程和前面讲的无大的区别。其不同处在于电光晶体上只加了 1/4 波长的电压，使其起到一个 1/4 波片的作用，因为线偏振光要两次通过电光晶体，故而来向光线和反向光线还是在振动方向上差 90°，也就是说反向光线不能再次通过格兰棱镜。这样一来，一个格兰棱镜同时起到起偏和检偏的作用。它有利于减少由于光学元件过多而引起的损耗，同时也易于加工和调整。

还应指出，有些激光棒（如 90°生长的红宝石）所产生的激光就是线偏振的，本身就具有起偏和检偏的作用。用它制作电光调 Q 激光器还可以省略格兰棱镜，这对于调整是更方便的。

二、声光调 Q 技术

声光调 Q 技术是利用这样一种原理：当光通过介质中的超声场时，由于衍射就造成光的偏折，如果这个装置放在激光器腔内，就会增加损耗改变腔的 Q 值。这种方法具有重复频率高和输出稳

定等优点，目前，多用于获得中等功率的高重复频率的脉冲激光器中。

关于超声场衍射光波的理论，我们仍然留待后继的其他课程讲解。此处我们只利用它的一些结论，说明如何起到改变激光器腔的 Q 值的作用即可以了。

设有一波长为 λ_s 的超声波在均匀介质内沿 y 向传播，如图 9-4-3 所示，超声波引起介质的密度变化，从而导致介质对光的折射率的变化。在一级近似下，可认为折射率与密度成正比，因而折射率的改变量 $\Delta n(y, t)$ 可以写成

$$\Delta n(y,t) = \Delta n_0 \sin(\omega_s t - \frac{2\pi y}{\lambda_s})$$

式中　ω_s 和 λ_s——分别为超声波的圆频率和波长;

Δn_0——折射率改变量的幅度。

由此我们可以看出：这个有超声波传播的介质相当于一个位相型正弦光栅，光栅常数就是超声波的波长 λ_s。如果声波频率较高，声光作用的长度较大，当光波以与声波面一定的角度斜入射时，光波在介质中要穿过多个声波面，也就是此时介质相当于一个体光栅，光通过它时只出现零级和一级衍射，称为布拉格衍射。下面简单讨论一下布拉格衍射的性质。

如图 9-4-4 所示，声波沿 y 轴传播，现有一个平面光波与 y 轴成一定的角度入射。我们将声波通过的介质近似看作一系列相距为 λ_s 的部分反射镜面，入射光线和这些面的夹角为 θ。现在考虑假若在 θ 方向上有极大衍射，那么对于这个方向必须满足如下的条件。

图 9-4-3

第一，同一镜面上所有点的衍射

波在该方向上应有相同的位相。在图 9-4-4 (a) 中，为满足这一条件，CB 两点就应当有光程差 AC—BD，且是光波波长的整数倍。由图上可看到，即有:

$$x(\cos\theta_i - \cos\theta_r) = m\lambda \qquad (9\text{-}4\text{-}1)$$

其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，此式既然应对所有的 x 都成立，所以只有

$$\theta_i = \theta_r \qquad (9\text{-}4\text{-}2)$$

第二个条件则是，在此方向上，从各个镜面衍射的光波之间也要有相同的位相。在图 9-4-4(b) 中可以看到这一点应当是:

图 9-4-4　布拉格衍射

$$AO + OB = \lambda$$

也即

$$2\lambda_s \sin\theta = \lambda \qquad (9\text{-}4\text{-}3)$$

式中 $\theta_i = \theta_r = \theta$，式 (9-4-2) 和 (9-4-3)，尤其是 (9-4-3) 式，通常被称作为布拉格条件。

如果有一个用熔融石英介质做成的声光器件，超声频率为 40MHz，这相当于超声波长 $\lambda_s = 1.49 \times 10^{-2}$cm。当 $\lambda_0 = 1.06\ \mu m$ 的光波入射时，由布拉格条件可以算出:

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\frac{\lambda}{n}}{2\lambda_s} = 0.14°$$

由于 $\theta=\theta$，那么衍射光对于入射光的偏离角等于 $2\theta = 0.28°$。这个数值虽然不大，但如果存在于激光器的谐振腔内，也就足够改变腔的 Q 值了。

图 9-4-5 是一个声光调 Q 的 YAG 激光器的示意图。腔内插入的声光调 Q 器件，主要是由声光互作用介质（如熔融石英）和键合于其上的换能器所构成的。所谓换能器，它是一片按特定方向切割的压电晶体，如石英、铌酸锂等。用一个高频振荡电源来驱动，这片压电晶体就会产生相应的机械振动，从而产生超声波，并耦合到声光介质中去。为了避免介质的另一端端面对声波的反射干扰，在这一端经常要加一块吸声材料，如铅等，也可将这一端磨出一个角度，使反射波反射到无碍的方向上去。

声光器件在腔内按布拉格条件放置。当加上超声波时，光束按布拉格条件决定的方向偏折，从而偏离了谐振腔的轴向。此时腔的损耗严重，Q 值很低，不能形成激光振荡。在这一阶段，增益介质在光泵激励下，亚稳态上的粒子数大量积累。一定时间后，撤去超声场，光束顺利地通过均匀的声光介质，不发生偏折，亦即是腔的 Q 值升高，从而得到一个强的激光脉冲输出。自光泵启动，到 Q 值发生突变的这段所谓延迟时间可以利用电路特性来实现。

图 9-4-5

另外，如用一定的频率为 f 调制射频电源，使声光介质中有重复频率为 f 的超声场，则可获得重复频率为 f 的调 Q 激光脉冲。

电光调 Q、声光调 Q 与转镜调 Q 相比，因无机械装置，所以有利于调整和使用。电光开关与声光开关相比，前者电压较高 (10^3V～10^4V)，后者电压较低 (10^2V)，所以声光调 Q 是应用较广泛的一种技术。

§ 9.5 染料调 Q 技术

不论是转镜、电光或声光调 Q 技术，Q 开关开启的延迟时间都是可控的，因此，习惯上通称这一类技术为主动调 Q。还有另一种调 Q 技术，它是利用某种材料 (通常是用有机染料) 对光的吸收系数会随光强变化的特性来达到调 Q 的目的。由于这种方式中 Q 开关的延迟时间是由材料本身特性决定的，不直接受人控制，所以习惯上称之为被动调 Q 技术。

图 9-5-1 就是这种激光器的示意图。它是由一个通常的固体激光器在腔内插入一个染料盒构成的。染料盒内装有可饱和染料，这种染料有一很明显的特点，即它对该激光器振荡波长的光有强烈吸收作用，而且随入射光的增强吸收系数减小。它的吸收系数可以由下式表示:

图 9-5-1 被动调 Q 激光器示意图

$$\beta = \beta_0 \frac{1}{1+\frac{I}{I_s}} \tag{9-5-1}$$

式中 β——光强为 I 时的吸收系数;

β——光强趋于零时的吸收系数;

I_s——饱和参量，其值等于吸收系数减小到 $\beta/2$ 时的光强。

可以由式中看到：当 I 比 I_s 大很多时，β逐渐趋向于零，也就是染料对该波长的光变成透明的了。有人将这一现象称之为被漂白。装有染料的盒子插入脉冲激光器的腔内后，激光器开始泵浦，此时腔内光强还很弱，故而染料对该激光波长的光有强烈吸收，腔内损耗很大，Q 值很低，相当于 Q 开关没有开启的状态，不能形成激光。随着泵浦的继续，亚稳态上粒子数得以积累，腔内的光强也要增强，而染料也会逐渐被漂白。这一过程相当于腔内 Q 值逐渐升高。当漂白到一定程度，Q 值达到一定数值时，染料盒作为 Q 开关已处于开启状态，于是激光器就会给出一个强的激光脉冲。

选择染料要顾及以下几个方面:

(1) 染料吸收峰的中心波长应和激光器的激光波长，基本吻合。

(2) 染料应有适当的饱和光强，即 I_s 值要在合适的数值范围之内，目的是能够得到合适的“开关”速度。

(3) 染料溶液应具有一定的稳定性和保存期，以利于实用。

在下面给出的表 9-2 中列出了几个适用于不同激光器的染料和溶剂成分，以供参考。

表 9-2　调 Q 染料

激光工作物质	染　　料	溶　　剂
红宝石	隐花箐，金属钛箐，钒钛箐，氯铝钛箐，锆钛箐，叶绿素 D	丙酮，甲醇，氯苯，硝基笨
YAG 或钕玻璃	五甲川，十一甲川，蓝色素，BDN	丙酮，氯苯，二氯甲烷
CO_2	SF_6　BF_3	

近几年来又发展起一种 LiF：F_2^- 晶体（氟化锂 F_2^- 色心晶体），也可和染料一样被作为被动调 Q 材料。它也得到较为广泛的应用。

第十章　锁 模 技 术

调 Q 技术所获得的短脉冲，脉宽仅可达到 10^{-9}s 级。为了进一步得到更窄的激光脉冲，在 1964 年以后发展起一种所谓锁模技术。利用它，可以将脉冲宽度压缩到 10^{-13}s 量级，习惯上常被称之为“超短”脉冲。锁模技术是利用多纵模输出的激光束，经过特殊的调制，使其各个纵模之间有了确定的位相关系，使它们可以相互叠加。在叠加之后，窄脉冲就出现了。

由于锁模技术得到的脉冲很窄，进而它的峰值功率也很高。因此，它在许多研究领域中能发挥其独特的作用。诸如在受控核聚变、等离子体物理学、遥控技术、化学及物理动力学、生物学、光通讯、光雷达、光谱学及非线性光学等领域中，锁模技术超短脉冲的出现，使它们的研究有了一个别无代替的手段。

本章介绍锁模技术的基本原理和方法。

§ 10.1　锁模技术的基本原理

一、多纵模的叠加特性

一个多纵模输出的激光器，相邻两个纵模间的圆频差应当是：

$$\omega = \omega_q - \omega_{q-1} = 2\pi(\nu_q - \nu_{q-1}) = \frac{\pi c}{L} \qquad (10\text{-}1\text{-}1)$$

式中　L —— 腔长；

c —— 光速(为了以后的方便，一般将 L 看做是折合成光程之后的腔长。因此，c 也就是真空中的光速了)。

如果以 ω_0 代表中心纵模的圆频率，则第 n 个纵模的圆频率 ω_n 可以表示为:

$$\omega_n = \omega_0 + n\omega \qquad (10\text{-}1\text{-}2)$$

第 n 个纵模的电矢量 $E_n(t)$ 可以写成:

$$E_n(t) = E_0 e^{i[(\omega_0 + n\omega)t + \phi_n]} \qquad (10\text{-}1\text{-}3)$$

式中　E_0——振幅，为了计算上的方便而又不影响结论，我们假定各纵模电矢量的振幅相等;

　　ϕ_n——第 n 个纵模的初位相。

下面我们看如果有 n 个纵模叠加后的电矢量应当如何? 设叠加后电矢量为 $E(t)$，则:

$$E(t) = \sum_n E_n(t) = \sum_n E_0 e^{i[(\omega_0 + n\omega)t + \phi_n]} \qquad (10\text{-}1\text{-}4)$$

如果令 $T = 2L/c = 2\pi/\omega$ 为光在腔内往复一次的时间，将 t 换作 $t_0 + T$，即 $t = t_0 + T$，代入 (10-1-4) 式有:

$$E(t_0 + T) = \sum_n E_0 \exp\{i[(\omega_0 + n\omega)(t_0 + T) + \phi_n]\}$$

$$= \sum_n E_0 \exp\{i[\omega_0 + n\omega)t_0 + \phi_n]\}\exp\{i[2\pi(\frac{\omega_0}{\omega} + n)]\}$$

$$(10\text{-}1\text{-}5)$$

由于 ω_0 为中心纵模频率，它应当是 $\pi c/L$ 的整数倍，故可写成

$$\omega_0 = \frac{m\pi c}{L}$$

式中 m 为某个整数。于是

$$\frac{\omega_0}{\omega} = m$$

因此 (10-1-5) 式中的因子

$$\exp\left[2\pi i\left(\frac{\omega_0}{\omega} + n\right)\right] = \exp[2\pi i(m + n)] = 1 \qquad (10\text{-}1\text{-}6)$$

将 (10-1-6) 式代入 (10-1-5) 式，得:

$$E(t_0 + T) = \sum_n E_0 \exp\{i[(\omega_0 + n\omega) t_0 + {}_n]\}$$

$$= \sum_n E_0(t_0) \qquad (10\text{-}1\text{-}7)$$

这说明 E 是一个以 $T = 2L/c$ 为周期的周期函数。不过要使这个周期函数成为一系列的尖峰脉冲，就还要有其他的条件。

如果我们能设法强迫各个纵模的初相 φ 都有相同的确定值，比如，为简单起见它们都是零。即:

$${}_n = \varphi = 0$$

则 (10-1-4) 式的求和就可写成:

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_0 e^{i(\omega_0 + n\omega)t} \qquad (10\text{-}1\text{-}4')$$

式中: N ——纵模的总数目 (我们假定它为奇数，这并不影响结果的一般性)。

经计算

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_0 e^{i(\omega_0 + n\omega)t} = E_0 \frac{\sin \frac{N\omega t}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}} e^{i\omega_0 t} \qquad (10\text{-}1\text{-}8)$$

而光强 $I_L(t)$ 为

$$I_L(t) = E(t)E^*(t) = E_0^2 \frac{\sin^2 \frac{N\omega t}{2}}{\sin^2 \frac{\omega t}{2}} \qquad (10\text{-}1\text{-}9)$$

当 $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega$ 时 (即 $t = 0, T, 2T, \cdots$ 时)，有:

$$\frac{\sin \frac{N\omega t}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}} = N$$

代入 (10-1-9) 式，则:

$$E(t) = NE_0 \qquad (10\text{-}1\text{-}10)$$

而光强

$$I_L = N^2 E_0^2 \tag{10-1-11}$$

每一个纵模单独存在时，光强应为 E_0^2，N 个纵模总输出的光强也只有 $I = N E_0^2$，和 (10-1-11) 式比较，这样多个纵模如果它们初相相同，则输出功率将提高 N 倍。

综合以上可以看到，对一个多纵模激光器，如果能将它们的初相“锁定”在同一数值上，则即可获得周期性的高功率脉冲输出。这就是锁模激光器的大概含义。

下面的问题就是要看如何才能使各个纵模的初相可以具有同一数值，而不像一般情况下它们只是时间的随机值。

二、位相的锁定

在一般的激光器中，各纵模振荡之间是不相关联的，也就是说它们其间的位相关系不确定。为了达到锁模的目的，就必须采取一些强制措施，迫使各个纵模振动同步，这就是锁模。目前采用的锁模技术有两类：一类是在谐振腔内插入一个调制器，其调制频率为 $f = c/2L$，这一类技术叫做主动锁模。另一类则是利用在谐振腔内插入饱和吸收物质，这一类我们称之为被动锁模。本节只介绍它们的原理。具体的装置留待下节。

如果在腔内插入一个振幅调制器，其调制频率为 $f = c/2L$。未加调制之前，激光器中相应于增益曲线中心附近的纵模电矢量可以表示为：

$$E(t) = E_0 \cos 2\pi\nu t \tag{10-1-12}$$

加调制后，电矢量振幅将不再是常数，而变成一个以频率为 $f = c/2L$ 的周期变化的量。为了简单起见，假设它是按余弦函数变化，则此时纵模电矢量可写成：

$$E(t) = E_0(1 + M\cos 2\pi f t)\cos 2\pi\nu t \tag{10-1-13}$$

式中：M —— 调制度。

将（10-1-13）式展开得:

$$E(t) = E_0\cos 2\pi\nu_c t + \frac{ME_0}{2} w_0 2\pi(\nu_c - f)t + \frac{ME_0}{2}\cos 2\pi(\nu_c + f)t \quad (10\text{-}1\text{-}14)$$

由此可见其调制效果为：它使该中心纵模的振荡不仅包含原有频率的成分，还含有频率为 ν_{c-} 和 ν_{c+} 的两个边带成分。ν_{c-} 和 ν_{c+} 的数值分别是:

$$\nu_{c-} = \nu_c - f = \nu_c - \frac{c}{2L}$$

$$\nu_{c+} = \nu_c + f = \nu_c + \frac{c}{2L}$$

这两个边带频率正好与相邻的两个纵模频率相等。这就是说，在激光器中，一旦在增益曲线中的一个频率 ν_c 形成振荡，由于调制器的作用，同时出现两个边带频率 ν_{c-} 和 ν_{c+} 的振荡成分，而它们正好能够激发起相邻的两个纵模振荡。而且由于边带频率的振荡和中心频率 ν_c 的振荡有相同的位相，所以新激发起的纵模与中心纵模振荡也是同位相的。同理，由边带 ν_{c-} 所激发的纵模也受到调制器的调制，又会产生新的边带频率。其中，$\nu'_{c-} = \nu_{c-} - f$，它又可激发 ν_{c-} 左边的另一纵模，而 ν_{c+} 则可激发其右边 $\nu'_{c+} = \nu_{c+} + f$ 的纵模。这样一个一个下去，所有可以起振的纵模都能以同样的位相振动起来了。也就是说它们的位相得以被“锁定”。这一现象可参看 10-1-1 的示意图。

为了达到主动锁模这一目的，也可在腔内加入一个位相调制器，我们令它利用外加电场的周期变化来改变介质的折射率。当光通过它时，由于光程变化而周期性

图 10-1-1

的改变了位相。当然这个周期也需要等于 $2L/c$。

下面简单的叙述一下这种锁模的工作原理。

设调制器在光通过的方向上长度为 x_0，外加调制信号，如电压以 ω_m 的圆频率周期变化，即：

$$U = U_0 \cos \omega_m t$$

调制器的折射率如受它的调制，则折射率的变化量应当是：

$$\Delta n(t) = kU_0 \cos \omega_m t \tag{10-1-15}$$

式中：k —— 比例系数，由调制器的性质所定。

当光通过调制器时，产生位相延迟 $\delta(t)$，其值为：

$$\delta(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(t) \cdot x_0$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} k x_0 U_0 \cos \omega_m t \tag{10-1-16}$$

由于位相的变化可以引起频率的变化，频率的变化是位相变化对时间的微分，所以

$$d\omega(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = k' \sin \omega_m t \tag{10-1-17}$$

式中：k' —— 另一个常数，它等于 $-\frac{2\pi}{\lambda} k x_0 U_0 \omega_m$。

以上的结果可以这样看：当光通过调制器一次，频率就要发生一次频移，使光波频率向大（或小）的方向移动；当腔内的光脉冲多次经过调制器，频率就要发生多次频移，其结果就将使光波频率移到增益曲线以外了，这就类似损耗调制，这部分信号就会由腔内消失。只有那些在与相位变化的极值处（极大或极小）相对应的时刻才通过调制器的光信号，其频率不发生移动，它们才能在腔内保存下来，并不断得到放大，从而形成周期为 $2L/c$ 的脉

冲列，实现了锁模。

三、被动锁模

在激光腔内插入一个有饱和吸收特性的染料盒，也能起到锁模的作用。可饱和染料的吸收系数是随光强的增加而下降的。图 10-1-2 给出它们这种特性的大致情况。图中纵坐标是染料的透射率 T，横坐标是通过它的光强 I。讯号的强弱可由饱和光强 I_0 来大致划分。

图 10-1-2

在激光器里，随着光泵对工作物质的激励，各个纵模都会随机的发生，光场就会由于它们的叠加而在强度上平稳中略有起伏。当某些纵模偶然地得到相干加强时，这就是光场较强的部分。反之，就是较弱的部分。这些较强的部分通过染料，由于被吸收的少，损耗不大。较弱的部分通过染料，因被吸收的多，反而更被减弱。光场多次通过染料的结果，强处和弱处就明显的区别开来了，最终造成这些强处（纵模相干加施处）就以窄脉冲的形式被选出来。这就是被动锁模的简单定性上的解释。

§ 10.2 锁 模 装 置

为达到锁模的目的，需要设计出合用的调制器或染料盒，以及一些附加的部件。本节就其精要部分做一些描述。

一、声光调制器

在介质中传播的声波，可以引起介质折射率的周期变化。在一块各向同性的介质中，如熔融石英，沿 z 方向进入一个声波，其方程为：

$$u(z,t) = A\cos(\Omega t - k_z z) \qquad (10\text{-}2\text{-}1)$$

式中：A —— 声振幅；

k_z —— 声波矢；

Ω —— 声的圆频率。

由声波引起的介质内部的应变 S_z 是

$$S_z = CA\sin(\Omega t - k_z z)$$

此处 C 是比例系数。上式也可简化成：

$$S_z = S\sin(\Omega t - k_z z) \qquad (10\text{-}2\text{-}2)$$

式中 S 即等于上式的 CA。

根据进一步的分析，介质沿 z 向折射率的变化可由下式表示：

$$n_z(z,t) = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 p_{12} S\sin(\Omega t - k_z z) \qquad (10\text{-}2\text{-}3)$$

式中：n_0 —— 原来的折射率；

p_{12} —— 相应的弹光系数。

上式也可写成：

$$n_z(z,t) = n_0 + \Delta n \sin(\Omega t - k_z z) \qquad (10\text{-}2\text{-}4)$$

$\Delta n = -\dfrac{1}{2} n_0^3 p_{12} S$，对一定的介质它是常数。

由 (10-2-4) 式可见，此时的介质相当于一个相位光栅，它可以对通过它的光产生衍射作用。如果是在激光器的谐振腔内，则其衍射作用就是一种损耗。我们如果能控制声波的有、无，使这种变化的频率和锁模所需要的频率 $f = c/2L$ 相一致，则这个调制器就能起到主动锁模的作用。

为了使用方便，还可将声光器件设计成驻波器件。

假设在介质的 z 方向上有两列相向的声波，则它们形成的驻波可以表示为：

$$u(z,t) = 2A\cos k_s z \sin \Omega t \qquad (10\text{-}2\text{-}5)$$

在声驻波的作用下，介质折射率的变化为：

$$n(z,t) = n_0 + n_0^3 p_{12} \sin k_s z \sin \Omega t \qquad (10\text{-}2\text{-}6)$$

由上式可知，在介质内凡 $z = n(\ \ /2)$ 处，(n 是整数， 是声波长) 折射率变化量为零 (波节)。而当 $z = \dfrac{1}{2}(2n+1)\ \ /2$ 处时介质折射率的变化量为最大 (波腹)，这些点的位置是不变的。尤其应注意到的是，在一个时间周期内，折射率的变化有两次为零。这一点即是说，声驻波所造成的光栅在声的一个周期内有两次是消失的。

我们将这样一个驻波器件放在谐振腔内，使声频 $f_s = \dfrac{1}{2}f = \dfrac{1}{2}c/2L$，则光将按频率 $c/2L$ 受到周期性的损耗，由此达到了锁模的目的。

至于驻波的形成，可以利用介质底端的反射声波来提供反向的一列，这只需使器件的 z 向尺寸和声波波长构成一定的简单关

系就可以了。由于它避开了改变声功率所造成的麻烦，所以得到了广泛的使用。

二、电光调制器

利用电光效应可以很容易地调制光的位相，故而，在腔内如果插入这样一个器件，即可实现锁模。

由上节可知，锁模所要求的位相调制，只需使介质的折射率能按外加信号做线性变化就可以了。常用的电光调制器是使用铌酸锂晶体（LN），使光沿晶体的 x 向入射，光的偏振方向沿晶体的 z 向，外加的调制电压也加在晶体的 z 向。

设外加调制电压为:

$$U = U_0 \cos \omega_m t$$

根据电光效应的理论可知，这束偏振光在晶体中传播时，相应折射率的变化是:

$$\Delta n_z(t) = \frac{1}{2}\gamma_{33} n_e^3 E_z = \frac{1}{2}\gamma_{33} n_e^3 \frac{U_0}{d} w_0 \omega_m t \qquad (10\text{-}2\text{-}7)$$

式中 n_e —— 晶体非寻常光的主折射率;

γ_{33} —— 相应的电光系数;

E_z —— 加在 z 方向上的调制电场强度;

d —— 晶体在 z 向上的长度。

至于这个式子是怎样来的，请参考有关晶体物理的书籍。

和上一节的式（10-1-15）相比较就可以知道，这种调制器是可以实现锁模的。

电光调制位相的锁模要求光线必须是线偏振光，一般还需在腔内采取起偏的措施，这是使用时需要注意的。

利用电光效应也可制成振幅调制型的调制器，这里不再赘述了。

三、被动锁模装置

根据前节所述，被动锁模是很简单的，只需在腔内插入一个装有饱和吸收染料的“盒”即可。在实践中，除对盒的光学质量有一定的要求外，对染料的选取还是有很大讲究的。一般说来，这种染料必须具备以下几个条件：第一，染料的吸收线应和激光波长很接近；第二，吸收线的线宽要大于或等于激光线宽；第三，其弛豫时间应短于脉冲在腔内往返一次的时间。表 10-1 给出了几种常用染料的参数。

表 10-1　被动锁模所用之染料

指标＼染料	伊特受哥达克		DDI（二羰化菁碘化物）	隐花青
	9740	9860		
饱和光强 I_s (W/cm^2)	4×10^7	5.6×10^7	$\approx2\times10^7$	5×10^6
弛豫时间 τ (ps)	8.3	9.3	14	22
适用的激光器	钕玻璃激光器		红宝石激光器	

§ 10.3　超短脉冲的测量

利用一般的光电元件和示波器来测量脉冲的宽度，一般只能达到 10^{-10}s～10^{-12}s 的量级。因此，对于只有 ps 级宽度的锁模超短脉冲，用电子技术来测量是很困难的，甚至是不可能的。为此就只能另找途径。下面介绍两种新的测量法。

一、双光子荧光法

某些物质在吸收两个光子之后才发射一个短波的荧光光子，这种荧光叫双光子荧光。它的强度和入射光强度的平方成正比，如若丹明 6G 染料的丙酮溶液，在 1.06 μm 的光照射下，能够吸收两个入射光子，发射一个 0.55 μm 的荧光光子。

测量装置如图 10-3-1 所示。锁模激光脉冲沿相对的方向通过若丹明溶液，在这两列光中，脉冲相重合处，入射光强增大，造成双光子荧光的一条亮带。用照像机将它拍下来，并测量亮带宽度 ΔL，即可得出激光脉冲的宽度 Δt:

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{\frac{c}{n}} \tag{10-3-1}$$

图 10-3-1

式中：n——溶液的折射率；

c——真空中的光速。

二、倍频法

如有一系列的线偏振锁模脉冲，进入如图 10-3-2 的装置，脉冲被分束板分成两束，类似麦克尔逊干涉仪，两束光分别由反射镜 M_1 和 M_2 反射，再在分束板处会合后，一起通过一块倍频晶体，并产生倍频光的输出。

图 10-3-2　倍频法测量超短脉冲

当 M_1 和 M_2 反射回来的两束光光程相等时，两路脉冲同时到达倍频晶体，如若各自的电场值为 E_0，则到达倍频晶体的电场为 $2E_0$。根据倍频晶体的工作原理，在特殊的切割之下，(按第一类位相匹配条件切割) 则二次谐波的电场 E_{sh} 可表示为：

$$E_{sh} = \alpha(2E_0)^2 = 4\alpha E_0^2 \qquad (10\text{-}3\text{-}2)$$

式中：α——比例系数。

若移动 M_2，使这一臂的光束光程发生变化，因此，当由 M_1、M_2 反射回来的两束光重新会合进入倍频晶体时，两束光脉冲将相互错开，导致 E_{sh} 值下降。当脉冲完全错开时，每个脉冲得到的 E_{sh} 为 αE_0^2。所以由测量二次谐波强度随 M_2 位置变化关系就可大致测量出脉冲的宽度。设一个倍频输出强度变化曲线的宽度为 ΔL，这表示为两束光中的脉冲由交迭到相互错过所对应的过程，也就是脉宽所对应光程的 1/2，因此，脉宽 Δt 可以表示为：

$$\Delta t = \frac{2\Delta L}{c} \qquad (10\text{-}3\text{-}3)$$

第十一章　选频、选模和稳频技术

在前面讲过，一个激光器必须具备增益介质、泵浦源和谐振腔三个主要部件。但是这样的激光器所输出的激光束并不能充分展现出激光的特性。比如，它可能是多谱线的，也可能是多模式的，也可能是频率漂移变化的。因此，这种激光不论在单色性或相干性等方面都不能尽如人意，从而也就限制了对它们的使用。若是在腔内加一些装置，对频率、模式等进行一些挑选和控制，那就将大大的改善激光输出的性能，这是一项非常有用的技术。本章将介绍这部分内容。

§ 11.1　激光频率的选择

在前面的讨论中，不论是三能级系统还是四能级系统，我们都将工作能级简化成上下两个，这在讨论受激辐射的工作原理时是方便的。但实际产生激光的工作物质的能级结构都较复杂，若采取某种方式对它进行泵浦，则可以成为上能级和下能级的就不只是一个，这样一来，可以产生激光的跃迁也就不只是一种。比如氦氖激光器，工作物质是氖，它的激发态 3S、2S 都可以作为上能级，而激发态 3P 和 2P 又都可以作为下能级。自 3S→2P 的跃迁可以得到波长为 3.39 μm 的激光辐射，2S→2P 的跃迁可以得到 1.15 μm 的激光辐射，3S→2P 的跃迁可以得到 0.633 μm 的激光幅射。因此，如果不采取一些措施，我们就不能得到期望的其中某一波长的激光。又如在氩离子激光器中，如果只用一个简单的谐振腔，就会有多条谱线的激光同时输出。由于上述原因，在激光

器上加入适当的选择频率的装置，其必要性是显然易见的了。

选择频率的方法有很多种，就其主要理论根据来说，无非是在腔内尽量设法使所希望形成激光振荡的谱线有较小的损耗，让其它谱线有较大的损耗，以造成它们在起振时阈值的大小有较大的区别。在这里我们介绍两种最普通的方法。

一、多层介质膜反射镜

在前面我们学习过，激光得以产生的阈值条件为:

$$G(\nu) \geq \alpha_{内} - \frac{1}{2L}\ln r_1 r_2 \qquad (11\text{-}1\text{-}1)$$

式中: r_1、r_2——分别为组成谐振腔的两个反射镜的反射率。

我们设想，如果能找到一种反射镜，它只对某个波长 λ 有较高的反射率，而对其它波长反射率很低。用这种反射镜来构成谐振腔，就只对 λ 有低阈值，对其它波长则是高阈值。因此，在同一泵浦的情况下，这个被选定的波长就会先起振，从而得到我们希望得到的激光输出。

这种对不同波长有不同反射率的反射镜目前是由“多层介质膜片”来实现的。有关它的这种有选择反射特性，其原理在专门书籍中有详细的介绍，在此不再详述。多层介质膜片的反射带宽可以做到 0.01 μm 左右，所以，用它来选择诸如氦氖激光器的 0.633 μm、1.15 μm 和 3.39 μm 三条谱线中的任一条是足够有效了。

二、色散腔法

有些激光工作物质可以辐射几条谱线，它们相距很近，而且增益很高。对于它们，如果只想用上面介绍的窄带介质膜反射镜是不行的。比如在氩离子激光器中，谱线 0.5145 μm 和 0.488 μm

都有很强的增益，它们经常一起形成激光振荡。

为了选择这一类的谱线，可以在腔内放入一个色散元件，这称之为色散腔法。

最简单的色散腔如图 11-1-1 所示。它的结构主要是在腔内加入一个棱镜。由于棱镜的色散，不同波长的谱线在同样入射角下会以不同的方向出射，将腔的一个反射镜调到某一特定的角度上，它只对某一谱线能垂直反射回去，而对其他波长的谱线则被反射离开谐振腔。这样一来，也就达到了选取谱线的目的。

图 11-1-1　棱镜色散腔

色散元件除棱镜外还可采用反射光栅，其构成如图 11-1-2 所示。它是用反射式平面光栅来代替一块腔反射镜，光栅处于自准直工作状态。光栅形成反射主极大的位置应满足下式：

$$2d\sin\alpha = m\lambda \tag{11-1-2}$$

式中：α—— 光束在光栅上的入射角；

d —— 光栅常数；

图 11-1-2　光栅色散腔

m—— 主极大的级次。

对某一级极大而言，只有一定范围的波长区域能获得反射而往返振荡。若腔内光束平面发散角为 $\Delta\alpha$时，则这种腔所选波长的最窄线宽为:

$$(\Delta\lambda)_{min} = \frac{\lambda}{tg\,\alpha}\Delta\alpha \tag{11-1-3}$$

若把光栅绕垂直于腔轴的轴线旋转，则可进行对起振波长的选择，这种方法在染料激光器中使用得很多。

§ 11.2 纵模的选择

单一谱线输出的激光在增益曲线的宽度内经常包容多个纵模，这种激光器可以是多个纵模同时振荡，这对于提高激光的单色性是很不利的。因此，在许多应用的场合中要求激光只有一个纵模输出。本节将介绍几个最简便的选取技术。

一、短腔法

由前面激光原理部分可知，两个相邻纵模间的频率差 $\Delta\nu_q$ 为:

$$\Delta\nu_q = \nu_q - \nu_{q-1} = \frac{c}{2L'}, \tag{11-2-1}$$

式中: $L' = nL$ —— 谐振腔的光学长度;

n —— 增益介质折射率(假定介质长度和腔长一样);

c —— 真空中的光速。

由上式可知纵模频率间隔和谐振腔的腔长是成反比的。

要想得到一个纵模的输出，只要缩短腔长，使 $\Delta\nu$ 的宽度大于增益曲线阈值以上所对应的宽度即可以了。一般为了方便，即令 $\Delta\nu_q$ 大于谱线的荧光线宽 $\Delta\nu$。例如在 He-Ne 激光器中，其荧光谱

线 Δν 约为 1500MHz。若激光器腔长为 10cm，则纵模间隔 $\Delta\nu_q$ 为:

$$\Delta\nu_q = \frac{c}{2L'} = \frac{3\times10^{8}\ \mathrm{m/s}}{2\times1\times10\times10^{-2}\ \mathrm{m}} = 1500\ \mathrm{MHz}$$

因此，对 He-Ne 激光器，只要做到腔长小于 10cm，就会得到单纵模的输出。

短腔法虽然简单，但是有一定的缺点。首先，由于腔长受到限制，工作介质的大小也相应受到限制，激光的输出功率必然受到限制。这对于那些需要大功率单纵模输出的应用场合是不适合的。其二，有些激光输出谱线荧光宽度很宽，若要加大到足够的纵模间宽度，势必要使腔长缩到很短很短，以致到不可能实现。如 YAG 激光器谱线的荧光宽度约 200000MHz，这就等于要求单纵模振荡的腔长只有 4mm。显然，对它来说用这种短腔获得单纵模的方法是不适用的。

二、法布里—珀罗标准具法

由物理光学可以知道，法布里—珀罗标准具是由一对平行的光学平面所构成的一种光学元件，它相当于一块滤光片，对不同的波长有不同的透射率。由计算可知，透射率 $T(\lambda)$ 满足:

$$T(\lambda) = \frac{1}{1+\left(\frac{2F}{\pi}\right)^{2}\sin^{2}\frac{\varphi}{2}} \qquad (11\text{-}2\text{-}2)$$

式中: $F=\pi\sqrt{r}/(1-r)$。而 r 是标准具对入射光的总反射率。通常，称 F 为标准具的精细度。$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\delta$，其中 $\Delta\delta$ 为法—珀标准具内参与光束干涉效应的相邻两出射光线的光程差，因此 φ 的意义就是这两束光的位相差。

图 11-2-1 画出了透射率随波长（或频率）变化的情况，由图也可看到，标准具的反射率越大，曲线“尖峰”越窄，也就是说对

图 11-2-1

于波长的选择透过的性能越好。

如果标准具材料的折射率为 n 其厚度为 d，在光束近于垂直的入射时，可以算出两个透射率峰值间的间隔 $\Delta\nu_m$ 满足:

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{2nd} \tag{11-2-3}$$

利用法布里—珀维标准具选取纵模的方法很简单，其装置简图如图 11-2-2 所示。

在激光器谐振腔内，插入一个标准具，对于它，我们事先选择好它的厚度 d 和反射率 r，使峰值频率间隔 $\Delta\nu_n$ 与激光器荧光线宽相当。这样，在有效增益线宽内，就只有一个纵模有“高”的透射率，其余的纵模，则由于透射率低而被滤掉，从而实现了单纵模输出。

图 11-2-2　利用标准具选取纵模

三、复合腔选纵模

如果用一个干涉系统来代替谐振腔中的一个反射镜，由于干涉的结果，组合反射率 r 应当是光波波长的函数。图 11-2-3 表示这种典型复合腔工作的原理图。这是一个用迈克尔逊干涉仪来代替谐振腔的一个反射镜所构成的系统。这个腔可看成是由两个子

腔组合而成的。全反镜 M 和 M_1 组成一个子腔。腔长为 $L+l_1$，其谐振频率为:

$$\nu_i = \frac{c}{2(L+l_1)} q_i \tag{11-2-4}$$

式中 q_i 是正整数，并假定折射率 $n=1$。另一子腔腔长为 $L+l_2$，其谐振频率为:

图 11-2-3　复合腔选纵模

$$\nu_j = \frac{c}{2(L+l_2)} q_j \tag{11-2-5}$$

式中 q_j 也是正整数。组合后的谐振腔必须同时满足两个腔的频率条件。如果第一个子腔经过 N 个频率间隔后，正好和第二个子腔经过 N+1 个频率间隔后的频率再次相等，则可写出两个等式:

$$\frac{cq_i}{2(L+l_1)} = \frac{cq_j}{2(L+l_2)} = \nu' \tag{11-2-6}$$

$$\frac{c(q_i+N)}{2(L+l_1)} = \frac{c(q_j+N+1)}{2(L+l_2)} = \nu'' \tag{11-2-7}$$

ν'和 ν''是两个相邻的公共频率。其差 $\Delta\nu = \nu'' - \nu'$可以由(11-2-6)式和(11-2-7)式算出:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2(l_1 - l_2)} \tag{11-2-8}$$

这就是这个复合腔的频率间隔，调整 $l_1 - l_2$ 的数值可以使它充分小，而使 $\Delta\nu$充分大，大到和谱线荧光线宽可以相近时，(如使它等于荧光线宽) 则即可选出一个纵模工作。

至于其他选取纵模的方法还有很多，这里就不一一叙及了。

§ 11.3　横模的选择

激光光束横截面上的光场分布称之为横模。在讲谐振腔理论时，已经较为详细的讨论过了。横模阶数越大，光场分布就越复杂，且分布的范围越大。阶数最低的基模（TEM_{00}）光强分布最简单，分布的范围最小。图（11-3-1）就是几个具有矩形对称的横模光场的分布图。

图 11-3-1

在许多激光应用的场合中，要求激光有较为均匀的照明，或者要求有较小的光束发散角，所以在这种情形下，就必须让激光器做基横模的输出。

一、横模选择技术的理论

激光振荡得以建立的条件是，激光器的增益 G 必须大于损耗 δ，这就是说 $G>\delta$。腔内的损耗主要有：激光束在谐振腔镜面上由于透射、散射和吸收等因素而产生的损耗 δ_m，激光束通过增益介质时的损耗 δ_i，以及由于腔内各种孔径造成的衍射损耗 δ_d。因此有，$\delta=\delta_i+\delta_m+\delta_d$。激光振荡条件就可写成：

$$G>\delta_i+\delta_m+\delta_d \qquad (11\text{-}3\text{-}1)$$

选取横模，一般是指选出 TEM_{00} 基模来。也就是说，在激光谐振腔内采取一些措施，使基模能够满足 (11-3-1) 式，而其他的高阶模不满足 (11-3-1) 式。介质的增益系数 G、内部损耗 δ_i 和谐振腔镜片上的损耗 δ_m 对各阶模式都有相同的数值，唯一可以不同的是衍射损耗 δ_d。因此，只须控制各阶模式的 δ_d，即可达到选取横模的目的。

经过进一步考虑，我们还会看到：

(1) TEM_{10} 模与 TEM_{00} 模之衍射损耗比 δ_{10}/δ_{00} 是个重要参量。因为 TEM_{10} 模是高阶横模中衍射损耗最低的模，只要能够滤去 TEM_{10}，其余的高阶横模就可随之滤掉。因此，δ_{10}/δ_{00} 的比值越大，选模就越容易。

(2) 衍射损耗与总损耗之比 δ_d/δ 是另一个重要参量。必须使腔的总损耗 δ 主要由 δ_d 决定。因为如其不然，即使 δ_{10}/δ_{00} 很大，但衍射损耗在总损耗中不起主导作用，因此，它对于 $G>\delta$ 这个条件没有显著影响。为了这点，必须令 δ_d/δ 有较大的值，这样才利于选横模。

根据上述，我们应该较为详细地讨论一下不同横模的衍射特性。

在谐振腔理论中得知：光波场在腔内每次来回反射的传输过

程遵循菲涅耳—基尔霍夫衍射积分方程。在来回反射足够多次之后，光场建立起稳态。稳态下的自洽场本征方程可表示为：

$$\sigma u(x, y) = \iint_S K(L, k) u(x', y') dS' \qquad (11\text{-}3\text{-}2)$$

式中 $K = \frac{ik e^{-ik\rho}}{4\pi\rho}(1 + \cos\theta)$，称为该本征方程的核函数；S 为腔镜面积，x 和 y 是腔镜面 S 上观察点的坐标，x'，y' 是源点的坐标，K 通过 ρ 和 θ 将观察点（x，y）和源点（x'，y'）联系起来，而且是它们的函数。本征值 σ 为与坐标无关的复常数。本征函数 u（x，y）则表示光场在腔镜上之稳态分布。在共焦腔之特定条件下，本章函数 u(x, y) 可以有一系列的准确的解析函数解：u_{00}（x，y），u_{10}（x，y），u_{01}（x，y），u_{11}（x，y），…，u_{mn}（x，y），…和相应的本征值：σ_{00}，σ_{10}，σ_{01}，σ_{11}，…，σ_{mn}，…。u_{mn}（x，y）即代表不同的横模，本征值的绝对值 $|\sigma_{m,n}|$ 则表示该横模光场振幅的单程相对变化，因此，其能量相对变化就是 $|\sigma_{mn}|^2$。如果用 δ_{mn} 表示该横模光场能量的单程衍射损耗，则应有下式：

$$\delta_{mn} = 1 - |\sigma_{mn}|^2 \qquad (11\text{-}3\text{-}3)$$

一般说来，δ_{mn} 应当是谐振腔参数 g 和菲涅耳数 F 的函数。

对于一般的非共焦腔，方程（11-3-2）没有解析解，只能通过数值求解法得到 δ_{mn} 的值。图 11-3-2 就是用数值求解法得到的由两个相同圆镜组成的稳定球面腔中两个最低阶横模、单程能量损耗的曲线。通常，横模阶数越高，其能量损耗也越大。根据上面所谈，出于选横模的需要，我们只关心 TEM_{00} 模的衍射损耗 δ_{00} 和 TEM_{10} 模的衍射损耗 δ_{10}。由图中，我们找到相应的 TEM_{00} 和 TEM_{10} 两条曲线，（一定的 $|g|$）就可求得各种菲涅耳数下的两种模的衍射损耗值，从而进行选模设计。应当指出，图 11-3-2 是针对圆形、对称球面稳定腔计算出来的数值。对于其他类型的谐振

图 11-3-2

腔也可以做类似计算，也能得到相类似的结果。

应当指出的是，在选模时，除要考虑不同 F 和 g 的腔对 δ_0和 δ_0 有影响外，还要考虑基模的模体积也随 F 和 g 变化。为了得到大的功率输出，对这些条件要进行综合考虑。相应的理论请参考更专门一些的书刊。

二、光阑法选模

利用小孔光阑来选取基横模，是一种最简便、有效，从而也是最普遍的方法。它基本的做法是在谐振腔内插入一个适当大小的小孔光阑。下面我们较详细的讨论一下这种方法。

由图 11-3-1 可知，基模具有最小的光束半径，其他的高阶模，光束半径则依次增大。可以直观的想象：如果用一个光阑，其半径和基模光束半径相当，那么基模就可较顺利的通过。对高阶模，由于被阻挡的部分多，就不能顺利通过，从而达到选模的目的。当然实际上问题没这样简单。上述的“通过”与否，都含义不确切，而必须仔细考虑它们具体的损耗情况。

对于气体激光器，尤其像 He-Ne 激光器这种利用毛细管结构的，可以适当的选取毛细管的管径来代替光阑，这种做法已取得非常有效的选模效果。对于其他一些激光器，比如固体激光器，激光棒不可能做得太细，故而还需在谐振腔内另外设置光阑。

我们估算一下小孔光阑的尺寸。

由前面谐振腔理论部分可知，基模光束是高斯光束。对于对称球面腔（$R_1 = R_2$，腰在 $z = 0$ 处。）来说，高斯光束的半径 $w(z)$ 为：

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{\frac{\pi}{\lambda}w_0^2}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (11\text{-}3\text{-}4)$$

式中：w_0——光束在腰处的半径。

如果在距腔中心为 z 的地方放置一个光阑，其半径为 r_0，令

$$r_0 = w(z) = w_0\left[1+\left(\frac{z}{\frac{\pi}{\lambda}w_0^2}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (11\text{-}3\text{-}5)$$

这样即可使基模光束“顺利”通过，而高阶模将被抑制。在实际应用中，r_0 要略比 $w(z)$ 大一些。因为光阑小就会影响输出功率和增大光束发散角，这对于许多应用都是不利的。

三、腔内望远镜选横模

为了充分利用激光工作物质，扩大基模的模体积，可以在腔内插入一组透镜组，使光束在腔内传播时尽量经历较大的空间，以提高输出功率。图 11-3-3 是这种装置的基本类型。

图 11-3-3

由图可见，在腔内加上两个共焦透镜，光束经聚焦后，再通过一个小孔光阑。谐振腔采用平行平面腔，只有那些沿轴向行进的平行光束，经聚焦后才能通过小孔往返振荡。在其他方向上的光束，聚焦后则被小孔阻截。这种装置既保持了小孔光阑的选模特性，又扩大了模体积，从而提高了激活介质的利用率，增大了激光输出功率（或能量）。对于这种情况，小孔光阑的尺寸可作如下估算：

设聚焦透镜的焦距为 f，光束半径为 a，基模的发散角为 θ_0，光束在焦面上的直径为 d，则

$$d = f\theta_0$$

由于基模发散角满足

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

则

$$d = f \frac{2\lambda}{\pi w_0}$$

再考虑到腰粗 w_0 在此处即为光束半径 a，因此，小孔光阑的光径 r 为:

$$r = \frac{f\lambda}{\pi a} \qquad (11\text{-}3\text{-}6)$$

此种方法，由于附加了两个透镜，因而增加了腔内损耗，并较难于调整。为了改进，又有了一些简化系统。图 11-3-4 就是一种。其中图 11-3-4 (a) 是将谐振腔的一个反射镜改成一个凹面镜，从而省去一个透镜。另外，又可将激光棒的端面磨成凸的球面，这样另一个透镜也可省了，如图 11-3-4 (b) 所示。

在以上所述的基础上，又发展了一种腔内加望远镜系统的选横模方法，其结构如图 11-3-5 所示。在谐振腔内插入一组由凸凹

图 11-3-4

透镜组成的望远镜系统，将光阑放在凹透镜的左边，这样的结构避免了实焦点，光阑所在处不是焦点位置，因此，不致由于能量过于集中而损伤光阑材料。装置中凹透镜的位置是可调节的，它相对于凸透镜可选择适当的离焦量，从而用以补偿激光棒的热透镜效应。综合来看，这种腔有以下几个优点:

图 11-3-5

(1) 能获得大模体积的基模输出。

(2) 可通过调节望远镜的离焦量得到热稳定性很好的激光输出。

(3) 输出光斑适当，不致损伤光学元件。

选取横模还有许多方法，如选取谐振腔参数 g 和 F 等，这里就不一一介绍了。

§ 11.4 稳频技术

利用激光器进行测量或者作为长度和频率的标准，就要求激光器所发出的激光有较高的频率稳定度。一般用频率的相对变化来描述它。在上述的应用中，其值要在 10^{-8}数量级以下。对于单纵模输出的气体激光器来说，如不加一些控制是很难达到这一水平的。这种控制就是所谓稳频技术。下面我们先看一看影响频率不稳定的因素。

对于单纵模输出的短腔气体激光器，纵模频率可由下式来表示:

$$\nu = q\frac{c}{2nL} \qquad (11\text{-}4\text{-}1)$$

式中：L —— 腔长；

n —— 工作物质的折射率；

q —— 模序数。

将（11-4-1）式微分：

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{dL}{L} + \frac{dn}{n} \qquad (11\text{-}4\text{-}2)$$

可以看到，频率稳定度是由腔长 L 的变化和折射率的变化来决定的。

先看腔长的变化。引起腔长变化的原因主要是温度和机械振动。对气体激光器来说，腔的构成有两种类型：一种是将腔的镜片直接贴在激光管的两端；一种则是固定在特定的金属镜架上。这两种结构不论哪一种，都会因热膨胀或机械变形而改变腔长。硬质玻璃的热膨胀系数 $\alpha = 4\times 10^{-6}K^{-1}$，对它来说，温度变化 10 ，频率相对漂移为 4×10^{-6}。低膨胀系数的物质如石英，$\alpha = 5\times 10^{-7}K^{-1}$，殷钢 $\alpha = 9\times 10^{-7}K^{-1}$。用这些物质做成激光管或谐振腔支架，温度变化 10 ，频率稳定度也在 10^{-7}数量级。在这种结构下，要达到 10^{-8}的稳频要求，则温度变化必须稳定在 0.01K 以内。

外界传入的机械振动也可引起腔长的变化。对于 10cm 长的激光管，外界振动只要引起腔长有 10^{-3} μm 的变化，频率漂移也可达到 10^{-8}的量级。

由以上的叙述可以看到，用限制腔长变化来达到稳频的目的，要求条件是很苛刻的。

至于折射率的变化对频率稳定性的影响，可以作如下的考虑：

(1) 由于稳频激光器中使用的工作物质多是气体，它们的折射率虽然受放电参量等因素的影响，但在电流稳定的情况下变化

不大，对频率稳定的影响很小。

(2) 对于那些外腔式或半外腔式的激光器，由于谐振腔中部分是大气，这部分的折射率受气压、温度和湿度的影响较大，将这些原因折合到对频率稳定度的影响，可由下面的公式计算:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=(4.8\times 10^{-5}\Delta p - 9.3\times 10^{-7}\Delta T - 6\times 10^{-9}\Delta H)\frac{L-L_0}{L} \tag{11-4-3}$$

式中: $L-L_0$——腔中暴露在大气中的那部分长度;

Δp——以 Pa 为单位的大气压变化量;

ΔH——水蒸汽分压的变化量，也是以 Pa 为单位。

ΔT——温度的变化量。

由以上的介绍可知，要想稳定频率，尤其是对内腔式的激光器，主要是在腔长的控制上想办法。下面介绍几个重要的技术。

一、膨胀系数匹配法

如果有两种材料，一种热膨胀系数 $\alpha>0$，另一种热膨胀系数 $\alpha<0$，将它们粘合，其长度分别为 L_1 和 L_2，只要 L_1 和 L_2 满足

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{-\alpha}{\alpha} \tag{11-4-4}$$

则用它们做成的谐振腔就不会因温度变化而改变腔长，从而达到稳频的目的。

然而 $\alpha<0$ 的材料是不太好找的，我们可以采用图 11-4-1 的结构形式来互相补偿。支架长度为 L_1，是低膨胀系数的材料，补偿块长 L_2，用高膨胀系数材料制作。只要

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{\alpha}{\alpha}$$

图 11-4-1

即可实现补偿。

二、利用兰姆凹陷稳频

图 11-4-2 是利用兰姆凹陷稳频的激光器系统。激光器安装在

图 11-4-2

低膨胀系数材料做的支架上。腔的一个反射镜装在压电陶瓷上，它可根据加在它上面的电压的正、负、大、小而作线性的伸缩。这也就是说可以通过加在陶瓷上的电压来控制腔长。

如果加在压电陶瓷上是一个频率为 $f = 1000Hz$ 的正弦调制电压，于是腔长就将按频率 f 而振动。图 11-4-3 画出了功率—频

图 11-4-3

率（腔长）曲线。可以看到，当腔长变化时，输出功率也会随之发生变化。现在分三种情况看：当频率稳定在兰姆中心处时，随着腔长的调制，输出功率将出现 2f 的调制信号。当腔长处在 A 点或 B 点附近以 f 频率调制时，输出功率将出现频率为 f 的调制信号。而且，A 点和 B 点调制信号的位相相差为 180°。利用光电接收器，把收到的光电信号依次通过频率为 f 的选频放大器、相敏检波器放大检波之后，用来控制电压反馈系统。将反馈电压加在压电陶瓷上控制腔长。当激光频率控制在兰姆凹陷中心时，输出的 2f 频率信号通不过选频放大，所以没有反馈信号。当腔长处在 B 点时，出现频率为 f 、位相与调制电压相位相同的信号，此信号通过反馈系统使压电陶瓷伸长以缩短谐振腔的腔长，于是使频率回到中心点。若腔长处在 A 处，则出现频率为 f 、位相与调制电压相位相反的信号，它通过反馈系统使压电陶瓷缩短而增长腔长，于是也将频率拉回中心点。这样一来，就可使激光的频率稳定在兰姆凹陷的中心处了。

应当指出，这种稳频方法因需对腔长加以调制，也就是使腔长的频率 f 作微小振动，所以它输出的激光不会严格处在凹陷中心 ν 处，而是在 $\nu \pm \Delta\nu$ 的范围之内。$\Delta\nu$ 的大小取决于腔长振动振幅 ΔL，也即是它将由加在陶瓷上的调制电压而决定。

采用兰姆凹陷法稳频，在控制腔长方面，对不论因何种原因而导致的腔长变动都是有效的，不像腔长补偿法中只对温度因素敏感。所以，用兰姆凹陷法稳频获得的频率稳定性较高，可以达到 10^{-9} 的数量级。

其他的稳频方法还有很多，本书就不一一再作介绍了。