北京文登学校辅导系列

历年考研数学试题详解

数学（二）

（1987—2004）

北京文登学校　编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

历年考研数学试题详解／北京文登学校编．—北京：中国财政经济出版社，2005.3
（北京文登学校辅导系列）
ISBN 7－5005－7987－X

Ⅰ．**历**…　Ⅱ．**北**…　Ⅲ．**高等数学－研究生－入学考试－习题**　Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP **数据核字（**2005**）第** 013647 **号**

北京文登学校辅导系列
历年考研数学试题详解
数学（二）
（1987—2004）
北京文登学校　编

中国财政经济出版社
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 **号　邮政编码：**100036
发行处电话：88190406　**财经书店电话：**64033436
××**印刷厂印刷　各地新华书店经销**
787×1092 **毫米**　16 **开**　10.25 **印张**　245 000 **字**
2005 **年** 3 **月第** 1 **版**　2005 **年** 3 **月北京第** 1 **次印刷**
定价（全四册）：60.00 **元**
ISBN 7－5005－7987－X/O·0032
（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　　录

前言 …………………………………………………………… (0－3)
一、全国硕士研究生招生考试数学(二)试题部分…………………… (1－1)
1987 年试题 …………………………………………………… (1－1)
1988 年试题 …………………………………………………… (1－2)
1989 年试题 …………………………………………………… (1－3)
1990 年试题 …………………………………………………… (1－5)
1991 年试题 …………………………………………………… (1－6)
1992 年试题 …………………………………………………… (1－8)
1993 年试题 …………………………………………………… (1－9)
1994 年试题 …………………………………………………… (1－11)
1995 年试题 …………………………………………………… (1－12)
1996 年试题 …………………………………………………… (1－14)
1997 年试题 …………………………………………………… (1－16)
1998 年试题 …………………………………………………… (1－17)
1999 年试题 …………………………………………………… (1－19)
2000 年试题 …………………………………………………… (1－21)
2001 年试题 …………………………………………………… (1－23)
2002 年试题 …………………………………………………… (1－25)
2003 年试题 …………………………………………………… (1－27)
2004 年试题 …………………………………………………… (1－30)

二、全国硕士研究生招生考试数学(二)试题解答部分 ……………… (2－1)
1987 年试题参考答案 ………………………………………… (2－1)
1988 年试题参考答案 ………………………………………… (2－4)
1989 年试题参考答案 ………………………………………… (2－7)
1990 年试题参考答案 ………………………………………… (2－11)
1991 年试题参考答案 ………………………………………… (2－13)
1992 年试题参考答案 ………………………………………… (2－16)
1993 年试题参考答案 ………………………………………… (2－19)
1994 年试题参考答案 ………………………………………… (2－23)
1995 年试题参考答案 ………………………………………… (2－28)
1996 年试题参考答案 ………………………………………… (2－31)

1997 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－36）
1998 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－41）
1999 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－47）
2000 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－52）
2001 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－59）
2002 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－64）
2003 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－71）
2004 年试题参考答案 ………………………………………………………………（2－79）

三、附录 ………………………………………………………………………………（3－1）
1985 年上海交大等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题（附 参考答案）
………………………………………………………………………………………（3－1）
1985 年同济大学等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题（附 参考答案）
………………………………………………………………………………………（3－8）
1986 年上海交大等十院校硕士研究生招生考试高等数学试题（附 参考答案）
………………………………………………………………………………………（3－12）
1986 年华东六省一市硕士研究生招生考试高等数学试题（附 参考答案）………（3－18）
1987 年全国硕士研究生招生考试数学（三）试题（副题） …………………………（3－22）

前　　言

为帮助我国大学生学好数学，本书汇编了 1987 年以来硕士研究生招生全国统考试题及其详解的参考答案．应该申明的是：书中给出的解答，也许不是最简的，但从中可以了解重点，突破难点，把握考点，它至少是很好地适应了同学们复习、迎试、竞赛和考研的需要．

全书按不同专业招生的试题，共分为数学（一）、数学（二）、数学（三）、数学（四）等四个分册．书末还附录了全国硕士生招生统考前两年（即 1985 年和 1986 年）部分院校联合命题的试卷及参考答案，从中也可看出考研数学试卷不断演化与完善的历程．

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”．了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为正如后文所说：数学内容就那么多，好的试题也就那么一些．这恰似时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）．

学好数学除了要“做”题外，还要会“读”题，可以毫不夸张地说：对绝大多数人来讲，做数学只是一种模仿或类比，能有发现、创新者实在廖廖，既便是对于以数学为职业的人士．

这样对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们阅后会有茅塞顿开之感，有时更会让我们恍然大悟，甚至大吃一惊，啊哈！原来如此．

看来，了解历年考研试题中的动向，学会解题方法，掌握必要技巧，对我们的复习应考关系重大．而学会分析、梳理、归类、总结，更是立于不败之地的重要法宝．

从 1978 年起，国家开始恢复研究生招生工作，这无疑给各路学子们提供了一个继续深造的极好契机．

由于大多数理工类和某些文科类（如经济、管理等）专业对于数学的需求日深，“高等数学”便成为一门重要的考试科目．起初，试卷由各院校自行命题．由于这些试卷水平难易不一，这往往给研究生录取工作带来了一定的困难（标准无法统一），特别是当考生需要进行院校乃至专业调剂时．

1985 年，上海交大、天津大学、浙江大学等八院校率先采取联合命题，同时同济大学、上海海运学院、上海工业大学等八校也采用联合命题方式；1986 年上海交大、天津大学、浙江大学等联合命题院校扩大到了十所（使用该试卷的院校不止它们），且以此方式联合命题的院校越来越多．

从 1987 年起，国家教委决定全国高校工学各专业、经济学部分专业硕士研究生招生中，数学考试进行全国统一命题，理、医、农、管各专业，一般亦由招生院校按专业性质，选用相应的试题种类．当时试题共分五套，分别称为数学（一）、数学（二）、数学（三）、数学（四）和数学（五），各类试题包含的数学科目大体如下表所列：

类　型	试卷包含科目
数学(一)	微积分、线性代数,此外概率论与复变函数任选一门
数学(二)	微积分、线性代数
数学(三)	微积分
数学(四)	微积分、线性代数、概率论
数学(五)	微积分、线性代数、概率论

考试题型为填空题、选择题、判断题(仅数学(四)、数学(五)有此题型,且于1990年以后取消)和计算与证明题.

每份试卷填空、选择题各约4～5道,计算、证明题10道左右;1990年以后各试卷填空、选择题各5道,计算、证明题8道或10道(数学(二)、数学(三)8道,数学(一)、(四)、(五)为10道).

下表给出当时五套试题所适用的专业范围:

类　型	适用的招生专业
数学(一)	力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术.
数学(二)	机械设计与制造、金属材料、土壤、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运等,以及建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较高的专业.
数学(三)	建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较低的某些专业.
数学(四)	国民经济计划和管理(含经济系统分析)、工业经济、运输经济、基本建设经济、技术经济、工业企业管理、统计学、数量经济学.
数学(五)	农业经济、商业经济、物资经济、国际贸易、劳动经济、农业企业管理、商业企业管理、财政学、货币银行学(含保险)、国际金融、会计学.
注　记	政治经济学、世界经济、经济地理学三个专业是否选用统考试题,由招生单位自定.

1997年,国家考试中心据1996年重新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》,对数学试卷内容和卷种作了调整:

调整前试卷编号	调整后试卷编号	试卷包含的科目
数学(一)、(二)	合并为数学(一)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(三)	改为数学(二)	微积分、线性代数
数学(四)	改为数学(三)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(五)	改为数学(四)	微积分、线性代数、概率论

调整后题型仍为三大类:填空题、选择题和计算、证明题(包括综合和应用题).试题总量为21道左右,填空、选择题各5～6道,计算、证明题9～10道.主、客观性试题在试卷中所占分数

比例约为 7∶3.

试卷命题原则为 以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查. 具体地讲，填空题以考查基本概念、基本方法和基本原理为宗旨，一般无大的计算和证明，难度中等 ;选择题主要考查考生对数学基本概念、性质的理解，能通过简单计算、推理、判断和比较，作出正确选择 ;计算、证明题 (综合题) 则是对考生运算、推理、抽象、概括、逻辑思维、综合 (各学科分支的有机结合)，以及实际应用能力 (结合考生报考的具体专业所具有的共性相关背景知识) 的全面考查.

另外，各试卷种类中诸学科分支内容所占比例大致为下表：

试卷种类	学科分支所占试卷题目分数比例		
	微积分	线性代数	概率论
数学 (一)	60%	20%	20%
数学 (二)	80%	20%	0%
数学 (三)	50%	25%	25%
数学 (四)	50%	25%	25%

由于数学在各学科研究中的重要地位，为增加数学在考试中的权重，从 2003 年起，数学试卷卷面总分为 150 分，填空、选择各 6 道，计算、证明题 10 题 ;2004 年试卷中，填空、选择题各 6 道，计算、证明题 11 道.

考研辅导专家们曾对报考研究生的考生提出过忠告，且给出了“法宝”(或经验)，数学复习应采取的方法是 :一是认真领会掌握基本概念 ;二是看、做考研真题 ;三是多动手训练 (做题).

对于如何看、做考研试题我们想说几句，之前，除了复习好必要的基础知识外，还要了解、掌握一些解题思想与方法. 数学解题中有一个重要的思想即化归与转化. 其实说穿了，解数学题就是将未知 (或要求、要证) 的结论，转化为 (或利用) 已知结论的过程，这种转化不仅贯穿数学解题过程的始终，也贯穿数学自身发展的始终. 在演算数学问题时，如果你能从中找出这种转化关系，乃至能将一类问题之间的联系看清、摸透，你的解题能力和技巧将会大有提高，因为你此时至少已经掌握了这一类问题 (而非一道问题) 的解法. 要做到这一点，重要的是要对各类试卷去做综合、分析、比较，看看能否找到规律性的东西. 各种数学试卷难免会有交叉、重复、再者也要注意问题的演化规律.

这里想以下面一道行列式计算为例，看看近年来这类问题在考研试题中的演化及变形.

1997 年数学 (四) 中 (以下简记如 (1997④)，余类同) 有问题 (填空题)：

问题★　(1997④) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

其实它是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \tag{*}$$

或它的推广

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_{n-1} & b \\ c & c & c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix} \tag{**}$$

或其他变形的特例.

该行列式及它的衍生或变形是线性代数中较典型的一类,其计算方法有四五种之多.此前或尔后的试题中与该行列式计算有关的命题很多,比如：

1.涉及矩阵运算的问题

问题1：(1993④)已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,试求其伴随矩阵的逆.

它的变形或引申问题是：

问题2：(2003③)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩为1,则必有(　　)

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

问题再推广或引申：

问题3：(2001①)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$,且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$.则 $k=$______.

该命题的又一次引申或推广形式为(从3阶、4阶,终于推广到了 n 阶的情形,如果从命题年份上看,前者例是后者的特例)：

问题4：(1998③)设 n ($n\geqslant 3$)阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & 1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 & a \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则 a 必为　（　）

(A) 1　(B) $\dfrac{1}{1-n}$　(C) -1　(D) $\dfrac{1}{n-1}$

2. 涉及方程组的问题

问题 5：(1989③) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

仅有零解，则 λ 应满足的条件是______.

显然，该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

而下面的问题则与问题 5 几乎无异，只不过由齐次方程组改变成非齐次方程组而已.

问题 6：(1997②) 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多组解，则 $a=$______.

问题 7：(1995④) 对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解、有惟一解和无穷多组解. 在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解.

此问题是前面问题的再度引申或推广（变形），下面的问题终于将方程组从 3 元推广到了 n 元（相应的行列式或矩阵也由 3 阶推广到 n 阶）.

问题 8：(2002③) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0. \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geqslant 2$. 试讨论 a, b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出其全部解，并用基础解系表示全部解.

显然方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$，问题的实质是将它可化为计算 $|\boldsymbol{A}|$ 即计算前面行列式（$*$）的问题.

问题再次引申即为下面的试题：

问题 9：(2003③) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0.\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b$满足何种关系时：

(1)方程组仅有零解；

(2)方程组有非零解.在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

显然它是问题8的变形,容易看出,这个问题虽是求解线性方程组,但其关键仍是要计算行列式(它们是行列式(**)的引申)

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

接下来的问题几乎与上面的问题无异(或者视为它的特例).

问题10：(2004①)设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0.\end{cases}$$

$(n\geqslant 2)$试问a取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

显然,这也是要考虑方程组系数矩阵或其行列式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\vdots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}.$$

注意该问题只是问题9的特例或变形而已(注意它们的系数矩阵间转置关系).

显然2004年数学(二)中的问题:只是上面问题10的特例情形(对于数学(二)和数学(四)试卷而言,常有与之类同的情形,比如同年份试卷中,数学(二)、(四)中的某些题目往往是数学(一)、(三)中某些问题的简化或特例情形,但其解题思想是类同的).

问题 (2004②) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

3. 涉及矩阵特征问题

问题 11:(1992④) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

注意到 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$,它亦化为前述行列式 (*) 的计算.

这个问题稍稍推广又出现在了 1999 年数学 (一) 试题中. 请看:

问题 12:(1999①) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是______.

显然该问题是问题 11 的推广 (由 4 阶推广至 n 阶),当然关键还是计算行列式 (*).

五年之后,同样的问题 (只是稍加推广与引申) 又出现在了 2004 年数学 (三) 试卷中.

问题 13:(2004③) 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

其实它的解答无非还是计算行列式 (*) 而已. 我们简单回顾或复述一下这个问题的解法. 讨论 b 的取值:

(1) 当 $b\neq 0$ 时,考虑

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$. 然后再解线性方程组求解特征向量.

(2) 当 $b=0$ 时,则由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，此时任意非零向量均为其特征向量.

4.涉及二次型问题

熟悉了上面诸问题，下面的问题你当然不会感到陌生.

问题 14：(2001①) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　　（　　）

(A) 合同且相似　　　　(B) 合同但相似

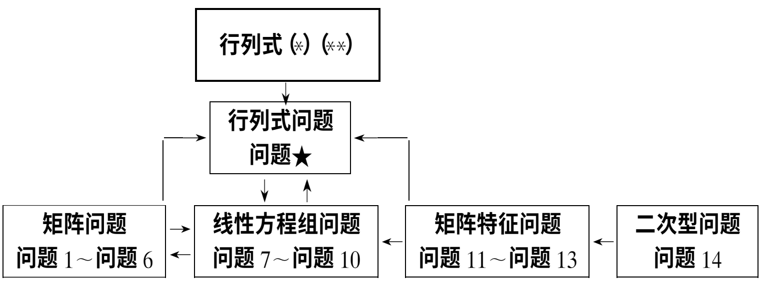
(C) 不合同但相似　　　　(D) 不合同且不相似

问题显然是要讨论它们的特征值情况，因而最终还是化归计算.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix},$$

进而解 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=0$ 的问题.

至此我们已经看到了上述诸问题与我们介绍的行列式 (*) 与 (**) 间的关系，这也可从下图中看得更为清晰（这里→表示转化关系）：



这样一来，如果再遇到这类问题，不管它以何形式或面目出现，你总不会感到陌生、感到无从下手了，这对于各种考试（不仅仅是考研）来讲，还有何愁？

我们再从另一角度看看一道考研不等式问题演化的历程.

全国硕士研究生入学考试 1993 年数学（二）试卷中有这样一道题目：

问题 1：设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$. 试证 $\left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{Ma^2}{2}$，这里 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.（1993②）

它的证明不很难，比如有下面证法：

证 1：任取 $x\in(0,a]$，由微分中值定理

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\ \ \xi\in(0,x).$$

又由 $f(0)=0$，则 $f(x)=f'(\xi)x$，$x\in(0,x)$. 故

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a f'(\xi)x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f'(\xi)|x\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

证 2：设 $x \in (0,a]$**，由** $f(0)=0$**，知**

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x).$$

令 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a} |f'(x)|$**，由积分性质及题设有**

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mt,$$

故

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a Mx\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

该问题其实只是下面一个较为经典问题的特例而已，这个问题是：

问题 2：设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导，且** $f(a)=0$. **试证**

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

仿照上面的解法不难证得该问题. 下面再给出一个较为新颖的证法：

证： 由积分性质且注意到 $f(a)=0$ **有** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$，$a \leqslant x \leqslant b$.

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x\\ &= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b\\ &= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.\end{aligned}$$

即要证不等式成立. 与题 2 类似的问题还有：

问题 3：设 $f(x)$ **的一阶导数在** $[a,b]$ **上连续，且** $f(a)=f(b)=0$**，则**

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这里题目的条件中多了一个 $f(b)=0$ **的条件，如此一来它的结论稍有加强.**

证：若 $x \in (a,b)$**，在** $[a,x]$ **及** $[x,b]$ **上对** $f(x)$ **应用** Lagrange **中值定理有**

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a),\quad a<\xi_1<x, \qquad ①$$

$$f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b),\quad a<\xi_2<b, \qquad ②$$

又 $f(a)=f(b)=0$**，由** $f'(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上连续，故** $|f'(x)|$ **在** $[a,b]$ **上亦连续，则** $|f'(x)|$ **必有最大值** M**，即**

$$|f'(x)| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| = M.$$

再由式 ①，② 有 $|f'(x)| \leqslant M(x-a)$，$|f'(x)| \leqslant M(b-x)$.

故

$$\begin{aligned}\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{(b-a)^4}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right]\\ &\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{4M}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\frac{1}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$= M = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

当然它(问题3)的特例情形是：

问题4：设函数 $f(x)$ **的一阶导数在** $[0,1]$ **上连续，且** $f(0)=f(1)=0$. **试证明**

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

证：对于积分计算可先凑微分，再用分部积分，这样可有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x,$$

而

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

故

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

问题3的另外变形是一道原苏联大学生数学竞赛题：

问题5：函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上有二阶导数，又** $f'(a)=f'(b)=0$. **试证在** (a,b) **内至少存在一点** ξ **满足** $|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证：由 $f(x)$ **在** $c=\frac{a+b}{2}$ **点** Taylor **展开且注意到** $f'(a)=0$**，可有**

$$f(c)=f(a)+f'(a)\cdot(c-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2$$
$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2\quad(a<\xi_1<c),$$

又

$$f(c)=f(b)+f'(b)\cdot(c-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-a)^2$$
$$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2\quad(c<\xi_2<b),$$

故

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{2}(b-a)^2|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2[|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|]$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|,$$

即

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$.

问题6：设函数 $f(x)$ **的二阶导数连续，且** $f(0)=f(1)=0$**，又** $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$**，试证**

$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

证：设 $f(x)$ 在 a 处取得最小值，显然 $a\in(0,1)$.

则　$f'(a)=0$，$f(a)=-1$. 依 Taylor 公式有（式中 ξ 在 x，a 之间）

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2.$$

因　$f(0)=f(1)=0$，　故　当 $x=0$，$x=1$ 时：

$$0=-1+f''(\xi_1)\cdot\frac{a^2}{2}, \Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2}.$$

$$0=-1+f''(\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(1-a)^2, \Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}.$$

故　$a<\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)>8$；$a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_2)\geqslant 8$. 即知 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

注：下面的问题是本例的变形或对偶问题：

设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$. 试证 $\min\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\leqslant -16$.

问题 3 的另外变形或引申可见（它曾作为北方交通大学 1994 年大学生数学竞赛题）：

问题 7：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 又 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$. 试证 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$.

证：记 $M=|f(x_0)|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，在区间 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上分别对 $f(x)$ 使用微分中值定理，有

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0,\ 0<\xi_1<x_0,$$

及
$$-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0),\ x_0<\xi_2<1.$$

则
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{M}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{|M|}\left[\int_0^{x_0}|f''(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1|f''(x)|\mathrm{d}x\right]$$
$$\geqslant\frac{1}{|M|}\left|\int_{2\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=4.$$

作为 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ 下界的对偶问题可有（它是上海交通大学 1991 年大学生数学竞赛题）：

问题 8：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，试证 $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

证：由设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也连续，从而有 $x_0\in[a,b]$，使 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

又由积分中值定理有 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，$\xi\in[a,b]$，故

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant|f(\xi)|+\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|+|f(x_0)-f(\xi)|$$
$$\geqslant|f(\xi)-f(x_0)-f(\xi)|=|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

当然问题还可写如：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x,$$

只须注意到 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$ 即可.

这样与题 2 结合可有不等式(注意到 $f(a)=0$):

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

作为题 8 的特例或引申便是研究生入学考试 1996 数学(一)的题目:

问题 9:设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任意一点.证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.(1996①)

证:由上面一阶泰勒公式,分别令 $x=0$ 和 $x=1$,则有

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\quad 0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\quad 0<c<\xi_2<1.$$

两式相减得

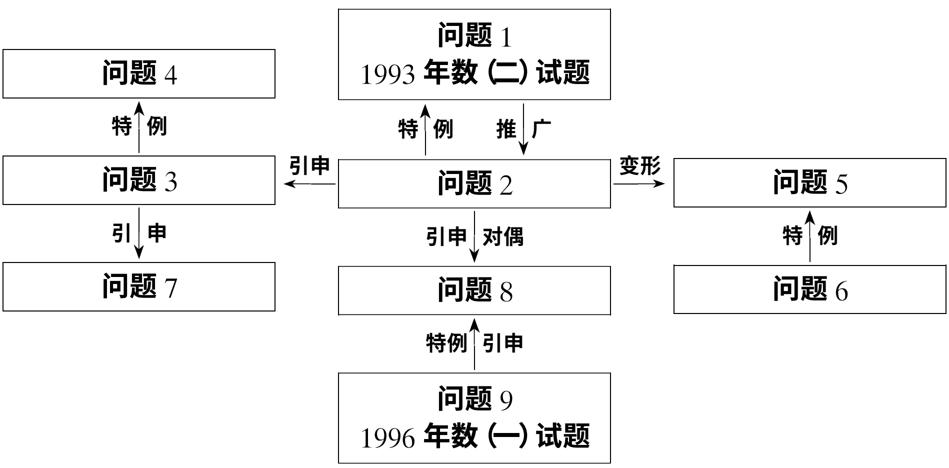
$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2+f''(\xi_1)c^2].$$

因此

$$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2$$
$$\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$

又因 $c\in(0,1)$,有 $(1-c)^2+c^2\leqslant 1$,故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

由上我们已经看出这些问题间的内在联系:



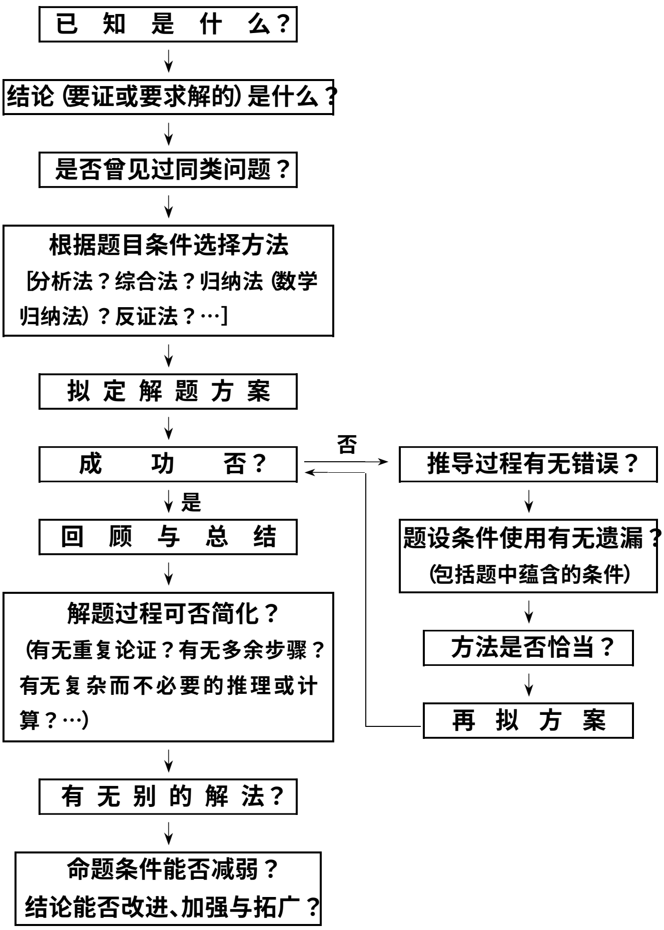
搞清这些问题之间的关联,从中不仅可以学会掌握解这类问题的方法,更重要的可以看清这些问题彼此间是如何联系及转化的,如前所言解数学问题就是将未知转化为已知的过程.此外弄清这些关系,也可看透拟题者的匠心与立意,因为特例、推广、引申和对偶也是拟造数学命题的重要手段和方法.

本书由北京文登学校《历年考研数学试题详解》编写组专家编写，执笔为吴振奎教授. 在编写过程中参阅了陈文灯教授等专家的大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，谨在此向其致以谢意.

编　者

于 2005 年 3 月

解题步骤的一个框图


已 知 是 什 么？
结论（要证或要求解的）是什么？
是否曾见过同类问题？
根据题目条件选择方法
［分析法？综合法？归纳法（数学归纳法）？反证法？…］
拟 定 解 题 方 案
成 功 否？
否
是
推导过程有无错误？
题设条件使用有无遗漏？
（包括题中蕴含的条件）
方法是否恰当？
再 拟 方 案
回 顾 与 总 结
解题过程可否简化？
（有无重复论证？有无多余步骤？有无复杂而不必要的推理或计算？…）
有 无 别 的 解 法？
命题条件能否减弱？
结论能否改进、加强与拓广？

1

一、全国硕士研究生招生考试 数学(二)试题部分

1987 年试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$________.

(2) 设 $y=\ln(1+ax)$,其中 a 为非零常数,则 $y'=$________;$y''=$________.

(3) 曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是________法线方程是________.

(4) 积分 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=$________;$\int_a^b f'(2x)\,\mathrm{d}x=$________.

(5) 积分中值定理的条件是________结论是________.

二、选择题(本大题共 4 个小题,每小题 3 分,满分 12 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是 (　)

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 偶函数

(2) 函数 $f(x)=x\sin x$ (　)

(A) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界　(B) 当 $x\to\infty$ 时,为无穷大

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限

(3) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于 (　)

(A) $f'(a)$　(B) $2f'(a)$　(C) 0　(D) $f'(2a)$

(4) 设 $f(x)$ 为已知连续函数,$I=t\int_0^{\frac{s}{2}}f(tx)\,\mathrm{d}x$,其中 $t>0$,$s>0$,则 I 的值 (　)

(A) 依赖于 s 和 t　(B) 依赖于 s,t,x

(C) 依赖于 t 和 x,不依赖于 s　(D) 依赖于 s,不依赖于 t

三、(本题满分 7 分) 设 $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5-(1-\cos t).\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、(本题满分 6 分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

五、证明题(本题满分 10 分)

(1) 证明若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,且导数 $f'(x)$ 恒大于零,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

(2) 证明若 $g(x)$ 在 $x=c$ 处二阶导数存在,且 $g'(c)=0$,$g''(c)<0$,则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

六、(本题满分 10 分) 计算 $\int\dfrac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x$,其中 a,b 不全为 0 的非负常数.

七、(本题满分 8 分) 计算 $\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 10 分) 在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点,使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小,并求此最小面积.

九、(本题满分 8 分) 设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与 3 条直线 $x=0$,$x=\pi$,$y=0$ 所围成的曲边梯形,求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

十、(本题满分 7 分) 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$ 之特解.

十一、(本题满分 8 分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^x$ 的通解.

1988 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题,每小题 4 分,满分 20 分,把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x), & x>0;\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,则 $a=$________.

(2) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$________.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

(4) 积分 $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\,\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$________.

二、选择题 (本题共 5 个小题,每小题 4 分,满分 20 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0,1)$ 处切线与 Ox 轴交点的坐标是

( )

(A) $\left(-\frac{1}{6},0\right)$　(B) $(-1,0)$　(C) $\left(\frac{1}{6},0\right)$　(D) $(1,0)$

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导,且 $f(x)<g(x)$,则必有 ( )

(A) $f(-x)>g(-x)$　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　(D) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$

(3) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

( )

(A) 与 Δx 等价的无穷小　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 与 Δx 低阶的无穷小　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

(4) 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 Ox 轴围成的图形,绕 Ox 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V 为 ( )

(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{4}{3}\pi$　(C) $\frac{2}{3}\pi^2$　(D) $\frac{2}{3}\pi$

(5) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''+2y'+4y=0$ 的一个解,又若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 ( )

(A) 取得极大值 (B) 取处极小值

(C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减小

三、(本题满分 5 分) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

四、(本题满分 5 分) 已知 $y=1+xe^{xy}$,求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$.

五、(本题满分 8 分) 将长为 a 的铁丝切成两段.一段围成正方形,另一段围成圆形,问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小.

六、(本题满分 7 分) 设 $x\geqslant -1$,求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt$.

七、(本题满分 12 分) 作函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$ 的图形,并填写下表.

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极　值	
凹区间	
凸区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,又 $a>0$.

(1) 求 $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\,dt$;

(2) 试证 $\left|\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\,dt-f(x)\right|\leqslant M-m$.

九、(本题满分 5 分) 求微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解(一般解).

十、(本题满分 10 分) 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$,且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合,试求函数 $y=y(x)$.

1989 年试题

一、填空题(每小题 3 分,满分 21 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$________.

(2) 积分 $\int_0^{\pi}t\sin t\,dt=$________.

(3) 曲线 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是________.

(4) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0)=$________.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$________.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

(7) 设 $\tan y=x+y$,则 $\mathrm{d}y=$________.

二、计算题(每小题 4 分,满分 20 分)

(1) 已知 $y=\arcsin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

(2) 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t. \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$,$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

三、选择题(每小题 3 分,满分 18 分)

(1) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ ( )

(A) 有且仅有水平渐近线 (B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线 (D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 若 $3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ ( )

(A) 无实根 (B) 有惟一实根

(C) 有 3 个不同实根 (D) 有 5 个不同实根

(3) 曲线 $y=\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 Ox 轴所围成的图形,绕 Ox 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V 为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (D) π^2

(4) 设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处 ( )

(A) 必取极大值 (B) 必取极小值

(C) 不可能取极值 (D) 是否取极值不能确定

(5) 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a、b 为常数) ( )

(A) $a\mathrm{e}^x+b$ (B) $ax\mathrm{e}^x+b$ (C) $a\mathrm{e}^x+bx$ (D) $ax\mathrm{e}^x+bx$

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 ( )

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在 (B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在 (D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

四、(本题满分 6 分)求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}$ $(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的解.

五、(本题满分 7 分) $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本大题满分 11 分)对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$ 填写下表.

单调减少区间		凹区间	
单调增加区间		凸区间	
极值点		拐点	
极　值		渐近线	

八、(本题满分 10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过圆点,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$. 又已知该抛物线与 Ox 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a、b、c,使此图形绕 Ox 轴旋转一周而成旋转体的体积 V 最小。

1990 年试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t.\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$ 上对应于 $t=\frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是________.

(2) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$,则 $y'=$________.

(3) 积分 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=$________.

(4) 下列两个积分大小的关系:$\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx$________$\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则　(　)

(A) $a=1, b=1$　　(B) $a=-1, b=1$

(C) $a=1, b=-1$　　(D) $a=-1, b=-1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则微分 $d\left[\int f(x)\,dx\right]$ 等于　(　)

(A) $f(x)$　(B) $f(x)\,dx$　(C) $f(x)+C$　(D) $f'(x)\,dx$

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是　(　)

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$
(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_{x}^{e^{-x}} f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=$　　(　　)

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$
(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0.\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,$f'(0)\neq 0$,$f(0)=0$,则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的　　(　　)

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点
(C) 第二类间断点　　(D) 连续点或间断点不能由此确定

三、计算题(本题共5个小题,每小题5分,满分25分)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$,求常数 a.

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^{2}}\ (x>0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $x\ln x\,\mathrm{d}y+(y-\ln x)\,\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解.

四、(本题满分9分)在椭圆 $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1$ 的第一象限部分上求一点 P,使该点处的切线、椭圆及两坐标所围图形的面积最小(其中 $a>0$,$b>0$).

五、(本题满分9分)证明当 $x>0$ 时,有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{x}{\pi}$.

六、(本题满分9分)设 $f(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$,$x>0$.求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

七、(本题满分9分)过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 Ox 轴围成一平面图形,求此图形绕 Ox 轴旋转一周所成旋转体体积.

八、(本题满分9分)求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的通解,其中 a 为给定实数.

1991年试题

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分)

(1) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则 $\mathrm{d}y=$________.

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^{2}}$ 的向上凸区间是________.

(3) 积分 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\ln x}{x^{2}}\mathrm{d}x=$________.

(4) 某质点以速度 $t\sin(t^{2})$ 米/秒作直线运动,则从时刻 $t_{1}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_{2}=\sqrt{\pi}$ 秒内该质点

所经过的路程等于________米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a，b 是常数，则（　）

(A) $a=0, b=-2$　　(B) $a=1, b=-3$

(C) $a=-3, b=1$　　(D) $a=-1, b=-1$

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$ 若记函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，$0\leqslant x\leqslant 2$，则有（　）

(A) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点，则（　）

(A) x_0 是 $f(x)$ 的驻点　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点

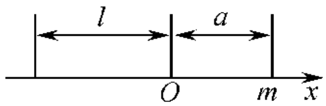
(C) $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点　　(D) 对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$

(4) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（　）

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(5) 如图所示，x 轴上有一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为（　）



(A) $\int_{-l}^{0}\dfrac{km\mu\,dx}{(a-x)^2}$　　(B) $\int_0^l\dfrac{km\mu\,dx}{(a-x)^2}$　　(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\dfrac{km\mu\,dx}{(a+x)^2}$　　(D) $2\int_0^{\frac{l}{2}}\dfrac{km\mu\,dx}{(a+x)^2}$

三、计算题（本题共 5 个小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 设 $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t. \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_1^4\dfrac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

(4) 求 $\int x\sin^2 x\,dx$.

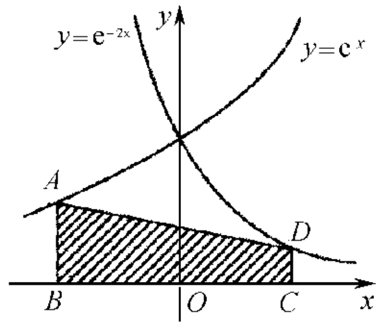
(5) 求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分) 利用导数性质证明当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

五、(本题满分 9 分) 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分) 曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 Ox 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 Oy 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、(本题满分 9 分) 如图所示，A，D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点，AB 和 DC 均垂直 x 轴，且 $|AB|:|DC|=2:1$，$|AB|<1$. 求点 B 和 C 的横坐标，使梯形 $ABCD$ 的面积最大.



八、(本题满分 9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，计算 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)\,dx$.

1992 年试题

一、填空题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1).\end{cases}$ 其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________.

(2) 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为________.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$________.

(4) 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$________.

(5) 由曲线 $y=xe^x$ 与直线 $y=ex$ 所围成的图形的面积 $S=$________.

二、选择题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的　　(　　)

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等阶无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(3) 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限　　(　　)

(A) 等于 2　　(B) 等于 0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

(4) 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}f(t^2)\,dt$，则 $F'(x)$ 等于　　(　　)

(A) $f(x^4)$　(B) $x^2f(x^4)$　(C) $2xf(x^4)$　(D) $2xf(x^2)$

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 (　)

(A) $1+\sin x$　(B) $1-\sin x$　(C) $1+\cos x$　(D) $1-\cos x$

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 系由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，试求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ 的值.

(3) 求不定积分 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(4) 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$.

(5) 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

四、(本题满分 9 分) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\,dx$.

五、(本题满分 9 分) 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分) 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

七、(本题满分 9 分) 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0$，$x=2$ 所围成图形的面积最小.

八、(本题满分 9 分) 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，恒有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

1993 年试题

一、填空题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$________.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

(3) 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)dt\ (x>0)$ 的单调减少区间为________.

(4) 求 $\int\dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$________.

二、选择题(本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x\to 0$ 时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 (　)

(A) 无穷小　(B) 无穷大

(C) 有界的，但不是无穷小量　(D) 无界的，但不是无穷大

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$　　(　　)

(A) 不连续　　(B) 连续，但不可导

(C) 可导，但导数不连续　　(D) 可导，且导数连续

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ 又设 $F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (0\leqslant x\leqslant 2)$，则 $F(x)$ 为（　　）

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(4) 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为　　(　　)

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内　　(　　)

(A) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$

三、计算题（本题共 5 个小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

(4) 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

(5) 求微分方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

四、（本题满分 9 分）设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$. 试确定 α,β,γ，并求该方程的通解.

五、（本题满分 9 分）设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、（本题满分 9 分）作半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积最小？并求出该最小值.

七、（本题满分 9 分）设 $x>0$，常数 $a>\mathrm{e}$，证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、（本题满分 9 分）设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\cos\right|\leqslant\frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

1

1994 年试题

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2.\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)\,dt\right)=$ ________.

(4) 积分 $\int x^3 e^{x^2}dx=$ ________.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内）

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则　　（　　）

(A) $a=1, b=-\dfrac{5}{2}$　(B) $a=0, b=-2$　(C) $a=0, b=-\dfrac{5}{2}$　(D) $a=1, b=-2$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的　　（　　）

(A) 左、右导数都存在　(B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 左导数不存在，但右导数存在　(D) 左、右导数都不存在

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''-y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（　　）

(A) x_0 的某个邻域内单调增加　(B) x_0 的某个邻域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值　(D) x_0 处取得极大值

(4) 曲线 $y=e^{x^{\frac{1}{2}}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有　　（　　）

(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

(5) 今设三定积分分别为

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\,dx,\ P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x+\cos^4 x)\,dx,$$

则有　　（　　）

(A) $N<P<M$　(B) $M<P<N$　(C) $N<M<P$　(D) $P<M<N$

三、计算题（本题共 5 个小题，每小题 5 分，满分 25 分）

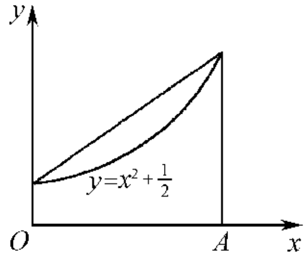
(1) 设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

（3）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

（4）求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin2x+2\sin x}$.

（5）如图所示，设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 D，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1，又点 A 的坐标为 $(a,0)$，其中 $a>0$，证明 $\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.



四、（本题满分 9 分）设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

五、（本题满分 9 分）设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，求

（1）函数的增减区间及极值；

（2）函数图象的凹凸区间及拐点；

（3）渐近线；

（4）作出其图形.

六、（本题满分 9 分）求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

七、（本题满分 9 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减，证明当 $0<\lambda<1$ 时，

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

八、（本题满分 9 分）求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 Ox 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1995 年试题

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上）

（1）设 $y=\cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$________.

（2）微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为________.

（3）曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3.\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

（5）曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ 的渐近线方程为________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内）

（1）设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则　　（　　）

（A）$\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　　　（B）$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点 (D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(2) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 Ox 轴所围成图形的面积可表为 ( )

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-1)\,\mathrm{d}x$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-1)\,\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 ( )

(A) 对任意 x，有 $f'(x)>0$ (B) 对任意 x，有 $f'(x)\leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加 (D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

(4) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$、$f'(1)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 ( )

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ (D) $f'(0)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(5) 设 $f(x)$ 可导，又 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 ( )

(A) $f(0)=0$ (B) $f'(0)=0$ (C) $f(0)+f'(0)=0$ (D) $f(0)-f'(0)=0$

三、计算题 (本题共 6 个小题，每小题 5 分，满分 30 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 系由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

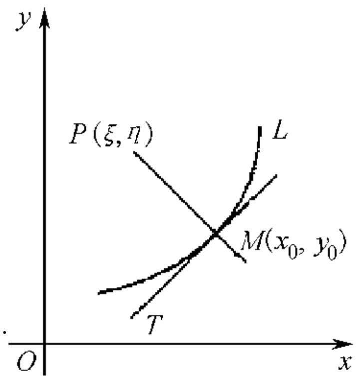
(4) 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t.\end{cases}$ 一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比 (比例常数为 1)，问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 9 分) 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(1-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 9 分) 设 $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.



六、(本题满分9分)如图所示,设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$,且 $y''>0$. 又 MT,MP 分别为该曲线的点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$,其中 $y'_0=y'(x_0)$,$y''_0=y''(x_0)$,试推导出 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.

七、(本题满分9分)设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,计算 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

八、(本题满分9分)设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$,证明 $f(x)\geqslant x$.

1996 年试题

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分. 把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y=(x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$,则 $y'|_{x=0}=$________.

(2) 积分 $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=$________.

(3) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为________.

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$________.

(5) 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$,$x=2$ 所围图形的面积 $S=$________.

二、选择题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选前的字母填在题后的括号内)

(1) 设当 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则　(　)

(A) $a=\frac{1}{2}$,$b=1$　(B) $a=1$,$b=1$　(C) $a=-\frac{1}{2}$,$b=1$　(D) $a=-1$,$b=1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义,若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的　(　)

(A) 间断点　(B) 连续而不可导的点

(C) 可导的点,且 $f'(0)=0$　(D) 可导的点,且 $f'(0)\neq 0$

(3) 设 $f(x)$ 处处可导,则　(　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(4) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内,方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$　(　)

(A) 无实根　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　(D) 有无穷多个实根

(5) 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)<f(x)<m$ (m 为常数),则曲线 $y=g(x)$,$y=f(x)$,$x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为　(　)

(A) $\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

(B) $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

三、计算题(本题共 6 个小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

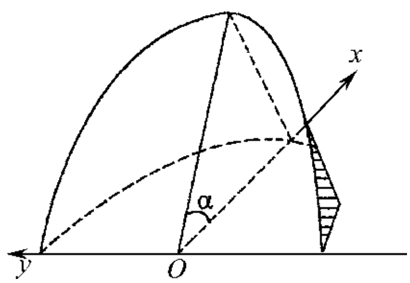
(2) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

(3) 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2)\,\mathrm{d}u, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f(u)\neq 0$,求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(4) 求函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日(Lagrange)型余型的 n 阶泰勒(Taylor)展开式.

(5) 求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

(6) 设有一正椭圆柱体,其底面的长、短轴分别为 $2a$,$2b$,用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的平面截此柱体,得一楔形体(如图所示),求此楔形体的体积 V.



四、(本题满分 9 分) 计算不定积分 $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 9 分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点,不可导点,若有,指出这些点.

六、(本题满分 9 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定,试求 $y=y(x)$ 的驻点,并判别它是否为极值点.

七、(本题满分 9 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$,又 $f'(a)f'(b)>0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

八、(本题满分 9 分) 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y'+ay=f(x), \\ y|_{x=0}=0. \end{cases}$ 的解 $y(x)$,其中 a 是正常数;

(2) 若 $|f(x)|\leqslant k$ (k 为常数),证明当 $x\geqslant 0$ 时,有 $|y(x)|\leqslant\frac{k}{a}(1-\mathrm{e}^{-ax})$.

1997 年试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

(2) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$________.

(3) 积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=$________.

(4) 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$________.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)$、$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)$、$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2,则 $t=$________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为　　(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(2) 设在 $[a,b]$ 上函数 $f(x)>0$,且 $f'(x)<0$,$f''(x)>0$.令

$$S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad S_2=f(b)(b-a),\quad S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

则 S_1,S_2,S_3 满足关系式　　(　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 均满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$,又若 $x_0\neq 0$ 时,$f'(x_0)=0$,则　　(　　)

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $F(x)=-\displaystyle\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$　　(　　)

(A) 为正常数　　(B) 为负常数　　(C) 恒为零　　(D) 不为常数

(5) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0.\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

三、计算题(本题共 6 个小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

(2) 设 $y=y(x)$. 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5. \end{cases}$ 所确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(3) 计算$\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$.

(4) 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

(5) 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$是某二阶线性非齐次方程的三个解，求此微分方程.

(6) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 3 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题满分 9 分) λ 为何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1. \end{cases}$$

无解？有惟一解？无穷多解？且在有无穷多解时写出方程组的通解.

五、(本题满分 9 分) 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$ 为 L 上任一点，$M_0(2,0)$ 为 L 上一定点，若极径 OM_0，OM 与曲线L 所围成的曲边扇形面积值等于L 上M_0，M 两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

六、(本题满分 9 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$ (a 为常数)，又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$ 并问 a 为何值时，图形 S 绕 Ox 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

七、(本题满分 9 分) 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}=A$，设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

八、(本题满分 9 分) 就 k 的不同取值情况，确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数，并证明你的结论.

1998 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 Ox 轴所围所的图形的面积 $A=$________.

(3) 积分$\int \dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$________.

(4) 设 $f(x)$ 连续，则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$________.

(5) 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的渐近线方程为________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内）

(1) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是　（　）

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　(D) 若$\frac{1}{x_n}$无穷小，则 y_n 必为无穷小

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是　（　）

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于　（　）

(A) 2π　(B) π　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有　（　）

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0$　$(x\neq a)$　(D) $\lim\limits_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0$　$(x\neq a)$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 中任一 n $(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$　（　）

(A) $k\boldsymbol{A}^*$　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$

三、（本题满分 5 分）求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

四、（本题满分 5 分）确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$　$(c\neq 0)$.

五、（本题满分 5 分）利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$ 化简，并求出原方程的通解

六、（本题满分 6 分）计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

七、（本题满分 6 分）从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k $(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

八、（本题满分 8 分）设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

1

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(t)$ 为曲边的曲边梯形面积；

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>\dfrac{2f(x)}{x}$，证明 (1) 中的 x_0 是惟一的.

九、(本题满分 8 分) 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 Ox 轴围成的平面图形绕 Ox 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

十、(本题满分 8 分) 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

十一、(本题满分 8 分) 设 $x\in(0,1)$，证明下面不等式

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；

(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

十二、(本题满分 5 分) 设 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\&1&2&-3\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\&1&2&0\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

十三、(本题满分 8 分) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$.

(1) 问 a,b 取何值，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2) 问 a,b 取何值，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？并写出此表示式.

1999 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t.\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

(3) 积分 $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$________.

(4) 函数 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为______.

(5) 微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

二、选择题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内)

(1) 若设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　（　）

(A) 极限不存在　(B) 极限存在,但不连续

(C) 连续,但不可导　(D) 可导

(2) 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的　（　）

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　(D) 等价无穷小

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则　（　）

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数

(4) “对任意对定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的　（　）

(A) 充分条件但非必要条件　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

(5) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为　（　）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

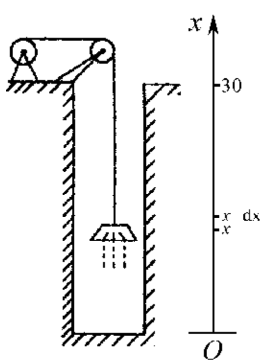
三、(本题满分 5 分) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

四、(本题满分 6 分) 计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 7 分) 求初值问题微分方程 $\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0 & (x>0),\\ y|_{x=1}=0.\end{cases}$ 的解.

六、(本题满分 7 分) 为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图). 已知井深 30 m,抓斗自重 400 N,缆绳每米重 50 N,抓斗抓起的污泥重 2000 N. 提升速度为 3 m/s. 在提升过程中,污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉,现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需做多少焦的功?

(说明:①1 N×1 m=1 J;m,N,s,J 分别表示米、牛顿、秒、焦耳. ②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



七、(本题满分 8 分) 已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$,求

(1) 函数的增减区间及极值；

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点；

(3) 函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，及 $f(1)=1$，又 $f'(0)=0$，证明在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

九、(本题满分 8 分) 设函数 $y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 Ox 轴的垂线，上述两直线与 Ox 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

十、(本题满分 7 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，又

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、(本题满分 6 分) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 6 分) 设向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

(1) p 为何值时该向量组线性无关？关在此时将向量 $\{\alpha\}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性表出；

(2) p 为何值时该向量组线性无关？关在此时将出它的秩和一个极大线性无关组.

2000 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$________.

(3) 积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$________.

(4) 曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，又 $\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=$________.

二、选择题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足　(　)

(A) $a<0,b>0$　(B) $a>0,b>0$　(C) $a\leqslant0,b>0$　(D) $a\geqslant0,b<0$

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,且 $f'(0)=0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(3) 设 $f(x)$,$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有　(　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(b)>f(b)g(b)$　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为　(　)

(A) 0　(B) 6　(C) 36　(D) ∞

(5) 具有特解 $y_1=e^{-x}$,$y_2=2xe^{-x}$,$y_3=3e^x$ 的 3 阶常数齐次线性微分方程是　(　)

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

三、(本题满分 5 分) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\,dx$.

四、(本题满分 5 分) 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$ 及直线 $l:x+y=t\ (t\geqslant0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $\int_0^x S(t)\,dt$,其中 $x\geqslant0$.

五、(本题满分 5 分) 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geqslant3)$.

六、(本题满分 6 分) 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,dt$.

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分) 某湖泊的水量为 V,每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$,流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$,流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$,超过国家规定指标. 为了治理污染,从 2000 年初起,限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至少需经过多少年,湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?(注:设湖泊中 A 的浓度是均匀的.)

八、(本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad \int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

试证在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、(本题满分 6 分) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 的高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 的点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

十、(本题满分 8 分) 设曲线 $y=ax^2\ (a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时，该图形绕 Ox 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，又 $f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 证明当 $x\geqslant 0$ 时，成立不等式 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

十二、(本题满分 8 分) 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}、\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}、\boldsymbol{\gamma}=(0,0,8)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}、\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

十三、(本题满分 7 分) 已知向量组 (Ⅰ)：

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}、\ \boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}}、\ \boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}$$

和向量组 (Ⅱ)：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}}、\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}、\ \boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^{\mathrm{T}}.$$

又两向量组的秩 r(Ⅰ) = r(Ⅱ)，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，求 a,b 的值.

2001 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

(3) 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$________.

(4) 过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为________.

(5) 设方程 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ 有无穷多组解，则 $a=$________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 （　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 （　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 （　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则 （　　）

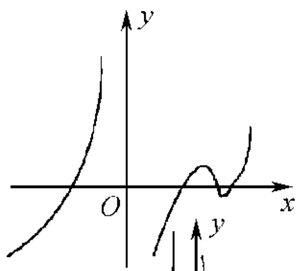
(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$

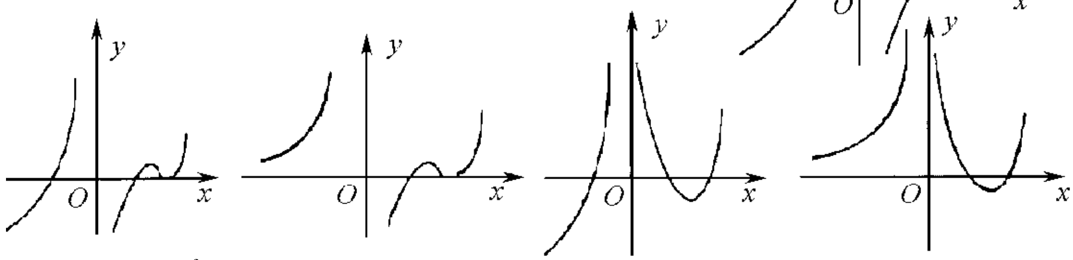
(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$，在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$

(5) 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导，它的图形如右图所示，则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 （　　）





(A)　　(B)　　(C)　　(D)

三、（本题满分 5 分）求 $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、（本题满分 7 分）求极限 $\displaystyle\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、（本题满分 7 分）设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)$ $(x\geqslant 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.［在直角坐标系下曲率公式为 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$］

六、（本题满分 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)\,dt = x^2e^x.$$

求 $f(x)$.

七、（本题满分 7 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且

$f(0)=0$，$g(0)=2$，求$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$.

八、(本题满分 9 分) 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 Oy 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程；

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

九、(本题满分 7 分) 一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面积 S 成正比，比例常数 $K>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

十、(本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日 (Lagrange) 余项的一阶麦克劳林 (Maclaurin) 展开公式；

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 6 分) 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位阵，求 $\boldsymbol{X}$.

十二、(本题满分 6 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，若

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2、\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3、\quad \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4、\quad \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论实数 t 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$、$\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

2002 年试题

一、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分.)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

(2) 位于曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，Ox 轴上方的无界图形的面积是________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$的特解是________.

(4) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=$________.

(5) 矩阵 $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分.）

(1) 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$　　(　　)

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是　　(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)\,dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)\,dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限　　(　　)

(A) 不存在　　(B) 等于 1　　(C) 等于 2　　(D) 等于 3

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则　　(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

(5) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而得量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有　　(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

三、（本题满分 6 分）已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、（本题满分 7 分）设

$$f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\[2mm] \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

求函数 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)\,dt$ 的表达式.

五、（本题满分 7 分）已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}=1$，且满足

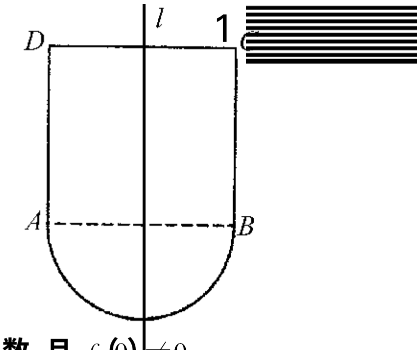
$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

求 $f(x)$.

六、（本题满分 7 分）求微分方程 $x\,dy+(x-2y)\,dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、（本题满分 7 分）某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为

矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比 $5:4$，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m（米）？



八、（本题满分 8 分）设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、（本题满分 8 分）设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

十、（本题满分 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，$f''(0)\neq 0$. 证明存在惟一的一组实数 λ_1、λ_2、λ_3，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、（本题满分 6 分）已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

（1）证明矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；

（2）若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩形 $\boldsymbol{A}$.

十二、（本题满分 6 分）已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，这里 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，且其中 $\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，又如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

2003 年试题

一、填空题（本题共 6 个小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（1）若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$________.

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是________.

（3）$y=2^x$ 的麦克劳林（Maclaurin）展开式中 x^n 项的系数是________.

（4）设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$ $(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

（5）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=$________.

（6）设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，又若

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix},$$

则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

二、选择题（本题共 6 个小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一

项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$、$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有　(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(2) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于　(　　)

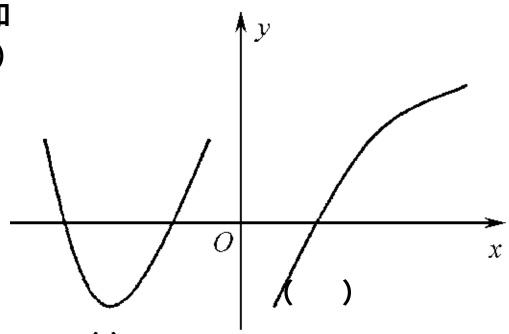
(A) $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$　　(B) $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

(C) $(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　(D) $(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的解,则 $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 的表达式为　(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有　(　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点

(5) 设 $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$,$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$,则　(　　)

(A) $I_1>I_2>1$　　(B) $1>I_1>I_2$　　(C) $I_2>I_1>1$　　(D) $1>I_2>I_1$

(6) 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、…、$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、…、$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则　(　　)

(A) 当 $r<s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关　　(B) 当 $r>s$ 时,向量组Ⅱ必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关　　(D) 当 $r>s$ 时,向量组Ⅰ必线性相关

三、(本题满分 10 分)设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0.\end{cases}$$

问 a 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

四、(本题满分 9 分)设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u\end{cases}\quad(t>1)$$

所确定,试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分) 计算不定积分 $\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 12 分) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

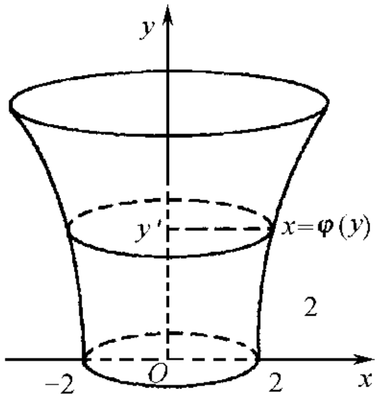
七、(本题满分 12 分) 讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分) 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 Oy 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 Ox 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九、(本题满分 10 分) 有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)\ (y\geqslant 0)$ 绕 Oy 轴旋转而成的旋转曲面 (如图)，容器的底面圆的半径为 2m. 根据设计要求，当以 $3\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前，容器内无液体).



(1) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在 (a,b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 10 分) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 a 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

十二、(本题满分 8 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

2004 年试题

一、填空题(本题共 6 个小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=t^3-3t+1. \end{cases}$$

确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________.

(3) 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$________.

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定,则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(5) 微分方程 $(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$ 满足 $y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为________.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

二、选择题(本题共 8 个小题,每小题 4 分,满分 32 分,每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量

$$\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t、\quad \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t、\quad \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$$

排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是 (　　)

(A) $\alpha、\beta、\gamma$　(B) $\alpha、\gamma、\beta$　(C) $\beta、\alpha、\gamma$　(D) $\beta、\gamma、\alpha$

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则 (　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(9) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于 (　　)

(A) $\displaystyle\int_1^2\ln^2x\mathrm{d}x$　(B) $\displaystyle2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$　(D) $\displaystyle\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得 (　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加 (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$ (D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为 ( )

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

(12) 设函数 $f(x)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 ( )

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$ (B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r$ (D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,r\mathrm{d}r$

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(14) 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

三、解答题（本题共 9 个小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15) （本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16) （本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式；

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) （本题满分 11 分）设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，

（Ⅰ）证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的值域.

(18) （本题满分 12 分）曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0$，$x=t\ (t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 Ox 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

（Ⅰ）求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值；

（Ⅱ）计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

（19）（本题满分 12 分）设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

（20）（本题满分 11 分）某种飞机在机场降落时，为了减小滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下来.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

（21）（本题满分 10 分）设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（22）（本题满分 9 分）设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

（23）（本题满分 9 分）设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$$

的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

二、全国硕士研究生招生考试数学(二)试题解答部分

1987 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：原式$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n-2}{n+1}\right)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left[1+\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)\right]\right\}$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)n\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+1}\right]=e^{-3}.$$

这里注意到当$|x|$足够小时,$\ln(1+x)\sim x$.

(2) 解：$y'=\frac{1}{1+ax}\cdot(1+ax)'=\frac{a}{1+ax}$，　$y''=\frac{-a\cdot a}{(1+ax)^2}=\frac{-a^2}{(1+ax)^2}$.

(3) 解：由题设有 $y'=\frac{1}{1+x^2}$，令 $x=1$，可得

切线斜率 $k=\frac{1}{2}$,法线斜率 $k_1=-\frac{1}{k}=-2$.

故过点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 的切线方程为 $y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$. 法线方程为 $y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$.

(4) 解：由积分性质，有 $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$，故

$$\int_a^b f'(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\,d(2x)=\frac{1}{2}f(t)\Big|_{2a}^{2b}=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)].$$

(5) $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内至少存在一点ξ,使$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$.

二、选择题

(1) 解：因为$|x\sin x|$,$e^{\cos x}$均为偶函数,其乘积仍为偶函数,即$f(-x)=f(x)$. 故选(D).

(2) 解：当 $x_n=n\pi$ 时,$f(n\pi)=0$ 当 $x_n=(2n-1)\frac{\pi}{2}$时,$f(x_n)\to\infty$,当 $n\to+\infty$时.
故选(C).

(3) 解：先将题设式变形,再依函数导数定义可有

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}$$
$$=f'(a)+f'(a)=2f'(a).$$

故选(B).

(4) 解：设 $tx=u$. 当 $x=0$ 时,$u=0$ 当 $x=\frac{s}{t}$时,$u=s$.

于是　$I = t\int_0^s f(u)\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}u = \int_0^s f(u)\mathrm{d}u$，　即 I 只依赖于 s.

故选(D).

三、解：由题设，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{5\sin t}{5(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

且
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-1}{1-\cos t}\cdot\frac{1}{5(1-\cos t)}=-\frac{1}{5(1-\cos t)^2}.$$

四、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$　(分母用 $\mathrm{e}^x-1\sim x$ 代换后，再用洛必达(L′Hospital)法则)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

五、解：(1) 在(a,b)内任取两个不同点 x_1、x_2，根据拉格朗日公式，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)，\quad \xi\text{ 在 }x_1\text{ 与 }x_2\text{ 之间}.$$

因为 $f'(\xi)>0$，所以当 $x_2>x_1$ 时 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 单调增加.

(2) 因为 $g''(c)=\lim\limits_{x\to c}\frac{g'(x)}{x-c}<0$，故由极限的保号性，在 c 的邻域 $0<|c-x|<\delta$ 内 $\frac{g'(x)}{x-c}<0$. 从而当 $c-\delta<x<c$ 时，$g'(x)>0$ 当 $c+\delta>x>c$ 时，$g'(x)<0$.

进而，当 $c-\delta<x<c$ 时有

$$g(x)-g(c)=g'(\xi_1)(x-c)<0\quad(c-\delta<\xi_1<c),$$

当 $c<x<c+\delta$ 时有

$$g(x)-g(c)=g'(\xi_2)(x-c)<0\quad(c<\xi_2<c+\delta).$$

即当 $0<|x-c|<\delta$ 时总有 $g(x)-g(c)<0$.　故 $g(c)$ 为极大值.

六、解：当 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时，有

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x\quad\text{(分子、分母同除以 }\cos^2x)$$

$$=\int\frac{1}{a^2\tan^2x+b^2}\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{1}{b}\tan x\right)+C.$$

当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，有

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\tan x+C.$$

当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，有

$$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\cot x+C.$$

七、解 1：先凑微分，再用分部积分，有

$$\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\arcsin\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8},$$

这里注意到 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ 的事实即可.

解 2：令 $u = \arcsin x$，有 $x = \sin u$，$dx = \cos u\,du$，则

$$\int_0^1 x\arcsin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cdot u \cdot \cos u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin 2u\,du$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,d(\cos 2u) = -\frac{1}{4}u\cos 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2u\,du$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

八、解：设所求点为 (x, y)，则过此点的切线方程为

$$Y - y = 2x(X - x).$$

由此得切线在 Ox 轴的截距 $a = \frac{x^2+1}{2x}$，在 Oy 轴的截距 $b = x^2 + 1$. 于是，所求面积

$$S(x) = \frac{1}{2}ab - \int_0^1 (-x^2+1)\,dx = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4x} - \frac{2}{3}.$$

令 $$S'(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(3x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0,$$

解得驻点 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 又因

$$S''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(6x + \frac{2}{x^3}\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}} > 0,$$

所以 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 为极小值点，也是最小值点.

故所求点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$，而所求面积 $S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}(2\sqrt{3} - 3)$.

九、解：由题设及旋转体体积公式有

$$V = \pi\int_0^{\pi}(\sin x + 1)^2\,dx = \pi\int_0^{\pi}\left[\frac{1-\cos 2x}{2} + 2\sin x + 1\right]dx = \frac{\pi}{2}(8 + 3\pi).$$

十、解：由题设原方程可改写成 $y' + \frac{1}{x}y = 1$，则由一阶线性微分方程求解公式有

$$y = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x},$$

由 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$，得 $C = -1$，所求之特解为 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$.

十一、解：相应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$，其根为 $r = -1$（重根）.

故对应齐次方程之通解为 $Y = (C_1 + C_1 x)e^{2x}$.

设所求方程的特解为 $y^* = (ax + b)e^x$，则注意到

$$y^{*\prime} = (ax + a + b)e^x,\quad y^{*\prime\prime} = (ax + 2a + b)e^x,$$

代入原方程有　$(4ax+4a+4b)e^x=xe^x$.

解得　$a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{4}$.　因此得特解 $y^*=\frac{1}{4}(x-1)e^x$.

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$.

1988 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x+\cos x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$，

又 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$，解得 $a=1$.

(2) 解：由设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=t\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2tx}{x}\right)=te^{2t}$，故 $f'(t)=(2t+1)e^{2t}$.

(3) 解：原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x\right\}=e^0=1$.

这里注意到，当 $x\to0$ 时，$\tan x\sim x$ 及 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\frac{1}{x}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]=0$.

(4) 解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，且

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^2 e^t 2t\,dt=2\int_0^2 t\,d(e^t)=2\left[te^t-e^t\right]_0^2=2(e^2+1).$$

(5) 解：对原式两边求导得 $f(x^3-1)\cdot3x^2=1$，即 $f(x^3-1)=\frac{1}{3x^2}$.

令 $x^3-1=7$，得 $x=2$，故 $f(7)=\frac{1}{3\cdot2^2}=\frac{1}{12}$.

二、选择题

(1) 解：由 $f'(0)=6$，知图形在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=6x$.

令 $y=0$，可解得 $x=-\frac{1}{6}$，即切线与 Ox 轴交点为 $\left(-\frac{1}{6},0\right)$.

故选 (A).

(2) 解：(特值法) 取 $f(x)=0, g(x)=1$，则有 $f(x)<g(x)$. 容易验证 (A)、(B) 错，而 (C) 正确. 代入 (D) 中得 $x>0$，但题设中无此假设，即是说当 $x\leqslant0$ 时，(D) 亦不真.

故选 (C).

或由题设 $f(x)$，$g(x)$ 可导，则它们连续. 于是有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. 而由 $f(x_0)<g(x_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 知选项 (C) 成立.

(3) 解：由题设在 $x=x_0$ 处，$dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{dy}{\Delta x}=\frac{1}{2}$.

故选 (B).

(4) 解：由直角坐标系下旋转体体积公式，有

$$V=\pi\int_0^\pi(\sin^{\frac{3}{2}}x)^2dx=-\pi\int_0^\pi(1-\cos^2x)\,d(\cos x)=\frac{4}{3}\pi.$$

故选 (B).

(5) 解：依题意 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$，有 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$.
因此，驻点 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值值点.
故选 (A).
三、解：由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.
由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 因此当 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.
四、解：由题设，有 $y'=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$，则

$$y''=e^{xy}(x^2y''+2xy'+xy'+y)+e^{xy}(x^2y'+xy+1)(xy'+y).$$

当 $x=0$ 时 $y=1$，代入上两式得 $y'|_{x=0}=e^0=1$，$y''|_{x=0}=e^0+e^0=2$. 2

此外，亦可由前式得 $y'=\dfrac{e^{xy}(1+xy)}{1-x^2e^{xy}}$，又 $x=0$ 时 $y=1$. 将 $x=0$，$y=1$ 代入上式亦可得 $y'|_{x=0}=1$. 对 y' 再微导可求 $y''|_{x=0}=2$.
五、解：设圆的周长为 x，则正方形的周长为 $a-x$，两图形的面积之和

$$S=\left(\frac{a-x}{4}\right)^2+\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},$$

由 $$S'=\frac{4+\pi}{8\pi}x-\frac{a}{8}\quad\text{及}\quad S''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0.$$

令 $S'=0$，解得惟一驻点 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$. 又 $S''>0$.

故当圆的周长 $x=\dfrac{\pi a}{4+\pi}$，正方形的周长为 $a-x=\dfrac{4a}{4+\pi}$时，两图形的面积之和为最小.
六、解：被积函数可写为

$$f(t)=\begin{cases}1+t, & -1\leqslant t<0,\\ 1-t, & 0\leqslant t<+\infty.\end{cases}$$

下面分段考虑：当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt=\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt=\frac{1}{2}(1+t)^2\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(1+x)^2.$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt=\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-x)^2.$$

故 $$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1+x)^2, & -1\leqslant x<0;\\ 1-\dfrac{1}{2}(1-x)^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

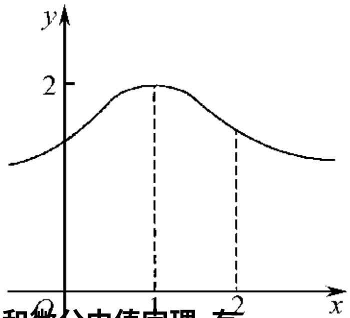
七、解：由题设经计算可得下表.

单调增加区间	$(-\infty,1)$
单调减少区间	$(1,+\infty)$
极值点	$x=1$
极　值	$y_{\max}=2$
凹区间	$(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$

(续表)

凸区间	$(0,2)$
拐点	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$及$\left(2,\frac{2}{3}\right)$
渐近线	$y=0$

再根据上表中的数据,所画函数图象大致如下图所示.



八、解:(1) 由积分中值定理和微分中值定理,有

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t\\
=&\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]\quad(-a\leqslant\xi\leqslant a),\\
=&\lim_{a\to 0^+}f'(\eta)=\lim_{\eta\to 0^+}f'(\eta)\quad(\xi-a\leqslant\eta\leqslant\xi+a),\\
=&f'(0).
\end{aligned}$$

此外还可先用 $t+a=u$,$t-a=v$ 对积分式进行代换后,再用 L′Hospital 法则计算极限亦可.

(2) 由题设 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 及积分中值定理,有

$$-M\leqslant -f(x)\leqslant -m,\quad m\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t\leqslant M.$$

上面两不等式相加得

$$-(M-m)\leqslant\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\leqslant M-m,$$

即
$$\left|\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\leqslant M-m.$$

九、解:由一阶线性微分方程通解公式有

$$\begin{aligned}
y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\
&=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x}(\arctan x+C).
\end{aligned}$$

十、解:题设方程相应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,其根为 $r_1=1$,$r_2=2$.

因此对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^*=ax\mathrm{e}^x$,代入原方程中,解得 $a=-2$.

于是,原方程通解为 $y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x$.

因为积分曲线与曲线 $y=x^2-x+1$ 有公共切线，所以 $y(0)=1$，$y'(0)=-1$，代入通解中得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\C_1+2C_2=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\C_2=0.\end{cases}$$

故所求函数为 $y=(1-2x)e^x$.

1989 年试题参考答案

2

一、填空题

(1) 解：这是 $0\cdot\infty$ 型，可化为 $\frac{0}{0}$ 型，再由 L'Hospital 法则或无穷小量代换均可有（这里由 $x\to0$ 时 $\tan2x\sim2x$）

$$\lim_{x\to0}x\cot2x=\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

(2) 解：利用分部积分可有

$$\int_0^{\pi}t\sin t\,dt=\int_0^{\pi}t\,d(-\cos t)=-t\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt$$

$$=\pi+\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\pi+\sin t\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

(3) 解：由题设 $y'=(x-1)(x-2)$，在 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $y'(0)=2$，
故所求（点斜式）切线方程 $y-0=2(x-0)$，即 $y=2x$.

(4) 解：由题设 $f(0)=0$，再由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!.$$

(5) 解：设 $\int_0^1f(t)\,dt=A$，显然它是常数，这样 $f(x)=x+2A$，两边积分得

$$\int_0^1f(t)\,dt=\int_0^1x\,dx+2A,\Rightarrow A=\frac{1}{2}+2A,\Rightarrow A=-\frac{1}{2},$$

故 $f(x)=x-1$.

(6) 解：由设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又由 $\lim\limits_{x\to0^-}(a+bx^2)=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$，得知 $a=b$.

(7) 解 1：对方程两边关于 x 求导有 $\sec^2y\cdot y'=1+y'$. 解得 $y'=\cot^2y$.
于是 $dy=y'dx=\cot^2y\,dx$，或 $\frac{1}{(x+y)^2}dx=\frac{1}{\tan^2y}$.
解 2：对方程两边取微分 $\sec^2y\,dy=dx+dy$，解出 dy 即得结果.

二、计算题

(1) 解：由复合函数导法则有

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}\left(e^{-\sqrt{x}}\right)'=-\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\left(1-e^{-2\sqrt{x}}\right)}.$$

(2) 解：先凑微分再直接积分可有

$$\int\frac{dx}{x\ln^2x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}+C.$$

（3）解：$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}}=e^2$.

这里利用了公式 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$，注意到当 $u\to0$ 时，$\ln(1+u)\sim u$.

（4）解：由题设及微分计算公式有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2t},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

（5）解：设 $2x=t$，则 $2dx=dt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$ 当 $x=1$ 时，$t=2$. 于是

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{t^2}{4}f''(t)\,dt=\frac{1}{8}\left([t^2f'(t)]_0^2-2\int_0^2tf'(t)\,dt\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^2t\,df(t)=-\frac{1}{4}\left([tf(t)]_0^2-2\int_0^2f(t)\,dt\right)=0.$$

三、选择题

（1）解：因 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$，知曲线有水平渐近线 $y=1$ 而无铅直渐近线.

故选（A）.

（2）解：由 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 为奇次多项式，故方程 $f(x)=0$ 至少有一实根.

又 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$ 可视为 x^2 的二次三项式，其判别式

$$\Delta=12(3a^2-5b)<0,$$

意即 $f'(x)>0$，知 $f(x)$ 严格单调增加，方程 $f(x)=0$ 有根必惟一.

故选（B）.

（3）解：由直角坐标系下旋转体体积公式，有

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2x)\,dx=\frac{\pi^2}{2}.$$

故选（C）.

（4）解：（特值法＋排除法）取 $f(x)=g(x)=-x^2$，而 $f(x)g(x)=x^4$ 取了极小值，于是排除了选项（A）和（C）.

取 $f(x)=-x^2$，$g(x)=1-x^2$，两者都在 $x=0$ 处取得极大值，而

$$\varphi(x)=f(x)g(x)=-x^2(1-x^2)$$

在 $x=0$ 处仍然取得了极大值，这是因为

$$\varphi(x)=-x^2+x^4,\ \varphi'(x)=-2x+x^4,\ \varphi''(x)=-2+12x^2$$

在驻点 $x=0$ 处 $\varphi''(x)=-2<0$，即取极大值. 于是也排除了选项（B）.

故选（D）.

（5）解：题设方程相应的特征方程为 $r^2-1=0$，其根 $r_{1,2}=\pm1$，

故 $y''-y=e^x+1$ 的特解形式为 $y^*=axe^x+b$.

故选（B）.

（6）解：由题设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，令 $h=-\Delta x$，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

存在.

故选（D）.

注：其他选项不成立的理由为：
选项(A)只能保证 $f'_+(a)$ 存在.选项(B)和(C)可用如下反例说明其不真.设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a,\\ 0, & x=a.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=a$ 间断,因此 $f(x)$ 在 $x=a$ 不可导,但选项(B)和(C)中的极限均存在(等于0).

四、解：题设方程可改写为 $y'+\dfrac{1-x}{x}y=\dfrac{1}{2}e^{2x}$ $(-\infty<x<+\infty)$,其为一阶线性微分方程.由一阶线性微分方程通解公式有

$$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left[\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}+C\right]=\frac{1}{x}(Ce^x+e^{2x}).$$

由 $y(1)=0$,得 $C=-e$，故所求解为 $y=\dfrac{e^x}{x}(e^x-e)$.

五、解：对 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x tf(t)\,dt$ 连续两次求导,得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,dt,\quad f''(x)=-\sin x-f(x),$$

设 $y=f(x)$ 有 $y''+y=-\sin x$. (*)

此为二阶线性微分方程.初始条件为 $y\big|_{x=0}=f(0)=0$，$y'\big|_{x=0}=f'(0)=1$.
其相应特征方程为 $r^2+1=0$,其根 $r_{1,2}=\pm i$.知对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

又非齐次方程(*)的特解形如 $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$,代回方程,定出 $a=0$，$b=\dfrac{1}{2}$.

于是非齐次方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{x}{2}\cos x$.

由初始条件定出 $C_1=\dfrac{1}{2}$,$C_2=0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$.

六、证：由 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\sqrt{2}$. 设 $F(x)=\dfrac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$.

令 $F'(x)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}=0$，得驻点 $x=e$，又 $F(e)=-2\sqrt{2}<0$.

当 $0<x<e$ 时,$F'(x)<0$，知 $F(x)$ 单调减少,$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=+\infty$；

当 $e<x<+\infty$ 时,$F'(x)>0$，知 $F(x)$ 单调增加,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

故由连续函数性质知,$F(x)$ 在 $(0,e)$,$(e,+\infty)$ 内分别至少有一个零点.于是原命题得证.

七、解：由题设可得计算结果如下表所示：

单调减少区间	$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$	凹区间	$(-3,0)$,$(0,+\infty)$
单调增加区间	$(-2,0)$	凸区间	$(-\infty,-3)$
极值点	-2	拐点	$\left(-3,-\dfrac{2}{9}\right)$
极值	$-\dfrac{1}{4}$	渐近线	$x=0$ 和 $y=0$

具体计算过程如：因为 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$，$y'=\dfrac{x+2}{x^3}$，$y''=\dfrac{x(2x+6)}{x^5}$.

令 $y'=0$，得 $x=-2$；令 $y''=0$，得 $x=-3$. 又 $x=0$ 时，y，y'，y'' 均无意义.

这样可有下表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	3	$(0,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	无意义	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	无意义	$+$
y	$\searrow$ $\cap$	拐点 $\left(-3,-\dfrac{2}{9}\right)$	$\searrow$ $\cap$	极值点 $-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$ $\cup$	无意义	$\searrow$ $\cap$

八、解 1：因为曲线过原点，所以 $c=0$. 由题设，有

$$\frac{1}{3}=\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

故得 $b=\dfrac{3}{2}(1-a)$. 从而

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right].$$

又　$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\dfrac{2}{5}a+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}a-\dfrac{8}{27}(1-a)\right]=0$，　且 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}=\dfrac{4\pi}{135}$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，解得 $a=-\dfrac{5}{4}$，代入 b 的表达式得 $b=\dfrac{3}{2}$.

又因 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}>0$，故当 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=0$ 时，旋转体体积最小.

解 2：由题设曲线过原点，故 $c=0$. 又由题设

$$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right),$$

及 $$\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3},\ \Rightarrow\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}.$$

问题即求函数 $V(a,b)$ 在条件 $\varphi(a,b)=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{3}=0$ 下的最小值.

作拉格朗日（Lagrange）函数

$$F(a,b)=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{b^2}{3}\right)+\lambda\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

由 $$\begin{cases}F'_a=\pi\left(\dfrac{2a}{5}+\dfrac{1}{2}b\right)+\dfrac{\lambda}{3}=0,\\ F'_b=\pi\left(\dfrac{1}{2}a+\dfrac{2}{3}b\right)+\dfrac{\lambda}{2}=0,\\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

联立消去 λ 解出 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，得惟一驻点 $\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$.

根据实际意义，知当 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=0$ 时，体积 V 最小.

1990 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'}=-\tan t$. 令 $t=\frac{\pi}{6}$,得切线斜率 $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

因此法线斜率 $k_1=\sqrt{3}$. 故由直线点切式方程知所求法线方程为 $y=\sqrt{3}x-1$.

(2) 解：由复合函数求导法则有

$$y'=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\left(\tan\frac{1}{x}\right)'\cdot\sin\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\cdot\sec\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

(3) 解：令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-t^2$，$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$，且

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t^2)(-2t^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(2t^2-2t^4)\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{2}{5}t^5\right]_0^1=\frac{4}{15}.$$

(4) 解：在 $[-2,-1]$ 上 $\mathrm{e}^{-x^3}>\mathrm{e}^{x^3}$，故由积分性质 $\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

(5) 解：由于对任意实数 x 均有 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$.

二、选择题

(1) 解：由题设及下面极限式

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0,$$

必有 $1-a=0$，$a+b=0$，解得 $a=1$，$b=-1$.

故选 (C).

(2) 解：设 $F'(x)=f(x)$,则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=\mathrm{d}[F(x)+C]=f(x)\mathrm{d}x$.

故选 (B).

(3) 解：由题设先对 $f(x)$ 逐次求导,得

$$f''(x)=([f(x)^2])'=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3;$$

$$f'''(x)=3\cdot 2[f(x)]^2f'(x)=3![f(x)]^4;$$

一般地有 $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$ (可用数学归纳法证明).

应选 (A).

(4) 解：由复合函数求导公式有

$$F'(x)=f(e^{-x})\cdot(e^{-x})'-f(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x).$$

故选 (A).

(5) 解：注意到 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq 0=f(0)=F(0)$,即 $F(x)$ 在 $x=0$ 有极限,但不等于 $F(0)$.

故选 (B).

三、计算题

(1) 解：由 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim \mathrm{e}^{g(x)\ln[f(x)]}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[f(x)-1]}$,这里 $\lim\{\ln[f(x)]\}=1$. 则

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}.$$

又由题设 $e^{2a}=9$，得 $a=\ln 3$.

(2) 解：对方程两边求导数，即 $2y'-1=(1-y')\ln(x-y)+(1-y')$.

解得 $y'=\dfrac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}=\dfrac{x}{2x-y}$，故 $dy=\dfrac{x}{2x-y}dx$.

(3) 解：令 $y''=2\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}=0$，在 $x>0$ 时解得 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(此时\ y_0=\dfrac{3}{4}\right)$.

在此点左右邻域 y'' 变号，故 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)$ 是拐点.

(4) 解：先凑微分，再分部积分有

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx&=\int\ln x\,d\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\ln x}{1-x}-\int\frac{dx}{x(1-x)}\\&=\frac{\ln x}{1-x}-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx\\&=\frac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.\end{aligned}$$

(5) 解：题设方程可化为 $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{1}{x}$. 由一阶线性微分方程通解公式有

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}\ln^2x+C\right).$$

又由 $y|_{x=e}=1$，解出 $C=\dfrac{1}{2}$，故所求特解为 $y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

四、解：设所求点为 $P(\xi,\eta)$，则椭圆在点 P 处的切线方程为 $\dfrac{\xi x}{a^2}+\dfrac{\eta y}{b^2}=1$.

在 Ox 轴和 Oy 轴上截距分别为 $\dfrac{a^2}{\xi}$ 和 $\dfrac{b^2}{\eta}$. 于是所围图形面积

$$S=\frac{a^2b^2}{2\xi\eta}-\frac{1}{4}\pi ab,\quad \xi\in(0,a).$$

为求 S 的最小值，只需求 $\zeta=\xi\eta=\dfrac{b}{a}\xi\sqrt{a^2-\xi^2}$ 的最大值.

令 $\dfrac{d\zeta}{d\xi}=\dfrac{b(a^2-2\xi^2)}{a\sqrt{a^2-\xi^2}}=0$，解得惟一驻点 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

由于 $\dfrac{d\zeta}{d\xi}$ 在 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 的左、右邻域内的符号由正变负，知 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 为 ζ 的最大值点，此时 $\eta=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

故所求点 $P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 时，所围成图形面积最小.

五、解：设 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\pi}$，有 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2}<0$，知 $f(x)$ 单减，且当 $0<x<+\infty$ 时，$f(x)>f(+\infty)=0$.

即　$\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}>0$，或 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$，$x>0$.

六、解：令 $u=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}t=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}t$，从而

$$\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u,$$

故
$$\begin{aligned}f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)&=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u\\&=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t \quad \text{(将上面后一式中 } u \text{ 换成 } t\text{)}\\&=\int_1^x\frac{t\ln t+\ln t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x.\end{aligned}$$

2

七、解：设所作切线与抛物线相切于点 $(x_0,\sqrt{x_0-2})$，且切线斜率为

$$y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}},$$

则切线方程为 $$y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0).$$

将点 $P(1,0)$ 的坐标代入切线方程，解得 $x_0=3$，则切线斜率 $y'\Big|_{x=3}=\frac{1}{2}$，切点 $(3,1)$.

因此，切线方程为 $(y-1)=\frac{1}{2}(x-3)$，即 $y=\frac{1}{2}(x-1)$. 故所求旋转体的体积

$$V=\pi\int_1^3\frac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}.$$

八、解：相应齐次方程的特征方程为 $r^2+4r+4=0$，其根 $r=-2$（重根）. 对应齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

当 $a\neq-2$ 时，设非齐次方程的特解为 $y^*=A\mathrm{e}^{ax}$，

代入原方程得 $A=\frac{1}{(a+2)^2}$，特解为 $y^*=\frac{1}{(a+2)^2}\mathrm{e}^{ax}$.

当 $a=-2$ 时，设非齐次方程的特解为 $y^*=A_1x^2\mathrm{e}^{-2x}$，

代入原方程得 $A_1=\frac{1}{2}$，特解为 $y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

故通解为 $$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{(a+2)x^2}\mathrm{e}^{ax}, & \text{当 } a\neq-2 \text{ 时},\\ \left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}, & \text{当 } a=-2 \text{ 时}.\end{cases}$$

1991 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由 $y'=\frac{1}{1+3^{-x}}\cdot(-1)\cdot3^{-x}\ln3$，则 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\frac{3^{-x}\ln3}{1+3^{-x}}\mathrm{d}x$.

(2) 解：由 $y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$，解不等式 $y''<0$，得知在区间 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内可使 $y''<0$，此区间即为函数上凸区间.

(3) 解：广义积分也可类似应用分部积分法

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\ln x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_0^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=0-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1.$$

(4) 解：由题设知质点所经路程长为

$$s=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}t\sin(t^2)\,dt=\frac{1}{2}\Big[\cos(t^2)\Big]_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2}(m).$$

(5) 解：将被求极限式的分子、分母同除以 $e^{\frac{1}{x}}$，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}-1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}+1}=-1.$$

二、选择题

(1) 解：依题意两曲线在 $(1,-1)$ 点切线斜率相等，有 $a+b=-2$.

第二条曲线方程两边对 x 求导，得 $2y'=y^3+3xy^2y'$.

将 $x=1$，$y=-1$ 代入，解得切线斜率 1. 因此对第一条曲线方程有

$$y'|_{x=1}=2+a=1,\ \Rightarrow\ a=-1.$$

将 a 及 $(1,-1)$ 代入第一条曲线方程或代入 $a+b=-2$，可得 $b=-1$.

故选(D).

(2) 解：由题设及分段函数积分性质，有

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x t^2dt, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \int_0^1 t^2dt+\int_1^x(2-t)\,dt, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$$

故选(B).

(3) 解 1：在 x_0 的去心邻域 $0<|x-x_0|<0$ 内有 $f(x)<f(x_0)$，即 $-f(x)<-f(x_0)$.

从而　$-f(-(-x))>-f(-(-x_0))$.

知选项(B)真与此同时否定了选项(C). 因为 $f(x)$ 无可导条件，所以否定选项(A).

因为极大值是邻域中的最大值，而不是"对一切 x"，所以否定选项(D).

故选(B).

解 2：(排除法) 由于在不可导点函数亦可取得极值，知选项(A)不真. 再注意到极值的局部性质，可否定选项(D).

取 $f(x)=-|x-1|$，其在 $x_0=1$ 处取极大值，但 $-x_0=-1$ 并非 $-f(x)$ 的极小值点. 知

选项(C)也不真.

故选(B).

(4) 解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=+\infty$，知曲线有水平渐近线 $y=1$ 和铅直渐近线 $x=0$.

故选(D).

(5) 解：由于两质点引力与它们的质量乘积成正比,与其距离平方成反比,依图建立坐标系,再从质量为 m 的质点和细杆间引力大小及积分上、下限即可看出(A)正确.

故选(A).

三、计算题

(1) 解：由题设及参数方程求导公式,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}，\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^2}.$$

(2) 解：令 $t=\sqrt{x}$,则 $x=t^2$,$dx=2t\,dt$.

当 $x=1$ 时,$t=1$ 当 $x=4$ 时,$t=2$. 于是

$$\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^2\frac{2}{t(1+t)}dt=2\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2\left[\ln t-\ln(1+t)\right]_1^2=2\ln\frac{4}{3}.$$

(3) 解：注意到 $x\to 0$ 时 $e^x-1\sim x$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(4) 解：由三角函数公式 $2\sin^2 x=1-\cos 2x$,有

$$\int x\sin^2 x\,dx=\int x\,\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int x\,dx-\frac{1}{4}\int x\,d(\sin 2x)$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$

(5) 解：题设方程可化为 $y'+\dfrac{1}{x}y=e^x$,则由一阶线性微分方程的求解公式有

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{1}{x}\left[(x-1)e^x+C\right].$$

当 $x=1$,$y=1$ 时,得 $C=1$，故所求特解为 $y=\dfrac{x-1}{x}e^x+\dfrac{1}{x}$.

四、解：设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$,有 $f(1)=2\ln 2>0$.

由 $f'(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0\ (x>0)$，知 $f(x)$ 单增,且当 $x>1$ 时,$f(x)>f(1)=2\ln 2>0$.

从而得 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$，即 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$，其中 $x>1$.

五、解：相应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,其根为 $r_{1,2}=\pm i$.

故对应齐次方程的特解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

又非齐次方程 $y''+y=x$ 的特解形式为 $y_1=a_1x+b_1$.

代入方程中得 $a_1=1$,$b_1=0$.因此 $y_1=x$.

而非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的特解形式为 $y_2=x(a_2\cos x+b_2\sin x)$.

代入方程中得 $a_2=0$,$b_2=\frac{1}{2}$,因此 $y_2=\frac{1}{2}x\sin x$.

故原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$.

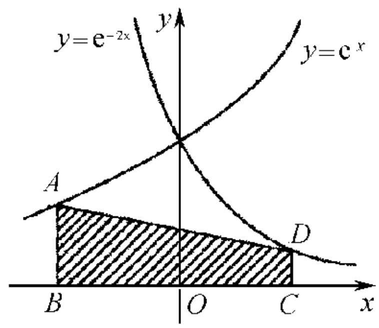
六、解:曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 与 Ox 轴的交点为 $x=1$,$x=2$,而所围图形在 Ox 轴下方,故所求旋转体体积

$$V=\int_1^2 2\pi x\,|y|\,\mathrm{d}x=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi.$$

七、解:设 B,C 的横坐标分别为 ξ,η.则 $|AB|=\mathrm{e}^{\xi}$,$|DC|=\mathrm{e}^{-2\eta}$.

于是 $\mathrm{e}^{\xi}:\mathrm{e}^{-2\eta}=2:1$,则 $\xi=\ln 2-2\eta$. 又

$$|BC|=\eta-\xi=3\eta-\ln 2,\quad \eta>0.$$



梯形 $ABCD$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|BC|(|AB|+|DC|)=\frac{3}{2}(3\eta-\ln 2)\mathrm{e}^{-2\eta}.$$

由 $S'=\frac{3}{2}(3-6\eta+2\ln 2)\mathrm{e}^{-2\eta}=0$,解得驻点 $\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$.

在驻点的左、右邻域内 S' 由正变负,该驻点为函数最大值点.

故 当 $\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$,$\xi=\frac{1}{3}\ln 2-1$ 时,梯形 $ABCD$ 面积最大.

八、解:依题意,当 $x\in[0,\pi)$ 时,$f(x)=x$.于是当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时,$x-\pi\in[0,\pi)$,因此

$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi+\sin x,\quad x\in[\pi,2\pi). \tag{*}$$

当 $x\in[2\pi,3\pi)$ 时,$x-\pi\in[\pi,2\pi)$.由式(*)有

$$f(x-\pi)=(x-\pi)-\pi+\sin(x-\pi)=x\pi-2\pi-\sin x.$$

且 $$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-2\pi-\sin x+\sin x=x-2\pi,\quad x\in[2\pi,3\pi).$$

故 $$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi+\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)\,\mathrm{d}x=\pi^2-2.$$

1992 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解:由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3\mathrm{e}^{3t}f'(\mathrm{e}^{3t}-1)}{f'(t)}$,将 $t=0$ 代入式中得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=3$.

(2) 解:令 $y'=1-2\sin x=0$,在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$解得驻点 $x=\frac{\pi}{6}$,比较如下函数值:

$$y(0)=2,\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

得知 y 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

(3) 解:利用无穷小量代换注意到$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+\sin x}=0.$$

本题亦可用 L′Hospital 法则结合分子有理化求解.

(4) 解：原式 $=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{+\infty}=\left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^{+\infty}$

$=\frac{1}{2}\ln2.$

(5) 解：题设两曲线的交点为 (0,0)，(1,e)，则所求图形面积

$$S=\int_0^1(ex-xe^x)dx=\frac{1}{2}ex^2\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d(e^x)=\frac{e}{2}-1.$$

二、选择题

(1) 解：由题设且注意到下面极限式：

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0,$$

故选 (B).

(2) 解：(直接法) 将 $-x$ 直接代入 $f(x)$ 表达式有

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0.\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$$

故选 (D).

(3) 解：考虑函数的左、右极限有

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1-0}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot0=0.$$

而 $f(1+0)=\lim_{x\to1+0}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，知函数当 $x\to1$ 时极限既不存在，也不为 ∞.

故选 (D).

(4) 解：(直接法) 由题设 $F'(x)=f((x^2))(x^2)'=f(x^4)(x^2)'=2xf(x^4)$.

故选 (C).

(5) 解：由 $f'(x)=\sin x$，可有 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\sin x\,dx=-\cos x+C_1$.

从而原函数 $\int f(x)dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$.

取 $C_1=0$，$C_2=1$，得 $1-\sin x$.

故选 (B).

三、计算题

(1) 解：函数式取对数后，再用 $u(x)\to0$ 时 $\ln[1\pm u(x)]\sim\pm u(x)$ 代换 (见前文)，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}-1\right)\cdot\frac{x-1}{2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{-3(x-1)}{2(6+x)}\right]=e^{-\frac{3}{2}}.$$

(2) 解：由题设，有 $y'-e^y-xe^yy'=0$，两边再对 x 求导有

$$y''-e^yy'-(e^yy'+xe^yy'^2+xe^yy'')=0.$$

当 $x=0$ 时 $y=1$,代入上两式得 $y'|_{x=0}=\mathrm{e}$，$y''|_{x=0}=2\mathrm{e}^2$，即有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2\mathrm{e}^2$.

(3) 解1:先凑微分,再用分部积分有

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}(1+x^2)$$
$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

解2:设 $x=\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$,从而

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^2 t\cdot\sec^2 t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int\tan^2 t\,\mathrm{d}(\sec t)$$
$$=\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}(\sec t)=\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec^2 t+C$$
$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

(4) 解:注意到 $\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=1$,且 $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$,则

$$\text{原式}=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x\quad\text{(注意绝对值性质)}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=4(\sqrt{2}-1).$$

(5) 解:题设方程化为 $y'-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{x^2}{2}$,由一阶线性微分方程通解公式有

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\sqrt{x}\left(-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right)=C\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^3.$$

四、解:令 $x-2=t$,$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.当 $x=1$ 时,$t=-1$ 当 $x=3$ 时,$t=1$.于是

$$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^1(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

五、解:题设方程相应齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,解得其根为 $r_1=1$,$r_2=2$.

于是对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

由于 $\lambda=1$ 是特征方程的单根,原方程特解形式为 $y^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x$.

设 $Q=ax^2+bx$，则 $Q'=2ax+b$，$Q''=2a$，有 $2a-(2ax+b)=x$.(或将 y^* 代入原方程亦可)

由此知 $-2a=1$，$2a-b=0$,得 $a=-\dfrac{1}{2}$,$b=-1$,

知原方程特解为 $y^*=-\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{e}^x$. 故所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\mathrm{e}^x.$$

六、解：由题设及弧长公式，有

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\ln-x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=\ln3-\frac{1}{2}.$$

七、解：设切点为 $(t,\sqrt{t})$**，则可求出切线** l **的方程为**

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)，\Rightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

曲线与切线 l **及** $x=0$，$x=2$ **所围图形面积**

$$S(t)=\int_0^2\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}\right)-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

令 $S'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=0$，**解得驻点** $t=1$.

又 $S''(t)\big|_{t=1}=\left(\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\right)\Big|_{t=1}>0$. **故** $t=1$ **时，**S **取最小值**.

此时 l **的方程为** $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

八、证 1：设 $\varphi(x)=f(x)+f(x_2)-f(x+x_2)$，**有** $\varphi(0)=0$.

由 $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x+x_2)>0$，**知** $\varphi(x)$ **单增. 从而，当** $x>0$ **时，**$\varphi(x)>\varphi(0)=0$.

式中 $f'(x)-f'(x+x_2)>0$ **成立是因为：**$f''(x)<0$，$f'(x)$ **单调减少**.

于是在 $\varphi(x)>0$ **中令** $x=x_1$，**即为** $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证 2：令 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)$，**则由微分中值定理有**

$$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0\quad(0<\theta<1).$$

知 $F(x)$ **单减. 又** $x_1>0$，**故** $F(x_1)<F(0)$，**即** $f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$.

由 $f(0)=0$，**得** $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

1993 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：这是 $0\cdot\infty$ **型，化为** $\frac{\infty}{\infty}$ **型后用** L'Hospital **法则有**

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

(2) 解：对方程两边求导得

$$(2x+2yy')\cos(x^2+y^2)+e^x-xy^2xyy'=0,$$

解得

$$y'=\frac{y^2-e^2-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}.$$

(3) 解：由 $F'(x)=\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，**故当** $0<x<\frac{1}{4}$ **时，**$F'(x)<0$.

因此,在$\left(0,\frac{1}{4}\right]$或$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上$f(x)$单减.

(4) 解:将$\tan x$表示成$\frac{\sin x}{\cos x}$,则有

$$\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C.$$

(5) 解:由题设知$y=f(x)$满足$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\ln(1+x^2)$,$y|_{x=0}=-\frac{1}{2}$.因而

$$\begin{aligned}y&=\int x\ln(1+x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x)^2\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.\end{aligned}$$

将$x=0$,$y=-\frac{1}{2}$代入上式得$C=-\frac{1}{2}$,故$f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

二、选择题

(1) 解:当取$x_n=\frac{1}{n\pi}$时,$f(x_n)=0$;当取$x_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$时,$f(x_n)\to\infty$.

知$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$当$x\to0$时无界,但非无穷大量.

故选(D).

(2) 解:由$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-2$.

则由$f(1+0)\neq f(1-0)$,知$f(x)$在$x=1$处不连续,从而不可导.

故选(A).

(3) 解:由题设及分段函数积分性质,有

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_1^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\text{ 时},\\ \int_1^x 1\mathrm{d}t=x-1, & 1\leqslant x\leqslant2\text{ 时}.\end{cases}$$

故选(D).

(4) 解:由$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$,令$f'(x)=0$,得$x=\mathrm{e}$.

易知$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$内单调增加,在$(\mathrm{e},+\infty)$内单调减少,且$f(\mathrm{e})=k>0$,而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty.$$

知$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$和$(\mathrm{e},+\infty)$分别有且只有一个零点,从而$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个零点.

故选(B).

(5) 解1:用图解法.$f(x)$是奇函数,如果它在第一象限内单增且图形为下凹(例如$y=x^3$)的,则它在第三象限内必然也是单调增加(与$f'(x)>0$对应),且图形为下凸的(与$f''(x)<0$对应).

故选(C).

解 2：由题设 $f(x)=-f(-x)$，则可有

$$f'(x)=-f'(-x)\cdot(-1)=f'(-x),\ f''(x)=-f''(-x)0.$$

故 $x\in(-\infty,0)$ 时，$-x\in(0,+\infty)$ 有 $f'(x)$，$f''(-x)>0$.

从而 $$f'(x)=f'(-x)>0,\ f''(-x)<0.$$

故选 (C).

三、计算题

(1) 解：由题设有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2)\cos[f(x)^2],$$

这样 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}.$$

(2) 解：原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1\right)}=-50.$

注意到这里 $x<0$，且 $(\sqrt{x^2+100}+x)(\sqrt{x^2+100}-x)=100$.

(3) 解：原式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,\mathrm{d}(\tan x)$ （凑微分后分部积分）

$$=\frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

(4) 解：由 $\dfrac{x}{(1+x)^3}=\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^3}$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)^3}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x}-\frac{2}{(1+x)^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

(5) 解：题设方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2-1}y=\dfrac{\cos x}{x^2-1}$，即一阶线性微分方程，由公式其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\cdot\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

由 $y(0)=1$，得 $C=-1$，故所求特解为 $y=\dfrac{\sin x-1}{x^2-1}$.

四、解 1：将 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$ 代入原方程，得

$$(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+(3+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^x+(1+\alpha+\beta)x\mathrm{e}^x=\gamma\mathrm{e}^x.$$

比较同类项的系数，有

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0,\\3+2\alpha+\beta=\gamma,\\1+\alpha+\beta=0.\end{cases}$$

解方程组得 $\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$，即原方程为 $y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x$.

其对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，得 $r_1=1$，$r_2=2$，

故齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

加上题设特解得，原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left[(1+x)e^x\right]，\text{或}\ y=C_3e^{2x}+C_4e^x+xe^x.$$

解 2：由题设 $y=e^{2x}+e^x+xe^x$ 是一个特解，而特解都可以通过确定方程通解中的任意常数而得到，由题设特解和方程右端的函数形式，可以写出如下的题设方程的通解形式如：

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+ax^ke^x.$$

其中 r_1,r_2，是特征方程的根（应为实根），a 为待定系数，$k=0,1,2$ 之一.

令 $C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+ax^ke^x=e^{2x}+e^x+xe^x$.

比较恒等式两边的项，可得：

$r_1=2$，从而 $C_1=1$；$r_2=1$，从而 $C_2=1$；且 $a=1,k=1$.

由此得特征方程 $(r-2)(r-1)=0$.

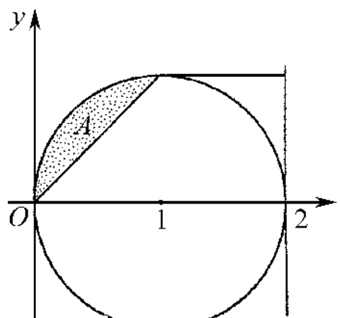
即 $r^2-3r+2=0$．因此 $\alpha=-3$，$\beta=2$.

则题设微分方程为 $y''-3y'+2y=\gamma e^x$．把特解 $y=xe^x$ 代入此方程中得

$$(x+2)e^x-3(x+1)e^x-2xe^x=\gamma e^x.$$

由此定出 $\gamma=-1$，故原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$.

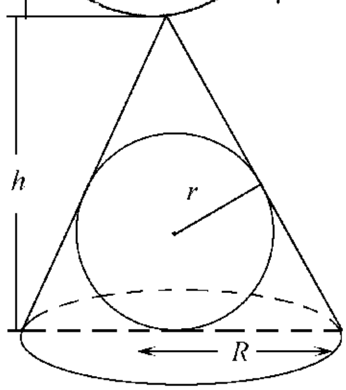
五、解：图形 A 如图中阴影部分所示．图形 A 左侧和右侧边界线的方程分别是 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$ 和 $x_2=y$.



选 y 作为积分变量，则所求体积

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1(2-x_1)^2dy-\pi\int_0^1(2-x_2)^2dy\\&=2\pi\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2\right]dy\\&=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1\\&=2\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

六、解：设圆锥底面圆半径为 R，则 $R=\dfrac{rh}{\sqrt{h^2-2hr}}$.



于是圆锥体积为

$$V(h)=\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{\pi r^2h^2}{3(h-2r)}，\quad 2r<h<+\infty.$$

令 $V'(h)=\dfrac{\pi r^2(h^2-4rh)}{3(h-2r)^2}=0$，解得在 $(2r,+\infty)$ 内的惟一驻点 $h=4r$.

在驻点的左、右邻域内 $V'(h)$ 由负变正，故 $V(h)$ 取得最小值

$$V(4r)=\frac{8\pi r^2}{3}.$$

七、证：设 $f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且可导，又有

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}，$$

因为 $\ln a>1$，且 $\frac{a}{a+x}<1$，故 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加.
而 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0\quad(0<x<+\infty)$，即 $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$，
从而 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、证 1：由 $f(0)=0$ 和微分中值定理，有

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi),\ 0<\xi<x,$$

故 $$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^a f'(\xi)x\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f'(\xi)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x\mathrm{d}x=\frac{M}{2}a^2.$$

证 2：由 $f(0)=0$ 和牛顿－莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式，有

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)=f(x),$$

于是 $$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x M\mathrm{d}t=Mx.$$

故 $$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\mathrm{d}x=\frac{Ma^2}{2}.$$

2

1994 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由洛必达(L'Hospital)法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos2x-2a\mathrm{e}^{2ax}}{1}=2+2a,$$

再由连续性有 $2+2a=f(0)=a$，解得 $a=-2$.

(2) 解：由题设，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=(3t+2)(1+t)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(6t+5)\cdot\frac{t+1}{t}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

(3) 解：由定积分求导法则可有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\cos3x}f(t)\mathrm{d}t\right)=f(\cos3x)\cdot(\cos3x)'=-3\sin3xf(\cos3x).$$

(4) 解：先凑微分再分部积分有

$$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2})=\frac{1}{2}\left[x^2\mathrm{e}^{x^2}-\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)\right]=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}(x^2-1)+C.$$

(5) 解：分离变量将题设方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{4x-x^2}$. 两边积分得

$$\ln|y|=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}[\ln|4-x|+\ln|x|]+\ln|C|,$$

由此可有 $\ln(y^4)=\ln\left|\frac{Cx}{4-x}\right|$，即 $y^4=\frac{Cx}{4-x}$，或 $(x-4)y^4=Cx$.

二、选择题

(1) 解 1：根据洛必达(L'Hospital)法则，可有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2.$$

因为分子的极限为 0，所以得 $a=1$.

再用一次洛必达(L'Hospital)法则，并取极限得 $\frac{-1-2b}{2}=2$，因此 $b=-\frac{5}{2}$.

解 2：由 $\ln(1+x)=x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2,$$

故必有　$1-a=0$，$\frac{1}{2}+b=-2$，得 $a=1$，$b=-\frac{5}{2}$.

故选(A).

(2) 解：按照函数左、右导数定义，有

左导数　$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\frac{2}{3}(x^3-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{2}{3}(x^2+x+1)=2.$

右导数　$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}$ 不存在.

故选(B).

(3) 解：由题设 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-e^{\sin x}=0$，

所以有 $f''(x_0)=e^{\sin x_0}-f'(x_0)=e^{\sin x_0}>0$，即 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$.

从而 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

故选(C).

(4) 解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\frac{\pi}{4}$，$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$，所以曲线有水平和铅直渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$，$x=0$.

但 $x\to1$ 和 $x\to2$ 时，y 有限极限. 知曲线再无其他渐近线.

故选(B).

(5) 解：由奇偶函数对称区间上的积分性质，有

$$M=0,\quad N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx>0,\quad P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx<0,$$

则

$$P<M<N.$$

故选(D).

三、计算题

(1) 解：对方程两边求导，得 $y'=(1+y')f'$，解出 $y'=\frac{f'}{1-f'}$. 这样

$$y''=\left(\frac{f'}{1-f'}\right)'=\frac{f''\cdot(1+y')(1-f')-f'\cdot(-f'')(1+y')}{(1-f')^2}$$

$$=\frac{f''\cdot(1+y')}{(1-f')^2}=\frac{f''}{(1-f')^2}\cdot\left(1+\frac{f'}{1-f'}\right)$$

$$=\frac{f''}{(1-f')^3}.$$

(2) 解：令 $x^2=\sin t$，则 $2x\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 又当 $x=0$ 时，$t=0$ 当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 故可有

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}.$$

这里运用公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，其中 n 为偶数.

(3) 解：原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)-1\right]n\right\}$ （利用 $\tan(\alpha+\beta)$ 公式）

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}\right\}=\mathrm{e}^4.$$

(4) 解 1：由三角函数公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

解 2：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，且 $x=2\arctan x$，又 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}$. 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

(5) 证：由题设，有

$$D_1=\int_0^a\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{2}+\frac{a}{2}=\frac{1}{6}(2a^2+3)a,$$

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+a^2+\frac{1}{2}\right)a=\frac{1}{2}(a^2+1)a,$$

从而

$$\frac{D}{D_1}=\frac{\frac{1}{2}(a^2+1)a}{\frac{1}{6}(2a^2+3)a}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}}<\frac{3}{2}.$$

四、解 1：设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$，则 $f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$.

因为 $x>0$，故可分 $k\leqslant 0$ 和 $k>0$ 两种情况讨论.

(1) 当 $k\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少，又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0,\\ -1, & k=0.\end{cases}$$

因此 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1=0$ 在 $[0,+\infty)$ 内仅有一个解.

(2) 当 $k>0$ 时，$f'(x)=0$，得惟一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$. 又 $f''(x_0)>0$，所以 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 为极小值点.

由 $f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 内是向上凹的.

为使方程有惟一根，令极小值为零，即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)^2}-1=0.$$

由此解得 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$. 当 $k\neq\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，原方程无解或有两个解.

故当 $k\leqslant 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解.

解 2：注意到当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 与$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=k$ 同解.

设 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$，$g(x)=k$，于是方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个解，亦即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=k$ 在右半平面 $(x>0)$ 内有且仅有一个交点.

由上设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且

$$f'(x)=\frac{3-x^2}{x^4},\quad f''(x)=\frac{2}{x^5}(x^2-6).$$

令 $f'(x)=0$，解得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的惟一驻点 $x=\sqrt{3}$，且为极大值点，极大值为

$$f(\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{(\sqrt{3})^5}=\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=0$，

且函数 $y=f(x)$ 的图象在 $(0,\sqrt{6})$ 内上凸，在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内上凹.

可见，当 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$以及 $k\leqslant 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=k$ 有且仅有一个交点，即方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解.

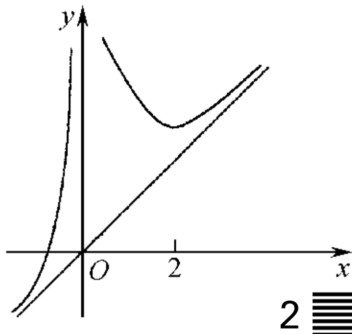
五、解：由题设知函数定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 当 $x=-\sqrt[3]{4}$时，$y=0$.

(1) 令 $y'=1-\frac{8}{x^3}=0$，得驻点 $x=2$，不可导点 $x=0$. 函数大致性态如下表所示.

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	↗	↘	3	↗

所以 $(-\infty,0)$ 及 $(2,+\infty)$ 为函数单增区间，$(0,2)$ 为函数单减区间，$x=2$ 为极小值点，极小值为 $y=3$.

(2) $y''=\frac{24}{x^4}>0$，故 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 均为凹区间，且无拐点.



⑶ 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x_3+4}{x^2}-x\right)=0=b$，

所以 $x=0$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线.

⑷ 所以函数图形大致如右图所示.

六、解：相应齐次方程的特征方程为 $r^2+a^2=0$，解得其根 $r_{1,2}=\pm ai$.

故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$.

⑴ 当 $a\neq 1$ 时，原方程的特解形式为 $y^*=A\sin x+B\cos x$，代入原方程得

$$A(a^2-1)\sin x+B(a^2-1)\cos x=\sin x,$$

比较等式两端对应项的系数得 $A=\dfrac{1}{a^2-1}$，$B=0$，故特解为 $y^*=\dfrac{1}{a^2-1}\sin x$.

⑵ 当 $a=1$ 时，原方程的特解形式为 $y^*=x(A\sin x+B\cos x)$，代入方程得

$$2A\cos x+2B\sin x=\sin x,$$

比较等式两端对应项的系数得 $A=0$，$B=-\dfrac{1}{2}$. 故特解为 $y^{**}=-\dfrac{1}{2}x\cos x$.

综上，通解为 $y=\begin{cases} C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{a^2-1}\sin x, & \text{当 } a\neq 1 \text{ 时}, \\ C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x. & \text{当 } a=1 \text{ 时}. \end{cases}$

七、证 1：令 $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，有 $\varphi(1)=0$.

又 $\varphi'(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}f(\lambda)-\dfrac{1}{\lambda^2}\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\lambda^2}\int_0^\lambda[f(\lambda)-f(x)]\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$

式中最后的不等式成立是由于 $f(x)$ 递减，即 $f(\lambda)\leqslant f(x)$. 于是由 $\varphi'(\lambda)\leqslant 0$，知 $\varphi(\lambda)$ 单减，则当 $0<\lambda<1$ 时，$\varphi(\lambda)\geqslant\varphi(1)=0$，即

$$\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 2：根据积分中值定理，有

$$\begin{aligned}&\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x-\lambda\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)f(\xi_2)\\ &=\lambda(1-\lambda)[f(\xi_1)-f(\xi_2)],\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\xi_1\leqslant\lambda\leqslant\xi_2\leqslant 1$. 因 $f(x)$ 递减，且有 $f(\xi_1)\geqslant f(\xi_2)$.

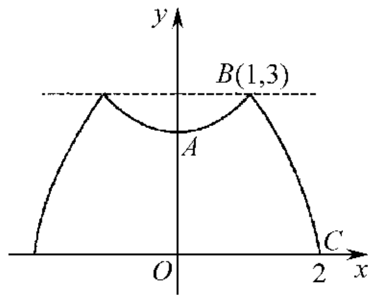
故原不等式成立.

八、解：如图所示，$\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y=x^2+2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，$\overset{\frown}{BC}$ 的方程为 $y=4-x^2\ (1\leqslant x\leqslant 2)$.

选 x 为积分变量，设旋转体在区间 $[0,1]$ 上的体积为 V_1，在区间 $[1,2]$ 上的体积为 V_2，则所求体积

2

$$V=2(V_1+V_2)$$
$$=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.$$



1995 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由题设及复合函数求导公式有

$$y'=-2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2).$$

(2) 解：题设方程相应的特征方程为 $r^2+1=0$，其根 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，
则相应齐次方程通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$.
直接观察（或由 $y^*=a+bx$ 待定）可得到题设方程的特解 $y^*=-2x$.
故　所求通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x$.

(3) 解：由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$，当 $t=2$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3$，且 $x_0=1+2^2=5$，$y_0=2^3=8$.
故所求切线方程为 $y-8=3(x-5)$，即 $3x-y-7=0$.

(4) 解：根据夹逼准则，有

$$\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对 i 从 2 至 n 求和，得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

令 $n\to\infty$，两端函数式的极限均为$\frac{1}{2}$，故所求极限为$\frac{1}{2}$.

(5) 解：由 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0$，故渐近线方程为 $y=0$.

二、选择题

(1) 解：若 $F(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$为连续函数，又 $f(x)$连续，则 $\varphi(x)=f(x)F(x)$必连续.
故选(D).

(2) 解：曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 Ox 轴有 3 个交点，它们的横坐标依次为 $x=0,1,2$，且当 $0<x<1$ 时 $y<0$ 当 $1<x<2$ 时 $y>0$.
因而其与 Ox 轴所围图形面积为（注意被积式各项在积分区域的符号）

$$\int_0^2|x(x-1)(x-2)|\mathrm{d}x=-\int_0^1x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x.$$

故选(C).

(3) 解：当 $x_1>x_2$ 时，有 $-x_1<-x_2$，于是

$$f(-x_1)<f(-x_2),\Rightarrow -f(-x_1)>-f(-x_2).$$

故选(D).

(4) **解：由题设及拉格朗日**(Lagrange)**中值定理，有**

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi),\ \xi\in(0,1).$$

又 $f''(x)>0$，$f'(x)$ **单调增加，因此有** $f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$，$\xi\in(0,1)$.

故选(B).

此外，本题用特值法解更简捷.取 $f(x)=x^2$，**则** $f''(x)=2>0$.

计算 $f(0)$、$f(1)$、$f'(0)$、$f'(1)$ **后立即可有** $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(5) **解：由于题设** $f(x)$ **可导，则** $F(x)$ **在** $x=0$ **处可导的充分条件是** $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$ **可导**.

$$\varphi'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)|\sin x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$

$$\varphi'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)|\sin x|-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0),$$

因此 $F(x)$ **在** $x=0$ **处可导的充要条件是** $f(0)=-f(0)$，**即** $f(0)=0$.

故选(A).

三、计算题

(1) **解：先分子有理化，再用无穷小量代换可有**

$$\textbf{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$$

(2) **解：方程两边取对数得** $\ln x+f(y)=y$，**再求导有**

$$y'=\frac{1}{x[1-f'(y)]},\quad y''=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

(3) **解：设** $x-1=t$，**则** $x^2=t+1$，**代入** $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$ **中得** $f(t)=\ln\dfrac{t+1}{t-1}$.

因此 $f(\varphi(x))=\ln\left[\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}\right]=\ln x$. **再由** $\dfrac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，**解得** $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

于是

$$\int\varphi(x)\,dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=2\ln|x-1|+x+C.$$

(4) **解：因为** $x\neq0$ **时，**$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$，**而由函数导数定义**

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=\frac{\pi}{2},$$

又

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ **在** $x=0$ **处是连续的**.

(5) **解：由参数方程求弧长公式，有**

$$s=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=8.$$

（6）解：设质点的运动速度为 $v(t)$. 由题设和牛顿（Newton）第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v\quad（式中质量 m=1）.$$

解得　$v(t)=v_0\mathrm{e}^{-t}$. 又由 $\dfrac{v_0}{3}=v_0\mathrm{e}^{-t}$，得 $t=\ln 3$.

到此时刻该质点所经过的路程　$S=\displaystyle\int_0^{\ln 3}v_0\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}v_0$.

四、解：因 $f(x)$ 是偶函数，故只需求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值与最小值.

令 $f'(x)=2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$，得区间 $(0,+\infty)$ 内有惟一驻点 $x=\sqrt{2}$.

最大值和最小值可以通过比较 $f(0)$、$f(\sqrt{2})$ 和 $f(+\infty)$ 的大小而得到. 注意到 $f(0)=0$ 且

$$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\left[(2-t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^2-\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1+\mathrm{e}^{-2}.$$

$$f(+\infty)=\int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\left[(2-t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}+\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}=1.$$

故函数最大值为 $1+\mathrm{e}^{-2}$，最小值为 0.

五、解：将 $y=\mathrm{e}^x$ 代入原方程有 $x\mathrm{e}^x+p(x)\mathrm{e}^x=x$，解得 $p(x)=x\mathrm{e}^{-x}-x$，代入原方程得

$$xy'+(x\mathrm{e}^{-x}-x)y=x,\quad\Rightarrow\quad y'+(\mathrm{e}^{-x}-1)y=1.$$

由公式知其通解为　$y=\mathrm{e}^{-\int(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int(\mathrm{e}^{-x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}}$.

由 $y|_{x=\ln 2}=0$，得 $2+2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}C=0$，即 $C=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

故所求特解为 $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}}$.

六、解：因为 $|MP|=\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_0}$，且 P 在曲线 L 的过 M 点的法线上，所以得到下列两式，即

$$\begin{cases}(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2=\dfrac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2},\\[2ex] \eta-y_0=-\dfrac{1}{y'_0}(\xi-x_0).\end{cases}$$

联立解得 $(\eta-y_0)^2=\dfrac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}$. 由于 $y''>0$，曲线 L 是上凹的.

故 $\eta>y_0$，于是 $\eta=y_0+\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''^2}$.

将此代入方程组的第二个方程中，解出 $\xi=x_0-\dfrac{y'_0(1+y_0'^2)}{y''_0}$.

七、解：由题设考虑分部积分，则有

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\left[xf(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{x}xf'(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \frac{\pi-x}{\pi-x}\sin x\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=2.$$

八、证1：由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$，有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$.

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒(Taylor)展开，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,\ \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

因 $f''(\xi)>0$，所以 $f(x)\geqslant x$.

证2：由题设及证1有 $f(0)=0, f'(0)=1$. 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)=0$.

由于 $F'(x)=f'(x)-1$，所以 $F'(0)=0$，即 $x=0$ 为 $F(x)$ 的驻点. 又由 $F''(x)=f''(x)>0$，知 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值且 $F''(x)$ 单调.

故 $F(x)$ 只有一个驻点 $x=0$，从而 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值且为最小值，因此

$$F(x)\geqslant F(0)=0,\ \Rightarrow\ f(x)\geqslant x.$$

证3：由于 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调增加，由微分中值定理有

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi),\ \xi\in(0,x).$$

由题设及证1知 $f(0)=0, f'(0)=1$. 且 $f(x)=xf'(\xi)$.

若 $x>0, \xi\in(0,x)$，有 $f'(\xi)>f'(0)>1$，因此 $f(x)=xf'(\xi)>x$.

同理可证　当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)>x$.

1996 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由题设及复合函数求导法则有

$$y'=\frac{2}{3}\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right),$$

故 $y'|_{x=0}=\frac{1}{3}$.

(2) 解：将被积函数展开、化简，再由奇偶函数在对称区间上的积分性质，有

$$\int_{-1}^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=\int_{-1}^1\left(x+2x\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_{-1}^1 dx=2.$$

(3) 解：题设方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，其根 $r_{1,2}=-1\pm2i$.

故　所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$.

(4) 解：考虑变量代换 $t=\frac{1}{x}$，再用洛必达(L'Hospital)法则有

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sin[\ln(1+3t)]-\sin[\ln(1+t)]}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\cos[\ln(1+3t)]\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos[\ln(1+t)]\cdot\frac{1}{1+t}\right\}$$
$$=2.$$

此外，利用三角函数性质(和差化积)亦可直接求得极限.

(5) 解：由题设及定积分几何意义，知所求图形面积为

$$S=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x-2x\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

二、选择题

(1) 解:由 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,代入题设依题意

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2)}{x^2},$$

于是有 $1-b=0$,$\frac{1}{2}-a=1$,解得 $a=\frac{1}{2}$,$b=1$.

故选(A).

(2) 解:由于 $|f(x)|\leqslant x^2$,有 $f(0)=0$,且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=0.$$

故选(C).

(3) 解:(特值法+排除法)取 $f(x)=x$,则 $f'(x)=1$.易见选项(B)与(D)错.
再取 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$.易见选项(C)亦不真.
故选(A).

注: 事实上,对于选项(A)成立的理由为:由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$,则必存在正数 a,当 $x>a$ 时,恒有 $f'(x)>1$.由拉格朗日(Lagrange)中值定理有

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)>f(a)+(x-a),x>\xi>a.$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant\lim_{x\to+\infty}[f(a)+(x-a)]=+\infty.$$

(4) 解:设 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$,则 $f(x)$ 为偶函数,只须讨论 $x\geqslant 0$ 的情形.
显然当 $x>1$ 时 $f(x)>0$,表明 $x>1$ 时无实根.
因为 $f(0)=-1<0$,$f(1)=2-\cos 1>0$,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点(实根).
当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin x>0$,所以 $f(x)$ 有惟一零点(实根).
由函数对称性,$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内亦有惟一零点(实根).
故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.
故选(C).

(5) 解:由直角坐标系下旋转体体积公式,有

$$\begin{aligned}V&=\int_a^b\pi\{[m-g(x)]^2-[m-f(x)]^2\}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故选(B).

三、计算题

(1) 解:令 $\mathrm{e}^{-x}=\sin t$,则 $-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

当 $x=0$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$;当 $x=\ln 2$ 时,$t=\frac{\pi}{6}$,于是

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$
$$=-\ln(\csc t+\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\ln(1+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

本题亦可直接用分部积分进行计算. 注意到

$$\int e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}\,dx=-\int\sqrt{e^{2x}-1}\,d(e^{-x})=-e^{-x}\sqrt{e^{2x}-1}+\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx.$$

2

(2) 解 1：将被积式分子、分母同乘以 $1-\sin x$，且注意到 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，则有

$$原式=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$

解 2：由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 及 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，可先将被积式分母变形后，再凑微分可有

$$原式=\int\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx=2\int\frac{1}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}d\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

(3) 解：由题设，有　$\frac{dx}{dt}=f(t^2)$，　$\frac{dy}{dt}=4tf(t^2)f'(t^2)$，

故　$\frac{dy}{dx}=4tf'(t^2)$，　$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{4[f'(t^2)+2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$.

(4) 解：将 $f(x)$ 改写为 $f(x)=-1+\frac{2}{1+x}=-1+2(1+x)^{-1}$，再对其连续求导（注意总结规律），得

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k 2\cdot k!}{(1+x)^{k+1}},\quad k=1,2,\cdots,n+1.$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式为

$$f(x)=1-2x+2x^2+\cdots+(-1)^n 2x^n+(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},\quad 0<\theta<1.$$

注：余项也可写为 $(-1)^{n+1}\frac{2x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}$，其中 ξ 在 0 和 x 之间.

(5) 解 1：设 $y'=p$，则题设方程化为 $p'+p=x^2$，由一阶线性微分方程通解公式有

$$p=y'=e^{-\int dx}\left(\int x^2 e^{\int dx}dx+C_1\right)=x^2-2x+2+C_1e^{-x}.$$

故原方程通解为 $y=\int p\,dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-C_1e^{-x}+C_2$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

解 2：题设方程相应齐次方程的特征方程为 $r^2+r=0$，由此可解得 $r_1=0$，$r_2=-1$.

则齐次方程通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$.

设原方程特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$，代入方程得 $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$，$c=2$.

故 原方程通解为 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-C_1e^{-x}+C_2$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

(6) 解1:底面椭圆的方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 选 y 为积分变量,用垂直于 Oy 轴的平行平面截此楔形体所得的截面为直角三角形.

两直角边长分别为 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$和 $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\tan\alpha$,故截面积

$$S(y)=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha,$$

则楔形体的体积

$$V=2\int_a^b\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha\,dy=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha.$$

解2:由题设椭圆底面方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,以垂直于 Ox 轴的平行平面截楔形所得截面为矩形,边长分为 $2y=2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$和 $x\tan\alpha$. 则截面积

$$S(x)=2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha,$$

故楔形体积

$$V=\int_0^a 2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\tan\alpha\,dx=b\tan\alpha\left[-\frac{2}{3}a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha.$$

四、解1:先将被积式变形,再分别积分有

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx&=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{(1+x^2)}dx\\&=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2\\&=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

解2:令 $x=\tan t$,则 $dx=\sec^2t\,dt$. 从而

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx&=\int t(\sec^2t-1)dt=-t\cot t+\int\frac{\cos t}{\sin t}dt-\frac{1}{2}t^2\\&=-t\cot t+\ln|\sin t|-\frac{1}{2}t^2+C\\&=-\frac{\arctan}{x}+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.\end{aligned}$$

五、解:(1) 由题设则有 $f(x)$ 的反函数

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \frac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

(2) 利用函数连续的充要条件，可判定 $x=-1,8$ 不是间断点，从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续，且单调. 再利用导数定义可判定 $x=-1,0$ 是不可导点. 具体地讲：

由于 $f'(0)=0$ 且 $f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的不可导点，$f(-1)=-1$ 和 $f(2)=0$ 是 $g(x)$ 的两个可能的不可导点.

由 $f'(-1-0)=4$，$f'(-1+0)=3$，故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的不可导点，因此 $g(x)$ 在 $f(-1)=-1$ 处不可导；

$f'(2+0)=f'(2-0)=12$，故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，因此 $g(x)$ 在 $x=f(2)=8$ 处可导.

注： 反函数 $g(x)$ 的导函数与原函数 $f(x)$ 的导函数之间关系为：$g'(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$. 因此 $f(x)$ 的不可导点和使 $f'(x)=0$ 的点 x 对应的值 $f(x)$ 均是 $g(x)$ 的不可导点. 2

六、解：对方程两边求导，可得

$$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0. \tag{*}$$

令 $y'=0$，解得 $y=x$.

将此代入原方程有 $2x^3-x^2-1=0$，由此可得惟一驻点 $x=1$.

再对 (*) 式边求导，得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0.$$

因此 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 是 $y=y(x)$ 的极小值点.

七、证 1：(1) 假设 $f'(a)>0$，$f'(b)>0$. (对于 $f'(a)<0$，$f'(b)<0$ 的情况，类似可证). 根据导数定义和极限保号性，有

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{x-a}>0\text{，有 } a_1\in(a,a+\delta_1)\text{ 使 }\frac{f(a_1)}{a_1-a}>0\text{，即 } f(a_1)>0\text{；}$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{x-b}>0\text{，有 } b_1\in(b,b+\delta_2)\text{ 使 }\frac{f(b_1)}{b_1-b}>0\text{，即 } f(b_1)>0.$$

其中 δ_1 和 δ_2 是充分小的正数.

根据连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(a_1,b_1)\subset(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

(2) 由 $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$，根据罗尔 (Roller) 定理知，存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$，使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$.

再由罗尔 (Roller) 定理知，存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

证 2：用反证法. 若不存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$，则在区间 (a,b) 内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$ (对 $f(x)<0$，类似可证)，则

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$，这与题设矛盾，此即证得到 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

以下同证 1.

八、解：(1) 由一阶线性微分方程通解公式知原方程的通解为

$$y=x^{-ax}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C\right].$$

式中$\int f(x)e^{ax}dx$显然为$f(x)e^{ax}$的一个原函数,因此可写为$\int_0^x f(t)e^{at}dt$.于是通解为

$$y=e^{-ax}\left[\int_0^x f(t)e^{at}dt+C\right].$$

由$y(0)=0$,得$C=0$. 故所求特解为　$y=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$.

又可在原方程两端同乘e^{ax},方程化为　$(ye^{ax})'=f(x)e^{ax}$,则　$y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$.

(2) 若$|f(x)|\leqslant k$,则当$x\geqslant 0$时,可有

$$|y(x)|\leqslant e^{-ax}\int_0^x|f(t)e^{ax}dt|\leqslant ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt=\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}).$$

1997年试题参考答案

一、填空题

(1) 解:由题设知

$$a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln[\cos x]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

注意这里应用了公式 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln[f(x)]}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$,这里$\lim f(x)=1$.

(2) 解:由 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$,有 $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}\right)$,且

$$y''=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(1-x)^2}-\frac{2(1+x^2)-4x}{(1+x^2)^2}\right],$$

故

$$y''|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

(3) 解:先将被积式变形,再凑微分可有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}=\int\frac{2}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}d(\sqrt{x})=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

或 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

(4) 解:将被积式变形配方后可有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int_0^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4}=\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}.$$

(5) 解:由矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}$的一个二阶子式行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow r(A)=2.$$

又含D的$\boldsymbol{A}$的三阶子式的行列式为零,特别地由三阶子式行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & t \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

可得 $4t-12=0$，由此解得 $t=3$.

二、选择题

(1) 解 1：考虑下面的运算(注意到 $\lim u(x)^{v(x)} = e^{\lim[\ln u(x)-1]u(x)}$，详见前文)，即

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}x^{3-n}.$$

由题设为使此极限等于常数，只能 $n=3$.

故选(C).

解 2：由于 $x\to0$ 时，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2!}+o(x^4)$，

则 $e^{\tan x}=1+\tan x+\frac{(\tan x)^2}{2!}+\frac{(\tan x)^3}{2!}+o(x^4)$，

因而 $e^{\tan x}-e^x=\tan x-x+\frac{1}{2}(\tan^2 x-x^2)+o(x^3)$. 而 $\tan x\sim\sin x$，则有

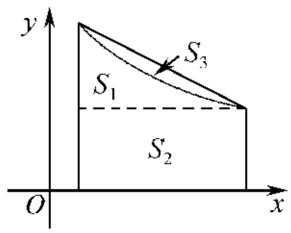
$$\begin{aligned} e^{\tan x}-e^x &= \sin x-x+\frac{1}{2}(\sin^2 x-x^2)+o(x^3) \\ &= x-\frac{1}{3!}x^3-x+\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)^2-x^2\right]+o(x^3) \\ &= o(x^3). \end{aligned}$$

故选(C).

(2) 解：图解法. $f(x)>0$ 表示曲线在 Ox 轴上方，$f'(x)<0$ 表示曲线连续、光滑且严格单调下降.

$f''(x)>0$ 表示曲线为下凸.

S_1 是曲边梯形面积，S_2 是矩形面积，S_3 是梯形面积. 于是看出 $S_2<S_1<S_3$.



故选(B).

(3) 解：由题设在 $f(x)$ 的驻点 $x=x_0\neq0$ 处，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=\frac{1}{x_0}(1-e^{-x_0})>0$，知 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

故选(B).

(4) 解：因为 $e^{\sin t}\sin x$ 为以 2π 为周期的周期函数，再注意到

$$F(x)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\cos t=-\left[e^{\sin t}\cos t\right]_0^{2\pi}+\int_0^{x+2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt.$$

上式第一项为 0；又 $e^{\sin x}\cos^2 x\geqslant0$，且当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $e^{\sin\frac{\pi}{4}}\cos^2\frac{\pi}{4}>0$，第二项为正. 于是 $F(x)$ 为正的常数.

故选(A).

2

(5) 解：据题设及复合函数性质有

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & x>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

故选(D).

三、计算题

(1) 解：将极限式分子分母同除以 x，则可变形为

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+x-1}+1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

此外，亦可先由分子有理化，再行计算.

(2) 解 1：由题设 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}$，又由隐函数求导法或由 $2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y^2-2ty\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^t=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{y^2-\mathrm{e}^t}{2(1-ty)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

解 2：设 $x=\arctan t$，则 $t=\tan x$，将其代入题设第 2 式得

$$2y-y^2\tan x+\mathrm{e}^{\tan x}=5.$$

两边对 x 求导得 $2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\tan x-y^2\cdot\sec^2x+\mathrm{e}^{\tan x}\cdot\sec^2x=0$，解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y^2-\mathrm{e}^{\tan x})(1+\tan^2x)}{2(1-y\tan x)}.$$

(3) 解： 由三角函数公式 $1+\tan^2x=\sec^2x$，有

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x&=\int\mathrm{e}^{2x}\sec^2x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{2x}\tan x-2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x+2\int\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{2x}\tan x+C.\end{aligned}$$

注： 这种先拆项再积分后出现彼此相消的项的例子，虽然不很常见，但很巧妙.类似的例子如：

计算不定积分 $I=\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

略解：注意到 $I=\int\frac{1+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(4) 解：题设微分方程是齐次方程（也是全微分方程），其可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-2xy-3x^2}{x^2-2xy}.$$

设 $y=xu$，有 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{3(u^2-u-1)}{2u-1}$，从而 $\frac{2u-1}{u^2-u-1}\mathrm{d}u=-\frac{3}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分得 $u^2-u-1=Cx^{-x}$，即 $xy^2-x^2y-x^3=C$.

(5) 解：设 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x)$ 是所求微分方程.

又设形式记号 $L=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+Q(x)$，则方程可简记为 $L(y)=f(x)$.

由题设：$L(y_1)=f(x)$，　$L(y_2)=f(x)$，　$L(y_3)=f(x)$，即

$$\begin{cases} L(x\mathrm{e}^x)+L(\mathrm{e}^{2x})=f(x), & ①\\ L(x\mathrm{e}^x)+L(\mathrm{e}^{-x})=f(x), & ②\\ L(x\mathrm{e}^x)+L(\mathrm{e}^{2x})-L(\mathrm{e}^{-x})=f(x). & ③\end{cases}$$

式①－式③得　$L(\mathrm{e}^{-x})=0$，表明 e^{-x} 是齐次方程的一个解.

式①－式②得　$L(\mathrm{e}^{2x})-L(\mathrm{e}^{-x})=0$，有 $L(\mathrm{e}^{2x})=0$，表明 e^{2x} 是齐次方程的另一个解.

由特解 e^{-x} 和 e^{2x} 所确定的齐次方程是 $y''-y'-2y=0$.（因特征方程的根是 -1 和 2，则特征方程为 $r^2-r-2=0$）

由 $L(\mathrm{e}^{2x})=0$ 和式①可得 $L(x\mathrm{e}^x)=f(x)$，于是

$$f(x)=(x\mathrm{e}^x)''-(x\mathrm{e}^x)'-2x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x.$$

故　所求方程为　$y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$.

（6）解：由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}$，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}$，

故　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

四、解 1：对方程组增广矩阵实施行初等变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&\lambda&-1&1\\\lambda&-1&1&2\\4&5&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{变换}]{\text{行初等}}\left(\begin{array}{ccc:c}2&\lambda&-1&1\\\lambda+2&\lambda-1&0&3\\5\lambda+4&0&0&9\end{array}\right),$$

这样可有：

（1）$\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$，且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有惟一解（因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\bar{\boldsymbol{A}})=3$）；

（2）$\lambda=-\dfrac{4}{5}$，方程组无解（因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{r}(\bar{\boldsymbol{A}})=3$）；

（3）$\lambda=1$ 时，变换后的增广矩阵为 $\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\3&0&0&3\\9&0&0&0\end{array}\right)$，此时方程组有无穷多解 $\boldsymbol{x}=(1,-1+k,k)^{\mathrm{T}}$，其中 k 是常数（因 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\bar{\boldsymbol{A}})=2<3$）.

解 2：考虑方程组系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4).$$

（1）当 $\lambda\neq1$ 时，且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有惟一解；

（2）当 $\lambda=1$ 时，方程组增广矩阵经初等变换可化为

$$\bar{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\text{或}\left(\begin{array}{ccc:c}2&1&-1&1\\3&0&0&3\\9&0&0&9\end{array}\right),$$

均可知方程组有无穷多组解：$x=(1,-1+k,k)^{\mathrm{T}}$，这里 k 是给定常数；

(3) 当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$ 时，方程组无解（道理同上）.

注：解法 1 稍简，因为解法 2 中求得 $D=0$ 时的 λ 值后，具体讨论时仍需代入方程组中再对其系数阵实施变换．而方法 1 可一举两得.

五、解：在极坐标中 $r(\theta)$，$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围曲边扇形面积为 $\dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，又曲线弧 $r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 的长为 $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$，故由题设得

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta.$$

两边对 θ 求导得 $r^2=\sqrt{r^2+r'^2}$，得 $r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-1}}\pm\mathrm{d}\theta.$

上式两边积分得 $-\mathrm{acrsin}\dfrac{1}{r}+C=\pm\theta$. 将题设 $r(0)=2$ 代入上式，得 $C=\dfrac{\pi}{6}$.

故所求曲线 L 的方程为 $r\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\mp\theta\right)=1$，即 $r=\csc\left(\dfrac{\pi}{6}\mp\theta\right)$，亦即直线 $x\mp\sqrt{3}y=2$.

六、解：由题设等式，当 $x\neq0$ 时可有

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2},\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2},$$

可得 $f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+Cx$.

由 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$. 又由已知条件

$$2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}ax^3+\frac{C}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{2}+\frac{C}{2},$$

可解得 $C=4-a$.

因此，所求函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+(4-a)x$.

所求旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

令 $V'(a)=\left(\dfrac{1}{15}a+\dfrac{1}{3}\right)\pi=0$，得 $a=-5$. 又 $V''(a)=\dfrac{1}{15}>0$，故当 $a=-5$ 时，旋转体的体积最小.

七、解：由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$，因此 $\varphi(0)=0$. 以下设 $x\neq0$.

令 $u=xt$，得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，两边对 x 求导有

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right],$$

又 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u\right]$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}\quad\text{(由题设及前式)}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0),$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2

八、解：设 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x-k$，再对 $f(x)$ 求导有 $f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos x$.

令 $f'(x)=0$，可得惟一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$.

因为 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内由负变正，所以 x_0 是极小值点，也是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值点，其最小值为 $f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0-k$.

而最大值为 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-k$.

当 $f(x_0)=0$ 时，即当 $k=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$ 时，方程有惟一(实)根.

当 $f(x_0)<0$ 且 $f(0)=-k>0$ 时，即当 $x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0<k<0$ 时，方程有两个(实)根.

当 $f(x_0)>0$ 且 $f(0)=-k\leqslant0$ 时，即当 $k<x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$ 或 $k\geqslant0$ 时，方程无(实)根.

1998 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解 1：这是 $\frac{0}{0}$ 型，用洛必达(L'Hospital)法则及分子有理化，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)-(1+x)}{4x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

解 2：先将 $\sqrt{1-x}$ 和 $\sqrt{1+x}$ 进行二阶 Taylor 展开(带 Peano 余项形式)

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),\quad \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

代入极限式有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

(2) 解：$y=-x^3+x^2+2x$ 是 3 次曲线，在坐标平面上拐 2 个“弯”，因而与 Ox 轴最多有 3 个交点.

令 $y=0$，解得 $x=-1,0,2$，表明恰有 3 个交点.

由于曲线（函数）的连续性，在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,2)$ 内 y 肯定异号．令 $x=1$，得 $y=2$．因此，当 $-1<x<0$ 时，$y<0$ 当 $0<x<2$ 时，$y>0$．故所求面积

$$S=\int_{-1}^{0}(0-y)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}y\,\mathrm{d}x=\frac{37}{12}.$$

(3) 解：由题设及不定积分性质有

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x&=-\int\ln\sin x\,\mathrm{d}(\cot x)\quad\text{（由分部积分）}\\&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x\\&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x\\&=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C.\end{aligned}$$

(4) 解：令 $x^2-t^2=u$，则 $-2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$．当 $t=0$ 时，$u=x^2$；当 $t=x$ 时，$u=0$． 于是

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0}f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\,\mathrm{d}u\right]=xf(x^2).$$

(5) 解：由题设可有 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)}{x}=1$，且

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)-1\right]\quad\left(\text{令}\frac{1}{x}=t\text{ 代换}\right)$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\mathrm{e}+t}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

故知曲线的渐近线方程为 $y=ax+b$，将上 a,b 代入，即 $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

此外，注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)=0$，知曲线无水平和铅直渐近线．

二、选择题

(1) 解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$，知 y_n 必为无穷小，故选 (D)．

另外，取 $x_n=(-1)^n$，$y_n=0$，可排除 (A)．

取 $x_n=1,0,3,0,5,0,\cdots$．又取 $y_n=0,2,0,4,0,6,\cdots$，可排除 (B)．

取 $x_n=0$，$y_n=1$，可排除 (C)．

(2) 解：由 $f(x)=(x+1)(x-2)|x||x+1||x-1|$，知 $f(x)$ 的不可导点只可能在 $x=-1,0,1$ 三点处．

因为 $g(x)=(x-a)|x-a|$ 在 $x=a$ 处可导，而 $\varphi(x)=|x-a|$ 在 $x=a$ 处不可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处不可导．

故选 (B)．

(3) 解：由题设和微分定义有 $\mathrm{d}y=\dfrac{y}{1+x^2}\mathrm{d}x$，两边积分有

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \Rightarrow \ \ln|y|=\arctan x+\ln|C|,$$

有 $y=C\mathrm{e}^{\arctan x}$. 令 $x=0$，定出 $C=\pi$. 于是 $y(1)=\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

故选(D).

(4) 解：选项(A)和(B)表明函数单调变化，但命题中无此假设，故排除选项(A)和(B).

因为选项(C)和(D)极限式的分母大于零(在 a 的充分小邻域内)，所以由 $f(x)$ 的连续性及 $f(a)$ 为极大值的条件(即 $f(a)\geqslant f(x)$)，有

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\frac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\geqslant 0 \quad (x\neq a).$$

由此知(C)正确. 故选(C).

(5) 解 1：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}$ 的代数余子式为 A_{ij}，则由定义，$\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{A}_{ji})_{n\times n}$.

因为 A_{ij} 是 $n-1$ 阶行列式(不计系数 $(-1)^{i+j}$)，所以矩阵 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{n\times n}$ 的伴随矩阵

$$(k\boldsymbol{A})^*=(k^{n-1}A_{ji})_{n\times n}=k^{n-1}(A_{ji})_{n\times n}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

故选(B).

解 2：(特值法)设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$(单位矩阵)，则注意到

$$\begin{aligned}(k\boldsymbol{A})^*&=(k\boldsymbol{I})^*=|k\boldsymbol{I}|(k\boldsymbol{I})^{-1}=k^n|\boldsymbol{I}|\boldsymbol{I}^{-1}k^{-1}\\&=k^{n-1}(|\boldsymbol{I}|\boldsymbol{I})^{-1}=k^{n-1}\boldsymbol{I}^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*.\end{aligned}$$

故选(B).

三、解：由设 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点，即为 $\dfrac{1}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 不存在的点 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处，$f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}f(x)=+\infty$，

在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 处，$f\left(\frac{5\pi}{4}+0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}+0}f(x)=+\infty$，

故 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第二类(或无穷)间断点.

在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}+0}f(x)=1$；在 $x=\frac{7\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}+0}f(x)=1$.

故 $x=\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的第一类(或可去)间断点(注意到 $f(x)$ 在此两点处无定义).

四、解：由于 $x\to 0$ 时，$ax-\sin x\to 0$，且极限 c 不为零，所以当 $x\to 0$ 时，积分

$$\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to 0,$$

故必有 $b=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{x^3}{x}} \quad (\text{注意到}\ \ln(1+x^3)\sim x^3)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c. \quad (c\neq 0)$$

故必有 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$，知 $a=1$，从而 $c=\dfrac{1}{2}$.

五、解：由题设有 $y=u\sec x$，$y'=u'\sec x+u\sec x\cdot\tan x$，且

$$y''=u''\sec x+2u'\sec x\cdot\tan x+u\sec x\cdot\tan^2x+u\sec^2x.$$

代入原方程得 $u''+4u=\mathrm{e}^x$，其相应齐次方程的特征方程 $r^2+4=0$ 的根为 $\pm 2\mathrm{i}$，

知齐次方程通解为 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{5}$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

从而原方程的通解为 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{5\cos x}$.

六、解：注意到被积函数内有绝对值号且 $x=1$ 是其无穷间断点. 因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}.$$

又 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{1-0}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. 且

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]_{1+0}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3}).$$

故 $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

七、解：取沉放点为原点 O 建立坐标系，且 Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿（Newton）第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-B\rho-kv.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，代入上式中得

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=mg-B\rho-kv, \Rightarrow \mathrm{d}y=-\frac{mv}{mg-B\rho-kv}\mathrm{d}v.$$

两边积分得 $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C$.

由初始条件 $v\big|_{y=0}=0$ 定出 $C=\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$.

故所求 y 与 v 的函数关系式为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$

八、证 1：因要证的是存在 $x_0\in(0,1)$，使 $x_0f(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t$. 可设辅助函数

$$\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x).$$

接下来分两步进行，即一是使用零点定理；二是找出 $\varphi(x)$ 的原函数 $\Phi(x)$ 后使用罗尔

(Rolle) 定理. 又

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \int xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int xf(x)\,\mathrm{d}x - \int xf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(1) 在区间 $(a,1)\subset(0,1)$ $\left(\text{其中 } a\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 内任取 x_1.

若在区间 $[x_1,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$，则 $(x_1,1)$ 内任一点都可作为 x_0.

否则可设 $f(x_2)>0$ 为连续函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,1]$ 上的最大值，其中 $x_2\in[x_1,1]$.

设 $\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$，$x\in[0,x_2]$，于是有 $\varphi(0)>0$，且

$$\varphi(x_2)=\int_{x_2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t - x_2 f(x_2)\leqslant(1-2x_2)f(x_2)<0.$$

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,x_2)\subset(0,1)$ 内有零点 x_0，结论 (1) 得证.

(2) 由于 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，有 $\varphi'(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调减少，故此时 (1) 中的 x_0 是惟一的.

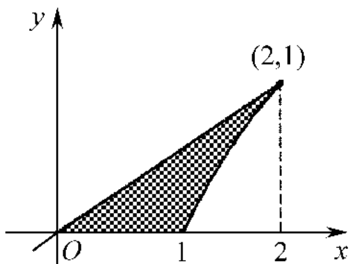
证 2：(1) 设 $\Phi(x)=x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，易见 $\Phi(0)=\Phi(1)=0$.

根据罗尔 (Rolle) 定理，存在一点 $x_0\in(0,1)$ 使

$$\Phi'(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - x_0 f(x_0)=0.$$

(2) 同证 1 中的 (2).

九、解：设切点为 $(x_0,\sqrt{x_0-1})$，而斜率为 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，于是切线方程为 $\quad y-\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$.



因其过原点，以 $(0,0)$ 代入可得过原点的切线方程 $y=\dfrac{1}{2}x$，而切点为 $(2,1)$.

由曲线 $y=\sqrt{x-1}$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 Ox 轴旋转一周所得到的旋转面的面积

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\text{；}$$

由直线段 $y=\dfrac{1}{2}x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 Ox 轴旋转一周所得到的旋转面的面积

$$S_2=\int_1^2 2\pi\cdot\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi.$$

因此，所求旋转体的表面积

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1).$$

十、解：因曲线向上凸，故 $y''<0$. 又由题设曲率有

$$\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}，即 \frac{y''}{1+y'^2}=-1.$$

令 $p=y'$，则 $p'=y''$，从而上述方程化为

$$\frac{p'}{1+p^2}=-1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=-\mathrm{d}x，$$

上式两边积分有 $\arctan p=C_1-x$.

因为 $y=y(x)$ 在 $(0,1)$ 处切线方程为 $y=x+1$，所以 $p|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$.

代入上式得 $C_1=\frac{\pi}{4}$，故 $y'=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

再将上式两边积分可得 $y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$，其中 C_2 待定.

因为曲线过点 $(0,1)$，所以 $y|_{x=0}=1$，代入上式得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$.

故所求曲线的方程为

$$y=\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+1+\frac{1}{2}\ln 2，\quad x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right).$$

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leqslant 1$，且当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$，所以 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时函数取得极大值

$$y=1+\frac{1}{2}\ln 2.$$

又当 $x\to-\frac{\pi}{4}+0$ 及 $x\to\frac{3\pi}{4}-0$ 时，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\to 0$，知 $y\to-\infty$，故函数无极小值.

十一、证：(1) 令 $\varphi(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，有 $\varphi(0)=0$，且

$$\varphi'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)，\quad \varphi'(0)=0.$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi''(x)=\frac{2}{1+x}[x-\ln(1+x)]>0$，知 $\varphi'(x)$ 单增，

从而 $\varphi'(x)>\varphi'(0)=0$，知 $\varphi(x)$ 单增，则 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即

$$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2.$$

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，$x\in(0,1]$，则有 $f(1)=\frac{2}{\ln 2}-1$.

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

由(1)，当 $x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$，知 $f(x)$ 单减，从而

$$f(x)>f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1.$$

又注意到

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}，$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，知 $f(x)$ 单减，且 $f(x)<f(0+0)=\frac{1}{2}$.

综上有

$$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}.$$

十二、解：由 $(2I-C^{-1}B)A^{T}=C^{-1}$，有 $C(2I-C^{T}B)A^{T}=I$，

即 $(2C-B)A^{T}=I$，从而 $A(2C-B)^{T}=I$，即 $(2C-B)^{T}$ 可逆.

故 $A=[(2C-B)^{T}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

十三、解：设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3,\\4x_1+7x_2+x_3=10,\\x_2-x_3=b,\\2x_1+3x_2+ax_3=4.\end{cases}\quad(*)$$

对方程组增广矩阵 $\overline{A}=(A\vdots b)$ 作初等行变换，使之化为阶梯形：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right).$$

(1) 当 $b\neq2$，$a\neq1$ 时，秩 $(A)=3\neq r(\overline{A})=4$；当 $b\neq2$，$a=1$ 时，秩 $(A)=2\neq r(\overline{A})=3$. 线性方程组 (*) 无解，故 β 不能由 α_1、α_2、α_3 线性表示.

(2) 当 $b=2$，$a\neq1$ 时，秩 $r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组 (*) 有惟一解得 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=0$. 于是 β 可惟一表示为 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

当 $b=2$，$a=1$ 时，秩 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$（未知量个数），方程组 (*) 有无穷多组解. 此时 (*) 的同解方程为

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3,\\-x_2+x_3=-2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3-1,\\x_2=x_3+2.\end{cases}$$

令 $x_3=k$（k 为任意数），则 $x_1=-(2k+1)$，$x_2=k+2$，$x_3=k$. 这时 β 可由 α_1、α_2、α_3 线性表示为

$$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3.$$

1999 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由题设 $x=0$，$y=1$，知 $t=0$，又

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^{t}\cos t)'}{(e^{t}\sin 2t)'}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t},$$

将 $t=0$ 代入得切线斜率 $k=\frac{1}{2}$，从而法线斜率 $k_1=-2$.

故所求法线方程为 $y-1=-2(x-0)$，即 $y+2x-1=0$.

(2) 解：当 $x=0$ 时 $y=1$，对方程两边关于 x 求导，得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^3y+x^3y'+\cos x,\ \Rightarrow\ y'|_{x=0}=1.$$

(3) 解:先将被积式分母变形,再作变量替换有

$$\text{原式}=\int\frac{x+5}{(x-3)^2+2^2}\mathrm{d}x=\int\frac{t+8}{t^2+2^2}\mathrm{d}t\quad(\text{此前令 } x-3=t)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+2^2)+4\arctan\frac{t}{2}C.$$

再将 $t=x-3$ 代回即得

$$\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

(4) 解:由函数在 $[a,b]$ 上的平均值定义知

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y\mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

设 $x=\sin t$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$t=\frac{\pi}{6}$ 当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,$t=\frac{\pi}{3}$. 于是

$$\overline{y}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$$

(5) 解:题设方程相应的特征方程为 $r^2-4=0$,解得 $r=\pm 2$.

设题设方程的特解为 $y^*(x)=Axe^{2x}$,代入原方程得 $A=\frac{1}{4}$.

故所求通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2 2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

二、选择题

(1) 解:由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$,知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又由

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)-0}{x-0}=0,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

知 $f'_-(0)=f'_+(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

故选(D).

(2) 解:注意到下面的极限运算

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)}{\exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}\right)\right\}}=\frac{5}{e}\neq1.$$

故知 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但不等价的无穷小(注意:上式分母的极限是用 1^∞ 型取对数后用前文多次提到的公式 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$ 计算的).

(3) 解:用特值法+排除法. 比如:

取 $f(x)=x$(奇、单增函数),有 $F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ 是非单增,知选项(D)不真.

取 $f(x)=x^2$(偶函数),有 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ 是非奇函数,选项(B)不真.

取 $f(x)=\cos x+1$(周期函数),有 $F(x)=\sin x+x+C$ 是非周期函数,选项(C)不真.

故选(A).

注： 选项(A)的正确性可做如下证明.

设 $f(x)$ 是奇函数,即 $f(-x)=-f(x)$. 又设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

令 $t=-u$,则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$. 当 $t=0$ 时,$u=0$ 当 $t=-x$ 时,$u=x$. 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t+C=-\int_0^x f(-u)\,\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+C=F(x).$$

故 $F(x)$ 是偶函数.

(4) 解：$\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义是 "对任意给定的正数 ε_1,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$."

可以证明,该定义与题设的叙述是等价的(只需取 $\varepsilon_1=2\varepsilon$ 即可).

故选(C).

(5) 解：依行列式运算性质,将其第 1 列乘以 -1 加到第 2,3,4 列有：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{加到第 4 列}]{\text{第 2 列}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x-7 & 6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

由此可知 $f(x)=0$ 有 2 个根.

故选(B).

三、解：利用计算函数极限的方法,注意下面的变形：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]} \quad \text{(分式用无穷小量代换)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x} \quad \text{(用洛必达(L'Hospital)法则)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

此外还可先将所求极限式分母有理化,再用 L'Hospital 法则亦可求得极限值.

四、解：先考虑不定积分的计算：

$$\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\arctan x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

此外还可用变量替换 $t=\arctan x$ 计算不定积分.

2

故　原式 $=\left[-\dfrac{\arctan x}{x}+\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^{+\infty}=0-\left[-\dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2.$

五、解：将题设方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$**，再令** $y=xu$ **得**

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1+u^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

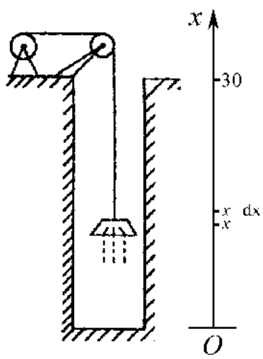
两边积分得 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$ （$C>0$ **常数），即** $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$

将 $y|_{x=1}=0$ **代入，得** $C=1$**，故题设初值问题微分方程的解为**

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

六、解：坐标系取法如图所示．现在推导抓斗位于 x **处时的卷重量包括三部分：抓斗自重** 400（N）、**缆绳重** $50(30-x)$（N）**和污泥重**.

污泥在开始被抓起时为 2000（N），**当抓斗提升到** x **处时，用了** $\dfrac{x}{2}$（s），**漏出的污泥为** $20\cdot\dfrac{x}{3}$（N），**因此污泥重为** $2000-\dfrac{20x}{3}$（N）. **于是总重量为**



$$P(x)=400+50(30-x)+2000-\frac{20x}{3}=3900-\frac{170}{3}x.$$

抓斗克服重力所做的功为

$$W=\int_0^{30}P(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{30}\left(3900-\frac{170}{3}x\right)\mathrm{d}x=91500\ (\mathrm{J}).$$

七、解：由题设知所给函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

又由 $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$**，令** $y'=0$**，得驻点** $x=0$ **及** $x=3$.

再由 $y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$**，令** $y''=0$**，得（可能）拐点** $x=0$. **函数大致性态讨论如下表所列：**

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+
y''	−	0	+	+	+	+
y	↗	拐点	↗	↙	极小值	↗

由上表可知：

（1）**函数的单增区间为** $(-\infty,0)$、$(0,1)$ **和** $(3,+\infty)$，**单减区间为** $(1,3)$；**极小值为** $y|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$.

（2）**函数图形在区间** $(-\infty,0)$ **内是（向上）凸出，在区间** $(0,1)$，$(1,+\infty)$ **内是（向上）凹的，拐点为点** $(0,0)$.

（3）**由** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$**，知** $x=1$ **是函数图形的铅直渐近线；**

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2.$

故 $y=x+2$ **是函数图形的斜渐近线**.

八、证：将 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 按麦克劳林(Maclaurin)公式展开，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)^3,\ \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

再将 $x=-1$ 和 $x=1$ 分别代入上式中，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad -1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad 0<\eta_2<1,$$

两式相减，可得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

设 M 和 m 分别是 $f'''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上的最大值和最小值，显然有

$$m\leqslant f'''(\eta_1)\leqslant M,\quad m\leqslant f'''(\eta_2)\leqslant M,$$

则

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

九、解：曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

它与 Ox 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. 由于 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，则 $y(x)>0$，于是

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}.$$

由题设 $S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $2S_1-S_2=1$ 知 $\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=1$，

两边求导有 $yy''=(y')^2$. 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

上面方程可化为 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$ 或 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两边积分得 $p=C_1y$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y$.

两边再积分得 $y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2x}$.

由 $y(0)=1$ 及 $\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=1$ 知 $y'(0)=1$，由此可得 $C_1=1$，$C_2=0$.

故 所求曲线的方程是 $y=\mathrm{e}^x$.

十、解：要证 $\{a_n\}$ 收敛，只须证 a_n 是单调有界数列. 事实上由题设，

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(k),\quad k=1,2.\cdots.$$

(1) 有界性. 注意到 $f(x)$ 非负及下面的运算，即

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0.$$

(2) 单调性. 由

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\left[\int_1^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0,\end{aligned}$$

2

知 $\{a_n\}$ 单调减少.

故 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、解：由题设式左乘 A 后有 $AA^*X=I+2AX$，即 $(AA^*-2A)X=I$，或 $(|A|I-2A)X=I$，则 $X=(|A|I-2A)^{-1}$，又 $|A|=4$，故

$$X=(4I-2A)^{-1}=\left[4I-2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

十二、解：(1) 考虑矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\vdots\alpha)$ 经行初等变换化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\1&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-1\\0&0&p-9&p-2&-8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{array}\right)$$

(1) 当 $p\neq2$ 时，向量组 α_1、α_2、α_3、α_4 线性无关.

此时设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，化为四元线性方程组可解得

$$x_1=2,\ x_2=\frac{3p-4}{p-2},\ x_3=1,\ x_4=\frac{1-p}{p-2}.$$

(2) 当 $p=2$ 时，向量组 α_1、α_2、α_3、α_4 线性相关.

由上面变换可看出此时向量组的秩等于 3. 且 α_1、α_2、α_3 (或 α_1、α_3、α_4) 为其一个极大线性无关组.

2000 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：注意到 $\ln(1+t)\sim t$ (t 充分小或 $t\to0$ 时)，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(2) 解：取微分 $d(2^{xy})=dx+dy$，即 $2^{xy}\ln2\cdot(y\,dx+x\,dy)=dx+dy$.

再令 $x=0$，则得 $y=1$. 代入前式中，解得 $dy=(\ln2-1)dx$.

(3) 解：设 $\sqrt{x-2}=t$，则 $x=t^2+2$，且 $dx=2t\,dt$，当 $x=2$ 时，$t=0$；当 $x=+\infty$ 时，$t=+\infty$. 于是

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\int_0^{+\infty}\frac{2t\,dt}{(t^2+9)t}=\frac{2}{3}\left[\arctan\frac{t}{3}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}.$$

(4) 解：由题设及曲线斜渐近线 $y=ax+b$ 计算公式有

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=2,$$

且
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-e^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1.$$

故所求曲线斜渐近线方程为 $y=ax+b$，即 $y=2x+1$.

(5) 解：由设 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 有 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，即
$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$
两边加 $\boldsymbol{I}$ 有 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{I}$，从而 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{I}$，故
$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.$$

二、选择题

(1) 解：当 $b>0$ 时 $x\to-\infty$ 且，$e^{bx}\to0$，从而 $f(x)\not\to0$，因此 $b<0$，排除选项 (B) 和 (C). 又因为 $e^{bx}>0$，为使 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 到处连续，只能 $a\geqslant0$.

故选 (D).

(2) 解：在题设方程中令 $x=0$，可得 $f''(0)=0$. 又由题设有
$$f''(x)=x-[f'(x)]^2=x\left\{1-\frac{[f'(x)]^2}{x}\right\}. \tag{*}$$
由于
$$\lim_{x\to0}\frac{[f'(x)]^2}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\right]^2\cdot x=0,$$
因此 $x=0$ 充分小的邻域内，由式 (*) 看出 $f''(x)$ 左右变号，知其为拐点.

故选 (C).

(3) 解 1：由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，有
$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0\ \Rightarrow\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'<0.$$
由 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'<0$，知 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 单减，则当 $a<x<b$ 时，
$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}\ \Rightarrow\ f(x)g(b)>f(b)g(x).$$
解 2：由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，有
$$\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{g'(x)}{g(x)}\ \Rightarrow\int_x^b\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\int_x^b\frac{g'(x)}{g(x)}dx,$$
从而 $\ln\left[\dfrac{f(b)}{f(x)}\right]<\ln\left[\dfrac{g(b)}{g(x)}\right]$，有 $\dfrac{f(b)}{f(x)}<\dfrac{g(b)}{g(x)}$，故 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.

故选 (A).

(4) 解：利用极限式变形以及题设 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right]=0$，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left[\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos6x}{3x^2}+0=\lim_{x\to0}\frac{36\sin6x}{6x}=36.$$

此外还可由 $\sin6x=6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3)$ 代入 $\sin6x$ 直接计算可有

$$0=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\lim\left[\frac{6x+xf(x)}{x^3}-36+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36,$$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$

故选（C）.

（5）解：$y_1=e^{-x}$和$y_2=2xe^{-x}$所对应特征方程的根为 $r=-1$（二重根）；$y_3=3e^x$ 所对应特征方程的根为 $r=1$. 因此特征方程为

$$(r+1)^2(r-1)=0，即\ r^3+r^2-r-1=0.$$

与此特征方程所对应的微分方程是 $y'''+y''-y'-y=0.$

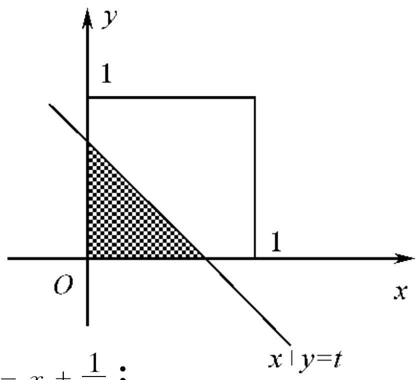
故选（B）.

三、解：设 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，且 $f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$. 从而

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}dx=-\int\ln(1+e^x)\,de^{-x}$$
$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\frac{1}{1+e^x}dx$$
$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$
$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+x-\ln(1+e^x)+C$$
$$=x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C.$$

四、解：由题设容易求出面积 $S(t)$ 的表达式（分段形式），即

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$



当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{2}t^2dt=\frac{1}{6}x^3$；

当 $1<x\leqslant2$ 时，

$$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^1 S(t)\,dt+\int_1^x S(t)\,dt=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3}；$$

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^2 S(t)\,dt+\int_2^x S(t)\,dt=x-1.$

因此 $$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x+\dfrac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

五、解 1：设 $u=x^2$，$v=\ln(1+x)$．根据莱布尼兹(Leibniz)公式，有

$$f^{(n)}(x)=uv^{(n)}+C_n^1u'v^{(n-1)}+C_n^2u''v^{(n-2)}\quad(\text{注意}:u^{(k)}=0,k\geqslant 3)$$

$$=x^2\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{(n-2)}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{(n-3)}(n-3)!}{(1+x)^{(n-2)}},$$

故 $$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{(n-1)}n!}{n-2}.$$

解 2：由麦克劳林(Maclaurin)公式将 $f(x)$ 在 $x=0$ 展开，即

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f(0)^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

以及 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒(Taylor)展开，有

$$x^2\ln(1+x)=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})\right]$$

$$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n-2}+o(x^n),$$

比较 x^n 的系数得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$，故 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

六、解 1：因为 $|\sin x|\geqslant 0$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数，故它们在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1).$$

将这两式代入前式得　$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$．

(2) 由(1)知，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时可有

$$\frac{2n}{(1+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x\to+\infty$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

七、解：设从 2000 年初(令此时刻 $t=0$)开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\dfrac{m}{V}$，则时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，排入湖泊中 A 的量为

$$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t.$$

流出湖泊的水中污染物A的量为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$.

因而在此时间间隔内湖泊中污染物A的改变量 $\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t$.

用分离变量法先将方程变形进而解此微分方程得 $m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}$.

代入初始条件 $m\big|_{t=0}=5m_0$，定出 $C=-\frac{9}{2}m_0$. 于是，湖泊中污染物A的总量变化规律为

$$m=\frac{m_0}{2}\left(1+9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\right).$$

令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物A的含量降至 m_0 以内.

八、证1：如对 $f(x)$ 的原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 能找到3个点 $F(x)=0$，则使用两次罗尔（Rolle）定理就可以得 ξ_1,ξ_2，且使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant \pi$，则有 $F(0)=0$，$F(\pi)=0$，

$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}F(x)=\left[F(x)\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x$.

对 $\varphi(x)=\int_0^{\pi}F(t)\sin t\mathrm{d}t$ 在 $[0,\pi]$ 上使用拉格朗日（Lagrange）中值定理得

$$0=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\mathrm{d}x=\varphi(\pi)-\varphi(0)=\pi F(\xi)\sin\xi,\quad 0<\xi<\pi.$$

因为 $\sin\xi\neq 0$，所以 $F(\xi)=0$.

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔（Rolle）定理知：至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证2：由题设 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$ 使 $f(\xi_1)=0$，因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 恒为正，或 $f(x)$ 恒为负，均与 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

若在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$，则由 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 推知，$f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 内与 (ξ_1,π) 内异号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$.

于是再由 $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$ 与 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性知：

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

得出矛盾. 从而推知，在 $(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外 $f(x)=0$ 至少还有另一实根 ξ_2.

故知存在 ξ_1、$\xi_2\in(0,\pi)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

九、解：因为 $f(x)$ 周期为5，所以在点 $(6,f(6))$ 和点 $(1,f(1))$ 处曲线具有相同的切线斜率. 因此只需根据题设方程求出 $f'(1)$.

对题设方程两边取 $x\to 0$ 的极限，得 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$.

题设方程两边除以 x 后，当 $x\to 0$ 时取极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[8+\frac{\alpha(x)}{x}\right],$$

注意到式右、式左分别有

式右：
$$\lim_{x\to 0}\left[8+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[8+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=8,$$

式左：
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\quad (\text{令 } \sin x=t)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}\\&=4f'(1),\end{aligned}$$

故知 $4f'(1)=8$，由此得 $f'(1)=2$.

又由题设知 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0$，$f'(6)=f'(1)=2$.

故所求曲线 $y=f(x)$ 在 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $y=2(x-6)$，或 $2x-y-12=0$.

十、解：先求题设两曲线交点. 当 $x\geqslant 0$ 时，由 $\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2.\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$，$y=\dfrac{a}{1+a}$.

故直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$. 则旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}.$$

又
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}\quad (a>0).$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，并由 $a>0$ 得惟一驻点 $a=4$. 当 a 在以 4 为中心的左、右邻域变化时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}$ 由正变负，知此旋转体在 $a=4$ 时取极大值，亦是最大值.

故该旋转体最大体积 $V=\dfrac{2\pi}{15}\cdot\dfrac{16}{5^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一、解：(1) 原方程两边乘 $x+1$ 后再求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x-2)f'(x).$$

设 $f'(x)=p$，则 $f''(x)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，方程化为 $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-(x+2)p$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x$.

上式两边积分可有 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x=-\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$，则

$$\ln p=-x-\ln(x+1)\ \Rightarrow\ f'(x)=p=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}.$$

2

由 $f(0)=1$ 及 $f'(0)+f(0)=0$，知 $f'(0)=-1$，从而 $C=-1$，故 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

（2）对 $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$ 两边积分，得

$$f(x)-f(0)=-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \Rightarrow \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt = 1-f(x).$$

当 $x\geqslant 0$ 时，有 $0\leqslant\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt\leqslant\int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}$，

于是 $0\leqslant 1-f(x)\leqslant 1-e^{-x}$，即 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

此外结论（2）还可证如：

当 $x\geqslant 0$ 时，由 $f'(x)<0$，知 $f(x)$ 单减，又 $f(0)=1$，所以 $f(x)\leqslant 1$.

设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则

$$\varphi(0)=0,\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{x}{x+1}e^{-x},$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$，即 $\varphi(x)$ 单增，因而 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即有 $f(x)\geqslant e^{-x}$.

综上，当 $x\geqslant 0$ 时有 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

十二、解：由题设可有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\2&1&0\\1&1/2&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2,$$

又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm T}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}=2\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}\cdot 2\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{A}^2=8\boldsymbol{A}$.

把以上各式代入原方程，经化简可得（其中 $\boldsymbol{I}$ 是 3 阶单位矩阵）$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}$.

令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}$，代入上式，得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-8x_1+4x_2=0,\\16x_1-8x_3=0,\\8x_1+4x_2-16x_3=8.\end{cases}\tag{*}$$

对上方程组增广矩阵作初等行变换

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-8&4&0&0\\16&-8&0&0\\8&4&-16&8\end{array}\right)\xrightarrow[\text{变为 }e_1]{\text{将第 1 列}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1/2&0&0\\0&0&0&0\\0&8&-16&8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{变为 }e_3]{\text{将第 2 列}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1/2\\0&0&0&0\\0&1&-2&1\end{array}\right).$$

由此知 $\mathrm r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\mathrm r(\boldsymbol{A})=2$，原方程组有解，其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3+\dfrac{1}{2},\\x_2=2x_3+1.\end{cases}\tag{**}$$

由同解方程组（**）求原方程组（*）的通解方法有二：

方法 1：令 $x_3=0$ 得方程组（*）的一个特解 $\boldsymbol{\beta}_0=\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm T}$.

方程组（*）的导出组同解于 $x_1=x_3$，$x_2=2x_3$. 令 $x_3=1$，得该方程组的基础解 $\boldsymbol{\beta}_1=$

$(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

于是所求方程的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_0+k\boldsymbol{\beta}_1$，即

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm{T}}+k(1,2,1)^{\mathrm{T}}\quad(\text{其中 } k \text{ 为任意常数}).$$

方法 2：令 $x_3=k$ （k 为任意常数），由（**）得通解

$$\boldsymbol{x}=\left(k+\frac{1}{2},2k+1,k\right)^{\mathrm{T}}=k(1,2,1)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{1}{2},1,0\right)^{\mathrm{T}}.$$

十三、解 1：由题设且注意到下面的变换：令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{1\text{ 列}\times 3,2\text{ 列}\times 2\\ \text{加至第 3 列}}]{\text{列初等变换}}\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&0\\-3&1&0\end{pmatrix},$$

因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是（Ⅰ）的极大无关组.

所以 $\mathrm{r}(\text{Ⅰ})=\mathrm{r}(\text{Ⅱ})$，故 $|\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=0$，得 $a=3b$.

又 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性表出，而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 又可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

故 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=0$，得 $b=5$. 因而 $a=3b=15$，$b=5$.

解 2：今考虑 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})$ 经行初等变换可化为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&3&9&b\\0&1&2&\frac{1}{6}(2b-1)\\0&0&0&\frac{1}{10}(5-b)\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\beta}\leftarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有非 0 解，则 $\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，

知 $\frac{1}{10}(5-b)=0$，得 $b=5$. 又由解 1 知 $|\boldsymbol{B}|=0$，得 $a=3b$，故 $a=15$，$b=5$.

2001 年试题参考答案

一、填空题

（1）解：由分子有理化，有

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

（2）解：对方程两边关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+(y+xy')\sin(xy)=0.$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入，解得切线斜率 $y'(0)=-2$，于是法线斜率 $k=\frac{1}{2}$.

故所求法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-0)$，即 $x-2y+2=0$.

（3）解：由奇偶函数在对称区间上积分性质，知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = 0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{因}\ \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

这里注意到 $x^3\cos^2 x$ 是奇函数，它在对称区间上积分值为 0 以及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 计算公式.

(4) 解 1：方程化为 $y'+\dfrac{y}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\arcsin x}$，设 $P=\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{1-x^2}}$，$Q=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

则 $\int P\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln(\arcsin x)+C_0$. 故方程通解

$$y=\mathrm{e}^{-\ln(\arcsin x)}\left(\int\frac{1}{\arcsin x}\mathrm{e}^{\ln(\arcsin x)}\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{x+C}{\arcsin x}.$$

由 $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 可定出 $C=-\dfrac{1}{2}$，故曲线方程为 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

解 2：由 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=(y\arcsin x)'$ 及题设方程知

$$(y\arcsin x)'=1\Rightarrow y\arcsin x=x+C.$$

以下同解 1.

(5) 解：方程组有无穷多解的充要条件是 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\ \vdots\ b)<3$. 因此，令 $|A|=0$，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列提}(a+2)]{2,3\text{ 列加到}}(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{减第 1 列}]{2,3\text{ 列}}(a+2)(a-1)^2=0.$$

①当 $a=1$ 时，增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 经第 2，3 行分别减去第 1 行后有

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right).$$

因为 $\mathrm{r}(A)=1\neq\mathrm{r}(\bar{A})=2$，故方程组无解.

②当 $a=-2$ 时，$\bar{\boldsymbol{A}}$ 经第 2 行减第 1 行，第 3 行加 2 倍第 1 行，第 3 行再减去第 2 行后有

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&-2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&1\\3&-3&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

由此知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\bar{\boldsymbol{A}})=2$，方程组有无穷多解.

综上 $a=-2$ 时方程组有无穷解.

二、选择题

(1) 解：由题设可有 $f\{f[f(x)]\}=f\{f(1)\}=f(1)=1$.

故选(B).

(2) 解：因为当 $x\to 0$ 或 x 充分小时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4,\quad x\sin x^n\sim x^{n+1},\quad \mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2,$$

所以 $n+1=3$，即 $n=2$.

故选 (B).

(3) 解 1：求 y'，y''，令 $y''=0$，解得 $x_{1,2}=2\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

然后可判断在这两点的左、右邻域内，y''都变号，则有 2 个拐点.

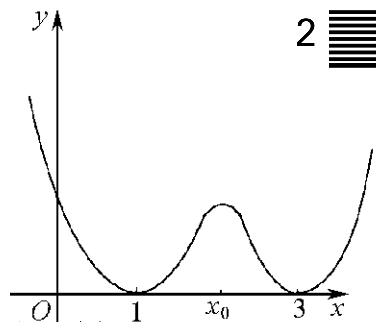
故选 (C).

解 2：由于题设函数特殊，不必计算二阶导数即可判断出函数曲线拐点的个数.

首先，y 是 4 次多项式，它至多有 4 个实根，其曲线最多拐 3 次弯，因此拐点最多有 2 个.

其次，$x=1$，$x=3$ 是极小点，在两点之间必有惟一的极大点，设其为 x_0.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$，$y$ 的大致图形如图所示.



于是在 $(1,x_0)$ 和 $(x_0,3)$ 内各有一个拐点.

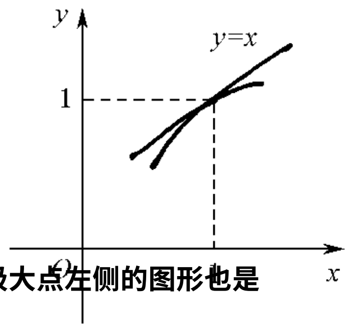
故选 (C).

(4) 解 1：当 $x<1$ 时 $f'(x)>f'(1)=1$，则$\displaystyle\int_x^1 f'(x)\,\mathrm{d}x>\int_x^1 \mathrm{d}x$，得 $f(x)<x$.

当 $x>1$ 时 $f'(x)<f'(1)=1$，则$\displaystyle\int_1^x f'(x)\,\mathrm{d}x<\int_1^x \mathrm{d}x$，得 $f(x)<x$.

故选 (A).

解 2：用图解法. 依题意画出草图，由 $f'(x)$ 单调下降，从而 $f''(x)\leqslant 0$. 表明 $f(x)$ 的图形为下凸的，且点 $(1,f(1))$ 在曲线切线 $y-1=1\cdot(x-1)$ 即 $y=x$ 上.



故选 (A).

(5) 解：用排除法. 因为 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图形是单调增加的，则 $f'(x)\geqslant 0$，由此知选项 (A) 和 (C) 不真. 因为 $f(x)$ 在 y 轴右侧至极大点左侧的图形也是单调增加的，则 $f'(x)\geqslant 0$，由此知选项 (B) 亦不真.

故选 (D).

三、解：设 $x=\tan u$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$. 从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u\cdot(2\tan^2u+1)}=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{2\sin^2u+\cos^2u}=\int\frac{\mathrm{d}\sin u}{1+\sin^2u}$$

$$=\arctan(\sin u)+C=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C.$$

四、解：根据 1^∞ 型极限计算公式 (前文曾有介绍)：当 $u(x)\to 0$ 时，

$$\lim[1\pm u(x)]^{v(x)}=\lim\{\exp[v(x)\ln(1\pm u(x))]\}=\exp\{\lim[v(x)\ln(1\pm u(x))]\}$$

$$=\exp\{\lim v(x)[\pm u(x)]\}=\exp\{\pm v(x)u(x)\},$$

$$f(x)=\exp\left[\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\cdot\frac{x}{\sin t-\sin x}\right]=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}.$$

由上知 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$,所以 $x=0$ 为第一类(或可去)间断点.其余间断点属于第二类(或无穷)间断点.

五、解:由设 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,$y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{\kappa}=\frac{(1-y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

则抛物线上$\overparen{AM}$的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$

故
$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x}.$$

又
$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$

六、解:等式两边对 x 求导得 $g[f(x)]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$. 而 $g[f(x)]=x$,
故 $xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$. 当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=2e^x+xe^x$.
上式两边积分得 $f(x)=(x+1)e^x+C$.
由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故由 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[(x+1)e^x+C]=0$,得 $C=-1$.
因此 $f(x)=(x+1)e^x-1$.

七、解1:由 $f'(x)=g(x)$ 得 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$,于是有

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=2e^x,\\ f(0)=0,\ f'(0)=2.\end{cases}$$

解得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$. 这样

$$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int_0^\pi d\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]=\frac{f(x)}{1+x}\Bigg|_0^\pi=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}.$$

解2:同解法1得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$.又

$$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^\pi f(x)\,d\left(\frac{1}{1+x}\right)$$
$$=\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx+f(x)\cdot\frac{1}{1+x}\Bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{f'(x)}{1+x}dx$$
$$=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)+\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx-\int_0^\pi\frac{g(x)}{1+x}dx=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}.$$

八、解:(1) L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$,此切线在 Oy 轴上的截距

为 $y-xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$,其为齐次微分方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$变换后,可解得方程通解 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$. 由 L 经过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,知 $C=\dfrac{1}{2}$.

于是 L 方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$，即 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$.

(2) 第一象限内曲线 $y=\dfrac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

它与 Ox 轴及 Oy 轴交点分别为 $\left[\dfrac{1}{2x}\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right),0\right]$与 $\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$. 设 L 与 Ox 轴和 Oy 轴在第一象限内所围图形面积为 S_0,则所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-S_0=\frac{1}{4x}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-S_0.$$

令 $S'(x)=\dfrac{1}{4x^2}\cdot\left[4x^2\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)-\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)^2\right]=\dfrac{1}{4x^2}\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)\left(3x^2-\dfrac{1}{4}\right)=0$,

解得驻点 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (已舍去负值).

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时,$S'(x)<0$;$x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时,$S'(x)>0$,因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$是 $S(x)$在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$内的惟一极小值点,即最小值点. 于是所求切线为

$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4},\quad 即\quad Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

九、解 1:设在 t 小时雪堆的底面半径为 $r(t)$.

于是雪堆体积 $V(t)=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S(t)=2\pi r^2$. 依题意有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-KS(t)\ \Rightarrow\ 2\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-K\cdot 2\pi r^2,$$

亦即 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-K$，积分可得 $r=-Kt+C$.

由初始条件 $r(0)=r_0$,定出 $C=r_0$. 得 $r=r_0-Kt$.

令 $r=0$,解得融化时间为 $t=\dfrac{r_0}{K}$. 下具体求该值.

依题设 $V(3)=\dfrac{1}{8}V(0)$，即 $\dfrac{2}{3}\pi(r_0-3K)^3=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\pi r_0^3$.

由此求得$\dfrac{r_0}{K}$即雪堆融化时间为 $t=\dfrac{r_0}{K}=6\mathrm{h}$.

解 2:设雪堆在时刻 t 的体积 $V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,侧面积 $S=2\pi r^2$,从而 $S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$.

由题设知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-KS=-\sqrt[3]{18\pi V^2}K$，即 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\sqrt[3]{V^2}}=-\sqrt[3]{18\pi}K\mathrm{d}t$,两边积分得

$$3\sqrt[3]{V}=-\sqrt[3]{18\pi}Kt+C.$$

设 $V(0)=V_0$,得 $C=3\sqrt[3]{V_0}$，故有 $3\sqrt[3]{V}=33\sqrt[3]{V_0}-\sqrt[3]{18\pi}Kt$.

又由 $V(3)=\frac{1}{8}V_0$,得 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{V_0}=3\sqrt[3]{V_0}-3\sqrt[3]{18\pi}K$，从而 $K=\frac{\sqrt[3]{V_0}}{2\sqrt[3]{18\pi}}$，

故 $3\sqrt[3]{V}=3\sqrt[3]{V_0}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{V_0}t$. 令 $V=0$,得 $t=6$,即雪堆全部融化需 6 小时.

十、解：(1) 对任意 $x\in[-a,a]$,由麦克劳林 (Maclaurin) 公式,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

(2) 由 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2!}f''(\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}a^2f''(\xi)\mathrm{d}x$.

又 $f''(x)$ 的连续性知其在 $[-a,a]$ 上有最值,设 M,m 分别为 $f''(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大、最小值,因而有 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$,从而

$$m\int_0^a x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}a^2f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x^2\mathrm{d}x,$$

即

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

由介值定理知,至少存在一点 $\eta\in[a,-a]$,使 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

十一、解：类比于从方程 $axb+bxb=axb+bxa+1$ 求 x,仿上例可有：

$$(\boldsymbol{AXA}-\boldsymbol{AXB})-(\boldsymbol{BXA}-\boldsymbol{BXB})=\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})+\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$，或 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$.

若 $A-B$ 非奇异 (可逆),可有 $X=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}=[(A-B)^{-1}]^2$.

注意到 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=1$,知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 非奇异 (可逆).

又 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

十二、解：显然 $\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,3,4)$ 亦为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解,只须使 $\boldsymbol{\beta}_i$ 线性无关即可.

由设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1&0&0&t\\t&1&0&0\\0&t&1&0\\0&0&t&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{T}$.

由 $|\boldsymbol{T}|=t^4-1$,故 $t\neq\pm1$ 时,$|\boldsymbol{T}|\neq0$,知 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}\ (i=1,2,3,4)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

2002 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：由题设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知

$$\lim_{x\to0^-}(a\mathrm{e}^{2x})=a=f(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2.$$

(2) 解：由题设及定积分几何意义知

$$S=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\left[\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

(3) 解：设 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 原方程化为 $p\left(y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p\right)=0$.

从而有 $p=0$（不满足初始条件，舍去），$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.

将后式两边积分后，得 $p=\dfrac{C_1}{y}$，将初始条件代入，定出 $C_1=\dfrac{1}{2}$.

从而有 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2y}$，即 $2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，两边积分得 $y^2=x+C_2$，代入初始条件，定出 $C_2=1$.

故　所求特解为 $y^2=x+1$（或 $y=\sqrt{x+1}$）.

(4) 解：所求极限式可表成 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$，故将 $\sum$ 换成 $\int$，而 $\dfrac{1}{n}$ 换成 $\mathrm{d}x$ 即有

$$\text{原式}=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

(5) 解：由题设矩阵的特征方程为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$，再由行列式性质可有：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\2&2-\lambda&-2\\-2&-2&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[\text{上第 3 列}]{\text{第 2 列加}}\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\0&-\lambda&-\lambda\\-2&-2&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 2 列}]{\text{第 3 列减}}\begin{vmatrix}-\lambda&-2&0\\0&-\lambda&0\\-2&-2&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(4-\lambda).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值 $\lambda=4$.

二、选择题

(1) 解：对 $y=f(x^2)$ 取微分，得 $\mathrm{d}y=2xf'(x^2)\mathrm{d}x$.

将 $x=-1$，$\mathrm{d}x=\Delta x=-0.1$ 和 $\mathrm{d}y=0.1$ 代入微分式中，得 $f'(1)=0.5$.

故选 (D).

(2) 解：取 $f(x)=x$，选项 (A)、(B) 的积分为 $\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^3$　（奇函数）.

选项 (C) 的积分为 $\int_0^x 2t^2\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}x^3$　（奇函数）.

故选 (D).

事实上，令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$，在积分中用变量代换 $t=-u$，容易证明 $F(-x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数.

(3) 解 1：由题设 $y(0)=y'(0)=0$，则由无穷小量代换 $\ln(1+t)\sim t$ 和洛必达 (L'Hospital) 法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{e^{3x}-py'(x)-qy(x)}=2.$$

故选(C).

解2：由题设知方程的特解形式有三种可能：$y=ae^{3x}$，$y=axe^{3x}$和$y=ax^w+e^{3x}$. 前两种都不满足初始条件.

因此，特解形式为 $y=ax^2e^{3x}$，此时表明 $\lambda=3$ 是特征方程
$$R(r)=r^2+pr+q=0$$
的二重根. 设 $Q=ax^2$，则 $Q'=2ax$，$Q''=2a$ 代入公式
$$Q''+R'(3)Q'+R(3)Q=1$$
中，则得 $2a=1$，即 $a=\frac{1}{2}$，因此 $y(x)=\frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

又当 $x\to0$ 时 $\ln(1+x^2)\sim x^2$，则由无穷小量代换有
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2e^{3x}}=2.$$

故选(C).

(4) 解1：(排除法) 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$，则导数 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$.

因为 $f(+\infty)=0$，但 $f'(+\infty)=0$ 不存在，所以排除选项(A).

又设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$.

因为 $f(+0)=0$，而 $f'(+0)=1$，所以排除选项(C)和选项(D).

故选(B).

解2：(直接推理法) 对于选项(B)，使用反证法证明其真.

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\neq0$，不妨设 $a>0$，则必存在 $x_0>0$. 当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)>\frac{a}{2}$. 在区间 $[x_0,x]$ 上使用拉格朗日(Lagrange)定理，则存在 $\xi\in(x_0,x)$ 使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+\frac{a}{2}(x-x_0),$$
从而当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$. 这与 $f(x)$ 有界矛盾.

故选(B).

(5) 解：(特值法) 取 $k=0$，选项(B)和(C)不真；取 $k=1$ 选项(D)不真.

故选(A).

三、解：此曲线的参数方程为
$$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\theta-\cos^2\theta,\\ y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta.\end{cases}$$

由 $\theta=\frac{\pi}{6}$，得到切点的坐标 $\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{4}\right)$. 切线斜率为
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left[\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1.$$

于是所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}$，即 $x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0$.

法线方程为 $y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right)$，即 $x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0$.

四、解：因被积函数为分段函数，积分可分段考虑.

当 $-1\leqslant x<0$ 时，有

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\\&=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}+\int_0^x\frac{t\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}-\int_0^x t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right)\\&=-\frac{1}{2}-\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int_0^x\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1)}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\Big|_0^x=-\frac{1}{2}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln 2.\end{aligned}$$

所以
$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

五、解：注意下面极限式变形：

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}&=\exp\left\{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)h}\right\}=\exp\left\{\frac{x}{f(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}\right\}\\&=\exp\left\{\frac{xf'(x)}{f(x)}\right\}.\end{aligned}$$

由题设等式可得 $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}$，即 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$，从而 $f(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，得 $C=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

六、解：题设方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=-1$. 利用一阶线性微分方程求解公式得通解

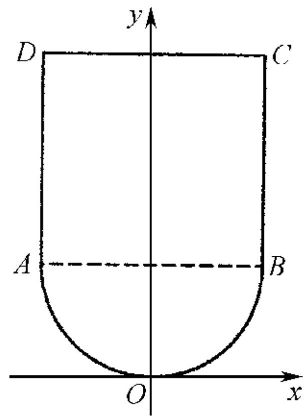
$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[-\int\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right)=x+Cx^2.$$

故所求旋转体体积 $V(C)=\int_1^2\pi(x+Cx^2)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right)$.

由 $V'(C)=\pi\left(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2}\right)=0$，解得 $C=-\frac{75}{124}$.

由于 $V''(C)=\frac{62}{5}\pi>0$，意即 $C=-\frac{75}{124}$为惟一极小值点，也是最小值点，

于是　$y=x-\frac{75}{124}x^2$.



七、解 1：如图建立坐标系，且设抛物线的方程为 $y=x^2$.

由题设闸门矩形部分承受的水压力为

$$P_1=2\int_1^{h+1}\rho g(h+1-y)\mathrm{d}y=2\rho g\left[(h+1)y-\frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1}$$
$$=\rho g h^2,$$

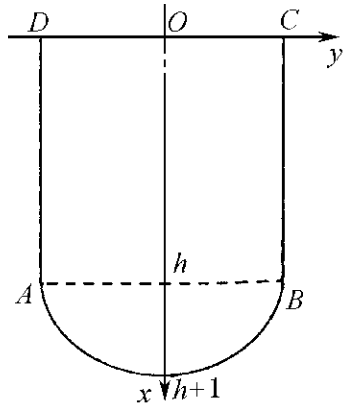
其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度.

而闸门下部承受的水压力为

$$P_2=2\int_0^1\rho g(h+1-y)\sqrt{y}\mathrm{d}y=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

依题意知 $\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{h^2}{4\left(\dfrac{1}{3}h+\dfrac{2}{15}\right)}=\dfrac{5}{4}$，

解得 $h=2$，$h=-\dfrac{1}{3}$（舍去），故 $h=2$.



解 2：如图建立直角坐标系，则抛物线方程为 $x=h+1-y^2$.

闸门矩形部分承受的水压力为 $P_1=2\int_0^h\rho g x\mathrm{d}x=\rho g h^2$.

闸门下部承受的水压力为 $P_2=2\int_h^{h+1}\rho g x\sqrt{h+1-x}\mathrm{d}x$.

设 $\sqrt{h+1-x}=t$，代入上式得

$$P_2=4\rho g\int_0^1(h+1-t^2)t^2\mathrm{d}t=4\rho g\left[(h+1)\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$

$$=4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

以下同解 1.

八、证：只需证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界.

(1) 有界性. 由 $0<x_1<3$ 知 x_1 和 $3-x_1$ 均为正数，因此有

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}\ (k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\dfrac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\dfrac{3}{2}$.

由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，故数列 $\{x_n\}$ 有界.

(2) 单调性. 当 $n\geqslant1$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1}\geqslant\sqrt{2-1}=1$.

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n\ (n>1)$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界序列的收敛性知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$.

由此解得 $a=\dfrac{3}{2}$，$a=0$（舍去）. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

九、证：先证左边的不等式. 有两种证法：

方法 1：设 $f(x)=\ln x\ (x>a>0)$，根据拉格朗日（Lagrange）中值定理，

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},\quad a<\xi<b.$$

由 $a<\xi<b$，因此 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}=\frac{2a}{2ab}>\frac{2a}{a^2+b^2}$ （注意 $a^2+b^2>2ab$）．故

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

方法 2：设 $f(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\quad(x>a>0)$，

因为 $f'(x)=2x(\ln x-\ln a)+(x^2+a^2)\frac{1}{x}-2a=2x(\ln x-\ln a)+\frac{(x-a)^2}{x}>0$，

故当 $x>a$ 时 $f(x)$ 单调增加，又 $f(a)=0$，所以当 $x>a$ 时，$f(x)>f(a)=0$，即

$$(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0.$$

从而当 $b>a>0$ 时，有 $(a^2+b^2)(\ln b-\ln a)-2a(b-a)>0$，即

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$$

再证右边不等式．设 $\varphi(x)=\frac{x-a}{\sqrt{ax}}-\ln x+\ln a\ (x>a>0)$，则 $\varphi(a)=0$，且

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{x}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}>0.$$

于是 $\varphi'(x)>0$，知 $\varphi(x)$ 单增，从而，当 $x>a>0$ 时 $\varphi(x)>\varphi(a)=0$.

特别地令 $x=b$，则有 $\varphi(b)>b$，即 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、证 1：只需证存在惟一的一组实数 λ_1、λ_2、λ_3 使

$$\lim_{h\to0}\frac{\lambda f(h)+\lambda f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由题设和洛必达（L'Hospital）法则，有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}\\&=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0).\end{aligned}$$

由于 $f'(0)\neq0$，$f''(0)\neq0$，又上式极限式为 0，故知诸极限分子为 0，可得 λ_1、λ_2、λ_3 的线性方程组及其系数行列式，即

$$\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)=0,\\(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)=0,\\(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq0.$$

因此，存在惟一的一组实数 λ_1、λ_2、λ_3，使得当 $h\to0$ 时，

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3(3h)-f(0)$$

是比 h^2 高阶的无穷小.

证 2：由函数麦克劳林(Maclaurin)展开公式得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2 \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } h \text{ 之间}).$$

又据题设条件，当 $h\to 0$ 时

$$\begin{aligned} f(h)&=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2+\frac{1}{2}[f''(\xi)-f''(0)]h^2\\ &=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}h''(0)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

同理可得

$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+2f''(0)h^2+o(h^2).$$

$$f(3h)=f(0)+3f'(0)h+\frac{9}{2}f''(0)h^2+o(h^2).$$

故有

$$\begin{aligned}&\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)\\ =&(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_2+2\lambda_2+3\lambda_3-1)f'(0)h+\\ &\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

所以 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

以下同证法 1.

十一、解：(1) 由题设有　$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，(类比于 $ab-2b-4a$ 的分解出 $a-2$ 的因子).

从而　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})=8\boldsymbol{I}$，　即　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\cdot\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$，

故知矩阵　$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆，　且　$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})$.

(2) 由上式有 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}+8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}$.

又　$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4 & 1/4 & 0\\ -1/8 & 3/8 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$，　故　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

十二、解 1：由题设知所求通解等于 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解之和.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm T}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为

$$(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_3x_3+\boldsymbol{\alpha}_4x_4=\boldsymbol{0},$$

即　$(2x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

由　$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，知

$$\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\ -x_1+x_3=0,\\ x_4=0.\end{cases}$$

解得其通解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 是为任意常数.

又易看出 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解. 故所求通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

解 2：令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}$ 得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理后得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

又由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，知

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \qquad\qquad -3=0, \\ -x_1 \qquad +x_3 \qquad\quad =0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4-1=0. \end{cases}$$

解此方程组得 $\boldsymbol{x}=(0,3,0,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

2003 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：根据等价无穷小量的定义，相当于已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac14}}{x\sin x}=1$，反过来求 a. 注意在计算过程中应尽可能地应用无穷小量的等价代换进行化简.

当 $x\to0$ 时：$(1-ax^2)^{\frac14}-1\sim-\dfrac14ax^2$，$x\sin x\sim x^2$.

于是，根据题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac14}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac14ax^2}{x^2}=-\dfrac14a=1$，故 $a=-4$.

(2) 解：先求出在点 $(1,1)$ 处的导数，然后利用点斜式写出切线方程即可. 等式 $xy+2\ln x=y^4$ 两边直接对 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y',$$

将 $x=1,y=1$ 代入上式，有 $y'(1)=1$. 故过点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1),\quad 即\quad x-y=0.$$

(3) 解：问题相当于求 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$，因函数麦克劳林 (Maclaurin) 展开式中 x^n 的系数是 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

由 $y'=2^x\ln2,y''=2^x(\ln2)',\cdots,y^{(x)}=2^x(\ln2)^n$，于是有 $y^{(n)}(0)=(\ln2)^n$，

故 $y=2^x$ 的麦克劳林 (Maclaurin) 展式中 x^n 项的系数是 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(\ln2)^n}{n!}$.

(4) 解：利用极坐标下的面积计算公式 $S=\dfrac12\displaystyle\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 即可.

故 所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{2a\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{2a\theta}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4\pi a}-1).$$

(5) 解：问题的关键是矩阵 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，必可分解为一列乘一行的形式，而行向量一般可选第一行（或任一非零行），列向量的元素则为各行与选定行的倍数构成：

由 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,-1,1)$，知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

于是　$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3.$

注：对秩 1 矩阵来讲，一般地可有下面结论：

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1（称为秩 1 矩阵），则必有 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

其中 $a_ib_j\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$ 至少一个不为 0．反之亦然．

(6) 解：先化简分解出矩阵 $\boldsymbol{B}$，再取行列式即可．由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 知，

$$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E},$$

易知矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，于是有　$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$．再两边取行列式得　$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=1.$

因为　$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2$，　所以　$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{2}.$

二、选择题

(1) 解：注意到数列极限与前面有限项的大小无关，可排除 (A)、(B)；

而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型未定式，其可能存在也可能不存在，举例说明即可；

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属 $1\cdot\infty$ 型，必为无穷大量，即不存在．

用举反例（特值）法，如取 $a_n=\frac{2}{n}$，$b_n=1$，$c_n=\frac{1}{2}n\ (n=1,2,\cdots)$，则可排除选项 (A)、(B)、(C)，因此正确选项为 (D)．

(2) 解：先用换元法计算积分，再求极限．

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}(1+x^n)\\&=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\},\end{aligned}$$

可见　$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.$　故选 (B)．

(3) 解：将 $y=\frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程，再令 φ 的中间变量为 u，求出 $\varphi(u)$ 的表达式，进而可计算出 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$．将 $y=\frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，得

$$\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x),\Rightarrow \varphi(\ln x)=-\frac{1}{\ln^2 x}.$$

令 $\ln x=u$，有 $\varphi(u)=-\frac{1}{u^2}$，故 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$. 故选(A).

(4) 解：问题答案与极值点个数有关，而可能的极值点应是导数为零或导数不存在的点，图中共 4 个，具体是极大值点还是极小值点可由函数取极值的充分条件判定.

根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 则是导数不存在的点.

三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且两个极小值点，一个极大值点；

在 $x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点.

故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点.

故选(C).

(5) 解：直接计算 I_1，I_2 是困难的，可应用不等式 $\tan x>x$，$x>0$.

因为当 $x>0$ 时，有 $\tan x>x$，于是 $\frac{\tan x}{x}>1$，即 $\frac{x}{\tan x}<1$，从而有

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>\frac{\pi}{4},\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4},$$

可见 $I_1>I_2$ 且 $I_2<\frac{\pi}{4}$，可排除(A)、(C)、(D)，故选(B).

注：本题没有必要去证明 $I_1<1$，因为用排除法，(A)、(C)、(D)均不正确，剩下的(B)应为正确选项.

(6) 解：注意若向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、…、$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、…、$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关.

或其逆否命题 若向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、…、$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、…、$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，且向量组 Ⅰ 线性无关，则必有 $r\leqslant s$. 可见正确选项为(D).

本题也可通过举反例(特值法)用排除法来解如：

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1=0\cdot\boldsymbol{\beta}_1+0\cdot\boldsymbol{\beta}_2$，但 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，排除(A)；

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关，排除(B)；

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，排除(C). 故正确选项为(D).

三、解：分段函数在分段点 $x=0$ 连续，要求既是左连续又是右连续，即

$$f(0_{-0})=f(0)=f(0_{+0}).$$

由

$$\begin{aligned}f(0_{-0})&=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a.\end{aligned}$$

$$f(0_{+0})=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{a\mathrm{e}^{ax}+2x-a}{2x}=2a^2+4.$$

令 $f(0_{-0})=f(0_{+0})$，有 $-6a=2a^2+4$，得 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

四、解：参数方程求二阶导数，按参数方程求导的公式进行计算即可. 注意当 $x=9$ 时，可相应地确定参数 t 的取值.

由题设可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{e}^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t}$， $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t$，因而可有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)},$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\mathrm{e}}{2}\cdot\dfrac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{1}{4t}$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}=\left.-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=\frac{\mathrm{e}}{16(1+2\ln2)^2}.$$

五、解 1：被积函数含有根号 $\sqrt{1+x^2}$，可作代换：$x=\tan t$ 被积函数含有反三角函数 $\arctan x$，同样可考虑变换：$\arctan x=t$，即 $x=\tan t$. 设 $x=\tan t$，则

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2t)^{\frac32}}\sec^2t\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t.$$

又 $\displaystyle\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t=-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t)=-\left(\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t\right)=-\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$，

故 $\displaystyle\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac12\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C.$

因此 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x=\frac12\mathrm{e}^{\arctan x}\left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$

解 2：用分部积分法：

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})$$

$$=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x,$$

移项整理得 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac32}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$

六、解：将$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$转化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$比较简单，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{y'}$，关键是应注意：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

然后再代入原方程化简即可.

(1) 由反函数的求导公式知$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程得　$y''-y=\sin x$.　　(*)

(2) 方程 (*) 所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设方程 (*) 的特解为　$y^*=A\cos x+B\sin x$，

代入方程 (*)，求得 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，

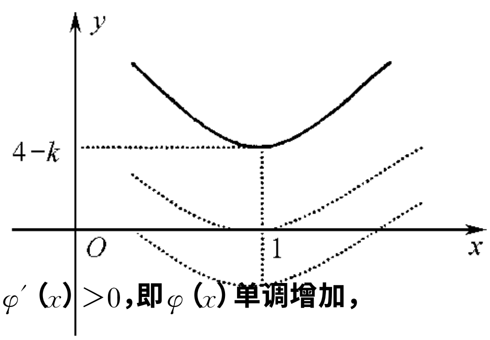
从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1$，$C_2=-1$. 故所求初值问题的解为

$$y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

七、解：问题等价于讨论方程 $\ln^4x-4\ln x+4x-k=0$ 有几个不同的实根. 它实际上相当于一道函数作图题，通过单调性、极值的讨论即可确定实根的个数 (与 Ox 轴交点的个数).



设 $\varphi(x)=\ln^4x-4\ln x+4x-k$，

则有　$\varphi'(x)=\frac{4}{x}(\ln^3x-1+x)$.

不难看出，$x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点.

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 单调减少；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，故 $\varphi(1)=4-k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $k<4$ 时，即 $4-k>0$ 时，$\varphi(x)=0$ 无实根，即两条曲线无交点.

当 $k=4$ 时，即 $4-k=0$ 时，$\varphi(x)=0$ 有惟一实根，即两条曲线有惟一交点.

当 $k>4$ 时，即 $4-k<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3x-4)+4x-k]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^3x-4)+4x-k]=+\infty.$$

故 $\varphi(x)=0$ 有两个实根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内，即两条曲线有两个交点.

注：讨论曲线与坐标轴的交点，在构造辅助函数时，应尽量将待分析的参数分离开来，使得求导后不含参数，便于求驻点坐标.

八、解：问题(1)可先求出法线方程与交点坐标 Q，再由题设线段 PQ 被 Ox 轴平分，可转化为微分方程，求解此微分方程即可得曲线 $y=f(x)$ 的方程．而问题(2)可先将曲线 $y=f(x)$ 化为参数方程，再利用参数方程的弧长公式 $s=\int_a^b\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t$ 进行计算即可．

(1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 (X,Y) 为法线上任意一点的坐标．令 $X=0$，则

$$Y=y+\frac{x}{y'},$$

故 Q 点的坐标为 $\left(0,y+\frac{x}{y'}\right)$．由题设知

$$\frac{1}{2}\left(y+y+\frac{x}{y'}\right)=0,\ \Rightarrow\ 2y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}x=0.$$

积分得　$x^2+2y^2=C$　(C 为任意常数)．

由 $y\big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$ 知 $C=1$，故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$x^2+2y^2=1.$$

(2) 曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2x}\,\mathrm{d}x.$$

曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

故　$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2t+\frac{1}{2}\cos^2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2t}\,\mathrm{d}t$，

为使 s 能用 l 表示，令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，则

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2u}\,(-\mathrm{d}u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2u}\,\mathrm{d}u=\frac{l}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}l.$$

注：问题只是在第一象限考虑曲线 $y=f(x)$ 的弧长，所以积分限应从 0 到 $\frac{\pi}{2}$，而不是从 0 到 2π．

九、解：液面的面积将以 $\pi\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$ 的速率均匀扩大，因此 t 时刻液面面积应为 $\pi 2^2+\pi t$，而液面为圆，其面积可直接计算出来，由此可导出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；又液体的体积可根据旋转体的体积公式用定积分计算出，已知 t 时刻的液体体积为 $3t$，这便可建立积分关系式，求导后转化为微分方程求解即可．

(1) 设在 t 时刻，液面的高度为 y，则由题设知此时液面的面积为

$$\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi t,$$

从而　$t=\varphi^2(y)-4$．

(2) 液面的高度为 y 时，液体的体积为 $\pi\int_0^y\varphi^2(u)\,\mathrm{d}u=3t=3\varphi^2(y)-12$．

上式两边对 y 求导，得

$$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y)，即\quad \pi\varphi(y)=6\varphi'(y).$$

解此微分方程，得 $\varphi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}$，其中 C 为任意常数，

由 $\varphi(0)=2$ 知 $C=2$，故所求曲线方程为 $x=2e^{\frac{\pi}{6}y}$.

十、解：问题(1)可由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在知，又 $f(a)=0$，再利用单调性即可证明 $f(x)>0$. (2)的结论显含 $f(a)$、$f(b)$，应将要证的结论写为拉格朗日(Lagrange)或柯西(Cauchy)中值定理的形式. (3)注意利用(2)的结论证明即可.

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=f(a)=0$. 又 $f'(x)>0$，于是 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，故

$$f(x)>f(a)=0,\quad x\in(a,b).$$

(2) 设 $F(x)=x^2$，$g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$，则 $g'(x)=f(x)>0$，故 $F(x)$，$g(x)$ 满足柯西(Cauchy)中值定理的条件，于是在 (a,b) 内存在点 ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t}=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'}\right|_{x=\xi},$$

即

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 因 $f(\xi)=f(\xi)-f(0)=f(\xi)-f(a)$，在 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日(Largrange)中值定理，知在 (a,ξ) 内存在一点 η，使 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，从而由(2)的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

即有 $$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注：证明(3)，关键是用(2)的结论：

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

$$\Longleftrightarrow f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)\quad（根据(2)结论）$$

$$\Longleftrightarrow f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a),$$

可见对 $f(x)$ 在区间 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日(Largrange)中值定理即可.

十一、解：已知 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，可先求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，再根据它们特征值的重数与线性无关特征向量的个数相同，问题转化为矩阵的秩，进而可确定参数 a.

由题设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=-2$.

由于 A 相似于对角矩阵 Λ，故对应 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，即

$$3-r(6E-A)=2,\ \Rightarrow\ r(6E-A)=1.$$

由 $6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$，知 $a=0$. 于是对应 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为 $\xi_1=(0,0,1)^T$，$\xi_2=(1,2,0)^T$.

当 $\lambda_3=-2$ 时，注意到

$$-2E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\x_3=0.\end{cases}$ 得对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量 $\xi_3=(1,-2,0)^T$. 令

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix},$$

则 P 可逆，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

十二、解 1：三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有惟一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

（必要性）设三条直线 l_1,l_2,l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b.\end{cases}\tag{*}$$

有惟一解，故系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{pmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $|\overline{A}|=0$. 由于

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故 $a+b+c=0$.

（充分性）由 $a+b+c=0$，则从上证明可知 $|\overline{A}|=0$，故秩 $(\overline{A})<3$.

由于 $\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2\left[\left(a+\dfrac{1}{2}b\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right]\neq0$，

故 秩 $r(A)=2$. 于是秩 $r(A)=$ 秩 $r(\overline{A})=2$.

因此方程组（*）有惟一解，即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

解 2：（必要性）设三直线交于一点 (x_0,y_0)，则 $(x_0,y_0,1)^T$ 为 $Ax=0$ 的非零解，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{pmatrix}.$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=0$. 注意到

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2b & 3c\\ b & 2c & 3a\\ c & 2a & 3b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故 $a+b+c=0$.

(充分性) 考虑线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a,\\ cx+2ay=-3b.\end{cases}\qquad(*)$$

2

将方程组 (*) 的三个方程相加,并由 $a+b+c=0$ 可知,方程组 (*) 等价于方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a.\end{cases}\qquad(**)$$

因为 $\begin{vmatrix}a & 2b\\ b & 2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq0$,

故方程组 (**) 有惟一解,所以方程组 (*) 有惟一解,即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

注：本题将三条直线的位置关系转化为方程组的解的判定,而解的判定问题又可转化为矩阵的秩计算,进而转化为行列式的计算.

本题结论可以推广到平面 n 条直线的情形.

2004 年试题参考答案

一、填空题

(1) 解：确定由极限定义的函数的连续性与间断点. 对不同的 x 先用求极限的方法得出 $f(x)$ 的表达式,再讨论 $f(x)$ 的间断点.

显然当 $x=0$ 时,$f(x)=0$；当 $x\neq0$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(2) 解：判别由参数方程定义的曲线的凹凸性,先用 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}$ 定义的

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$$

求出二阶导数,再由 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$ 确定 x 的取值范围. 注意到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dy}}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，可解得 $t<0$.

又 $x=t^3+3t+1$ 单调增,在 $t<0$ 时,$x\in(-\infty,1)$.(因为 $t=0$ 时,$x=1$ 可推出 $x\in(-\infty,1]$时,曲线上凸.)

(3) 解1：利用变量代换法和形式上的牛顿－莱布尼兹(Newton－Leibniz)公式可得所求的广义积分值.注意到

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\overset{x=\sec t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

解2：先用变换 $x=\frac{1}{t}$,再凑微分可有

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 解1：利用复合函数求偏导法、公式法或全微分公式求解.

在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x,y 求偏导,z 为 x,y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2,$$

从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}.$$

所以
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2.$$

解2：令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z=0$,

则有 $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{2x-3z}\cdot2$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2$，$\frac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1$，因而可有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{e^{2x-3z}\cdot2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

从而
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\left(\frac{3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{1}{1+3e^{2x-3z}}\right)=2.$$

解3：利用微分公式,得

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy=2e^{2x-3z}dx-3e^{2x-3z}dz,$$

即 $(1+3e^{2x-3z})dz=2e^{2x-3z}dx+2dy$.

因而　$\mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}\mathrm{d}x+\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y$，这样　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，

从而　$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

(5) 解 1：一阶线性方程的初值问题，可以利用常数变易法或公式法求出方程的通解，再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解. 先将原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2,$$

故相应齐次方程　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}y=0$　可化为　$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{2x}$.

上式两边积分得　$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln c$，从而有　$y=c\sqrt{x}$.

设 $y=c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解，代入方程 (常易变易法) 得

$$c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2c}c(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^2,$$

从而　$c'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$，等式两边积分得

$$c(x)=\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+C=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$$

于是非齐次方程的通解为

$$y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right)=C\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$$

又由　$y|_{x=1}=\frac{6}{5}$，知　$C=1$，故所求通解为　$y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

解 2：原方程变形为　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2x}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2$，它是一阶线性微分方程. 由一阶线性方程通解公式得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\sqrt{x}\left[\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right].\end{aligned}$$

由题设　$y(1)=\frac{6}{5}$，可有　$C=1$，从而所求通解为　$y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

(6) 解 1：利用伴随矩阵的性质及矩阵乘积的行列式性质求行列式的值. 由

$$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}\Longleftrightarrow\boldsymbol{ABA}^*-2\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{E}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{I},$$

故　$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{I}|=1$，　从而可有　$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}||\boldsymbol{A}^*|}$，

而　$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=3^2$.　故　$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{9}$.

解 2：由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{I}$，得

$$\boldsymbol{AB}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{AA}^{-1},$$

2

则　$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{AB}=2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，

即　$|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，从而 $|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$，故

$$|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|}=\frac{1}{9}.$$

二、选择题

(7) 解：对于与变限积分有关的极限问题，一般可利用洛必达法则实现对变限积分的求导，并结合无穷小代换求解.

由
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2}=0,$$

即　$\gamma=o(\alpha)$.

又
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}x}=0,$$

即　$\beta=o(\gamma)$.

从而按要求排列的顺序为 α、γ、β.

故选(B).

(8) 解：求含绝对值即分段函数的极值点与拐点，按题设只需讨论 $x=0$ 两边 $f'(x)$，$f''(x)$ 的符号.

$$f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & -1<z\leqslant0,\\ x(1-x), & 0<x<1.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2+2x, & -1<x<0,\\ 1-2x, & 0<z<1.\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0,\\ -2, & 0<x<1.\end{cases}$$

从而当 $-1<x<0$ 时，$f(x)$ 图形上凹；当 $0<x<1$ 时，$f(x)$ 图形上凸，于是 $(0,0)$ 为拐点.

又 $f(0)=0$，$x\neq0,1$ 时，$f(x)>0$，从而 $x=0$ 为极小值点.

所以 $x=0$ 是极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(z)$ 的拐点.

故选(C).

(9) 解：将原极限变形，使其对应一函数在一区间上的积分和式，积分之.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{2}{n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}=2\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\quad(\text{令 }1+x=t)$$

$$=2\int_1^2\ln t\,\mathrm{d}t=2\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x.$$

故选 (B).

(10) 解：可借助于导数的定义及极限的性质讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的局部性质. 由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,$$

由极限的性质,任给 $\delta>0$,使 $|x|<\delta$ 时,有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$,

即 $\delta>x>0$ 时,$f(x)>f(0)$；$-\delta<x<0$ 时,$f(x)<f(0)$.

故选 (C).

(11) 解：利用待定系数法确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，解得特征根为 $\lambda=\pm \mathrm{i}$.

考虑 $y''+y=x^2+1=\mathrm{e}^0(x^2+1)$,因 0 不是特征根,故其特解为

$$y_1^*=ax^2+bx+c,$$

考虑 $y''+y=\sin x=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$,因 i 为特征根,从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x),$$

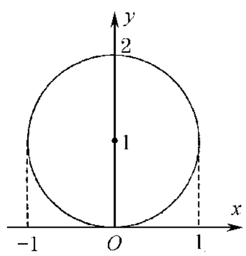
因而 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x).$$

故选 (A).

(12) 解：将二重积分化为累次积分的方法是：先画出积分区域的示意图,再选择直角坐标系和极坐标系,并在两种坐标系下化为累次积分.

积分区域见图. 在直角坐标系下,



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

故应排除 (A)、(B).

在极坐标系下令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}$ 则有 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,r\,\mathrm{d}r.$

故选 (D).

(13) 解：根据矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系,对题中给出的行(列)变换可通过左(右)乘一相应的初等矩阵来实现：依题意

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{AQ}$，从而 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

故选 (D).

(14) 解：将 $\boldsymbol{A}$ 写成行向量组成的矩阵,可讨论 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性相关性,将 $\boldsymbol{B}$ 写成列向量组成的矩阵,可讨论 $\boldsymbol{B}$ 行向量组的线性相关性.

设 $A=(a_{ij})_{l\times m}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$,记 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$,则 $AB=O$,写成向量矩阵的形式.即

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{11}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{m1}\boldsymbol{a}_m,\cdots,b_{1n}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{mn}\boldsymbol{a}_m)=\boldsymbol{O},$$

(1) 由于 $B\neq O$,所以至少有一 $b_{ij}\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$,从而由(1)知

$$b_{1j}\boldsymbol{a}_1+b_{2j}\boldsymbol{a}_2+\cdots+b_{ij}\boldsymbol{a}_i+\cdots+b_{mj}\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

于是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关.

又记矩阵 $B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{b}_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 B 的行向量,则由 $AB=O$,可有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1+a_{12}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{1m}\boldsymbol{b}_m \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1+a_{22}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{2m}\boldsymbol{b}_m \\ \vdots \\ a_{l1}\boldsymbol{b}_1+a_{l2}\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_{lm}\boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

由于 $A\neq O$,则至少存在一 $a_{ij}\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant l,1\leqslant j\leqslant m)$,使

$$a_{i1}\boldsymbol{b}_1+a_{i2}\boldsymbol{b}_2+a_{ij}\boldsymbol{b}_j+\cdots+a_{im}\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0},$$

从而 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 线性相关.

故选(A).

三、解答题

(15) 解 1:此极限属于“$\frac{0}{0}$”型未定式,可利用洛必达(L'Hospital)法则,并结合无穷小代换求解.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

解 2:注意到当 $t\to 0$ 时,$e^t\sim 1+t$,于是有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

这里还利用了当 $t<0$ 时 $\ln(1\pm t)\sim\pm t$ 的事实.

(16) 解:分段函数在分段点的可导性只能用导数定义讨论.

(Ⅰ) 当 $-2\leqslant x<0$,即 $0\leqslant x+2<2$ 时,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$

(Ⅱ) 由题设知　$f(0)=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$. 即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17) 解：可用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性，且用求函数最值的方法讨论函数的值域. 2

(Ⅰ) 由　$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(Ⅱ) 因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且周期为 π，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域. 因为

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,\mathrm{d}t=2-\sqrt{2},$$

又　$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=1,\quad f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,\mathrm{d}t=1,$$

故 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，因而 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(18) 解：用定积分表示旋转体的体积和侧面积，二者及截面积都是 t 的函数，然后计算它们之间的关系.

(Ⅰ) 由题设及旋转体侧面积和体积公式可有

$$S(t)=\int_0^t 2\pi t\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

且　$V(t)=\pi\int_0^t y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^t\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\mathrm{d}x$，　故　$\frac{S(t)}{V(t)}=2$.

(Ⅱ) 注意到在 $x=t$ 处的底面积

$$F(t)=\pi y^2|_{x=t}=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2,$$

则 $$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1.$$

（19）证：证明文字不等式可以借助于函数不等式的证明方法，常用函数不等式的证明方法主要有考虑单调性、极值和最值法等.

设 $\varphi(x)=\ln^2x-\frac{4}{e^2}x$，则考虑 $\varphi(x)$ 的导数

$$\varphi'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\quad \varphi''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2},$$

所以当 $x>e$ 时，$\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少. 从而当 $e<x<e^2$ 时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加. 因此，当 $e<a<b<e^2$ 时，

$$\varphi(b)>\varphi(a)\ \Rightarrow\ \ln^2b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2a-\frac{4}{e^2}a,$$

故 $$\ln^2b-\ln^2a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

注：本题也可设辅助函数为

$$\varphi(x)=\ln^2x-\ln^2a-\frac{4}{e^2}(x-a),\ e<a<x<e^2,$$

或 $$\varphi(x)=\ln^2b-\ln^2x-\frac{4}{e^2}(b-x),\ e<x<b<e^2,$$

再用单调性进行证明即可.

（20）解1：由牛顿（Newton）第二定律，列出关系式后再解微分方程即可.

由题设，飞机的质量 $m=9000\text{kg}$，着陆时的水平速度 $v_0=700\text{km/h}$. 从飞机接触跑道开始记时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

根据牛顿（Newton）第二定律，得 $m\frac{dv}{dt}=-kv$. 又

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

由以上两式得 $dx=-\frac{m}{k}dv$，两边积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$.

由于 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$，故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而 $x(t)=\frac{m}{k}[v_0-v(t)]$.

当 $v(t)\to0$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^6}=1.05(\text{km})$.

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

解2：根据牛顿（Newton）第二定律，得 $m\frac{dv}{dt}=-kv$，所以 $\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt$.

两端积分得通解 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件：$v|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$，

故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt$. 飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05\,(\mathrm{km}).$$

或由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，**知** $x(t)=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1)$，

故最长距离为当 $t\to\infty$ **时，**$x(t)\to\frac{kv_0}{m}=1.05\,(\mathrm{km})$.

解 3：根据牛顿（Newton）第二定律，得 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，**且** $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，

该微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$，**解之得** $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\frac{k}{m}$，

故 $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x|_{t=0}=0$， $v|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$，

得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$， **于是** $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$.

当 $t\to+\infty$**时，**$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05\,(\mathrm{km})$.

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

注：本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t\to+\infty$ **或** $v(t)\to0$ **的极限值.**

（21）解：利用复合函数求偏导和混合偏导的方法直接计算.注意到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+y\mathrm{e}^{xy}f'_2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+x\mathrm{e}^{xy}f'_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x\partial y}&=2x\,[f''_{11}\cdot(-2y)+f''_{12}\cdot x\mathrm{e}^{xy}]+\mathrm{e}^{xy}f'_2+xy\mathrm{e}^{xy}f'_2+\\&\qquad y\mathrm{e}^{xy}\,[f''_{21}\cdot(-2y)+f''_{22}\cdot x\mathrm{e}^{xy}]\\&=-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}f''_{12}+xy\mathrm{e}^{2xy}f''_{22}+\mathrm{e}^{xy}(1+xy)f'_2.\end{aligned}$$

（22）解 1：求含参数齐次线性方程组的解，可由系数行列式为 0 确定参数的取值，进而求方程组的非零解.

对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

当 $a=0$ **时，秩** $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1<4$**，故方程组有非零解，其同解方程组为**

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

于是所求方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_2\boldsymbol{\eta}_3\quad(\text{其中 }k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

当 $a\neq0$ **时，**

2

$$B \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

当 $a=-10$ **时,秩** $\mathrm{r}(A)=3<4$**,故方程组也有非零解,其同解方程组为**

$$\begin{cases} -2x_1+x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_4 = 0. \end{cases}$$

由此得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

所以所求方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}$**,其中** t **为任意常数**.

解 2:方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3.$$

当 $|\boldsymbol{A}|=0$**,即** $a=0$ **或** $a=-10$ **时,方程组有非零解**.

当 $a=0$ **时,对系数矩阵** $\boldsymbol{A}$ **作初等行变换,有**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. **其基础解系为**

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

于是所求方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_2\boldsymbol{\eta}_3\ (\text{其中 } k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}).$$

当 $a=-10$ **时,对** $\boldsymbol{A}$ **作初等行变换,有**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & -10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2=2x_1, \\ x_3=3x_1, \\ x_4=4x_1. \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

故　所求方程组的通解为 $x=k\boldsymbol{\eta}$，其中 k 为任意常数.

(23) 解：由矩阵特征根的定义可确定 a 的值，由线性无关特征向量的个数与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 秩之间的关系确定 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2-\lambda & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，A 的特征值为 $2,2,6$，矩阵

$$2I-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

的秩为 1，其相应的线性方程组有两个线性无关的解向量.

故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化（与对角阵相似）.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则二次三项式 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方式.

从而由判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$，有 $18+3a=16$，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,4,4$，这时矩阵

$$2I-A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1\end{pmatrix}$$

的秩为 2.

故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量仅有一个，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化（不可与对角阵相似）.

三、附　　录

1985 年上海交大等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题*

试卷（Ⅰ）

一、(1) 求$\int x^{-3}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0.\end{cases}$ 试求$\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

二、设 $z=f(x,u,v)$，$u=2x+y$，$v=xy$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、计算$\iint_D\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 是由曲线 $y=x$，$y=2x-x^2$ 所围成.

四、已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ 求 c.

五、设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ c, & x=0.\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f'(x)>0$，$f(0)=0$.

(1) 试确定 c 使 $F(x)$ 连续；(2) 在 (1) 的结果下，问 $F'(x)$ 是否连续.

六、试求在圆锥面 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ 所围成的锥体内作出底面平行于 xOy 平面的最大长方体之体积 $(R>0, h>0)$.

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛，并求其和.

八、计算曲线积分 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$，方 向取逆时针方向.

九、设 $\varphi(x)=e^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$，其中 $\varphi(x)$ 为连续函数，求 $\varphi(x)$.

十、设 (1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$；(2) $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有一阶导数 $f'(x)$，且 $f(x)$ 在点 a 处右导数大于零，即 $f'_x(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$；

* 这八院校是上海交大、天津大学、华中工学院、华南工学院、西安交大、浙江大学、南京工学院、哈尔滨工大.

(3) $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数 $f''(x)$. 求证在区间 (a,b) 内至少存在一点 c 使 $f''(c)<0$.

高等数学(Ⅱ)(包括线性代数)

一～八题同试卷(Ⅰ)的一、二、三、六、七、八、九、十题.

九、设向量组 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 线性无关,证明向量组 $\boldsymbol{d}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$、$\boldsymbol{e}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$、$\boldsymbol{f}=(c_1,c_2,c_3,c_4)$ 也线性无关.

十、试用正交变换将二次型 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+3z^2+2xy$ 化为标准形(法式),并写出所用的正交变换.

试卷(Ⅲ)(包括线性代数、复变函数、概率论)

一～七题同试卷(Ⅰ)的一、二、六、七、八、九、十题.

八、(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 试用正交变换将二次型 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+3z^2+2xy$ 化为标准形(法式),并写出所用的正交变换.

注意:在下列第九、第十两题中,由考生任选一题,如两题都做,则只按第九题给分.

九、(1) 计算 $\oint_c \dfrac{e^2\sin z}{z^2-4}dz$,其中积分闭路 c 为圆周 $|z|=3$ 之逆时针方向.

(2) 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$.

十、(1) 现有一批产品是由三家工厂生产的,已知其中一家的废品率是 $1/5$,另两家的废品率都是 $1/10$,今从这批产品中任取一件(假定这一件来自哪个工厂是等可能的)进行检验,问取到的是废品的概率.

(2) 测量某一目标的距离时,测量误差服从 $\mu=-50,\alpha=100$ 的正态分布(单位:m). 试求测量距离的误差按其绝对值不超过 150m 的概率.

附表:表示正态分布表 $\Phi(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$

z	0	1	2
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
2.0	0.9772	0.9778	0.9783
2.5	0.9938	0.9940	0.9941

附：参 考 答 案

试卷(Ⅰ)

一、⑴ 解：先凑微分再分部积分有

$$\int x^{-3}\arctan x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\arctan x\,\mathrm{d}(x^{-2})$$

$$=-\frac{1}{2}\left[x^{-2}\arctan x-\int x^{-2}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x\quad\text{(分子同加减 }x^2\text{ 项)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\arctan x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\arctan x+c.$$

⑵ 解：令 $x-1=u$，则由积分性质有

$$\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^0\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\ln(1+x)\Big|_0^1=\left[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]\Big|_{-1}^0+\ln2$$

$$=1+\ln(1+\mathrm{e}^{-1}).$$

二、解：由题设有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2\dfrac{\partial f}{\partial u}+y\dfrac{\partial f}{\partial v}$**，从而有**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]+$$

$$+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+(2x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+u\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial v}.$$

三、解：由题设且注意到二重积分性质有

$$\iint_D\sqrt{y}\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x-x^2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_x^{2x-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(2x-x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left[1-(1-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1,\qquad(*)$$

对右端第一个积分，我们引入变换 $1-x=\sin t$ 而有

$$\frac{2}{3}\int_0^1 [1-(1-x)^2]^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 [1-\sin t]^{\frac{2}{3}}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\mathrm{d}t\,\mathrm{d}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8},$$

式(*)右端第二项等于$\frac{4}{15}$,于是得 $\iint\limits_D \sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{8}-\frac{4}{15}$.

四、解:注意下面式子变形:

式左 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{2c}\cdot\left(\frac{x+c}{x-c}\right) = \mathrm{e}^{2c}$,

式右 $= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^c t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2t}) = \frac{1}{2}\left[t\mathrm{e}^{2t}\Big|_{-\infty}^c - \int_{-\infty}^c \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{2}c\mathrm{e}^{2c} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}\Big|_{-\infty}^c$

$= \left(\frac{c}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2c}$.

比较左右两端则有 $\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}=1$,即得 $c=\frac{5}{2}$.

五、解:(1) 由题设且注意到

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)}{2x} = \frac{1}{2}f(0) = 0,$$

可见取 $c=0$,则有 $F(x)$ 连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时,由导数性质有

$$F'(x) = \frac{x^2\cdot xf(x) - 2x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^4} = \frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^3},$$

从而有

$$\lim_{x\to 0}F'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 f'(x)+f(x)\cdot 2x - 2x\,f(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}f'(0),$$

而另一方面注意到

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{3x} = \frac{1}{3}f'(0).$$

即证得 $F'(x)$ 无论是在 $x\neq 0$ 时或 $x=0$ 时,均为连续的.

六、解:设所求体积为 V,则 $V_1 = \frac{V}{4} = xy(h-z)$.

约束条件为 $h\sqrt{x^2+y^2}-Rz=0$,根据拉格朗日(Lagrange)乘子法,令

$$F(x,y,z) = xy(h-z)+\lambda(h\sqrt{x^2+y^2}-Rz),$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = y(h-z)+\lambda\frac{hx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x(h-z)+\lambda\frac{hx}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

及 $\frac{\partial F}{\partial z} = -xy-\lambda R$, 令 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$,再加约束条件,可解得

$$x = y,\quad z = \frac{\sqrt{2}h}{R}x,\quad \lambda = -\frac{x^2}{R}.$$

故有　$x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}R,\quad z = \frac{2}{3}h.$

于是又得　$V_{\max} = 4V_{1\max} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}R\right)^2\frac{h}{3} = \frac{8}{27}R^2h.$

七、解：令 $x-1=t$ 化原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$，它的收敛半径为 1，且当 $t=1$ 与 $t=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 是发散的，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛点集（区域）为 $-1<t<1$.

从而知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域为 $|x-1|<1$，亦即 $0<x<2$.

其次令　$\sum_{n=1}^{\infty}nt^n = G(t)$，则有

$G(t) = t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot t^n = t\left[\sum_{n=0}^{\infty}nt^n + \sum_{n=0}^{\infty}t^n\right] = t\left[G(t) + \frac{1}{1-t}\right]$，

解得　$G(t) = \frac{t}{(1-t)^2}$，因之，当 $|x-1|<1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n = \frac{x-1}{[1-(x-1)]^2} = \frac{x-1}{(2-x)^2}.$$

八、解：令 $P = \frac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{4x^2+y^2}$，从而有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}\quad (x^2+y^2\neq 0).$$

可知当 $R<1$ 时　$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = 0$；

当 $R>1$ 时　$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} \xlongequal[y=\varepsilon\sin t]{x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t} \oint_{L'}\frac{\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \pi.$

九、解：由设 $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u + \int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u$，且 $\varphi(0)=1$.

又由 $\varphi(x)$ 连续，由上式对 x 求导故又有

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u - x\varphi(x) + x\varphi(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

且　$\varphi'(0)=1.$

再由 $\varphi(x)$ 连续的假设，对上式再求导有　$\varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \varphi(x).$

从而知 $\varphi(x)$ 乃是满足微分方程 $\begin{cases}\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^x,\\ \varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=1.\end{cases}$ 的解.

解之得 $\varphi(x) = (c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$，由初始条件可有 $c_1=c_2=\frac{1}{2}$.

故得　$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + \mathrm{e}^x).$

十、证：由题设有　$\lim\limits_{\theta\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\theta\to a+0}\frac{f(x)}{x-a} = f'_+(a)>0,$

3

故可知在 (a, b) 内必至少存在一点 x_0，有 $f(x_0) > 0$. 在 $[a, x_0]$，$[x_0, b]$ 上分别用拉格朗日 (Lagrange) 中值定理知必存在 a_1 与 b_1，使得 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$，且有

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(a_1), \quad \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = f'(b_1).$$

从而又知　$f'(a_1) > 0, f'(b_1) < 0$.

对 $f'(x)$ 在 $[a_1, b_1]$ 区间上再用拉格朗日 (Lagrange) 中值定理，则知至少存在一点 c：$a_1 < c < b_1$ 使得

$$\frac{f'(b_1) - f'(a_1)}{b_1 - a_1} = f''(c),$$

且有 $f''(c) < 0$ 成立，其中 $c \in (a, b)$.

试卷（Ⅱ）（包括线性代数）

九、证：反证法. 若 $\boldsymbol{d} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$，$\boldsymbol{e} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$，$\boldsymbol{f} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ 线性相关，则存在有不全为零的 $k_i\ (i = 1,2,3)$，使得 $k_1\boldsymbol{d} + k_2\boldsymbol{e} + k_3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

此时，显然也有

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

也即是　$k_1\boldsymbol{a} + k_1\boldsymbol{b} + k_1\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

因而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是线性相关的，这与题设矛盾，从而证得 $\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{f}$ 线性无关.

十、解：　由于二次型可写成

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy = (x, y, z)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

故其对应矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0,$$

故得特征根　$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

对应于特征根 $\lambda = 1$ 的特征向量由 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 即

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

可解得对应于 $\lambda = 1$ 的全部特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (-k, k, 0)^{\mathrm{T}}$，

取 $k = 1$ 得一特征向量为 $(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，将其标准化为 $\xi_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

对应特征值 $\lambda=3$ 的特征向量由 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 即

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

可解得对应于 $\lambda=3$ 的全部特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(k,k,l)^{\mathrm{T}}$.

取 $k=1,l=0$ 和 $k=0,l=1$ 得二特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,将其标准化为 $\xi_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$ 和 $\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因此有正交矩阵 $\boldsymbol{T}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

且在正交变换 $\begin{cases}x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1,\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1,\\ z=z_1.\end{cases}$ 作用下二次型 f 即可化为标准形 $f=x_1^2+3y_1^2+3z_1^2$.

试卷(Ⅲ)(包括线性代数,复变函数,概率论)

八、(1) 解:由矩阵求逆公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}/|\boldsymbol{A}|$,则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5!}\begin{pmatrix}2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\cdot2\cdot4\cdot5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 1/5\end{pmatrix}.$$

(2) 见前面试卷(Ⅱ)部分试题十的解答.

九、(1) 解:由设可有

$$\oint\frac{\mathrm{e}^{x}\sin z}{z^2-4}\mathrm{d}z=\int_{|z|=3}\frac{\mathrm{e}^{x}\sin z}{(z-2)(z+2)}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\left[\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{e}^{x}\sin z}{z-2}\mathrm{d}z-\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{e}^{x}\sin z}{z+2}\mathrm{d}z\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{2}\sin2-2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2}\sin(-2)\right]=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\sin2\cdot(\mathrm{e}^{2}+\mathrm{e}^{-2})=\pi\mathrm{i}\sin2\,\mathrm{ch}2.$$

(2) 解:本题实际上是求积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$ 的实部,即求:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+9)}\mathrm{d}z.$$

此时 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$ 在上半平面内有两个一阶极点 $z=i$，$z=3i$ 且可算得，

$$\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{16i},\quad \operatorname{Res}f(z)\big|_{z=3i}=\frac{e^{-3}}{48i}.$$

从而有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}dz=2\pi i\left[\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=i}+\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=3i}\right]$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{16i}-\frac{e^{-3}}{48i}\right)=\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1),$$

比较两端的实部与虚部，即得知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx=\frac{\pi}{24e^3}(3e^2-1).$$

十、(1) 解：设 B_i 为取出的产品是第 i 家工厂生产的事件，$i=1,2,3$ 且 A 为取出的产品是废品的事件.

依题意有　$P(B_i)=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3.$

又　$P(A\mid B_1)=\dfrac{1}{5}$，　$P(A\mid B_2)=P(A\mid B_3)=\dfrac{1}{10}$. 故

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2}{15}.$$

(2) 解：设 X 为测量距离的误差，于是 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}$$

测量距离的误差按其绝对值不超过 150m 的概率为

$$P\{|X|<150\}=P\{-150<X<150\}=\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right)-\Phi\left(\frac{-150+50}{-100}\right)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1$$

$$=0.8185.$$

1985 年同济大学等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题*

一、填空题

(1) $d(x\tan x)=$ ________ dx；d ________ $=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 设 $f(x)$ 可微，则 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=$ ________.

(3) 设 $\overrightarrow{OA}=\{1,2,1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{-2,-1,1\}$，则 $\cos\angle AOB=$ ________.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续，在 $(0,l)$ 内有 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，其中 b_n 的计算公式为

* 这八院校是同济大学、华东化工学院、华东纺织学院、上海机械学院、上海海运学院、上海铁道学院、上海工业大学、上海科技大学.

$b_n =$ ________.

二、选择题（把正确结论的代号写在括号内）

(1) 当 $x \to 0$ 时，$x^2 - \sin x$ 是 x 的 （ ）

(A) 高阶无穷小 (B) 同阶无穷小 (C) 低阶无穷小 (D) 等价无穷小

(2) 函数 $Z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 是函数在该点可微分的 （ ）

(A) 必要条件但非充分条件 (B) 充分条件但非必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件也非必要条件

(3) 设 $u = f(x + y, xz)$ 有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ 是 （ ）

(A) $f'_2 + xf''_{11} + (x + z)f''_{12} + xzcf''_{22}$ (B) $xf''_{12} + xzf''_{22}$

(C) $f'_2 + f''_{12} + xzf''_{22}$ (D) xzf''_{22}

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 （ ）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 必发散 (B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ 必发散

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(|u_n| + |v_n|)$ 必发散 (D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u_n^2 + v_n^2)$ 必发散

三、求 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$.

四、求 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\arctan x \, dx$.

五、求曲线 $\begin{cases} x = t, \\ y = -t^2, \\ z = t^3. \end{cases}$ 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线方程.

六、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1} x^{2n-1}$ 的收敛区域及和函数.

七、用铁锤将一铁钉打击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比. 在铁锤击第一次时，能将铁钉击入木板内 1cm，如果铁锤每次打击铁顶钉所做的功相等，问铁锤击第二次时能把铁钉又击入多少？

八、求三重积分 $\displaystyle\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2)\,dv$ 的值，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0. \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z = 2$，$z = 8$ 所围成的立体.

九、求曲线积分 $\displaystyle\oint_L |y|\,dx + |x|\,dy$ 的值，其中 L 以 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 及 $C(-1,0)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线.

十、求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x}$.

十一、求微分方程

$$y'' + y = x，当 x < \frac{\pi}{2}；\quad y'' + 4y = 0，当 x > \frac{\pi}{2}，$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 并在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处连续且可微的解.

十二、设 $f(0)=0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，试证函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

附：参 考 答 案

一、(1) $\tan x + x\sec x$；$-\sqrt{1-x^2}$.　　(2) $3f'(x)$.

(3) $-\frac{1}{2}$.　　(4) $b_n=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x$.

二、(1) (B)　(2) (A)　(3) (C)　(4) (C)

三、解：令 $y=\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$，则 $\ln y = 2x\cdot\frac{\ln(2x)-\ln(x+1)}{x-1}$，故

$$\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}e^{\ln y}=\exp\{\lim_{x\to 1}(\ln y)\}=\exp\left\{2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x)-\ln(x+1)}{x-1}\right\}=\mathrm{e}.$$

四、解：$\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\arctan x\,\mathrm{d}x=\int\arctan x\,\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=\arctan x\left(x-\frac{1}{2}\arctan x\right)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

五、解：曲线的切向量为 $s=\{1,-2t,3t^2\}$，其与所求平面平行，从而有

$$1-4t+3t^2=0,\quad\Rightarrow\quad(3t-t)(t-1)=0,$$

得 $t_1=1, t_2=\frac{1}{3}$. 故所求切线方程(两条)为：

$$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3},\quad l_2:\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}.$$

六、解：由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|=1$，故 得级数收敛半径为 $R=1$.

易验证在端点 $x=1, x=-1$ 处级数发散，从而级数收敛区域为 $(-1,1)$.

设在 $(-1,1)$ 内和函数为 $S(x)$，则由 $S(0)=0$ 及

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

故 $S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

七、解：设阻力为 kx，x 是铁钉进入木板的深度，则有

$$W=\int_0^1 kx\,\mathrm{d}x=\int_1^t kx\,\mathrm{d}x$$

于是 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$，得 $t=\sqrt{2}$. 故 第二次又把铁钉击入 $(\sqrt{2}-1)$ cm.

八、解：旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$，则

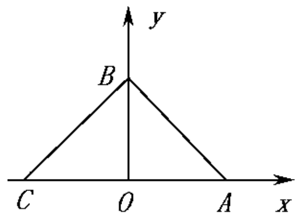
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V=\int_2^x\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_2^8\iint\limits_{\rho^2\leqslant 2z}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_2^8 2\pi\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z=336\pi.$$

九、解：记 $\triangle ABO$ 的边界为 L_1，区域 D_1；$\triangle OBC$ 的边界为 L_2，区域 D_2. 均取边界的正向，则有

$$\oint_L|y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y=\oint_{L_1}y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\oint_{L_2}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}(1-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(-1-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-1.$$



(*)

十、解：由 $\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=2$，以及对充分大的正值 x，均有自然数 k 使

$$k\pi\leqslant x<(k+1)\pi.$$

于是 $$\frac{\int_0^{k\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(k+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}<\frac{\int_0^{(k+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{k\pi}$$，即

$$\frac{2k}{(k+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}<\frac{2(k+1)}{k\pi}.$$

令 $x\to+\infty$，并考虑到式(*)，有 $k\to\infty$，故由逼夹定理有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{2}{k}$.

十一、解：当 $x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，容易求出 $y''+y=x$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$，

由 $y(0)=0$ 得 $C_1=0$，　由 $y'(0)=0$ 得 $C_2=-1$，故 $y=x-\sin x$.

按连续性及可微的要求，应有 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1$，$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，可得方程 $y''+4y=0$ 的通解 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

按连续性及可微的要求应有 $C_1=\dfrac{\pi}{2}-1$，$2C_2=0$.

综上可有 $$y=\begin{cases}x-\sin x, & x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos 2x, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

十二、证：对任意的 $x>0$，在 $[0,x]$ 上对 $f(t)$ 用中值定理. 有

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x<f'(x)\cdot x,$$

这是因为 $0<\xi<x$ 及 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加.

故对 $x>0$ 有 $$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}>0.$$

此即说 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

1986 年上海交大等十院校硕士研究生招生考试高等数学试题*

试卷(一)

一、判断下列各命题是否正确：

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x>1;\\ \frac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f'(1)=2$.

(2) 若向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

(3) 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处一阶偏导数存在，则此函数在该点处连续.

(4) 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，α,β,γ 为其法矢量的方向角，V 是由 S 所围成的球体，则

$$\oint\!\!\!\oint_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}s=\iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}v=\iiint_V 3a^2\mathrm{d}v=4\pi a^5.$$

(5) 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

二、计算下列各题：

(1) 求 $\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)$.　　(2) $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.　　(3) 求 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{x\ y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

三、设由方程 $x+y+z=\mathrm{e}^z$ 确定 z 是 x,y 的函数，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线，使得该切线与直线 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积最小.

五、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)<0$，证明

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 (a,b) 内是单调减函数.

六、证明曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}+=4$ 上任意一点的切平面在坐标轴上的截距的平方和为常数.

七、(1) 写出函数 $f(x)=x\mathrm{e}^2$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒 (Taylor) 公式，其中余项要求按拉格朗日 (Lagrange) 型写出.

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 是数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件.

---

* 这十院校是上海交通大学、天津大学、华南工学院、西北工业大学、南京工学院、浙江大学、东北工学院、大连工学院、重庆大学、哈尔滨工业大学.

八、计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\leqslant 1)$ 在第一卦限的部分，方向取下侧.

九、设函数 $\varphi(x)$ 有连续的二阶导数，并使曲线积分

$$\int_{l}[3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}]y\mathrm{d}x+\varphi'(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，求 $\varphi(x)$.

十、设可导函数 $f(x)$ 对任可 x，y 恒有

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{y}f(x)+\mathrm{e}^{x}f(y),$$

且 $f'(0)=2$. 求 (1) $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系式；(2) $f(x)$.

试题（二）（包括线性代数）

前八题同试卷（一）之一至四、七至十题.

九、解矩阵方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

十、设向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，问当常数 l，m 满足什么条件时，向量组 $l\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$，$m\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3$ 也线性无关.

十一、已知 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&3&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明 $2\lambda^2+3$ 为 $2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{E}$ 的特征值，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵.

试卷（三）（包括线性代数，复变函数）

前九题分别为试卷（一）中的一、二、四、七、八、九、十题及试卷（二）中的九、十一题.

十、求常数 K 使 $u(x,y)=2x^2-Ky^2-2xy$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，满足 $f(0)=0$.

十一、计算曲线积分 $\oint_{C}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$，其中 C 为圆周 $|z-1|=1$ 取逆时针方向.

试卷（四）（包括线性代数，概率论）

前九题分别为试卷（一）中的一、二、四、七、八、九、十诸题及试卷（二）中的九、十题.

十、商店销售一批收音机,共有 10 台,其中有 3 台次品,但是已经售出了 2 台,问从剩下的收音机中,任取一台是正品的概率是多少?

十一、设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}C(1-x^2), & -1<x<1,\\ 0, & \text{其余}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 C;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

附:参 考 答 案

试卷(一)

一、　(1) 非　　(2) 非　　(3) 非　　(4) 非　　(5) 是

二、　(1) 解:令 $t=\dfrac{1}{x}$,则由 L'Hospitol 法则有

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}.$$

(2) 解:先凑微分(将被积式变形)、再分部积分有

$$\int\frac{xe^x}{1+x}dx=-\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}(1+x)e^x dx$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x dx=e^x-\frac{xe^x}{1+x}+C.$$

另解:先将被积式变形后再行积分

$$\int\frac{xe^x}{1+x}dx=\int\frac{e^x}{1+x}dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}dx=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\int e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\int\frac{e^x}{1+x}dx+\frac{e^x}{1+x}-\int\frac{e^x}{1+x}dx$$

$$=\frac{e^x}{1+x}+C.$$

(3) 解:先交换二重积分次序则有

$$\int_0^1dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx=\int_0^1\frac{y^2}{2\sqrt{1+y^3}}dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}d(1+y^3)=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

三、解:题设方程两边对 x 求导,有 $1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}$,得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{e^z-1}$,故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}.$$

四、解:设所求切线与 $y=\ln x$ 切于点 $(C,\ln C)$,则(点斜式)切线方程为

$$y=\frac{1}{C}(x-C)+\ln C,$$

它与直线 $x=2$，$x=6$ 和 $y=\ln x$ 所围图形面积为

$$I=\int_2^6\left[\frac{1}{C}(x-C)+\ln C-\ln x\right]\mathrm{d}x=4\left[\frac{1}{C}(4-C)+\ln C+1\right]+\ln 4-6\ln 6,$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}C}=-\dfrac{4}{C^2}(4-C)$，令 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}C}=0$ 得 $C=4$.

当 $C<4$ 时有 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}C}<0$，$C>4$ 时有 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}C}>0$，故当 $C=4$ 时，I 取极小值，而且也是最小值.

因此所求切线方程为 $y=\dfrac{1}{4}x-1+\ln 4$.

五、解：$F'(x)=\dfrac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$　(利用积分中值定理)

$$=\frac{f(x)(x-a)-f(\xi_1)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\zeta_1)]$$

$$=\frac{1}{x-a}f'(\xi_2)(x-\xi_1)\quad(a<\xi_1<\xi_2<x).$$

由于在 (a,b) 内 $x-a>0$，$x-\xi_1>0$，且由假设 $f'(x)<0$，

故由上式知 $F'(x)<0$，所以在 (a,b) 内，$F(x)$ 是单调减函数.

六、证：令 $F(x,y,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-4$，则曲面上任一点 (x,y,z) 处法线的方向数

$$F_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\quad F_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\quad F_z=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$

设 (X,Y,Z) 为点 (x,y,z) 处切平面的任一点，则切平面方程为

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(X-x)+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}(Y-y)+\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}(Z-z)=0,$$

或 $x^{-\frac{1}{3}}X+y^{-\frac{1}{3}}Y+z^{-\frac{1}{3}}Z=4$，　其截距式为 $\dfrac{X}{4x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{Y}{4y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{Z}{4z^{\frac{1}{3}}}=1$.

由此截距的平方和 $16(x^{\frac{2}{3}}+yx^{\frac{2}{3}}+zx^{\frac{2}{3}})=16\cdot 4=64$ (常数).

七、(1) 解：由 $f(x)=xe^x$，则

$$f'(x)=(x+1)e^x,f''(x)=(x+2)e^x,\cdots,f^{(n)}(x)=(x+n)e^x,\cdots$$

从而 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，$\cdots$，$f^{(n)}(0)=n$，$\cdots$

于是 $f(x)=xe^x$ 在 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒 (Taylor) 公式为

$$xe^x=0+x+\frac{2x^2}{2!}+\cdots+\frac{nx^n}{n!}+R_n$$

$$=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+R_n,$$

其中余项 R_n 的拉格朗日 (Lagrange) 型为：

$$R_n=\frac{(\xi+n+1)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

(2) 证：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其和为 S，又 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

按定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件.

然而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 不是级数收敛的充分条件，如调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 就有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

但调和级数却是发散的.

八、解：由题设又有

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xz}}z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z z^2\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}.$$

九、解：由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，得 $3\varphi'(x)-2\varphi(x)+x\mathrm{e}^{2x}=\varphi''(x)$，

即 $\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=x\mathrm{e}^{2x}$.

对应齐次方程通解为 $\Phi(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$，

设非齐次方程特解为 $\varphi''(x)=x(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$，

利用待定系数法定出 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$.

故题设方程通解 $\varphi(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_1\mathrm{e}^{2x}+x\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\mathrm{e}^{2x}$.

十、(1) 解：由函数导数定义可有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x f(\Delta x)+\mathrm{e}^{\Delta x}f(x)-f(x)}{\Delta x},$$

又 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$，故

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(\mathrm{e}^{\Delta x}-1)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x f(\Delta x)}{\Delta x}=f(x)+2\mathrm{e}^x.$$

另解：由 $f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+\mathrm{e}^x f(y)$，

两边对 y 求偏导 $f'(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+\mathrm{e}^x f'(y)$，

令 $y=0$，则有 $f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x f'(0)$.

由 $f'(0)=2$， 故 $f'(x)=f(x)+2\mathrm{e}^x$.

(2) 解：求一阶线性微分方程 $f'(x)=f(x)+2\mathrm{e}^x$ 满足 $f(0)=0$ 的特解. 它对应的齐次方程 $f'(x)=f(x)$ 的通解为 $C\mathrm{e}^x$，非齐方程的一个特解为 $2x\mathrm{e}^x$.

故该方程的通解为 $f(x)=C\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x$.

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，所以 $f(x)=2x\mathrm{e}^x$.

试卷(二)线性代数部分

九、解：由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1\\1&4\end{pmatrix}$，于是方程化为 $\begin{pmatrix}3&1\\1&4\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}$，

从而 $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

十、解：若 $k_1(l\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1) + k_2(m\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2) + k_3(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{0}$，

即 $(-k_1 + k_3)\boldsymbol{a}_1 + (k_1 l - k_2)\boldsymbol{a}_2 + (k_2 m + k_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. 从而

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ lk_1 - k_2 = 0, \\ mk_2 - k_3 = 0. \end{cases} \quad \text{又} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ l & -1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = lm - 1,$$

当 $lm \neq 1$，方程组有惟一零解，即向量组

$$l\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, \quad m\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3$$

也线性无关.

十一、(1) 解：因 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^{-1}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 同即 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 7$，可解得相应的特征向量是 $(-1, 1, 1)$，$(1, 1, 0)$，$(1, -1, 0)$.

(2) 证：因 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有非 0 向量 ξ，使 $A\xi = \lambda\xi$.

由 $(2\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{E})\xi = 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\xi) + 3\xi = 2\boldsymbol{A}(\lambda\xi) + 3\xi = \lambda \cdot 2\boldsymbol{A}\xi + 3\xi$

$$= \lambda \cdot 2(\lambda\xi) + 3\xi = 2\lambda^2\xi + 3\xi = (2\lambda^2 + 3)\xi,$$

故 $(2\lambda^2 + 3)$ 是 $(2\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{E})$ 的特征值.

3

试卷 (三) 复变函数部分

十、解：由 $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2y$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$，及 $\frac{\partial u}{\partial y} = -2Ky - 2x$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2K$，

因 u 为调和函数，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，

由此 $4 - 2K = 0$，得 $K = 2$，从而 $u = 2x^2 - 2y^2 - 2xy$.

由 C - R 条件 $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2y$，故 $v = 4xy - y^2 + \varphi(x)$.

又由 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$，有 $-4y - 2x = -4y - \varphi'(x)$，

从而 $\varphi'(x) = 2x$，有 $\varphi(x) = x^2 + C$. 则 $v = 4xy + x^2 - y^2 + C$，

由 $f(0) = 0$，得 $C = 0$，故 $f(z) = 2x^2 - 2y^2 - 2xy + t(4xy + x^2 - y^2)$.

十一、解：函数 $f(z)$ 在 $|z - 1| = 1$ 内只有一个二级极点 $z = 1$.

由 $\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=1} = \lim\limits_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right] = \lim\limits_{z\to1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$，

故 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi \operatorname{Res}f(z)\big|_{z=1} = -\pi\mathrm{i}$.

试卷 (四) 概率论部分

十、解：设 A 表示从剩下的收音机中任取一台为正品的事件，A_k 表示售出 2 台中恰有 k 台为正品的事件 $(k = 0, 1, 2)$，则

$$P(A_k)=\frac{C_7^kC_3^{2-k}}{C_{10}^2}\quad(k=0,1,2),$$

从而 $P(A_0)=\frac{3}{45}$，$P(A_1)=\frac{21}{45}$，$P(A_2)=\frac{21}{45}$，

且 $P(A\mid A_k)=\frac{7-k}{8}\quad(k=0,1,2)$，

故 $P(A\mid A_0)=\frac{7}{8}$，$P(A\mid A_1)=\frac{6}{8}$，$P(A\mid A_2)=\frac{5}{8}$. **由全概率公式可有**

$$P(A)=\sum_{k=0}^{2}P(A\mid A_k)P(A_k)=\frac{21}{360}+\frac{126}{360}+\frac{105}{360}=0.7=70\%.$$

十一、解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}C(1-x^2)\mathrm{d}x=1$，**故** $C=\frac{3}{4}$.

(2) **由** $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$ （**因** $f(x)$ **为偶函数**），

则 $D(X)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$.

1986 年华东六省一市硕士研究生招生考试
高 等 数 学 试 题

一、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

二、设 $y=x(\sin x)^{\cos x}$，**求** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

三、求下列积分

(1) $\int x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x$.　　　(2) $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

四、设 $u=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$，**其中** f **对各变元具有二阶连续偏导数，求** $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

五、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot3^n}$ **的收敛域**.

六、将函数 $f(x)=1\ (0\leqslant x\leqslant1)$ **展开为正弦级数**.

七、设函数 $\varphi(x)$ **具有二阶连续导数，且** $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. **试求** $\varphi(x)$ **的表达式，以使方程** $\varphi(x)y\mathrm{d}x+[\sin x-\varphi'(x)]\mathrm{d}y=0$ **是一个全微分方程**.

八、计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中** Σ **是球面** $x^2+y^2+z^2=1$ **下半部的下侧**.

九、设有一内壁形状为抛物面 $z=x^2+y^2$ **的容器，原来盛有** $8\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ **的水，后来又注入** $64\pi\ (\mathrm{cm}^3)$ **的水，试求水面比原来升高了多少？**

十、求由闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)\ (a>0)$ **所围成的密度为** ρ **的均匀物体对** Oz **轴的转动惯量**.

十一、设 R **为抛物线** $y=x^2$ **上任一点** $M(x,y)$ **处的曲率半径，**S **为该曲线上某一定点** M_0 **到** M **点的弧长，证明** R,S **满足方程** $3R\dfrac{d^2R}{ds^2}-\left(\dfrac{dR}{ds}\right)^2-9=0$.

十二、设 $f(x)$ **具有二阶连续导数，且** $f(0)=0$**，证明函数**

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ f'(0), & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

可导且导函数连续.

十三、设函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ **在闭区域** D：$x^2+y^2\leqslant 1$ **上具有一阶连续偏导数，又**

$$\boldsymbol{f}(x,y)=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j},$$

在 D **的边界上有** $u(x,y)\equiv 1$，$v(x,y)\equiv y$**，试计算二重积分** $\iint\limits_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,d\sigma$.

附：参 考 答 案

3

一、解 1：令 $y=\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$**，则** $\ln y=\dfrac{1}{x}\left[\ln\dfrac{2}{\pi}+\ln\arccos x\right]$

由 $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{2}{\pi}$**，故　原式**$=\lim\limits_{x\to 0}y=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

解 2：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arccos x-1}}\right\}^{\frac{\frac{2}{\pi}\arccos x-1}{x}}$，

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\pi}\arccos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{2}{\pi}$**，故　原式**$=\lim\limits_{x\to 0}y=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

二、解 1：由题设有 $\ln y=\ln x+\cos x(\ln\sin x)$**，则两边对** x **求导有**

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\cdot\cot x,$$

从而　$\dfrac{dy}{dx}=(\sin x)^{\cos x}[1-x\sin x\ln(\sin x)+x\cos x\cdot\cot x]$.

解 2：设 $\varphi(x)=(\sin x)^{\cos s}$**，则** $\ln\varphi(x)=\cos x\ln(\sin x)$，**有**

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\cdot\cot x,$$

即　$\varphi'(x)=(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\cdot\cot x$. **从而**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=[x\varphi(x)]'=\varphi(x)+x\varphi'(x).\\&=(\sin x)^{\cos x}[1-x\sin x\ln(\cos x)+x\cdot\cos x\cdot\cot x]\end{aligned}$$

三、(1) 解：令 $t=x^2$**，则**

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\int te^{-t}dt=-\frac{1}{2}\int t\,de^{-t}=\frac{1}{2}\left(te^{-t}-\int e^{-t}dt\right)\\&=-\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}+C=-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}+C\end{aligned}$$

(2) 解：令 $x = \sin^2\theta$，则

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\theta\cos^2\theta}{1-\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta + 2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6} + 2 - \frac{5}{4}\sqrt{3}.$$

四、解：由题设有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + \frac{1}{y}f_2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + \frac{2}{y}f_{12} + \frac{1}{y^2}f_{22},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{x}{y^2}f_{12} - \frac{x}{y^2}f_2 - \frac{x}{y^3}f_{22}.$$

五、解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3}$，所以级数收敛半径 $R = 3$.

当 $x-1=3$，即 $x=4$ 时，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；

当 $x-1=-3$，即 $x=-2$ 时，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛.

故　级数收敛域为 $[-2,4)$.

六、解：由题设及函数 Fourier 展开系数公式有

$$a_k = 0\quad (k = 0,1,2,\cdots);$$

$$b_k = 2\int_0^1 1\cdot\sin k\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & 当\ k = 2n, \\ \dfrac{4}{(2n-1)\pi}, & 当\ k = 2n-1. \end{cases}\quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

故 $f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x = \begin{cases}1, & 当\ x\in(0,1)\ 时,\\ 0, & 当\ x = 0\ 或\ 1\ 时.\end{cases}$

七、解：题设方程为全微分方程的条件为

$$\frac{\partial[\varphi(x)y]}{\partial y} = \frac{\partial[\sin x - \varphi'(x)]}{\partial x},$$

即得　$\varphi''(x) + \varphi(x) = \cos x$，　　(*)

解方程(*)　$r^2+1=0$，有　$r=\pm\mathrm{i}$，得　$\bar{\varphi}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

设 $y^* = x(a\cos x + b\sin x)$，代入方程(1)得 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$. 知方程有特解 $y^* = \frac{1}{2}x\sin x$.

故(*)的通解为　$\varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$.

又由 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$，得 $C_1 = C_2 = 0$，从而 $\varphi(x) = \frac{1}{2}x\sin x$.

八、解：由题设可有

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{15}\pi.$$

九、解 1：过点 $(0,0,z)$ 作平行于 xOy 面的截面，得截面积

$$A(z) = \pi(x^2+y^2) = \pi z,$$

因而水面高为 h 时容器内所盛水的体积为

$$V=\int_0^h A(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi h^2.$$

则由上式可解得　$h=\sqrt{\frac{2V}{\pi}}$.

当 $V_1=8\pi$ 时，$h_1=4$；当 $V_2=8\pi+64\pi=72\pi$ 时，$h_2=12$.

故水面升高为　$H=h_2-h_1=8$ (cm).

解 2：水面高为 h 时容器内所盛水的体积为

$$V=\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}h^2.$$

以下同解 1.

十、解：依公式物体对 Oz 轴的转动惯量为

$$I_{Oz}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}v,$$

化为球面坐标系则有

$$I_{Oz}=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sin\varphi}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sin\varphi}r^4\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{1}{5}\rho a^5\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^8\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{5}\rho a^5\cdot 2\pi\cdot\frac{35}{128}\pi=\frac{7}{64}\rho a^5\pi^2.$$

十一、解：由设有 $y=x^2$，$y'=2x$，$y''=2$. 从而

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad R=\frac{1}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

则　$\mathrm{d}R=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=6x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$，

且　$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$，

故　$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}=6x$，　$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{6}{\sqrt{1+4x^2}}$.　代入题设方程左边，得

$$3\cdot\frac{1}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{1+4x^2}}-(6x)^2-9=9(1+4x^2)-36x^2-9=0.$$

十二、解：当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；当 $x=0$ 时，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0).$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0).$$

故 $g'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)$ 显然连续，故 $g'(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

3

十三、解:由题设有

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}.$$

则 $$\iint_D \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{x^2+y^2=1}uv\mathrm{d}x+uv\mathrm{d}y$$
$$=\oint_{x^2+y^2=1}y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\iint_D(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

注:当二重积分化为曲线积分时,可不考虑出现任意函数的情形,因为

$$\iint_D\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{x^2+y^2=1}[uv+\varphi(x)]\mathrm{d}x+[uv+\psi(y)]\mathrm{d}y$$
$$=\oint_{x^2+y^2=1}y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\iint_D(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

1987 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题(副题)*

【说明:本试卷包含 10 个大题,均为必做题,满分 100 分】

一、填空题(本题包含 5 个小题,每小题 2 分,满分 10 分.将答案填入题中横线上,不填解题过程)

(1) 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=e^{2t}.\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=$ ________.

(2) 曲线 $y=-2\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},-1\right)$ 处的曲率是________.

(3) 微分学中拉格朗日(Lagrange)中值定理的条件是________;结论是________.

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=$ ________.

(5) 积分 $\int x^2(x^3+1)^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}x=$ ________.

二、(本题满分 5 分)求 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(-\sqrt{3},\dfrac{3}{2}\right)$ 处的切线方程与法线方程.

三、(本题满分 8 分)求 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

四、(本题满分 8 分)计算 $\int_1^2\arctan\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 8 分)若 $y=[f(x^2)]^{\frac{1}{x}}$,其中 $f(x)$ 是可微的正值函数,求 $\mathrm{d}y$.

六、(本题满分 10 分)一等腰梯形,下底 AB 的长度为 4,上底 CD 的长度为 2,高为 3,M 为下底 AB 上的一动点,设 $AM=x$,过点 M 作 AB 的垂线,以 $S(x)$ 表示所给梯形位于此垂线左方部分的面积.试写出 $S(x)$ 的表达式,并求 $S'(x)$.

* 副题系备用题,它仅在一旦正题出现意外情况下才启用.其题型、题量、难度与正题相当.一般来讲,考生无机会看到.当时的数学(三)试题即为现今的数学(二)试题.

七、(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 为连续函数,试证 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

八、(本题包含 2 个小题,满分 15 分.)

(1) (7 分)　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=x$,满足条件 $y\big|_{x=3}=4$ 的解.

(2) (8 分)　求微分方程 $y''+2''+2y=x+3$ 的通解(一般解).

九、选择题(本题包含 4 个小题,每小题 4 分,满分 16 分.每个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的.必须把所选结论的代号写在小题后的圆括号内,选对得 4 分;不选、错选或选出的代号超过一个一律得 0 分.)

(1) $f(x)=x\mathrm{e}^{-|\sin x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是　(　)

(A) 有界函数　(B) 单调函数　(C) 周期函数　(D) 奇函数

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x-0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处　(　)

(A) 连续,且可导　(B) 连续,不可导

(C) 不连续　(D) 不仅可导,且导数也连续

(3) 若 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　(　)

(A) 可导,且 $f'(0)\neq 0$　(B) 取得极大值

(C) 取得极小值　(D) 不可导

(4) 若 $I=\dfrac{1}{s}\int_0^{st} f\left(t+\dfrac{x}{s}\right)\mathrm{d}x$ $(s>0,t>0)$,则 I 之值　(　)

(A) 依赖于 s,t,x　(B) 依赖于 t 和 s

(C) 依赖于 t,不依赖于 s　(D) 依赖于 s,x

十、(本题满分 10 分)设 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,试求

(1) $F(x)$ 的极值;

(2) 曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标;

(3) $\int_{-2}^{3}x^2F'(x)\,\mathrm{d}x$ 之值.