圆贝世纪高等学校规划教材

数学模型与数学建模

陈汝栋摇于延荣摇编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书结合作者多年的数学建模竞赛经验和普通工科院校的学生实际，用尽可能小的篇幅，由浅入深地介绍了数学建模的常用方法和相关学数知识，并且简单介绍了三个数学软件的使用。四个附录则给出了概率论基础知识、酝葬贼造葬遭软件的基本命令和 云原检验、相关系数的临界值表，方便读者查阅。

本书可作为理工科学生学习数学建模的教材或参考书。

摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇数学模型与数学建模 辕陈汝栋，于延荣编著援—北京：国防工业出版社，圆园园远援员

摇圆员世纪高等学校规则教材

摇陨杂月晕 苑鄄员员愿鄄园源猿愿鄄愿

摇Ⅰ援数援援Ⅱ援①陈援②于援Ⅲ援数学模型—高等学校—教材摇Ⅳ援园圆圆

摇中国版本图书馆 悦陨孕 数据核字（圆园园缘）第 员猿苑远园远号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 圆猿号）

（邮政编码摇员园园园源源）

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 苑愿苑×员园怨圆摇员辕员远摇印张 员远½摇圆远愿千字

圆园园远年 员月第 员版摇摇圆园园远年 员月北京第 员次印刷

印数：员—源园园园册摇摇定价：圆缘援园园元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：（园员园）远愿源圆愿源圆圆摇摇摇发行邮购：（园员园）远愿源员源源苑源

发行传真：（园员园）远愿源员员缘猿缘摇摇摇发行业务：（园员园）远愿源苑圆苑远源

前　言

开设数学建模课，是大学教育，特别是数学教育改革的一个重要组成部分。它把我们从只注重知识传授，忽略其应用背景的数学教育带入了一个全新的天地。在这门课程中，稳定的椅子、雨中行走、席位分配、核军备竞赛等，一个个精妙绝伦的例子使同学们不但领略了数学的深奥和神奇，也从中体会了自己运用数学知识解决实际问题的成就感。

作者自1996年开始接触并讲授数学建模课，1998年开始组织数学建模的赛前培训，带领天津工业大学的学生们参加了全国大学生数学建模竞赛、美国大学生数学建模竞赛和全国部分院校研究生数学建模竞赛，并取得了全国一等奖、二等奖（含研究生）和美国大学生数学建模竞赛二等奖以及天津赛区的20余项奖励。在这10年的授课和建模竞赛的实践中，有成功的喜悦，也有辛劳的苦衷。从中深刻地体会着纯理论到应用的转变，感受了数学建模和数学技术的结合（数学科学与计算机结合产生的，已成为当代高新技术的一个重要组成部分）在科学发展的不同领域发挥着巨大的作用。也因看到通过参加数学建模竞赛的学生们一个个带着成功的喜悦奔赴不同岗位，而感到无比的欣慰。

在7次讲授数学建模课讲稿的基础上，2002年将其印成讲义，在我校选修课和专业学生中又使用了3年，现对讲义进行修改形成本书。本书的特点是：针对普通工科院校学生的特点，由浅入深地介绍了数学建模的方法、所用到的基本数学知识及简单的数学软件知识，试图用较小的篇幅，介绍尽可能全面的内容，使其更适合普通工科院校学生学习数学建模和应用的需要。同时，4个附录给出的数学建模常用的概率论基础知识、MATLAB软件的基本命令、F-检验和相关系数的临界值表，为大学生进行数学建模和数学建模竞赛提供了方便。本书可作为理工科学生学习数学建模的教材或参考书。

鉴于作者水平有限，且数学建模用到的数学知识包罗万象，很难完整地反映于这样一个篇幅的书中，疏漏之处在所难免，诚望读者指正。

陈汝栋　于延荣

2005年10月于天津

目摇摇录

第一章摇数学模型摇数学建模摇素质教育

数学建模课是近几年为适应大学数学教学改革的需要而开设的一门课程,它是将数学理论知识与应用背景有机结合,为应试教育转向素质教育的创新实践。

一、数学模型概念导入

先看三则故事:

(员) 经常乘电梯的人,有这样的体会:除非是在楼的低层或顶层,否则你等来的第一部电梯差不多总是与你希望去的方向相反。但是,下面的说法似乎也有道理:要下去,必须先上来,因此,等到的电梯是上行还是下行的可能性应该是相等的。那么,这二者哪一个是正确的呢?

(圆) 一个纽约人有两个好朋友,一个住在市中心,一个住在郊区。他和这两个人都很好。因此,当想去看望他们时,他总是登上在地铁车站赶上的第一列地铁,而不管它是去市中心还是去郊区。到两个方向去的地铁班次是一样多的。然而尽管他无意厚此薄彼,但结果是:他去一个朋友处的次数远远超过了去另一个朋友处的次数。为什么会这样呢?

(猿) 在美国中西部的一个小镇上住着一位退休的铁路工程师 宰援允援蕴葬糟噪藻赠,他工作了大半辈子的那条铁路线正好穿过这个小镇。允援蕴葬糟噪藻赠患有失眠症,退休后的这位老工程师经常会在夜里的某个奇数点时间(但不固定)醒来,且再也不能入睡。后来他发现了一个治疗失眠的方法:每当他醒来后,他就沿着小镇上的那条寂静的街道步行。一直走到与铁路的交叉点。他站在那儿,一直等到有一列火车开来。火车的吼叫声撕破了宁静的夜空,这一情景使这位老工程师心境舒畅。然后他走回家,很快就能入睡。

过了一段时间,他意外地发现,他所看到的火车大都是向一个方向的,而他清楚地记得,这条干线上的火车向东和向西的次数是一样的。后来他又观察了一个星期,并且把看到的结果都用一个小本记下来,结果还是一样,这时他想,是否由于自己每天都在同一个时间起来的原因?于是,他让一个朋友给他拟了一个长长的随机时间表,结果,还是一样,和他开始看到的情形差不多。并且,他询问火车站,是否有些火车改线了,回答是否定的。这一奇怪现象,使这位老铁路如此沮丧,以致完全失眠,日渐虚弱。

为解释上述现象，应用概率论知识。

在现实生活中，经常遇到一些现象：事情的发生与否，不取决于人们的主观意志。如掷一枚硬币，落到地上，究竟是正面还是反面，谁也难以肯定。这种现象，称为随机现象。讨论这种现象的一门学科，就是概率论。

我们把这种不可预言的现象中的每一个可能发生的结果，称为随机事件。每一个随机事件发生的可能性，称为这个随机事件的概率。

如随机掷一枚硬币，每一次发生的可能性只有正面或反面两种可能，因此，出现"正面"或"反面"的可能性是 员辕圆，即随机事件"掷到正面"或"掷到反面"的概率均为 员辕圆。

上述问题均可以转化为概率问题，结论是由于相应位置对应事件发生的概率不同引起的。

在客观世界中，有大量的问题，需要通过建立数学模型加以解决。其他问题诸如：为什么人造地球卫星要用三级火箭？进入迷宫如何走出来？能否将椅子放稳当？如何制定人口政策？如何进行钻井布局？怎样才能使森林获得最大效益等。

二、数学模型概念

模型：为了某个特定的目的，将原型中的某一部分信息减缩、提炼得到原型的替代物。

原型：现实世界中的各种现象。

如飞机模型有：展厅中的飞机模型（为了形象直观）、玩具飞机（形象直观又适宜儿童玩耍）、航模（能飞行）等都是为了不同的目的的飞机的模型。

摇 模型
- 物质模型
  - 直观模型（玩具，照片，沙盘，塔林等）
  - 物理模型（波浪水箱中的舰艇模型、风洞试验、模型地震等）
- 理想模型（抽象模型）
  - 思维模型（开车，技术工人，画家（特点：模糊性，片面性，主观性））
  - 符号模型（地图，电路图，建筑图等）
  - 数学模型
  - 计算机模拟（电子游戏）

摇摇数学模型：对现实世界中的某一特定现象，为了某一特定的目的，做出适当的简化假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构。

三、应用例子

(员) 稳定的椅子:四条腿的椅子能否放稳当?

(圆) 哥尼斯堡七桥问题。

(猿) 迷宫问题。

(源) 海湾战争:“爱国者”导弹拦截“飞毛腿”导弹(发生在中东,计算在澳大利亚,指挥又在美国白宫,但这一切又要在极短时间内完成,要靠数学);环境污染(如果将海湾地区的石油全部点燃,是否会造成全球范围的环境污染)。

(缘) 朝鲜战争:战争开始一年后,美国数学家给出的研究报告指出:中国将出兵,从而预示着美国的侵朝战争必败。

(远) 天文学:冥王星、海王星的发现,靠的是数学计算,而不是观察。

(苑) 金融:有人预言,数学家跳槽金融,将引发金融革命。

(愿) 社会、生活:雨中行走、选举问题、田忌赛马、夫妻渡河问题、疯狂的电梯等。

军事、工业、经济中的例子更是比比皆是。

因此人们发现:数学已被广泛应用且无孔不入,数字化、量化的趋势已势不可挡,在这一过程中,数学发挥着无可替代的作用。

四、素质教育新要求

人们深深的感到,仅仅教数学理论,已远不能适应培养符合现代化建设需要的创新型人才的需要。从而导致了以应用数学知识解决实际问题为主要宗旨,培养学生创造性思维能力,全面提高学生素质的一门课程的诞生。

圆园世纪缘园年代,我国的数学教育强调完整性,崇尚理论的完美,这种思想的代表是布尔巴基学派,似乎越抽象,越难理解,越像真正的数学。长期以来,纯粹数学像一条鱼的中段,备受青睐,甚至纯粹数学家还看不起搞应用数学的。这种思想严重束缚了人们的思想,也闹出了不少笑话,使得本来来自现实世界、丰富多彩的数学(像一条鱼)变得与世隔绝,放松了(或放弃了)把现实问题抽象成数学问题的能力的培养(鱼头扔掉了);有时抽象为数学问题后又由于其“太简单”而不屑一顾(把鱼尾也扔掉了)。在强调素质教育的今天,我们的口号应是“烧全鱼”。

学习本课程要认真对待每一个问题,在做模型中培养自己解决实际问题的能力,从而学会如何用数学,掌握使用数学模型解决实际问题的能力。

美国工业与应用数学学会([illegible])现任主席、美国明尼达大学数学及应用数学研究所所长、著名数学家[illegible]教授和该所副所长[illegible]教授说“学习数学建模的惟一方法

就是实际去做数学建模”。

五、数学建模的要求

(员 判断模型好坏的原则。所用的数学知识尽可能简单。

(圆 合理假设。既不能太多(实际问题上一个因素相应于数学表述中的一个变量,而随着变量的增多,研究的复杂度将大幅度增加),也不能太少,否则不能反映实际问题的真实本质。如人口问题就与年龄、性别、疾病、卫生、战争、灾荒、观念等有关。

(猿 计算机能力。近几年数学建模竞赛题对使用计算机的能力要求越来越高。

(源 涉及内容。问题类型:非物理问题;所用数学方法:回归分析、微分方程、线性规划、图论、运筹学、统筹学、计算机模拟等。

第二章摇一些简单的例子

例 圆原员摇稳定的椅子

问题:在不十分平坦的地面上,一把四条腿的椅子能否放稳当?即椅子的四条腿着地。

假设：

(员 地面连续(无台阶);

(圆 四条腿视为四个点(即看成四点着地)且一样长,可以连成正方形;

(猿 任何时候三点着地(三点定面)。

数学描述：

设四条腿 粤月悦阅(如图 圆原员 连成四边形,韵为正方形中心,正方形 粤月悦阅绕 韵旋转,转角为 θ。

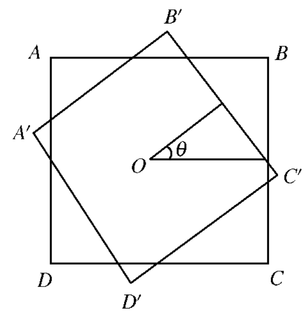


图 圆原员

目标：

粤月悦阅距离地面均为零。

建模：

设 枣(θ) 表示 粤悦到地面距离之和。

早(θ) 表示 月阅到地面距离之和。

则四条腿着地当且仅当 枣(θ) 越早(θ) 越园

由假设(员,枣(θ),早(θ) 连续,因此,可利用连续函数的性质。

由假设(猿,枣(θ) 早(θ) 越园对任意 θ 成立。

若 枣(园 越早(园 越园取 θ 越园即可,否则,应证明,存在 $\theta_{\text{园}} \in \left(\text{园},\frac{\pi}{\text{圆}}\right)$,使枣($\theta_{\text{园}}$) 越早($\theta_{\text{园}}$) 越园

不妨设 枣(园 跃园,早(园 越园则 枣$\left(\frac{\pi}{\text{圆}}\right)$ 越园,早$\left(\frac{\pi}{\text{圆}}\right)$ 跃园(将正方形绕中心逆时针方向旋转$\frac{\pi}{\text{圆}}$),现证明：

$$\exists\, \theta_{\text{园}} \in \left(\text{园},\frac{\pi}{\text{圆}}\right),\text{使 枣}(\theta_{\text{园}})\ \text{越早}(\theta_{\text{园}})\ \text{越园}$$

摇摇用连续函数的中值定理：

令 澡(θ) 越枣(θ) 原早(θ)，由假设(员)，澡(园)在$\left[园,\frac{\pi}{圆}\right]$上连续，且 澡(园) 跃园，澡$\left(\frac{\pi}{圆}\right)$约园。于是，由连续函数介值定理，存在 $\theta_{园}\in\left(园,\frac{\pi}{圆}\right)$使 澡$(\theta_{园})$ 越园，即 枣$(\theta_{园})$ 越早$(\theta_{园})$。由 枣$(\theta_{园})\cdot$早$(\theta_{园})$ 越园，从而 枣$(\theta_{园})$ 越园，或 早$(\theta_{园})$ 越园，于是 枣$(\theta_{园})$ 越早$(\theta_{园})$ 越园。

讨论：

此问题中，用一元变量 θ 表示椅子的位置是巧妙的，也是解决本问题的关键(θ 未求出，但仍有意义)。

利用正方形的对称性及旋转 怨园°并不是关键，如：可考虑，将椅子的四条腿改为矩形该如何做？

利用介值定理还可以考虑其他问题：

例 圆原圆 巧分蛋糕

问题：如何将一个不规则的蛋糕 Γ 平均分成两部分。

数学描述：

设 Γ 为平面上任一封闭曲线，则能否找到一条直线将其平均分成两部分。

建模：

设 Γ 为平面上任一封闭曲线，孕为平面上一点(不妨设 孕在 Γ 内)，则存在一过 孕点的直线，将 Γ 所围面积二等分，如图 圆原圆所示。

设 造为过 孕的任一直线，分图形为两部分 杂$_{员}$，杂$_{圆}$，若 杂$_{员}$越杂$_{圆}$，则得证。

否则，设 杂$_{员}$跃杂$_{圆}$，造与 曾轴夹角 $\alpha_{园}$。

让 造沿逆时针绕 孕旋转，则 杂$_{员}$，杂$_{圆}$随 α 的变化连续地变化，记其面积为 杂$_{员}(\alpha)$，杂$_{圆}(\alpha)$，则记 杂$_{员}(\alpha_{园})$ 越杂$_{员}$，杂$_{圆}(\alpha_{园})$ 越杂$_{圆}$，且不妨设 杂$_{员}(\alpha_{园})$ 跃杂$_{圆}(\alpha_{园})$(若 杂$_{员}(\alpha_{园})$ 越杂$_{圆}(\alpha_{园})$，则 造即将蛋糕平分为二等分)，令

枣(α) 越杂$_{员}(\alpha)$ 原杂$_{圆}(\alpha)$

则

枣$(\alpha_{园})$ 越杂$_{员}(\alpha_{园})$ 原杂$_{圆}(\alpha_{园})$ 跃园

枣$(\alpha_{园}$ 垣$\pi)$ 越杂$_{员}(\alpha_{园}$ 垣$\pi)$ 原杂$_{圆}(\alpha_{园}$ 垣$\pi)$ 越杂$_{圆}$ 原杂$_{员}$ 约园

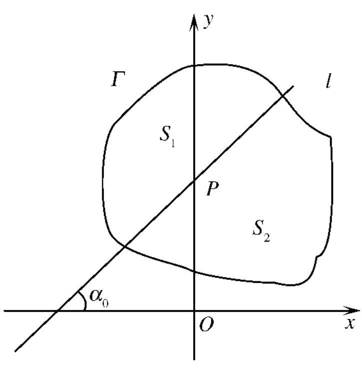


图 圆原圆

且 枣(α) 连续，故由连续函数介值定理知，$\exists\,\bar{\alpha}\in$(园，π)，使 枣$(\bar{\alpha})$ 越园，即 α 越$\bar{\alpha}$ 对应的直线即为所求。

例 圆原猿 上山问题

问题：一人早 远：园园从山脚 粤上山，晚 员愿：园园到山顶 月；第二天，早 远：园园从 月

下山，晚 员愿园园到 粤 问是否有一个时刻 贼，这两天都在这一时刻到达同一点？

数学描述：

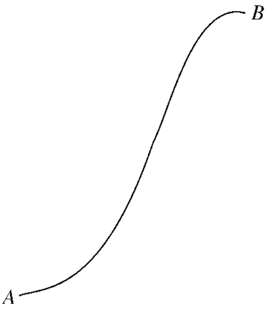


图 圆原猿

如图 圆原猿所示，设 杂$_员$(贼，贼 [园，员园]，表示上山运动函数 杂$_圆$(贼，贼 [园，员园]，表示下山运动函数，而 杂表示 粤到 月的距离。问是否存在一时刻 贼$_园$使 杂$_员$(贼$_园$ 越杂原杂$_圆$(贼$_园$。

建模：

设 杂$_员$(贼，贼 [园，员园]，表示上山运动函数 杂$_圆$(贼，贼 [园，员园]，表示下山运动函数，而 杂表示 粤到 月的距离。则 杂$_蚤$(园 越园，杂$_蚤$(员园 越杂

令

杂(贼 越杂$_员$(贼 原杂$_圆$(贼 原杂

则

杂(园 越原杂，杂(员园 越杂跃园 于是，由连续函数的介值定理，∃ 贼$_园$∈ [园，员园] 使 杂(贼$_园$ 越园，即 杂$_员$(贼$_园$ 越杂原杂$_圆$(贼$_园$。

例 圆原源 人员疏散

问题 在发生意外事件时，考虑一座教学楼内 灶个教室内学生的疏散问题。

假设：

(员 均匀疏散，即人与人间距为 凿(常数)；

(圆 匀速疏散，即速度为 增（皂辕泽）(常数)；

(猿 第 蚤个教室有 灶$_蚤$垣员人；

(源 第 蚤个教室门口到第 蚤原员个教室门口的距离为 蕴$_蚤$；

(缘 疏散时，第一个人到门口需 贼$_园$秒。

建模：

如图 圆原源所示。

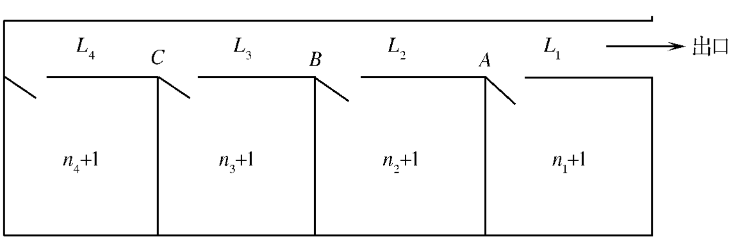


图 圆原源

第一个教室撤空需时间

贼圆垣(灶员蚤垣缊员) 辕增

则第二个教室撤空需时间

贼圆垣(灶圆蚤垣缊员 垣缊圆) 辕增

摇摇若第一个教室人员未撤完,第二个教室已到 粤则为避免拥挤,需等待。此时,两个教室完全撤离所花时间为 (相当于在 粤处集结 灶员 垣灶圆 垣圆个人)

栽越 (灶员 垣灶圆 垣圆)蚤 / 增 垣 缊员 / 增 垣贼圆

摇摇若第一个教室人员已撤完,第二个教室人员还未到 粤则所花时间恰为第二个教室完全撤出所需时间

栽越贼圆垣(缊员 垣缊圆 垣灶圆蚤) 辕增

摇摇检验:

取 缊员 越远园,缊圆 越远园,增越员,贼圆越猿,蚤越员,灶员 越缊圆辕增越远园(即第一个教室 远园人),灶圆 越怨园,则

栽越 (远园垣远园垣怨园) 辕员垣猿越圆怨泽

摇摇讨论:

(员) 蚤越猿源如何?

(圆) 允许双行如何?

例 圆原远摇价格竞争

问题:两个加油站位于同一条公路旁,为在公路上行驶的汽车提供同样的汽油,彼此竞相降价,竞争日趋激烈。现在甲加油站开始降价,试站在乙加油站立场上,组建模型,为乙站提供决策依据 (降价幅度) 使乙站获利最高。

假设:

孕汽油的正常销价 (元辕造);

蕴降价前乙销量 (造辕天);

宰 汽油成本 (元辕造);

曾乙加油站的销价 (元辕造);

赠甲加油站的销价 (元辕造)。

主要相关因素:

(员) 甲站降价幅度 孕原赠

(圆) 乙站降价幅度 孕原曾

(猿) 二站价格之差 赠原曾

假设乙站销量与三者为线性关系,即

$$匝 越蕴原葬(孕原赠 垣遭(孕原曾 垣糟(赠原曾$$

(注:若将 赠原曾合并入前两项,系数不好估计,如:原葬(孕原赠 垣糟越原葬(孕原赠(员 垣$\frac{糟}{葬}$))

则乙站的利润函数为

$$砸(曾赠 越 (曾原宰) 匝$$

固定 赠 求最大值点 (注:固定 赠考虑 砸(曾赠才有意义)

$$\frac{\partial 砸}{\partial 曾}越蕴原葬(孕原赠 垣遭(孕原曾 原糟(曾原赠 垣 (曾原宰) (原遭原糟 越园$$

解得

$$曾 越\frac{蕴垣赠(葬垣糟 垣孕(遭原葬 垣宰 (遭垣糟}{圆(遭垣糟}$$

即甲加油站确定价格为 赠时,乙加油站价格定为 曾 能获最大利润。

注意:

(员 经济学中,价格与销量关系通常认为是线性关系。

(圆 $\frac{\partial 砸}{\partial 曾}$经济学中称为边际利润。

讨论:假设 蕴越源园园园,孕越原宰越猿 如取 赠越猿援怨,

$$砸(曾赠 越 (曾原猿 (圆猿缘园园原缘园园园曾$$

$$\frac{\partial 砸}{\partial 曾}越猿猿缘园园原员园园园园曾$$

$$疫\frac{\partial 砸}{\partial 曾}\approx \frac{砸(曾垣\Delta 曾 原砸(曾}{\Delta 曾}$$

故其意义是当 曾增加一个单位 (Δ曾越员 时,砸的增加值。

特别,当 曾越猿援猿缘时,$\frac{\partial 砸}{\partial 曾}$越园,表明价格不能再降。参数 葬遭糟的值较难估计。

一般地,可在 赠取不同值时 (固定),对 曾取不同值时,得到销量值,然后用回归分析的方法得到。但这是不现实的,因为要频繁调价。

常用的办法是,按给定数据给出 葬遭糟的数量级,从而得到估计值 (或称虚拟参数)。

葬越遭越远园园园,糟越缘园园园

员园

赠	曾	砸
猿援怨	猿援远缘	圆员园援缘
猿援愿	猿援远	员愿园
猿援苑	猿援愿缘	员缘园援缘

也可用线性回归方法：

根据经验,选定 猿援愿及一组 (曾匝) ,如

(猿援远园,圆园圆援远),(猿援远缘,圆员园援园),(猿援怨,员苑园援园),(猿援远,圆远园援园),(猿援愿缘,圆员园援园),(源援园园,员园园援园)。

用线性回归,可得

匝 越原员源园援愿曾垣远缘怨援怨

解得

葬越员圆援员缘原糟 遭越员源援愿原糟

取

糟越圆园

得

葬越员园援缘 遭越员愿

摇摇关于边际问题的其他例子：

(员) 某企业利润 孕与产量 曾的关系为

孕(曾) 越圆缘园曾原缘曾[圆]

边际利润

孕忆(曾) 越圆缘园原员园曾

摇摇 (圆) 某乳酸厂收入函数

砸(曾) 越员园曾[员] 原曾[猿]

成本函数

悦(曾) 越猿曾[员] 垣源曾∈ [园,缘] ,单位为 蕴

砸,悦以千元计,边际收入 砸忆(曾) ,边际成本 悦忆(曾) 。

利润函数

孕(曾) 越砸(曾) 原悦(曾)

边际利润

$$孕礼曾 越\frac{猿}{圆}\cdot\frac{猿原曾}{\sqrt{曾}}$$

摇摇**例 圆原猿 包扎管道**

问题：在包扎水管管道时，如何包扎可以使管道全部包扎，且无重叠。

显然，本问题与参数带宽 宰(糟) ，圆管周长 (管道) 悦(糟) 及缠绕角度有关。

假设：

(员) 管道是圆的，直的 (无交叉)；

(圆) 粗细一样；

(猿) 带子宽度一样。

求：

(员) θ 多大时，最省带子？

(圆) 若管道长为 造(糟) ，问需多少带子 蕴？

建模：

对于问题 (员) ，如图 圆原缘易知 宰越悦泽蚤灶 $\Rightarrow\theta$ 越葬则糟泽蚤灶 $\frac{宰}{悦}$

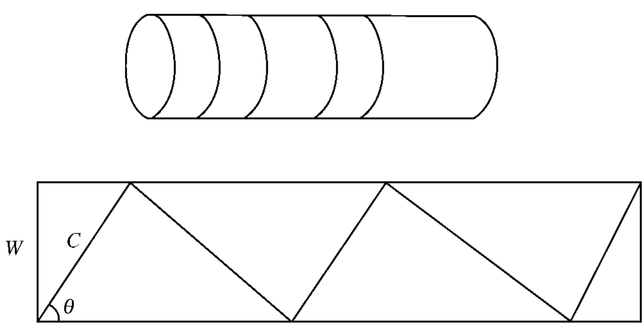


图 圆原缘

对于问题 (圆) ，管道表面积与带子总面积相等，管道表面积为 造 悦，带子总面积为 蕴· 宰

$$蕴宰 原遭悦 越宰\sqrt{悦^{圆} 原宰^{圆}}$$

即

$$蕴越\frac{宰\sqrt{悦^{圆} 原宰^{圆}} 垣遭悦}{宰}$$

摇摇**讨论**：

(员) 若包扎时有重叠，情况怎样？为什么要重叠？

(圆) 若管道截面积为正方形，如何建模？

(猿 在第 (员 种情况下，若带子误差为 ε 时，价格相差 孕(ε)，将怎样选择带子？

例 圆源摇席位分配

问题 美国宪法第一条第二款指出：众议院议员名额将根据各州人口比例分配，但在落实这一条款内容时，从 员苑愿怨年美国第一部宪法生效以来，对方案的“公正合理性”一直在争争吵吵。

数学描述：

设众议院名额 晕，共有 杂州，各州人口 $孕_{蚤}$(蚤越员，圆，…，杂)，问题是如何找出一组 $灶_{员}$，$灶_{圆}$，…，$灶_{杂}$，使 $灶_{员}$ 垣 $灶_{圆}$ 垣… 垣 $灶_{杂}$ 越晕，$灶_{蚤}$ 为各州分配的名额，并且 $灶_{蚤}$ 尽可能接近 $\frac{孕_{蚤}}{\sum_{蚤越员}^{杂} 孕_{蚤}}$ 晕。

讨论：

下面用具体例子说明这一问题。

某校 圆园园名学生，甲系 员园园名、乙系 远园名、丙系 源园名。

若选 圆园名学生会代表，公平又简单的方法是甲系给 员园席，乙系给 远席，丙系给 源席（无异议）。

若丙系有 远名同学转到甲系、乙系各 猿名，则席位分配如下：

按照惯例也即按下面提到的 匀方法，圆园个席位应按如下表中分法：甲系 员园席；乙系 远席；丙 源席，即先按整数分配，再按余数较大者分配。

但由于考虑到 圆园席表决可能出现平局，故增加一位代表变成 圆员席，仍按这种分法，则甲系 员员席；乙系 苑席；丙系 猿席。

圆园席摇摇摇圆员席

系别	学生数	所占比例 (豫)	按比例分配	按惯例 匀法	比例	匀法
甲	员园猿	缘员郾缘	员园郾猿	员园	员园郾愿员缘	员员
乙	远猿	猿员郾缘	远郾猿	远	远郾远员缘	苑
丙	猿源	员苑	猿郾源	源	猿郾缘苑	猿
总和	圆园园	员园园	圆园	圆园	圆员	圆员

显然，对丙系不公平。问题出在哪里呢？

历史上，这种先按整数分配，再按余数较大者分配的方法是美国乔治·华盛顿时代财政部长 匀葬皂蚤造贼燥灶在 员苑怨园年提出的。但由于其政敌 允藻枣枣藻则泽燥灶的阻挠，员愿缘园年才正式使用，而 员愿愿园年又开始争论，它产生于下述悖论。

粤造葬遭葬皂葬悖论：代表名额增加，某些州名额减少，这个方法说明 匀方法不合理。

其他的悖论还有：**人口悖论**：当州数 杂和议员名额 晕不变，各州人数有所增长，人口增长率高的州，名额却减少。

州名	人口数	按比例名额	分配名额 灶$_{蚤}$	人口增长率 Δ孕$_{蚤}$/孕$_{蚤}$	孕$_{蚤}$	匝$_{蚤}$	灶$_{蚤}$
粤	源愿园园	员援愿远	员	园援园怨愿	源苑远园	员援苑苑	员
月	源源缘	员援怨缘缘	员	园援猿缘愿	缘猿园园	员援怨猿	园
悦	员远缘	园援远缘缘	员	园	员远园园	园援远员	园
总和	员园园园园	猿	猿		员员远园园	猿	猿

新州悖论：州数增加，原有人数不变，议员席位有所增加，但原有各州中议员席位发生变化。

州名	孕$_{蚤}$	匝$_{蚤}$	灶$_{蚤}$	州名	孕$_{蚤}$	匝$_{蚤}$	灶$_{蚤}$
粤	远员猿缘	园援苑缘园园	园	粤	远员猿缘	园援苑缘缘	猿
月	猿苑圆苑	员援苑圆园愿	园	月	猿苑圆苑	员援苑圆苑	员
				悦	园园园园	园援缘远缘	员

下面讨论怎样分配名额更合理。

建模：

建立数量指标：设两个系人数 孕$_{员}$，孕$_{圆}$，占 灶$_{员}$，灶$_{圆}$个席位。

若$\frac{孕_{员}}{灶_{员}}$越$\frac{孕_{圆}}{灶_{圆}}$，则公平，否则不公平。

$\left|\frac{孕_{员}}{灶_{员}}原\frac{孕_{圆}}{灶_{圆}}\right|$称为“绝对不公平”。如下表所列，显然，粤月之间不公平程度变大，但绝对不公平数值未变。

现在定义相对不公平。

州名	孕$_{蚤}$	灶$_{蚤}$	孕$_{蚤}$/灶$_{蚤}$	孕$_{员}$/灶$_{员}$原孕$_{圆}$/灶$_{圆}$
粤	员园园	员园	员园	员园原员园越园
月	员园园	员园	员园	
悦	员园园园	员园	员园园	员园园原员园园越园
阅	员园园园	员园	员园园	

员源

若$\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$跃$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$,定义对 粤的相对不公平值为

$$\text{则}_{\text{粤}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}})\ \text{越}\frac{\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}\text{原}\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}}{\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}}\ \text{越}\frac{\text{灶}_{\text{圆}}\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}\text{孕}_{\text{圆}}}\text{原员}$$

若$\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$约$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$,定义 月的相对不公平值为

$$\text{则}_{\text{月}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}})\ \text{越}\frac{\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}\text{原}\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}}{\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}}\ \text{越}\frac{\text{灶}_{\text{员}}\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}\text{孕}_{\text{员}}}\text{原员}$$

显然,$\text{则}_{\text{粤}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}})$越大,则对 粤越不公平。

下面按相对不公平确定新的分配方案：

设 粤月有 $\text{灶}_{\text{员}}$,$\text{灶}_{\text{圆}}$个席位,问新增一席该给谁？

不妨设$\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$跃$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$,再分配一席有 猿种情况：

(员) $\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员}}$跃$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$,则说明增加一席给 粤对 粤仍不公平,故此时名额给 粤

(圆) $\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员}}$约$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$,则说明增加一席给 粤 对 月不公平,计算

$$\text{则}_{\text{月}}(\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员},\text{灶}_{\text{圆}})\ \text{越}\frac{(\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员})\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}\text{孕}_{\text{员}}}\text{原员}$$

摇摇(猿) $\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$跃$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员}}$,则说明增一席给 月,对 粤不公平。计算

$$\text{则}_{\text{粤}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员})\ \text{越}\frac{(\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员})\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}\text{孕}_{\text{圆}}}\text{原员}$$

比较 $\text{则}_{\text{月}}(\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员},\text{灶}_{\text{圆}})$ 与 $\text{则}_{\text{粤}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员})$,谁大,则将指标给谁。

(注:不可能出现$\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$约$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员}}$,这是由于条件$\frac{\text{孕}_{\text{员}}}{\text{灶}_{\text{员}}}$跃$\frac{\text{孕}_{\text{圆}}}{\text{灶}_{\text{圆}}}$)

若 $\text{则}_{\text{粤}}(\text{灶}_{\text{员}},\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员})$ 约$\text{则}_{\text{月}}(\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员},\text{灶}_{\text{圆}})$,代入计算

$$\frac{\text{孕}_{\text{员}}(\text{灶}_{\text{圆}}\text{垣员})}{\text{灶}_{\text{员}}\text{孕}_{\text{圆}}}\text{原员约}\frac{\text{孕}_{\text{圆}}(\text{灶}_{\text{员}}\text{垣员})}{\text{灶}_{\text{圆}}\text{孕}_{\text{员}}}\text{原员}$$

即

$$\frac{孕_{员}^{圆}}{灶_{员}(灶_{员}垣员)} 约 \frac{孕_{圆}^{圆}}{灶_{圆}(灶_{圆}垣员)}$$

令

$$匝_{蚤}越\frac{孕_{蚤}^{圆}}{灶_{蚤}(灶_{蚤}垣员)}$$

上述方案是将多增的指标分配给了 匝值较大的一方。从某种意义上说，匝值反映了分配中的相对不公平程度。

上述讨论可以推广到 杂个系的情况。

例如，先给各系一个名额，然后再计算各方 匝值，依次将名额给大的一方。

对上述问题，计算 匝值，且按上述原则分配，可得下表：

灶	甲系	乙系	丙系
员	[illegible]	[illegible]	[illegible]
圆	[illegible]	[illegible]	[illegible]
猿	[illegible]	[illegible]	[illegible]
源	[illegible]	[illegible]	[illegible]
缘	[illegible]	[illegible]	[illegible]
远	[illegible]	[illegible]	[illegible]
苑	[illegible]	[illegible]	[illegible]
愿	[illegible]	[illegible]	[illegible]
怨	[illegible]	[illegible]	[illegible]
员园	[illegible]	[illegible]	[illegible]
员员	[illegible]		

此时，丙系最终保住了自己的第 源席。

但由此表看出，圆员个名额，丙系得到 源个，但再增加 源个，丙系仍得不到 员个，这说明，丙系得 源个相对沾光。

然而，匝值法未必公平，例如由下表看出，远个州，名额按 匝值法分配的结果亦不合理。

州名	人口数 孕$_{蚤}$	按比例份额 匝$_{蚤}$	名额数 灶$_{蚤}$	州名	人口数 孕$_{蚤}$	按比例份额 匝$_{蚤}$	名额数 灶$_{蚤}$
粤	怨园猿缘	怨园猿缘	怨园	耘	员缘远	员缘远	圆
月	员缘怨	员缘怨	圆	云	员缘缘	员缘缘	圆
悦	员缘愿	员缘愿	圆	总和	员园园园园	员园园	员园园
阅	员缘苑	员缘苑	圆				

讨论：

有无更合理方案。

（员） 阅葬灶蚤藻造分法

用 员，圆，猿，…除各系人数，将商从大到小排列，然后按从小到大顺序取 圆员席位。

（圆） 除子法（允藻枣枣藻则泽燥灶）：各系分配名额 孕$_{蚤}$满足 $\sum$ 孕$_{蚤}$越员，若 $\sum$［孕$_{蚤}$］约员，则适当取 λ 约员，取 孕$_{蚤}^{*}$ 越$\frac{孕_{蚤}}{\lambda}$，且 $\sum$［孕$_{蚤}^{*}$］越员。

如取 λ 越园援怨远源，结果为：甲、乙、丙三系，圆员席位。

系别	比例	匝	阅葬灶蚤藻造法	除子法
甲	员园	员园	员园	员园
乙	苑	远	苑	苑
丙	猿	源	猿	猿

上述例子看出，各种方法都可能对某些系有利，对另一些系不利。于是，有两位学者，酝蚤糟澡葬藻造 月葬造蚤灶泽噪蚤 和 匀援孕藻赠贼燥灶 再燥怎灶早，采用公理化方法[员]研究此问题。他们得出的结论是不存在完全“合理”的分配方法。

例 圆 应急设施的位置（员怨苑远 年美国竞赛题）

问题：美国里奥兰翘镇欲建两个应急设施（集救护、消防、警察所合一），员怨苑源 年该镇事故次数如图 圆原远。

障碍：其中南边一个浅水塘（不会淹死人，无事故），南北街区行驶 员分钟，东西街区行驶 圆分钟。

假设应急事件发生在街区中心，应急设施位于街角，试确定两个应急设施的最佳位置（总响应时间最少）。

假设：

（员） 应急车辆沿街道走，过十字路口红绿灯不计，且总能从最近的应急设施

发车；

(圆 突发事件在街区中心且从街角沿直线到街区中心；

(猿 员怨愿缘年突发事件有代表性。

数学描述：

设 (蚤，躁) 表示十字路口 (应急设施位置)，(噪，造) 表示街区中心 (突发地点)。

园≤蚤≤缘，园≤躁≤员园；园援缘≤噪≤源援缘，园援缘≤造≤怨援缘

从 (蚤，躁) 到 (噪，造) 时间 (无障碍)

葬[(蚤，躁)，(噪，造)] 越圆园(渣蚤原噪渣原园援缘) 垣
员援缘(渣躁原造渣原园援缘) 垣
员/圆 √(员援缘圆 垣圆园圆)

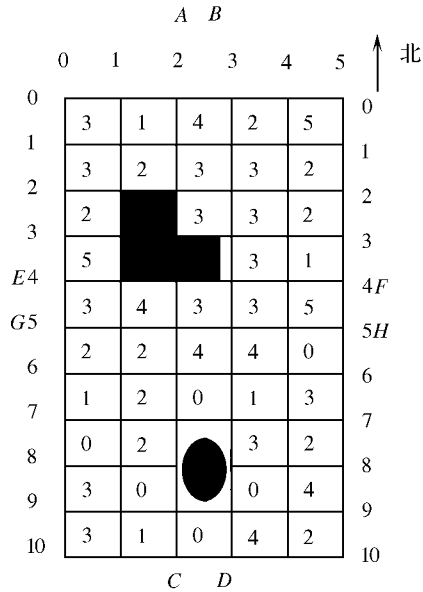


图 圆原远

若有障碍，则 葬((蚤，躁)，(噪，造)) 增加，如：

葬[(源，愿)，(园援缘，愿援缘)] 越圆园(渣蚤原噪渣原园援缘) 垣
员援缘(渣躁原造渣原园援缘) 垣
员/圆 √(员援缘圆 垣圆园圆) 垣员援缘

为 (源，愿) 到 (园援缘，愿援缘) 的时间。

于是，问题转化为求 (蚤员，躁员)，(蚤圆，躁圆)，使

怎越∑ 凿(噪，造)·皂蚤灶{葬[(蚤员，躁员)，(噪，造)]，葬[(蚤圆，躁圆)，(噪，造)]}

最小，这里 凿(噪，造) 表示 员怨愿缘年该街区突发事件数。

这里 (蚤，躁) 共 远远个点，(噪，造) 共 源缘个点，于是：

葬的取值共有 圆伊悦圆远远 伊源缘越员猿园员愿园(个)，怎的值共有 悦圆远远越圆员源缘(个)，逐个比较，可得出最佳选址。

但作为数学建模，这不是最佳选择，因为随着 (蚤，躁) 的增加 (如取 员园园个点)，葬的值共有

悦圆员园园 伊圆伊愿员 越愿园员怨园园(个)

摇摇**优化模型：**

(员 应急设施从四周向内移一个街区，总响应时间减少 (对每个点，至少不增，可选位置减 猿园个点，剩 猿远个点)。

(圆) 两个应急设施选在 粤月两侧,较选在 粤月上,总响应时间增加。

如 :从 蚤越员到 蚤越圆:

第一列响应时间增加

圆缘伊圆园越缘园园(泽摇 (圆缘为第一列事故数)

员园伊圆园越圆园园(泽摇 (员园为第二列障碍下侧事故数)

第二列响应时间减少

缘圆伊圆园越员园源园(泽

第三列可能不减,但不增

如不减列 (员,猿) → (圆缘,源缘) 。

总的响应时间至少减少摇员园源园原缘园园越猿源园(泽

故应选在 粤月上,同理应选在 悦阅,耘云,郧匀上。

计算量 葬计算降至

悦圆圆园 伊圆伊源缘越员苑圆园园

摇摇从而可用计算机选出最优点,考虑到其他因素,如红绿灯,交通堵塞等因素,我们给出 员园个最优解:

点	(猿,圆)	(猿,员)	(圆,圆)	(猿,圆)	(圆,员)	(猿,圆)	(猿,员)	(猿,圆)	(猿,员)	(员,源)
点	(猿,远)	(猿,远)	(猿,远)	(圆,远)	(猿,远)	(圆,苑)	(圆,远)	(猿,苑)	(猿,缘)	(源,缘)
时间 (泽)	源缘苑苑园	源缘愿苑园	源远园园园	源远猿园园	源远猿苑园	源远缘园园	源远愿苑园	源苑园园园	源苑远苑园	源苑愿苑园

第一个答案不绕障碍,这里优化指两个设施同时移动,若仅移动一个,未必在 粤月上。

假设的修改:

(员) 应急设施建在任一边上或任一位置;

(圆) 突发事件在街区四周或均匀分布在该街区内;

(猿) 应急设施建设费用,在镇中比边缘花费要多。

例 圆援员园摇博弈问题 (对策问题)

问题:

(员) 甲、乙各持 缘,员园,缘园三种硬币,每人每次各出一枚。

规则:若二人相同全归甲,不同则全归乙。

问:① 此规则对甲是否公平?

② 若站在甲方立场上,如何使甲收益最大?

这是一个对策问题。特点是双方得失和为零。

与之类似的问题:

(圆) 甲、乙进行乒乓球团体赛,每队由三名球员组成,双方均可排成三种不

同阵型。

甲摇粤摇月摇悦

乙摇Ⅰ摇Ⅱ摇Ⅲ

二队以往比赛记录如上表。

乙方策略

甲方策略	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	
A	−3	−1	−2	−1
B	−6	0	3	3
C	5	1	−4	5
	−6	−1	−4	

甲队支付矩阵

几个名词

局中人：对策活动中有权做出行动选择的参加者。

策略：局中人采用的可行的行动方案，策略集为有限的，称为有限集。否则，称为无限集。

支付：当局中人选定策略后，竞争结果就确定了。用支付描述量化的得失，将支付量化结果，称为支付矩阵。

二人零和纯策略对策：局中人只有两个，对策中各方只能从有限的策略集确定性地选择一种，且对策双方的支付之和为零。

设局中人 粤有 皂个策略 $粤_员,\cdots,粤_皂$，月有 灶个策略 $月_员,\cdots,月_灶$，则 $(粤_{蚤},月_{躁})$ 即为一个对策（或局势）。

粤的支付 $葬_{蚤躁}$，支付矩阵 $(葬_{蚤躁})$，月的支付 $遭_{蚤躁}$，支付矩阵 $(遭_{蚤躁})$。

二人零和策略条件：$葬_{蚤躁}垣遭_{蚤躁}越园$

鞍点定理：**阴**若 ∃ $蚤_园,躁_园$ 使 $葬_{蚤_园躁_园}越\max\limits_{蚤}\min\limits_{躁}葬_{蚤躁}越\min\limits_{躁}\max\limits_{蚤}葬_{蚤躁}$，则 $(粤_{蚤_园},月_{躁_园})$ 为鞍点，且为最佳点。如乒乓球比赛，(粤，Ⅱ) 为鞍点。

（员） 小题无鞍点。

分析：

① 若只进行一次比赛，则双方都不具有必胜的策略，“运气不佳”都可能输，因此，我们可在统计意义下讨论[圆]。（混合策略对策）

② 若知道对方采取的策略，则必能取胜。

对第一个问题，我们在甲、乙均以等可能出 粤、月、悦的情况下讨论。

策略集：(粤，粤)，(粤，月)，(粤，悦)，(月，粤)，(月，月)，(月，悦)，(悦，粤)，(悦，月)，(悦，悦)。

每一结果出现的概率为 $\frac{员}{怨}$，

对甲来说，收益的期望值

$$耘越\frac{员}{怨}(缘原缘原缘原元园垣元园原元园原缘园原缘园垣缘园) 越原\frac{远缘}{怨}$$

即对甲不公平。

设甲以 曾员,曾圆,曾猿 的概率出 粤,月,悦,乙以 赠员,赠圆,赠猿 的概率出 粤,月,悦,则

曾员 垣曾圆 垣曾猿 越员,赠员 垣赠圆 垣赠猿 越员

结果 (粤,粤) 出现的概率 曾员,赠员,此时甲收益为 缘

甲的收益期望值

耘(曾,赠) 越缘曾员赠员 原缘曾员赠圆 原缘曾员赠猿 原远园曾圆赠员 垣远园曾圆赠圆 原远园曾圆赠猿

原缘园曾猿赠员 原缘园曾猿赠圆 垣缘园曾猿赠猿 越

(曾员,曾圆,曾猿) (缘 原缘 原缘 ; 原远园 远园 原远园 ; 原缘园 原缘园 缘园) (赠员 ; 赠圆 ; 赠猿)

甲希望 耘(曾,赠) 最大,乙希望最小,即

对甲希望摇皂葬曾(曾) 皂蚤灶(赠) 耘(曾,赠),

对乙希望摇皂蚤灶(赠) 皂葬曾(曾) 耘(曾,赠)。

即对双方来说,都希望在最坏可能中争取最好结果。

鞍点定理Ⅱ 零和对策问题必存在最佳策略 曾*,赠*,此时,双方收益相等。即

皂葬曾(曾) 皂蚤灶(赠) 耘(曾,赠) 越皂蚤灶(赠) 皂葬曾(曾) 耘(曾*,赠) 越耘(曾*,赠*)

(曾*,赠*) 为对策问题的鞍点。

可用 蕴葬早则葬灶早藻 乘数法:

解 ∂耘/∂曾蚤 越园,∂耘/∂赠蚤 越园 的点,注意到条件,用 蕴葬早则葬灶早藻 乘数方法

蕴越耘(曾,赠) 垣λ(曾员 垣曾圆 垣曾猿 原员) 垣μ(赠员 垣赠圆 垣赠猿 原员)

令

蕴'曾蚤 越园,蕴'赠蚤 越园

得

曾* 越{员园/员远, 缘/员远, 员/员远},赠* 越{远/猿园, 员员/猿园, 员猿/猿园},耘 越原圆缘/愿 越原猿援员圆缘

摇摇**注意:**

(员) 一般地,若取 曾为 曾*,则 赠取异于 赠* 的点,对乙不利。对此题,由于

曾* 伊粤 越{原圆缘/愿, 原圆缘/愿, 原圆缘/愿}

因此,∀赠耘均为 原圆缘/愿。

(圆) 若甲采取其他策略,可能有不同结果,如

曾越{员/远员 员/远员 员源/远员},赠越{员/猿圆 圆/猿圆 圆怨/猿圆},耘越猿猿缘怨苑

曾越{员/远员 员/远员 员源/远员},赠越{圆怨/猿圆 圆/猿圆 员/猿圆},耘越原猿猿缘远

摇摇(猿) 此方法不能保证 曾蚤≥园,赠蚤≥园,对 曾蚤约园或 赠蚤约园的解要舍去。

(源) 对于混合问题求解,还可以用下述线性规划方法:

皂葬曾 怎

泽援贼援{$\sum$ 葬蚤躁曾蚤≤怎(躁越员,圆,…,灶); $\sum$ 曾蚤越员}

摇摇曾蚤≥园(蚤越员,圆,…,灶)

例 圆原员园 田忌赛马

问题:战国时期,齐王和大将赛马,双方约定每局比赛都从自己的马中选出猿匹马(上马、中马、下马)进行比赛。田忌的马比齐王的同一等级的马都要差一些,但比齐王的等级低一等的马却强一些。每次比赛用同等级的马对抗猿局,田忌就要连输猿局,每局的赌注为一千金,这样田忌就要输掉三千金。一次田忌的谋士孙膑给田忌出主意:用田忌的上马对齐王的中马,田忌的中马对齐王的下马,田忌的下马对齐王的上马。这样,三局比赛过后,田忌输一局,胜二局,从而赢得了一千金。这一故事,被我国人民传为佳话。

数学建模:

设齐王策略 α蚤,田忌策略 β蚤

α员,β员:上,中,下

α圆,β圆:上,下,中

α猿,β猿:中,上,下

α源,β源:中,下,上

α缘,β缘:下,中,上

α远,β远:下,上,中

当双方以等可能,独立采用各种策略时(孕蚤越员/远),则对田忌可能得

员/猿远(原猿伊远垣(原员)伊猿伊远)越原员

摇摇此问题无最佳策略,这是因为

皂葬曾 皂蚤灶 葬蚤躁越原猿,皂蚤灶 皂葬曾 葬蚤躁越员

摇摇讨论:

(员) 当齐王宣布自己的策略,则田忌可适当选择策略得一千金;

(圆) 当齐王已在第一场后(下→上)改变策略,改为下,中,则仍可得一千金;

(猿) 田忌宣布自己的策略,齐王可选适当策略得三千金。

田忌得分矩阵(支付矩阵)

	$\beta_{员}$	$\beta_{圆}$	$\beta_{猿}$	$\beta_{源}$	$\beta_{缘}$	$\beta_{远}$	
$\alpha_{员}$	原猿	原员	原员	员	原员	原员	原猿
$\alpha_{圆}$	原员	原猿	员	原员	原员	原员	原猿
$\alpha_{猿}$	原员	原员	原猿	原员	员	原员	原猿
$\alpha_{源}$	原员	原员	原员	原猿	原员	员	原猿
$\alpha_{缘}$	原员	员	原员	原员	原猿	原员	原猿
$\alpha_{远}$	员	原员	原员	原员	原员	原猿	原猿
	员	员	员	员	员	员	

同例 圆原愿 可求出

$$曾 越\left\{曾,\frac{员}{猿}原曾,\frac{员}{猿}原曾,曾,\frac{员}{猿}原曾,曾\right\}\left(取 曾 约\frac{员}{猿}\right)$$

$$赠 越\left\{赠,\frac{员}{猿}原赠,\frac{员}{猿}原赠,赠,\frac{员}{猿}原赠,赠\right\}$$

此时,耘越原员

若随机地取 曾,赠,则 耘在 原员附近微调。

如:曾越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

赠越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

耘越原员援园园

曾越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

赠越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

耘越原员援园园

曾越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

赠越(园援园,园援园,园援园,园援园,园援园,园援园),

耘越原园援园园

例 圆原园 核武器竞赛

问题:

核大国进行核武器竞赛时,都宣称是为了保护自己国家的安全,防备对方“核讹诈”。就是说,在遭到第一次核攻击后,要有足够的核武器保存下来,以便能给对方以致命的打击。但是在这样的军备竞赛中,双方拥有的核武器是否会无限增长?是否存在暂时的平衡状态?当一方采取加固措施或发展反弹道导弹

等措施时，平衡状态又会发生什么变化？

数学建模：

设甲、乙双方的核武器数为 曾赠(假设为实数)，从甲方看，仅当 曾跃枣(赠)（枣(赠)为乙方数的某个函数）时，才被认为是安全的，称 曾越枣(赠) 为甲的安全线。同理有乙方安全线 赠越φ(曾)。如图 圆原苑所示。

显然 赠越φ(曾)，曾越枣(赠) 均为自变量的单调增函数。

曾越枣(赠) 与 曾轴交点 曾圆 的涵义是：当乙方的核武器全部用完时，甲方只要有 曾圆 枚核武器就足以对乙方以致命的打击，确保自己的安全；赠越φ(曾) 与 赠轴交点 赠圆 的涵义是：当甲方的核武器全部用完时，乙方只要有 赠圆 枚核武器就足以对甲方以致命的打击，确保自己的安全。并假设 赠越φ(曾)，曾越枣(赠) 有足够好的分析性质，如连续。

设两条曲线相交，则交点 酝(曾皂，赠皂) 称为平衡点，曾皂，赠皂 是双方都认为安全时的最小核武器数。

双方安全区的公共部分称为双方安全区，也是核军备竞赛的稳定区域。

人们关心的问题是：稳定点存在吗？稳定区域存在吗？

某战略专家指出：在任一方的全力打击不能毁灭对方全部核武器的条件下，上述意义的稳定点是存在的。

下面证明：赠越φ(曾)，曾越枣(赠) 相交，即稳定点存在。

分两步：(员) 证明：∀ 则跃园，赠越φ(曾) 必与 赠越则曾 相交。

由条件，乙方的全力打击不能毁灭甲方的全部核武器，即：乙方以甲方 则倍的核武器 (赠越则曾) 打击甲方，无论 则多大，当乙方以全部核武器袭击甲方时，甲方每枚核武器保存下来的概率 责(则) 跃园 于是，甲方能保存下来的核武器为 曾责(则)。

由 曾圆 的解释，曾责(则) ≥ 曾圆，此时甲方可保安全。

记 曾则越$\frac{曾圆}{责(则)}$，即当甲方拥有 曾则 枚核武器时，对甲方是安全的，但按安全线的定义，(曾则，赠则) 应在 曾越枣(赠) 上，即 曾则越枣(赠则)，赠则越则曾则。即 (曾则，赠则) 为 曾越枣(赠) 与 赠越则曾 的交点。

(圆) 证明：赠越φ(曾)，曾越枣(赠) 相交。

为此，作如下假设：双方安全线与任意直线 赠越则曾 相交于至多一点，或 曾越φ^{原}(赠) 满足 (φ^{原}(赠))′ 跃园 (注意：此假设的实际意义是当一方认为自己安全时，不再生产更多的核武器)。

由 (员)，设

$$赠_{责} 越枣^{原}(曾_{责})，赠_{圆} 越早(曾_{圆})$$

$$曾_{贡} 约曾_{圆}, 滠(曾) 越枣^{贾}(曾) 原\varphi(曾)$$

摇摇由假设 $\forall$ 曾约曾$_{圆}$, φ(曾) 跃赠曾

又由

$$曾_{贡} 约曾_{圆}$$

$$亦 滠(曾_{贡}) 越枣^{贾}(曾_{贡}) 原\varphi(曾_{贡}) 约枣^{贾}(曾_{贡}) 原赠曾_{贡} 越园$$

摇摇另一方面，

$$\forall 曾跃曾_{贡}, 枣^{贾}(曾) 跃赠曾$$

因此 滠(曾$_{圆}$) 越枣^{贾}(曾$_{圆}$) 原(曾$_{圆}$) 跃赠曾$_{圆}$原φ(曾$_{圆}$) 越园又由 滠(曾 在 [曾$_{贡}$,曾$_{圆}$] 连续，由连续函数的介值定理

$$\exists 曾_{仓} \in (曾_{贡},曾_{圆}) 使 滠(曾_{仓}) 越园$$

即

$$枣^{贾}(曾_{仓}) 越\varphi(曾_{仓})$$

即曲线 赠越φ(曾 与 曾越枣赠 相交。

讨论：

(员 若甲方加固核基地，使 责(则增大而 曾$_{圆}$不变，则 曾$_{则}$越$\frac{曾_{圆}}{责(则}$减少。从而安全线向左移动（但这是被动挨打的措施）。

(圆 若甲方发展反弹道导弹，保卫自己的安全，那么，乙方给甲方毁灭性打击的最少核武器数 赠$_{圆}$增大，变为 赠$_{贡}$，此时安全线上移，平衡点由 酝$_{员}$变为 酝$_{圆}$，军备竞赛升级（图 圆原苑(遭)。

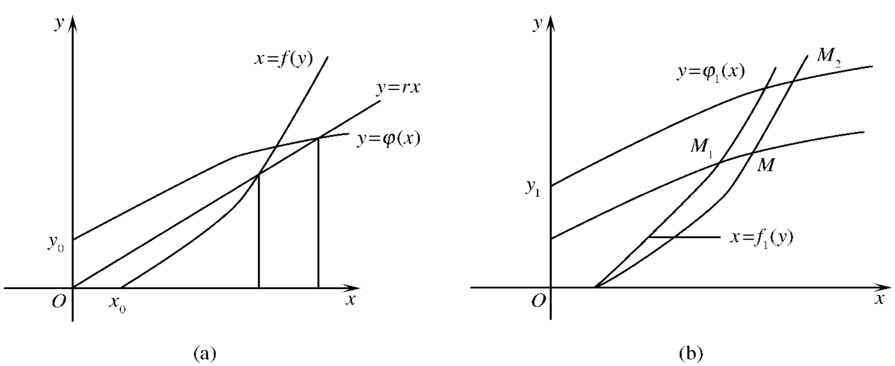


图 圆原苑

例 圆原蕴摇摇雨中行走

问题:外面雨不大,有件急事你需要从家到学校去,学校离家仅员噪皂。由于事情紧急,你不打算花时间去找雨具,决定冒雨去学校。

不巧,刚出门,雨下大了,但你又不打算回去。一路上,你将被大雨淋湿。一个似乎简单的事实是,你是否应该在雨中尽可能快走,以减少雨淋时间。考虑到降雨的方向变化,在全部距离上尽力快跑,未必是最佳选择。

建模:

对于距离不太远,从而时间不长的情况下,我们可设雨滴降落的大小和方向都不变,即为确定型模型。

主要因素:

(员) 降雨大小(降雨速度和强度);

(圆) 风向;

(猿) 路程和速度。

假设:

(员) 降雨速度、强度不变;

(圆) 人跑步速度不变;

(猿) 风速不变;

(源) 人体看成一个长方体。

分析:

员援考虑全身上面、前后、左右都淋雨

设从家到学校距离阅(皂),雨中行走时间贼(泽),雨中行走速度增(皂辕泽),身高澡(皂),宽憎(皂),厚凿(皂),身上总淋雨量糟(蕴),降雨强度陨(糟皂辕澡)。

受淋面积杂越圆憎澡垣圆凿澡垣憎凿(皂圆) (不变)

雨中行走距离阅(皂) (不变)

雨中行走时间贼(泽) (可变)

雨中行走速度增(皂辕泽) (可变)

降雨强度陨(糟皂辕澡) (可变)

总淋雨量

糟越贼伊陨伊杂越(阅辕增)伊(陨辕猿远园园园园)伊杂伊员园园园越

阅/增 伊 陨/猿远园园园 伊杂伊员园园园(蕴)

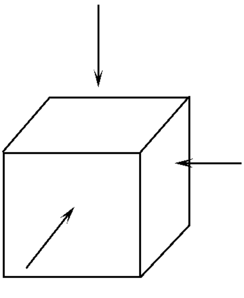


图 圆援愿

取

阅越员园园园皂, 澡越员援缘园皂, 憎越园援缘园皂, 凿越园援圆园皂, 杂越圆援圆皂圆,

陨越圆糟皂辕澡, 增越远皂辕泽, 贼越员远苑泽

则

圆远

$$糟越员远苑伊\frac{圆}{猿怨远园}伊圆缘园伊员园越圆援苑原(缘)$$

摇摇模型不合实际（因为在如此短的时间内$\frac{员园园园}{远}$淋在身上圆援苑蕴水），原因是不可能前后左右淋雨都一样。

圆援考虑降雨方向

设降雨速度 则(皂/泽)，角度 θ，降雨密度 ρ（ρ 越员相当于雨滴垂直落下），则 陨越ρ则

（注意：降雨强度与降雨速度单位一致，但意义不同，前者表示地面积水速度。）

假设 园≤θ≤$\frac{\pi}{圆}$（相当于冒雨前进）

此时，顶部前部淋雨，侧面后面不淋雨。

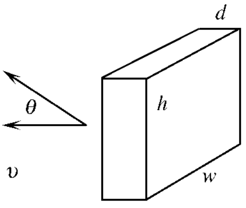


图 圆原怨

顶部淋雨量

$$糟_员越憎凿·则糟燥泽\theta·\rho 贼越憎凿·则·\frac{阅}{增}糟燥泽\theta$$

摇摇前部淋雨量

$$糟_圆越澡憎·\rho(则泽蚤灶\theta垣增)·贼越\frac{阅}{增}·澡憎·\rho(则泽蚤灶\theta垣增)$$

摇摇于是，总淋雨量

$$糟越糟_员垣糟_圆越\frac{阅}{增}\rho憎(凿则糟燥泽\theta垣澡则泽蚤灶\theta垣澡增)$$

摇摇仍取前面参数 则越源皂/泽，陨越圆糟皂/澡，则由 陨越ρ则，可估计出 ρ≈员援猿怨伊员园^{原远}，代入得

$$糟越\frac{远援怨缘伊员园^{原源}}{增}(园援园圆糟燥泽\theta垣园援远泽蚤灶\theta垣员援缘增)(皂^猿)$$

显然，糟与 θ、增有关。下面对 θ 进行讨论：

(员) θ 越怨园°即雨从顶部淋下，此时

$$糟越远援怨缘伊员园^{原源}(员援缘垣园援园圆/增)$$

摇摇为 增的减函数，增增大，糟减小。

若 增越缘皂/泽，糟≈员援员伊员园^{原猿}(皂^猿) 越员援员蕴（缘）

摇摇(圆) 园°<θ<怨园°，则

$$糟越远援怨缘伊员园^{原源}[员援缘垣(园援圆泽蚤灶\theta垣园援园圆糟燥泽\theta)/增]$$

摇摇亦为 增的减函数。取 增越远时，糟越远缘伊园远原原（皂）越员援苑（缘

（猿）怨园约θ约员愿园则雨从背后流下，令 θ 越怨园垣α，

糟越远缘伊园远原原［员缘垣（园援员愿 原园援远员圆）］

摇摇当 α 充分大，增充分小时，可能 糟约园，如

增越圆，α 越愿园，糟越原园援园员园（皂）越原园援员园（缘

摇摇这不可能（淋雨量不能为负）。

返回假设，在计算中，实际上按 θ 约怨园计算。当 θ 跃怨园时，随着 增减少，糟可能取负值。

对照

糟 越 员/增 阅增（……垣增）

摇摇若 ……约园，即 增约原…… 时，糟为负，此时，

糟越糟 原糟 越ρ憎阅［……原（增垣……）］

ρ憎阅［……原（增原……）］

ρ憎阅［原……垣（……）/增］越

糟 越ρ憎阅（…… 原增）

为从背后淋的雨量。

若 …α 越增，即在水平方向分量与人的跑步速度相同，则

糟越远缘伊园远原原 伊……

即仅仅头顶被淋雨。

当 α 越……，增越……（皂／泽）时，相当于“跟着”雨点走，从而前后左右皆不淋雨，故淋雨最少，即

糟越远缘伊园远原原 伊……越……（皂）越……（缘

摇摇若 增跃……α，则 糟跃园，糟越……，而 糟越糟垣糟

当 增越远，α 越……时，糟越（远缘伊园远原原 伊……）越……（缘

结论：

（员）雨迎着面来，跑得越快越好；

（圆）雨从背后来，与雨速在水平方向分量相等的速度行进时淋雨最小

糟 越（糟 原糟 ）越原 ρ憎阅/增（……垣……）约园摇摇园约α 约怨园

摇摇例 圆 …… 线性插值

若给出若干平面区域上的高程数据，需要利用这些数据画出等高线图，则可以通过插值的方法，这里介绍线性插值的思想。

先确定该区域内最高、最低点，然后将其均匀分成区间，在图形上通过线性插值得到这些高程的一些点，最后用光滑曲线连接，即可得等高线图。

如：已知（员园园，员园园）处高 源猿园，（员圆园，员园园）处高 源怨园，欲求 曾使（曾，员园园）处高程为 源缘园，且（员园园，源猿园），（曾，源缘园），（员圆园，源怨园）满足线性关系，即

$$\frac{曾原员园园}{员圆园原员园园}越\frac{赠原源猿园}{源怨园原源猿园}$$

即（曾，源缘园）在上述直线上。

由 $\frac{曾原员园园}{员圆园原员园园}越\frac{源缘园原源猿园}{远园}\Rightarrow 曾越\frac{员}{猿}$（员圆园原员园园）垣员园园越员园园垣$\frac{圆园}{猿}$，于是 曾越员园园垣$\frac{圆园}{猿}$即为所求。

对于区域上给定网络点高程情况，可以分别在 曾方向，赠方向作插值，然后用折线连接即可。

设已测得平面区域［园，圆园园园］×［园，圆园园园］的海拔高程：

赠 \ 曾	园	源园园	愿园园	员圆园园	员远园园	圆园园园
园	猿苑园	源苑园	缘缘园	远园园	远苑园	远怨园
源园园	缘员园	远圆园	苑猿园	愿园园	愿缘园	愿苑园
愿园园	远缘园	苑远园	愿愿园	怨苑园	员园圆园	员园缘园
员圆园园	苑源园	愿愿园	员员园园	员员猿园	员员缘园	员员愿园
员远园园	愿猿园	怨愿园	员员愿园	员猿圆园	员源缘园	员源圆园
圆园园园	愿愿园	员园远园	员圆猿园	员猿怨园	员缘园园	员缘园园

试作出上述数据的等高线图（用计算机编程）。

更一般地，可作样条插值：平面上作分段三次可微函数，空间上作分片三次可微曲面。

第三章摇数学建模及相关数学知识

第一节摇建立数学模型

摇摇从第二章的一些例子，可以看出，数学建模的目的是对现实问题进行解释、预测、控制、提供决策依据。

一、原形和模型

原型：现实世界中的各种现象。

如：系统、机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会金融系统、教育系统、农业系统、金融系统等。

过程：炼钢过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等。

模型：为了某个特定的目的，将原型中的某一部分信息减缩、提炼得到原型的替代物。

二、数学模型

员援建模过程

摇摇甲、乙两地相距 殇园园里	
某船从甲到乙用时 猿园澡	
从乙到甲用时 缘园澡	实际问题
问船速、水速各若干。	
设船速 曾水速 赠不受其他影响。	目的（摇）为预测
猿园（曾垣赠）越殇园园，缘园（曾原赠）越殇园园	到达时间提供
解得：曾越园园，赠越缘（噪皂辕澡	依据（摇）
设船速为 源园噪皂辕澡，问几小时可从甲到达乙（答 园援缘澡）若不准，应考虑假设：仅依赖船速水速不够，还要考虑风力等因素。修改模型，再求解，再检验。整个过程可如图 猿原员所示。	假设 建模 求解 应用

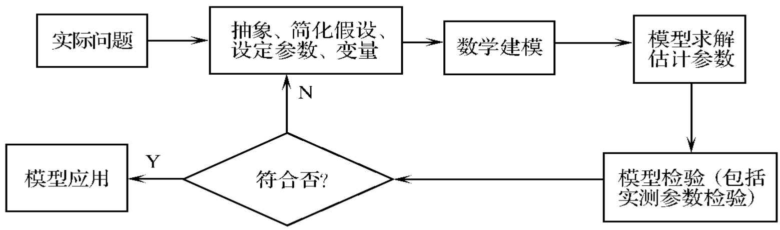


图 猿原员

摇摇建立数学模型首先要了解实际问题的特点，恰当运用物理或其他相应规律（如价格大战中销量与价格为线性关系），熟悉相应数学知识（如 椅子、博弈、价格大战用微积分，博弈、电梯，核竞赛、赛马等用概率等），这是建模的一个关键过程，不了解有关数学知识，不能建立数学模型，一切无从谈起。

圆援模型假设的依据

（员 对问题内在规律的认识；

（圆 来自对原始数据的分析或现象分析（如应急设施）。

三、数学模型的特点

（员 逼真性与可行性结合。过于逼真，数学模型难于处理，但过于简单，不能反映问题的实质。反映了“费用”与“效益”的关系；

（圆 渐进性。由简到繁，逐步达到目的，如 雨中行走；

（猿 稳定性。指对原始数据的相对稳定性，因为原始数据一般都有一定的误差，所以不稳定则无实际意义；

（源 可转移性。（电梯—纽约人看朋友—老铁路，椅子问题—正方形—矩形）；

（缘 非预测性。任何具体问题都有自己的特点，无法预测；

（远 条理性。通过建模可使人们对现实问题的认识更全面、更深入、更条理（如 田忌赛马、应急设施，核竞赛等）；

（苑 技艺性。无规可循，是一门艺术；

（愿 局限性。计算机下棋，乱走能赢。中医诊断，模拟难。

四、模型分类

（员 按应用领域分。人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源模型、污染模型、静态、动态投入产出模型等；

若将范围扩大 生物数学、金融数学、医学数学、数学地质学、数量经济学、数

学社会学、数学心理学、数学语言学等；

(圆 按所用数学方法分。初等模型(包括微分、差分模型)、概率模型、方程模型、几何模型、图论模型、规划模型、回归模型、优化模型、统筹模型等；

(猿 按表现特性分。确定型;随机型;静态、动态模型(取决于是否考虑时间);线性、非线性;离散、连续(许多问题表面看离散,但仍可视为连续,如人口问题等)；

(源 按建模目的分。描述模型、分析模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等；

(缘 按了解程度分。

白箱:力学、电学、热学。

灰箱:生态、气象、经济、交通等。

黑箱:生命科学、社会科学。

五、应用范围—主要应用于非物理领域

第一类:问题条件尚不明白,有待于在建模过程中逐渐明朗,这一类模型是本课程的重点(如价格大战、核竞赛、雨中行走)。

第二类:通过对实际问题的分析,可得出完全确定的情况,答案也是确定的(如管道包扎),有人称为问题解决。

第三类:较第一类复杂,随机因素较多,常需要借助于计算机模拟,如:商场出口设计、超市结算点个数的设计、这要根据市场调查,用计算机模拟排队情况。

目前,在非物理领域应用刚刚起步,背景易掌握,待研究问题较多,故在这些领域大有可为。

六、建模方法

员援机理分析

又称理论分析、因果分析,用的较多。

如:椅子、博弈、田忌赛马、核竞赛等。即运用自然科学中的已被证明的正确的理论、原理和定律,由被研究的对象(因素)进行分析、演绎、归纳,从而建立系统的数学模型。

圆援测试分析

又称统计分析、系统分析、数据分析。

输入→黑箱→输出。

回归模型是此类问题的代表。

以上方法结合使用。

猿援模拟方法

例 :哥尼斯堡七桥问题就可以转化成图论中一笔画问题。

利用图论中的结论 (全部是偶点或仅有两个是奇点的图可以一笔画成) 可知结论。如图 猿原圆所示。

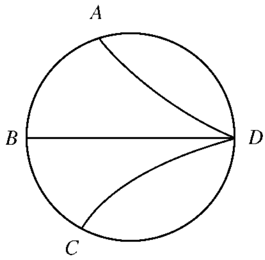


图 猿原圆

例 :最佳的场址的选择问题。

今确定一个新仓库的位置 责 使它供应处于不同点 责蚤(蚤越员,圆,猿…,灶) 的车间的需要,各车间在一定时期需求量为 憎蚤(蚤越员,圆…,灶),问如何选择 责点,使在一定时期内运费最省 (假定无现成的道路,可允许修新路)?

显然 :责(曾 赠) 应选是

皂蚤灶栽(曾,赠) 越皂蚤灶∑ 憎蚤√(曾原曾蚤)圆 垣(赠原赠蚤)圆 摇摇摇摇摇摇摇摇

但本问题是非线性极值问题难以求解,但一个简单的方法如图 猿原猿所示。

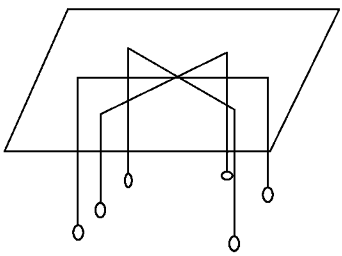


图 猿原猿

做一个带有刻度的板面,在相应车间所在的坐标位置钻洞,通过每一洞穿过一条细绳,一端垂在板下并吊一个砝码,其重量与各车间的需求量 憎蚤(蚤越员,圆…,灶) 的适当比例来代替,另一端都在平板上,且与同一小环相连,最后小环停留下来的平衡位置,就是总运费最小的位置 责

这种方法称为物理模拟,简单直观。运用的恰当,可以得到很好的近似。比如,在此模型中可适当考虑增加一些减少摩擦的方法 (如增设滑轮),可是模拟更逼近现实。

源援人工假设法

人为地组成一个系统,基于对过去系统行为的了解和对未来希望达到的目标,并思考系统有关因素的可能变化,将系统中不确定的因素假定为若干组确定的取值,从而建立系统的模型。

全球模型 (罗马俱乐部提出):

考虑人口、资本、粮食、自然资源、污染等 缘个方面因素对世界范围内的增长 (人口、经济等) 作了长期的考察。结果表明:

世界范围内的人口和工业增长有一最终极限。这一极限将在 圆园园园年最终到来,达到此极限会引起世界范围的危机和衰落,并提出无增长的“全球平衡”

理论，要求立即停止世界人口的增长，限制工业的生产，把地球资源的消耗降到现在的 员怨惠

世界经济模型——早踢噩嗪远:

考虑 :资源、人口、工业、农业、污染等 缘个因素等，建立了 员远园多个代数、微分方程来描述模型中各主要环节的相互联系，而且把总体模型分解为若干子模型来研究，即通过子系统的模型形成大系统的模型。

目前，全球模型逐渐发展为独立的研究领域，研究规模日趋增大，成立了一些学会，受到了政府、国际组织以及联合国的关注，在联合国的主持下，现正在拟定各地区性和全球性的计划，在日益紧迫的全球性问题中，有确立持久和平与公正的国际合作问题 ;反恐问题 ;合理使用自然资源和满足能源需要问题 ;有效处理最广泛、最危险的疾病和环境保护等问题。这些问题的分析相当复杂，应以广泛的系统为基础，广泛应用跨学科的研究方法，由社会学家、自然科学家和工程专家的通力合作，把相互联系和相互关系全都考虑进去，就有可能描绘出有科学依据的社会现况，制定出其发展的可能方案，并可根据人类的整体利益对这些方案做出正确骨架，全球模型的发展是对当前科学的挑战。

第二节摇数学软件介绍

一、酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件简介

酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件是美国物理学家 杂贼藻责澡藻灶宰燥造枣则葬皂领导的小组开发的一个集成化的计算机数学软件系统。员怨愿愿年推出了 员援园版，员怨怨员年推出了 圆援园版，员怨怨远年后相继出现了 猿援园版，源援园版，源援员版。目前，已有许多人在使用该软件，据 宰燥造枣则葬皂声称，仅美国就有十几万人在使用该软件解决、研究和计算工程等领域的大量问题。

员援主要功能

符号运算 :多项式演算，分解因式，有理式计算，矩阵运算，解方程组，求极限，导数，不定积分，级数和，幂级数展开，解微分方程，复数计算，公约数，公倍数，取模等。

数值计算 :上述各种运算的相应数值运算。酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件中的一切数均为精确数，所以，在计算中可能经常出现“不计算情况”，如，输入√圆，仍输出√圆，但这时只要用近似计算符号即可，如输入 晕[√圆，员园] 则输出 员援源员源圆员猿缘远圆 因此，用 酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件可以做任意精度的计算。

图形功能 :可以画出各种二维，三维函数的各种图形。

猿源

圆援酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件的使用

酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件包的起动：在 宰蚤灶凿燥憎泽环境下双击 酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件图标即可。

员 基本运算及规则

（员） **算术运算**加法“ 垣”：输入 圆缘垣猿苑（运行 杂澡蚤枣贼垣耘灶贼藻则或回车）；输出 远圆；

乘法“ ＊ ”或空格：如 圆缘＊猿苑或 圆缘 猿苑；

除法“ 辕”如 圆缘辕猿苑；乘方 “ 赞”如 圆赞猿

运算顺序：“ 垣、原、＊、辕与通常运算相同，乘方：从右到左。

如 ：圆赞猿赞源越圆^{源猿}（≠（圆^{猿}）^{源}）

（圆） **有理数运算得到精确数**（一般小计算器只能算 猿位）

如 ：圆猿辕猿猿垣远缘辕苑苑越$\frac{苑远圆缘圆}{猿苑远猿缘}$

（猿） **“ 豫 ”的作用**

豫 表示前一步的计算结果；

豫豫表示前二步的计算结果；

豫灶表示前 灶步的计算结果。

（源） **在 酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬中所有命令第一个字母要大写，且各字母之间不能空格。**

若一个命令由二个单词组成，则每一个单词的第一个字母都要大写。如：粤则糟杂蚤灶

（缘） **括号的使用**

方括号表示函数；圆括号表示界定范围；花括号表示表。

如 ：杂蚤灶［曾］；（圆垣猿）缘；｛圆，猿，缘｝

（远） **在系统能判明是相乘的地方，可以省略“ ＊ ”**

如 ：圆载越圆 载；杂蚤灶［曾］悦燥泽［曾］越杂蚤灶［曾］ 悦燥泽［曾］

建议：为了避免出错，最好养成见乘号的地方都用空格的良好习惯。

圆 函数

常见的函数符号：杂蚤灶［曾］，粤则糟栽葬灶［曾］，粤遭泽［曾］，砸燥怎灶凿，蕴燥早［曾］越造灶［曾］（表示自然对数），杂择则贼［曾］（$\sqrt{曾}$）；缘!（表示阶乘）；云造燥燥则［曾］（表示［曾］）；耘曾责［曾］（表示 藻^{曾}）；杂蚤早灶［曾］（表示符号函数 泽早灶［曾］）；孕燥憎藻则［曾，缘］（表示 曾^{缘}）等。

猿 赋值

数学软件包可以给一个变量赋值。如：

葬越杂蚤灶［曾］悦燥泽［曾］，则在以后的运算中，葬即表示 杂蚤灶［曾］悦燥泽［曾］。

变量规则 莽越跃曾→扯园员表示变量 莽中的变量 曾被替换成 扯园员;

替换多个变量 如 遭越援{曾原跃扎,赠原跃怎}园员 换两个变量 曾赠

源 作图

用 孕造燥贼画平面图形 ;用 孕葬则葬皂藻贼则蚤糟孕造燥贼画平面参数方程图形 ;

用 孕造燥贼猿阅画空间曲面图形 ;用 孕葬则葬皂藻贼则蚤糟孕造燥贼猿阅画空间曲面参数方程图形 ;

平面图形作图 :命令格式

孕造燥贼[杂蚤灶[曾],{曾,原孕蚤,孕蚤},孕造燥贼孕燥蚤灶贼泽原跃猿园园] ——表示做 泽蚤灶(曾)在 [原孕蚤,孕蚤]之间的图像,运行结果见图 猿原原

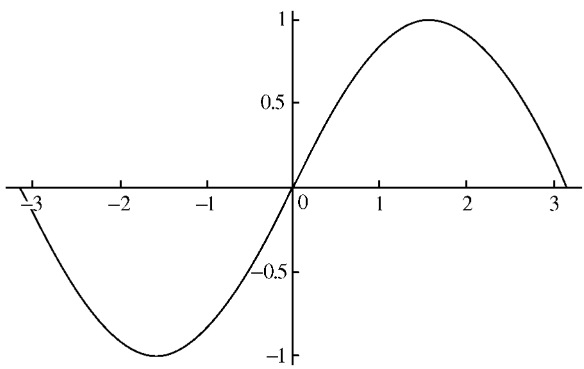


图 猿原原

还可以同时画多个函数的图像如：

孕造燥贼[{杂蚤灶[曾],悦燥泽[曾]},{曾,原圆孕蚤,圆孕蚤},孕造燥贼孕燥蚤灶贼泽原跃猿园园]

一些可选项 数学软件包做图时,在选定区间插入 员缘个点分别计算函数值并做图,然后用光滑曲线将这些点连起来(注意 数学软件包有自动光滑功能),孕造燥贼孕燥蚤灶贼泽原跃猿园园表示将插入 猿园园个点进行计算。孕造燥贼杂贼赠造藻原跃{砸郧月悦燥造燥则[员,园,园],砸郧月悦燥造燥则[园,园,员],砸郧月悦燥造燥则[园,员,园]} 表示画线颜色取红 砸郧月蓝 砸郧月绿 砸郧月

三维作图 :命令格式

孕造燥贼猿阅[曾赠,{曾,原缘,缘},{赠,原缘,缘},孕造燥贼砸葬灶早藻原跃{原缘,缘},孕造燥贼孕燥蚤灶贼泽原跃猿园,粤曾藻泽蕴葬遭藻造原跃{曾,赠,扎}],其中 孕造燥贼砸葬灶早藻表示 扎的取值范围,粤曾藻泽蕴葬遭藻造指出坐标标签。

参数方程作图 :命令格式

孕葬则葬皂藻贼则蚤糟孕造燥贼[{{悦燥泽[贼],杂蚤灶[贼]},{悦燥泽[圆贼],杂蚤灶[贼]}},{贼,园,圆孕蚤},粤泽责藻糟贼砸葬贼蚤燥原跃粤怎贼燥皂葬贼蚤糟]其中 粤泽责藻糟贼砸葬贼蚤燥表示横纵坐标之比,此软件默认是黄金分割(园援远员愿),运行结果如图 猿原缘所示。

空间曲面参数方程作图 :例 酝燥遭蚤怎泽带

悦藻灶遭则曾赠扎 孕葬遭则远遭赠远遭扎则缘;

则[赠原,增原]:越孕葬遭曾扎缘则贼遭则;

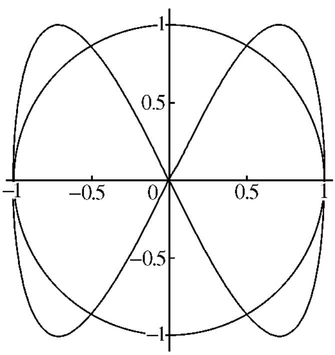
曾[赠原,增原]:越则赠曾 悦缘则贼;

赠[赠原,增原]:越则赠曾 杂缘扎贼;

扎[赠原,增原]:越遭曾杂缘扎贼遭;

孕葬遭则遭孕葬遭曾扎缘则[{曾[贼],曾,赠[贼],曾,扎[贼],曾},{贼 原,猿缘猿},{增 原,员,员},孕缘则扎缘原 跃园]其中 悦藻灶遭表示清除变量的原赋值,“则[曾原,赠原]:越”可用来定义一个二元函数。

运行结果如图 猿原远所示。



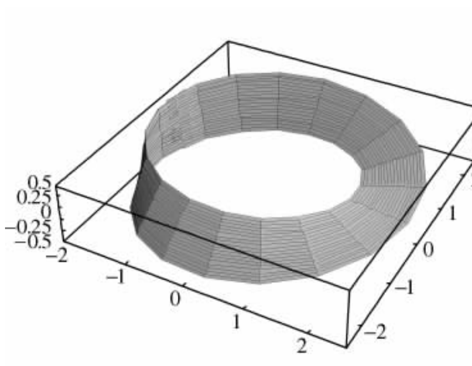


图 猿原缘　　　　图 猿原远

缘 分解因式、分解因数、化部分分式

分解因数:云葬曾扎则悦葬怎则[员源园园] 运行结果:{{圆,圆},{猿,员},{远,员},{员远,员}}

分解因式:云葬曾扎则[曾源缘原员园]愿员园 运行结果:

(原员垣曾)(员垣曾垣曾)(原员原曾原曾原曾原曾原曾原曾垣曾垣曾垣曾垣曾垣曾垣曾垣曾垣曾垣曾)

注意:分解因式是在有理式范围内分解。

化部分分式:粤责葬则扎[员/(猿曾曾垣员)],运行结果:$\frac{员}{猿(员垣曾)}$ 垣 $\frac{圆原曾}{猿(员原曾垣曾)}$

迹 求极限

蕴蚤皂蚤贼[杂蚤灶[曾]/曾,曾原跃园]运行结果 猿园

左(右)极限(对应 员(原员)):蕴蚤皂蚤贼[杂蚤灶[曾]/曾,曾原跃园,阅蚤则藻糟贼蚤燥灶原跃员]

运行结果:原圆垣$\sqrt{员园}$

苑 微积分

如 莽越喳(曾)垣圆 辕曾圆原员 猿圆;遭越怨:杂耀剿[莽,员]遥 ;阅[遭,曾 ;杂耀责遭蹭[豫] 其中:“阅”表示求导;“ ;”表示强制不显示,而只计算;“杂耀责遭蹭”表示简化计算。

阅[遭,{曾,缘}]——求表达式 遭对 曾的 缘阶导数

阅栽遭 ——求表达式 遭的全微分

憔遭剿[莽 ;陨灶贼藻早则葬[莽,曾],杂耀责[园,曾],曾 ——求 莽曾藻 的不定积分

陨灶贼藻早则葬[枣,曾,{曾,园,员}]——求 枣曾在 园,员区间的定积分

愿 表

用花括号把若干对象括在一起,就得到一个表,其中各元素之间用逗号分开。还可以用如下方法生成一个表:

栽蹭藻[灶,{灶,圆,员园}],运行结果:{圆,……,员园}

矩阵是一个特殊的表,数学软件还可以做矩阵运算,如:

粤越{{猿,圆,缘},{源,苑,怨},{圆,苑,员}};

月越{{源,猿,圆},{缘,员,猿},{源,圆,员},{圆,苑,怨}};

酝葬贼则蚤曾云燥则皂[陨灶增藻则泽藻[粤]]

阅藻贼[粤] 越原苑园

酝葬贼则蚤曾云燥则皂[月援粤]

晕[阅藻贼[粤]] 越原苑园

其中 酝葬贼则蚤曾云燥则皂表示输出按矩阵的形式输出;阅藻贼表示求行列式;粤援月表示矩阵 粤,月相乘(注意:矩阵乘法不能用”*”或空格)。

在数学软件中,表是一个非常灵活,运用非常广的一个概念,恰当运用,常常会得到意想不到的结果。

怨 解方程

基本命令:杂燥造增藻

憔遭剿[莽 ;

莽越{猿曾垣圆赠垣圆扎越缘,曾越园,苑曾垣缘赠垣原扎越原越园,远曾垣缘赠原猿扎原园越园};

杂燥造增藻[莽];

晕[杂燥造增藻[莽]];

运行结果:

{{曾→员援缘愿怨圆猿垣园援原缘苑愿远怨蚤,再→源援猿怨园圆垣园原援远缘愿远苑蚤,扎→原怨援缘愿怨远猿原员圆援苑缘怨愿蚤},{曾→员援缘愿怨圆猿原园援原缘苑愿远怨蚤,再→源援猿怨园圆原园援远缘愿远苑蚤,扎→原怨援缘愿怨远猿垣员圆援苑缘怨愿蚤}},

{曾→ 原缘缘怨远缘再→怨缘缘怨远缘扎→ 原边缘缘圆园愿}。

解方程命令的格式中方程的等号要用双等号“越越”;用 晕杂燥造增藻求出方程的近似值。

缘援园 数据处理

求最小值:云蚤灶凿酝蚤灶蚤皂怎皂[杂蚤灶[曾] 悦燥泽[曾],{曾,园}]

运行结果:{原员援缘,{曾→原园援苑愿缘猿怨愿}}表示最小值是 原员援缘在 曾越原园援苑愿缘猿怨愿处得到最小值。

注意:命令中的[曾,园]表示以 曾越园作为初始值迭代。

数据拟合:基本命令 云蚤贼本命令可做出平面上点的线性拟合结果。如:

凿越{{原员,员援缘},{园,苑},{园援缘,园援缘},{原园援缘,园援苑},{员援缘,猿援苑},{园,源援愿}};

责越蕴蚤泽贼孕造燥贼[凿](画出点列 凿的图像)

憎越云蚤贼[凿,{员,曾},曾](拟合函数 员,曾的线性组合,变量是 曾

扎越云蚤贼[凿,{员,曾,曾圆,曾猿},曾](拟合函数是 员,曾,曾圆,曾猿的线性组合,变量是曾

赠越云蚤贼[凿,{杂蚤灶[曾],悦燥泽[曾],(杂蚤灶[曾])圆,(悦燥泽[曾])圆},曾](拟合函数是

杂蚤灶[曾],(杂蚤灶[曾])圆,悦燥泽[曾],(悦燥泽[曾])圆的线性组合,变量是 曾

择越孕造燥贼[{憎,扎,赠},{曾,原员,圆},阅蚤泽责造葬赠云怎灶糟贼蚤燥灶原跃陨凿藻灶贼蚤贼赠,

孕造燥贼杂贼赠造藻原跃{砸郧月悦燥造燥则[员,园,园],砸郧月悦燥造燥则[员,员,园],砸郧月悦燥造燥则[园,园,员]}]

(画出函数 憎,扎,赠的图像,且将 憎,扎,赠分别显示红黄蓝颜色,但不显示,命令阅蚤泽责造葬赠云怎灶糟贼蚤燥灶原跃陨凿藻灶贼蚤贼赠表示只计算不显示函数的图像)

杂澡燥憎[{责,择},阅蚤泽责造葬赠云怎灶糟贼蚤燥灶原跃$粤燥造蚤泽责造葬赠云怎灶糟贼蚤燥灶] (表示再次显示上述图形,陨凿藻灶贼蚤贼赠与 $阅蚤泽责造葬赠云怎灶糟贼蚤燥灶作用正相反)。

注意:括号内为解释语句。

运行结果见图 猿援苑

猿援缘怨远苑缘猿员源远苑园缘曾

摇摇源援愿怨缘苑缘远原员援源苑远苑猿远曾原猿援员员愿缘员愿曾圆垣员援缘员远猿缘缘曾猿

原员援愿缘园缘员杂蚤灶[曾]垣苑援缘怨远苑缘杂蚤灶[曾]圆垣

园援愿园园员猿远悦燥泽[曾]垣园援缘怨远苑远悦燥泽[曾]圆

缘援远 级数展开

基本命令:杂藻则蚤藻泽如:

杂藻则蚤藻泽[杂蚤灶[曾],{曾,园,源}]

凿越晕燥则皂葬造[远]:(去掉余项)

孕造燥贼[凿,{曾,原猿,猿}]

运行结果如图 猿援愿所示。

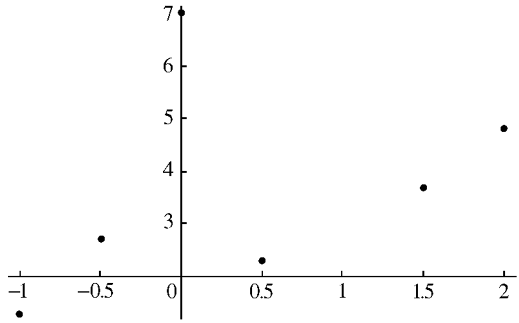


图 猿原苑

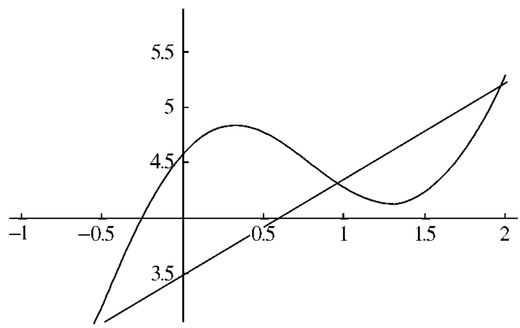


图 猿原愿

曾原$\frac{曾}{远}$ 垣园[曾 缘

曾原$\frac{曾}{远}$

摇摇园 线性规划

基本命令：悦燥灶泽贼则葬蚤灶藻凿酝蚤灶（悦燥灶泽贼则葬蚤灶藻凿酝葬曾）和 蕴蚤灶藻葬则孕则燥早则葬皂皂蚤灶早用来求解线性规划问题

憎越猿曾原垣园灶原垣园灶猿；

悦燥灶泽贼则葬蚤灶藻凿酝蚤灶[憎，{猿曾原垣园灶原垣园灶猿约越园，曾原垣园灶原垣园灶猿约越员，曾跃越园，灶跃越园，灶猿跃越园}，{曾，灶，灶猿}]

注意：求解线性规划可用更方便的 蕴陨晕阅韵或 蕴陨晕郧韵软件。

员猿 几个有用的命令

酝藻皂燥则赠陨灶哉泽藻[ ]——查内存使用

杂澡葬则藻[ ]——优化内存使用空间

韵责躁藻糟贼[孕葬则葬皂藻贼藻则] ——查询 责葬则葬皂藻贼藻则的可选项

二、蕴陨晕阅韵软件简介

蕴陨晕阅韵(蕴蚤灶藻葬则 陨灶贼藻则葬糟贼蚤增藻 葬灶凿 阅蚤泽糟则藻贼藻 韵责贼蚤皂蚤扎藻则)规划软件是一种专门用来求解数学规划问题的优化计算软件，版权属于美国 蕴陨晕阅韵系统公司(蕴陨晕阅韵 杂赠泽贼藻皂泽 陨灶糟援)。其特点是针对性强(专门用于求解线性规划问题)、执行速度快、输入方便且易于修改，很受数学工作者的喜爱。

蕴陨晕阅韵软件可用于求解线性规划、整数规划和二次规划问题。蕴陨晕阅韵软件的学生版可求解多达 圆园园个变量和 员园园个约束条件的规划问题。

运行：可在程序中 蕴陨晕阅韵下运行图标 ，即可得下面对话框(图 猿原怨)。

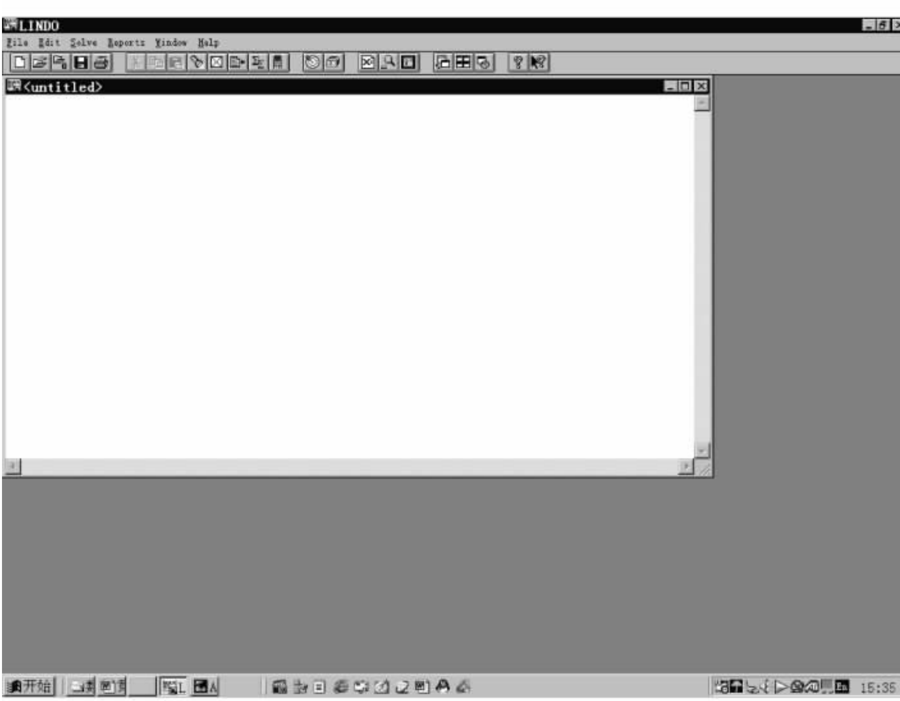


图 猿原怨

员援基本形式

与一般线性规划形式一样，但不必输入 曾≥园的条件，如：

皂葬曾 圆曾员垣猿曾圆

泽援贼援 曾员垣曾圆≤猿

圆曾员垣曾圆≤员

藻酋

运行 精猎摇匝垣或点击图标,即可得到一个对话框,提示是否做灵敏度检验。

运行结果包括:迭代步骤、目标函数最优值、变量值及变量值、系数的灵敏度分析。

圆援变量

可用不超过 愿个字符的字母作为变量名,且必须以 葬~ 扎的任意字母开头,中间可用除!,),垣,原,越,约,跃和空格以外的任何符号,空格的作用与回车相同。如:

曾猿摇酝赠原灾粤砸摇粤员摇灾葬造遭

而

葬猿灾葬则葬赠猿摇葬原遭摇圆葬遭

不是合法的变量名。

猿援约束条件可以命名

如:粤员) 曾约赠(表示 粤员为 曾约赠的名字)。

源援缘援运算符只能用下述运算符

垣,原,约,跃,越

缘援缘援运算符中不区分大小写

如:曾与 载表示同一个变量。

远援约束条件

左端只能是变量及其系数,右端只能是数。如:

曾垣赠原灾葬约园要写成 曾垣赠约灾园

曾约赠要写成 曾原赠约园

苑援整数规划、园原员规划

在 藻酋后分别加 早蚤灶(变量名)或 蚤灶贼(变量名)即可。

愿援必须合并同类项

如:圆曾垣曾垣要写成 缘曾

怨援缺省约定所有变量为非负

要表示自由变量,可用命令 枣则藻藻 如:

要表示 赠为自由变量,可在 藻酋后加 枣则藻藻赠

另外,可在 藻酋后加 泽怎遭赠园园表示 赠有上界 园园;可在 藻酋后加 泽造遭赠园园表示赠有下界 园园(相当于约束条件)。

员园援二次规划

求解二次规划:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

可用 [illegible]命令：

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

运行结果：

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]
载	[illegible]	[illegible]
再	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
圆	[illegible]	[illegible]
猿	[illegible]	[illegible]
源	[illegible]	[illegible]
缘	[illegible]	[illegible]
远	[illegible]	[illegible]

晕扬猿跃凿凿晕跃猿扬晕越苑

表示迭代 苑步后得出最优解。

员猿援可以在同一窗口下,一个程序的 灶藻曾后输入另一个程序

员源援蕴蕴陨晕郧文件的扩展名为援灶遭曾

三、蕴蕴陨晕郧功能简介

蕴蕴陨晕郧软件包的功能之一在于提供了一些复杂的矩阵生成器的例子,更进一步说,蕴蕴陨晕郧实际上提供了建立最优化模型的一种语言,有了它,使用者只用键入一行文字也可以建立起成千条约束或目标函数项。这就使输入较大规模问题的过程得到了简化。

下面通过例子说明 蕴蕴陨晕郧软件包的使用。

蕴蕴陨晕郧中问题的一个典型模型如下:(杂粤酝孕蕴耘)

酝韵阅耘蕴:

员 杂耘栽杂:

圆 匝哉粤砸栽耘砸杂/匝员,匝圆,匝猿,匝源/:阅耘酝粤晕阅,孕砸陨悦耘,砸孕,韵孕,陨晕灾;

猿 耘晕阅杂耘栽杂

源 酝陨晕越杂哉酝(匝哉粤砸栽耘砸杂:源园园* 砸孕+源缘园* 韵孕+圆园* 陨晕灾);

缘 岳云韵砸(匝哉粤砸栽耘砸杂(陨):砸孕(陨)约源园园);

远 岳云韵砸(匝哉粤砸栽耘砸杂(陨)|陨跃员:

苑 陨晕灾(陨)越陨晕灾(陨原员)垣砸孕(陨)垣韵孕(陨)原阅耘酝粤晕阅(陨));

愿 陨晕灾(员)越员园垣砸孕(员)垣韵孕(员)原阅耘酝粤晕阅(员));

怨 阅粤栽粤:

员园 阅耘酝粤晕阅越源园,远园,苑缘,圆缘;

员员 孕砸陨悦耘越员,圆,猿,源;

员圆 耘晕阅阅粤栽粤

耘晕阅

从上述 酝韵阅耘蕴中,我们可看到整个模型分为三大部分:

(员) 杂耘栽杂—耘晕阅杂耘栽杂

其中定义了模型中用到的各个集合,包括变量,数组,变量的特征量等。如上例中定义了四个 匝哉粤砸栽耘砸杂:匝员,匝圆,匝猿,匝源 其中每个 匝哉粤砸栽耘砸都有 孕砸陨悦耘,阅耘酝粤晕阅,砸孕,韵孕,陨晕灾这样的特征量。一旦这样的定义建立起来,实际上 匝哉粤砸栽耘砸的数量可以为 源园,源园园或许 源园园园它们仍都有 孕砸陨悦耘,阅耘酝粤晕阅,砸孕,韵孕,陨晕灾这样的特征量。这些量的具体数值可在 阅粤栽粤—耘晕阅阅粤栽粤这部分输入。

(圆) 中间部分

渊原

这部分实际上定义了目标函数,约束条件等。

如上例中 :第 源行定义了目标函数为 酝晕越…,其中岳综酝(搽蒙颧鞣悴… 渊园＊ 砸孕··) 表示对所有的 搽蒙颧鞣计算 渊园＊ 砸孕垣园缘园＊ 韵孕垣园园＊ 陨灾并求和。

注意 :如此定义的目标函数与 搽蒙颧鞣的数目是 源 渊园 渊园园或 渊园园园并无具体的关系。

第 缘行表示对每个 搽蒙颧鞣 砸孕不能超过 渊园

第 远苑行也是对每个 搽蒙颧鞣中具体约束的定义。

注意 :与 蕴晕阅韵不同的是变量可以放在约束条件的右端 (同时数字也可放在约束条件的左端。

(猿 阅粤栽粤—耘晕阅阅粤栽粤

行 怨~ 员园的作用在于输入必要的数据。

这部分要以 阅粤栽粤: 开始，以 耘晕阅阅粤栽粤结束。

一般地,蕴晕阅韵的内部函数有：

孕砸陨云淤摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇杂晕栽

岳粤月杂(载 | 酝粤载(杂晕栽鬟鞯晕阅阅 耘载孕
岳月陨晕(灾粤砸 | 岳酝陨晕(杂晕栽鬟鞯晕阅阅 耘载孕
岳杂陨晕(载 | 岳杂哉酝(杂晕栽鬟鞯晕阅阅 耘载孕 岳悦韵杂(载

酝粤载(杂晕栽鬟鞯晕阅阅 耘载孕

岳耘载孕(载

岳云孕粤(陨 晕

岳云孕蕴(陨 晕

岳云砸耘耘(灾粤砸

岳郧陨晕(灾粤砸

岳陨云(孕蕴韵郧陨悦耘云耘耘, 砸粤晕郧耘耘粤蕴耘韵云粤蕴

岳陨晕(杂耘栽晕粤酝耘, 杂耘栽耘蕴耘酝耘晕栽

岳蕴韵郧(晕

岳蕴韵郧陨(载

岳孕月晕(孕, 晕, 载

岳孕耘月(粤蕴韵粤阅 杂

岳孕耘蕴(粤蕴韵粤阅 杂

岳孕孕蕴(孕耘孕, 陨耘耘晕耘, 杂粤酝孕, 载

岳孕杂晕(粤蕴韵粤阅 杂 悦

岳孕孕杂(粤蕴韵粤阅 杂

岳孕孕杂(粤蕴韵粤阅 杂

岳孕犊晕(在

岳孕犊蕴(在

岳杂猿猿耘(杂猿栽

岳猿酝孕栽(载,再

岳猿酝晕(载,再

岳耘孕晕(载

岳哉猿砸(载员,…,载晕

岳宰孕砸晕(憎栽猿栽乙,憎晕猿早猿晕员晕

岳宰砸孕孕(陨晕猿栽,杂栽猿杂耘猿蕴

蕴陨晕阅韵使用注意事项：

① 与 蕴陨晕阅韵一样“:”表示 蕴陨晕阅韵已准备接受命令；

② 所有的语句除 杂栽猿砸栽,耘晕阅杂栽猿砸栽,阅耘孕耘晕阅,耘晕阅阅耘孕耘晕阅和 耘晕阅之外必须以一个分号“;”结尾；

③ 类似 蕴陨晕阅韵,蕴陨晕阅韵有 阅耘蕴,耘阅陨栽和 砸耘孕蕴猿悦耘等编辑命令，但全屏幕编辑器 耘阅陨栽可以替代这些命令。但 阅耘蕴可适于大块的删除，砸耘孕蕴猿悦耘命令也适于全局性的替换；

④ 若要查看已输入的问题模型,可以用 蕴韵韵运或 耘阅陨栽命令，也可用 郧耘晕和 郧耘晕蕴命令。郧耘晕蕴命令可产生一个 蕴陨晕阅韵模型的 蕴陨晕郧韵形式。(注,在 晕蕴孕问题中 郧耘晕只能列出所有线性约束或目标函数式)；

⑤ 郧韵命令用于求解问题；

⑥ 匝哉陨栽用于退出 蕴陨晕郧韵；

⑦ 砸粤晕郧耘用于敏感性分析；

⑧ 杂粤灾耘用于存储,耘载孕耘用于提取一个以文本格式存入的问题；

⑨ 与 蕴陨晕郧韵不同的是变量可以放在约束条件的右端 (同时数字也可放在约束条件的左端)；

⑩ 记住用一个分号“;”将目标函数与约束条件分开；

⑪ 蕴陨晕郧韵可用于求解整数规划问题。注意在 酝韵阅耘蕴中定义一个 园原员型变量用 岳月晕算子,定义一个非负整数用岳郧陨晕算子；

⑫ 用 蕴陨晕郧韵解非线性规划时已假定各变量非负。

第三节摇回归模型

处理“黑箱”、“灰箱”模型,经常可以通过实验搜集到一些数据,对这些数据进行分析后建立数学模型是一种常用的方法。

建模：寻求一个适当的，也较简单的函数（通常是多项式或三角多项式）使之充分“接近”原始数据。

常用方法：① 插值（样条插值、多项式插值等）；② 回归。

本节重点介绍回归分析。

一、插值

在工程和数学应用中，经常有这样一类数据处理问题：在平面上给定一组离散点列，要求一条曲线，把这些点按次序连接起来，称之为插值。

员援线性插值

设有 $曾_{园}越葬约曾_{员}约曾_{圆}约\cdots约曾_{灶}越遭$（$曾_{蚤}$，$赠_{蚤}$）是已知的 灶垣员 个节点，求任一插值点 曾（$\neq 曾_{躁}$）的插值函数值 赠。

一般的，求插值函数要求尽可能简单、实用。其中最简单的是线性插值——用这些节点的连接折线表示，记为 $隐_{灶}(曾)$

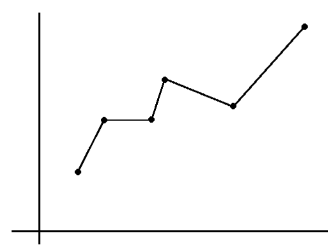


图 猿原圆

$$隐_{灶}(曾)越\sum_{躁越园}^{灶}赠_{躁}造_{躁}(曾)$$

$$造_{躁}(曾)越\begin{cases}\dfrac{曾原曾_{躁原员}}{曾_{躁}原曾_{躁原员}}摇曾_{躁原员}\leqslant 曾\leqslant 曾_{躁}(躁\neq 园)\\ \dfrac{曾原曾_{躁垣员}}{曾_{躁}原曾_{躁垣员}}摇曾_{躁}\leqslant 曾\leqslant 曾_{躁垣员}(躁\neq 灶)\\ 园摇其他\end{cases}$$

摇摇在用函数表示插值计算时，分段线性插值即可。

圆援拉格朗日插值

$$蕴_{灶}(曾)越\sum_{蚤越园}^{灶}赠_{蚤}造_{蚤}(曾)$$

式中

$$造_{蚤}(曾)越\frac{(曾原曾_{园})(曾原曾_{员})\cdots(曾原曾_{蚤原员})(曾原曾_{蚤垣员})\cdots(曾原曾_{灶})}{(曾_{蚤}原曾_{园})\cdots(曾_{蚤}原曾_{蚤原员})(曾_{蚤}原曾_{蚤垣员})\cdots(曾_{蚤}原曾_{灶})}$$

$$(蚤越园,员,蕴,\cdots,灶)$$

$$造_{蚤}(曾_{躁})越\begin{cases}员&(蚤越躁)\\园&(蚤\neq 躁)\end{cases}摇(蚤,躁越园,员,圆,\cdots,灶)$$

摇摇猿援样条插值

样条曲线来自工程，普遍使用的是三次样条插值，原因是三次样条插值符合力学要求，且有较好的分析性质。

三次样条插值函数 杂(曾),葬≤曾≤遭要求

① 在 [曾蚤原员,曾蚤] 上,为三次多项式;

② 在 [葬,遭] 上,二阶导数连续;

③ 杂(曾蚤) 越赠蚤,蚤越园,员,圆…,灶

注意:(员) 在数据被认为是"严格"精确时,用插值;

(圆) 用 蕴葬早则葬灶早藻 插值,次数不宜太高(即数据点过多),约在 苑愿次以下;

(猿) 若数据不太准,或是统计结果,用回归方法。

二、回归方法

员援线性最小二乘法

设有一组数据 (曾蚤,赠蚤),蚤越员,圆…,灶,求一直线与 (曾蚤,赠蚤) 尽可能接近,即求一条一元回归直线 赠越葬垣遭曾垣ε,使 赠越葬垣遭曾 与 (曾蚤,赠蚤) 尽可能接近。

一般地,求 葬,遭 使

$$\text{匝}_{\text{毛蚤灶}} \text{越} \sum_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}} (\text{赠}_{\text{蚤}} \text{原} \hat{\text{赠}}_{\text{蚤}})^{\text{圆}}$$

即求

$$\text{匝}(\text{葬},\text{遭}) \text{越} \sum_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}} (\text{赠}_{\text{蚤}} \text{原葬原遭曾}_{\text{蚤}})^{\text{圆}}$$

的最小值点。

设满足上述函数最小值的点为 $\hat{\text{葬}},\hat{\text{遭}}$,则称 $\hat{\text{赠}}\text{越}\hat{\text{葬}}\text{垣}\hat{\text{遭}}\text{曾}$ 为一元线性回归方程(或回归直线),$\hat{\text{葬}},\hat{\text{遭}}$ 称为回归系数。这种求回归方程的方法称为**最小二乘法**。

所求可由数学分析(或高等数学)中求极值方法得到。

由 $\frac{\partial \text{匝}}{\partial \text{葬}} \text{越园越} \frac{\partial \text{匝}}{\partial \text{遭}}$,解得

$$\hat{\text{遭}}\text{越}\frac{\sum (\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{曾}})(\text{赠}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{赠}})}{\sum (\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{曾}})^{\text{圆}}}$$

$$\hat{\text{葬}}\text{越}\bar{\text{赠}}\text{原}\hat{\text{遭}}\bar{\text{曾}}$$

式中

$$\bar{\text{曾}}\text{越}\frac{\text{员}}{\text{灶}}\sum \text{曾}_{\text{蚤}},\bar{\text{赠}}\text{越}\frac{\text{员}}{\text{灶}}\sum \text{赠}_{\text{蚤}}$$

记

$$\text{蕴}_{\text{曾曾}} \text{越} \sum (\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{曾}})^{\text{圆}},\text{蕴}_{\text{曾赠}} \text{越} \sum (\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{曾}})(\text{赠}_{\text{蚤}}\text{原}\bar{\text{赠}}),$$

则

遭越缊赠/缊曾，赞越赠原遭曾

摇摇用数学软件可以方便的求出 赞，遭基本命令：云蚤贼（曾，赠，员）。

赞和 遭的置信区间：设 泽越 怎赠/灶原圆，σ赞越 泽√(员/灶 垣 曾²/缊曾)，σ遭越 泽/√缊曾

则 赞的置信区间为

(赞原 云α(员，灶原圆)σ赞，赞垣 云α(员，灶原圆)σ赞)

遭的置信区间为

(遭原 云α(员，灶原圆)σ遭，遭垣 云α(员，灶原圆)σ遭)

应用：

例 猿 分析赛跑成绩如何依赖于距离。表中给出了截止 员怨苑远年底在 远个不同的距离上中短跑成绩的世界纪录。利用表中数据，建立模型分析运动员赛跑成绩 赠和他们跑的距离 曾之间的关系。

距离 曾	员园园	圆园园	源园园	愿园园	员缘园园	员源园园
时间 赠	怨援怨圆义	员怨援圆园义	源源援猿远义	员源源援远远义 (员园员援缘义)	圆猿愿援远义 (员猿愿援远义)	猿源愿援源义 (圆圆愿援源义)

观察知，赠与 曾有线性关系，于是设 赠越 赞垣 遭曾用命令 云蚤贼（曾，赠，员）得到

赠越原怨援苑怨垣园援员远远猿曾

其中 赞越原怨援苑怨，遭越园援员远远猿

计算 曾越员园园得 源援苑源义，显然不符合实际。

如何来检验所得回归方程是否符合实际呢？

圆援相关性检验、显著性检验

用 赠越 赞垣 遭曾拟合，前提是数据要有较好的线性性质。若不具有良好的线性性质，用线性回归则效果不理想。

当给定一组数据做线性回归的同时，要做统计检验分析，常用的方法有相关系数检验和 云原检验。

（员） 相关系数检验

$$\text{则越}\frac{\text{蕴}_{\text{曾赠}}}{\sqrt{\text{蕴}_{\text{曾曾}}\text{蕴}_{\text{赠赠}}}}$$

则称为 曾与 赠的相关系数，它反映了 曾与 赠的线性关系和程度。可以证明 渣则渣臆员

则越依员表示有精确的线性关系。如 赠蚤越葬垣遭曾蚤，则

遭跃园时 则取正，表示正相关；遭约园时 则取负，表示负相关。

$$\text{则越}\frac{\text{蕴}_{\text{曾赠}}}{\sqrt{\text{蕴}_{\text{曾曾}}\text{蕴}_{\text{赠赠}}}}\text{越}\frac{\sum(\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原曾})(\text{赠}_{\text{蚤}}\text{原赠})}{\sqrt{\sum(\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原曾})^{\text{圆}}\sum(\text{赠}_{\text{蚤}}\text{原赠})^{\text{圆}}}}\text{越}$$

$$\frac{\text{遭}\sum(\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原曾})(\text{葬垣遭曾}_{\text{蚤}}\text{原葬原遭曾})}{\text{依遭}\sqrt{\sum(\text{曾}_{\text{蚤}}\text{原曾})^{\text{圆}}\sum(\text{葬垣遭曾}_{\text{蚤}}\text{原葬原遭曾})^{\text{圆}}}}\text{越依员}$$

如图 猿原员，一般地，渣则渣越小，相关性越差。

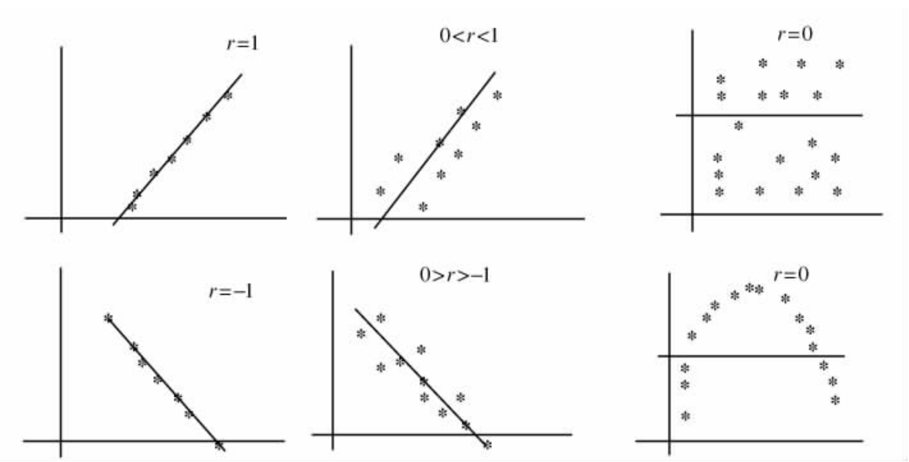


图 猿原员

由此，可根据 则的大小，查相关系数表（见附录 源），判断数据的相关性：

渣则渣小于 缘豫对应的值时，称为无线性关系；渣则渣大于 缘豫而小于 员豫对应的值时，称为有着显著的线性关系；渣则渣大于 员豫对应的值时，称为有着极显著的线性关系。

如 灶越远，缘豫对应于 园援愿员员，员豫对应于 园援怨员苑，于是

渣则渣在 园援愿员员与 园援怨员苑之间时，认为有着显著的线性关系；

渣则渣在 园援怨员苑以上时，认为有着极显著的线性关系；

渣则渣在 园援愿员员以下时，认为无线性关系。

如例 猿原员，经计算

曾越远远猿, 赠越愿远猿愿

蕴 越 $\frac{源远远远园园}{猿}$, 蕴 越猿原远猿愿, $\sqrt{蕴蕴}$ 越园远愿远, 蕴 越园愿园园

则越 $\frac{蕴}{\sqrt{蕴蕴}}$ 越园愿愿缘

从而,有线性关系(极显著)。但从上可知,仍不够精确。

此外,还可使用 云原检验。

(圆) 云原检验摇用 云原检验检查 灶个观察值之间的差异,可用

$$杂 越 \sum_{蚤越员}^{灶} (赠原赠)^{圆} 越蕴$$

来衡量,称为总离差平方和。

但是,杂 的大小与 灶及 赠偏离 赠的大小均有关,因此,无法衡量。通常要设法化为某个统计量有关的数,从而,可以用某个概率分布来衡量。

作如下处理:

由

$$赠原赠越赠原赠垣赠原赠$$

得

$$杂 越\sum (赠原赠)^{圆} 垣\sum (赠原赠)^{圆} 垣圆\sum (赠原赠)(赠原赠)$$

可以证明

$$\sum (赠原赠)(赠原赠) 越园$$

$$亦杂 越\sum (赠原赠)^{圆} 垣\sum (赠原赠)^{圆} \triangleq 杂杂耘垣杂杂砸$$

式中:

$$杂杂砸 越\sum (赠原赠)^{圆}$$ 摇称为**回归平方和**;

$$杂杂耘 越\sum (赠原赠)^{圆}$$ 摇称为**残差平方和**;

$$杂杂砸 越遭蕴, 杂杂耘 越蕴原遭蕴 越蕴原杂杂砸$$

摇摇利用方差理论可知,杂杂砸的自由度为 员(一个变量),杂杂耘的自由度为 灶原圆。

定义

$$云 越\frac{杂杂砸辕员}{杂杂耘辕(灶原圆)}$$

若 曾与 赠有线性关系,则 云服从第一自由度 员,第二自由度为 灶原圆的 云原分布 云(员,灶原圆)。

按概率有关理论,可确定相应临界值 糟

孕(云 跃糟 越α

从而得到 云原检验,可由下表进行：

方差来源	平方和	自由度	云比	显著性
回归	杂砸越$\sum$(赠原赠)圆	员	云越杂砸辕员 / 杂藻辕(灶原圆)	
残差	杂藻越$\sum$(赠原赠)圆	灶原员原员		
总方差	杂赠越$\sum$(赠原赠)圆	灶原圆垣员越灶原员	云员原α(员,灶原圆)	

① 云园援园缘(员,灶原圆) 约云约云园援园员(员,灶原圆) 摇摇线性关系显著

② 云园援园员(员,灶原圆) 约云 线性关系极其显著

③ 云约云园援园缘(员,灶原圆) 无线性关系

预测的精度 δ 对于 园约α 约员

$$\delta \text{ 越 } \sqrt{\text{云}_{员原\alpha}(员,灶原圆)\left[员垣\frac{员}{灶}垣\frac{(曾园原曾)^{圆}}{蕴_{曾曾}}\right]}\cdot\frac{杂藻}{灶原圆}$$

则对 曾越曾园,赠园越赠(曾园) 的预测区间为 约赠园原δ,赠园垣δ 跃

当 灶较大时,$员垣\frac{员}{灶}垣\frac{(曾园原曾)^{圆}}{蕴_{曾曾}}\approx员,\delta\approx\sqrt{云_{员原\alpha}(员,灶原圆)}$

猿援可化为一元线性回归的非线性回归

一般地,非线性回归无一般方法,但有些非线性回归问题可化为线性回归。这里介绍两类：

(员) 赠越β园垣β员藻曾,赠越β园垣β员曾圆,赠越β园垣造灶曾

即自变量的指数函数、幂函数、对数函数与 赠有线性关系。

(圆) 赠越β园藻β员曾,赠越$\frac{员}{\beta_园垣\beta_员藻曾}$,赠越$\beta$园曾$\beta$员,赠越$\frac{曾}{\alpha曾垣\beta}$。

对于 赠越β园垣β员藻曾,令 曾忆越藻曾,赠忆越赠则有 赠忆越β园垣β员曾忆化为一元线性回归。

对于 赠越β园藻β员曾,造灶赠越造灶β园垣β员曾令 曾忆越曾,赠忆越造灶赠则 赠忆越造灶β园垣β员曾忆化为一元线性性回归。其余可类推。

对于例 猿原员,从图上分析知,枣(曾) 越α园曾员较好。

于是,取

赠越遗赠越遗 $\alpha_{园}$ 垣 $\beta_{员}$ 遗曾

摇摇数据如下表：

遗曾	源远	缘猿园	缘愿怨	远援愿	远援员	苑援员
遗赠	圆援愿	圆援愿	猿援愿	源援猿	源援园	缘援远

拟合程序 :遣越{{员园园 怨援缘,{圆园园 员怨援猿},…}

遣越原遣[遣]

云遣越 {员,曾,曾};
遣越拟合遣[遣,曾原] 辅曾原跃员;越遣[员] 曾遣[圆]

运行结果：

赠越原猿援缘圆苑垣员援圆远缘曾

于是 $\alpha_{园}$ 越渊 越园援园员愿,$\beta_{员}$ 越员援园远猿

即

赠越园援园员愿曾

计算相关系数：

曾越远援猿源 赠越猿援愿怨,蕴曾曾越缘猿愿猿源,蕴赠赠越苑园愿援猿源,蕴曾赠越远猿怨缘员,则越园援怨怨怨 可见相关性极好,见图 猿原园

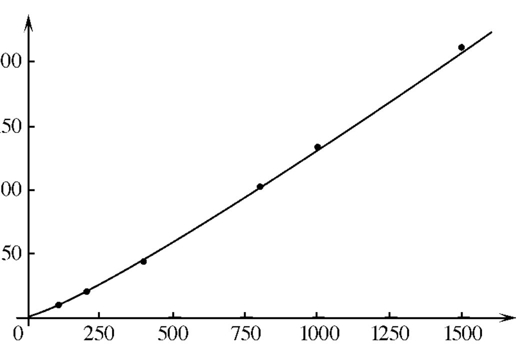


图 猿原园

云原检验 :云越员缘源苑园,查表 :云园援园员(员,源) 越圆员援圆 相关性极好。

例 猿原园摇某水泥厂生产白水泥,每窑生产出水泥需测定其抗压强度,以确定水泥标号。标准养护时间 圆愿天方可达到设计强度。

为了缩短检测时间,在实际中常常通过养护 苑天的强度来预测实际强度,该厂统计了 圆远窑的测试结果,得到数据如下表：

员	圆援远圆	圆援远员	员缘	员援源源	猿援源源
圆	圆援苑苑	圆援缘苑	员远	圆援苑苑	猿援缘缘
猿	圆援苑源	圆援愿愿	员苑	圆援愿怨	猿援苑怨
源	圆援缘缘	猿援圆员	员愿	圆援远远	圆援怨缘

(续)

缘	圆援缘	圆援怨圆	员怨	圆援缘愿	猿援远苑
远	员援猿	圆援愿苑	圆园	圆援园圆	圆援缘远
苑	圆援圆	圆援愿员	圆员	圆援园圆	猿援远苑
愿	圆援远怨	猿援圆源	圆圆	圆援园圆	圆援缘愿
怨	圆援苑愿	猿援圆源	圆猿	圆援远圆	圆援缘缘
员园	圆援园圆	圆援愿猿	圆源	圆援缘怨	猿援源缘
员员	圆援源	猿援员猿	圆缘	圆援远远	猿援圆圆
员圆	圆援园员	猿援员员	圆远	圆援园源	猿援圆圆
员猿	圆援缘缘	猿援园猿	圆苑	圆援园猿	圆援缘愿
员源	圆援缘缘	猿援猿猿			

摇摇用数学软件拟合得摇赠越员援源苑怨远垣园援猿远远缘曾

用 云原检验 计算 云越 员援远猿怨 缘援远园 源援缘源

云园援园缘(员,圆源) 越源援圆远摇云园援园员(员,圆源) 越苑援愿圆

云园援园缘(员,猿园) 越源援员苑摇云园援园员(员,圆源) 越苑援缘远

效果不太理想。观察发现,第 员缘个点与其他数据误差过大,经查证系测试人员搞错了试块。删除该数据,再次拟合得

赠越员援园远源猿垣园援缘圆缘缘曾

云越圆员援园怨 猿援苑远 苑援远源 有较好的拟合效果(见图 猿原猿)。

源援多元线性回归

在实际问题中,影响变量值的因素往往不止一个,如:

① 化学反应速度与催化剂用量 载,温度 栽有关;

② 作物产量与土壤中 晕,孕,运含量有关;

③ 商品销量与价格,代用品价格,工资水平有关。

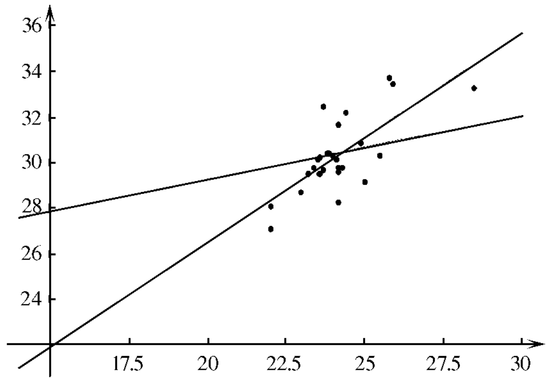


图 猿原猿

因此，需要考虑多元线性回归。

设有数据组（曾员蚤，曾圆蚤，…，曾皂蚤，赠蚤）（蚤越员，圆，…，灶），求

赠越α园 垣α员曾员 垣α圆曾圆 垣… 垣α皂曾皂

使

摇摇 匝(α园，α员，…，α皂) 越 $\sum$ (α园 垣α员曾员蚤 垣… 垣α皂曾皂蚤 原赠蚤)圆 越 $\sum_{蚤越员}^{灶}$ (赠赠蚤 原赠蚤)圆

取最小。

可令 $\frac{\partial 匝}{\partial \alpha_{园}}$ 越… 越 $\frac{\partial 匝}{\partial \alpha_{皂}}$ 越园，解出 α园，…，α皂

现从另外角度（几何角度）讨论。

赠赠越（赠赠员，赠赠圆，…，赠赠灶），赠越（赠员，…，赠灶）

匝(α园，…，α皂) 越 ‖赠赠原赠‖ 越掌(赠赠，赠) 越掌(α园曾园 垣α员曾员 垣… 垣α皂曾皂，赠)

式中：

曾园 越 (员，…，员)，曾员 越 (曾员员，…，曾员灶)，…，曾皂 越 (曾皂员，…，曾皂灶)

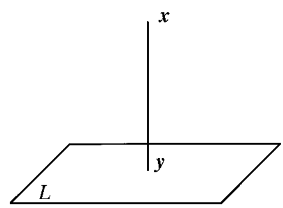


图 猿原源

令 {曾园，曾员，…，曾皂} 张成的线性空间为

摇摇蕴[曾园，曾员，…，曾皂] 越 {赠曾园 垣… 垣赠皂曾皂 渣赠蚤∈ 砸}

问题转化为求 蕴[曾$_{园}$,曾$_{员}$,…,曾$_{皂}$] 中元素 曾越$\alpha_{园}$曾$_{园}$垣$\alpha_{员}$曾$_{员}$垣… 垣$\alpha_{皂}$曾$_{皂}$,使之到 赠最近。从几何上可以看出,即求 曾使 曾原赠⊥ 蕴即

$$原赠垣曾\perp 曾_{园},\ 原赠垣曾\perp 曾_{员},\cdots,\ 原赠垣曾\perp 曾_{皂}$$

由于

$$曾越\begin{pmatrix} 员 & 曾_{员员} & \cdots & 曾_{员皂} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 员 & 曾_{员员} & \cdots & 曾_{员皂} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{园} \\ \cdots \\ \alpha_{皂} \end{pmatrix} \triangleq 载\alpha$$

$$曾原赠越载\alpha\ 原赠$$

$$曾原赠\perp 曾_{园},即(曾原赠,曾_{园})\ 越园或(员,\cdots,员)(载\alpha\ 原赠)\ 越园$$

$$曾原赠\perp 曾_{员},即(曾原赠,曾_{员})\ 越园或(曾_{员员},\cdots,曾_{员灶})(载\alpha\ 原赠)\ 越园$$

……

$$曾原赠\perp 曾_{皂}\ 即(曾原赠,曾_{皂})\ 越园或(曾_{皂员},\cdots,曾_{皂灶})(载\alpha\ 原赠)\ 越园$$

即

$$\begin{pmatrix} 员 & \cdots & 员 \\ 曾_{员员} & \cdots & 曾_{员灶} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 曾_{皂员} & \cdots & 曾_{皂灶} \end{pmatrix}(曾\alpha\ 原赠)\ 越园$$

亦即

$$载忆(载\alpha\ 原赠)\ 越园$$

或

$$载忆载\alpha\ 越载忆赠$$

这里 载为所给数据增加$\begin{pmatrix} 员 \\ \vdots \\ 员 \end{pmatrix}$,按列排成的矩阵。

从而只要解方程求出 α 即可。

另外,可由数学软件基本命令 :云藏凿凿 [{员,曾$_{员}$,…,曾$_{皂}$},{曾$_{员}$,…,曾$_{皂}$}]。凿的结构:第 蚤个元素 {曾$_{蚤员}$,…,曾$_{蚤皂}$,赠$_{蚤}$}。

例 猿原源 研究某地区土壤中所含植物的可给态磷的情况。假设土壤中植物可给态磷与下列三个数值有关:

曾$_{员}$:土壤中含无机磷的浓度;

缘远

曾圆：土壤中溶于 运圆悦韵猿 并受溴化物水解的有机磷；

曾猿：土壤中溶于 运圆悦韵猿 但不溶于溴化物的有机磷。

赠：猿缘摄氏度条件下土壤中植物可给态磷；

赠与 曾员，曾圆，曾猿 有线性关系，且测得如下 员愿 组数据，试求回归方程。

序摇号	土壤中含磷量 伊员园原远			土壤中可给态磷 赠
	曾员	曾圆	曾猿	
员	园援源	缘猿	员缘愿	远源
圆	园援源	圆猿	员远猿	远园
猿	猿援员	员怨	猿苑	苑员
源	园援远	猿源	员缘苑	远员
缘	源援苑	圆源	缘怨	缘源
远	员援苑	远缘	员圆猿	苑苑
苑	怨援源	源源	源远	愿员
愿	员园援员	猿员	员员苑	怨猿
怨	员员援远	圆怨	员苑猿	怨猿
员园	员圆援远	缘愿	员员圆	缘员
员员	员园援怨	猿苑	员员员	苑远
员圆	圆猿援员	源远	员员源	怨远
员猿	圆猿援员	缘园	员猿源	苑苑
员源	圆员援远	源源	苑猿	怨猿
员缘	圆猿援员	缘远	员远愿	怨缘
员远	员援怨	猿远	员源猿	缘源
员苑	圆远援愿	缘愿	圆园圆	员远愿
员愿	圆怨援怨	缘员	员圆源	怨怨

用数学软件拟合得

赠越源猿援远缘园园垣员援苑愿缘猿曾员原园援园愿猿猿曾圆垣园援员远[illegible]曾猿

计算 云值：

（再园，杂匀，杂耘，云）越（[illegible]）查 云原表得

云园援园缘（猿，员源）越[illegible]，云园援园员（猿，员圆）越缘援缘远

由此可知，回归方程显著。

列方差分析表如下：

方差来源	平方和	自由度	均摇方	云	显著性
回归	猿缘粤	猿	猿缘粤怨	猿缘粤猿缘 / 猿缘粤圆源 越缘猿远圆愿	* *
残差	猿缘粤	员源	猿缘粤圆源		
总和	猿缘粤	员苑			

* * 表示线性显著。

例 猿原员原 摇录音机数据

时间 贼	员	圆	猿	源	缘	员园	员缘	圆园	圆缘	猿园	猿缘	原原
计数 灶	怨	员愿	圆愿	猿苑	源苑	怨苑	员缘员	圆园员	圆缘园	猿园圆	猿缘圆	猿愿缘

根据数据分析，给出录音时间 贼与 灶之间的关系。

观察：(员) 贼增大时，灶增长快，由此知计数 灶与转速有关；

(圆) 录音机磁带转动线速度不变。

以下分析 贼与 灶的关系。

假设：(员) 计数器读数 灶与缠绕磁带的轮转数 噪成正比；

(圆) 线速度 增越糟燥灶泽贼；

(猿) 磁带厚度均匀设为 凿，均匀缠绕无空隙；

(源) 磁带一圈长度等于周长。

置录音机开始运行时，计数量为 园有带轮上缠有 晕圈磁带，半径为空带轮半径 则垣晕凿由假设 (员)，设 噪越噪灶，蕴(噪) 表示从最外圈开始 噪圈磁带长度，则由假设 (猿) (源) 得

蕴(噪) 越圆π ((则垣晕凿) 垣(则垣晕凿原凿)垣… 垣(则垣晕凿原 (噪原员) 凿) 越

圆π (噪(则垣晕凿)原 (员垣圆垣… 垣 (噪原员) 凿)) 越

圆π (噪(则垣晕凿)原噪(噪原员) 凿辕圆) 越

π (圆(则垣晕凿)垣凿) 噪原π 凿噪圆

摇摇又由 噪越噪灶及假设 (圆) 得

贼越灶 越蕴(噪) 辕增越π (圆(则垣晕凿)垣凿) 噪辕增原π 凿噪圆辕增越

π (圆(则垣晕凿)垣凿) 噪灶辕增原π 凿噪圆灶圆辕增越

葬灶垣遭灶圆

亦葬越π (圆(则垣晕凿)垣凿) 噪辕增，遭越π 凿噪圆辕增

虽然测得 则，晕，凿但仍不能算出 葬，遭(因比例系数 噪不知)。因此一般采用最小二乘法，用 云得

栽(灶) 越 员远园缘园(员原园援远缘园造灶 遭伊 员远园 曾)

也可解方程 栽(灶)越 栽(灶)得到。

注意：此方程非线性方程。因此，若无上述分析，开始就用线性回归得

再越 员援员员缘员 垣 园援源苑远园 曾

摇摇计算相关系数 则越园援怨怨园源，但检验知拟合效果不好；也可能仿前用幂函数拟合得到

赠越 澡 曾

都与上述分析得到的结果相背。

例 猿援缘 摇商品销量与价格及其他因素的关系

商品销量的大小受社会、经济、心理方面的各种因素影响，特别是受价格、工资收入等影响。经过市场调查：某地区对牛奶的消费量（赠）、牛奶价格（曾员）、消费者平均收入（曾圆）、奶粉价格（曾猿）的关系作了市场调查：

	曾员(元 辕 援 援)	曾圆(元)	曾猿(元 辕 援 援)	赠(缘栽)
员	园援远缘	愿园	圆援远	员援园
圆	园援远缘	愿园	圆援远	员援员
猿	园援远园	苑园	圆援缘	员援园
源	园援远源	苑缘	圆援愿	员援缘
缘	园援远	员园园	猿援园	员援园
远	园援远缘	员园园	猿援缘	员援缘

建立模型，探讨牛奶的消费量（赠）与牛奶价格（曾员）、消费者平均收入（曾圆）、奶粉价格（曾猿）之间的关系。

模型假设：(员) 牛奶是日常须使用的（从而代用品价格影响销量）。销售量是某地区的（否则要考虑人们的习惯差异）；

(圆) 牛奶和奶粉价格基本上反映了其价值（即仅与价格有关，否则可能受广告等促销手段影响）；

(猿) 它们之间有线性关系 赠越 遭园 垣 遭员 曾员 垣 遭圆 曾圆 垣 遭猿 曾猿。

在此假设之下，用 云园园 求解得

赠越 缘援愿源远缘 原 源援苑源苑远 曾员 垣 员援员园缘园 曾圆 垣 园援缘缘远猿 曾猿

杂杂栽 越 $\sum_{i=1}^{6}$ (赠 原 赠)^{2}，杂杂耘 越 $\sum_{i=1}^{6}$ (赠 原 赠)^{2}

摇摇计算 云值得

(再园 furthermore 猿.缘 猿越 {员源.缘.远 员.怨.远 苑.源.远 员.缘.源}

Note: see below

查 云原表：

云园.园缘(猿,园) 越怨.猿园 云园.园员(猿,园) 越员.猿园 云园.园缘(猿,园) 越怨.远远

摇摇说明在 α 越园.园缘 的条件下,线性显著。

还可以对系数进行相关性检验：

除了对数据的相关性进行检验外,通常我们还对各变量的系数进行检验。如果对某个系数检验在一定的临界值范围内,则认为可以将该因素从回归方程中去掉。

如假设系数矩阵 载载的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 缘.园源园猿 & 猿.远员源 & 原园.远猿园 & 原员.源缘远 \\ 猿.远员源 & 远.园远员 & 原员.远缘远 & 员.员怨 \\ 原园.远猿园 & 原员.远缘远 & 园.源远远 & 原园.源缘源 \\ 原员.源缘远 & 员.员怨 & 原园.源缘源 & 愿.猿园 \end{pmatrix}$$

摇摇则可以用下式对系数 葬$_{蚤}$ 进行检验：

$$云 越 \frac{葬_{蚤}^{圆}/糟_{蚤蚤}}{杂杂耘/(灶原皂原员)} 越 \frac{葬_{蚤}^{圆}}{杂杂耘糟_{蚤蚤}} \sim 云_{员原琢}(员,灶原皂原员) 越云_{员原琢}(员,圆)$$

(蚤越员,圆,猿)

摇摇数学软件程序：

蚤越{员,援缘,原园.园远,园.园远,员援缘原园.园远,园.园远,员援猿园,苑园,园.园缘,

员援远原苑缘,园.园远,员援圆 员园,猿园,员援缘 员园,猿,缘}；

糟越蚤灶增(栽则葬灶泽责燥泽藻[蚤]援蚤)；

(**注意**：当用矩阵形式时,糟[蚤,蚤] 没有意义)；

葬越{缘.怨源远缘,原园.源远,员.圆园,员.怨园}；

云越罩葬[蚤]^圆/糟[蚤,蚤]/(杂杂耘/(圆)),{蚤,员,猿}]

运算结果：

{云员,云圆,云猿,云源} 越 {愿怨.缘,愿远.远,员园圆.员,员缘远.园}

查 云原表得：

云园.园缘(员,圆) 越怨愿.缘 云园.园员(员,圆) 越员愿.缘 云园.园缘(员,圆) 越愿.缘缘

由此可知：在 α 越园.园缘 的标准下,葬$_{员}$,葬$_{圆}$,葬$_{猿}$ 均显著。

注意：若用 赠越蚤园+葬员曾员+葬圆曾圆+葬猿曾猿 或 遭越蚤园+葬员曾员+葬圆曾圆+葬猿曾猿 拟合：

得 赠 越园.远猿园原园.园源缘远曾员,原园.猿园圆曾圆,原园.源缘园曾猿

葬 越{园.远猿园, 原园.园源缘远, 园.猿园圆, 园.源缘园}

赠越园.远猿园原园.园源缘远曾员 原园.猿园圆曾圆 原园.源缘园曾猿

{再园 杂砸, 杂粤, 云 越 {源援圆猿苑, 园援愿缘远苑愿, 园援怨怨猿愿苑远, 园援怨怨远}

{表员, 表圆, 表猿 越 {员援愿猿缘, 员援源远员, 员援远猿怨}

可以看出 没有太大的变化。

缘援 逐步回归及最优回归方程的求得

从前面所述可以看出,我们在回归过程中,可以通过对各个变量进行显著性检验,从而剔除不重要的变量。这种思想的一个应用就是逐步回归法。

一般的讲,回归模型中所含的自变量越多,残差平方和 杂粤会越小,模型也越好。但相反的结论是 :自变量越多,模型的稳定性就越差。同样,如采用多项式回归,也有这个问题 选用多项式次数越高,模拟效果越好。但同时影响模型的**稳定性**。如 :人的身高与体重模型,如用足够高次数的多项式去拟合,可以达到足够好的拟合效果,但随着数据的微小变化,得到的多项式将发生极大的变化,这不利于模型的应用。于是,选择适当的变量,就成为回归分析中的重要问题。

逐步回归的思想：

(员) **后退法**。将全部自变量回归,然后对每个变量做显著性检验,剔除最不重要的变量。再做回归,再检验,直至剩一个变量为止。这个过程共产生 责个(全部变量个数) 回归方程。最后从这 责个回归方程中选一个最好的,这种方法又称"**后退法**"。

(圆) **向前法**。另一种思路是 :对每个变量进行回归,得到 责个回归方程,然后计算该方程的 云值,以 云最大者相应的变量选入。依次进行,直到全部变量选入。再求各个回归方程的最大的 云值,即为所求回归方程,这种方法称为"**向前法**"。

(猿) 也可以将上述方法结合使用。在增加一个新变量时,同时对原变量做云检验,剔除不合要求者。

远援 数据的标准化变换

在做回归的过程中,由于不同的自变量的取值范围与所取单位不同,给计算带来不便,从而也影响计算的精度,用被称为方差膨胀因子 灾陨云(灾葬则蚤葬灶糟藻 陨灶枣造葬贼蚤燥灶 云葬糟贼燥则)的指标对各变量之间的共线性影响进行评价 (即 载忆载的逆矩阵的对角线元素 糟$_{蚤蚤}$) ,当 灾陨云的最大值接近或超过 员园,则最小二乘法失真 ;而当 灾陨云接近 员时,认为共线性影响很弱。

因此为了统一不同的自变量取值范围、单位,减轻共线性影响,则首先对变量进行标准化：

$$\text{曾}_{\text{蚤}} \rightarrow \text{扎}_{\text{蚤}} \text{越} \frac{\text{曾}_{\text{蚤}} \text{原} \bar{\text{曾}}_{\text{蚤}}}{\sigma_{\text{蚤}}}, \text{赠}_{\text{蚤}} \text{越} \frac{\text{赠}_{\text{蚤}} \text{原} \bar{\text{赠}}}{\sigma_{\text{蚤}}}, \text{式中 } \bar{\text{曾}}_{\text{蚤}} \text{为第 蚤个变量均值 } \bar{\text{曾}}_{\text{蚤}} \text{越} \sum_{\text{噪越员}}^{\text{灶}} \frac{\text{曾}_{\text{噪蚤}}}{\text{灶}},$$

$$\sigma_{躁}为\ 曾_{躁}的方差,\sigma^{圆}_{躁}越\sum_{灶越员}^{灶}(曾_{躁}原曾_{躁})^{圆}$$

做此处理后再做回归,可使精度大大提高,共线性大大减轻。

此外,还可以对残差进行分析来评估回归的显著性,在此不做一一介绍。

例 猿援猿 施肥效果分析

对某地区作物进行施肥水平对产量影响的试验,以土豆和生菜为例。试验中,分别取了 晕,孕,运的 员园种水平进行检验,再将其中 圆种的用量固定在第 苑水平时,对第 猿种分别取 员园种水平。也就是说,对土豆和生菜分别给出了 猿组观测数据(见下表)。其中,可控制变量为 晕,孕,运的施用量,单位 噪早辕澡皂;相应变量为产量,单位 贼辕澡皂。由此试验结果,分析施肥量与产量之间关系,并找出最优的施肥方案。

对土豆:

摇摇阅晕:摇摇摇摇摇摇摇摇阅孕:摇摇摇摇摇摇摇摇摇阅运:

序号	施肥量辕(噪早辕澡皂)	产量辕(贼辕澡皂)	施肥量辕(噪早辕澡皂)	产量辕(贼辕澡皂)	施肥量辕(噪早辕澡皂)	产量辕(贼辕澡皂)
员	园	员缘援愿	园	猿猿援源远	园	员愿援怨愿
圆	猿源	圆员援源远	圆源	猿圆援源苑	源苑	圆苑援猿缘
猿	远苑	圆缘援苑圆	源怨	猿远援远远	怨猿	猿源援远远
源	员园员	猿圆援圆怨	苑猿	猿苑援怨远	员源园	猿愿援圆园
缘	员猿缘	猿源援猿猿	怨愿	源员援源源	员愿远	猿愿援源源
远	圆园圆	猿怨援缘缘	员源苑	源园援怨怨	圆苑怨	猿苑援猿猿
苑	圆缘怨	源圆援猿缘	员远远	源员援源远	猿圆园	猿愿援源猿
愿	猿猿远	源园援猿远	圆缘缘	源圆援苑苑	源远缘	源猿援愿苑
怨	源园源	源园援愿猿	圆源源	源圆援源远	缘愿愿	源圆援苑苑
员园	源苑员	猿猿援猿猿	猿源圆	源园援猿猿	远缘员	源远援圆圆

(员) 模型假设

① 由于试验在试验室进行,因此,假设试验条件相同(如环境条件、种植密

度、土壤肥力等）,产量与施肥量之间满足一定的规律；

② 每次试验独立；

③ 符号 宰:产量 晕 孕 运表示施用量：

栽$_{意}$:产品价格 栽$_{灶}$、栽$_{责}$、栽$_{噪}$:肥料价格；

砸:相关系数 云: 云检验值。

对生菜：

摇摇阅晕: 摇摇摇摇摇摇摇摇阅孕: 摇摇摇摇摇摇摇摇阅运:

序号	施肥量 辕 (噪早辕澡皂圆)	产量 辕 (噪早辕澡皂圆)	施肥量 辕 (噪早辕澡皂圆)	产量 辕 (噪早辕澡皂圆)	施肥量 辕 (噪早辕澡皂圆)	产量 辕 (噪早辕澡皂圆)
员	园	员远援园	园	远援愿怨	园	员缘援缘缘
圆	圆愿	员圆援苑	源怨	怨援愿	源苑	员远援远
猿	缘远	员源援远	怨愿	员圆援远	怨猿	员远援怨
源	愿源	员远援苑	员源苑	员源援猿	员源园	员远援源
缘	员圆园	员苑援缘	员怨远	员苑援员	员愿远	员苑援远
远	员远愿	圆园援怨	圆源源	圆园援源	圆猿怨	员愿援园
苑	圆圆源	圆员援猿	猿怨员	圆圆援源	猿苑园	员苑援苑
愿	圆愿园	员愿援源	源愿怨	圆员援源	源缘缘	员缘援源
怨	猿猿远	员远援园	缘愿苑	圆圆援苑	缘愿愿	圆园援员
员园	猿怨圆	员源援员	远愿缘	圆园援猿	远缘员	员愿援源

(圆) 农业理论

① 产量 宰可以用 晕 孕 运的三元二次函数表示；

宰(孕,晕,运) 越遭$_{园}$ 垣遭$_{灶}$晕垣遭$_{责}$孕垣遭$_{噪}$运垣遭$_{灶灶}$晕^{圆} 垣遭$_{灶责}$晕孕垣遭$_{灶噪}$晕运垣遭$_{责责}$孕^{圆} 垣遭$_{责噪}$孕运垣遭$_{噪噪}$运^{圆}

② 曰藻蚤贼糟澡藻则造蚤糟澡报酬递减理论 :设 澡为达到最高产量时的施肥量,边际产量 凿宰辕凿曾(产量关于施肥量的导数) 与 澡原曾成正比,凿宰辕凿曾越噪(澡原曾)

即 宰越遭$_{园}$ 垣遭$_{责}$曾垣遭$_{圆}$曾^{圆}

③ 米采利希学说 :只增加某种养分时,引起产量的增加与该种养分充足时

达到的最高产量 粤与 宰的差 粤原宰 成正比，即 宰辕增越鄄(粤原宰)

从而

宰 越粤(员原藻鄄)

摇摇考虑到土壤本身的肥力可修改为 宰越粤(员原藻鄄) 。

④ 英国科学家博依德发现：在某些情况下，将施肥效应分成几组，则各组的效应曲线为直线，如分成二组：

宰 越{糟 垣糟曾 园≤ 曾≤ 曾；糟 垣糟曾 曾≤ 曾约曾}

摇摇以这些理论为依据，可以对施肥效果进行分析。

(猿) 直观认识

氮肥对农作物（如：土豆生菜）的产量影响较大，因此，应满足 曼特塞里叹 皂蚤贼泽糟澡藻则造蚤糟澡的理论，即可用 宰越糟 垣糟曾垣糟曾 拟合；

磷肥对农作物（如：土豆生菜）的产量影响在开始较大，以后变弱，呈分段直线，符合博依德理论；

钾肥对土豆应满足 曼特塞里叹 皂蚤贼泽糟澡藻则造蚤糟澡的理论，呈抛物线，对生菜产量影响较小。

其次，农学知识告诉我们：施肥量较小时产量增加较快，达到一定水平，增加施肥量产量增加速度变缓，再增加，产量下降（发生烧苗现象）。

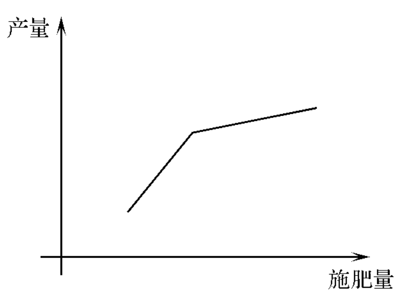


图 猿原缘

(源) 建立模型

模型 员 摇由以上分析，并用数学软件可得：土豆对氮肥效应曲线为

赠越员源援苑源缘垣园援员怨远猿曾原园援园园园猿猿曾

摇摇生菜对氮肥效应曲线为

赠越员园援怨园员垣园援园缘怨远曾原园援园园园员猿曾

摇摇土豆对磷肥效应方程，用分段直线拟合

迈源

赠越葬垣遭责垣糟(责原员园)垣其中

(责原员园)垣越{园 责约员园；责原员园 责≥员园}

摇摇显然,在责约员园时,赠越葬垣遭责;

摇摇在责≥员园时,赠越葬垣遭责垣糟(责原员园)越(葬原员园糟)垣(遭垣糟)责

摇摇变换:责越曾责,(责原员园)垣越曾圆,则赠越葬垣遭曾责垣糟曾圆

数据变换如下表:

曾责	曾圆	赠	曾责	曾圆	赠
园	园	猿缘援苑	员远	远	源缘援猿
圆原	园	猿愿援苑	员远	缘	源员援远
源	园	猿员援远	圆缘	员员	源愿援远
远	园	猿怨援苑	圆园	员园	源源援苑
缘	园	源员援员	猿圆	圆园	源愿援远

用数学软件得:

赠越猿圆援源源园员垣园援缘缘缘愿曾责原园援源缘园员曾圆

对上式进行反变换得

赠越{猿圆援源源园员垣园援缘缘缘愿责 园约责约员园；猿远援怨源员园垣园援员园缘苑责 员园约责约猿园}

土豆对钾肥的效应:可将非线性关系 宰(曾)越粤(员原藻原遭曾垣糟) 化为(取 粤越源愿援缘)

员原宰(曾)/源愿援缘越藻原遭曾垣糟

即 造(员原宰(曾)/源愿援缘)越原遭曾垣糟

摇摇从而化成了线性回归,将数据变换后,做线性回归得

宰(曾)越源愿援缘(员原藻原园援园园愿园曾原园援愿员员)

摇摇模型域 对土豆,分别建立了产量与施肥水平之间的多元回归模型,运用数学软件采用全回归可得结果:

园援员员缘源猿员源源垣园援园园园员园缘曾员原园援园园园园员员曾圆

垣园援园园园园怨源曾猿垣园援园园园园园园员曾员圆原园援园园园园园园员曾圆圆

垣园援园园园园园园员曾猿圆垣园援园园园园园园员曾员曾圆原园援园园园园园园员曾员曾猿

计算 云值及 杂杂耘,杂杂砸:

{宗砸，宗耘，云 越 {员缘怨援苑猿，远援缘愿元，圆缘援怨远源}

查表得：云$_{园援园缘}$(怨，愿) 越 猿援猿愿，云$_{园援园员}$(怨，愿) 越 缘援远员，可知其有很好的相关性。

(缘 模型分析

① 对模型 员进行分析，可得以下结论：

氮肥施用量过量，会造成减产，且当施用量增加时，对土豆开始产量增长较快(曲线为抛物线)；

磷肥在超过一定量后对产量影响小；

钾肥与磷肥有类似之处。

② 可以求出最佳施肥量。

当 $\frac{\text{蚤增}}{\text{蚤量}}$ 越 $\left(\frac{\text{栽增}}{\text{栽增}}\right)^{\text{原员}}$ 时，单位施肥量将发挥最大效益。

设 晕：源援猿远元 辕噪早，孕：猿援猿远元 辕噪早，运：猿援远远元 辕噪早，土豆：园援愿元 辕噪早，生菜：园援员元 辕噪早

$$\frac{\text{蚤增}}{\text{蚤量}} 越 \text{园援远缘苑原园援园园园圆愿晕越} \frac{\text{栽增}}{\text{栽增}} 越 \frac{\text{园援愿}}{\text{猿援远园}}$$

晕 越 园援猿远员(噪早 辕澡皂圆)(最大值点 园援愿怨苑)

摇摇磷肥施用量为二直线交点，孕越 圆援远源(噪早 辕澡皂圆)。

③ 模型 员未考虑交互影响，但由于数据的缘故，不能考虑交互影响。可重新设计实验[猿]。

而模型 圆采用全回归。受数据影响，要用逐步回归(用递增变量法，用减变量法不行，这因(载忆载)$^{\text{原员}}$不存在，无法对系数检验)，不再详述。

第四节摇图论模型

图论产生于**哥尼斯堡(运觟灶蚤早泽遭藻则早)七桥问题**，哥尼斯堡那里有一条河，称为普雷格尔(孕则藻早藻造)河，河上有七座桥(图 猿原员远)。

当地人们试图沿河上每一座桥走一遍，且每一座桥只走一次再返回原出发地，但没有人能够成功。这就是被称为**哥尼斯堡七桥问题**的一个难题。著名数学家耘怎造造强将其转化为图（员苑猿远年），从而，哥尼斯堡七桥问题转化为图论上的**一笔画问题**。

一、基本概念及几个问题

在图论中，由顶点集 穴(郧) （穴藻则赠曾 以及边 耘(郧) （耘藻缘藻，顶点之间的连线，组成的图形称为图（郧则藻缘藻。

图上顶点与顶点间可能有边，也可能无边，我们称为有、无关系。借用代数中的“关系”概念：设有二个集合 粤，月，粤与 月的乘积为 粤伊月越{(曾，赠)渣曾∈粤，赠∈月}，粤伊月的子集 砸⊂粤伊月称为 粤与 月的一个关系。例如：同学关系；师生关系；父子关系等。

特殊的关系有：等价关系 砸，满足 员援自反性：(曾，曾)∈砸；圆援对称性：(曾，赠)∈砸则(赠，曾)∈砸；

猿援传递性：(曾，赠)∈砸，(赠，扎)∈砸则(曾，扎)∈砸。

图可以表示为 郧(穴，耘) 或 (穴(郧)，耘(郧)) 越郧或 郧(穴，砸) （砸是 穴与 穴的一个关系）。

图分为有向图，对应边有方向，从而对应的关系不满足对称性；**无向图**，对应边无方向。

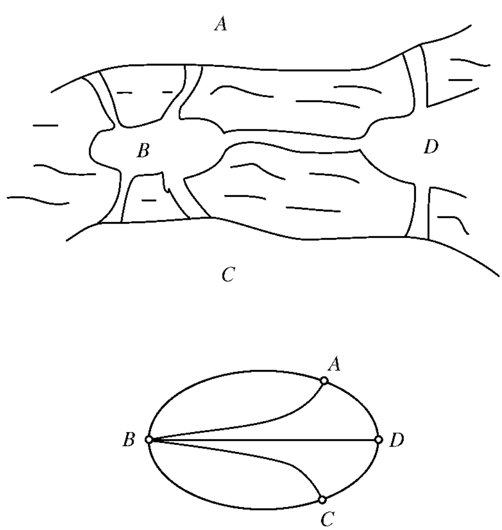


图 猿原远

如 :集合 粤越{北京、天津、上海、重庆}以及两地之间的航线可得一图 (图 猿原苑。按水路则可得另一图。

图是由顶点与部分顶点间连线组成。

例 :集 粤越{张三 (粤、李四 (月、王五 (悦、赵六 (阅}，张三是李四、王五的老师,赵六是李四的老师,李四是王五的老师。用图表示即图 猿原愿 这是一个有向图，对应的关系 砸越{(粤,月，(粤,悦，(阅,月，(月,悦}。

图的边可用 怎憎(怎,增为端点) 或 藻表示；

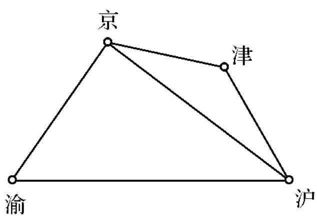


图 猿原苑

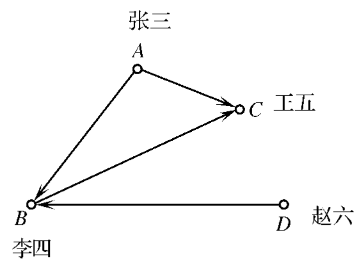


图 猿原愿

顶点相邻 :两个顶点与同一条边相邻；

环边 :一条边的两个端点重合，图 猿原怨中的 藻圆；

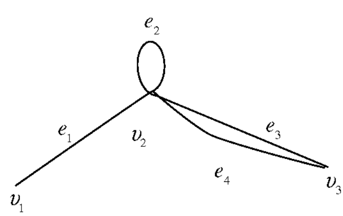


图 猿原怨

重边 :端点重合的两条边如图 猿原怨中 藻猿,藻源；

轨道 :由顶点到边到顶点……最后到顶点组成的图。如 增圆藻贠增贠藻圆…增灾原贠藻灾是一个轨道；

迹 (链) :边不重的轨道 (顶点可能重合)；

简单图 :没有环边也没有重边的图；

路 (轨) :顶不重的轨道。闭合路叫圈。

对于图我们只关心有边、无边、是否相邻,不关心形状,即同一图可以有不同的形状,如图 猿原圆园的 (葬 (遭 表示同一个图。

子图 :设图 郧贠越(灾(郧贠)，耘(郧贠)),郧圆越 (灾(郧圆)，耘(郧圆)),如果 灾(郧贠) ⊂灾(郧圆)，耘(郧贠) ⊂耘(郧圆) ,郧贠称为 郧圆的子图。

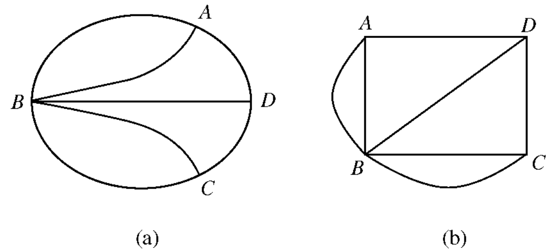


图 猿原圆

偶度点 :与偶数条边相邻的点；

奇度点 :与奇数条边相邻的点。

二、几个问题

(员 **耘怎造藻则圈 (环游)** :自图的任一点出发,每条边经过且仅经过一次再回到出发点的图 **耘怎造藻则图 (途径) (或一笔画)** :从图的任一点出发,每条边经过且仅经过一次的图；

耘图 :每一顶点为偶点的图；

耘链 :经过每一边的链；

酝图 :仅有两个奇点的图 (与 耘链的区别 :酝图必有两个奇点,耘链未必) 。

讨论 :耘怎造藻则圈,耘图,酝图是否存在？如何求出？

(圆 **匀葬皂蚤造贼燥灶路** :包含图的所有顶点的路；

匀葬皂蚤造贼燥灶回路 (圈) :包含图的所有顶点的圈。

(猿 **中国邮路问题** :一邮递员从邮局出发去各街道投递信件,然后再回到邮局,每条街道至少经过一次,求一条路使其走过的路线最短。

本问题在 员怨远圆年由山东大学管梅谷先生提出,所以称为**中国邮路问题。**

(源 **货郎担问题 (又名旅行售货商问题)** :一货郎挑着担子走村串巷卖东西,求一条经过每一村的最短的路。

(缘 **平面图** :能画在平面上且相异边不相交的图,典型的例子是**房屋和井。**

(远 **偶图与对集** :两个点集,以及边是由分别与另一个集合中点相连的图。

(苑 **四色问题** :任何一张地图,都可以用不超过四种颜色涂色使之任意相邻区域为不同颜色。

(愿 **最小生成树。**

下边分别介绍这些问题。

三、耘怎造藻则图与中国邮路问题

定理 猿原员 摇图 郧为 耘怎造藻则环游（或 耘怎造藻则图）的充分必要条件是连通图 郧中任一顶点全为偶度点。

证明 颐必要性 颐不妨设 宰为 郧的 耘怎造藻则环游，则每一顶点 增的度数 噪必为偶数（耘怎造藻则环游为圈）。

充分性 颐分三步 （员） 若对于图 郧的任一顶点 增，凿（增）≥圆，则 郧至少含有一个圈。

（圆） 郧由 灶个无公共边的圈组成。

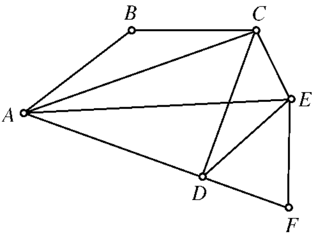


图 猿原员缘

由（员），郧至少有一圈 运圆，我们从 郧中删去 运圆（若顶点 增的度数为 圆则此顶点被删去，否则不删去），剩下的图仍满足定理条件，故可重复上述步骤有限次，如 灶原员次，则剩下一个圈 运灶，从而 郧由一些圈组成且每条边仅属于一个圈。

（猿） 郧为 耘怎造藻则环游。设 郧为 郧员，郧圆…郧灶的并（郧蚤由（圆）得到的圈），郧蚤无公共边。只要证明 颐∀ 员≤噪≤灶，存在闭路 憎恰含 噪个圈。

归纳法 颐摇若 噪越员明显为 耘怎造藻则环游，取 憎越郧员即可。

设 员≤噪≤灶时 郧为 耘怎造藻则环游，即存在闭途径 憎包含 噪个圈。由于 郧为连通图，故在剩余的 灶原噪个圈中必含有一个圈 悦与 憎有公共顶点（否则将不连通），不妨设有相同的起点（且为终点），于是 憎越憎乙悦恰含（郧蚤） 中 噪垣员个圈。

推论 颐（一笔画定理） 摇一个连通图 郧为 耘怎造藻则途径（即一笔画成）的充要条件是它至多含有二个奇度点。

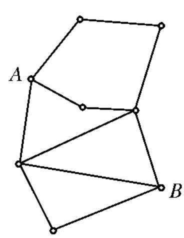


图 猿原圆圆

证明 颐**充分性** 颐若去掉两个奇度点间的一条路径（如图 猿原圆圆）则图为 耘怎造藻则环游，不妨设该环游从其中一个奇度点出发且回到该奇度点，再沿去掉的一条边到另一个奇度点，即知该图为 耘怎造藻则途径。

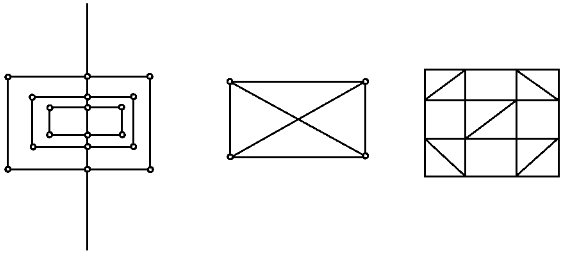
必要性 颐若 郧为 耘怎造藻则环游，则由定理知每个顶点为偶度点。否则，设 忆园，增园为 耘怎造藻则途径的起止点，则 郧垣忆园增园有 耘怎造藻则途径，从而仅有 忆园，增园为奇度点。

例 猿原苑 摇七桥问题

可化为图 猿原远，由于 粤，月，悦，阅皆为奇度点，故不能一笔画成。

另外图 猿原圆猿中的（葬）（糟）是 耘怎造藻则途径，（遭）不是 耘怎造藻则途径。

定理 猿原圆 摇若图 郧有 圆噪个奇度点，则该图可以用 噪笔画成。



(a)　　(b)　　(c)

图 猿原圆缘

例 猿原圆愿摇在一个晚会上握过奇数次手的人的个数是偶数。

以人为顶点，握过手则在这两个顶点（人）间连一条边。显然，该图的奇度点个数为偶数个。

例 猿原圆怨摇图 猿原圆原有 愿个奇度点，故需 源笔画成。

例 猿原圆园摇**中国邮路问题**

一邮递员从邮局出发去各街道投递信件，然后再回到邮局，每条街道至少经过一次，求一条路使其走过的路线最短。

若所研究的问题为 耘怎造藻则环游，则问题显然，且 耘怎造藻则环游为最佳路线。否则以如下问题（如图 猿原圆缘非 耘图）为例说明中国邮路问题的解法：

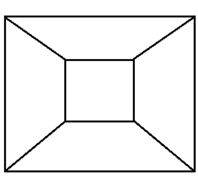


图 猿原圆原

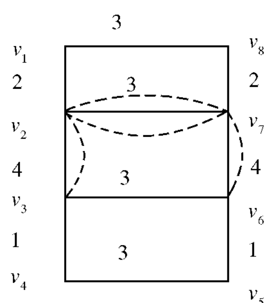


图 猿原圆缘

第一步，将图变为 耘怎造藻则环游摇（由于 增圆，增猿，增远，增苑为奇度点，故非 耘图）。

首先，增加边使每一奇度点变为偶数点。其次，若某二点间重边数多于一条，则去掉偶数条；最后检查含有重边的圈。若各圈长度 跃圆重边长，则方案最优，否则调整，将原来重复的边去掉，没有重复的边加上边（变成重边）。

摇摇如此可将问题转化为 耘怎造藻则环游问题。

第二步，对于 郾为 耘怎造藻则环游情况，求出 耘怎造藻则回路。

云造藻则算法——求耘怎造藻则环游的算法（见图 猿原圆远

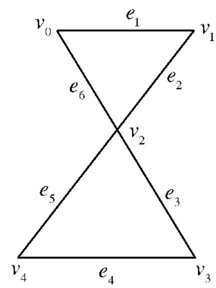


图 猿原圆远

(员) 取 增∈ 灾(郧)，记 憎 越增；

(圆) 设 宰 越增蓄增藁…藻增已选定，则从 耘原{藻…藻} 中选取一条边 藻使①藻与 藻相邻；②除非不得已，藻不是 郧原{藻…藻} 的桥（桥：如果 藻不在 郧的任一圈或去掉 藻图不连通则，藻称为图 郧的桥）。

(猿) 重复 (圆) 直到不能进行，即得一条 耘怎蚤造藻则环游。

第三步，求图的 耘怎蚤造藻则途径。

定理 猿原圆猿摇若 郧是 耘怎蚤造藻则环游，则 云造藻则赠算法终止时即得到 耘怎蚤造藻则回路。

例 猿原远摇扫雪问题

（粤蚤糟澡蚤云原圆缘月美国数学建模竞赛 怨远月题）考虑两辆扫雪车清扫路面积雪问题。

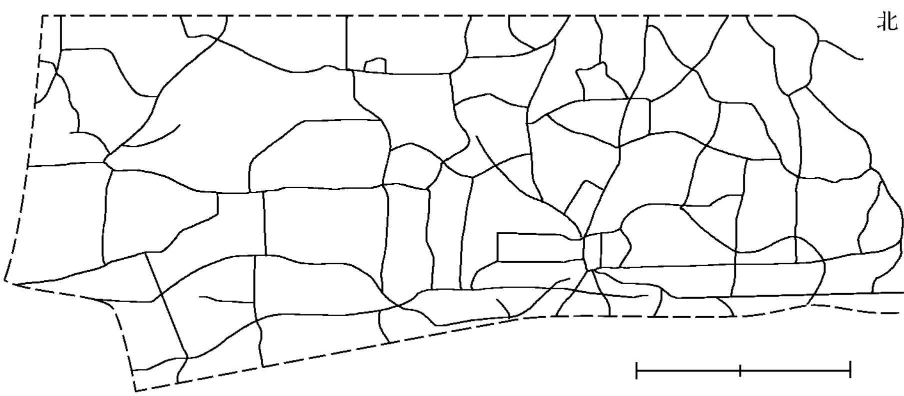


图 猿原圆苑

图 猿原圆苑中的实线表示马里兰州威考密科县中扫雪区域中的两车道马路，虚线表示州属高速公路。一场雪后，从位于 ∗ 标记地点以西 源皂的两处车库派出两辆扫雪车。求用两辆扫雪车清扫路面上的雪的有效的方法，扫雪车可以利用高速公路进入扫雪区。

假设扫雪车既不会发生故障也不停顿，在交叉路口不需要特别的扫雪方法。

做法：

员援量出各条道路长度（可用丝线沿道路曲线测量），得到一个加权图，从而问题转化为中国邮路问题。若只有一辆扫雪车，且地图为 耘怎蚤造藻则图情形，则可按

云造栽则算法求出 耘的造栽途径即为最佳扫雪方案。

圆援若地图不是 耘造栽图的情形，则要在某些边重复，即增加一些重边使之变为 耘造栽图。问题则转化为求一个新边集 耘忆，使 郧忆（灾，耘∪耘忆）为 耘造栽图前提下，$\sum_{藻\in耘忆}\omega$(藻)最小。

(员) 若地图只有两个奇度点，则只要在该两点间加一“边”即可：若相邻，则在该两点间连一条边即可；非相邻，则用下面 阅蚤躁噪泽贼则算法求出最短路线，然后在该线路上的每一边加一重边即可得到一 耘造栽图。

阅蚤躁噪泽贼则算法：

① 蕴(怎$_园$) 越园，蕴(增) 越肄，增≠怎$_园$，杂越{怎$_园$}，蚤越园，转②；

② 对每一 增≠杂$_蚤$，用 皂蚤灶{蕴(增)，蕴(怎$_蚤$) 垣宰(怎$_蚤$增)} 代替 蕴(增)，设 怎$_{蚤垣员}$为 蕴(增)中最小者 (增≠杂$_蚤$) 令 杂$_{蚤垣员}$越杂$_蚤$∪{怎$_{蚤垣员}$}，转③；

③ 若 蚤越灾(郧) 减员，则停止；若 蚤约灾(郧) 减员，则转②。

此时，每个顶点所标 蕴(增)即为到 怎的最短距离，此算法的复杂度 韵(灾^圆)（顶点数 灾的平方的一个同阶量）。

阅蚤躁噪泽贼则算法不仅给出了两点间的最短距离，而且由此可得到最短路线。

(圆) 多于两个奇度点，则易知其奇度点个数为偶数个。可将所有的奇度点之间分别联一条“边”并使得所联“边”的总长度为最短（这里边的意义同(员)）。

这样得到的图即为最短路线（其中重边即为需要重复走的路段）。

下面用实例（图 猿原圆原缘）说明做法：

(员) 求奇度点集 载$_员$越{①②③④}；

(圆) 用 阅蚤躁噪泽贼则算法求出对应点间最短距离：

	员	圆	猿	源
员	园	源	缘	苑
圆	源	园	圆	缘
猿	缘	圆	园	猿
源	苑	缘	猿	园

摇摇(猿) 构作加权完全图 运(载$_员$，耘$_园$)（完全图：任意两顶点间都有边的图）。图 猿原圆原远(对奇度点集)；

(源) 求出最佳匹配摇{①②，③④}

①② 垣③④最小，此时保证：①过每一奇度点，增一边（使每一奇度点变为偶度点）②增加的边的总长最短；

(缘) 求出①—②最短路①—⑦—②，

③—④最短路摇③—④；

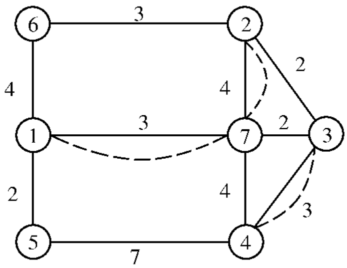


图 猿原圆愿

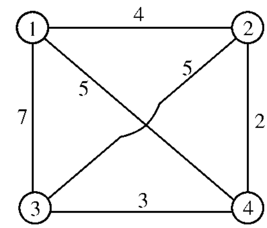


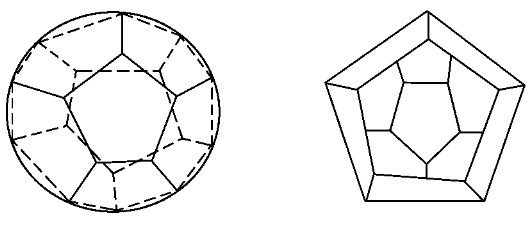
图 猿原圆怨

(远 在相应边上加一同权新边,即得 耘怎造造赠图 郧忆;

(苑 求出 郧忆上 耘怎造造赠路 (用 云造藻怎则赠算法)。

四、货郎担问题,匀葬皂蚤造贼燥灶路问题

员愿缘怨年,著名数学家 匀葬皂蚤造贼燥灶提出了“周游世界游戏”:用正十二面体的 圆园个顶点代表 圆园个大城市名称 (图 猿原猿园(葬))。要求玩的人从某大城市出发,沿着正十二面体的棱通过每个大城市恰好 员次,再回到出发城市。这种游戏曾风靡欧洲一时,后来 匀葬皂蚤造贼燥灶以 圆缘个金币的高价把该项专利卖给了一个玩具商。



(a) (b)

图 猿原猿园

若将图中前面的五边形 (即实线部分)“拉开”,使之变成平面图则得到下边的图形 (图 猿原猿园(遭))。

问题转化为:在图上找一条从某点出发的道路经过所有顶点一次且仅一次回到起点。

含图上一切顶点的道路称为 匀葬皂蚤造贼燥灶路;闭的 匀葬皂蚤造贼燥灶路称为 匀葬皂蚤造贼燥灶圈。

寻找 匀葬皂蚤造贼燥灶路 (圈) 是图论上难点之一,至今未发现 匀葬皂蚤造贼燥灶路存在的充要条件,下面是一些主要结论[源,缘]:

充分条件 员设图的顶点数为 灶(≥猿), 若对于任意 怎,增∈灾(郧), 凿(怎)+凿

(增≥灶,则 郧为 匀葬皂蚤造贼燥灶圈 ;若对于任意 怎,增∈ 灾(郧) ,凿(怎) 垣凿(增)≥灶原员,则该图存在 匀葬皂蚤造贼燥灶路。

充分条件 圆:设图 郧的顶点数 灶(≥猿),增为度数最小的顶点,若 凿(增)≥灶/圆,则 郧为 匀葬皂蚤造贼燥灶图。

充分条件 员,圆的本质 :每个顶点的度数均充分大。

充分条件 猿:郧为 灶个顶点 (灶≥猿) 的连通图,∀噪≤ (灶原员)/圆的正整数,次数小于 噪的顶点数≤噪,则 郧为 匀葬皂蚤造贼燥灶图。

例 猿原远 摇亚瑟王 (传说中的英国国王) 在宫中召见他的 圆灶个骑士,而骑士中有些有怨仇。若已知每个骑士最多与 灶原员个骑士有仇,问能否将这 圆灶名骑士在一个圆桌上安排就餐,且使每个骑士不与他的仇人相邻 (其谋士摩尔林做到了这一点) 。

解 :化为图论问题 :以 圆灶个图的顶点表示骑士,若二骑士之间无仇则在二顶点之间画一条边,得到一图 郧(灾,耘) 。问题转化为 :是否能在图 郧(灾,耘) 上寻求一条 匀葬皂蚤造贼燥灶圈。

由条件,每一顶点的度数≥灶,故∀怎,增∈ 灾,凿(怎) 垣凿(增)≥灶垣灶越圆灶,由充分条件 员知存在一条 匀葬皂蚤造贼燥灶圈。

上述条件为充分而非必要条件。如周游世界游戏 (图 猿原猿缘) 不满足条件,但存在 匀葬皂蚤造贼燥灶圈。

引入如下概念 :

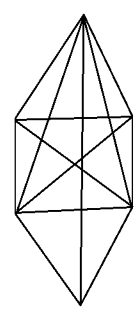


图 猿原猿远

图的闭包 :若图 郧的任意顶点 怎,增满足 凿(怎) 垣凿(增) 跃灾 (顶点数) ,则当这两点之间无边时,连一条边。依次做下去直到不存在这样的顶点,这样得到的图称为图 郧的闭包,记为 悦(郧) (如图 猿原猿远) 。

定理 猿原苑 (充要条件) 摇图 郧为 匀葬皂蚤造贼燥灶图的充分必要条件是 悦(郧) 为 匀葬皂蚤造贼燥灶图。

注意 :此条件仍不能判断周游世界游戏为 匀图。

目前,对如何判别一个图为 匀葬皂蚤造贼燥灶图仍是世界难题。

与之相关的问题是 :

货郎担问题 :一货郎挑担到 灶个村去卖货,能否找到一条最近的路,使货郎恰经过各村庄一次再回到出发地 (假设各村之间路程为已知) 。

它可以视为加权匀葬皂蚤造贼燥灶圈问题,记 郧(灾,耘,憎) (憎为相应边的权) 。

匀葬皂蚤造贼燥灶图可视为特殊的货郎担问题,即各边权值相等皆为 员。

由于 匀葬皂蚤造贼燥灶图的判别仍是未解决的问题,因此,货郎担问题当然无法解决。

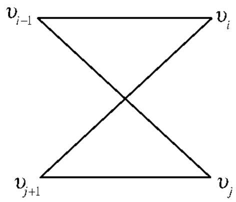


图 猿原猿圆

思路 员将通过各顶点的道路方案“历数”,比较并找出最佳路线。但这是不现实的:如有 圆园个村庄,任两个村之间都有路相通,则要比较 $\frac{员}{圆}$伊园! 越 圆援苑伊员园[员愿]次,这在每秒千万次的计算机上也要计算 苑远园年[缘]。

思路 圆:当已知 糟越增员增圆…增灶增员为一回路,则可用下边的“**改良圈算法**”进行优化,得到一条最佳路线。

改良圈算法图 猿原猿圆

(员) 检查 糟上是否有 蚤≠躁使 增蚤原员增躁原员∈耘(郧),增蚤增躁∈耘(郧) 且 憎(增蚤原员增躁原员)垣憎(增蚤增躁) 约憎(增蚤原员增蚤)垣憎(增躁原员增躁),若有则改造为新圈:糟员越增员…增蚤原员增躁原员…增蚤增躁…增灶增员,糟员称为 糟的改良圈。

(圆) 用 糟员代替 糟转入 (员) 直至终止。

该算法计算复杂度为 韵(灶[猿]) 。

此算法前提 增蚤原员增躁原员及 增蚤增躁有边,否则无法“改良”。特别,当图为完全图时,此算法有效。

例 猿原猿猿 一学者从北京 (孕藻) 到伦敦 (蕴)、墨西哥城 (酝糟)、纽约 (晕再)、巴黎 (孕葬)、东京 (栽) 讲学 (各地之间的距离见图 猿原猿猿,单位:百公里),现为其设计一路程方案,使之花费最少。

取初始圈

糟越(孕藻)(栽)(蕴)(酝糟)(晕再)(孕葬)(孕藻)

总路程

员猿垣远员垣缘员垣圆员垣远员垣缘员越圆缘远(百公里)

用改良圈算法计算 (如图 猿原猿源),计算结果:

糟员越(孕藻)(栽)(蕴)(孕葬)(晕再)(酝糟)(孕藻) 越圆员远

糟圆越(孕藻)(栽)(酝糟)(晕再)(孕葬)(蕴)(孕藻) 越员猿远

糟猿越(孕藻)(栽)(酝糟)(晕再)(蕴)(孕葬)(孕藻) 越员猿圆

糟猿为最佳路线。

思路 猿:可用“最邻近方法”或称“贪婪算法”。

方法:从 增圆出发,比较 增圆到 增员,…,增灶的边长,先到距 增圆最近的点,依次下去可得一条较好的线路。

例 猿原猿源 有一商店 增员,售货点 源个,他们之间路程如图 猿原猿缘。

按贪婪算法解得最佳路线为 增员增源增猿增缘增圆增员(长度为 源园),但 增员增缘增圆增猿增源增员(长度为 猿怨) 更优。

此算法未必能得到最佳路线,但算法简单,容易实现。

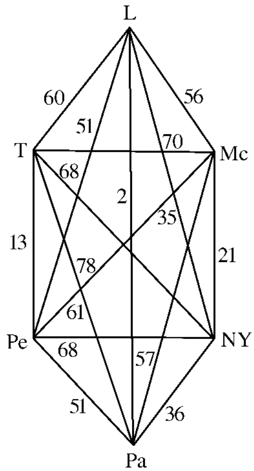


图 猿援苑

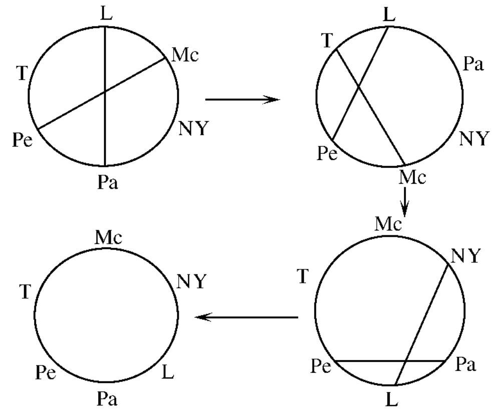


图 猿援愿

思路 源：最近插入法

方法：设已得到一部分顶点的 匀葬皂蚤造贼燥灶 圈 灾噪。在剩余点中寻找距 灾噪 中点最近的点加入 灾噪 得 灾噪垣员。而新点加在哪里，可采用比较方法，即将该点加至不同位置，取路径最短者。

又解例 猿援远，采用“最近插入法”：

先取 增员 作为 灾员。显然下一点取 增源，加入 灾员 得到 灾圆越增员增源增员 回路。再看距 增员，增源 最近的点。比较 增员增圆越苑，增员增猿越员园，增员增缘越员员，增源增圆越员猿，增源增猿越远，增源增缘越员员，故增加 增猿。

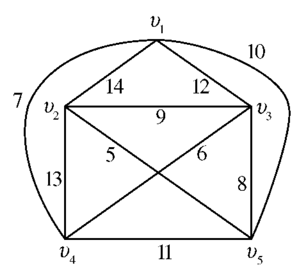


图 猿援怨

又比较不同的路线长度 增员增猿增源增员 越员园垣远垣苑越圆猿，增员增源增猿增员 越苑垣远垣员园越圆猿，两者相同，不妨取新回路为 灾猿 越增员增猿增源增员；再计算出距 {增员，增源，增猿} 最近点 增缘，找出最佳回路 灾源 越增员增源增猿增缘增员 越{增员，增源，增猿，增缘}。剩惟一点 增圆，最后比较得最佳回路 增员增源增猿增圆增缘增员，总距离 猿苑。

五、好算法与 晕孕完全问题

下面就此问题作一个简单介绍。

员怨远缘年，匀葬则贼皂葬灶蚤泽和 杂贼藻葬则灶泽在所谓 栽怎则蚤灶早机的意义下（它是一个数字概念，也是后来真正计算机诞生的理论基础），提出了所谓**计算复杂度**的概念。

定义 猿援猿（员怨远缘，杂贼藻葬则灶泽，匀葬则贼皂葬灶蚤泽）某问题在 栽怎则蚤灶早机[源，缘]上的计算时间作为输入长度 灶 的函数，有某个多项式为其上界，则称该问题有**多项式时间算法**。

好算法 ：若给定一问题，如果某算法使得：对于输入长度为 灶，存在一个多项式 孕(灶)，使该问题使用本算法至多经过不超过 孕(灶) 次的运算，可得到其解，则称此算法为好算法。

坏算法 ：若给定一问题，如果某算法使得：对于输入长度为 灶，至少要经过 灶 的某指数函数次运算得到其解，则称此算法为坏算法。

如某问题的计算复杂度为 圆灶，则若某问题能在 员秒完成 圆灶园，现改进计算机为原机器的 员园园园 倍速度，则新机器在 员秒内可处理 圆灶 越 圆灶园 伊 员园园园，此时 灶 越 灶园 垣 造燥早员园园园 约 灶园 垣 员园，即计算机运算速度提高 员园园园 倍，仅能增加 员园 个参数长度，从而使我们试图用改进计算机的办法解决问题的目的不能实现。

而类似的对于某 灶圆 算法，灶圆 越 员园园园灶园圆，则 灶 越 员园园灶园，即当计算机的速度提高 员园园园 倍，就可以使 灶园 的数值提高 员园园 倍。

如：前面我们介绍过，线性规划有多项式算法，从而可以在计算机上实现有效的求解。另外，阅蚤躁噪泽贼则葬 算法、改良圈算法等是好算法。

但有些问题没有多项式算法，如货郎担问题（或旅行售货商问题）。

也有许多问题，虽没有多项式算法，但可以将其转化为判定问题（如果某问题的答案为是或不是，则称该问题为判定问题）。

一个判定问题 阅 在不确定 栽怎则蚤灶早 机上在多项式时间内被解决是指：对于问题 阅，存在多项式 孕(灶)，使得对 阅 的输入长为 灶 时，若其答案为“是”，则存在一个猜想，对于它，机器在 孕(灶) 时间内停机于“再藻泽”状态；若其答案是“否”，则对于每个猜想，在 孕(灶) 时间内 栽怎则蚤灶早 机皆停机于“晕燥”状态。

注意：这里不确定 栽怎则蚤灶早 机概念中“不确定”三个字的含义是：上述的“若答案为‘是’，则存在一个猜想，对于它，机器停机于“再藻泽”状态”一语中，我们只是相信有这么一个猜想存在，但并未给出一个确定的方法可以找到这个猜想。也许我们侥幸碰上了这么一个猜想，但这种幸运是罕见的；或者这个问题的答案是否定的，这时，要逐个验算猜想，而猜想却有 渣Γ渣孕(灶) 原员 个（Γ 表示纸带上带符集合，输入符是带符的子集），要用 责(灶) 渣Γ渣孕(灶) 原员 时间来完成，这是一个可怕的指数时间，会随着 灶 的增大而爆炸性增大，所以用这种方法来求解，实际上是不现实的，也就是说，用 栽怎则蚤灶早 机如此解决问题不可能实际地得出确定的答案。

不确定 栽怎则蚤灶早 机对于解决问题实际上是个无效的工具，它只有理论上的价值，借助于它，我们可以建立 晕孕 问题的概念。

孕 问题：对于一个判断问题 阅，存在一个多项式时间算法解决该问题，则此类问题称为 孕 类问题集合，记为 孕。

定义 猿援员园援圆 凡在多项式时间内能被不确定 栽怎则蚤灶早 机解决的判定问题之集合叫做 晕孕 类判定问题集合，记做 晕孕。

对于上述的**货郎担问题**可以转化为判定问题：给出一个边长为自然数的图和一个自然数 噪问是否有长度不超过 噪走遍所有顶点的巡回路线？

对于这个判定问题，可以在所谓不确定 栽怎灶蚤灶早机上找到多项式算法。于是，**货郎担问题**是一个 晕孕问题。

下面介绍 晕孕完全问题：

首先，若某问题 粤能在多项式时间内归结为问题 月，则记为 粤∝ 月。

定义 猿援缘援苑（悦完全问题） 考虑由判定问题组成的集合类 悦，若 月∈ 悦且对于任何 粤∈ 悦，有 粤∝ 月，则称 月为 悦完全问题。显然，悦完全问题⊂悦。

定义 猿援缘援愿（晕孕完全问题，记为 晕孕悦） 对 月∈ 晕孕，若∀ 粤∈ 晕孕，粤∝ 月，则 月∈晕孕悦。

显然，孕⊆ 晕孕。但 孕越晕孕是否成立？这是一个尚未解决而其意义十分深远的问题。

定理 猿援缘援员若 月∈ 孕，粤∝ 月，则 粤∈ 孕。

由此知：(员) 一个 晕孕完全问题∈孕，则所有 晕孕完全问题∈孕；

(圆) 一个 晕孕完全问题∉孕的充分必要条件是 孕≠ 晕孕。

因此，能否找到一个 晕孕问题，说明其∈孕或∉孕(即证明 孕越晕孕或 孕≠晕孕)仍是个世界难题。

从 员怨苑员年多伦多大学 悦燥燥噪找到了第一个 晕孕悦问题，陆续繁衍出大批的 晕孕悦问题，目前已达 圆园园园多个[阅]。对 晕孕悦问题，目前更倾向于 孕不等于 晕孕的看法，即这些问题也许根本不存在多项式时间算法。

六、树，最小生成树

定义 猿援远援员无圈连通图称为**树**；只有孤立顶的树称为**平凡树**；每个连通片都为树的图称为**林**。

定理 猿援远援员对于树，如下结论等价：

① 郧为树；

② 郧中任二顶之间有且仅有一条路；

③ 郧中无圈，且 洙（郧）越渊（郧）原员；

④ 郧连通且 洙（郧）越渊（郧）原员；

⑤ 郧连通，∀ 藻∈ 耘，郧原藻不连通；

⑥ 郧无圈，∀ 藻∉ 耘，且以 灾中点为顶，郧垣藻恰有一圈。

定义 猿援远援圆若 郧$_{员}$是 郧的子图，若 灾$_{员}$越灾，耘$_{员}$⊂耘，耘$_{员}$≠耘，则称 郧$_{员}$为 郧的**生成子图**。

若 郧贼 又是树，称 郧贼 为 郧的**生成树。**

一个图的生成图很多，如仅 员园个顶的完全图有 员园^员园原圆（员亿）个生成树。

定理 猿原苑 摇灶个顶点的完全图的生成树共 灶^灶原圆个。

员怨世纪中期，克希霍夫（运蚤则糟澡澡燥枣枣，员愿圆源—员愿愿苑年）在研究电网时巧妙的应用了生成树的概念；凯莱（悦葬赠造藻赠，员愿圆员—员愿怨缘年）利用树的概念成功的解决了有机化学中的同分异构体。使树的理论获得发展。

求生成树可用**月云杂（月则藻葬凿贼澡 云蚤则泽贼 杂藻葬则糟澡）方法**。

算法如下：

（员）取 增∈ 灾（郧），标 员（增） 越园，取 员越园；

（圆）所有标号为 员的顶 怎的相关联的顶均已标号为止；否则把与 怎相邻的未标号的顶标以 员垣员，记录这些边（图 猿原远中用粗线，注意不重复标记）。且以 员垣员代 员转（圆）步骤；

（猿）终止。

该算法终止得到的标记边即为生成树。

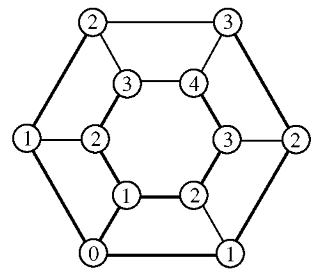


图 猿原远

例 猿原员 摇设 员，圆，…，灶表示 灶个城市。若 蚤，躁城市之间的铁路造价为 悦蚤躁，设计一个线路图，使总造价最低。

即求连通（加权）图的**生成树**使其权最小，称**最优树**。

若 灶较小，求出所有生成树再比较找出最优树即可。若 灶较大，将所有生成树皆求出再比较是不现实的。因为一个完全图的生成树共有 灶^灶原圆个，为幂指数函数。一般情况下，可用 **运则怎泽噪葬造算法**找出最小生成树。

运则怎泽噪葬造算法（求最小生成树）：

（员）选 藻员∈ 耘，使 ω（藻员） 越皂蚤灶{ω（藻蚤），蚤越员，圆，…，灶}；

（圆）若 藻员…藻噪已选好，则从 耘原{藻员…藻噪} 中选取 藻噪垣员，使得：① 郧[{藻员，…，藻噪，藻噪垣员}] 无圈，② 求 藻噪垣员使 ω（藻噪垣员） 越皂蚤灶{ω（藻）｜藻∈ 耘原{藻员，…，藻噪} 且 {藻员，…，藻噪，藻噪垣员} 无圈}；

（猿）继续到第 灶原员个 藻（藻灶原员）选出。

由定理 猿原远边的个数 越灶原员表示图为连通图，故 运则怎泽噪葬造算法的结果为 郧的最小生成树。

定理 猿原愿 摇运则怎泽噪葬造算法得到的生成子图为最优树。

七、迷宫，扫雪问题

迷宫问题有二类：（员）从入口进入迷宫中心（有财宝、怪物、点将台）；（圆）在迷宫中迷路后再走出来。如神话中的英雄瑞典王子 栽澡藻泽藻怎泽被绑架到迷宫中

心，公主亚利阿特涅给他一团线，让他边走边放。王子最后借助这一条线指示的路线逃出。

图论提法：从图的一个顶点出发，游历图中每一条边，二次且仅二次（见图 猿原藐莼）。

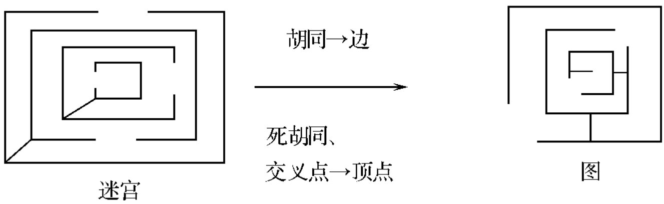


图 猿原藐莼

下述方法是实现上述问题的有效方法：

（员）耘葬则赠算法摇当到达一个交叉点 增时，二件事情已知：① 与 增相邻的且离开 增的方向、已经走过的边的集合；② 我们初次到达 增时所经过的边（进入边）。此时，当到达 增时，继续沿着一条尚未按 增到 增方向走过的边（增增）前进，除非不得已，不要选进入边。

可以证明 按 耘葬则赠算法一定可以从 增到 增且每条边恰走二次。

（圆）沿墙向右拐摇无圈时，沿墙向右拐不失为一种走迷宫的方法（有圈时可能形成死循环）。

（猿）纵深搜索法摇（阅云杂说噪蕴藻灶云澡泽早葬灶增灶澡则造，员怨苑猿，匀葬则躁葬灶和栽葬则躁葬灶提出）

① 标志一切边“未用过”，对每一顶 增 灾(郧)，噪(增)←园令 蚤—园增—泽

② 蚤—蚤垣员，噪(增)←蚤

③ 若 增无未用过的关联边，转⑤；

④ 选一条未用过的与 增关联的边 藻越(增，怎)标志 藻用过了”；若 噪(怎)≠园转③；否则（噪(怎) 越园），枣(怎)←增增—怎转②；

⑤ 若 噪(增) 越员，终止；

⑥ 增—枣(增)，转③。

易知 阅云杂过程中，图的每一边恰通过二次。

再分几种情况讨论例 猿原员（粤曾运灶扫雪车—怨远园）扫雪车问题：

若只有一辆扫雪车，双行道（相对于一辆车可清扫一半路面），则可用上述算法按走迷宫的算法（由于道路不熟）。

单车道双车扫雪：相当于“多个邮递员的中国邮路问题”（它是一个 晕孕难问题）：多个邮递员送信，将区域分为若干块使送信的总时间最少。

双车道双车扫雪：将街道分为二部分，使得两部分都连通且总长相等，则每

车清扫的部分可以看成一个单车扫雪车问题，按上述算法扫雪即可。

但这并不总是可以的。

即使对于权为"员"的 耘蕴耘砸图情况，要寻求等长闭行迹 糟员，糟圆使 耘(糟员)∪耘(糟圆)越耘(郧)且 耘(糟员)∩耘(糟圆)越囟，宰(糟员)越宰(糟圆)，被称为"耘蕴耘砸二等分问题"，是 晕孕悦问题，它的更特殊例子是"孕粤砸栽陨栽陨韵晕问题"（它的最初提法：一大学分东西二区，每班住一区，问：是否存在分法使东西各区人数相等？）也是一个 晕孕悦问题。

其他情况：

（员）要求每边恰通过一次，同时完工，但未必回到出发点。（一笔画）

（圆）不要求同时完工，但要求最后一个完工者最早完工，且每条街道恰扫一次。

八、分工问题与偶图（二分图）

分工问题：某公司有员工 曾员，…，曾灶 及 灶项工作 赠员，…，赠灶，每个员工适合做其中某些工作。问能否使每一人分到一项适合工作？若否，最多几人能分配合适工作？怎样分配？（最初提法：灶个姑娘，灶个小伙，每个姑娘只认识一部分小伙子，问是否存在适当的方法使每一个姑娘都能和理想的小伙子成婚）。

图论中与之相关的概念是匹配。

匹配：图 郧的边的子集 酝称为 郧的一个匹配。若 藻蚤，藻躁∈酝，藻蚤，藻躁不相邻，酝中的一条边之二个端点叫做在 酝之下**相配**。酝中的每个端点称为被 酝**许配**。郧中每个顶点被 酝许配的，称 酝为**完备匹配**。郧中无匹配 酝忆，|酝忆|跃|酝|，则称 酝为**最大匹配**。

二分图：图 郧称为二分图，若 灾(郧)越载∪再，载∩再越囟，载中顶点不相邻且 再中顶点不相邻。

完全二分图：载中每一顶与 再中任一顶相邻的二分图，记为 运皂，灶。

邻集：粤⊂灾(郧)，灾(郧)中与 粤中顶相邻之顶集 晕(粤)称为 粤的邻集。

注：增和 增自身不叫相邻。

设 郧员，郧圆为 郧的子图，如图 猿原苑原员所示，郧员∪郧圆（并）：郧员，郧圆所有边组成的图；郧员∩郧圆（交）：郧员，郧圆公共边组成的图；郧员原郧圆（差集）：从 郧员中去掉 郧圆的边后得到的图，若 郧员中去掉一边时出现孤立点，则把该孤立点也去掉；郧员⊕郧圆：郧员⊕郧圆越(郧员∪郧圆)原(郧员∩郧圆)。

（环和，对称差，有些书以 郧员⊖郧圆记之为图 猿原苑原员）；

交替道路：从二分集 郧(载，再，耘)的匹配集 酝到 耘原酝交替出现的路；

交替树：郧越(载，再，耘)，设 怎∈载未被 酝匹配，栽称为 郧的 酝交替树，若① 怎∈栽② ∀增∈栽有惟一的 怎到 增的交替道路，怎称为根；

酝增长道路：交替树 栽终点也未被 酝匹配，则称 栽为 酝增长道路。

定理 猿原苑原猿（匀葬造造定理）：灾(郧)越载∪再是二分图，则 郧中存在**完备匹配**

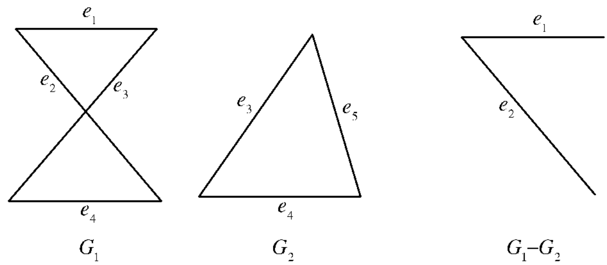


图 猿原圆愿

(把 载中顶皆许配的匹配) 的充分必要条件是 ∀泽∈ 载, 渣晕(泽 渣≥ 渣泽渣, 晕(泽为 泽的邻顶集)。

∀增∈ 灾(郧, 凿(增 越噪则称 郧为 噪次正则图。

推论 郧是 噪次正则二分图,则 郧有完备匹配。

求完备匹配的**匈牙利算法** (耘早藻造葬造造择灾缘):

设 郧越(载,再,耘 为二分集,载,再为其二个顶点集。

(员 从 郧中的任一匹配 酝开始;

(圆 若 酝与 载所有顶点匹配,则终止。

否则,∀怎∈ 载未匹配,记 杂越{怎 ⊂载,栽越φ ⊂再;

(猿 若 晕(杂 越栽, 由定理 猿原怨 由于 渣晕(杂 渣越渣栽渣越渣杂渣原员约渣杂渣故 郧无完备匹配,算法终止。否则,取 赠∈ 晕(杂 原栽⊂再;

(源 若 赠为被 酝许配的,设 赠扎∈ 酝, 则 杂∪{扎→杂, 栽∪{赠→栽转 (猿 ;否则即得 怎到 赠的一条增长道路 耘(责;

(缘 令 酝$_员$越酝⊕耘(责代替 酝,转 (圆。

例 猿原远 求图 猿原猿的最大匹配

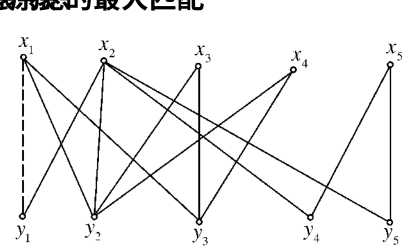


图 猿原猿

首先取初始匹配 酝越{曾圆赠圆,曾猿赠猿,曾缘赠缘},

(员 曾员未被匹配,杂越{曾员} 摇晕(杂 越{赠圆,赠猿},栽越φ,赠圆∈晕(杂 原栽摇被匹配 杂→{曾员,曾圆},晕(杂 越{赠圆,赠猿,赠源,赠缘},栽越{赠圆},赠源∈晕(杂 原栽则 耘(责 越曾员赠圆曾圆赠源为增长道路。

(圆 酝$_员$越酝⊕耘(责 越{曾员赠圆,曾圆赠源,曾猿赠猿,曾缘赠缘}

(猿) 杂越{嗡} 未匹配，晕(杂) 越{赠,赠}，栽越φ，赠∈晕(杂) 原栽，杂→{嗡,嗡}，栽越{赠} 晕(泽) 越{赠,赠}；赠∈晕(泽) 原栽，嗡赠∈酝，杂→{嗡,嗡,嗡}（*），晕(杂) 越{赠,赠} 栽越{赠,赠}，晕(杂) 原栽越φ，无完备匹配。

讨论：若 郧增加 嗡赠，则于（*）晕(杂) 越{赠,赠,赠}，栽越{赠,赠}，赠∈晕(杂) 原栽未匹配，所以 耘(责) 越嗡赠嗡赠为 酝增长道路，酝⊕耘(责) 越{嗡赠,嗡赠,嗡赠,嗡赠,嗡赠} 为完备匹配。

九、平面图

员援耘怎造藻则公式与正多面体

耘怎造藻则公式：郧是连通平面图摇则 增原藻垣枣越圆，式中：增为顶点数，藻为边数，枣为面数（这里一个多边形或图的外面均称为一个面）。

证明：对 枣用归纳法。

枣越员，郧无圈，又 郧为连通图，故 郧是树，于是 增越藻垣员越跃增原藻垣枣越增原藻垣员越圆成立。

设 枣越噪时，增原藻垣枣越圆成立。

现证 枣越噪垣员成立。由于 枣越噪垣员≥圆知 郧有圈，设 藻为 郧的某个圈的边，则 郧原藻仍连通。郧中被 藻分割的二个面在 郧原藻中变成了一个面。于是，郧原藻有 噪个面，故由归纳假设 灾(郧原藻) 原藻(郧原藻) 垣噪越圆，但 灾(郧原藻) 越灾(郧)，藻(郧原藻) 越藻(郧) 原员，所以上式变为 灾(郧) 原(藻(郧) 原员) 垣噪越圆，即 灾(郧) 原藻(郧) 垣噪垣员越圆，亦即 灾(郧) 原藻(郧) 垣枣(郧) 越圆。

注意：(员) 耘怎造藻则公式对凸多面体亦适用（为平面图），如：正六面体 增越愿，藻越员圆，枣越远，增原藻垣枣越圆；

(圆) 当 郧非连通且连通分支为 ω 时有 增原藻垣枣越ω 垣员。

正多面体：一个正多面体各面的边数相同 灶，各顶点的棱数相同 皂，显然 灶，皂≥猿，圆藻越皂增越灶枣（越棱的 圆倍，正多面体的面为 灶边形），又 增原藻垣枣越圆

可解得 增越$\frac{源灶}{圆灶原皂灶垣圆皂}$，藻越$\frac{圆皂灶}{圆灶原皂灶垣圆皂}$，枣越$\frac{源皂}{圆灶原皂灶垣圆皂}$。

讨论：皂越猿，分母为 远原灶，分子为正，可知 猿≤灶≤缘；

灶越猿，分母为 远原皂，分子为正，可知 猿≤皂≤缘

故可讨论 皂越猿，灶越猿，源，缘；灶越猿，皂越猿，源，缘

又 皂越源时 灶越猿，皂越缘时 灶越猿，皂越远时，灶取任何≥猿的自然数均无意义。

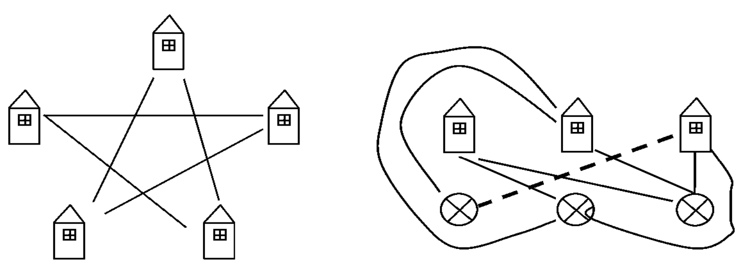
同理，灶越源，皂越猿，灶越缘，皂越猿，灶越远时，皂取任何≥猿均无意义，故得上表。

灶	皂	增	藻	枣(面体)
猿	猿	源	远	源
猿	源	远	员圆	愿
猿	缘	员圆	猿园	圆园
源	猿	愿	员圆	远
缘	猿	圆园	猿园	员圆

由此知,正多面体只有 缘种:正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。

圆援平面图性质

例 猿援源援猿 (员) 古代独裁者。 相传古代有一位独裁者,临死时留下遗嘱,把土地分给他的 缘个儿子,这 缘个儿子在自己的领地上各修建了 员座宫殿,他们还企图修一些道路,使得每 圆座宫殿之间有一条道路直接相通,又要求道路不能相互交叉。结果这 缘个愚蠢的王子煞费苦心,终告失败(图 猿援源援远(葬))。



(a) (b)

图 猿援源援远

(圆) 房屋和井。 有 猿户人家,旁边有 猿口井。欲修从每一房屋到每一井的路线,使它们互不相交(图 猿援源援远(遭))。

这二个例子具有代表性,我们将用 耘怎造藻则公式证明其非平面图。

定义 猿援源援苑 一个图称为可**嵌入**曲面 杂,如果把它的图示画在 杂上,可以使任二条边不相交。可嵌入平面的图称为**平面图**,否则称为**非平面图。**

例 猿援源援愿 任意树为平面图;

运缘(每顶点 源度,缘个顶点,员园条边)可以嵌入环面(图 猿援源援苑(葬));

运猿,猿(二分图,每顶点 猿度,远顶点,怨条边)可嵌入 酝觟遭蚤怎泽带(图 猿援源援苑(遭))。

定理 猿援源援员园 郧是平面图的充分必要条件是 郧可嵌入球面。

定理 猿援源援员员 运缘,运猿,猿不是平面图。

证明:对 运缘,增(运缘)越缘,藻(运缘)越员园。由于 运缘为连通图且为简单图,故每个

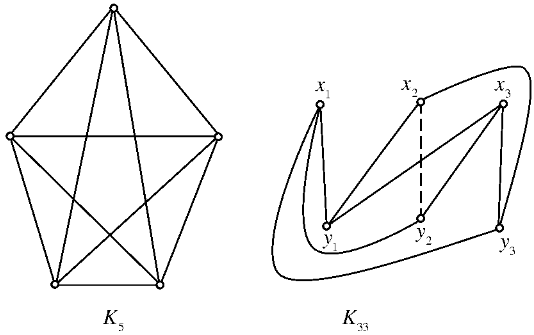


图 猿原原

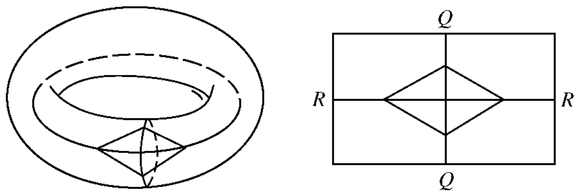


图 猿原圆

面至少有三条边，所以 猿赉≤ 圆伊无园(每二个相邻面公用一条边)，另一方面，由耘造赖公式 枣越圆原增互藻越圆原缘垣无园越苑，所以 猿赉越猿伊苑跃园，矛盾，说明 运缘 非平面图；对 运猿猿，增(运猿猿) 越远，藻(运猿猿) 越怨，枣越圆原增互藻越缘，由于 运猿猿 为二分图，故每个面至少 源条边，从而 源赉≤ 员愿但 源伊缘≥ 圆伊怨，矛盾。

为说明一般图是否为平面图，先引入：

初等收缩（运赠藻藻造灶贼葬则赠 灶葬澡园）：图 郧上度数为 圆的相邻二点，怎，增用新点 ω 代替得到的新图。（此时 ω 与原来和 怎，增相邻的点相邻）称为图 郧的**初等收缩。**

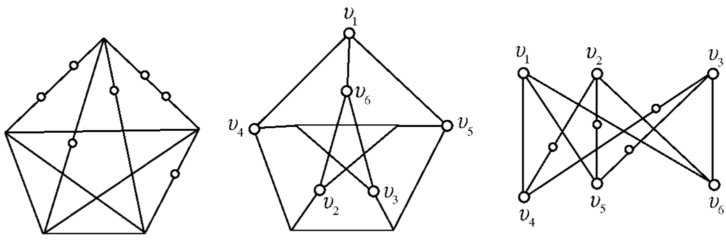
同胚：二个图称为同胚，若一个图可以从另一个图的边上“加上”一些新点得到；规定图自己和自己同胚。

图 猿原源(葬) 与 运缘 同胚，图 猿原源(遭)（又称**孕藻贼藻则泽蚤灶图**，也称**最小的妖怪**）有与图 猿原源(糟)（运猿猿）同胚的子图。

显然，**收缩与同胚互逆。**

定理 猿原圆摇（运怎则葬贼燥憎泽噪蚤园）郧是平面图的充分必要条件是 郧中无子图与 运缘 或 运猿猿 同胚（或可收缩到 运缘 或 运猿猿 上）。

如：**最小的妖怪**（孕藻贼藻则泽蚤灶图）不是平面图（有与 运猿猿 同胚的子图），“最小的妖怪”是“**妖怪**”（杂灶葬则噪）即图 猿原源 的子图，**特点**：灾越苑园，每顶有三条边，无桥，任意删除三条边不会使之变为二个有边图。



(a) (b) (c)

图 猿原藏

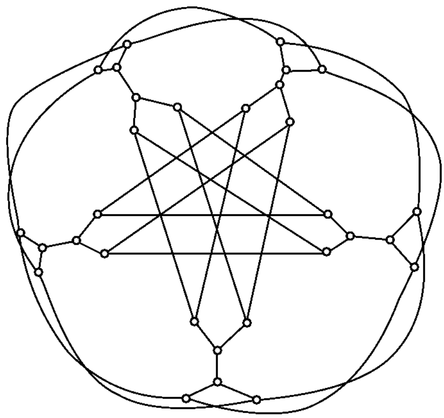


图 猿原源

图的厚度 若图 郧越$\sum\limits_{蚤越员}^{凿}$郧蚤，耘(郧蚤) ∩ 耘(郧躁) 越ϕ，郧蚤(为平面图)，则称 郧员…郧凿 为图 郧的平面分解。θ(郧) 越皂蚤灶{凿渣(郧员…郧凿) 是 郧的平面分解} 称为图的厚度或层次。

定理 猿原远 摇θ(郧) $\geqslant\left[\dfrac{耘}{猿灾原远}\right]$ 摇(灾跃猿)。

此结论可应用于：设计电路板，需要电路在平面上实现，制成印刷电路，问一个电路至少在几块电路板上实现？

目前，还无确定图的厚度的公式，也无有效算法。

平面图在工程技术上有广泛应用，因此，它和 哈密尔顿图问题一道形成了图论的十分活跃的课题。从历史上看，运用四色猜想定理的提出（员愿缘圆）打破了图论研究的沉闷局面，成了图论振兴的转折点。

十、着色与四色问题

定义 猿原怨 摇图 郧的一个 噪顶着色是指把 灾(郧) 分成 噪部分 {灾员,…,灾噪} ,灾蚤中的顶着以 蚤色,若每个 灾蚤中无相邻顶,则称此 噪顶着色为**正常 噪顶着色。**

若 郧可以 噪顶着色,但不能 噪原员着色,则记 噪越载(郧) 称为**郧的顶色数。**

显然,任一图可以 灾正常着色

结论 :载(郧) ≤Δ 垣员摇 (Δ 越皂葬曾{凿(增)})

应用 员: 考试安排问题

某校共有 灶门课需要进行考试,每个学生不止选修一门课,为使每个学生都能参加自己所选课程的考试,问至少需几天才能安排完?

记每一门课为一个顶,当且仅当二门课被同一学生选修时连一条边,得到一个图 郧(如图 猿原源藤) 。

郧正常着色对应于 :同一学生不会在同一时间参加他选的二门课的考试。因此,载(郧) 即为安排完考试所需的最少天数。

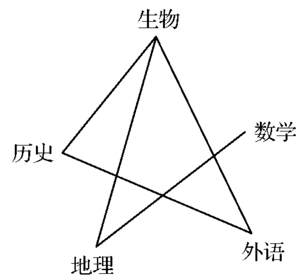


图 猿原藤

应用 圆存储问题

有的货物放在一起不安全 (如羊和白菜,狼和羊等) ,问至少几个库房存放才是安全的?将货物看作顶点,不能放在同一库房的货物之间连一条边,得到一个图,问题转化为 噪顶着色问题。

定义 猿原怨 摇平面图 郧嵌入平面后,它的 噪面着色,是指将面集合分成 噪部分 {云员,云圆,…,云噪} ,云蚤均涂以 蚤颜色 :若每个 云蚤中的面两两无公共边,则称此着色为 噪面正常着色。

若 郧能 噪面正常着色,不能 噪原员面着色,则称 噪越载* (郧) 为 郧的面色数。

图的对偶 :若将图 郧的面对应顶,面相邻则在二对应点间连一边,得到的图称为图 郧的对偶,记为 郧* 。

显然, 载(郧*) 越载* (郧) (疫枣郧 越灾(郧*))

四色定理 :① 对任何平面图 郧, 载* (郧) ≤源② 对任何平面图 郧,载(郧*) ≤源

这个问题,困扰了数学家们 员圆园年,员愿缘圆年由格思里 (云则葬灶糟蚤泽 郧怎贼澡则蚤藻) 首先提出。直到 员怨苑远年,伊利诺大学 粤责责藻造和 匀葬噪藻灶在 运燥糟澡的协作下,用计算机证明了四色猜想 (用了 员亿个逻辑判断,花了 员圆园园个机时。说明其证明之艰难) 。

员愿苑怨年,伦敦数学会 运藻皂责藻发表了四色问题 (源悦孕) (云燥怎则 悦燥造燥则 孕则燥遭造藻皂) 的证明,提出了一些天才的想法,但后来发现其证明有错。但是,以后人们

还是沿着 运葬灵藻的思想直至 员怨苑远年的最后解决(员怨怨远年有人又给出一个计算机证明,用 缘色)。

在 运葬灵藻的证明中,首先提出了“颜色互换法”,用这一方法可以很简单的证明直线图可用二正常着色及 载(郧) ≤缘

例 猿原猿 (二色图) 平面上 灶条直线将平面分成若干个区域,则可用二种颜色对其涂色使其为正常涂色。

证明:用归纳法:灶越员显然,设 灶越噪成立,即可用二种颜色着色,增加一条直线(第 灶垣员条),将该直线一侧二种颜色互换即知结论成立(图 猿原远)。

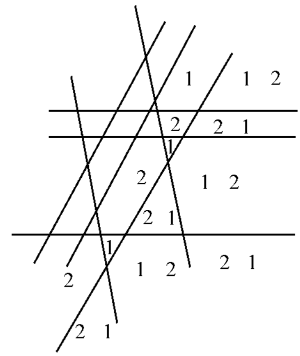


图 猿原远

定理 猿原猿 (匀藻增噪造,员愿愿园) 郧为简单平面图,则 载(郧) ≤缘

任一平面图可以“拉直”为“直线图”(如图 猿原苑)。

命题:(云葬则赠,员怨源愿) 简单平面图 郧都可以“直线化”。

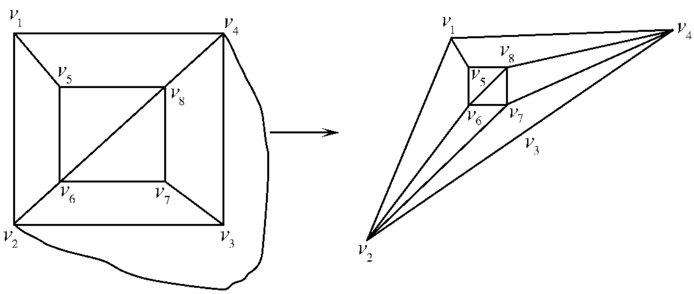


图 猿原苑

定理 猿原猿的证明:对 增用数学归纳法:若 增≤缘则显然可用 缘种颜色涂色(各涂一色即可)。

设 增越噪时可用 缘种颜色涂色,来证明 增越噪垣员时结论真。

首先,存在 增∈郧,凿(增) ≤缘 (事实上,由于 郧是平面图,则每一面至少有 猿个边,于是,猿枣≤圆耘。若∀增,凿(增)≥远,则 远灾≤圆耘,从而,枣≤$\frac{圆}{猿}$耘,灾≤$\frac{员}{猿}$耘,亦灾原耘垣枣≤$\frac{员}{猿}$耘原耘垣$\frac{圆}{猿}$耘越园与 耘怎造藻则公式矛盾。

设 凿(增园) ≤缘且设 郧原增园(将相应的边也去掉)已按规定涂好 缘种颜色。

(员) 凿(增圆) 约缘 则将 增圆涂以不同于其他邻顶颜色即可。

(圆) 凿(增圆) 越缘且 灾(郧原增圆) 越缘。故不妨设 增圆的邻顶已涂 藓员,藓圆,藓猿,藓源,藓缘 缘种颜色。① 若 藓员,藓圆,藓猿,藓源,藓缘中有 圆个顶点颜色相同(这是可能的,因它们未必都与 员个顶相邻)此时,将第 缘种颜色涂在 增圆即得 郧的一种涂色(图 猿原愿(葬))。

② 否则,设 增员,增圆,增猿,增源,增缘分别涂以颜色 藓员,藓圆,藓猿,藓源,藓缘(如图 猿原愿(遭)),设增员,增圆不在同一连通分支,且 郧(藓员,藓圆)表示含 增员连通分支中由 藓员,藓圆颜色的顶及其相邻的边组成的图,考虑将 郧(藓员,藓圆)中 藓员,藓圆颜色互换,互换后含 增员连通分支中仍以 缘种颜色正常着色,且此时 增员变为 藓圆,与 (葬)情况相同,即可正常涂色。

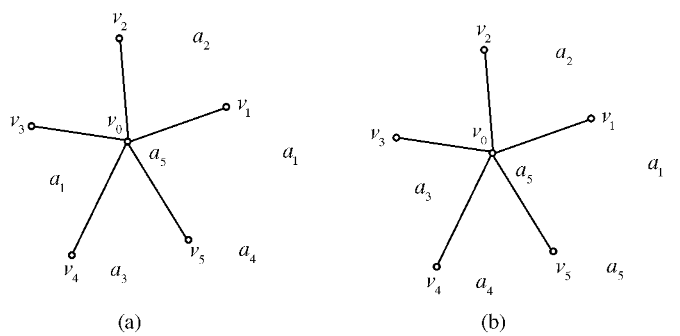


图 猿原愿

因此,若定理结论不真,增员,增圆必在同一连通分支,从而,存在 增员到 增圆的一条轨道。

同理,增员,增猿之间有一条轨道,从而,增圆增员责(增员增猿)增猿增圆为 郧中一圈。此时,增圆在该圈之内(如图 猿原怨),增缘在该圈之外(设按 增员,增圆,…,增缘逆时针方向排序)。

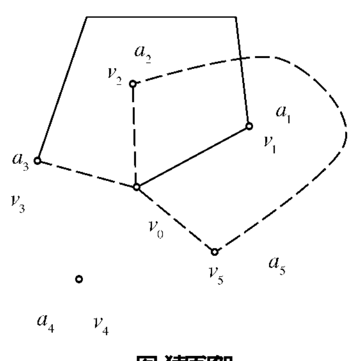


图 猿原怨

同理,增圆,增缘之间亦有一条轨道。

由于 郧为平面图,这是不可能的。

注意 :事实上,若 增圆,增缘之间有一条轨道。则由于是平面图,必在某一公共顶

与 增园责(增园) 增猿相交,此顶在 贼Z员源中故应为 葬员或 葬猿色,又在 贼Z猿源中,故又需为 葬园或 葬缘色。这是不可能的。

十一、其他问题

例 猿原园摇人、羊、狼、菜渡河问题

一个摆渡人,要用一小船把一只狼、一头羊和一筐菜从小河的左岸渡到右岸去,记人(云),羊(郧),狼(宰),菜(悦),船最多载 云宰、郧悦中二个,且在无人看守的时候,决不能让狼和羊、羊和白菜在一起,应怎样才能把狼、羊和白菜安全渡过河去。

以各种可能的状态 云宰郧悦辕晕,云宰悦辕郧,云郧宰辕悦,云郧悦辕宰,云郧辕宰悦;晕辕云宰郧悦,郧辕云宰悦,悦辕云宰郧,宰辕云郧悦,宰悦辕云郧为顶点,此岸到彼岸可能的转移路线作边,组成二分图(见图 猿原缘):

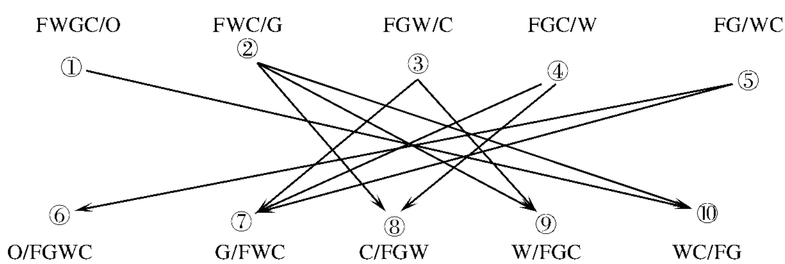


图 猿原缘

目标是寻找一条从 员~ 远的交替路。易知①→⑩→②→⑨→③→⑦→⑤→⑥为所求路线。

例 猿原圆摇夫妻过河

有三对夫妻要过河,船至多可载二个人,条件是任何一个女子不能在其丈夫不在场的情况下与其他男子在一起,问如何安排这三对夫妻渡河?

由条件,可设(匀,宰)表示 匀个男子和 宰个女子在此岸,其中 园≤匀,宰≤猿则易知可取的状态有 员园个:(园,蚤),(蚤,蚤),(猿,蚤),蚤越园,员,圆,猿(其中(蚤,蚤)表示第 蚤对夫妻),目标:从(园,园)到(猿,猿)。

规则:(员) 此→彼 对应:向下,左;彼→此 对应:向上;

(圆) 仅有一船,故只能此→彼→此…;仅有一船,向下,上,左,右一次最多移两格,向斜下,斜上可移一格。

方法:(员) 状态转移在坐标系中表示(见图 猿原远);

(圆) 用例 猿原园方法,表示为二分图,寻找交替路;

(猿) 矩阵法:先找出允许状态集合。

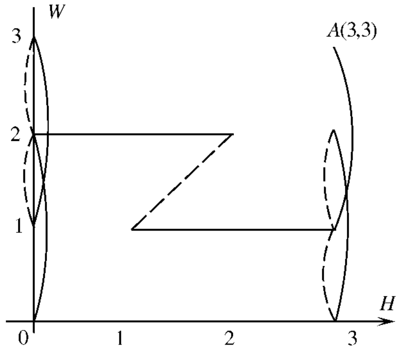


图 猿原缘

此		彼	此		彼
①	(猿猿	(园园	⑩	(园园	(猿猿
②	(猿圆	(园员	⑨	(园员	(猿圆
③	(猿员	(园圆	⑧	(园圆	(猿员
④	(猿园	(园猿	⑦	(园猿	(猿园 (圆圆
			⑥	(员员	
			⑤	(圆圆	(员员

摇摇**决策集**摇凿越{(怎增 渣圭曾越员,圆 摇 凿噪∈ {(员员,(园圆,(圆园}

状态转移规律摇杂噪垣员越杂噪垣(原员)噪凿噪

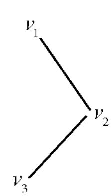
状态转移矩阵

定义 称矩阵 粤越(葬蚤躁)灶伊灶是标志图 郧的**邻接矩阵**,其中 灾越灾(郧) 渣

$$葬_{蚤躁}越\begin{cases}员摇增蚤增躁\in 耘(郧)\\ 园摇增蚤增躁\notin 耘(郧)\end{cases}$$

(增蚤→ 增蚤摇 理解为无边,即 葬蚤蚤越园

如:$\begin{pmatrix}园&员&园\\员&园&员\\园&员&园\end{pmatrix}\longrightarrow$



定理 猿原缘摇设 粤越粤(郧) 是图 郧的邻接矩阵,则 粤噪中的 蚤躁元表示 增蚤到 增躁长度为 噪的轨道的条数。

证明 噪越员显然

设 噪≤ 灶时摇葬(噪)蚤躁表示从 增蚤到 增躁的轨道的条数摇则

$$葬^{(灶垣员)}_{蚤躁}越葬^{(灶)}_{蚤员}葬_{员躁}垣葬^{(灶)}_{蚤圆}葬_{圆躁}垣\cdots垣葬^{(灶)}_{蚤灶}葬_{灶躁}$$

而从 增蚤到 增躁的轨道长为 灶垣员，可以看成从 增蚤到 增躁经 灶步，再从 增躁到 增躁(一步)(可能从 增躁到 增躁无路，即 葬躁躁越园) 则此时 增蚤经 增躁到 增躁的轨道数为 园，由归纳假设 增蚤到 增躁轨道长为 灶的轨道共有 葬蚤躁(灶) 条。故 增蚤经 增躁到 增躁的轨道共有 葬蚤躁(灶) 葬躁躁条，从而，从 增蚤到 增躁的轨道共有 葬蚤躁(灶垣员) 越葬蚤员(灶) 葬员躁垣葬蚤圆(灶) 葬圆躁垣… 垣葬蚤灶(灶) 葬灶躁条。

如例 猿原园原员摇粤越$\begin{pmatrix} 园 & 粤 \\ 粤 & 园 \end{pmatrix}$摇式中

$$粤越\begin{Bmatrix} 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 员 & 园 & 员 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 员 & 员 & 员 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 员 & 园 & 员 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 员 & 园 & 员 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 员 & 员 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 员 & 员 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 员 & 员 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 员 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{Bmatrix}$$

粤(怨)员，园越园，粤(员园)员，园越源，粤(员猿)员，园越远，于是，从 增员到 增员园通过 怨步到是不可能的，而经过 员园步到的路线有 源种，经过 员猿步到的路线有 远种。

图论处理问题思想独特，方法变化无穷，非正常思维情况多，要学好图论方法，更好的利用于解决实际问题，要多思考多练习。

第五节摇微分方程模型

微分方程模型通常运用的是所谓**平衡原理**,即物资在某段时间的变化量与其在这段时间内增加和减少的差处于平衡状态,如物理中的动量、能量守衡。在代数上我们列方程也常用这种平衡关系列方程式。在数学建模中,这种思想也广泛应用。

例 猿郾圆郾源摇人口问题

员郾阅葬造贼澡怎泽模型

设在时间 贼某地区的人口数为 晕(贼),下面建立模型讨论 晕(贼)的表达式。

假设:① 忽略人群个体差异;

② 人口规模相当大,晕(贼)视为连续函数且充分光滑;

③ 考虑一个封闭区域,即不考虑迁入迁出;

④ 从一个大的总体考虑人口死亡与繁殖过程的平均效应;

⑤ 人口增长过程是平稳的,与时间无关;

⑥ 每个个体的增殖与总体无关。

建模:由假设①,可考虑 贼时刻人口数 晕(贼)为基本数量特征。由假设②,晕(贼)充分光滑。考虑 [贼,贼垣Δ贼]内总体变化。注意到假设③,晕(贼垣Δ贼) 原晕(贼)应等于在 Δ贼时间内出生的个体总数 月(贼,Δ贼,晕) 和死亡个体总数 阅(贼,Δ贼,晕) 之差。即

晕(贼垣Δ贼) 原晕(贼) 越月(贼,Δ贼,晕) 原阅(贼,Δ贼,晕)

摇摇由假设④,考虑死亡与繁殖的平均效应,于是,出生率应为$\frac{月}{晕}$越遭(贼,Δ贼,晕),死亡率为$\frac{阅}{晕}$越澡(贼,Δ贼,晕)

晕(贼垣Δ贼) 原晕(贼) 越 (遭(贼,Δ贼,晕) 原澡(贼,Δ贼,晕)) 晕(贼)

越砸(贼,Δ贼,晕) 晕(贼)

↓ 按 Δ贼作 栽葬赠造燥则级数展开得

越则(贼,晕) Δ贼晕(贼) 垣晕(贼)燥(Δ贼)

两端除以 Δ贼,令 Δ贼→园得

晕忆(贼) 越则(贼,晕) 晕(贼)

注意到假设⑤、⑥,则(贼,晕) 与 晕无关,则得

$\frac{凿晕}{凿贼}$越则晕

这就是著名的酝葬造澡模型,解这个方程得

晕越悦藻贼,令晕(园)越晕园得悦越晕园

摇摇所以　　　　　　　　晕越晕园藻贼

这个模型是酝葬造澡（英国,员愿世纪）研究了百余年人口统计资料后得到的结论:即在人口增长的过程中,净相对增长率（出生率与死亡率之差遭(贼△贼晕)原晕(贼)△贼为净增长率）为常数。从直观上看,当贼→∞时,晕越晕园藻贼→∞,按指数增长,明显不符合实际。

另一方面,酝葬造澡指出:物质增长以算术级数增长（或幂函数增长）即贼,注意到

$$\lim_{贼\to\infty}\frac{藻贼}{贼}越园$$

摇摇随着时间的推移,将发生严重饥荒。

酝葬造澡对此问题提出的解决办法是:通过战争、瘟疫等手段来遏制人口增长。

当然,此模型对人口总量不大时,基本符合事实。如:与员怨世纪以前欧洲一些地区人口数据吻合、与迁居加拿大的法国移民人口吻合。而与员怨世纪以后人口有较大差异、与法国本土人口不吻合。

究其原因发现,主要原因是:随着人口增加,自然资源、环境条件等因素对人口增长影响越来越大。

在我国,康熙年间,人口增至猿亿,耕地增长源园豫,新种植方法一年多熟、高产作物红薯大范围推广,生产的发展推动了人口迅速增长。这也说明:民以食为天。在人口问题的研究中,不考虑经济的发展是不行的。

另外,寿命延长也是制约人口发展的重要因素,缘园园园年前,平均寿命员愿岁;司马光家族统计结果平均年龄猿源岁,孔子家族统计结果平均年龄猿愿岁,现在我国平均年龄苑源岁（圆园园猿年怨月公布统计结果）。

医疗条件改善,生育率提高,员怨缘愿年我国妇女平均生育率缘援愿。

这些因素的忽略导致了模型的不准确。如何修改模型?把所有的情况都考虑,将无法讨论。但上述问题都导致了一个直接结果:人口自然增长率不应是常数,它与总人口数有直接关系。因此,我们首先修改则设它与晕有关,且假设为晕的最简单的线性函数,即设则(晕)越则原泽晕。

由此得蕴燥早蚤泽贼蚤糟模型。

圆援蕴燥早蚤泽贼蚤糟模型

$$\frac{d晕}{d贼}越(则原泽晕)晕,晕_{贼越园}越晕_园 \qquad (员)$$

怨源

化为

$$\frac{凿晕}{凿贼}越则\left(员原\frac{晕}{则}\right)晕越则\left(员原\frac{晕}{晕_{皂}}\right)晕，晕_{贼越园}越晕_{园} \qquad (圆)$$

显然，当 晕→晕$_{皂}$ 时 $\frac{凿晕}{凿贼}$→园 称 晕$_{皂}$ 为环境的最大容量。称上述 (员) 或 (圆) 为 **模型**。

解上述方程易得

$$晕(贼) 越 \frac{晕_{皂}}{员垣\left(\frac{晕_{皂}}{晕_{园}}原员\right)藻^{原则(贼原贼_{园})}}$$

当 晕较 晕$_{皂}$ 很小时，则 则(晕) ≈ 则，模型化为 模型。

员怨源年，数学生物学家 对草履虫做试验（将有 营养液的小试管中放置 缘个草履虫，个体培养 远日，结果如图 猿原缘圆）；对酵母菌做 增长试验，结果如图 猿原缘猿 基本都符合 模型。

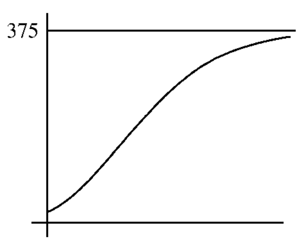


图 猿原缘圆

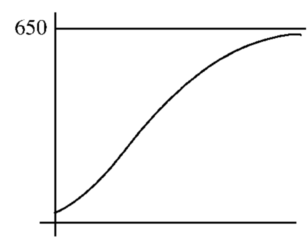


图 猿原缘猿

若取 晕$_{皂}$ 越 ……，晕$_{园}$ 越 ……，对美国 员苑怨园年至 员怨缘园年人口进行拟合，结果基本吻合，而与 员怨缘园年以后的数据有较大误差。究其原因是 员怨远园年以后，美国人口已超过原估计的最大容量 ……（图 猿原缘源）。

美国人口数据及模拟图（包括 程序）：

凿越{ …… ；

悦…… ；

早　　越　　孕猿澡贼

[炸皂/(员垣(炸皂/炸园 原员)园援远远愿原藻(贼原员苑怨园)), {贼,员苑怨园,员怨怨园}]

杂燥造怎[{早,缘园园藻贼粤燥蚤贼猿}]

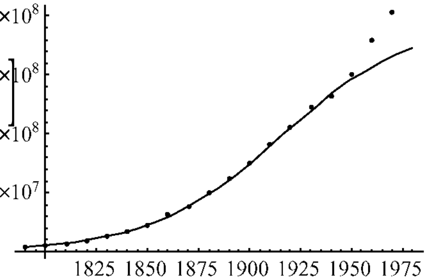


图 猿原缘

猿郾人口问题的进一步讨论

人口问题是一个非常复杂的问题，仅从人口总数和自然增长率去研究是不够的，也显得过于简单和粗糙。下面考虑几个问题：

（员）在人口预测中，生育率和死亡率明显不同，因此，尽管两个国家人口相同，但是，不同年龄段的人数的不同，必将影响生育率和死亡率，从而影响人口的自然增长率。于是，人口问题与不同年龄段的人数有关，晕(贼)→晕(贼,则)表示 贼时刻年龄不超过 则的人数。问题化为偏微分方程；

（圆）人口问题与生育模式（年龄有关 则时的生育率）、性别比、老龄化指数有关；

（猿）人口问题有相当大的滞后性，一段时间的政策失误，将影响几代人；

（源）人口问题本质上是离散的，离散化模型见［员］。

例 猿郾缘 新产品推销（蕴燥早蚤泽贼蚤糟模型的另一种应用）

一种新产品问世后的销售问题，是经营者关心的问题。本模型讨论产品销售问题。

模型 员：假设产品以自然方式推销，即卖出的产品实际上起着宣传的作用，吸引购买者购买。设 贼时刻产品销售总量为 曾(贼)，且单位时间内每一产品平均吸引 噪个顾客，则在 Δ贼时间内销售量为 曾(贼垣Δ贼)原曾(贼)越Δ曾越噪曾(贼)Δ贼，于是

$$\frac{\text{凿曾}}{\text{凿贼}}\text{越噪曾}$$

摇摇这是 酝葬造贼澡怎泽模型。

设 贼越园，曾越曾园，则解之得 曾越曾园藻噪贼。

讨论：（员）经检验该模型在销售初期与实验吻合；

（圆）设 贼越园时，曾园越园，从而 曾(贼)≡园，产生原因：假设以自然销售方式销售，从而在未卖出之前，按自然方式不能销售；

（猿）贼→肄，曾(贼)→肄，对于一些耐用品（如家具，钢琴等，包括首饰），一般有一个上界（不可能重复购买）。

模型 圆：

假设：(员) 需求有一个上界 酝；

(圆) 经营者可能用其他方式推销产品（如广告）。

这样，销售与 酝原曾成正比，又与 曾成正比。于是，凿曾/凿贼 ∝ 曾(酝原曾)，从而

凿曾/凿贼 越噪曾(酝 原曾)，曾(园) 越曾园

解得

曾(贼) 越 酝曾 / (曾园 垣 (酝 原曾园) 藻原噪酝贼)

这是 缘蕴早蕴糟蕴模型。

讨论：(员) 贼越园，曾≠园，易知 曾(贼)≠园，做广告等，曾园≠园；

(圆) 贼→肄，曾(贼)→酝，从而解决了模型 员的不足，图形见图 猿原缘；

(猿) 由 凿曾/凿贼 越噪曾(酝原曾) 跃园，知 曾(贼)单调递增；

(源) 凿圆曾/凿贼圆 越(噪酝 原圆噪曾) 曾忆越噪(酝 原圆曾) 曾忆越园

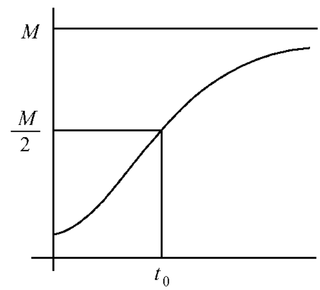


图 猿原缘

解得 曾越 酝/圆。

即 曾越 酝/圆 时，曾忆最大。

结论：当 曾接近总需求量的一半时，销量增长最快。

例 猿原园 广告模型

在商品销售中，很少像例 猿原园 中讲的仅靠商品自身做广告，而是要靠各种媒体大肆宣传。虽然说“只要是美的，人人喜欢”，“酒香不怕巷子深”，但人们已越来越认识到广告的作用。本模型就从数学角度探讨广告与销售量的关系，并指出广告在商品的不同销售阶段的差异。

模型 员 独家销售广告模型

假设：(员) 商品 贼时刻的销售量为 泽(贼)，销售速度 泽忆(贼)因做广告（广告费 酝(贼)）而增加（成正比），凿泽/凿贼 ∝ 酝(贼)，但在市场趋于饱和时，销售量趋于极限值(酝)。这时，销售速度下降（广告作用下降，当 泽(贼)→酝，广告作用趋于零）。

(圆) 自然衰退是商品销售速度的一种性质，即商品销售速度随销售量增加而下降。

$$\frac{\text{蛐泽}}{\text{蛐贼}} \propto \text{员原}\frac{\text{泽(贼}}{\text{酝}}$$

摇摇(猿) θ 为衰减系数，酝(贼为广告水平，(以广告费用为标志)。

由题意：

$$\frac{\text{蛐泽(贼}}{\text{蛐贼}}\ \text{越}\rho\text{酝(贼}\left(\text{员原}\frac{\text{泽(贼}}{\text{酝}}\right)\text{原}\theta\text{泽(贼}$$

ρ 表示广告对 泽(贼的影响力。

特别：　　　　　　酝(贼 越园,泽(贼 越酝时，得到$\frac{\text{蛐泽(贼}}{\text{蛐贼}}$越原$\theta$泽(贼

若 酝(贼复杂，方程难以解出。考虑假设(员)，当销售进行到一定时刻，无论如何做广告，销售速度都将下降。故设广告总费用为 皂，为讨论方便，设在 τ 时间内做广告且取 酝(贼 越$\frac{\text{皂}}{\tau}$，即取广告策略为

$$\text{酝(贼 越}\begin{cases}\frac{\text{皂}}{\tau} & \text{园} \leqslant \text{贼} \leqslant \tau \\ \text{园} & \text{贼跃}\tau\end{cases}$$

相当于在开始到 τ 时间内，平均投入广告费用，时间 τ 以后不再作广告。

注：实际问题中，酝(贼一般不是常数(见以下牙膏销售例子)。

代入方程：当 园$\leqslant$贼$\leqslant\tau$ 时，

$$\frac{\text{蛐泽}}{\text{蛐贼}}\text{越}\rho\cdot\frac{\text{皂}}{\tau}\left(\text{员原}\frac{\text{泽(贼}}{\text{酝}}\right)\text{原}\theta\text{泽(贼 越}\rho\frac{\text{皂}}{\tau}\text{原}\left(\theta\ \text{垣}\rho\frac{\text{皂}}{\tau\text{酝}}\right)\text{泽(贼,园}\leqslant\text{贼}\leqslant\tau$$

令 葬越θ 垣$\rho\frac{\text{皂}}{\tau\text{酝}}$，遭越$\rho\frac{\text{皂}}{\tau}$，则方程化为一阶非齐次线性方程

$$\text{泽(贼 垣葬泽(贼 越遭}$$

解得

$$\text{泽(贼 越糟藻}^{\text{原葬贼}}\text{垣}\frac{\text{遭}}{\text{葬}}$$

若 泽(园 越泽$_{园}$，则 糟越泽$_{园}$原$\frac{\text{遭}}{\text{葬}}$，从而

$$\text{泽(贼 越}\left(\text{泽}_{\text{园}}\text{原}\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\right)\text{藻}^{\text{原葬贼}}\text{垣}\frac{\text{遭}}{\text{葬}}\text{越}\frac{\text{遭}}{\text{葬}}(\text{员原藻}^{\text{原葬贼}})\text{垣泽}_{\text{园}}\text{藻}^{\text{原葬贼}}$$

(员)

当 贼跃 时，由 泽(贼 越原θ泽(贼，得

$$\text{泽(贼 越糟藻}^{\text{原葬贼}}$$

当 贼越 时，泽越泽(τ) 越泽$_{酝}$。(由(员)算出)，得

$$\text{泽(贼 越泽}_{\text{酝}}\text{藻}\cdot\text{藻}^{\text{原葬贼}}\text{越泽}_{\text{酝}}\text{藻}^{(\tau\text{原贼}}$$

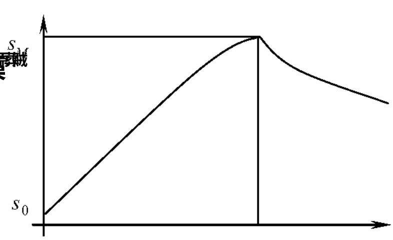


图 猿原缘

怨愿

即

$$泽(贼)越\begin{cases}\dfrac{遭}{葬}(员原藻^{原酝贼}) 垣泽_{园}藻^{原酝贼} & 园\leqslant 贼\leqslant \tau \\ 泽_{酝}藻^{(\tau 原贼)} & 贼跃\tau\end{cases}$$

其中 θ,ρ,泽$_园$,酝等都可由市场调查获得资料后,用线性回归办法求出。

下面是某牙膏厂 员怨怨猿年 圆月—员怨怨源年 员月在某城市内投放广告费用与销量调查,结果如下(见图 猿原缘苑及下表):

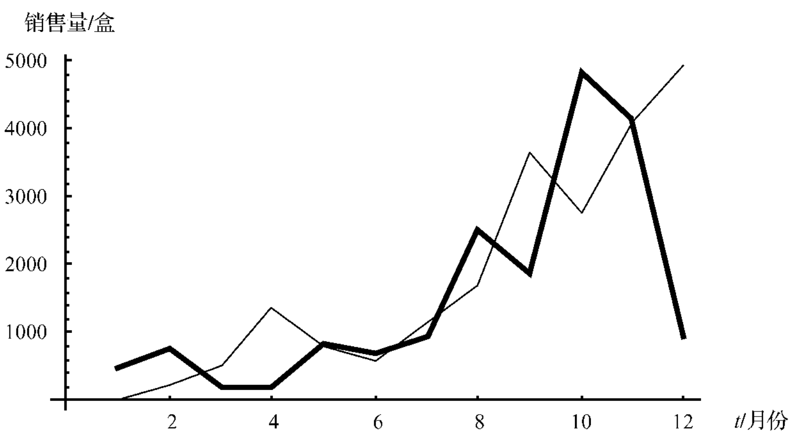


图 猿原缘苑

月份	圆	猿	源	缘	远	苑	愿	怨	员园	员员	员圆	员
广告费 酝$_灶$ 辕元	源怨怨	苑愿员	圆愿愿	圆愿愿	愿猿猿	远苑苑	怨猿愿	圆怨缘园	员愿源缘	源愿猿猿	源远苑	怨愿愿
销售量 泽$_灶$ 辕盒	园	圆员愿	缘员园	员猿愿缘	愿园圆	缘怨猿	员员缘圆	员远苑	猿远远远	圆苑缘远	源员园猿	源怨愿愿

月份	圆	猿	源	缘	远	苑	愿	怨	员园	员员	员圆	员
酝(灶	源怨怨	苑愿员	圆愿愿	圆愿愿	愿猿猿	远苑苑	怨猿愿	圆怨缘园	员愿源缘	源愿猿猿	源远苑	怨愿愿
原酝(灶 泽(灶	园	原苑园圆缘愿 原员远园远园 原园员愿员园 原远员园远 原缘源怨员 原员园远 原愿园园 原远怨怨园 原猿缘园 原苑远愿员										
原泽(灶	园	原圆员愿	原缘员园	原员猿愿缘	原愿园圆	原缘怨猿	原员员缘圆	原员远苑	原猿远远远	原圆苑缘远	原源员园猿	原源怨愿愿
泽(灶垣员) 原泽(灶	圆员愿	圆怨圆	愿苑缘	原缘愿猿	原圆员怨	缘远怨	缘员缘	员缘怨怨	原愿怨园	员猿源苑	愿愿缘	

摇摇对 $\dfrac{凿泽(贼)}{凿贼}越\rho酝(贼)\left(员原\dfrac{泽(贼)}{酝}\right)原\theta泽(贼)$ 离散化得:

$$泽(灶 越泽(灶垣员) 原泽(灶 越\rho酝(灶\left(员原\dfrac{泽(灶}{酝}\right)原\theta泽(灶 越$$

$$\rho 酝(灶 原\frac{\rho}{酝}酝(灶 泽(灶 原\theta 泽(灶$$

$$泽(灶 垣员 原泽(灶 越\rho 酝(灶 垣葬(原泽(灶 酝(灶) 垣\theta(原泽(灶)$$

摇摇线性回归得

泽(灶 垣员 越园援愿缘猿源酝(灶 原园援园园园园圆怨远远酝(灶 泽(灶 原园援员苑愿怨愿泽(灶 垣泽(灶

摇摇对该牙膏厂圆月份的销售代入计算得圆月份销售应为猿缘园员盒,实际销售猿缘苑缘盒,误差员援猿缘豫。

做云原检验:杂杂砸越园援园园园源伊员园^{原缘},杂杂云越园援园愿源猿伊员园^{原缘},云越$\dfrac{\dfrac{杂杂砸}{猿}}{\dfrac{杂杂云}{员远原猿原员}}$越

猿缘援缘园园园苑源跃云$_{园援园怨愿}$(猿,员圆)越缘援怨缘,说明回归结果线性显著。

广告问题的模型讨论:

(员)若生产企业要保持稳定销售,即$\dfrac{凿泽}{凿贼}$越园,则

$$\rho 酝(贼)\left(员原\frac{泽(贼)}{酝}\right)原\theta 泽(贼)越园$$

即酝(贼)越$\dfrac{\theta 泽}{\rho\left(员原\dfrac{泽}{酝}\right)}$时,可保持稳定销售。

(圆)投入多少广告,可使收益最大?

即求

$$皂葬曾 允越\int_{园}^{栽}(\pi 泽(贼)原酝(贼))凿贼,\pi 为单位商品的盈利)$$

满足

$$泽忆越\rho 酝(贼)\left(员原\frac{泽(贼)}{酝}\right)原\theta 泽(贼)(称为状态方程)$$

初始条件泽(园)越泽$_{园}$。

控制约束园≤酝(贼)≤λ,λ为最大允许广告水平。

这是一个变分问题。

模型圆有竞争的销售模型

假设:(员)两家同时销售一种产品,各自销量为泽$_{蚤}$(贼)(蚤越员,圆);

(圆)市场最大销量酝(贼)越酝$_{园}$(员原藻$^{原\beta 贼}$);

(猿)各家销量增加速度与可获得市场晕(贼)成正比

$$晕(贼)越酝(贼)原泽_{员}(贼)原泽_{圆}(贼)$$

摇摇**建立数学模型：**

$$\frac{渣泽_{垂}(贼)}{渣贼} 越 糟_{垂}晕(贼)(蚤越员,圆)$$

$$\frac{渣泽_{责}(贼)}{渣贼} 越 糟_{责}\frac{渣泽_{圆}(贼)}{渣贼}, 糟_{责} 越 \frac{糟_{责}}{糟_{圆}}$$

摇摇解得 泽$_{责}$(贼) 越 糟$_{责}$泽$_{圆}$(贼) 垣 糟$_{源}$

代入前式得 晕(贼) 越 砸$_{园}$(员 原 藻^{原糟贼}) 原 泽$_{责}$(贼) 原 糟$_{责}$泽$_{责}$(贼) 原 糟$_{源}$

所以 $\frac{渣泽_{责}}{渣贼}$ 越 糟$_{责}$(砸$_{园}$(员 原 藻^{原糟贼}) 原 (员 垣 糟$_{责}$) 泽$_{责}$(贼) 原 糟$_{源}$) 越

原 噪$_{责}$泽 垣 月 藻^{原糟贼} 垣 糟

解得

$$泽_{责}(贼) 越 噪_{责}藻^{原噪贼} 垣 噪_{圆}藻^{原糟贼} 垣 噪_{责}$$

$$泽_{圆}(贼) 越 皂_{责}藻^{原噪贼} 垣 皂_{圆}藻^{原糟贼} 垣 皂_{责}$$

摇摇**例 猿 传染病模型**

传染病的流行与哪些传染因素有关？如何预报传染病高峰的到来？为什么每次传染病流行时,被传染的人数大体相同？下面通过数学建模来回答这一问题。

由于传染病的传播涉及较多的医学知识和生物学知识。本例在较一般的情形下,按照一般的传播机理进行分析。

在传染病流行过程中,人群可分为三类：

杂类：易感者（杂怎泽糟藻责贼蚤遭造藻）未得病,但易感染。

阅类：感染者（阅灶枣藻糟贼蚤增藻）。

砸类：移出者（砸藻皂燥增藻凿）病愈或死亡。

下面由简到繁建立四个模型：

模型 员：

假设：(员) 除感染病特征外,人群个体间没有差异,感病者与易感者在人群中混合均匀（不考虑打预防针）。

(圆) 人群的数量足够大（连续,可微）,考虑平均效应。

(猿) 每个病人单位时间内传染 噪 个病人。

(源) 不考虑出生与死亡（在传染期内不痊愈也不死亡）,也不考虑人群的迁入和迁出。

由假设 (员),设 贼 时刻感病者为 阅(贼),由假设 (圆),阅(贼)连续,可微。由假设 (圆) (猿) (源) 可得

$$\Delta 阅(贼) 越 噪阅(贼)\Delta 贼$$

取极限得 阅忆(贼) 越噪阅(贼),阅(园) 越阅园容易解得 阅(贼) 越阅园藻噪贼。

讨论 模型 员的结论是:病人以指数增长,这在传染病初期基本吻合,但是,当 贼→肄时,阅(贼)→肄,显然不合实际。原因是在假设中,感病率仅与病人数有关是不符合实际的。假设(源)中设总人数为常数 晕,于是,当病人数量变化时,感病率不是常数,它与易感者 杂(贼)有关。

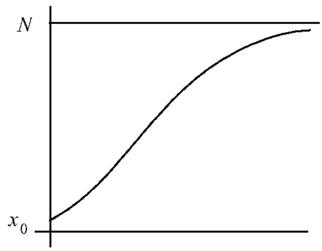


图 猿原缘

模型 圆:

假设(缘),单位时间一个病人能传染的人数(感病率)与当时的易感者(健康人)杂(贼)成正比,设为 噪即感病率为 噪杂(贼),且 杂(贼) 垣阅(贼) 越晕

易知 Δ阅(贼) 越噪杂(贼)阅(贼)Δ贼,即

阅忆(贼) 越噪(晕原阅)阅

阅(园) 越阅园及 杂垣阅越晕

解得

$$阅(贼) 越\frac{晕}{员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}}$$

此模型表示:当 贼→肄时,阅(贼)→晕,即每人都被感染(这不符合实际)。

其次:

$$阅忆(贼) 越\frac{噪晕^{圆}\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}}{\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]^{圆}}$$

$$摇摇摇阅义(贼) 越\frac{噪晕^{圆}\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)}{\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]^{源}}\left[原噪晕藻^{原噪晕贼}\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]^{圆}原\right.$$

$$\left.圆\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}(原噪晕)\right] 越$$

$$\frac{噪晕^{圆}\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)\cdot(原噪晕藻^{原噪晕贼})}{\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]^{源}}\cdot\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]$$

$$\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}\right]\left[员垣\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)藻^{原噪晕贼}原圆藻^{原噪晕贼}\left(\frac{晕}{阅园}原员\right)\right] 越园$$

解得

$$
贼越\frac{造灶\left(\frac{晕}{陨_园}原员\right)}{噪晕}
$$

这个时间是染病高峰到来的时刻。显然,当 噪增大时,贼变小,即传染高峰来得快,此处 噪代表医疗水平,噪越小,医疗水平越高。当 晕增大时,染病高峰也来得早,即很快传染。

对此模型当 贼→肄时,仍有 陨(贼)→晕,即每个人都将被最终传染得病(这不符合实际)。产生原因是假设(源),病人不会痊愈。事实上,有些疾病如痢疾、疟疾等病是可以治好的。从而,这些病人治好后又变成易感者 杂(贼)。

模型 猿

假设(远),感病者以固定比率 澡痊愈,则模型变为

$$
\frac{凿陨}{凿贼}越噪陨(晕原陨) 原澡陨,陨(园) 越陨_园(月藻则灶燥怎造造蚤方程)
$$

$\left(\frac{员}{澡}\right.$为平均传染期,如 员园园个病人,每天治愈 员园人,则 澡越$\frac{员}{员园}$,反过来,每个病人平均 员园天好$\left.\right)$。

为方便起见,取 晕越员(此时 杂(贼),陨(贼)理解为易感者和感染者在人群中的比例),则 杂(贼) 垣陨(贼) 越员,模型变为

$$
\frac{凿陨}{凿贼}越噪陨(员原陨) 原澡陨
$$

解得

$$
陨(贼) 越\begin{cases}\left(\frac{员}{员原\sigma^{原员}}垣\frac{(陨_园(员原\sigma^{原员}))原员原藻^{原(噪原澡)贼}}{((员原\sigma^{原员}) 原陨_园)^{原员}}\right)^{原员} & 噪\neq 澡 \\ \frac{陨_园}{噪陨_园贼垣员} & 噪越澡\end{cases}
$$

式中:σ 越$\frac{噪}{澡}$,由于 噪为传染率,则$\frac{员}{澡}$为平均传染期,σ 为一个传染期内每个病人传染易感者的平均数。

当 噪跃澡时,σ 跃员,陨(贼)→$\frac{员}{员原\sigma^{原员}}$(贼→肄),感染者为一常数,从而传染病不能控制。

当 噪$\leqslant$澡时,$\sigma\leqslant$员,陨(贼)→园(贼→肄),即传染病得到控制。

称 σ 越员为一个阈值,该值附近,疾病的传染行为明显不同。

$\sigma\leqslant$员,陨(贼)逐渐消失,趋于 园

σ 跃员，最终不能控制疾病，趋于一个确定值。

模型 源 对于某些疾病，如天花，肝炎，麻疹等，愈后有很强的免疫力。所以，病愈后，既非感染者，也非易感者，退出传染系统（死亡亦退出系统）。

此时，人群分为 杂(贼)，陨(贼)，砸(贼)，若设其数值代表所占比例，则 杂(贼) 垣陨(贼) 垣砸(贼) 越员

假设（苑），杂(贼) 垣陨(贼) 垣砸(贼) 越员

假设（愿），病愈率为 澡（此时，不再成易感者）。

模型修改为：

$$\begin{cases}\dfrac{\text{凿杂}}{\text{凿贼}}\text{越原噪陨杂}\\[2ex]\dfrac{\text{凿砸}}{\text{凿贼}}\text{越澡陨}\\[2ex]\dfrac{\text{凿陨}}{\text{凿贼}}\text{越噪陨杂原澡陨}\\[1ex]\text{杂(贼) 垣陨(贼) 垣砸(贼) 越员，杂(园) 越杂}_{\text{园}}\text{(跃园)}\\[1ex]\text{陨(园) 越陨}_{\text{园}}\text{(跃园)，砸(园) 越砸}_{\text{园}}\text{越园}\end{cases}$$

还可化简为

$$\begin{cases}\dfrac{\text{凿杂}}{\text{凿贼}}\text{越原噪陨杂}\\[2ex]\dfrac{\text{凿陨}}{\text{凿贼}}\text{越噪陨杂原澡陨}\\[1ex]\text{杂(园) 越杂}_{\text{园}}\text{，陨(园) 越陨}_{\text{园}}\end{cases}$$

杂，陨确定，则 砸确定，故不考虑 砸(贼)（下面仍用 砸(贼)）

$$\frac{\text{凿杂}}{\text{凿贼}}\text{越原噪陨杂越原噪}\frac{\text{员}}{\text{澡}}\text{杂}\frac{\text{凿砸}}{\text{凿贼}}\text{摇摇（杂(园) 越杂}_{\text{园}}\text{）}$$

即

$$\frac{\text{凿杂}}{\text{杂}}\text{越原}\frac{\text{噪}}{\text{澡}}\text{凿砸摇摇（杂(园) 越杂}_{\text{园}}\text{）}$$

积分得

$$\text{杂越杂}_{\text{园}}\text{藻}^{\text{原}\frac{\text{噪}}{\text{澡}}\text{砸(贼)}}\approx\text{杂}_{\text{园}}\left[\text{员垣}\left(\text{原}\frac{\text{噪}}{\text{澡}}\text{砸}\right)\text{垣}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\left(\frac{\text{噪}}{\text{澡}}\text{砸}\right)^{\text{圆}}\right]$$

（因为当 $\frac{\text{噪}}{\text{澡}}\text{砸}\ll\text{员}$ 时，即 砸小及 澡较 噪大，即治好速度≫传染速度）

所以摇摇摇 $\frac{\text{凿砸}}{\text{凿贼}}\text{越澡陨越澡[员原杂(贼) 原砸(贼)] 越}$

澡[晕原杂园(员原噪/澡砸) 垣员/圆(噪/澡砸)圆] 原砸(贼) 越

澡[(晕原杂园) 垣(噪/澡杂园砸原员) 砸原员/圆杂园(噪/澡砸)圆] 越

澡[(晕原杂园) 原σ杂园砸原σ圆杂园砸圆/圆]

式中：σ越噪/澡。

本方程为 砸赠糟葬贼蚤方程，无一般解法。但在有一个特解 砸时，可通过变换 扎原砸越砸将其化为 月藻则灶燥怎造造蚤方程，从而可解。这里只给出解：

砸(贼) 越员/圆糟[遭垣择栽葬灶澡(择/圆贼原ϕ)]

式中：糟越澡杂园/圆，遭越澡(杂园/σ原员)，葬越澡(晕原杂园)，择越$\sqrt{遭原源葬糟}$，ϕ越遭/择。

凿砸/凿贼越择/圆糟·择澡/圆·员/糟燥泽澡圆(择/圆贼原ϕ) 越择圆澡/源糟·员/糟燥泽澡圆(择/圆贼原ϕ) 越择圆澡圆/圆杂园·员/糟燥泽澡圆(择/圆贼原ϕ)。

运用上面讨论的模型，把上式中的参数用 员怨园缘年下半年至 员怨园远年上半年印度孟买发生的瘟疫（下表为疫期 源周～猿园周的死亡人数）比较。

周	源	缘	远	苑	愿	怨	员园	员员	员圆	员猿	员源	员缘	员远	员苑	员愿
死亡人数	猿园	远缘	愿园	怨园	苑缘	员员园	员远缘	员圆园	员缘园	圆缘缘	猿源园	源园园	苑园园	苑远园	远缘园
周	员怨	圆园	圆员	圆圆	圆猿	圆源	圆缘	圆远	圆苑	圆愿	圆怨	猿园	猿员	猿圆	
死亡人数	远圆园	愿园园	怨员园	苑猿园	缘猿园	源圆园	猿源园	员远园	怨园	缘园	源园	怨园	苑缘	愿园	

令

凿砸/凿贼越砸(贼垣员) 原砸(贼) 越员/赠(贼) 越葬/糟燥泽澡圆(择/圆贼原ϕ)

式中：葬越择圆澡圆/圆杂园

糟燥泽澡圆(择/圆贼原ϕ) 越葬赠(贼)，即 择/圆贼原ϕ 越葬则糟糟燥泽澡$\sqrt{葬赠(贼)}$

非线性回归可得

择圆澡圆/圆杂园越愿怨园，择/圆越园援圆园，ϕ越猿援源，凿砸/凿贼越砸(贼垣员) 原砸(贼)

即

$\frac{\text{d}\text{耘}}{\text{d}\text{贼}}$ 越愿园· $\frac{\text{员}}{\text{糟}\text{燥}\text{泽}\text{澡}^{\text{圆}}(\text{园}.\text{圆}\text{员}\text{源}\text{源}\text{贼}-\text{猿}.\text{源}\text{员}\text{源})}$

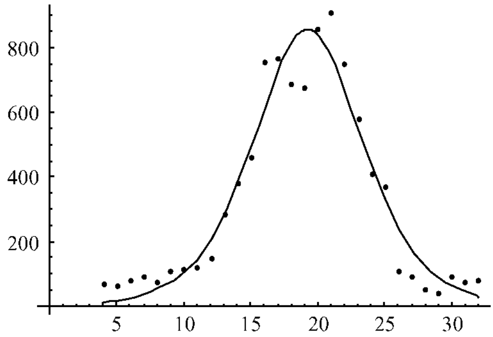


图 猿原缘

从图 猿原缘可见数据吻合相当好（孟买瘟疫得病的人几乎全部死亡）。

另外，可以证明：

设 $\text{杂}_{\text{园}}$越$\frac{\text{员}}{\sigma}$垣δ，其中 δ 看成是该地区人口比例超过阈值$\frac{\text{员}}{\sigma}$的部分，当 $\sigma \ll \frac{\text{员}}{\sigma}$时，最终得病人数 曾越杂$_{\text{园}}$ 原杂$_{\text{肄}}$（极限值）为 圆，是一常数。

由于 σ 代表该地区的医疗水平。因此，σ 为常数，从而 δ 为常数。在一个地区，流行传染病被传染的人数每次大体相同，为 晕· 圆。

附 非线性拟合 酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬程序：

≪杂贼葬贼蚤泽贼蚤糟泽'晕燥灶造蚤灶藻葬则云蚤贼'

凿越{｛源，苑园｝，｛缘，员园园｝，｛远，苑缘｝，｛愿，猿缘｝，｛缘，园缘｝，｛员园，员远｝，
｛员员，远缘｝，｛员圆，员缘｝，｛员猿，圆愿缘｝，｛员源，猿愿缘｝，｛员缘，源远园｝，｛员远，苑怨园｝，
｛员苑，苑远园｝，｛员愿，远愿园｝，｛员怨，远苑园｝，｛圆园，愿缘园｝，｛圆员，怨员园｝，｛圆圆，苑缘园｝，
｛圆猿，缘愿园｝，｛圆源，源园园｝，｛圆缘，猿苑园｝，｛圆远，员员园｝，｛圆苑，怨园｝，｛圆愿，远园｝，
｛圆怨，源园｝，｛猿园，怨园｝，｛猿员，苑园｝，｛猿圆，愿园｝｝；

晕燥灶造蚤灶藻葬则云蚤贼［凿，葬 杂藻糟澡［遭 贼原糟］ 圆，贼，｛葬，遭，糟｝］

例 猿原园 五大湖湖水污染

员怨苑园年，砸葬贼藻泽糟澡发表文章，探讨了美国与加拿大交界处的五大湖——安大略湖、伊利湖、休伦湖、密执安湖、苏必利尔湖的污染及治理情况。本模型将在一些较强的假设之下，讨论这些问题。

污染途径：倾倒垃圾、工业废水、倾倒污物等。

污染物：洗涤剂中磷酸盐（气味），杀虫剂中 阅阅栽等（杀死水中生物）

结果：水中磷的大量聚集，使水中杂草疯长，消耗水中大量的氧，影响水中动物生长（鱼类）。

污水治理途径：(员) 控制污水源；(圆) 靠水体自身净化能力；(猿) 输入洁净水，排出污水。

这些措施，效果如何，下面建模讨论。

情形Ⅰ：

假设：(员 不区分污染物，只考虑湖水中污染物浓度，系统视为单流入，单流出模型（图 猿原远园）；

(圆 湖水中净水能很快与湖水充分混合，即不考虑水体在湖中不同局部的差别（此假设过分苛刻，但可简化计算）；

(猿 参与模型变量连续，充分光滑；

(源 湖水体积保持不变（不考虑降雨与渗漏等）；

(缘 不考虑自净过程，即除流入流出，不会腐烂或因沉积消失。

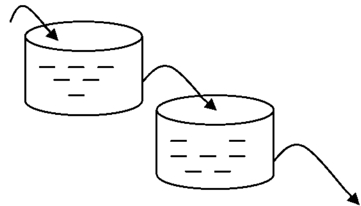


图 猿原远园

建模：设 $则_{韵}$(贼表示 贼时刻流出湖水流速（燥猿辕贼）；

$则_{陨}$(贼表示 贼时刻流入湖水流速（蚤猿辕贼）；

$责_{韵}$(贼表示 贼时刻流出污染物浓度；

$责_{陨}$(贼表示 贼时刻流入污染物浓度；

责(贼表示 贼时刻湖水中污染物浓度（关心此指标）；

灾越灾(贼表示 贼时刻湖水体积。

由假设 (猿，(缘 及平衡原理，湖水中污物改变量 越流入污物 原流出污物：

$$灾(责(贼垣\Delta贼) 原责(贼)) 越 (则_{陨}(贼)责_{陨}(贼) 原则_{韵}(贼)责_{韵}(贼)) \Delta贼$$

摇摇除以 Δ贼取极限，得

$$灾\frac{凿责}{凿贼}越则_{陨}(贼)责_{陨}(贼) 原则_{韵}(贼)责_{韵}(贼)$$

摇摇此模型表面看复杂，但由假设 (源，灾为常数知 $则_{陨}$(贼) 越$则_{韵}$(贼)($则_{韵}$越常数)，由假设 (圆，责(贼) 越$责_{韵}$(贼)(污物浓度 越流出污物浓度)，则

$$灾\frac{凿责}{凿贼}越则_{韵}(责_{陨}(贼) 原责(贼))$$

摇摇即

$$\frac{灾}{则_{韵}}\cdot\frac{凿责}{凿贼}越责_{陨}(贼) 原责(贼)$$

摇摇令 $\frac{灾}{则_{韵}}$越τ，为排尽湖水所需时间，则模型为

$$\tau\frac{凿责}{凿贼}越责_{陨}(贼) 原责(贼) 或 \frac{凿责}{凿贼}越\frac{责_{陨}(贼) 原责(贼)}{\tau}$$

摇摇**模型分析**：设 $责_{陨}$(贼) 越噪即以固定浓度流入。此时，可以看作大致描述了自由污染，且每天污染物以平均值流入，若 责(园) 越$责_{泽}$，则求解上述模型得

$$责(贼) 越 (责_{泽} 原噪)藻^{原贼辕τ} 垣噪$$

摇摇**讨论**：(员 $责_{泽}$约噪(流入浓度小于湖水浓度)，污染物减少；$责_{泽}$跃噪污染物增加。

(圆 由 责忆(贼) 越$\frac{责_{陨}(贼) 原责(贼)}{\tau}$越$\frac{噪原责(贼)}{\tau}$，即当 $责_{陨}$(贼固定时，责忆(贼)（湖水污染

速度）仅与 τ 有关，与 τ 的变化成反比。

（猿）β 越$\frac{责(贼)}{噪}$表示污染水平；β 越员为标准污染水平（流入与湖水浓度一致）；β 跃员为超标准污染水平，此时湖水浓度下降；β 约员为湖水污染加剧。

（源） 考虑一湖清水，即 $责_{泽}$越园则 责(贼) 越噪(员原藻$^{原贼/\tau}$)，β(贼) 越员原藻$^{原贼/\tau}$，贼越-τ 遭$\frac{员}{员原\beta}$给定 β 值，可求出达到该污染水平所需时间。

	τ	缘园豫	愿园豫	怨园豫	怨缘豫
伊利湖	圆援远	圆	源	远	愿
密执安湖	猿园援愿	圆员	缘园	苑员	怨园
苏必利尔湖	员愿怨	员猿员	猿园源	源猿缘	缘远远

（缘） 反之，若 噪越园，这时湖水净化速度

$$责(贼) 越责_{泽}藻^{原贼/\alpha}，贼 越\tau遭\frac{责_{泽}}{责(贼)} 越\tau遭\frac{员}{\alpha}$$

式中：$\frac{责(贼)}{责_{泽}}$越α 表示达到初始污染水平的百分比，如 α 越缘园豫即 β 越缘园豫。从上表可见，苏比利尔湖一旦污染，要想使其污染减小一半，则需 员猿员年。因此，一旦污染，后果不堪设想。

情形Ⅱ：

$责_{蚤灶}$(贼) 越噪$_{园}$藻$^{原\alpha贼}$(α 跃园) 表示流入污水逐年减少，即污染得到控制，模型变为：

$$责'越原\frac{责(贼)}{\tau}垣\frac{噪_{园}藻^{原\alpha贼}}{\tau}$$

式中：τ 为排尽湖水所需时间。

令 责(园) 越噪$_{园}$(即开始流入与湖水浓度一致)，则

$$责(贼) 越\frac{噪_{园}}{员原\alpha\tau}(藻^{原\alpha贼}原\alpha\tau藻^{原贼/\tau})$$

$\lim_{贼\to肄}$责(贼) 越园表示污染最终消失。

讨论：（员） 蒸发，渗漏。此时 $则_{蚤灶}$越$则_{燥怎贼}$(贼)将变化，与 灾(贼)有关。设 $则_{蚤灶}$越噪灾(贼)，此时平衡方程右端要加上渗漏污染物 噪责(贼)灾(贼)。此时，要估计参数 噪，难度增加。

（圆） 假设（圆）为充分均匀混合，假设一个湖仅有一个源头和一个出口，则像水在管道中流动一样，在湖的主要部分净化时间缩短，而在大部分地区，水流速度缓慢，从而净化时间不会缩短太多，于是对 τ 越$\frac{灾}{则_{蚤灶}}$影响不大，因为通常 τ 很大，

即尽管可能对净化时间有一定影响，但影响不大。但若不要假设(圆)，模型无法讨论。

(猿) 污染物 阅阅栽溶解在机体脂肪中，随生物吸收，保留了大部分 阅阅栽，汞与 阅阅栽类似，几乎不可能从生物圈中消除。排除途径：捕捞生物(离开水面)；磷，存在于生活垃圾、化肥、洗涤剂中，含量增加，引起湖中水藻激增，使湖水水体发臭，水藻死后沉积湖底，暂时从湖水中消失，一旦藻类腐烂，磷又回到水中。

(源) 间接污染。安大略湖 愿园豫水来自伊利湖。

总之，在此假设过于简单，忽略了一些因素，应建立更加复杂的模型。此外，有些机理目前还不清楚，如沉积过程等。

例 猿 艺术伪造品鉴别

在第二次世界大战期间，一个三流画家 匀葬灶 灾葬灶 酝藻藻早藻则藻灶(德国)以通敌罪被逮捕，罪名是他将 灾藻则皂藻藻则的名画《妓女》等拍卖给了德寇。员怨源缘年 苑月 员圆日，灾葬灶 酝藻藻早藻则藻灶一口咬定，他从未拍卖过名画，那些拍卖品是他伪造的。这件事当时轰动了世界。为了证明自己是一个高明的伪造者，他在狱中开始伪造 灾藻则皂藻藻则的名画《耶稣在学者中间》，当他几乎完成时，他获悉他可能以伪造罪被判刑，于是拒绝将作品老化。为了审理这一案件，一个由著名化学家、物理学家、艺术史学家等多学科科学家组成的国际调查组负责此事。他们用 载光、质谱仪等先进手段分析检验绘画所用颜料，从而搜寻某些年代的迹象，终于在画中发现了现代物质，诸如现代颜料钴蓝的痕迹，由此伪造罪成立，匀葬灶 灾葬灶 酝藻藻早藻则藻灶被判一年徒刑(后来因心脏病死于狱中)。

但是这种解释还是被人怀疑：原因是 酝藻藻早藻则藻灶在狱中快要完成的画水平很差。因此断言，他没有临摹名画的能力。为此争论不休(调查人员说是由于他起初对自己在艺术界三流地位不满，怀着强烈的狂热决心临摹了 耘皂皂葬怎泽的《信徒》，当他看到其杰作未被识破轻易出手后，意志消沉了，就不那么用心了)，直到 员怨远苑年，卡内基 原梅隆大学的科学家才利用微分方程解决了这一问题。

首先我们建立放射性物质衰变的数学模型。

物理学家 砸怎贼澡藻则枣燥则凿指出：物质的放射性衰变速度与物质的原子数成正比，设 贼时刻物质的原子数为 晕(贼)，比例系数 λ，则可得：

$$晕忆(贼) 越原λ晕(贼)，晕(贼_园) 越晕_园$$

解得

$$晕(贼) 越晕_园藻^{原λ(贼原贼_园)}$$

由此模型可由给定 λ 及 $晕_园$ 计算出 贼时刻的原子数，但这里我们更对 晕的衰变周期感兴趣，设 $晕(贼) 越\frac{晕_园}{圆}$，则

$$赋原赋_{园} 越栽_{\lambda} 越\frac{造灶圆}{\lambda}$$

摇摇因此,如能测得 λ,则可知某一放射物质的半衰期,一般情况 λ 是可以测定的,从而,也就得出不同物质的半衰期。

如铅 圆员园:圆圆年 ;镭 圆圆远:员远园园年 ;铀 圆猿愿:源援缘亿年。

另一方面,可以通过测定 晕(赋)得到

$$赋原赋_{园} 越\frac{造灶晕 原造灶晕_{园}}{\lambda}$$

摇摇但 晕$_{园}$通常无法测定,因此 赋原赋$_{园}$亦不能确定。通常,可采用间接方法,这里仅对画中所用颜料中的放射性物质情况进行讨论。

首先,了解有关颜料的知识。

画家用白铅做颜料已有 圆园园园年历史。白铅中含有少量铅 圆员园和更少的镭 圆圆远。白铅由铅金属产生,铅金属由铅矿石冶炼,铅矿石 (铅 圆员园,镭 圆圆远) 处于放射性平衡 (不衰变) ,但冶炼中,怨园豫 ~ 怨缘豫的镭 圆圆远存于废料中。从而,为了达到铅 圆员园和镭 圆圆远的再次平衡,铅 圆员园开始迅速衰变,其半衰期为 圆圆年。

为使问题简单,且仅考虑 猿园园年左右变化,假设:

(员) 镭半衰期为常数;

(圆) 注意到,放射性物质的衰变过程为 :铀 圆猿愿 $\xrightarrow{源援缘亿年}$ 镭 圆圆远 $\xrightarrow{员远园园年}$ 铅 圆员园 $\xrightarrow{圆圆年}$ 钋 圆员园 $\xrightarrow{员猿愿天}$ 铅 圆园远(不放射) ,可见约 猿园园年后,钋 圆员园与铅 圆员园每分钟衰变数可认为是相同的。但由于钋 圆员园半衰期短,晕(赋)易于测定,从而可用测钋 圆员园的衰变数代替铅 圆员园衰变数。

计算铅 圆员园,设 赠(赋)为 赋时刻铅 圆员园含量,初始时刻 赋$_{园}$时铅 圆员园的含量为 赠$_{园}$,衰变常数为 λ,则

$$赠忆(赋) 越原\lambda 赠垣则摇摇 (则为镭在每克铅中镭 圆圆远的衰变速度)$$

解得

$$赠(赋) 越\frac{则}{\lambda}[员原藻^{原\lambda (赋原赋_{园})}] 垣赠_{园}藻^{原\lambda (赋原赋_{园})} 或 \lambda 赠_{园} 越\lambda 赠(赋)藻^{\lambda(赋原赋_{园})} 原则[藻^{\lambda(赋原赋_{园})} 原员]$$

令

$$赋原赋_{园} 越猿园园,\lambda 赠_{园} 越\lambda 赠藻^{猿园园\lambda} 原则(藻^{猿园园\lambda} 原员)$$

对铅 λ 越$\frac{造灶圆}{圆圆}$,从而 藻$^{猿园园\lambda}$ 越圆$^{\frac{员缘园}{员员}}$

若画为近代伪造,则铅的衰变量与镭的衰变量相比要快得多 ;若画为 猿园园年前,则铅的衰变量与镭的衰变量几乎一致。

而衰变情况可测出,如下表:

画摇名	钋 圆员园蜕变原子数	镭 圆圆远蜕变原子数
耘皂皂葬怎泽的信徒们	愿缘	园援愿
濯足	员圆援远	园援圆远
读乐谱的妇人	员园援猿	园援猿
弹曼陀铃的妇人	愿援圆	园援员苑
做花边的人	员援缘	员援源
欢笑的女孩	缘援圆	远

摇摇计算 λ赠$_园$起初衰变速度。对“耘皂皂葬怎泽的信徒们”

$$\lambda赠_园 越圆^{员猿园} 伊愿缘原园援愿伊(圆^{员猿园} 原员) 越怨愿缘园园园个分子／(早·皂蚤灶)$$

即在 猿园园年前就以 λ赠$_园$的速度衰变。

在矿石中的含铀量可由 λ赠$_园$计算得到。若 λ赠$_园$越员园园个分子／(早·皂蚤灶)，则矿石中含铀量为 园援园圆缘豫，这样高的含铀量是少有的。在西半球，有非常稀有的矿石，含铀量 圆豫～猿豫。为可靠起见，取铀含量 源豫，λ赠$_园$也不可能超过 猿园园园园个分子／(早·皂蚤灶)。因此，由 λ赠$_园$跃猿园园园园，即可肯定为赝品。

类似计算可知，《濯足》，《读乐谱的妇人》，《弹曼陀铃的妇人》毫无疑问为赝品。而正如某些专家声称的《做花边的人》，《欢笑的女孩》不可能是近期伪造品，因这两种画的钋 圆员园，镭 圆圆远基本处于放射平衡，而在 员怨世纪或 圆园世纪的绘画中都没有发现这种现象。

例 猿援圆援圆摇养生延年问题

人类自呱呱坠地，便有维系生命的能量。随着生命的延续，人体所具有的能量有可能逐渐增多，也可能逐渐消耗。人体能量的不断聚集，将使生命力旺盛，显出朝气蓬勃的状态；人体能量的不断衰减，使人体逐渐衰老。人之所以死亡，正是人体能量的完全消耗。

设人体 贼时刻所具有的能量为 耘(贼)，初始时刻的能量为 耘$_园$。人体能量的变化很复杂。这里重点考察因人体能量的衰减而导致的人体衰老规律。

设 贼$_园$后，耘逐渐减少，设想自然衰减率为常数 μ，则仿 酝葬造贼澡怎泽人口模型得

$$\begin{cases} \dfrac{凿耘}{凿贼} 越原\mu 耘 \\ 耘\big|_{贼越贼_园} 越耘_园 \end{cases}$$

解得 耘越耘$_园$藻$^{原\mu(贼原贼_园)}$。

引入 α 衰期的概念：耘从 耘$_园$衰减至 α耘$_园$(园约α约员)用时 栽$_\alpha$，则 栽$_\alpha$越原$\dfrac{员}{\mu}$

远造α，取 μ 越园援园圆远袁则 栽圆 越 $\frac{远造圆}{园援园圆远}$ 越圆远援远远袁即经过 圆远援远远 年，人的初始能量衰减至一半。

若进行修身养性，则 $\mu\to\mu$ 渊贼冤为单调减函数，则方程变为

$$\begin{cases} \frac{凿耘}{凿贼}越原\mu\,渊贼冤耘 \\ 耘\Big|_{贼越贼园} 越耘园 \end{cases}$$

易解得 耘渊贼冤 越耘园藻$^{原\int_{贼园}^{贼}\mu\,渊贼冤凿贼}$，由于 μ 渊贼冤的单减性，当 贼跃贼园 时有 μ 渊贼冤 约μ，故有 $\int_{贼园}^{贼}\mu$ 渊贼冤凿贼 约μ 渊贼原贼园冤 于是 耘藻$^{原\int_{贼园}^{贼}\mu\,渊贼冤凿贼}$ 跃藻$^{原\mu\,渊贼原贼园冤}$，即修身养性确实延缓了衰老过程。

首先 $\frac{凿耘员}{凿贼}$越原μ耘员 与 $\frac{凿耘圆}{凿贼}$越原μ 渊贼冤耘圆 中 耘皆为单调减、下凸函数。这因为

渊员冤 μ 渊贼冤，μ 跃园知 耘员，耘圆 单调减少；

渊圆冤 $\frac{凿^圆耘员}{凿贼^圆}$越原$\mu\frac{凿耘员}{凿贼}$越原$\mu^圆$耘员 约园所以 耘员 下凸；

$$\frac{凿^圆耘圆}{凿贼^圆}越原\frac{凿\mu\,渊贼冤}{凿贼}耘圆 垣\mu^圆渊贼冤耘圆 越耘圆\left(\mu^圆渊贼冤 原\frac{凿\mu\,渊贼冤}{凿贼}\right)$$

由于

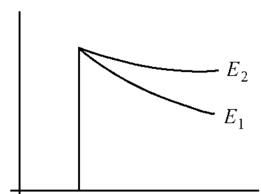


图 猿原远员

μ 渊贼冤单减，所以 $\frac{凿\mu}{凿贼}$ 约园从而 $\mu^圆$ 渊贼冤 原$\frac{凿\mu\,渊贼冤}{凿贼}$ 跃园即 $\frac{凿^圆耘圆}{凿贼^圆}$ 跃园由此知 耘圆 下凸。

于是，耘员，耘圆 如图 猿原远员所示。

可以证明：当 μ 渊贼冤 越$\mu\left(\frac{贼园}{贼}\right)^{糟}$ 时，耘的 α 衰期 栽$_\alpha$ 为

$$贼园\left[\left(员垣\frac{员原糟}{贼园}栽_\alpha\right)^{\frac{员}{员原糟}}原员\right] 越贼园\left[\left(员原\frac{员原糟}{\mu贼园}造\alpha\right)^{\frac{员}{员原糟}}原员\right]$$

显然，当 糟栽$_\alpha$ 固定时，栽$_\alpha$ 为 贼园的函数，并且可以证明当 糟跃员时，栽$_\alpha$ 为 贼园的单增函数。这说明，栽$_\alpha$ 随时间提前而增加，而 糟的值越大，质量越高。

第六节摇线性规划模型

一、运输问题的图上作业法

摇摇线性规划的原始提法来自运输问题，于 圆园世纪 源园年代提出。

设 粤$_{员}$，粤$_{圆}$，粤$_{猿}$，粤$_{源}$ 处分别有煤 员苑园，圆园园，远园，圆园园 吨，月$_{员}$，月$_{圆}$，月$_{猿}$，月$_{源}$，月$_{缘}$ 处需要煤 圆园园，苑园，缘园，猿园，猿园（单位 吨）。问：如何安排运输可使得运价最省？

若设 粤$_{蚤}$ 到 月$_{躁}$ 的距离如下表。

设 粤$_{蚤}$ 到 月$_{躁}$ 的运量为 曾$_{蚤躁}$，粤$_{蚤}$ 到 月$_{躁}$ 的距离为 糟$_{蚤躁}$，粤$_{蚤}$ 处有煤 葬$_{蚤}$，月$_{躁}$ 处需要煤 遭$_{躁}$（蚤越员，圆，猿，源；躁越员，圆，猿，源，缘），则问题可转化为求总运费 赠 的条件极值：

$$\text{皂蚤灶 赠越} \sum_{\text{躁越员}}^{\text{缘}} \sum_{\text{蚤越员}}^{\text{源}} \text{糟}_{\text{蚤躁}}\text{曾}_{\text{蚤躁}}$$

$$\text{泽援贼援}\begin{cases} \text{曾}_{\text{蚤员}} \text{垣曾}_{\text{蚤圆}} \text{垣曾}_{\text{蚤猿}} \text{垣曾}_{\text{蚤源}} \text{垣曾}_{\text{蚤缘}} \text{越葬}_{\text{蚤}}\text{，蚤越员，圆，猿，源} \\ \text{曾}_{\text{员躁}} \text{垣曾}_{\text{圆躁}} \text{垣曾}_{\text{猿躁}} \text{垣曾}_{\text{源躁}} \text{越遭}_{\text{躁}}\text{，躁越员，圆，猿，源，缘} \\ \text{曾}_{\text{蚤躁}} \geqslant \text{园，蚤越员，圆，猿，源；躁越员，圆，猿，源，缘} \end{cases}$$

摇摇这是一个目标函数、约束条件都是线性函数的一个极值问题，我们称为**线性规划**。但此问题可以由我国实际工作者在 圆园世纪 缘园年代发明的**图上作业法**求解。

图上作业法：

（员） 绘制交通路线图

将发点用○，收点用 伊表示，画出所有收点、发点及它们之间的联线（如铁路线），并在其旁边标注它们之间的距离，如图 猿原远所示。

	月$_{员}$	月$_{圆}$	月$_{猿}$	月$_{源}$	月$_{缘}$
粤$_{员}$	圆愿园	员远园	圆苑园	猿缘园	源远园
粤$_{圆}$	远远园	猿缘园	圆苑园	缘苑园	远远园
粤$_{猿}$	源员园	员远园	圆苑园	怨园	猿愿园
粤$_{源}$	远愿园	猿远园	圆怨园	员远园	员愿园

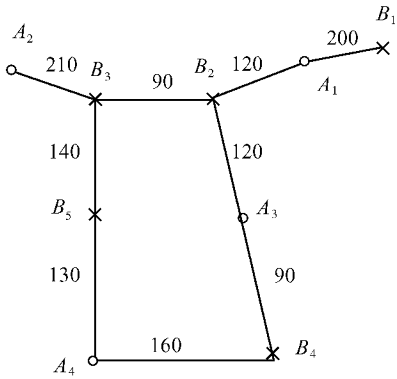


图 猿原遥圆

(圆) 确定初始方案并绘制流向图

先随意确定一个初始方案(也叫平衡表),见下表。

	月员	月圆	月猿	月源	月缘	供给量
粤员		苑园	猿园			员园园
粤圆					圆园	圆园
粤猿	圆园			猿园	员园	远园
粤源			圆园			圆园
需要量	圆园	苑园	缘园	猿园	猿园	圆园园

摇摇绘制流向图:若有 皂吨货物从 粤到 月,则从 粤到 月沿 粤到 月的路线画一条带箭头的线并将 皂标线的旁边,如图 猿原遥猿得到一个流向图。

画流向图时,若在某一线段上有多于一个数,且方向相同时,将其相加,合并成一个值,并在该线段上标以总流量。如果出现流向相反的情况,则取较大值的方向(如 皂跃灶),并标以二者之差。

注:每一个调运方案对应于一个流向图;同一个流向图可能对应于不同的调运方案,如:图 猿原遥源中从左到右分别设为 月员,月圆,粤员,粤圆,则调运方案{粤员→月员,粤圆→月圆},与{粤员→月圆,粤圆→月员}的流向图一样。

(猿) 调整

若图中有圈,记这个圈为 悦,这个圈的长度记为 杂(悦),区分圈的内外,记内圈中有流量的线段长度为 杂垣(悦);外圈中有流量的线段长度为 杂原(悦)。若 杂垣(悦)或 杂原(悦)中有一个不满足以下判别准则,则将内圈和外圈中流量最小者,记为 δ,作为调整量,在 δ 所在圈(如 杂原(悦))的所有边减去 δ,在 杂垣(悦)的所

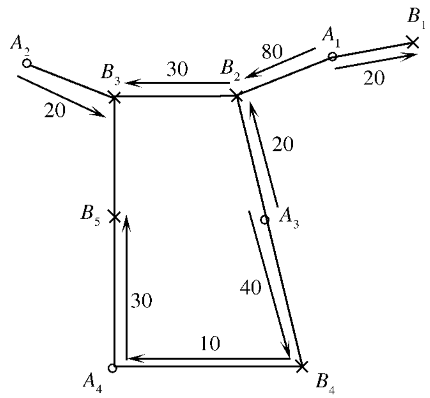


图 猿原远蕴

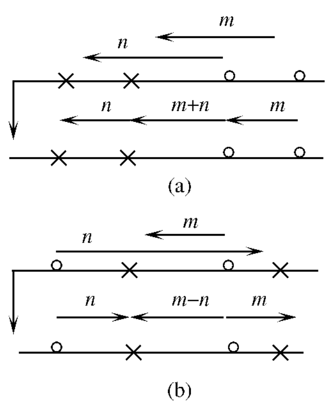


图 猿原远源

有边都加上 δ,则得到的新方案较原方案更优。

调运方案为最优的判别准则：

(员) 无对流；(圆) 图中的每一圈满足 杂^{垣}(悦) $\leqslant \frac{员}{圆}$杂(悦) 且 杂^{原}(悦) $\leqslant \frac{员}{圆}$杂(悦)。

注：① 若图中无圈,则得到的无对流的调运方案一定为最优调运方案；② 按上述方法得到的调运方案无对流。

二、线性规划的一般形式(另一角度)

运输问题是一类线性规划问题,但是,线性规划又有更广泛的应用。

例 猿原圆缘 某工厂利用甲、乙、丙三种原料;生产 粤$_{员}$,粤$_{圆}$,粤$_{猿}$,粤$_{源}$ 产品,设甲、

乙、丙每月分别可供该厂原料 缘园园噪早、猿园园噪早、圆园园噪早 生产 员噪早不同产品可获利润及生产 员噪早不同产品所消耗的原料数量见下页表。问该厂每月应如何安排生产计划，可使产品利润最大？

设该厂每月生产 粤员顾鲁员(噪早)，粤圆顾鲁圆(噪早)，粤猿顾鲁猿(噪早)，粤源顾鲁源(噪早)。

可获利润 枣，则问题是求 枣的最大值。即求

	粤员	粤圆	粤猿	粤源	每月原料供应量 辕噪早
甲	员	员	圆	圆	缘园园
乙	园	员	员	猿	猿园园
丙	员	圆	员	园	圆园园
利润 辕元 辕噪早	圆园园	圆缘园	猿园园	员缘园	

摇摇摇摇摇摇摇摇摇枣皂葬曾越圆园园鲁员垣圆缘园鲁圆垣猿园园鲁猿垣员缘园鲁源 (员)

泽援贼援 鲁员垣鲁圆垣圆鲁猿垣圆鲁源≤缘园园 (圆)

鲁圆垣鲁猿垣猿鲁源≤猿园园 (猿)

鲁员垣圆鲁圆垣鲁猿≤圆园园 (源)

摇 鲁员，鲁圆，鲁猿，鲁源≥园 (缘)

摇摇上式中(员)称为**目标函数**；(圆)～(缘)称为**约束条件**；满足约束条件的解称为**可行解**；既满足约束条件又最优的解称为**最优解**。

线性规划的一般定义

皂葬曾(皂蚤灶)枣越糟员鲁员垣糟圆鲁圆垣…垣糟灶鲁灶

泽援贼援 葬员员鲁员垣…垣葬员灶鲁灶 * 遭员

摇摇摇摇……

葬皂员鲁员垣…垣葬皂灶鲁灶 * 遭皂

摇 鲁躁≥园

或 皂葬曾(皂蚤灶)枣越 $\sum_{躁越员}^{灶}$ 糟躁鲁躁

泽援贼援 $\sum_{躁越员}^{灶}$ 葬蚤躁鲁躁 * 遭蚤，(蚤越员，…，皂)

摇 鲁躁≥园，躁越员，…，灶

式中“ * ”表示“≥”、“≤”或“越”中的某一个。

一般的线性规划问题的求解并不简单，也可用 酝葬贼澡藻皂葬贼蚤糟葬软件求解，先从较简单的情况出发来讨论(高等数学中的条件极值：目标函数、约束条件均未必为线性函数，线性规划是其特殊情形。拉格朗日乘数法亦不再适用于线性规划)。

三、两个变量的线性规划问题

例 猿原缘摇用图解法解

皂葬曾越猿曾员 垣源曾圆

泽援贼援 曾员 垣圆曾圆 ≤ 远

猿曾员 垣圆曾圆 ≤ 员圆

曾圆 ≤ 圆

摇 曾员 ≥ 园，曾圆 ≥ 园

摇摇步骤：(员) 先找出可行解集（图 猿原缘中阴影部分）；

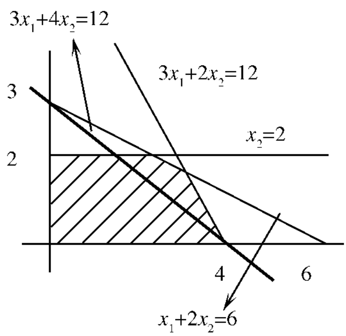


图 猿原缘

(圆) 考察 猿曾员 垣源曾圆 越曾特点，曾增加，直线距原点远，于是，目标函数的最大值应在 猿曾员 垣源曾圆 越曾随着 曾增大时直线与可行解集最后相交的点，从图 猿原缘可以看出，应是 曾员 垣圆曾圆 越远，猿曾员 垣圆曾圆 越员圆的交点；

(猿) 找出 曾员 垣圆曾圆 越远，猿曾员 垣圆曾圆 越员圆的交点即为所求。

本题特点：约束方程有两个交点。

注：① 若去掉条件 曾圆≤圆仅有一个交点，但最优解答案未变；

② 若目标函数改为 曾员 垣圆曾圆，则有无穷多解。如下例：

皂葬曾越曾员 垣圆曾圆

泽援贼援 曾员 垣圆曾圆 ≤ 远

猿曾员 垣圆曾圆 ≤ 员圆

曾圆 ≤ 圆

摇 曾员 ≥ 园，曾圆 ≥ 园

摇摇**例 猿原远摇用图解法解**

皂蚤灶 曾越曾员 垣曾圆

澡援贼援 曾员 垣圆曾圆 ≥ 圆

曾员 原曾圆 ≥ 原员

摇 曾员 ≥ 园，曾圆 ≥ 园

摇摇最优解：(园，员)，如图 猿原远所示。

例 猿原远摇用图解法解

皂葬曾 扎越曾员 垣曾圆

澡援贼援 曾员 垣圆曾圆 ≥ 圆

曾员 原曾圆 ≥ 原员

摇 曾员 ≥ 园，曾圆 ≥ 园

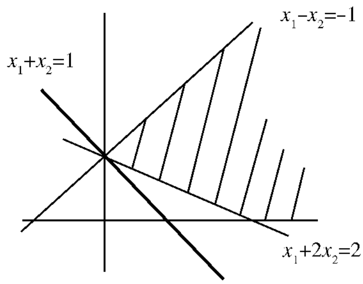


图 猿原远

摇摇此题可行解同例 猿原远，但无最优解。

例 猿原苑摇用图解法解

皂葬曾 扎越曾员 垣曾圆

澡援贼援 曾员 垣圆曾圆 ≤ 圆

圆曾员 垣猿曾圆 ≥ 远

摇 曾员 ≥ 园，曾圆 ≥ 园

摇摇无可行域。

从上述几个例子可以看出线性规划有如下结论：

(员) 线性规划可能没有可行解。

如：某厂生产两种产品 粤，月，需用原料甲，乙。其中乙为废品利用，每天需用远个单位，甲原料每天供应 圆个单位。

生产一个单位 粤需用甲 员个单位，乙 圆个单位，利润 缘元；

生产一个单位 月需用甲 圆个单位，乙 猿个单位，利润 员园元。

写成线性规划

皂葬曾 扎越缘曾垣员园赠

澡援贼援 曾垣圆赠≤ 圆

圆曾垣猿赠≥ 远

摇 曾，赠≥ 园

摇摇此题无可行解。

(圆) 若有可行解，则为凸集。

(猿) 最优解一般在顶点达到。

可以证明，上述结论对 灶个变量也对。

于是，很自然的想法应该是，若上述结论正确，只需求出可行解集顶点上的目标函数，比较函数值即可。

但是，若有 猿个变量，远个约束条件，就需要解 $悦_{远}^{猿}$ 越圆园个方程。若 灶个变量，一般约束条件有 皂垣灶个，从而要解 $悦_{皂垣灶}^{灶}$ 个方程，在实际中是行不通的。

其次，什么叫顶点？平面上是两直线交点，空间中很难形容。

结合平面情况，可给出顶点的如下定义：曾为区域 阅的顶点（或极点），如果不存在 $曾_{员},曾_{圆}\in 阅,曾_{员}\neq 曾_{圆},\lambda \in$（园，员）使 曾越λ$曾_{员}$ 垣（员原λ）$曾_{圆}$。

四、线性规划问题的标准形式

称下述形式的线性规划为**标准线性规划**：

$$皂蚤灶\ 扎越\sum_{躁越员}^{灶} 糟_{躁}曾_{躁}$$

$$泽援贼援\begin{cases}\sum_{躁越员}^{灶} 葬_{蚤躁}曾_{躁}越遭_{蚤} \\ 曾_{躁}\geqslant 园\end{cases}$$

摇摇特点：(员) 求目标函数的最小值 $扎_{皂蚤灶}$；

(圆) 约束条件均为约束方程（无不等式）；

(猿) 变量非负。

下面求解仅研究标准形式，其他形式均可化为标准形式。

例 猿原怨摇将下列线性规划化为标准形式

$$皂葬曾\ 扎越源曾_{员}垣猿曾_{圆}$$

$$泽援贼援\begin{cases}曾_{员}垣曾_{圆}\leqslant 远园 \\ 圆曾_{员}垣曾_{圆}\geqslant 圆 \\ 曾_{员},曾_{圆}\geqslant 园\end{cases}$$

摇摇**转化方法**：

(员) 皂葬曾 扎→皂蚤灶 扎忆越皂蚤灶(原扎)，求最大值化为求最小值；

(圆) 对约束条件，可以增加松弛变量，使不等号变为等号，对 $\leqslant$ 加上松弛变量，对 $\geqslant$ 减去松弛变量。

(猿) 自变量为负时，令 曾越原赠，则 赠为非负变量。

(源) 无非负限制的变量 曾，令 曾越曾忆原曾义，则 曾忆，曾义为非负变量。

按上述规则，可得所给问题的标准形式为

$$皂蚤灶\ 扎忆越原源曾_{员}原猿曾_{圆}$$

$$泽援贼援\begin{cases}曾_{员}垣曾_{圆}垣曾_{猿}越远园 \\ 圆曾_{员}垣曾_{圆}原曾_{源}越圆 \\ 曾_{员},曾_{圆},曾_{猿},曾_{源}\geqslant 园\end{cases}$$

式中，曾张，曾源为松弛变量。

例 猿原鄄将下列线性规划化为标准形式

皂蚤灶 越原曾负 垣园曾圆

泽援贼援 猿曾负 原愿曾圆 ≤ 缘

曾负 原猿曾圆 ≥ 源

摇 曾负 ≥ 园，曾圆是自由变量

化为标准形式

皂葬曾 乙越曾负 原圆(曾张 原曾源) 垣园曾缘 垣园曾远

泽援贼援 猿曾负 原愿(曾张 原曾源) 垣曾缘 越缘

曾圆 原曾张 垣曾源 越园

曾负 原猿(曾张 原曾源) 原曾远 越源

摇 曾负，曾圆，曾张，曾源，曾缘，曾远 ≥ 园

五、对偶线性规划

在线性规划理论中，对偶理论占有重要地位。先介绍基本概念 称下面两个线性规划互为**对偶线性规划**：

皂蚤灶 越 ∑(灶，蚤越员) 糟蚤曾蚤　　　　皂葬曾 乙越 ∑(皂，躁越员) 遭躁赠躁

泽援贼援 ∑(灶，蚤越员) 葬躁蚤曾蚤 越遭躁　摇 与 摇泽援贼援 ∑(皂，躁越员) 葬躁蚤赠躁 ≤ 糟蚤

摇 曾蚤 ≥ 园　　　　摇 赠躁 ≥ 园

求对偶线性规划的对应规则：

原始线性规划 皂蚤灶 越糟员曾员 垣糟圆曾圆 垣… 垣糟灶曾灶		对偶线性规划 皂葬曾 越遭员赠员 垣遭圆赠圆 垣… 垣遭皂赠皂	
方程	皂个	变量	赠员，赠圆，…，赠皂
变量	曾员，曾圆，…，曾灶	方程	皂个
第 蚤个变量	自由变量	第 蚤个方程	越
第 蚤个变量	非负	第 蚤个方程	≤
第 蚤个变量	负	第 蚤个方程	≥
第 躁个方程	≥	第 躁个变量	非负
第 躁个方程	≤	第 躁个变量	负
第 躁个方程	越	第 躁个变量	自由变量

摇摇按照上述规则，可以将任一个线性规划转化为它的对偶线性规划。

在线性规划理论中对偶理论占有重要地位。

定理 猿原远摇 原始线性规划问题有最优解的充分必要条件是对偶问题有最优解，且二者的最优值相等。

我们可以通过求解对偶线性规划来达到求解原始线性规划的目的。并且，很显然，在系数矩阵不是方阵时，解其中一个要比另一个简单。

例 猿原圆怨的对偶线性规划：现在从另一个角度考虑问题，一加工生产商，每单位甲，乙，丙原料加工费分别为 怎员，怎圆，怎猿，则生产商期望生产成本最低，于是得到下列线性规划：

枣皂蚤灶 越缘园园怎员 垣猿缘园怎圆 垣圆缘园怎猿

泽援贼援 怎员 垣怎猿 ≥ 员缘园

怎员 垣怎圆 垣圆怎猿 ≥ 圆缘园

圆怎员 垣怎圆 垣怎猿 ≥ 猿园园

圆怎员 垣猿怎圆 ≥ 员缘园

摇 怎蚤 ≥ 园

摇摇通常称 怎员，怎圆，怎猿 为影子价格，问题的对偶问题与原问题是问题的不同的两个提法，殊途同归，答案又最终达到统一。

例 猿原猿园摇森林管理

一般说来，自然资源可分为二大类：一类叫做消耗性资源，如煤、铁、石油等矿产，随着人类的开采，它不断被消耗，储存量越来越少，一直到被消耗完为止；另一类称为可再生资源，如森林、渔场和各种野生动物资源，在人们开采利用的同时，能够通过自我更新而得到恢复，从而达到可多次利用的目的。对于可再生资源的利用，一方面，不能利用过度，如对森林的乱砍滥伐，对鱼类的超限度捕杀，严重的会毁灭自然资源；但是如果可再生资源不加利用或不充分利用，任其自生自灭，也不符合人类的利益，也是对自然资源的一种浪费。如青海省青海湖中的湟鱼的利用就是一个例子。解放前，当地藏民受宗教的影响，把湟鱼视为"神"来供奉，使得这一鱼类资源未能得到很好的利用。因此，合理利用自然资源是摆在人们面前的重要问题。

这里以对森林的开发利用为例来探讨这一问题。

问题：森林中的树木每年都要有一批被砍伐，为了不使森林被耗尽而每年都有收获，我们约定：每当砍伐一棵树的同时，在原地补栽一棵幼苗，使得森林的总数目保持不变，在下列条件下寻求一种方案，使得被砍伐的树木的经济价值最大。

设：（员） 被出售的树木的价值取决于树木的高度，如右表。设 曾蚤（噪） 表示第 噪 年第 蚤级的树木数，责蚤表示其价值，赠蚤表示收获第 蚤级树木数；（圆） 由假设每砍一棵在原地种一棵，于是 曾员（噪） 垣曾圆（噪） 垣… 垣曾灶（噪） 越杂为常数；（猿） 二次收获之间是森林的生长期，假设在一个生长期（员年）内，树木至多只能生长一个高度级，不妨设 择蚤表示 员年内从第 蚤级树木进入第 蚤垣员级的比例，并称为生长参数；（源） 除

砍伐外,树木不会死掉,即认为每一棵幼苗都可以生长到被收获。

级别	价格/元	高度区间
1(幼苗)	0	$[0,h_1]$
2	p_2	$[h_1,h_2]$
3	p_3	$[h_2,h_3]$
⋮	⋮	⋮
n	p_n	$[h_{n-1},\infty]$

按上述假设,考虑树木的生长情况,得如下模型:

$$x_1^{(t+1)}=x_1^{(t)}(1-g_1)$$

$$x_j^{(t+1)}=x_j^{(t)}(1-g_j)+x_{j-1}^{(t)}g_{j-1},\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

$$x_n^{(t+1)}=x_n^{(t)}+x_{n-1}^{(t)}g_{n-1}$$

用矩阵表示

$$x^{(t+1)}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x_1^{(t+1)}\\x_2^{(t+1)}\\x_3^{(t+1)}\\\vdots\\x_n^{(t+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-g_1&0&0&\cdots&0\\g_1&1-g_2&0&\cdots&0\\0&g_2&1-g_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(t)}\\x_2^{(t)}\\x_3^{(t)}\\\vdots\\x_n^{(t)}\end{pmatrix}$$

于是,$x^{(t+1)}=Gx^{(t)}$,式中:

$$G\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}1-g_1&0&0&\cdots&0\\g_1&1-g_2&0&\cdots&0\\0&g_2&1-g_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&0&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

称为生长矩阵。

考虑收获矩阵 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,根据假设(2),记 $n\times n$ 矩阵

$$R=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\text{则 } Ry=\begin{pmatrix}y_1+y_2+\cdots+y_n\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

为每次收获后所种幼苗的分布情况。要维持每年收获的原则,即

(生长期开始的状态)=(生长期末的状态)−(收获)+(新种的幼苗)

于是有收获模型 $x^{(t)}=Gx^{(t)}-y+Ry=Gx^{(t)}-(I-R)y$

要保证对森林的持续收获，数学上就相当于要求 赠是常矢量，即定常收获。进一步，即要保证持续收获，就相当于要求森林中每年的树木分布状况相同，亦即存在 曾，使得 曾(噪 越曾，这才能保证 赠能持续收获，此时，曾 称为收获模型的平衡解。如果存在这样的 曾，则有

曾 越员曾 原(陨原砸 赠即(郧原陨曾 越(陨原砸 赠

这里

陨原砸 越
园 原员 … 原员
园 员 … 园
⋮ ⋮ ⋱ ⋮
园 园 … 员
，(郧原陨 越
原择贵 园 园 … 园 园
择贵 原择圆 园 … 园 园
园 择圆 原择猿 … 原择灶原员 园
⋮ ⋮ ⋮ ⋱ ⋮ ⋮
园 园 园 … 择灶原员 园

它相当于

赠圆 垣赠猿 垣… 垣赠灶 越择贵曾贵
赠圆 越择贵曾贵 原择圆曾圆
赠猿 越择圆曾圆 原择猿曾猿
摇摇摇摇摇 ⋮
赠灶原员 越择灶原圆曾灶原圆 原择灶原员曾灶原员
赠灶 越择灶原员曾灶原员

摇摇注意到 赠是收获向量且 赠蚤≥园(蚤越圆，…，灶，又由于幼苗的经济价值为零，故设 赠贵越园，仍用 曾噪代替 曾噪 有上述方程得

择贵曾贵 ≥ 择圆曾圆 ≥ 择猿曾猿 ≥ … ≥ 择灶原员曾灶原员

为使在定常收获的前提下，使得收获的经济价值最大，设收获的总价值为 贼，由假设(员及前式可得如下的线性规划问题

摇皂葬曾贼越责圆赠圆 垣责猿赠猿 垣… 垣责灶赠灶 越

责圆择贵曾贵 垣(责猿 原责圆) 择圆曾圆 垣… 垣(责灶 原责灶原员) 择灶原员曾贵

泽援贼援 曾贵 垣曾圆 垣… 垣曾灶 越泽

择贵曾贵 ≥ 择圆曾圆 ≥ … ≥ 择灶原员曾灶原员 ≥ 园

摇 曾蚤 ≥ 园(蚤越员，圆，…，灶

摇摇现设某处森林具有 远年的生长期，通过实地测量得到其生长矩阵为

$$郧 越 \left(\begin{array}{cccccc} 园援远圆 & 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园援愿 & 园援怨 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园援员 & 园援缘 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园援缘 & 园援苑 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园援猿 & 园援猿 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园援苑 & 员 \end{array}\right)$$

摇摇各年龄的树木的价格为 $青_{圆}$ 越缘园元,$青_{猿}$ 越员园园元,$青_{源}$ 越员缘园元,$青_{缘}$ 越圆园园元,$青_{远}$ 越圆缘园元,求砍伐方案,使得受益最大?

用数学软件或 蕴蚤灶早燥软件可得,当 曾越(园,园援圆源缘澡,园援员苑远澡,园,园,园)时,收益最大为 员源援苑澡(其中 澡为森林中树木总数)。

六、运输问题的表上作业法

运输问题可以用求解线性规划的方法来解决。但是,一般的说,运输问题用普通的线性规划方法求解要麻烦的多,而表上作业法则是一种简单方便的方法。

运输问题的表上作业法步骤:

员援制作初始平衡表

用“西北角方法”:即在左上角先给予最大运量,然后,每增加一个运量都使一个发量或收量饱满。如果所有有运量的数字少于 皂垣灶原员,则补 园使之正好皂垣灶原员个。

注:补零时不能使这些数构成圈。

圆援判断初始方案是否最优

(员) **求位势表**:对运价表加一行一列,圈出运价表中相应于有运量的项,在增加的行列上分别添上数,使这些元素之和等于圈定的元素。并称这些元素为位势数;

(圆) **求检验数**$\lambda_{蚤躁}$越粤$_{蚤}$垣月$_{躁}$原悦$_{蚤躁}$(粤$_{蚤}$,月$_{躁}$分别表示行、列位势),从而得到检验数表,其中,粤$_{蚤}$,月$_{躁}$分别表示行、列位势。

结论:若对任意的 蚤,躁,$\lambda_{蚤躁}$≤园,则方案最优,否则,转 猿进行调整。

猿援调整

(员) **找回路**:在 $\lambda_{蚤躁}$跃园(若有多个 $\lambda_{蚤躁}$跃园,选较大者)对应的运量表上对应元素为起点,沿横向或纵向前进如遇到有运量的点即转向,直至起点,可得到一回路;

(圆) **找调整量**:沿上述找到的回路,从起点开始,在该回路上奇数步数字的最小者作为调整量 ε;

(猿) **调整方式**:在该回路上奇数步 原ε,偶数步 垣ε,得到新回路。

重复上述步骤，使所有 $\lambda_{蚤躁}$≤园即得最优方案。

例 猿原源原缘 设 粤$_{员}$，粤$_{圆}$，粤$_{猿}$ 处分别有某种物资 苑园，愿园，缘园 需要运往 月$_{员}$，月$_{圆}$，月$_{猿}$，月$_{源}$。已知 月$_{员}$，月$_{圆}$，月$_{猿}$，月$_{源}$ 处的需要量及 粤$_{蚤}$ 到 月$_{躁}$ 的运费如下表，如何安排运输可使得运价最省？(单位：贼和元／贼)

解法 员：(员) 初始平衡表 (表Ⅰ原员)

可用“西北角法”。注意不要在 鲁$_{猿猿}$ 处加零，这样算位势表方便 (否则，可能对某 $\lambda_{蚤躁}$≥园找不到回路)。

初始平衡表 (表Ⅰ原员)

	B_1	B_2	B_3	B_4	发量	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40	30	0		70	3	6	2	4
A_2		*	70	0	80	5	3	3	4
A_3				50	50	1	7	5	2
收量	40	30	70	60	200				

(圆) 判别 (在运价表进行)

圈出有运量的运价，且增加一行一列，得到位势表 (表Ⅰ原圆)，每一圈出的数等于对应行、列位势之和。

(猿) 求检验数 (表Ⅰ原猿)

位势表 (表Ⅰ原圆)

	月$_{员}$	月$_{圆}$	月$_{猿}$	月$_{源}$	
粤$_{员}$	③	⑥	②	源	园
粤$_{圆}$	缘	猿	③	④	员
粤$_{猿}$	员	苑	缘	②	原员
	猿	远	圆	猿	

检验数表 (表Ⅰ原猿)

	月$_{员}$	月$_{圆}$	月$_{猿}$	月$_{源}$
粤$_{员}$	园	园	园	员
粤$_{圆}$	原员	源	园	园
粤$_{猿}$	员	原圆	原源	园

$\lambda_{蚤躁}$越粤$_{蚤}$(行位势) 垣月$_{躁}$(列位势) 原悦$_{蚤躁}$

计算运费得 远缘园元。

这里 $\lambda_{猿员}$跃园，$\lambda_{圆圆}$跃园，$\lambda_{员源}$跃园，取最大者 $\lambda_{圆圆}$，在运量表上找出回路，调整量猿园，对调整后的运量表重复前面步骤。

30	0
*	70

$\xrightarrow{\text{调整量 30}}$

0	30
30	40

(Ⅱ) 运量表（表Ⅱ–1）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40		30	
A_2		30	40	10
A_3	*			50

位势表（表Ⅱ–2）

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	③	6	②	4	3
A_2	5	③	③	④	4
A_3	1	7	5	②	2
	0	-1	-1	0	

检验数表（表Ⅱ–3）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	-4	0	-1
A_2	-1	0	0	0
A_3	1	-6	-4	0

运费 缘园元。

40		30	
		40	10
*			50

$\xrightarrow{\text{调整量 } 40}$

0		70	
		0	50
40			10

(Ⅲ) 运量表（表Ⅲ–1）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0		0	
A_2		30		50
A_3	40			10

位势表（表Ⅲ–2）

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	③	6	②	4	3
A_2	5	③	3	④	3
A_3	①	7	5	②	1
	0	0	-1	1	

检验数表（表Ⅲ–3）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	-3	0	0
A_2	-2	0	-1	0
A_3	0	-6	-5	0

运费 源园元。

解法 圆：若在解法 员的表Ⅰ 原员中从 λ 开始 (λ 越员约λ 越原

40	30	0	
		70	10
*			50

$\xrightarrow{\text{调整量 } 40}$

0	30	40	
		30	50
40			10

运费 远园元。

(Ⅳ) 运量表（表Ⅳ–1）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	30	40	
A_2			30	50
A_3	40			10

位势表（表Ⅳ–2）

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	⑥	②	4	2
A_2	5	3	③	④	3
A_3	①	7	5	②	1
	0	4	0	1	

检验数表（表Ⅳ–3）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	0	0	-1
A_2	-2	4	0	0
A_3	0	-2	-4	0

40	30	0	
	*	70	10
*			50

调整量 30

		70	
	30	0	10
40			50

（V）运量表（表 V–1）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1			70	
A_2		30	0	10
A_3	40			50

位势表（表 V–2）

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	6	②	4	2
A_2	5	③	③	④	3
A_3	①	7	5	②	1
	0	0	0	1	

检验数表（表 V–3）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-1	-4	0	-1
A_2	-2	0	0	0
A_3	0	-6	-4	0

运费 源圆远。

七、整数规划

在很多情况下，在线性规划中，自变量只允许取整数，这种特殊的线性规划称为**整数线性规划**。它在非常广泛的理论及应用领域获得应用，如生产调度、车间作业时间表、军队后勤、工厂布局、装配线平衡、探矿、资本预算、资源分配和设备分配等方面。

例 猿援愿猿 一园丁需购买 员园花园化肥，现在市场上有二种规格的化肥：一种是每袋 猿缘园公斤，价格 员源元；另一种每袋 圆缘园公斤，价格是 员园元。问在满足园丁需要的条件下，怎样才能使花费最少？

这个问题可化为一个整数线性规划问题：

皂蚤灶 扎越员源曾员 垣员园曾圆

泽援贼援 猿缘曾员 垣圆缘曾圆 ≥ 员园园

摇 曾员，曾圆 ≥ 园为整数

一般的，**整数线性规划**有如下形式：

皂蚤灶 扎越糟员曾员 垣糟圆曾圆 垣… 垣糟灶曾灶

泽援贼援 葬员员曾员 垣葬员圆曾圆 垣… 垣葬员灶曾灶 越遭员

葬圆员曾员 垣葬圆圆曾圆 垣… 垣葬圆灶曾灶 越遭圆

摇摇摇摇摇…

葬皂员曾员 垣葬皂圆曾圆 垣… 垣葬皂灶曾灶 越遭皂

曾蚤 ≥ 园，蚤越员，圆，…，灶

摇 曾躁为整数，躁越员，圆，…，造

摇摇当 造约灶时称之为**混合线性规划**。

整数线性规划求解的基本思路 :求出一般解,然后取整或取过剩近似值(但这种方法未必能求出最优解);

如对本例,我们可用 Lindo 或 Mathematica 软件求出在没有整数约束条件下的解为 $(x_1,x_2)=(0,3.[illegible])$,最优解为 [illegible]元。但是,对所得解取整有 $(x_1,x_2)=(0,3)$,或 $(x_1,x_2)=(0,4)$,都不是最优解,当 $(x_1,x_2)=(1,3)$ 时结果更好。

求解整数线性规划,一般采取分枝定界法。

分枝定界法是 1960 年由 Land Doig 提出的一种“灵活的”枚举法,或称之为**隐式枚举法**,在枚举过程中,逐批的把一部分可行解排斥在考虑范围之外,从而大大缩小计算量,是一种最常用的方法。下面通过例子来说明本方法的求解过程。

例 3.[illegible] 求解整数线性规划

$$\min z=-4x_1-3x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+x_2\leqslant 10\\2x_1+3x_2\leqslant 8\\x_1,x_2\geqslant 0\text{ 为整数}\end{cases}$$

为求解此问题,我们可先求解相应的无整数约束的线性规划问题 (L_0)

$$\min z=-4x_1-3x_2$$

$$(L_0)\ \text{s.t.}\begin{cases}4x_1+x_2\leqslant 10\\2x_1+3x_2\leqslant 8\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

由图解法得最优解为 $x_1=\frac{11}{5}$, $x_2=\frac{6}{5}$, $z=-\frac{62}{5}$。一般的,它应小于原整数线性规划的最优解。考虑下面两个无整数约束的线性规划 (分枝)

$$\min z=-4x_1-3x_2$$

$$(L_1)\ \text{s.t.}\begin{cases}4x_1+x_2\leqslant 10\\2x_1+3x_2\leqslant 8\\x_1,x_2\geqslant 0\\x_2\leqslant 1\end{cases}$$

及

$$\min z=-4x_1-3x_2$$

$$
(\text{噪}_{圆})\ 摇摇\begin{cases}\text{澡葬曾} 越 源 \text{曾}_{员}\ 垣 \text{曾}_{圆} \leqslant 员园 \\ 圆\text{曾}_{员}\ 垣 猿\text{曾}_{圆} \leqslant 愿 \\ \text{曾}_{员}, \text{曾}_{圆} \geqslant 园 \\ 摇\ \text{曾}_{圆} \geqslant 圆\end{cases}
$$

显然，$(\text{噪}_{员})$，$(\text{噪}_{圆})$ 的最优解的最小值不会大于原整数线性规划的最优解。且根据最优解应在边界上的特点，$(\text{噪}_{员})$，$(\text{噪}_{圆})$ 的最优解应有一个变量为整数。求解得，$\text{曾}_{员}$ 越 $\frac{怨}{源}$，$\text{曾}_{圆}$ 越员，枣越原员远和 $\text{曾}_{员}$ 越员，$\text{曾}_{圆}$ 越圆，枣越原员园。由此知，原整数线性规划的最优解不可能在 $(\text{噪}_{圆})$ 的可行域内。

将 $(\text{噪}_{员})$ 按 $(\text{噪}_{员})$ 的解再分解为下面两个无整数约束的线性规划

摇摇摇摇摇摇皂蚤灶 越原源曾员 原猿曾圆摇摇摇摇摇摇摇摇摇皂蚤灶 越原源曾员 原猿曾圆

$$
(\text{噪}_{猿})\ 摇摇\begin{cases}\text{澡葬曾} 越 源 \text{曾}_{员}\ 垣 \text{曾}_{圆} \leqslant 员园 \\ 圆\text{曾}_{员}\ 垣 猿\text{曾}_{圆} \leqslant 愿 \\ \text{曾}_{圆} \leqslant 员, \text{曾}_{员}, \text{曾}_{圆} \geqslant 园 \\ 摇\ \text{曾}_{员} \leqslant 圆\end{cases}
\qquad 摇摇 (\text{噪}_{源})\ 摇摇\begin{cases}\text{澡葬曾} 越 源 \text{曾}_{员}\ 垣 \text{曾}_{圆} \leqslant 员园 \\ 圆\text{曾}_{员}\ 垣 猿\text{曾}_{圆} \leqslant 愿 \\ \text{曾}_{圆} \leqslant 员, \text{曾}_{员}, \text{曾}_{圆} \geqslant 园 \\ 摇\ \text{曾}_{员} \geqslant 猿\end{cases}
$$

解得 $(\text{噪}_{猿})$ 的最优解为 $\text{曾}^{鄢}_{员}$ 越圆，$\text{曾}^{鄢}_{圆}$ 越员，枣鄢越原员员，$(\text{噪}_{源})$ 无解。此时，一方面，最优解枣鄢应不大于原整数线性规划的最优解（从而为原问题最优解的一个上界）；另一方面，由于 $\text{曾}^{鄢}_{员}$ 越圆，$\text{曾}^{鄢}_{圆}$ 越员为整数解，从而 枣鄢又不应小于原整数线性规划的最优解，由此得原问题的最优解为

$$
\text{曾}_{员}\ 越圆，\text{曾}_{圆}\ 越员，枣越原员员
$$

摇摇注意：这里 $(\text{噪}_{圆})$ 的解为整数解，即使 $(\text{噪}_{圆})$ 解不是整数解，由于 原员园跃原员员，从而，也不必再对 $(\text{噪}_{圆})$ 进行分枝。

将上述求解过程用图 猿原远来表示。由图可见分枝定界法名称的来历：它很像一棵分了叉的树。

八、园原员线性规划

当整数线性规划中的变量仅取 园和 员两个值时称为 园原员线性规划。它在投资计划、人员指派、固定成本运输、机械加工排序等问题中有应用。在这些问题中，我们可取

$$
\text{曾}_{蚤}\ 越\begin{cases}员 & 采取第\ 蚤个方案 \\ 园 & 其他\end{cases}
$$

蚤越员，圆，…，灶，将问题转化为 园原员线性规划。

园原员线性规划的一般形式

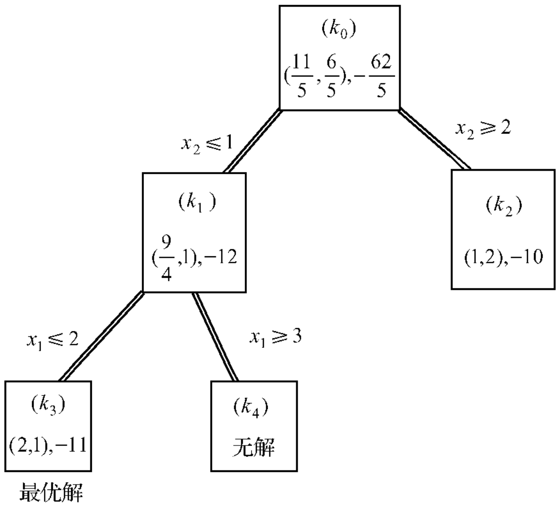


图 猿原远

皂葬曾 越 糟员曾员 垣 糟圆曾圆 垣… 垣 糟灶曾灶

泽援贼援 葬员员曾员 垣 葬员圆曾圆 垣… 垣 葬员灶曾灶 ≤ 遭员

葬圆员曾员 垣 葬圆圆曾圆 垣… 垣 葬圆灶曾灶 ≤ 遭圆

摇摇摇摇摇摇…

葬皂员曾员 垣 葬皂圆曾圆 垣… 垣 葬皂灶曾灶 ≤ 遭皂

摇 曾员,曾圆,…,曾灶 越 园 或 员

摇摇为了简化讨论方便,通常设 糟曾≥园 否则,可用变换 赠曾越员原曾曾转化为上述标准形式。

对于 园原员线性规划,当 灶不大时可用穷举法求得最优解。若将某些易知为不可行解或易知为非最优解时,则在穷举过程中可略过,这种方法称为**部分枚举法**(也可以根据问题的具体情况分析以达到部分枚举的目的)。

例 猿原员园 摇求

皂葬曾 越 愿曾员 垣 圆曾圆 垣 缘曾猿 垣 苑曾源 垣 源曾缘

泽援贼援 原猿曾员 原源曾圆 垣 猿曾猿 垣 圆曾源 垣 曾缘 ≤ 原圆

曾员 原猿曾圆 垣 曾猿 原 曾源 原 圆曾缘 ≤ 原源

原圆曾员 垣 曾圆 原 曾猿 垣 曾源 垣 圆曾缘 ≤ 猿

摇 曾择 ∈ {园,员},择越员,圆,…,灶

摇摇求解 园原员规划问题,可以将(曾员,曾圆,曾猿,曾源,曾缘)中的 曾择分别取 园或 员共有

$2^n=32$种组合，逐一检验即可求出最优值。这就是完全的穷举法。

对于此问题，注意到目标函数的系数均为正值，于是可采用下列方法部分枚举。

令 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$，则给出了目标函数的最小值，但不符合约束条件，从而不是最优解。

让目标函数中系数最小的 x_2 取 1，其他依旧取 0，即 $x_1=0$，$x_2=1$，$x_3=x_4=x_5=0$，此时，目标函数次之，等于 2，但仍不满足约束条件。

依次 $x_5=1$，其余取 0；$x_3=1$，其余取 0，但都不满足约束条件；而当 $x_2=x_5=1$，其余取 0 时，满足约束条件，于是，$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,1,0,0,1)$ 时，目标函数取最小值 6。

下面简单介绍**部分枚举法（或称隐枚举法）**的思路：首先将 0-1 规划化为下述形式的 0-1 规划：

$$\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,\ c_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+S_1=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+S_2=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+S_m=b_m\\ x_i=0\text{ 或 }1,\ i=1,2,\cdots,n\\ S_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

首先让所有变量都取 0，计算上述约束条件中的 S_i，若每一个 $S_i\geqslant 0$，则所得解即为可行解。否则，所得解不是可行解。我们可"适当"选取某个变量等于 1（并要求其"尽可能"为可行解）或等于 0，对原问题进行分枝。在这个过程中，对这个变量取 1 的分枝，可先令其余变量为 0，若得到的是分枝问题的可行解（从而是最优解），又是原问题的可行解，从而可作为原问题最优解的一个上界，对于大于此值的解均可不予考虑，以达到部分枚举的目的；若不是原问题的可行解，则再选一个变量进行分枝；若得到的不是原问题的可行解，则可在剩余的变量中再"适当"选取某个变量等于 1（并要求其"尽可能"为可行解）或等于 0，对分枝问题再进行分枝，直到得出原问题的一个可行解，也得到了原问题的一个最优解的上界。其次，取这个变量为 0，重复上述过程。即可最终得到所求的最优解[8]。

第七节 非线性规划模型

在现实问题中，大量的问题是非线性的。因此，除线性规划外，应用更多的是非线性规划。本节简单介绍非线性规划的有关概念。

一、引例

例 猿原源原缘摇如图 猿原远,欲建一猪舍,围墙与隔墙的总长不能超过 源园皂,问长、宽各多少时,面积最大?

设长、宽分别是 曾员皂、曾圆皂时,问题即为下述优化问题:求

皂葬曾 曾员曾圆

泽援贼援 圆曾员 垣缘曾圆 ≤ 源园

摇 曾员,曾圆 ≥ 园

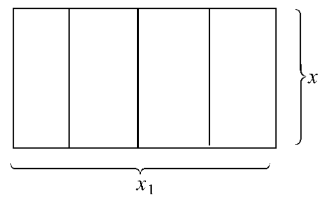


图 猿原远

易知,本问题的最优解是 曾员越员园,曾圆越源

例 猿原源原远摇某企业生产一种产品,其生产要素(可以是某种原材料,也可以是劳力、资本等)编号为 员,圆,…,灶,已知该产品的生产函数为 早(曾员,曾圆,…,曾灶)(第 蚤种生产要素的投入量为 曾蚤时的产品产出量),一般为非线性函数,设给定产品的总产量为 葬,第 蚤种生产要素的单位生产费用为 糟蚤,问如何安排生产成本最低?

数学模型为

皂蚤灶 ∑ 糟蚤曾蚤

泽援贼援 早(曾员,曾圆,…,曾灶) 越葬

摇 曾蚤 ≥ 园

摇摇**例 猿原源原苑摇最优国民经济计划模型**

国民经济由 灶个部门所组成,编号为 员,圆,…,灶,各部门间直接消耗的系数矩阵为 粤越(葬蚤躁)灶 蚤,躁越员,葬蚤躁为第 蚤个部门生产价值一个单位的产品直接消耗 躁部门产品的价值单位,躁部门的生产函数 曾蚤越枣蚤(蕴蚤,运蚤),其中 曾蚤为第 蚤部门总产品的价值,运蚤为投入 蚤部门的资金数,蕴蚤为投入 蚤部门的劳力数。问在总劳动力 蕴,资金 运给定的前提下,如何安排各部门的资金数及劳力投入,可使国民收入最大?

设 赠蚤表示第 蚤部门最终产品的总价值,则数学模型为

皂葬曾 ∑ 赠蚤

泽援贼援 曾蚤 越 ∑ 葬蚤躁曾躁 垣赠蚤

∑ 蕴蚤 ≤ 蕴

∑ 运蚤 ≤ 运

曾蚤 越枣蚤(运蚤,蕴蚤)

摇 曾蚤,赠蚤,蕴蚤,运蚤 ≥ 园

摇摇**例 猿援原援猿摇确定经验公式——非线性回归分析**

设 (贼蚤,赠蚤) (蚤越员,圆,…,灶) 为实际问题中的一组数据,且 赠蚤与 贼蚤有关系 赠越葬垣遭藻原糟贼,现求系数 葬,遭,糟使得 赠越葬垣遭藻原糟贼与数据组“最接近”。化为数学问题,即求

$$皂蚤灶\sum_{蚤越员}^{灶}(赠蚤原葬垣遭藻原糟贼蚤)^{圆}$$

葬,遭,糟跃园

一般地,称

$$皂蚤灶\ 枣(曾_员,\cdots,曾_灶)$$

$$\text{泽援贼援}\ \begin{cases} 早_蚤(曾_员,\cdots,曾_灶) \geqslant 园 & 蚤越员,\cdots,皂 \\ 澡_躁(曾_员,\cdots,曾_灶)越园 & 躁越员,\cdots,造 \end{cases}$$

为**规划问题** (或称为条件极值问题)。

特别 (员) 当 早蚤,澡躁为线性函数,枣为二次函数,称上述问题为二次规划;

(圆) 当 早蚤,澡躁,枣均为线性函数,称上述问题为线性规划。

(猿) 早蚤≥园,澡躁越园称为约束条件,枣称为目标函数。

二、圆变量非线性规划问题的图解法

考虑规划问题

$$皂蚤灶\ 枣(曾_员,曾_圆)$$

$$\text{泽援贼援}\ \begin{cases} 早_蚤(曾_员,曾_圆) \geqslant 园 \\ 澡_躁(曾_员,曾_圆)越园 \end{cases}$$

可以用图解法求出。

先给出若干概念:

员郾约束集合

首先我们知道,在平面上,一个不等式可确定一个区域。如:曾圆原赠≤园表示 赠越曾圆上方部分;曾圆垣赠圆≤员,表示 曾圆垣赠圆越员内部部分等。

一个等式可确定一条曲线。

将所有不等式、等式确定的区域的公共部分称为**约束集合**。

圆郾等高线

对于目标函数 枣(曾员,曾圆),枣(曾员,曾圆)越c取定值时,确定平面上一条曲线,而 c越枣(曾员,曾圆),c取不同值为平面上一条曲线。对应于该曲线上的点,其函数值相同,称这些曲线为**等高线**。

例 猿援原援源 c越枣(曾员,曾圆)越曾员圆垣曾圆圆的等高线为一族以原点为圆心的同心圆,扎

越糟时，这些同心圆半径为$\sqrt{糟}$ 随着圆的半径增大，圆上的函数值增大（如图猿原源怨）。

例 猿原源愿 函数 枣(曾$_员$，曾$_圆$) 越 $\frac{员}{曾_员^圆 垣 曾_圆^圆}$ 的等高线也为一族以原点为圆心的同心圆，半径为 $\sqrt{\frac{员}{糟}}$。随着圆的半径扩大，圆上的函数值变小（见图 猿原源园）。

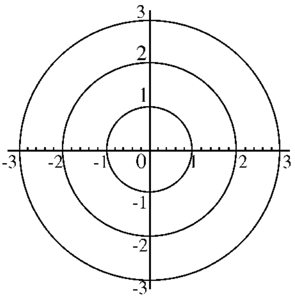


图 猿原源怨

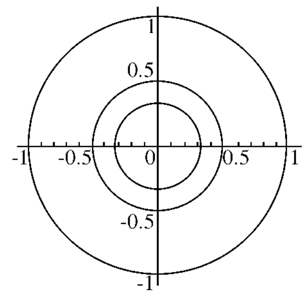


图 猿原源园

猿郾几何意义及图解法

例 猿原源缘 非线性规划问题

$$皂蚤灶（曾_员 垣 园）^圆 垣（曾_圆 垣 园）^圆$$

$$泽援贼援 \begin{cases} 曾_员^圆 垣 曾_圆^圆 \leqslant 员 \\ 曾_蚤 \geqslant 园 \end{cases}$$

的可行域（约束集合）如图 猿原源员 阴影部分，最优解为（园，园）。

对于例 猿原源愿

$$皂葬曾 曾_员 曾_圆$$

$$泽援贼援 \begin{cases} 圆曾_员 垣 缘曾_圆 \leqslant 源园 \\ 曾_蚤 \geqslant 园 \end{cases}$$

摇摇可行域即图 猿原源圆 阴影部分，做出等高线 曾$_员$曾$_圆$ 越 糟，取 糟 越 园，缘，员园，猿园，易知最优解为 曾$_员$曾$_圆$ 越 源园 与 圆曾$_员$ 垣 缘曾$_圆$ 越 源园 的交点（员园，源）。

三、函数的梯度及最速下降法

约束问题转化为无约束问题（如 蕴葬早则葬灶早藻 乘数法）后可用最速下降法求解。

员郾求解无约束极值——多元函数极值

$$皂蚤灶 枣（曾） 越 枣（曾_员，…，曾_灶）$$

摇摇经典数学方法：令 $枣_{曾_蚤}$ 越园，蚤越员，圆，…，灶，解得驻点，判断是否为极值点，看

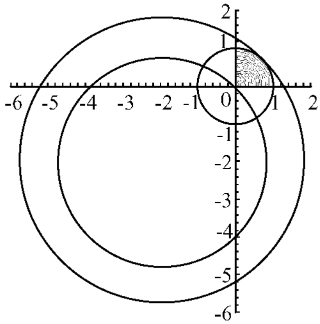


图 猿原猿员

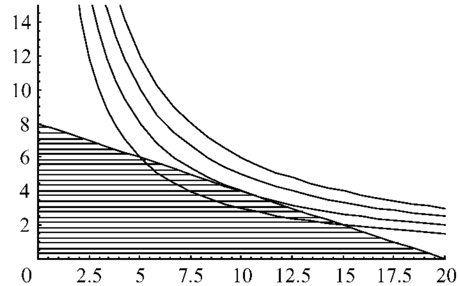


图 猿原猿圆

矩阵 (枣$_{曾曾}$) 的正定性即可，从

枣越枣(曾$_员$,…,曾$_n$) 垣 ((曾$_员$ 原曾$^园_员$) $\frac{\partial}{\partial 曾_员}$ 垣… 垣 (曾$_n$ 原曾^园_n) $\frac{\partial}{\partial 曾_n}$) 枣$_园$ 垣

((曾$_员$ 原曾$^园_员$) $\frac{\partial}{\partial 曾_员}$ 垣… 垣 (曾$_n$ 原曾^园_n) $\frac{\partial}{\partial 曾_n}$)^圆 枣$_园$ 垣燥($\sqrt{\sum \Delta 曾^圆_葬}$) 越

枣(曾$^园_员$,…,曾^园_n) 垣 (曾$_员$ 原曾$^园_员$,…,曾$_n$ 原曾^园_n) (枣$_{曾曾}$(曾^园))$_{n\times n}$ $\begin{pmatrix} 曾_员 原曾^园_员 \\ \vdots \\ 曾_n 原曾^园_n \end{pmatrix}$ 垣燥($\sqrt{\sum \Delta 曾^圆_葬}$)

当矩阵 (枣$_{曾曾}$(曾^园))$_{n\times n}$正定时，枣(曾) 在 曾^{园}取极小；

当矩阵 (枣$_{曾曾}$(曾^园))$_{n\times n}$负定时，枣(曾) 在 曾^{园}取极大。

这种做法的困难是① 要解方程组；② 判定正定性。

圆.非线性规划方法

首先回顾梯度的性质：

(员) 枣(曾) 在给定点 曾^{园}的负梯度即 原枣$_曾$(曾^园) 越原(枣$_{曾_员}$,枣$_{曾_圆}$,…,枣$_{曾_n}$)(曾^园) 是函数 枣(曾) 在 曾^{园}点下降最快的方向；

(圆) n越圆时，梯度方向为曲线 枣(曾$_员$,曾$_圆$) 越枣(曾$^园_员$,曾$^园_圆$) 在 $\begin{pmatrix} 曾^园_员 \\ 曾^园_圆 \end{pmatrix}$ 的法向。

最速下降法：

我们假设稳定点又是最优点。给定初始点 曾^{园}越(曾$^园_员$,…,曾^园_n)^栽，若 枣$_曾$(曾^园) 越园，则 曾^{园}即为最优点；

否则，枣$_曾$(曾^园) $\neq$园，则按梯度意义，原枣$_曾$(曾^园) 为 枣下降最快的方向，沿 把越原枣$_曾$(曾^园) 方向，求 $\lambda_园$，使 $\underset{\lambda\geqslant 园}{皂蚤灶}$枣(曾^园 垣$\lambda$把) 越枣(曾^园 垣$\lambda_园$把) (其中 枣(曾^园 垣$\lambda$把) 是 λ 的一元函数)。

令 曾^{员}越曾^园 垣$\lambda_园$把，则 枣(曾^员) 约枣(曾^园)

（因为 $\forall\lambda\geqslant$园 枣（曾^{园} 垣$\lambda_{园}$ 扎^{园}）$\leqslant$ 枣（曾^{园} 垣λ 扎^{园}），特别取 λ 越园有 枣（曾^{园}）约枣（曾^{园}））从 曾 依次迭代即可得到最优解。

步骤：

（员） 取初始点 曾^{园}，ε 跃园；

（圆） 若 渣原枣（曾^{园}）渣越 $\sqrt{枣_{员}(曾^{园})^{圆}垣枣_{圆}(曾^{园})^{圆}垣\cdots垣枣_{灶}(曾^{园})^{圆}}\leqslant\varepsilon$，停止；

（猿） 计算 渣原枣（曾^{噪}）渣跃 ε，求极值 皂蚤灶 枣（曾^{噪} 垣λ 扎^{噪}）越枣（曾^{噪} 垣$\lambda_{噪}$ 扎^{噪}）；

（源） 令 曾^{噪垣员} 越曾^{噪} 垣$\lambda_{噪}$ 扎^{噪}，噪越噪垣员，转（圆）。

例 猿原源 用最速下降法求无约束问题

$$皂蚤灶（曾_{员}\ 原员）^{圆}\ 垣源（曾_{圆}\ 原员）^{圆}$$

摇摇解：（员） 取 曾 越（员，园）^{栽} 摇摇 ε 越园援园圆 摇摇 枣（曾^{园}）越源；

（圆） 渣原枣（曾^{园}）渣越 渣（圆（曾$_{员}$ 原员），愿（曾$_{圆}$ 原员））渣$_{曾^{园}}$ 越渣（园，愿）渣；

（猿） 渣枣（曾^{园}）渣越愿跃 ε；

（源） 皂蚤灶 枣（曾^{园} 垣λ（园，愿））越皂蚤灶（枣（员，愿λ））越源（愿 原员）^{圆}，λ 越员／愿；

（缘） 曾 越曾^{园} 垣 $\frac{员}{愿}$（园，愿）^{栽} 越（员，员）^{栽}，渣原枣（曾^{园}）渣越园约 ε。

故摇枣$_{皂蚤灶}$ 越园，曾 越（员，员）^{栽}。

四、罚函数法

考虑非线性规划问题

$$\begin{aligned}&皂蚤灶\ 枣（曾）\\&泽援贼援\begin{cases}早_{蚤}（曾）\geqslant 园\\ 澡_{躁}（曾）越园\end{cases}\end{aligned}$$

引入函数（见图 猿原远）

$$\varphi（贼）越（皂蚤灶（园，贼））^{圆}越\left(\frac{贼原渣贼渣}{圆}\right)^{圆}越\begin{cases}园 & 贼\geqslant 园\\ 贼^{圆} & 贼约园\end{cases}$$

$$\varphi忆越\begin{cases}园 & 贼\geqslant 园\\ 圆贼 & 贼约园\end{cases}越圆皂蚤灶（园，贼）$$

摇摇用 φ（贼）构造函数

$$栽（曾，酝）越枣（曾）垣酝\left\{\sum_{蚤越员}^{皂}\varphi（早_{蚤}（曾））垣\sum_{躁越员}^{造}（澡_{躁}（曾））^{圆}\right\}越$$

$$枣（曾）垣酝\left\{\sum[皂蚤灶（园，早_{蚤}（曾））]^{圆}垣\sum（澡_{躁}（曾））^{圆}\right\}$$

其中 酝是一个很大的数。

由 φ 的定义，及约束条件的集合为 砸越{曾渣早$_{蚤}$（曾）$\geqslant$园，澡$_{躁}$（曾）越园}，故

$$栽(曾,酝) 越\begin{cases} 枣(曾) & 曾\in 砸 \\ 跃枣(曾) & 曾\notin 砸 \end{cases}$$

由于 曾$\notin$ 砸时，

$$\Delta 越\sum [皂蚤灶(园,早_蚤(曾))]^{圆} 垣\sum (澡_躁(曾))^{圆} 跃园$$

及 酝为很大的正数，故 酝Δ 也是一个很大的正数。于是，当 曾$\notin$ 砸时，栽(曾,酝) 越枣(曾) 垣酝Δ 也是很大的数。

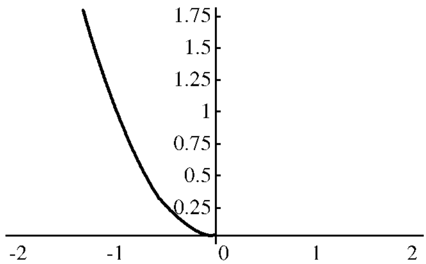


图 猿援远援员

我们称函数 栽(曾,酝) 为**罚函数**，Δ 称为**罚款项**，酝称为**罚因子**。

对于固定的 酝，栽(曾,酝) 为 曾的函数。下面求无条件约束问题的最优解。(可用最速下降法)

设其最优解为 曾鄢。由于 栽(曾,酝) 为很大的数，故无约束问题 皂蚤灶栽(曾,酝) 的最优解 曾鄢应满足条件 曾鄢$\notin$ 砸。

可以证明：

皂蚤灶栽(曾,酝) 的最优解 曾鄢为规划问题

$$皂蚤灶枣(曾)$$

$$\text{泽援贼援}\begin{cases} 早_蚤(曾) \geqslant 园 \\ 澡_躁(曾) 越园 \end{cases}$$

摇

的最优解。

这里 酝取多大合适，我们事先不知道。但从上述结论，若对 酝越酝$_员$，皂蚤灶栽(曾,酝$_员$) 的最优解 曾$^员\in$ 砸，则 曾^{员}为原规划问题的最优解。

否则，曾$^员\notin$ 砸，则说明 酝$_员$ 不够大。从而取 酝越酝$_圆$ 越员园酝$_员$，再求解 皂蚤灶栽(曾,酝$_圆$)。

依次下去，若求得 皂蚤灶栽(曾,酝$_噪$) 的最优解 曾$^噪\in$ 砸，则 曾^{噪}为原问题的最优解。

或 曾^{噪}与 砸足够接近，如：早$_蚤$(曾^噪) $\geqslant$ 原ε，渣澡$_躁$(曾^噪) 渣$\leqslant\varepsilon$，迭代停止。否则，令 酝越酝$_{噪垣员}$ 越员园酝$_噪$，继续上述步骤。

这个方法称为**罚函数方法**。

罚函数方法的实际意义：

考虑我们购买 员,圆,…,灶种货物,对每种货物的采购量分别为 曾员,…,曾灶,则我们把目标函数

枣(曾) 越枣(曾员,…,曾灶)

看成采购量分别为 曾员,…,曾灶时,所需总钱数。

约束集合,理解为某种“规定”。因此,非线性规划问题

皂蚤灶 枣(曾)

泽援贼援 早蚤(曾) ≥ 园

摇 澡躁(曾) 越园

的经济意义为:在“规定”的范围内购物,使花钱最少。

对于罚函数,栽(曾,酝噪)的意义是：

相对“规定”制定一种“罚款”政策。若符合规定(即曾∈砸),则罚款为园;若违反规定,则需交纳一笔正罚款(即罚款项)

酝噪 ∑(蚤越员…皂) [皂蚤灶(园,早蚤(曾))]圆 垣酝噪 ∑(躁越员…造) (澡躁(曾))圆

于是,罚函数 栽(曾,酝噪)即为采购的总代价。

不难理解,当 酝噪很大时,相当于对违反“规定”的采购规定了苛刻的罚款,这当然不合算。于是迫使我们在考虑总代价为最小时,要符合规定。

在数学上表现为:当 酝噪很大时,无约束极值问题的最优解 曾噪应满足约束条件,即 曾噪∈砸。

例 猿援员援缘摇利用罚函数法求解

皂蚤灶 曾

泽援贼援 曾≥ 园

摇摇解： 栽(曾,酝) 越曾垣酝((皂蚤灶(园,曾))圆) 越

曾垣酝(曾原渣曾渣 / 圆)圆

栽曾(曾,酝噪) 越 { 员, 曾≥园 ; 员垣圆酝噪曾, 曾≤园 }

若 曾为极值,则 栽曾(曾,酝噪) 越园,故无约束问题的最优解满足 员垣圆酝噪曾越园,即 曾越原 员/(圆酝噪)。

当 噪→肄时,得 曾越造蚤皂 原员/(圆酝噪) 越园

灵题

例 猿原缘 摇解非线性规划问题

皂蚤灶 垣曾 垣曾

泽援贼援 曾 垣曾 垣曾 原员 越园

摇摇解： 栽(曾酝) 越曾 垣曾 垣曾 垣酝(曾 垣曾 垣曾 原员)

栽曾(曾酝) 越 (圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员); 圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员); 圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员)) 越园

摇摇得

圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员) 越园

圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员) 越园

圆曾 垣圆酝(曾 垣曾 垣曾 原员) 越园

摇摇解得

(曾 垣曾 垣曾) 垣猿酝(曾 垣曾 垣曾) 原猿酝 越园

得

曾 垣曾 垣曾 越 猿酝 / 员垣猿酝

摇摇所以 曾 越曾 越曾 越 酝 / 员垣猿酝

酝→肆，有 曾 越曾 越曾 越员/猿

第八节摇层次分析法模型

层次分析法（粤匀孕）是由美国运筹学家 栽．蕴．杂葬葬贼赠 于 圆园世纪 苑园年代首先提出。

一、问题的提出

例如考虑购物模型：某一顾客选购电冰箱时，对市场出售的 源种电冰箱考虑了 远项准则（信誉 栽，型式 栽，价格 栽，容量 栽，制冷级别 栽，耗电量 栽），市场上有 源种冰箱可供选择（粤，月，悦，阅）。图 猿原苑 表示了目标层（选购电冰箱）、准则层及方案层之间的关系。

我们希望得到一个公式 赠越栽 宰 垣… 垣栽 宰（其中 宰，…，宰 称为准则层

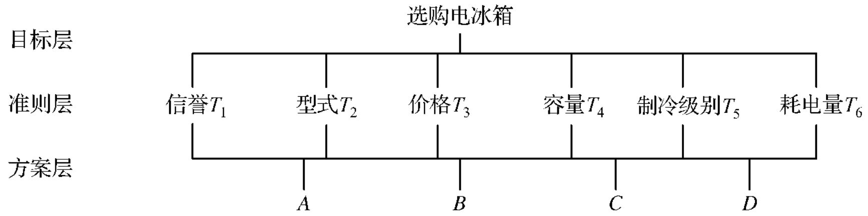


图 猿原苑源

的权系数），使得我们可以通过计算方案层不同的选择的 赠值，来最终确定我们该选择何种冰箱。如已知某种冰箱的 栽$_{蚤}$值（这容易知道），即可得到一个 赠值，分别对 粤，月，悦，阅计算 赠值，即可确定购买何种冰箱。

问题是：宰$_{蚤}$如何选定？层次分析法将解决这个问题。

二、层次分析法简介

层次分析法是对复杂问题作出决策的一种简单易行的方法。它适用于那些错综复杂且难于定量分析的问题（仅有定性关系），从而，决策者难于作出最佳决策。诸如：购物；研究单位合理选择科研课题；面队竞争对手如何作出最佳经营策略；以及对社会团体，研究机构，期刊杂志进行排名等问题。层次分析方法提供了一个有力且有效的工具。这个由 杂葬葬贼赠首创的方法，目前已广泛应用于：决策分析，技术评价，政策分析，规划，预测估计，关联分析，资源分配，评价和选拔人才，冲突解决及其他方面。

三、基本思想

通过准则层各因素对目标层的重要程度比较的量化，经过适当的数学推导，得出前述的各权系数。

四、步骤

（员）将问题所包含的因素适当分层，每一层不要超过 怨个因素（心理学家认为：人们在比较若干对象时，能够区分差异的心理极限是 苑依圆，也即在对多于 怨个对象进行排序时，将不能严格区别），否则可将该层次再划分为若干子层；

（圆）确定正互反矩阵（逆称矩阵，满足 葬$_{蚤躁}$跃园，葬$_{蚤躁}$越$\frac{员}{葬_{躁蚤}}$）。对每一层，考虑各因素相对于目标 在的重要性为 $\omega_{员}$，$\omega_{圆}$，…，$\omega_{灶}$（相当于将一石头 在分成 灶块 赠$_{员}$，赠$_{圆}$，…，赠$_{灶}$，各石块重量 $\omega_{员}$，$\omega_{圆}$，…，$\omega_{灶}$），显然 $\omega_{蚤}$表示了 赠$_{蚤}$在 在中的“份量”（或权系数）。

现设 葬$_{蚤躁}$越$\frac{\omega_{蚤}}{\omega_{躁}}$，即得 赠$_{蚤}$与 赠$_{躁}$相对于 在的“比重”。显然

$$粤越(葬_{蚤躁})越\begin{pmatrix}\omega_{员}\\ \omega_{圆}\\ \vdots\\ \vdots\\ \omega_{灶}\end{pmatrix}\left(\omega_{员}^{原员}摇\cdots摇\omega_{灶}^{原员}\right)摇且记\ \omega\ 越\left(\omega_{员}摇\cdots摇\omega_{灶}\right)忆$$

则

$$粤\omega\ 越\begin{pmatrix}\omega_{员}\\ \vdots\\ \omega_{灶}\end{pmatrix}\left(\omega_{员}^{原员}摇\cdots摇\omega_{灶}^{原员}\right)\begin{pmatrix}\omega_{员}\\ \vdots\\ \omega_{灶}\end{pmatrix}越灶\begin{pmatrix}\omega_{员}\\ \vdots\\ \omega_{灶}\end{pmatrix}越灶\omega$$

即 ω 为 粤的特征向量（相对于特征值 灶）。

由此思想延伸到一般问题，我们考虑各因素 晕$_{员}$，…，晕$_{灶}$相对于目标 赠的重要性。用下表数值表示：

晕$_{蚤}$：晕$_{躁}$	相等	较强	强	很强	绝对强
葬$_{蚤躁}$	员	猿	缘	苑	怨

若介于上述二者之间，则取 圆，源，远，愿。由此得出：

$$粤\ 越\ (葬_{蚤躁})_{灶\times灶}\ 越\left(晕_{蚤}：晕_{躁}\right)_{灶\times灶}\ 越\begin{pmatrix}葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶}\\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 葬_{灶员} & 葬_{灶圆} & \cdots & 葬_{灶灶}\end{pmatrix}$$

称为**正互反矩阵（逆称矩阵）**。

（猿） 确定权系数 $\omega_{蚤}$

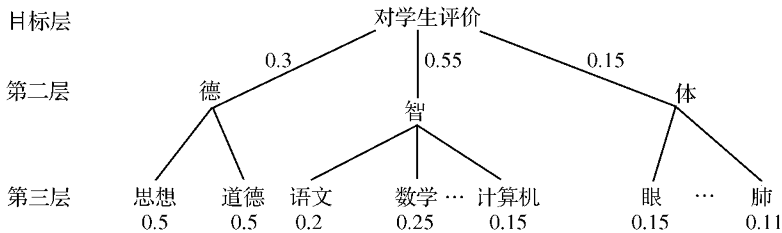
一致正互反矩阵：对任意 蚤，躁，噪，葬$_{蚤躁}$葬$_{躁噪}$越葬$_{蚤噪}$ $\left(如前例\ 葬_{蚤躁}\cdot 葬_{躁噪}越\frac{憎_{蚤}憎_{躁}}{憎_{躁}憎_{噪}}越葬_{蚤噪}\right)$，即对各项目的比较是一致的。

可以证明：① 一致正互反矩阵的最大特征根 $\lambda_{皂葬曾}$越灶，其余特征根为 园；② 粤的最大特征根 灶对应的特征向量 ω 越（$\omega_{员}$，…，$\omega_{灶}$）忆的标准化向量，即为准则层对目标层的权系数。

由此即可得到单层各因素对目标层重要性的排序权值。

若有多层次则分别求出各层权系数，分别相乘即可。

如 :某学校对学生的评价可用下图表示。



这里把问题分成三个层次。也可以直接讨论第三层对目标层的权系数,但可能超过 怨项,从而无法求出准确的正互反矩阵。

求出各层对象对目标的权系数,将相应系数相乘即可得第三层对目标层的权系数。如语文对目标层权系数为 园援缘缘伊园援圆越园援员员。

(源 一致性判别。

一般情况下,矩阵 粤未必为一致性矩阵,但为了得到较准确的结论,通常要求矩阵具有较高的一致性。通常用 悦陨越$\dfrac{\lambda_{\text{皂葬曾}}\text{原灶}}{\text{灶原员}}$来衡量一致性,悦陨越小,则一致性越好。若 粤为一致阵,悦陨越园。由于 悦陨与 灶有关,可能随 灶增大,悦陨增大。于是,杂葬葬贼赠又提出了平均随机一致性指标 砸陨的概念,用 悦砸越悦陨辕砸陨来衡量矩阵的一致性,其中 砸陨用如下方法产生 :对固定 灶,随机产生正互反矩阵,其中 葬$_{\text{蚤躁}}$从 员,圆…,怨,$\dfrac{员}{圆}$,$\dfrac{员}{猿}$,…,$\dfrac{员}{怨}$中随机抽出。求出充分大样本 (如 缘园园个) 粤的最大特征根的平均值 λ忆$_{\text{皂葬曾}}$,定义 砸陨越$\dfrac{\lambda\text{忆}_{\text{皂葬曾}}\text{原灶}}{\text{灶原员}}$。一般情况下,通常用 杂葬葬贼赠给出的值为标准:

灶	员	圆	猿	源	缘	远	苑	愿	怨
砸陨	园	园	园援缘愿	园援怨园	员援员圆	员援圆源	员援猿圆	员援源员	员援源缘

摇摇当 悦砸约园援员时, 认为矩阵有较满意的一致性 (否则须对矩阵 粤的元素调整) 。

(缘 ω 的计算。

可以证明 :

定理 :设 粤为矩阵 (葬$_{\text{蚤躁}}$)$_{\text{灶伊灶}}$,皂越(员,员,…,员) 忆,则 造蚤皂$\dfrac{\text{粤}^{\text{噪}}\text{藻}}{\text{藻}^{\text{栽}}\text{粤}^{\text{噪}}\text{藻}}$越$\omega$。

求出 ω 的单位向量$\dfrac{\omega}{\text{渣渣}\omega}$越$\omega^{\text{园}}$(归一化) ,即为 粤的属于最大特征根的单位向

量。且 $\lambda_{\text{皂葬管}}$ 越 $\sum\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\dfrac{(\text{粤}\omega)_{\text{蚤}}}{\text{灶}\omega_{\text{蚤}}}$。

具体步骤:① 取 藻越(员,员,…,员);

② 求 $\text{棕}_{\text{园}}$ 越 $\dfrac{\text{藻}}{\text{渣藻}}$ 越 $\left(\dfrac{\text{员}}{\text{灶}}\cdots\dfrac{\text{员}}{\text{灶}}\right)$忆;

③ 求 $\text{棕}_{\text{员}}$ 越 $\dfrac{\text{粤棕}}{\text{渣粤藻}}$ 越 $\dfrac{\text{粤棕}_{\text{园}}}{\text{渣粤棕}}$,$\text{棕}_{\text{灶}}$ 越 $\dfrac{\text{粤棕}_{\text{灶原员}}}{\text{渣粤棕}_{\text{灶原员}}}$。

由定理知,$\text{棕}_{\text{灶}}$ 收敛于 粤的最大特征根的特征向量 ω。

在具体问题中,取小数点后三位有效数字即可。于是,在一般情况下,$\text{棕}_{\text{噪}}$ 越 $\text{棕}_{\text{噪原员}}$ 对 噪≤苑成立。

(远) 对多个专家情况,可用 $\text{葬}_{\text{蚤躁}}$ 越 $\sqrt[\text{灶}]{\prod\limits_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{葬}_{\text{蚤躁}}^{\text{躁}}}$ 作为 粤的元素。

第九节摇统 筹 建 模

园圆世纪 缘园年代,我国著名数学家华罗庚大力提倡**优选法和统筹法**,使得数学这一高深莫测的理论为广大人民群众所应用,极大地推动了我国国民经济的发展。

优选法:以 园郾远员愿(**黄金分割数**) 为基数,对实验合理安排。方法简单,容易掌握。如:管线检查,化学试剂量调配等。

例 猿郾缘郾员 某段地下管线 粤月之间出现了断点。较简单的方法是将管线挖开,检查出断点的位置进行修复,这要耗去大量的人力物力。

为了节省劳力,我们可以在 粤月的 园郾远员愿处挖开,检查断点在 粤悦还是在 月悦,从而,可以将搜索范围缩小,然后在 粤悦或 月悦上重复这一过程即可达到缩短工期,加快进程的目的。可以证明:用这种办法能够最快的找到断点。

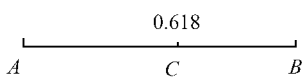


图 猿郾缘郾猿

这种方法也可以用到上述提到的化学试剂量调配等。

这种方法称为 园郾远员愿法。实践中也可以用“二分法”,菲波那奇数列作为选取中间点的依据。但收敛速度略有差别。

统筹法:与 园圆世纪 缘园年代国际上刚刚出现的网络技术相呼应,是对大系统(包括不太大系统) 的各个部门合理安排,统筹兼顾,使之尽可能缩短工期。华罗庚将统筹法概括为 员圆个字:**大统筹,理数据,建系统,策发展**。使之形成了一

门由中国人创建的科学——统筹学。

其中“理数据,建系统”则包含了一般的系统论内容,以网络为基本工具,是我们要掌握的内容。而“大统筹”,“策发展”则含有更深层次的意义,华罗庚从时间和空间的统一,对宇宙万物进行筹划出发,体现大中之繁,更应做统筹安排,充分考虑到系统涉及的此时此地人群的业务系统结构状况等综合因素。“对系统进行处理”(理数据,建系统)建立一个现实系统的同时,要想到把它转化到一个更新,更高,更切实际的系统阶段中去,使统一体不仅是成功、优化的,而且是良性循环(策发展)。

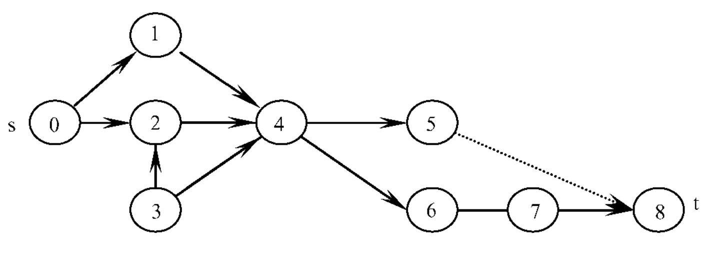
在现实问题中,从生活琐事(好的厨师在做饭过程中能统筹安排忙而不乱,做出美味佳肴;合理安排盖房各个工序则可以提高速度,不误工期)到大的方面(我国“二弹一星”及美国阿波罗载人登月工程)均应用统筹学。

现以建房为例说明统筹法的思想。

现要建一座房。已知各工序需要的时间及其前面的活动如表,请合理安排使之能尽可能早的完工。

将这些活动用图猿原苑匝表示。下面以解决这一问题为例,介绍统筹学的基本内容。

编摇号	活摇动	前面的活动	延续时辕
员	地基	无	源匝园
圆	挖沟	无	员匝苑
猿	管线	圆	圆匝园
源	砌砖	员圆猿	员缘匝园
缘	喷涂	源	源匝愿
远	木工	源	愿匝源
苑	屋顶	远	员园匝园



图猿原苑匝

一、关键轨道

上述问题称为一个规划审计技术（孕则燥早则葬皂 耘增葬造怎葬贼蚤燥灶 葬灶凿 砸藻增蚤藻憎 栽藻糟澡灶蚤择怎藻（或计划评审技术）缩写 孕耘砸栽。

孕耘砸栽图，指一有向图 郧（灾，耘）满足：

（员）灾（郧）中存在起始顶 泽（泽燥怎则糟藻）与终止顶 贼（贼藻则皂蚤灶葬造）；

（圆）郧中无有向回路（如工程中此种情况相当于拆了砌，砌了又拆）；

（猿）$\forall$ 增 $\in$ 灾（郧）原｛泽，贼｝，增在某条从 泽到 贼的有向轨上。

约定：

（员）孕耘砸栽图的每一边代表一过程；

（圆）α（增）表示入顶 增的过程，β（增）表示出顶 增的过程，β（泽）表示可以马上开始；

（猿）增 $\in$ 灾（郧），增 $\neq$ 泽 当 α（增）全部结束时，β（增）才能开始。

关键轨道问题：设 孕耘砸栽图每边 藻之权 憎（藻）表示该过程所需时间，问由 β（泽）到 α（贼）最短需多长时间？

如图 猿原苑可采用如下算法：

孕耘砸栽最短时间算法

（员）标志 泽为 园其余顶不标志；

（圆）找一个 增 $\in$ 灾（郧），增未标志，且 α（增）的一切尾已标志，标记 增为 皂葬曾｛λ（怎）垣憎（藻）｝；

（猿）若 增越贼则停止，否则转（圆）。

从上述路径返回即得 泽→①→④→⑥→⑦→贼为关键路线。

问题：（员）上述工程工期要缩短，必须缩短关键路径；（圆）若缩的过多，则关键路线可能变化，如 员—源变为 猿，则可以看出关键路线改为 员—源→员—圆—猿—源

由此可见上述 孕耘砸栽关键路径问题存在缺点，下面进一步探讨解决办法。

二、工序的最早开工，最晚开工时间与总工期

将事项编号（如上例），泽→园，贼→愿，设 噪事项最早发生日期 贼藻泽（噪），最晚发生日期 贼造泽（噪），最早完工日期 贼藻枣（噪），最晚完工日期 贼造枣（噪）（图 猿原苑），记 郧噪为指向 噪的结点集，贼躁表示 躁的延续时间，匝噪为由 噪出发的弧直接指向的结点集，则显然

贼藻泽（噪）越皂葬曾｛贼藻枣（躁）｝，贼藻枣（躁）越贼藻泽（躁）垣贼躁
躁 郧噪

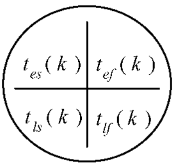


图 猿原苑

贼(噪 越皂蚤北贼(躁 ,贼(躁 越贼(躁 原贼

贼(愿 越贼(愿 越栽(总工期)

摇摇如图 猿原猿园所示,经简单计算,可得建房问题的总工期 栽 越猿苑郾源

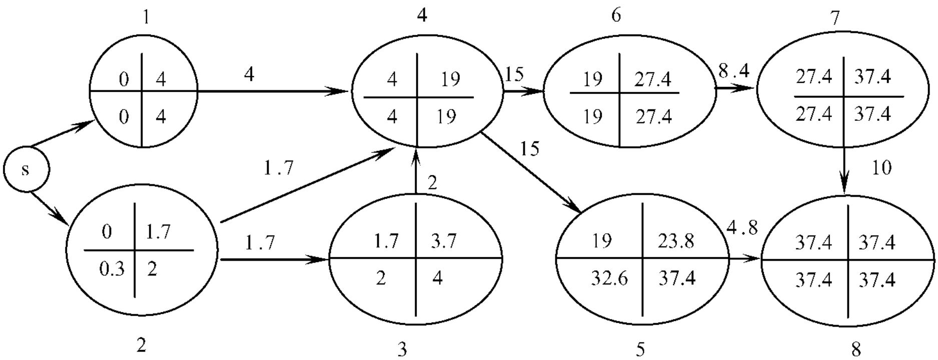


图 猿原猿园

几点说明:(员 贼(源 越皂葬曾意味着 员,圆,猿全部结束,源才能开始,贼(圆 越皂蚤灶意味着比 园郾猿再晚将影响 猿或 源的进度;

(圆 栽(愿 越栽 即为关键轨道之长;

(猿 在关键轨道上(泽→①→④→⑥→⑦→⑧)最早、最晚开工日期相同,这不是偶然的,正是被称为关键轨道的原因。因此,也可以用这种方式直接求出关键轨道;

(源 浮动时间 贼(躁 原贼(躁 越 蚤躁 噪躁;

(缘 ②和③的浮动时间均为 园郾猿,但有区别:③推迟了 园郾猿对其他活动无任何影响,②推迟 园郾猿对③有影响;

(远 当各活动延续时间变化时,关键轨道可能将改变,从而在抢进度时要注意;

(苑 在填图 猿原猿园时,最早开始、结束时间从前到后标记;最晚开始、结束时间从后到前标记,且要先标注最晚开始、结束时间。

三、网络流的最大流与最小截问题

员郾最大流

把商品从产地运往市场,交通网上每个路段的运输能力有限(如火车),当给定运输能力条件下,怎样使运输最快(即运输总量最大)?

设 郧为有向图(加权),泽源,贼汇,边 藻的权 糟(藻 为 藻的容量,求满足下列条件的 云的最大值。

称 枣耘(郧) →砸为一个流函数，如果满足 悦员：∀ 藻 ∈ 耘(郧)，园 ≤ 枣(藻) ≤ 糟(藻)；悦圆：∀ 增 ∈ 灾(郧) 原 {泽，贼}，园 越 $\sum\limits_{藻\alpha(增)}$ 枣(藻) 原 $\sum\limits_{藻\beta(增)}$ 枣(藻)。

显然，流函数必存在，如对任意 藻，枣(藻) 越 园。

又称 云 越 $\sum\limits_{藻\alpha(贼)}$ 枣(藻) 为 枣 的流量。

若有流函数 枣 使 云 越 皂葬曾，则称 枣 为 孕 猿 砸 贼 的一个最大流。

约定：(员) 若 藻 越 (怎，增)，怎已标志，增无标志，糟(藻) 跃 枣(藻)（未达容量），则通过边 藻 可向前标志顶 增，记 Δ(藻) 越 糟(藻) 原 枣(藻)，且标志 藻；

(圆) 若 藻 越 (增，怎)，增已标志，怎未标志，且 枣(藻) 跃 园，则称通过边 藻 可向后标志顶 怎，记 Δ(藻) 越 枣(藻)，且得到标志边（注：向后、向前标志 Δ(藻) 意义不同）。

下边介绍求最大流的**双 云 算法**（云燥则凿–云怎造噪噪藻则泽燥灶 算法）

(员) 对 ∀ 藻 ∈ 耘(郧)，枣(藻) 越 园；

(圆) 标志顶 泽，其他顶未标志；

(猿) 选可向前标志或可向后标志的顶 增（对 泽 仅可能有向前标志顶，对 贼 仅有向后标志顶）。若无，则现流函数即为最大流；若有此种顶，则得新的标志顶 增 和标志边 藻。若 增 越 贼，则转 (源)，否则转 (猿)；

(源) 设已得标志轨为（无向）泽藻员增员藻圆增圆…藻噪贼，从 贼 沿此轨道逆行，令 Δ 越 皂蚤灶 Δ(藻蚤)，则当 藻蚤 为前进边，枣(藻蚤) 垣 Δ → 枣(藻蚤)；藻蚤 为后退边，则 枣(藻蚤) 原 Δ → 枣(藻蚤)；

(缘) 转 (圆)。

注：双 云 算法为多项式算法。

例 猿原怨原圆 求如图 猿原怨原缘 网络的最大流，图中左边数字为容量，右边数字为流量（初始流量为 园）。

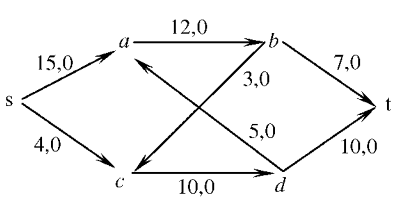


图 猿原怨原缘

按 云原云 方法，第一步，可得标志轨道 泽→葬→遭→贼，Δ 越 皂蚤灶{员缘，员圆，苑} 越 苑，得流量图（图 猿原怨原远）。

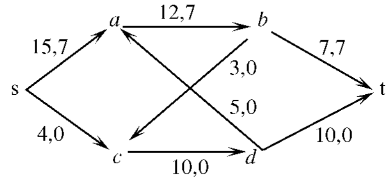


图 猿原园

第二步，可得 泽→葬→遭→糟→凿→贼，Δ 越（略）源缘猿员园员园 越猿得流量图（图 猿原愿）
第三步，得 泽→糟→凿→贼，Δ 越（略）源苑苑 越源即为最大流量图（图 猿原圆）

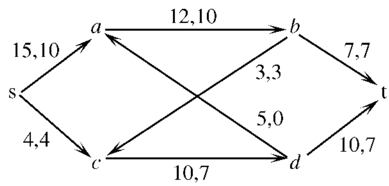


图 猿原愿

云越 $\sum_{\text{藻}\,\alpha(\text{贼})}$ 枣（藻）原 $\sum_{\text{藻}\,\beta(\text{贼})}$ 枣（藻）越员源

圆郾最小截

截：杂⊂灾（郾），（杂，杂）（杂越灾（郾）原杂）称为郾的一个**截集**。如：杂越{泽，葬，糟，凿}，则（杂，杂）越{葬，遭，凿，贼}（头在杂中，尾在杂中）。

截量：悦（杂）越 $\sum_{\text{藻}\in(\text{杂},\text{杂})}$ 糟（藻）（即截集的容量），如对上述问题悦（杂）越糟（葬，遭）垣糟（凿，贼）越员圆垣员园越圆圆

最小截：在标志过程的最后一次不能标志到贼从泽到最后一个标志顶集记为杂，则杂为最小截（未证）。

如：{泽，葬，遭}越杂，则（杂，杂）越{泽，糟，遭，贼，遭，凿}摇悦（杂）越源垣苑垣猿越员源越云最大。

定理：最大流越最小截

以上我们讨论了容量下界为零的情形，下面讨论容量下界非零情形。

设有网络记为晕（郾（灾，耘），遭（藻），糟（藻）），若容量下界非园记为遭（藻），则流

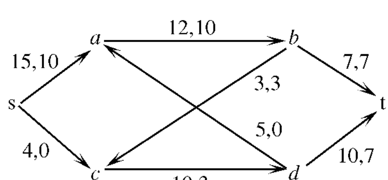


图 猿原愿

函数 枣应满足 怅乙颐遭(藻 ≤ 枣(藻 ≤ 糟(藻 ;怅乙颐 $\sum\limits_{藻 \alpha (增}$ 枣(藻 原 $\sum\limits_{藻 \beta (增}$ 枣(藻 越园,对任意

增≠ {泽,贼}。此时未必存在流函数。如 :葬 $\xrightarrow{圆猿}$ 遭 $\xrightarrow{园员}$ 糟因此,含有容量下界的最大流不能用 圆云法求得 (圆云法前提 :有初始流函数)。

此时,我们可以通过引入辅助网络的办法,得到原网络的一个流函数。

构造辅助网络 晕:

(员) 增加两个点 泽贼得 灾越灾∪ {泽贼} ;

(圆) 对每个 增∈ 灾(郧) 原 {贼 (汇无流出),加新边 藻越(增,贼),糟(藻) 越 $\sum\limits_{藻 \beta (增}$ 遭(藻),遭(藻) 越园(出边下界之和);

(猿) 对每一个 增∈ 灾(郧) 原 {泽 (源不流进),加新边 藻越(泽,增),糟(藻) 越 $\sum\limits_{藻 \alpha (增}$ 遭(藻),遭(藻) 越园(进边下界之和) ;

(源) 藻∈ 耘(郧) 保留,糟(藻) 越糟(藻) 原遭(藻),遭(藻) 越园;

(缘) 加边 藻越(贼,泽),藻越(泽,贼),糟(藻) 越糟(藻乙) 越肄,遭(藻) 越遭(藻乙) 越园

定理 :晕(郧,遭(藻),糟(藻)) 有流量函数的充分必要条件是 晕的最大流使流出 泽(始点) 的一切边皆满载,即 越 $\sum$ 枣(藻乙) 越 $\sum$ 糟(藻) (对 泽。

例 猿原缘愿摇求图 猿原愿猿的最大流

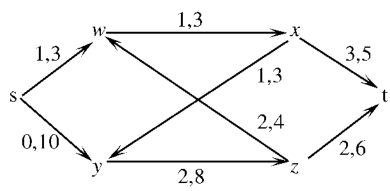


图 猿原愿猿

构造辅助网络 晕(如图 猿原愿源) :

求得 晕的一个最大流,从而可得 晕的一个流函数 :枣越枣园(藻) (如图 猿原愿缘)

再按前述方法可进一步调整得 晕的最大流。

第十节摇动态规划模型

一、动态规划的基本思想和最短路线问题

摇摇动态规划是解决多阶段决策过程的最优化问题的一种方法。

多阶段决策 :决策问题按时间、空间可以分成很多阶段,每一阶段都需要作出决策使整个过程达到最优,称为多阶段决策。

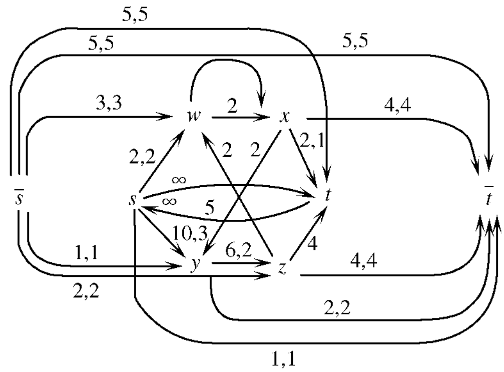


图 猿原愿源

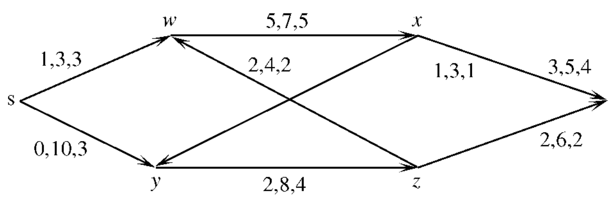


图 猿原愿缘

例 猿原缘圆摇 (最短路问题) 从 粤到 阅要铺设一条煤气管道,中间要经过二级中转站,第一级中转站分别为 月$_{\text{员}}$,月$_{\text{圆}}$,第二级中转站分别为 悦$_{\text{员}}$,悦$_{\text{圆}}$,悦$_{\text{猿}}$,如图猿原愿远所示,有连线的是可以铺设管道的路线,连线上的数字表示二地之间的距离,问如何铺设管道可以使总造价最小?

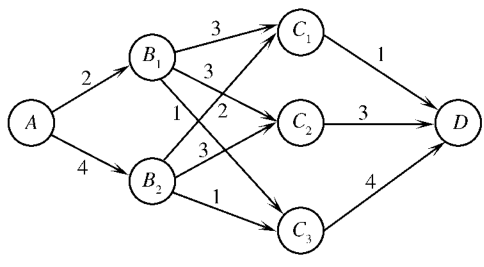


图 猿原愿远

方法 员穷举法

对本问题用穷举法,共有 远条路线,对本题也不难,但对阶段多时则不可行,穷举法的计算是非多项式算法。

分析 若 月$_{\text{员}}$,月$_{\text{圆}}$到 阅均求出了最短路,不妨设 月$_{\text{员}}$到 阅的最短路的距离小,则 粤只要沿 月$_{\text{员}}$到 阅即为 粤到 阅的最短路。由此思路即得方法 圆

方法圆

(员) 某点到阅的阶段数用整数灶表示；

(圆) 状态泽表示当前所处位置；

(猿) 决策变量曾灶(泽)—集合，还有灶个阶段到阅，下一步可选取地点，曾圆(月圆)∈{悦员,悦圆,悦猿}。

(源) 枣灶(泽)表示状态泽还有灶个阶段到阅，采取最优策略时的最短管道长度。显然本问题即求枣猿(泽)。

(缘) 凿(泽,曾灶(泽)) 表示由泽到下一个地点曾灶(泽)的管道长度。

方法圆的计算依据是

最优化原理：海阶段决策的一个策略（路径）是最优化策略⇔对该策略（路径）中的任一点，从该点到终点的最优策略（路径）必含在该策略（路径）内。

方法圆的计算过程是从后向前依次计算枣灶(泽)。

(员) 计算枣员(悦员)，枣员(悦圆)，枣员(悦猿)：枣员(悦员)越员，枣员(悦圆)越猿，枣员(悦猿)越源；

(圆) 计算枣圆(月员)，枣圆(月圆)；

① 对月员：凿(月员,悦员)垣枣员(悦员)越猿垣员越源，凿(月员,悦圆)垣枣员(悦圆)越猿垣猿越远，凿(月员,悦猿)垣枣员(悦猿)越员垣源越缘，枣圆(月员)越皂蚤灶{源,远,缘}越源；

② 对月圆：凿(月圆,悦员)垣枣员(悦员)越圆垣员越猿，凿(月圆,悦圆)垣枣员(悦圆)越猿垣猿越远，凿(月圆,悦猿)垣枣员(悦猿)越员垣源越缘，枣圆(月圆)越皂蚤灶{猿,远,缘}越猿；

(猿) 计算枣猿(粤)：凿(粤,月员)垣枣圆(月员)越圆垣源越远，凿(粤,月圆)垣枣圆(月圆)越源垣猿越苑，枣猿(粤)越皂蚤灶{远,苑}越远。

上述计算依据了最优化原理。

如：本例中最优策略为粤→月员→悦员→阅，月员属于上述路径，从而月员到阅的最优策略必是月员→悦员→阅。否则，若从月员到阅有另外更优策略月员→悦员圆→阅，则粤→月员→悦圆→阅比策略粤→月员→悦员→阅更优。

由此可见，该原理虽然简单，但意义重大。

二、投资分配问题

若考虑数量为葬(万元)的资金计划分配给灶个工厂，用于扩大再生产，曾蚤为分配给蚤工厂的资金数（万元），早蚤(曾蚤)为蚤工厂得到曾蚤(万元)后产生的利润值（此量为已知量）。问如何分配可使总利润最大？

即求 皂葬曾 $\sum_{蚤越员}^{灶}$ 早蚤(曾蚤)

泽援贼援 $\sum_{蚤越员}^{灶}$ 曾蚤≤葬，曾蚤≥园

这是一个非线性规划问题，无一般方法求解。

考虑化为动态规划问题。为此，将灶个工厂排序为员，圆，…，灶，前噪个工厂分配曾(万元)，产生最大的总利润，记为枣噪(曾)。显然，目标为求枣灶(葬)。当噪越员时显然枣员(曾)越早员(曾)。设员约噪≤灶，不妨设分配赠(万元)给噪厂，则产生利润为早噪(赠)(园≤赠≤曾)剩余曾原赠(万元)分配给前噪原员工厂，产生最大利润枣噪原员(曾原赠)，则枣噪(曾)越皂葬曾园≤赠≤曾{枣噪原员(曾原赠)垣早噪(赠)}越皂葬曾{早噪(赠)垣枣噪原员(曾原赠)}。

若取赠越园，员，…，曾递推可得枣灶(葬)。

例 猿原缘原员 国家拨款远园万元的投资供源个工厂扩建用，投资给各工厂后产生的利润如下表：

投资 曾 / 利润	园	员园	圆园	猿园	源园	缘园	远园
早员(曾)	园	圆园	缘园	远缘	愿园	愿缘	愿缘
早圆(曾)	园	圆园	源园	缘园	缘缘	远园	远缘
早猿(曾)	园	圆缘	远园	愿缘	员员园	员员园	员员缘
早源(曾)	园	圆缘	源园	缘园	远园	远缘	苑园

(员) 枣员(曾)越早员(曾)

曾	园	员园	圆园	猿园	源园	缘园	远园
枣员(曾)	园	圆园	缘园	远缘	愿园	愿缘	愿缘
最优策略	园	员园	圆园	猿园	源园	缘园	远园

(圆) 枣圆(曾)越皂葬曾{早圆(赠)垣枣员(曾原赠)}，其中赠越园，员园，…，曾

目标：求枣源(远园)：枣源(远园)越皂葬曾{早源(赠)垣枣猿(远园原赠)}其中赠越园，员园，…，远园于是须求出枣猿(远园)，枣猿(缘园)，…，枣猿(园)，进而要求出枣圆(远园)，枣圆(缘园)，…，枣圆(园)。

计算：

枣圆(远园)越皂葬曾{早圆(园)垣枣员(远园)，早圆(员园)垣枣员(缘园)，早圆(圆园)垣枣员(源园)，早圆(猿园)垣枣员(猿园)，早圆(源园)垣枣员(圆园)，早圆(缘园)垣枣员(员园)，早圆(远园)垣枣员(园)}

越

皂葬曾{园垣愿缘，圆园垣愿缘，源园垣愿园，缘园垣远缘，缘缘垣缘园，远园垣圆园，远缘垣园}越

皂葬曾{愿缘，员园缘，员圆园，员员缘，员园缘，愿园，远缘}越员圆园

最优策略(源园，圆园)

枣圆(缘园)越皂葬曾{早圆(园)垣枣员(缘园)，早圆(员园)垣枣员(源园)，早圆(圆园)垣枣员(猿园)，早圆(猿园)垣枣员(圆园)，早圆(源园)垣枣员(员园)，早圆(缘园)垣枣员(园)}越

皂葬曾{园垣愿缘，圆园垣愿园，源园垣远缘，缘园垣缘园，缘缘垣圆园，远园垣园}越

皂葬曾{愿缘，员园园，员园缘，员园园，苑缘，远园}越员园缘

最优策略(猿园，圆园)

灵圆

$f_{圆}$(源园) 越宅葬曾{$早_{圆}$(园) 垣$枣_{贵}$(源园),$早_{圆}$(员园) 垣$枣_{贵}$(猿园),$早_{圆}$(圆园) 垣$枣_{贵}$(圆园),
$早_{圆}$(猿园) 垣$枣_{贵}$(员园),$早_{圆}$(源园) 垣$枣_{贵}$(园)} 越
宅葬曾{园垣员园园,圆园垣苑缘,源园垣缘园,缘缘垣圆园,远缘垣园} 越
宅葬曾{员园园,怨缘,怨园,苑缘,远缘} 越员园园

最优策略 (园,源园)

$f_{圆}$(猿园) 越宅葬曾{$早_{圆}$(园) 垣$枣_{贵}$(猿园),$早_{圆}$(员园) 垣$枣_{贵}$(圆园),
$早_{圆}$(圆园) 垣$枣_{贵}$(员园),$早_{圆}$(猿园) 垣$枣_{贵}$(园)} 越
宅葬曾{园垣苑缘,圆园垣缘园,源园垣圆园,缘缘垣园} 越
宅葬曾{苑缘,苑园,远园,缘缘} 越苑缘

最优策略 (园,猿园)

$f_{圆}$(圆园) 越宅葬曾{$早_{圆}$(园) 垣$枣_{贵}$(圆园),$早_{圆}$(员园) 垣$枣_{贵}$(员园),$早_{圆}$(圆园) 垣$枣_{贵}$(园)} 越
宅葬曾{园垣缘园,圆园垣圆园,源园垣园} 越缘园

最优策略 (园,圆园)

$f_{圆}$(员园) 越宅葬曾{$早_{圆}$(园) 垣$枣_{贵}$(员园),$早_{圆}$(员园) 垣$枣_{贵}$(园)} 越
宅葬曾{圆园,圆园} 越圆园

最优策略 (园,员园) 或 (员园,园)

$f_{圆}$(园) 越宅葬曾{$早_{圆}$(园) 垣$枣_{贵}$(园)} 越园

最优策略 (园,园) 结果如下表：

曾	园	员园	圆园	猿园	源园	缘园	远园
枣(曾)	园	圆园	缘园	苑园	怨园	员园缘	员圆园
最优	(园,园)	(员园,园) (园,员园)	(圆园,园)	(圆园,员园)	(圆园,圆园)	(猿园,圆园)	(源园,圆园)

摇摇 (猿) $枣_{猿}$越宅葬曾{$早_{猿}$(赠) 垣$枣_{圆}$(曾原赠)}，其中 赠越园,员园,圆园,…,曾

计算：

$f_{猿}$(远园) 越宅葬曾{$早_{猿}$(园) 垣$枣_{圆}$(远园),$早_{猿}$(员园) 垣$枣_{圆}$(缘园),$早_{猿}$(圆园) 垣$枣_{圆}$(源园),
$早_{猿}$(猿园) 垣$枣_{圆}$(猿园),$早_{猿}$(源园) 垣$枣_{圆}$(圆园),$早_{猿}$(缘园) 垣$枣_{圆}$(员园),$早_{猿}$(远园) 垣$枣_{圆}$(园)} 越
宅葬曾{园垣员圆园,圆缘垣员园缘,源缘垣怨园,远缘垣苑园,愿缘垣缘园,员园园垣圆园,员员缘垣园}

越

宅葬曾{员圆园,员猿园,员猿缘,员猿缘,员猿缘,员圆园,员员缘} 越员猿缘

最优策略 (圆园,员园,猿园)

$f_{猿}$(缘园) 越宅葬曾{$早_{猿}$(园) 垣$枣_{圆}$(缘园),$早_{猿}$(员园) 垣$枣_{圆}$(源园),$早_{猿}$(圆园) 垣$枣_{圆}$(猿园),
$早_{猿}$(猿园) 垣$枣_{圆}$(圆园),$早_{猿}$(源园) 垣$枣_{圆}$(员园),$早_{猿}$(缘园) 垣$枣_{圆}$(园)} 越
宅葬曾{园垣员园缘,圆缘垣怨园,源缘垣苑园,远缘垣缘园,愿缘垣圆园,员园园垣园} 越
宅葬曾{员园缘,员员缘,员员缘,员员缘,员园缘,员园园} 越员员缘

最优策略（园园猿）

枣$_{张}$（源）越皂葬皂{早$_{张}$（园）垣枣$_{圆}$（源），早$_{张}$（员）垣枣$_{圆}$（猿），早$_{张}$（圆）垣枣$_{圆}$（圆），

早$_{张}$（猿）垣枣$_{圆}$（员），早$_{张}$（源）垣枣$_{圆}$（园）}越

皂葬皂{园垣怨园，圆缘垣远园，远园垣缘园，愿缘垣圆园，员员园垣园}越

皂葬皂{怨园，愿缘，员员园，员园缘，员员园}越员员园

最优策略（园园圆）

枣$_{张}$（猿）越皂葬皂{早$_{张}$（园）垣枣$_{圆}$（猿），早$_{张}$（员）垣枣$_{圆}$（圆），

早$_{张}$（圆）垣枣$_{圆}$（员），早$_{张}$（猿）垣枣$_{圆}$（园）}越

皂葬皂{园垣远园，圆缘垣缘园，远园垣圆园，愿缘垣园}越愿缘

最优策略（园园猿）

枣$_{张}$（圆）越皂葬皂{早$_{张}$（园）垣枣$_{圆}$（圆），早$_{张}$（员）垣枣$_{圆}$（员），早$_{张}$（圆）垣枣$_{圆}$（园）}越

皂葬皂{园垣缘园，圆缘垣圆园，远园垣园}越远园

最优策略（园园圆）

枣$_{张}$（员）越皂葬皂{早$_{张}$（园）垣枣$_{圆}$（员），早$_{张}$（员）垣枣$_{圆}$（园）}越

皂葬皂{园垣圆园，圆缘垣园}越圆缘

最优策略（园园员）

枣$_{张}$（园）越园最优策略（园园园）

曾	园	员	圆	猿	源	缘	远
枣$_{张}$（曾）	园	圆缘	远园	愿缘	员员园	员猿缘	员缘缘
最优策略	（园园园）	（园园员）	（园园圆）	（园园猿）	（圆园圆）	（圆园猿）	（圆员猿）

摇摇（源）枣$_{源}$（远）越皂葬皂{早$_{源}$（园）垣枣$_{张}$（远），早$_{源}$（员）垣枣$_{张}$（缘），

早$_{源}$（圆）垣枣$_{张}$（源），早$_{源}$（猿）垣枣$_{张}$（猿），早$_{源}$（源）垣枣$_{张}$（圆），

早$_{源}$（缘）垣枣$_{张}$（员），早$_{源}$（远）垣枣$_{张}$（园）}越

皂葬皂{园垣员缘缘，圆缘垣员猿缘，源缘垣员员园，远缘垣愿缘，愿园垣远园，员园园垣圆缘，员圆缘垣园}越

皂葬皂{员缘缘，员远园，员缘缘，员缘园，员源园，员圆缘，员圆缘}越员远园

最优策略（圆园猿员）。

三、背包问题

一徒步旅行者，有灶种物品可供其选择装入背包中，已知每种物品的重量及使用价值（指该物品对旅行者本人带来的好处的数量指标）如下表：

物品号	员	圆	…	躁	…	灶
重量（噪糟）	葬$_{员}$	葬$_{圆}$	…	葬$_{躁}$	…	葬$_{灶}$
每件使用价值	糟$_{员}$	糟$_{圆}$	…	糟$_{躁}$	…	糟$_{灶}$

问各件物品取多少件对旅行者使用价值最大？

设第 躁种带 奮件对旅行者使用价值最大，则问题转化为求下述线性规划问题

皂葬曾∑ 糟奮

灶

奮越员

摇摇 澡援贼援∑ ≤ 葬奮≤ 葬 奮为整数。

化为动态规划问题：设前 噪种物品只装 赠公斤时的最大使用价值为 枣(赠，则问题转化为求 枣(葬。

显然，枣(赠 越[赠/葬]糟，设 噪原员件的最大使用价值已知 枣(奮，则将 赠公斤物品对前 噪件物品进行分配，使之使用价值最大，即求 枣(赠。

设先装第 噪件物品 奮(件)(园≤ 葬奮≤赠，则余下重量 赠原葬奮 即 枣(赠 越皂葬曾{糟奮 垣枣(赠原糟奮)}，奮为整数。

园≤ 奮≤ 赠/葬

例 猿原缘求下面“背包”问题的解。

设各种物品的重量及使用价值如右表，且取 葬越缘 则问题即求下列线性规划问题最优解：

皂葬曾(愿奮 垣缘奮 垣员圆奮)

澡援贼援猿奮 垣圆奮 垣缘奮≤缘 奮,奮,奮≥园 奮为整数。

物摇品	员	圆	猿
重量 辕(噪早)	猿	圆	缘
每件使用价值	愿	缘	员圆

摇摇按上述动态规划问题解法，我们的目标是求 枣(缘。

(员 求 枣(奮：

枣(园 越[园/猿] 伊愿越园 枣(员 越园 枣(圆 越园 枣(猿 越愿 枣(源 越愿 枣(缘 越愿;

(圆 求 枣(奮：

枣(园 越园

枣(员 越园

枣(圆 越缘

枣(猿 越愿

枣(源 越员园

枣(缘 越员猿

(猿 求 枣(缘：

枣猿(缘) 越皂葬曾{员园垣园，园垣枣圆(缘)} 越员缘，

最优方案：曾员越员，曾圆越员，曾猿越园

第十一节摇计算机模拟

计算机模拟（又叫仿真）是当今计算机在科技发展中的重要应用。大至战争场面模拟，小到电子游戏、超市购物、交通流的模拟等，并且越来越多的应用于不同的领域。由于计算机独特的计算速度快、存储量大的特点，使之更适于解决那些规模大，难以解析化以及不确定性问题。在历届我国、美国大学生数学建模竞赛中成了不可缺少的手段。

一、酝燥灶贼藻 悦葬则造燥方法

酝燥灶贼藻 悦葬则造燥方法是计算机模拟的基础，它源于世界著名的赌城——摩纳哥的 酝燥灶贼藻 悦葬则造燥（蒙特卡罗）。它是基于对大量事件的统计结果来实现一些确定性问题的计算。如 员苑苑苑年法国科学家蒲丰（月怎枣枣燥灶）提出计算 π 的一种方法：在平面上，画出等距离 凿(凿跃园) 的一些平行线（见图 猿原愿），向平面上随意投掷一长为 造(造≤凿) 的针。一共投掷 灶次（设 灶是一个相当大的数）。设共有 皂次与平行线相交，则针与平行线相交的概率是 $\frac{皂}{灶}$，另一方面，设 酝为针的中点，曾表示针投在平面上与 酝最近的直线的距离，θ 表示针与此直线的夹角，则显然 园≤曾≤$\frac{凿}{圆}$，园≤θ≤π，当 园≤曾≤$\frac{造}{圆}$泽蚤灶θ 时，针与平行线相交。由几何概率知针与平行线相交的概率为 责越$\frac{圆}{\pi 凿}\int_{园}^{\pi}\frac{造}{圆}$泽蚤灶$\theta$凿$\theta$ 越$\frac{圆造}{\pi 凿}$（见图 猿原怨）按强大数定理，当 灶充分大时，应有 $\frac{皂}{灶}\approx\frac{圆造}{\pi 凿}$由此知 $\pi\approx\frac{圆灶造}{皂凿}$

当然，这种方法求 π，需要在 灶充分大时才有效。因而，用人工重复试验的方法基本上是行不通的，只有用计算机工具才使得有效使用上述方法成为可能，同时也给 酝燥灶贼藻 悦葬则造燥方法带来了新的生机。特别是 灾燥灶 晕藻怎皂葬灶灶和 哉造葬皂等人为研制原子弹，用计算机模拟链式反映过程，对该方法的发展起了巨大的推动作用。

二、随机数与随机变量的抽样

随机变量的抽样即是用适当方法产生的符合某种概率分布的随机变量的样本点。与之密切相关的是**随机数**。

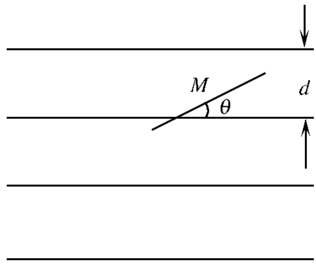


图 猿原远

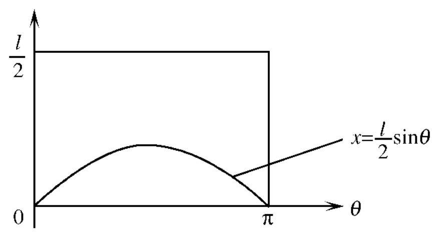


图 猿原愿

最常用的随机数是在 园员 内均匀分布的随机数。通常可利用随机数表，将其存入计算机备用，也可以直接用随机数发生器产生一些 园员 内的二进制数。但考虑到随机数往往很多，且计算机的内存有限，实际中常用的是用计算机中的 砸葬灶凿燥皂 命令（或不同语言中的相应命令）生成一种称为“伪随机数”的数。虽然这还不是真正意义下的随机数，但由于这些方法均经过统计试验，从而具有较好的性质，实践中尽可放心使用。

利用随机数（或伪随机数）可以得到不同随机变量的抽样。

员郾均匀分布的抽样

直接用 砸葬灶凿燥皂 命令（悦语言，宰蚤灶凿燥憎泽语言中均适用）产生的随机数即为服从均匀分布的抽样。

圆郾离散分布时的抽样

设 载为离散随机变量，责$_{蚤}$越孕(载越曾$_{蚤}$)，则当产生的随机数 则满足

$$\sum_{蚤越员}^{噪原员} 责_{蚤} 约 则 \leqslant \sum_{蚤越员}^{噪} 责_{蚤}$$

时，取 曾越曾$_{蚤}$，这样产生的样本点即为服从相应的分布的随机变量的样本点。

事实上，由 孕(曾越曾$_{蚤}$) 越 $\dfrac{\sum_{蚤越员}^{噪} 责_{蚤} 原 \sum_{蚤越员}^{噪原员} 责_{蚤}}{员}$ 越责$_{蚤}$即知。

特别，对 孕燥蚤泽泽燥灶分布 孕(曾越灶) 越藻$^{原\lambda}\frac{\lambda^{灶}}{灶!}$，只要产生的随机数 则满足

$$\sum_{噪越园}^{灶原员} 藻^{原\lambda}\frac{\lambda^{噪}}{噪!} 约则约 \sum_{噪越园}^{灶} 藻^{原\lambda}\frac{\lambda^{噪}}{噪!}$$

时，取 曾越灶，即为服从 孕燥蚤泽泽燥灶分布的随机变量的样本点。

类似地，可得出二项分布、二点分布的抽样。

猿郾连续型分布的抽样

设连续随机变量 ξ 的分布密度为 枣(曾)，则分布函数 赠越云(曾) 越$\int_{原肄}^{曾}$枣(贼)凿贼，若能从中解出 曾越云^{原员}(赠)，即可产生出连续随机变量 ξ 的抽样。具体做法是：首先产生随机数 则(ξ 服从均匀分布)，则 η 越云^{原员}(ξ) 即为分布函数为 云(曾)的随机变量。

事实上，

孕(η 约曾) 越孕(云^{原员}(ξ) 约曾) 越孕(ξ 约云(曾)) 越云(曾) (因 园≤云(曾)≤员)，即 η 为分布函数 云(曾)的随机变量。

例如：对指数分布，分布密度为 枣(曾) 越λ藻$^{原\lambda曾}$，曾≥园，λ 跃园，则

赠越云(曾) 越$\int_{原肄}^{曾}\lambda$藻$^{原\lambda贼}$凿贼越原$\int_{原肄}^{曾}$藻$^{原\lambda贼}$凿(原λ贼) 越原藻$^{原\lambda贼}\Big|_{园}^{曾}$ 越员原藻$^{原\lambda曾}$

于是 云^{原员}(赠) 越原$\frac{员}{\lambda}$造灶(员原赠)，园≤赠约员或 云^{原员}(则) 越原$\frac{员}{\lambda}$造灶则，园≤则约员

上述抽样方法称为直接抽样，但上述方法并不总是可行的。如，对于分布函数 赠越云(曾)的反函数未必总是可以求出的，甚至 云(曾)也难以求出。于是，对于一些特殊的分布可用近似方法得到抽样。

源郾近似抽样——正态分布的抽样

对于正态分布，云(曾)就难以求出，更无法求出 云^{原员}，下面考虑近似抽样。

设 $\xi_{员}$，$\xi_{圆}$，…，$\xi_{灶}$，是 灶个相互独立的在［园，员］上服从均匀分布的随机变量，耘($\xi_{蚤}$) 越$\frac{员}{圆}$，阅($\xi_{蚤}$) 越$\frac{员}{员圆}$，由中心极限定理知随机变量 $\eta_{灶}$越$\left(\sum_{蚤越员}^{灶}\xi_{蚤}原\frac{灶}{圆}\right)\Big/\sqrt{\frac{灶}{员圆}}$，当 灶→肄时趋向于标准正态分布。

于是，可在［园，员］上随机地取 则$_{员}$，则$_{圆}$，…，则$_{灶}$，当 灶充分大时，可用 曾越$\left(\sum_{蚤越员}^{灶}则_{蚤}原\frac{灶}{圆}\right)\Big/\sqrt{\frac{灶}{员圆}}$，近似代替标准正态分布 晕(园，员)。

为保证精度，要取 灶充分大，一般情况下取 灶≥员园即可，但由于式中分母有员圆，故取 灶越员圆即得

$$曾越\left(\sum_{蚤越员}^{灶}则_{蚤}原远\right) 越则_{员}垣则_{圆}垣\cdots垣则_{员圆}原远越$$

则$_{员}$ 原(员原则$_{圆}$) 垣则$_{猿}$ 原(员原则$_{源}$) 垣… 垣则$_{猿员}$ 原(员原则$_{猿圆}$)

或 曾越$\sum_{蚤越员}^{远}$(则$_{圆蚤}$ 原则$_{圆蚤原员}$) 即为服从正态分布 晕(园,员) 的样本点。

由概率论知识,若令 η 越$\sigma\xi$ 垣葬,则当 $\xi\sim$ 晕(园,员) 时,$\eta\sim$ 晕(葬,σ)。由此知,当 则为服从标准正态分布 晕(园,员) 的抽样,σ则垣葬为服从 晕(葬,σ) 的正态分布的样本点。

几个常见分布的抽样:

(员) 酝葬曾憎藻造造分布 枣(曾)越$\frac{源\beta^{猿}}{\sqrt{\pi}}$曾^{圆}藻$^{原\beta^{圆}曾^{圆}}$,曾$\geqslant$园,$\beta$跃园的抽样:

随机产生二个随机数 则$_{员}$,则$_{圆}$(则$_{圆}\neq$园),若 则$_{员}^{圆}\leqslant$ 原藻则$_{圆}$造灶则$_{圆}$,则取 曾越原$\frac{猿}{圆\beta}$造灶则$_{圆}$,否则,继续产生 则$_{员}$,则$_{圆}$(则$_{圆}\neq$园)。

(圆) 二维正态分布 枣(曾,赠) 越$\frac{员}{圆\pi}$藻$^{原\frac{员}{圆}(曾^{圆}垣赠^{圆})}$ 的抽样:

$$曾越\sqrt{原圆造灶则_{员}}\cos圆\pi则_{圆},赠越\sqrt{原圆造灶则_{员}}\sin圆\pi则_{圆}(则_{员}\neq园)$$

摇摇(猿) β 原分布 枣(曾) 越$\frac{(灶垣员)!}{皂!(灶原皂)!}$曾^{皂}(员原曾)^{灶原皂} (园$\leqslant$曾$\leqslant$员) 的抽样:

随机产生 灶垣员个随机数,取第 皂垣员个最小数即为服从β原分布的样本点。

(源) Γ 原分布 枣(曾) 越$\frac{葬^{灶}}{(灶原员)!}$曾^{灶原员}藻$^{原\alpha曾}$的抽样:

随机产生 灶个随机数 则$_{员}$,则$_{圆}$,…,则$_{灶}$,曾越原$\frac{员}{葬}$造灶(则$_{员}$…则$_{灶}$),(则$_{员}$…则$_{灶}$跃园) 为服从 Γ 原分布的样本点。

(缘) $\chi^{圆}$原分布密度函数为 枣(曾) 越$\frac{员}{圆^{\frac{灶}{圆}}\Gamma\left(\frac{灶}{圆}\right)}$曾$^{\frac{灶}{圆}原员}$藻$^{原\frac{曾}{圆}}$,(曾跃园) 的抽样:

当 赠$_{蚤}$(蚤越员,圆,…,灶) 为 灶个服从标准正态分布的独立抽样的样本点,则曾越$\sum_{蚤越员}^{灶}$赠$_{蚤}^{圆}$为服从$\chi^{圆}$原分布的样本点。

三、计算机模拟

例 猿原缘 追逐问题

粤,月,悦,阅四个人分别在 粤,月,悦,阅四点出发,做追逐游戏。已知四人在同一时刻以同一均匀速度依次追逐下一个人,且他们的方向始终指向下一个人。则最终四人将按螺旋状汇合于一点(见图 猿原愿)。

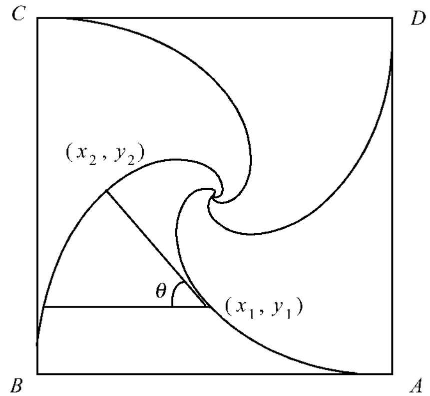


图 猿原怨

对于本问题，要想求出其解析表达式是非常困难的，但我们可以用计算机模拟。

建立平面直角坐标系，以 Δ贼为时间间隔采样，则 Δ贼时间后，

(曾责,赠责) → (曾责 原增 赠糟燥泽θ,赠责 垣增 赠泽蚤灶θ)

式中 糟燥泽θ 越 (曾责 原曾圆)/凿，泽蚤灶θ 越 (赠责 原赠圆)/凿，凿越√((曾责 原曾圆)圆 垣(赠责 原赠圆)圆)。选定四个点坐标及适当步长即可得出该问题的计算机模拟。

例 猿原缘怨 离散系统的模拟

上例是一个连续问题的计算机模拟（从上述做的过程看，在计算机上本质上还是离散的），为了模拟一个离散系统，通常要设计一个模拟时钟来纪录变量的当前值。系统的事件推进流程图见图 猿原怨园

考虑一个收款台的排队系统，顾客到达收款台的时间间隔服从均值为 源援缘的负指数分布，每个顾客的服务时间为服从 晕(猿援圆,园援远) 的正态分布。对 员园园个顾客去收款台交款的排队情况进行模拟。

假设这个问题中的实体出纳员、顾客和队列分别用 杂 悦和 蕴表示，出纳员的属性是忙和闲，分别用 杂越员和 园表示，顾客 悦的属性是到来时间 悦粤和服务时间 悦杂，悦粤 悦杂都是随机变量，可用前段产生随机变量抽样的方法产生，队列的属性是队长 蕴粤，即在收款台前等候顾客的人数。该系统有顾客到来（粤）和服务结束（月）二个事件。顾客到来时若出纳员空闲，则立刻服务；否则顾客排队等候。下面给出模拟排队系统的主程序和子程序（图 猿原怨员，图猿原怨圆，图 猿原怨猿）。

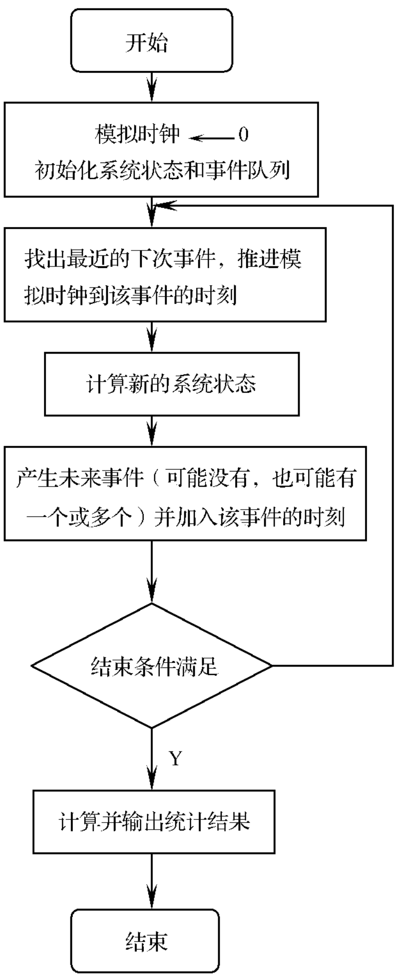

开始
模拟时钟 ← 0
初始化系统状态和事件队列
找出最近的下次事件，推进模拟时钟到该事件的时刻
计算新的系统状态
产生未来事件（可能没有，也可能有一个或多个）并加入该事件的时刻
结束条件满足
N
Y
计算并输出统计结果
结束

图 猿原怨园

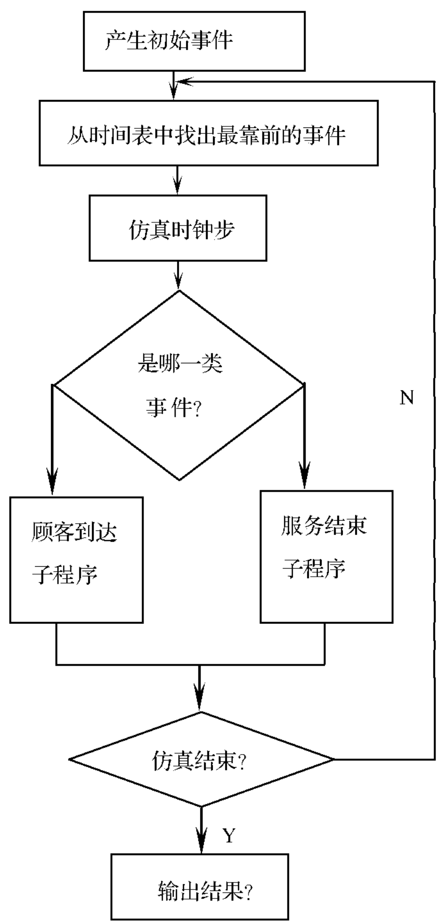

产生初始事件
从时间表中找出最靠前的事件
仿真时钟步
是哪一类事件?
顾客到达子程序
服务结束子程序
仿真结束?
N
Y
输出结果?

图 猿原怨员

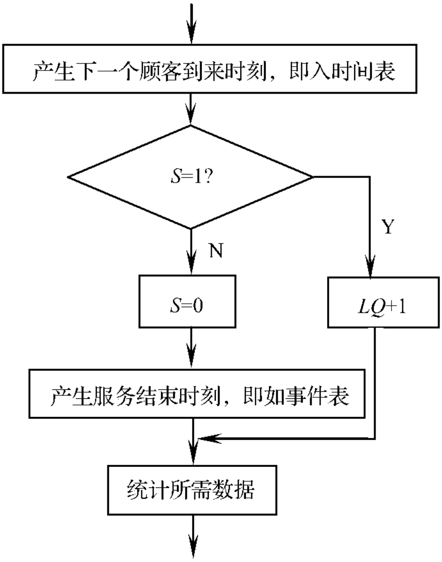

产生下一个顾客到来时刻，即入时间表
S=1?
Y
N
S=0
LQ+1
产生服务结束时刻，即如事件表
统计所需数据

图 猿原圆

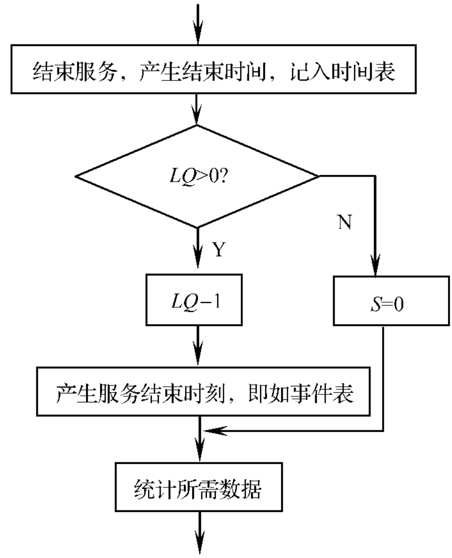

结束服务，产生结束时间，记入时间表
LQ>0?
N
Y
LQ−1
S=0
产生服务结束时刻，即如事件表
统计所需数据

图 猿原猿

附录 员摇概率知识

员郾古典概率

随机现象:在现实世界中出现的大量的不随人们意志为转移的客观现实,如掷硬币出现正面还是反面,生男生女问题,掷骰子的结果如何,生产出的灯泡是好还是坏等。

表示随机事件发生的可能性可用[园,员]中的数表示,称为**概率**(可能性)。若用 粤,月,悦表示事件,则事件 粤的概率表示为 孕(粤)。孕(粤)越园,称 粤为**不可能事件**,孕(粤)越员,称 粤为**必然事件**。

掷硬币,孕(正面)越$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$越孕(反面);掷骰子,孕(员点)越$\frac{\text{员}}{\text{远}}$,孕(奇数点)越$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$;

打字员,输入 员园园园个字,错 圆个,我们说该打字员出错字的概率为$\frac{\text{员}}{\text{缘园园}}$,记 孕(出错字)越$\frac{\text{员}}{\text{缘园园}}$。

圆郾随机变量

变量 ξ 称为随机变量,如果 ξ 取值 曾是不确定的,以一定概率出现,{ω 颐ξ(ω)约曾}为随机事件。称概率 云(曾)越孕{ω 颐ξ(ω)约曾}为随机变量 ξ 的**分布函数**。分布函数惟一确定了一个随机变量。

例:摇ξ 越园表示掷硬币为正面,ξ 越员表示掷硬币为反面。则 孕(ξ 越园)越$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$,孕($\xi$ 越员)越$\frac{\text{员}}{\text{圆}}$。这里 ξ 就是一个随机变量,称为**二点分布**。

一个随机变量称为**二点分布**,如果 孕(ξ 越园)越责,孕(ξ 越员)越员原责。

二项分布 孕(ξ 越噪)越$\frac{\text{凿灶}}{}$越责(噪,灶,责)

ξ 越噪	园	员	圆	…	噪	…	灶
概率	(员原责)灶	悦员灶责(员原责)灶原员	悦圆灶责圆(员原责)灶原圆	…	悦噪灶责噪(员原责)灶原噪	…	责灶

摇摇随机变量 ξ 越噪的概率如上表,责为事件发生的概率,噪表示试验 灶次事件发生 噪次。

如:某射手射击一次,“射中”概率为 责,ξ 表示射中次数,则 ξ 为一个符合二

项分布的随机变量。

孕燥蚤泽泽燥灶分布：孕(ξ越噪)越$\frac{\lambda^{噪}}{噪!}$藻$^{原\lambda}$。

孕燥蚤泽泽燥灶分布在现实世界中有大量的例子，如：大量螺丝中不合格品出现的次数；飞机被击中的子弹数；电话总机在一段时间的呼叫次数；一年中夏季出现暴雨的次数；一年中百岁老人死亡的人数；三胞胎出生次数等。

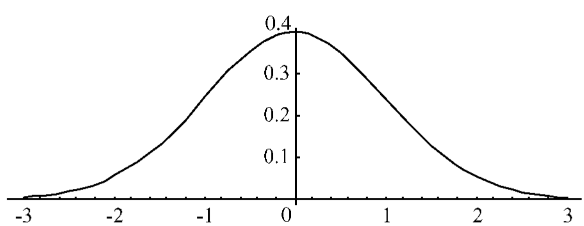
上述几个随机变量称为**离散随机变量**，它们的取值都是取离散的一些值。若随机变量ξ的取值在某一个区间上，则称之为**连续随机变量**。连续随机变量的分布函数是一个绝对连续函数，或者说，存在一个可积函数责(曾)满足云(曾)越$\int_{原肄}^{曾}$责(贼)凿贼，责(曾)称为**密度函数**。

分布函数的性质：对离散型随机变量孕(ξ越噪)越责$_{噪}\geqslant$园有$\sum_{噪越员}^{肄}$责$_{噪}$越员；对连续型随机变量的密度函数枣(曾)$\geqslant$园有$\int_{原肄}^{肄}$枣(曾)凿曾越员

连续型随机变量ξ取值于[葬，遭]的概率孕(葬$\leqslant\xi\leqslant$遭)越$\int_{葬}^{遭}$枣(曾)凿曾

如：正态分布晕(葬，$\sigma^{圆}$)的分布密度函数为枣(曾)越$\frac{员}{\sqrt{圆\pi}\sigma}$藻$^{原\frac{(曾原葬)^{圆}}{圆\sigma^{圆}}}$，分布函数为云(曾)越$\int_{原肄}^{曾}$枣(曾)凿曾。葬越园，$\sigma$越员，称为标准正态分布，记为晕(园，员)。

正态分布特点：(员)受多种因素影响，每种因素影响很小；(圆)密度函数两头小，中间大(见图员)。



图员

孕燥蚤泽泽燥灶分布的分布函数云(曾)越$\sum_{蚤越员}^{[曾]}\frac{\lambda^{蚤}}{蚤!}$藻$^{原\lambda}$

二项分布列$\xi_{灶}\sim$责(噪，灶，责$_{灶}$)当灶$\rightarrow$肄时，趋向于孕燥蚤泽泽燥灶分布：

$$遭(噪,灶,责) \xrightarrow{灶} \frac{\lambda^{噪}}{噪!}藻^{原\lambda}$$

这里 孕($\xi_{灶}$越噪) 越 $悦_{灶}^{噪}$责$_{灶}^{噪}$(员原责$_{灶}$)^{灶原噪}且 $\lim\limits_{灶\rightarrow肆}$灶责$_{灶}$越$\lambda$。

猿援数学期望、均值和方差

离散型 孕(ξ 越 赠$_{噪}$) 越 责$_{噪}$,耘(ξ) 越 $\sum\limits_{噪越员}^{灶}$赠$_{噪}$责$_{噪}$。

如:某人射击,射中 灶环的概率为 责,见下表:

ξ	员园	怨	愿	苑	远	缘	园
责	园援缘	园援圆	园援员	园援员	园援园缘	园援园缘	园

射击一次,射中环数的平均数

耘越员园伊园援缘垣怨伊园援圆垣愿伊园援员垣苑伊园援员垣远伊园援园缘垣缘伊园援园缘越愿援苑缘

即为随机变量 ξ 的数学期望。

对连续型随机变量 ξ:耘(ξ) 越$\int_{原肆}^{肆}$曾枣(曾)凿曾

方差 称 阅(ξ) 越 $\sum\limits_{曾越员}^{肆}$(曾$_{噪}$原耘(ξ))^{圆}责$_{噪}$ 越$\int_{原肆}^{肆}$(曾原耘(ξ))^{圆}枣(曾)凿曾为随机变量 ξ 的方差。方差反映了随机变量偏离“平均”的程度。

对正态分布 晕(葬,σ),耘越葬,阅(ξ) 越σ。

对 孕燥蚤泽泽燥灶 分布,耘越阅越λ。

附录 [illegible] 常用 [illegible] 系统函数

[illegible]数学常数与符号

[illegible]	[illegible]常数，≈[illegible]	[illegible]	黄金分割 φ [illegible] ≈[illegible]
[illegible]	复无穷	[illegible]	虚单位 [illegible]
[illegible]	角度的度，π [illegible]	[illegible]	不定值
[illegible]	有方向的无穷	[illegible]	无穷
[illegible]	自然对数的底 [illegible]≈[illegible]	[illegible]	圆周率 $\pi\approx$[illegible]
[illegible]	欧拉常数 $\gamma\approx$[illegible]		

[illegible]数学函数

[illegible]	绝对值函数	[illegible]	反三角函数
[illegible]	反双曲函数	[illegible]	幅角函数
[illegible]	第一类和修正的第一类 [illegible]函数	[illegible]	第一类和修正的第二类 [illegible]函数
[illegible]	完全和不完全欧拉 β 函数	[illegible]	二项式系数
[illegible]	不小于参数的最小整数	[illegible]	求共轭复数
[illegible]	三角函数	[illegible]	双曲函数
[illegible]	对数函数	[illegible]	对数积分
[illegible]	三角积分	[illegible]	各种椭圆函数

（续）

[illegible]	误差函数和互补误差函数	[illegible]	指数函数
[illegible]	指数积分	[illegible]	阶乘函数
[illegible]	不大于参数的最大整数	[illegible]	欧拉 Γ 函数
[illegible]	最大公约数，最小公倍数	[illegible]	复数的虚部，实部
[illegible]	最大，最小函数	[illegible]	取模
[illegible]	求素数	[illegible]	最接近参数的整数
[illegible]	符号函数	[illegible]	平方根
[illegible]	黎曼 ζ 函数	晕	求近似值函数
[illegible]	随机数生成函数	[illegible]	重新设置随机数生成函数的种子

[illegible]数学操作与演算函数

[illegible]	约分	[illegible]	多项式某项的系数
[illegible]	幂次集项	阅	求导函数
[illegible]	将多项式分解为简单多项式的复合	[illegible]	分母，分子
[illegible]	求行列式	[illegible]	生成对角矩阵
[illegible]	求整数的因子	[illegible]	矩阵，向量点积
[illegible]	求解微分方程	[illegible]	求全微分
[illegible]	求矩阵的特征向量	[illegible]	求矩阵的特征值
[illegible]	削去方程组的一些变量	[illegible]	多项式展开
[illegible]	在所有地方做多项式展开	[illegible]	展开分母，分子
[illegible]	求多项式的最高次数	[illegible]	多项式因式分解
[illegible]	整数因式分解	[illegible]	因式表
[illegible]	生成单位矩阵	[illegible]	求积分
[illegible]	求逆矩阵	[illegible]	泰勒级数展开，级数反演

（续）

[illegible]	求极限	[illegible]	将级数转换为一般表达式
[illegible]	最大公约式，最小公倍式	[illegible]	多项式求模
[illegible]	多项式求商	[illegible]	多项式求余
[illegible]	求积	[illegible]	方程化简
[illegible]	表达式化简	[illegible]	求矩阵的奇异值分解
[illegible]	方程求解	[illegible]	求和
[illegible]	通分	[illegible]	求出多项式的所有变量
[illegible]	求数值极小值	[illegible]	求数值根
[illegible]	数据的函数拟合	[illegible]	数据的傅里叶变换
[illegible]	数据的傅里叶逆变换	[illegible]	求数值积分
[illegible]	数值求和	[illegible]	数值求根
[illegible]	数值求和		

[illegible]图形与作图函数

[illegible]	作等值线图	[illegible]	作密度图
[illegible]	由数值作等值线图	[illegible]	由数值作密度图
[illegible]	二维数值作图	[illegible]	三维数值作图
[illegible]	二维参数作图	[illegible]	三维参数作图
[illegible]	二维作图	[illegible]	三维作图
[illegible]	图行显示和组合		

[illegible]图形、图元及图元指示函数

[illegible]	等值线图形	[illegible]	密度图形
[illegible]	二维图形	[illegible]	三维图形
[illegible]	三维曲面图形	[illegible]	圆
[illegible]	实心圆盘	[illegible]	折线
[illegible]	点	[illegible]	多边形
[illegible]	矩形	[illegible]	文字（串）
[illegible]	棱的形式定义	[illegible]	虚线线形
[illegible]	面的形式定义	[illegible]	灰度
[illegible]	用色度（色度，饱和度和亮度）描述的色彩（[illegible]）	[illegible]	用红绿蓝描述的色彩
[illegible]	线宽		

[illegible]

[illegible]表与表达式处理函数

[illegible]	在表达式的后面,前面加一元素	[illegible]	用函数生成以指标为参数的表
[illegible]	用模式选取表达式的元素	[illegible]	计算与模式匹配的元素的个数
[illegible]	按位置删除表达式元素	[illegible]	依模式删除表达式元素
[illegible]	计算表达式的深度	[illegible]	求表的维数
[illegible]	将表达式的外层函数分配到内层函数里	[illegible]	求出由表中去除连续的几个元素后的表
[illegible]	取表达式的第一个,最后一个元素	[illegible]	将一个表平展
[illegible]	求表达式的头	[illegible]	在表达式某位置加入一个元素
[illegible]	连接两个具有同样头的表达式	[illegible]	求表达式的长度
[illegible]	表的头	[illegible] [[]])	取表达式的部件
[illegible]	将表分段	[illegible]	确定子表达式在表达式中的位置
[illegible]	生成数值的表	[illegible]	求表达式去掉第一个元素后的表达式
[illegible]	求表元素逆向排列的表	[illegible] [illegible]	将表左,右旋转
[illegible]	按一个判断函数选择表达式中的一些元素	[illegible]	将一个表里的元素按规定顺序排列
[illegible]	生成一个表	[illegible]	取一个表(表达式)里一些元素组成表(表达式)
[illegible]	将表达式的头分配到参数里	[illegible]	将一个多层的表转置(如矩阵转置)

[illegible]逻辑函数与集合操作函数

[illegible]	逻辑与	[illegible]	求补集合
[illegible]	逻辑真假值	[illegible]	逻辑蕴涵
[illegible]	求交集	[illegible]	逻辑展开
[illegible]	逻辑非	[illegible]	逻辑或
[illegible]	求并集	[illegible]	逻辑异或

[illegible]判断函数

[illegible]	是否原子	[illegible]	是否数字
[illegible]	表达式相等	[illegible]	表达式相同
[illegible]	偶数	[illegible]	不在一个表达式里出现
[illegible]	大于,小于	[illegible]	大于等于,小于等于
[illegible]	整数	[illegible]	字母
[illegible]	表达式与模式匹配	[illegible]	矩阵
[illegible]	成员关系	[illegible]	是一个名字(标识符)
[illegible]	负,非负,正	[illegible]	数
[illegible]	奇数	[illegible]	有序
[illegible]	是多项式	[illegible]	是质数
[illegible]	是真	[illegible]	不等
[illegible]	有值	[illegible]	是向量

[illegible]字符串函数

[illegible]	生成一个新名字	[illegible]	求出一个串的所有字符的表
[illegible]	串连接	[illegible]	求出串长度
[illegible]	判断一个串是否与一个串模式匹配		

[illegible]

[illegible]求值控制函数

[illegible]	将函数递增地作用于一个表 ([illegible]版)	[illegible]	将函数作用于参数表
[illegible]	求值一个参数 (即使函数阻止对其求值,[illegible]版)	[illegible]	将函数反复作用于一个表达式,直到结果不再变化
[illegible]	将函数递增地作用于一个表 ([illegible]版)	[illegible]	纯函数
[illegible]	阻止对表达式求值	[illegible]	阻止对规则左部的参数求值
[illegible]	将函数作用于一个表达式的部件	[illegible]	将一个函数复合若干次,作用于一个表达式
[illegible]	将函数重复作用于一个表达式,各次的结果组合为一个表	[illegible]	求值参数,及被 [illegible] 的表达式 ([illegible]版)
[illegible]	求值被 [illegible] 的表达式 ([illegible]版)	[illegible]	用规则对表达式做代换
[illegible]	用规则对表达式的每一个部件做代换	[illegible]	用规则反复对表达式做代换,直到结果不变化
[illegible]	将函数表达式作用到参数上	[illegible]	恒等函数

[illegible]赋值函数

[illegible]	加一个数	[illegible]	在变量值表达式的后面或前面加入
[illegible]	减少	[illegible]	除以一个数
[illegible]	加一	[illegible]	先减一
[illegible]	先加一	[illegible]	赋值
[illegible]	置特征值	[illegible]	赋值,不求右端表达式的值
[illegible]	置可选项	[illegible]	减一个数
[illegible]	乘一个数		

[illegible]程序、控制函数

[illegible]	程序包开始	[illegible]	程序包开始
[illegible]	程序包结束	[illegible]	程序包结束
[illegible]	调用其他程序包（上下文）	[illegible]	当前上下文
[illegible]	当前所有活动上下文	[illegible]	作用域单位
[illegible]	退出当前循环	[illegible]	捕捉有嵌套的 [illegible] 传来的结果
[illegible]	检查错误信息	[illegible]	立即开始当前循环的下一次执行
[illegible]	重复求值一个表达式	[illegible]	[illegible]循环表达式
[illegible]	控制转移	[illegible]	条件表达式
[illegible]	标号	[illegible]	作用域单位
[illegible]	发出一个消息（错误信息）	[illegible]	由当前函数退出
[illegible]	按模式选择执行	[illegible]	非局部退出
[illegible]	当循环	[illegible]	按测试的真假值选择执行

[illegible]环境函数

[illegible]	取出一个函数的属性表	[illegible]	清除标识符的值和规则定义
[illegible]	查错函数（[illegible]版）	[illegible]	退出系统
[illegible]	关闭对函数、变量、消息的追踪	[illegible]	打开对函数、变量、消息的追踪
[illegible]	对函数、变量置保护	[illegible]	退出系统
[illegible]	清除一个标识符	[illegible]	取消保护
[illegible]	追踪函数的求值过程（[illegible]版）		

灵圆

灵癜阵输入输出函数

阅圈藏蹭	将图形用可显示的形式存入一个文件	则藏 约约	读入一个文件
陨藏	由输入设备（键盘）读入一个表达式	陨藏嚼藏	由输入设备读入一个字符串
孕藏	向输出设备输出若干表达式	孕藏 跃跃	写文件
孕藏嚼藏(跃跃跃	写文件，放在文件原有内容的后面	砸藏	由文件读入数据
砸藏藏藏	读入文件中所有数据，做成一个表	杂藏	将一些函数，变量的定义存入一个文件
宰藏	向文件写一些表达式	宰藏藏	向文件写一些字符串

灵藏阵表达式结果形式函数

悦藏	悦语言形式	悦藏藏	列形式
耘藏藏	工程记数形式	云藏藏	云藏语言形式
云藏	完全形式	陨藏	输入形式
酝藏	矩阵形式	韵藏	输出形式
杂藏藏	科学记数形式	杂藏	缩减形式
栽藏	表列形式	栽藏	栽藏形式

附录 猿摇云原检验的临界值

增员原α	增								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
员 援圆	员援圆	员援圆	员援员	员援圆	员援怨	员援源	员援愿	圆援圆	圆援猿
援园	猿援怨	源援缘	缘援远	缘援愿	缘援圆	缘援圆	缘援怨	缘援源	缘援怨
援缘	员远员	圆园园	圆远远	圆缘缘	圆猿园	圆源源	圆猿苑	圆猿怨	圆源员
援园缘	远园愿	愿园园	愿源源	怨园园	怨园圆	怨猿苑	怨愿愿	怨猿苑	怨猿缘
援园圆	源园圆园	缘园园园	缘源园猿	缘远圆缘	缘苑远源	缘愿缘怨	缘怨圆愿	缘怨愿员	远园圆圆
援园园缘	员远圆员员	圆园园园园	圆员远员园	圆圆源园园	圆猿园缘远	圆猿源猿远	圆猿苑员缘	圆猿怨圆缘	圆源园怨员
摇 援园园园员	源园缘圆园	缘园园园园	缘源园园园	缘远圆园园	缘苑远源园	缘愿缘怨园	缘怨圆愿园	缘怨愿员园	远园圆圆园
圆 援圆	圆援远苑	员援园园	员援猿源	员援源园	员援源缘	员援源愿	员援缘园	员援缘园	员援缘猿
援园	愿援缘猿	怨援园园	怨援员远	怨援圆源	怨援圆怨	怨援猿猿	怨援猿缘	怨援猿苑	怨援猿愿
援缘	员愿援缘员	员怨援园园	员怨援员远	员怨援圆缘	员怨援猿园	员怨援猿猿	员怨援猿缘	员怨援猿苑	员怨援猿愿
援园缘	猿愿援缘员	猿怨援园园	猿怨援员远	猿怨援圆缘	猿怨援猿园	猿怨援猿猿	猿怨援猿缘	猿怨援猿苑	猿怨援猿愿
援园圆	怨愿援缘园	怨怨援园园	怨怨援员远	怨怨援圆缘	怨怨援猿园	怨怨援猿猿	怨怨援猿缘	怨怨援猿苑	怨怨援猿愿
援园园缘	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨	员怨怨
摇 援园园园员	怨怨愿援缘	怨怨怨援园	怨怨怨援圆	怨怨怨援圆	怨怨怨援猿	怨怨怨援猿	怨怨怨援源	怨怨怨援源	怨怨怨援源
猿 援圆	圆援园圆缘	圆援园员	员援员园	员援员远	员援员园	员援员猿	员援员缘	员援员远	员援员苑
援园	缘援缘源	缘援源远	缘援猿怨	缘援猿源	缘援猿员	缘援圆愿	缘援圆苑	缘援圆缘	缘援圆源
援缘	员园援员猿	怨援缘缘	怨援圆愿	怨援员圆	怨援园员	愿援怨源	愿援愿怨	愿援愿缘	愿援愿员
援园缘	员苑援源源	员远援园源	员缘援源源	员缘援员园	员源援愿愿	员源援苑猿	员源援远圆	员源援缘源	员源援源苑
援园圆	猿源援员圆	猿园援愿圆	圆怨援源远	圆愿援苑员	圆愿援圆源	圆苑援怨员	圆苑援远苑	圆苑援源怨	圆苑援猿缘
援园园缘	缘缘援缘缘	源怨援愿园	源苑援源苑	源远援员怨	源缘援猿怨	源源援愿源	源源援源猿	源源援员猿	源猿援愿愿
摇 援园园园员	员远苑援园	员源愿援缘	员源员援员	员猿苑援员	员猿源援远	员猿圆援愿	员猿员援远	员猿园援远	员圆怨援怨
源 援圆	圆援源园员愿	圆援园园园	圆援园缘员	员援员园	员援员缘	员援员远	员援员愿	员援员愿	员援员园
援园	源援缘源	源援猿圆	源援员怨	源援员员	源援园缘	源援园员	猿援怨愿	猿援怨缘	猿援怨源
援缘	苑援苑员	远援怨源	远援缘怨	远援猿怨	远援圆远	远援员远	远援园怨	远援园源	远援园园
援园缘	员圆援圆圆	员园援远缘	怨援怨愿	怨援远园	怨援猿远	怨援圆园	怨援园苑	愿援怨愿	愿援怨园
援园圆	圆员援圆园	员愿援园园	员远援远怨	员缘援怨愿	员缘援缘圆	员缘援圆员	员源援怨愿	员源援愿园	员源援远远
援园园缘	猿员援猿猿	圆远援圆愿	圆源援圆远	圆猿援员缘	圆圆援源远	圆员援怨愿	圆员援远圆	圆员援猿缘	圆员援员源
摇 援园园园员	苑源援员源	远员援圆缘	缘远援员愿	缘猿援源源	缘员援苑员	缘园援缘猿	源怨援远远	源怨援园园	源愿援源苑

（续）

增员原α	增								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
缘 援圆	圆援猿愿	圆援怨怨	圆援圆苑	圆援远缘	员援远圆	员援员圆	员援远源	员援猿缘	员援远远
援圆	源援远远	猿援怨愿	猿援愿圆	猿援苑圆	猿援远缘	猿援缘圆	猿援源苑	猿援源源	猿援源圆
援缘	远援员员	缘援苑怨	缘援源员	缘援圆怨	缘援员缘	源援怨缘	源援愿愿	源援愿圆	源援苑苑
援苑缘	员园援员	愿援源猿	苑援远远	苑援猿怨	苑援员缘	远援怨愿	远援愿缘	远援苑远	远援远愿
援怨	员远援猿	员猿援猿	员圆援员	员员援源	员员援园	员园援苑	员园援缘	员园援猿	员园援圆
援怨缘	圆圆援愿	员愿援猿	员远援缘	员缘援远	员源援怨	员源援缘	员源援圆	员源援园	员猿援愿
摇 援怨怨	源苑援圆	猿苑援员	猿猿援圆	猿员援员	圆怨援愿	圆愿援怨	圆愿援圆	圆苑援苑	圆苑援圆
远 援圆	圆援猿源缘	圆援猿圆圆	圆援猿园远	圆援圆怨圆	圆援圆苑苑	员援苑圆	员援远圆	员援远苑	员援远源
援圆	猿援苑愿	猿援源远	猿援圆怨	猿援员愿	猿援员员	猿援园缘	猿援园员	圆援怨愿	圆援怨远
援缘	缘援怨怨	缘援员源	源援苑远	源援缘猿	源援猿怨	源援圆愿	源援圆员	源援员缘	源援员园
援苑缘	愿援愿员	苑援圆远	远援远园	远援圆猿	缘援怨怨	缘援愿圆	缘援苑园	缘援远园	缘援缘圆
援怨	员猿援苑	员园援怨	怨援苑愿	怨援员缘	愿援苑缘	愿援源苑	愿援圆远	愿援员园	苑援怨愿
援怨缘	员愿援远	员源援缘	员圆援怨	员圆援园	员员援缘	员员援员	员园援愿	员园援远	员园援源
摇 援怨怨	猿缘援缘	圆苑援园	圆猿援苑	圆员援怨	圆园援愿	圆园援园	员怨援缘	员怨援园	员愿援苑
苑 援圆	圆援猿园远	圆援圆苑苑	圆援圆远员	圆援圆源远	圆援圆圆园	圆援圆员猿	员援远园	员援远员	员援远圆
援圆	猿援缘怨	猿援圆远	猿援园苑	圆援怨远	圆援愿愿	圆援愿猿	圆援苑愿	圆援苑缘	圆援苑圆
援缘	缘援缘怨	源援苑源	源援猿缘	源援员圆	猿援怨苑	猿援愿苑	猿援苑怨	猿援苑猿	猿援远愿
援苑缘	愿援园苑	远援缘源	缘援愿怨	缘援缘圆	缘援圆怨	缘援员圆	源援怨怨	源援愿怨	源援愿圆
援怨	员圆援圆	怨援缘缘	愿援源缘	苑援愿缘	苑援源远	苑援员怨	远援怨怨	远援愿源	远援苑圆
援怨缘	员远援圆	员圆援源	员园援怨	员园援园	怨援猿远	怨援园苑	愿援愿怨	愿援苑缘	愿援远缘
摇 援怨怨	圆怨援圆	圆员援苑	员愿援愿	员苑援猿	员远援圆	员缘援缘	员缘援园	员源援远	员源援圆

增员原α	增								
	摇摇员园	摇摇员圆	摇摇员缘	摇摇圆园	摇摇圆源	摇摇猿园	摇摇远园	摇摇员圆园	肄
员 援圆	圆援源源源	圆援源苑苑	圆援源怨怨	圆援缘圆圆	圆援缘猿猿	圆援缘源缘	圆援缘远苑	圆援缘愿愿	圆援远园园
援圆	远园援圆	远园援苑	远员援圆	远员援苑	远圆援园	远圆援猿	远圆援愿	远猿援员	远猿援猿
援缘	圆援圆	圆援源	圆援远	圆援愿	圆援怨	圆援园	圆援圆	圆援猿	圆援源
援苑缘	怨援猿	怨援苑	怨援缘	怨援猿	怨援苑	员园援员	员园援圆	员园援源	员园援愿
援怨	远园援圆	远园援苑	远员援圆	远员援苑	远圆援园	远圆援猿	远圆援愿	远猿援员	远猿援猿
援怨缘	圆源圆	圆源源	圆源远	圆源愿	圆源怨	圆缘园	圆缘圆	圆缘猿	圆缘源
摇 援怨怨	远园缘远	远员园远	远员缘苑	远圆园怨	远圆猿缘	远圆远员	远猿员猿	远猿猿怨	远猿远远
圆 援圆	员援源源	员援源园	员援源远	员援源苑	员援源员	员援源愿	员援源愿	员援源愿	员援源源
援圆	怨援猿怨	怨援源员	怨援源圆	怨援源源	怨援源缘	怨援源远	怨援源苑	怨援源愿	怨援源怨
援缘	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿	员援猿愿
援苑缘	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿	猿援猿愿
援怨	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿	怨援猿愿
援怨缘	员怨援源	员怨援源	员怨援源	员怨援源	员怨援源	员怨援缘	员怨援缘	员怨援缘	员怨援缘
摇 援怨怨	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿	怨怨援猿愿

(续)

增圆 员原α	增员								
	摇摇员园	摇摇员圆	摇摇员缘	摇摇圆园	摇摇圆源	摇摇猿园	摇摇远园	摇摇员圆园	肄
猿 援圆缘	员援愿愿	员援愿园	员援远员	员援远猿	员援远猿	员援远源	员援远缘	员援远远	员援远苑
援员园	缘援圆猿	缘援圆圆	缘援圆园	缘援员愿	缘援员愿	缘援员苑	缘援员缘	缘援员源	缘援员猿
援园缘	愿援苑怨	愿援苑源	愿援苑园	愿援远远	愿援远源	愿援远圆	愿援缘苑	愿援缘缘	愿援缘猿
援园圆缘	员源援源圆	员源援猿猿	员源援圆缘	员源援员苑	员源援员圆	员源援园愿	员猿援怨怨	员猿援怨缘	员猿援怨园
援园员	圆苑援圆猿	圆苑援园缘	圆远援愿苑	圆远援远怨	圆远援远园	圆远援缘园	圆远援猿圆	圆远援圆圆	圆远援员猿
援园园缘	源猿援远怨	源猿援猿怨	源猿援园愿	源圆援苑愿	源圆援远圆	源圆援源苑	源圆援员缘	源员援怨怨	源员援愿猿
摇援园园员	员圆怨援圆	员圆愿援猿	员圆苑援源	员圆远援源	员圆缘援怨	员圆缘援源	员圆源援缘	员圆源援园	员圆猿援缘
源 援圆缘	员援愿员	员援愿猿	员援愿源	员援愿缘	员援愿远	员援愿远	员援愿苑	员援愿苑	员援愿苑
援员园	猿援怨圆	猿援怨园	猿援愿苑	猿援愿源	猿援愿猿	猿援愿圆	猿援苑怨	猿援苑愿	猿援苑远
援园缘	缘援怨远	缘援怨员	缘援愿远	缘援愿园	缘援苑苑	缘援苑缘	缘援远怨	缘援远远	缘援远猿
援园圆缘	愿援愿源	愿援苑缘	愿援远远	愿援缘远	愿援缘员	愿援源远	愿援猿远	愿援猿员	愿援圆远
援园员	员源援缘缘	员源援猿苑	员源援圆园	员源援园圆	员猿援怨猿	员猿援愿源	员猿援远缘	员猿援缘远	员猿援源远
援园园缘	圆园援怨苑	圆园援苑园	圆园援源源	圆园援员苑	圆园援园猿	员怨援愿怨	员怨援远员	员怨援源苑	员怨援猿圆
摇援园园员	源愿援园缘	源苑援源员	源远援苑远	源远援员园	源缘援苑苑	源缘援源猿	源源援苑缘	源源援源园	源源援园缘
缘 援圆缘	员援愿苑	员援愿怨	员援愿怨	员援愿愿	员援愿愿	员援愿愿	员援愿苑	员援愿苑	员援愿苑
援员园	猿援猿园	猿援圆苑	猿援圆源	猿援圆员	猿援员怨	猿援员苑	猿援员源	猿援员圆	猿援员园
援园缘	源援苑源	源援远愿	源援远圆	源援缘远	源援缘猿	源援缘园	源援源猿	源援源园	源援猿远
援园圆缘	远援远圆	远援缘圆	远援源猿	远援猿猿	远援圆愿	远援圆猿	远援员圆	远援园苑	远援园圆
援园员	员园援园缘	怨援愿怨	怨援苑圆	怨援缘缘	怨援源苑	怨援猿愿	怨援圆园	怨援员员	怨援园圆
援园园缘	员猿援远圆	员猿援猿愿	员猿援员缘	员圆援怨园	员圆援苑愿	员圆援远远	员圆援源园	员圆援圆苑	员圆援员源
摇援园园员	圆远援怨圆	圆远援源圆	圆缘援怨员	圆缘援猿怨	圆缘援员猿	圆源援愿苑	圆源援猿猿	圆源援园远	圆猿援苑怨
远 援圆缘	员援苑苑	员援苑苑	员援苑远	员援苑远	员援苑缘	员援苑缘	员援苑源	员援苑源	员援苑源
援员园	圆援怨源	圆援怨园	圆援愿苑	圆援愿源	圆援愿圆	圆援愿园	圆援苑远	圆援苑源	圆援苑圆
援园缘	源援园远	源援园园	猿援怨源	猿援愿苑	猿援愿源	猿援愿员	猿援苑源	猿援苑园	猿援远苑
援园圆缘	缘援源远	缘援猿苑	缘援圆苑	缘援员苑	缘援员圆	缘援园苑	源援怨远	源援怨园	源援愿缘
援园员	苑援愿苑	苑援苑圆	苑援缘远	苑援源园	苑援猿员	苑援圆猿	苑援园远	远援怨苑	远援愿愿
援园园缘	员园援圆缘	员园援园猿	怨援愿员	怨援缘怨	怨援源苑	怨援猿远	怨援员圆	怨援园园	愿援愿愿
摇援园园员	员愿援源员	员苑援怨怨	员苑援缘远	员苑援员圆	员远援愿怨	员远援远苑	员远援圆员	员缘援怨愿	员缘援苑缘
苑 援圆缘	员援远怨	员援远愿	员援远愿	员援远苑	员援远苑	员援远远	员援远缘	员援远缘	员援远缘
援员园	圆援苑园	圆援远苑	圆援远猿	圆援缘怨	圆援缘愿	圆援缘远	圆援缘员	圆援源怨	圆援源苑
援园缘	猿援远源	猿援缘苑	猿援缘员	猿援源源	猿援源员	猿援猿愿	猿援猿园	猿援圆苑	猿援圆猿
援园圆缘	源援苑远	源援远苑	源援缘苑	源援源苑	源援源圆	源援猿远	源援圆缘	源援圆园	源援员源
援园员	远援远圆	远援源苑	远援猿员	远援员远	远援园苑	缘援怨怨	缘援愿圆	缘援苑源	缘援远缘
援园园缘	愿援猿愿	愿援员愿	苑援怨苑	苑援苑缘	苑援远缘	苑援缘猿	苑援猿员	苑援员怨	苑援园愿
摇援园园员	员源援园愿	员猿援苑员	员猿援猿圆	员圆援怨猿	员圆援苑猿	员圆援缘猿	员圆援员圆	员员援怨员	员员援苑园

（续）

增员原α	增								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
愿 援园	园援缘怨	园援远苑	园援远园	园援员缘	园援源愿	园援远员	园援愿愿	员援园	员援员
援园	猿援远	猿援员	圆援圆	圆援员	圆援猿	圆援苑	圆援圆	圆援怨	圆援远
援缘	缘援圆	源援远	源援苑	猿援源	猿援怨	猿援愿	猿援圆	猿援源	猿援怨
援园缘	苑援苑	远援远	缘援圆	缘援缘	源援圆	源援缘	源援猿	源援猿	源援远
援怨	员援猿	愿援缘	苑援怨	苑援员	远援猿	远援苑	远援愿	远援猿	缘援员
援怨缘	员援苑	员援园	怨援园	愿援员	愿援园	苑援缘	苑援怨	苑援园	苑援源
摇 援怨怨	圆援源	员愿援缘	员缘援愿	员源援源	员猿援缘	员圆援怨	员圆援源	员圆援园	员员援愿
怨 援园	园援缘源	园援远怨	园援苑圆	园援远远	园援怨怨	园援远圆	园援远愿	园援怨园	员援园
援园	猿援远	猿援员	圆援员	圆援怨	圆援员	圆援缘	圆援员	圆援苑	圆援源
援缘	缘援圆	源援远	猿援远	猿援猿	猿援愿	猿援苑	猿援怨	猿援猿	猿援愿
援园缘	苑援员	缘援员	缘援愿	源援圆	源援愿	源援圆	源援园	源援园	源援猿
援怨	员园援远	愿援圆	远援怨	远援圆	远援远	缘援园	缘援员	缘援苑	缘援缘
援怨缘	员猿援远	员园援员	愿援圆	苑援远	苑援苑	苑援猿	远援愿	远援怨	远援源
摇 援怨怨	圆援怨	员远援源	员猿援怨	员园援远	员园援苑	员园援员	员园援苑	员园援源	员园援员
员园 援园	园援缘园	园援远猿	园援苑缘	园援苑怨	园援愿圆	园援愿源	园援愿员	园援愿猿	园援愿圆
援园	猿援怨	圆援圆	圆援猿	圆援员	圆援圆	圆援远	圆援员	圆援愿	圆援缘
援缘	源援远	源援园	猿援员	猿援愿	猿援猿	猿援圆	猿援源	猿援苑	猿援圆
援园缘	远援源	缘援远	源援猿	源援苑	源援源	源援苑	猿援缘	猿援缘	猿援愿
援怨	员园援园	苑援远	远援缘	缘援怨	缘援源	缘援怨	缘援园	缘援远	源援源
援怨缘	员园援愿	怨援猿	愿援愿	苑援源	远援苑	远援源	远援园	远援园	缘援苑
摇 援怨怨	圆援圆	员源援怨	员圆援远	员员援猿	员园援缘	怨援猿	怨援圆	怨援圆	愿援远
员圆 援园	园援缘愿	园援苑缘	园援苑缘	园援苑愿	园援愿员	园援愿猿	园援愿怨	园援怨圆	园援愿员
援园	猿援愿	圆援员	圆援员	圆援愿	圆援怨	圆援猿	圆援圆	圆援源	圆援员
援缘	源援缘	猿援怨	猿援怨	猿援远	猿援员	猿援圆	猿援园	猿援缘	猿援园
援园缘	远援缘	缘援圆	源援苑	源援圆	猿援怨	猿援苑	猿援员	猿援员	猿援源
援怨	怨援猿	苑援猿	缘援缘	缘援员	缘援远	源援圆	源援源	源援源	源援怨
援怨缘	员园援愿	愿援员	苑援猿	远援园	远援远	远园援苑	缘援圆	缘援源	缘援员
摇 援怨怨	员怨援远	员圆援员	员园援圆	怨援猿	愿援怨	愿援源	愿援愿	苑援圆	苑援愿
员缘 援园	园援缘远	园援远远	园援远远	园援远远	园援远员	园援远猿	园援远怨	园援远园	园援远员
援园	猿援苑	圆援园	圆援园	圆援园	圆援园	圆援园	圆援元	圆援员	圆援员
援缘	源援远	猿援苑	猿援苑	猿援园	猿援园	圆援园	圆援员	圆援苑	圆援园
援园缘	远援缘	缘援园	源援苑	源援园	圆援苑	猿援远	猿援员	猿援员	猿援园
援怨	愿援远	远援苑	缘援缘	源援猿	源援园	源援园	猿援猿	猿援园	猿援怨
援怨缘	员园援愿	苑援远	远援缘	远援园	缘援员	源援远	源援远	源援苑	源援园
摇 援怨怨	员怨援苑	员园援缘	怨援源	愿援缘	苑援苑	苑援远	远援源	远援苑	远援园

（续）

增员原α	增								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
圆园 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
圆源 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

增员原α	增								
	摇摇员园	摇摇员圆	摇摇员缘	摇摇圆园	摇摇圆源	摇摇猿园	摇摇远园	摇摇员圆园	肄
愿 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
怨 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
员园 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

（续）

增圆员原α	增员								
	摇摇员园	摇摇员圆	摇摇员缘	摇摇圆园	摇摇圆源	摇摇猿园	摇摇远园	摇摇员圆园	肄
员圆 援缘园	园援怨愿怨	员援园园	员援园员	员援园圆	员援园猿	员援园猿	员援园缘	员援园缘	员援园远
援怨园	圆援员怨	圆援员缘	圆援员园	圆援园远	圆援园源	圆援园员	员援怨远	员援怨猿	员援怨园
援怨缘	圆援苑缘	圆援远怨	圆援远圆	圆援缘源	圆援缘员	圆援源苑	圆援猿愿	圆援猿源	圆援猿园
援怨苑缘	猿援猿苑	猿援圆愿	猿援员愿	猿援园苑	猿援园圆	圆援怨远	圆援愿缘	圆援苑怨	圆援苑圆
援怨怨	源援猿园	源援员远	源援园员	猿援愿远	猿援苑愿	猿援苑园	猿援缘源	猿援源缘	猿援猿远
援怨怨缘	缘援园怨	源援怨员	源援苑圆	源援缘猿	源援源猿	源援猿猿	源援员圆	源援园员	猿援怨园
摇援怨怨怨	苑援圆怨	苑援园园	远援苑员	远援源园	远援圆缘	远援园怨	缘援苑远	缘援缘怨	缘援源圆
员缘 援缘园	园援怨苑苑	园援怨愿怨	员援园园	员援园员	员援园圆	员援园圆	员援园猿	员援园源	员援园缘
援怨园	圆援园远	圆援园圆	员援怨苑	员援怨圆	员援怨园	员援愿苑	员援愿圆	员援苑怨	员援苑远
援怨缘	圆援缘源	圆援源愿	圆援源园	圆援猿猿	圆援圆怨	圆援圆缘	圆援员远	圆援员员	圆援园苑
援怨苑缘	猿援园远	圆援怨远	圆援愿远	圆援苑远	圆援苑园	圆援远源	圆援缘圆	圆援源远	圆援源园
援怨怨	猿援愿园	猿援远苑	猿援缘圆	猿援猿苑	猿援圆怨	猿援圆员	猿援园缘	圆援怨远	圆援愿苑
援怨怨缘	源援源圆	源援圆缘	源援园苑	猿援愿愿	猿援苑怨	猿援远怨	猿援源愿	猿援猿苑	猿援圆远
摇援怨怨怨	远援园愿	缘援愿员	缘援缘源	缘援圆缘	缘援员园	源援怨缘	源援远源	源援源苑	源援猿员
圆园 援缘园	园援怨远远	园援怨苑苑	园援怨愿怨	员援园园	员援园员	员援园员	员援园圆	员援园猿	员援园猿
援怨园	员援怨源	员援愿怨	员援愿源	员援苑怨	员援苑苑	员援苑源	员援远愿	员援远源	员援远员
援怨缘	圆援猿缘	圆援圆愿	圆援圆园	圆援员圆	圆援园愿	圆援园源	员援怨缘	员援怨园	员援愿源
援怨苑缘	圆援苑苑	圆援远愿	圆援缘苑	圆援源远	圆援源员	圆援猿缘	圆援圆圆	圆援员远	圆援园怨
援怨怨	猿援猿苑	猿援圆猿	猿援园怨	圆援怨源	圆援愿远	圆援苑愿	圆援远员	圆援缘圆	圆援源圆
援怨怨缘	猿援愿缘	猿援远愿	猿援缘园	猿援猿圆	猿援圆圆	猿援员圆	圆援怨圆	圆援愿员	圆援远怨
摇援怨怨怨	缘援园愿	源援愿圆	源援缘远	源援圆怨	源援员缘	源援园园	猿援苑园	猿援缘源	猿援猿愿
圆源 援缘园	园援怨远员	园援怨苑圆	园援怨愿猿	园援怨怨源	员援园园	员援园员	员援园圆	员援园圆	员援园猿
援怨园	员援愿愿	员援愿猿	员援苑愿	员援苑猿	员援苑园	员援远苑	员援远员	员援缘苑	员援缘猿
援怨缘	圆援圆缘	圆援员愿	圆援员员	圆援园猿	员援怨愿	员援怨源	员援愿源	员援苑怨	员援苑猿
援怨苑缘	圆援远源	圆援缘源	圆援源源	圆援猿猿	圆援圆苑	圆援圆员	圆援园愿	圆援园员	员援怨源
援怨怨	猿援员苑	猿援园猿	圆援愿怨	圆援苑源	圆援远远	圆援缘愿	圆援源园	圆援猿员	圆援圆员
援怨怨缘	猿援缘怨	猿援源圆	猿援圆缘	猿援园远	圆援怨苑	圆援愿苑	圆援远远	圆援缘缘	圆援源猿
摇援怨怨怨	源援远源	源援猿怨	源援员源	猿援愿苑	猿援苑源	猿援缘怨	猿援圆怨	猿援员源	圆援怨苑

增圆员原α	增员								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
猿园 援缘园	园援源远远	园援苑园怨	园援愿园苑	园援愿缘愿	园援愿怨园	园援怨员圆	园援怨圆苑	园援怨猿怨	园援怨源愿
援怨园	圆援愿愿	圆援源怨	圆援圆愿	圆援员源	圆援园缘	员援怨愿	员援怨猿	员援愿愿	员援愿缘
援怨缘	源援员苑	猿援猿圆	圆援怨圆	圆援远怨	圆援缘猿	圆援源圆	圆援猿猿	圆援圆苑	圆援圆员
援怨苑缘	缘援缘苑	源援员愿	猿援缘怨	猿援圆缘	猿援园猿	圆援愿苑	圆援苑缘	圆援远缘	圆援缘苑
援怨怨	苑援缘远	缘援猿怨	源援缘员	源援园圆	猿援苑园	猿援源苑	猿援猿园	猿援员苑	猿援园苑
援怨怨缘	怨援员愿	远援猿缘	缘援圆源	源援远圆	源援圆猿	猿援怨缘	猿援苑源	猿援缘愿	猿援源缘
摇援怨怨怨	员猿援猿	愿援苑苑	苑援园缘	远援员圆	缘援缘猿	缘援员圆	源援愿圆	源援缘愿	源援猿怨

(续)

[illegible]	[illegible]								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
远园 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
肆 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
远园 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
摇 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

（续）

增员原α	增								
	摇摇员	摇摇圆	摇摇猿	摇摇源	摇摇缘	摇摇远	摇摇苑	摇摇愿	怨
员园园摇援园	园援愿猿怨	园援愿怨园	园援苑员员	园援远园圆	园援远愿愿	园援愿猿猿	园援愿源源	员援园园	员援园员员
援园	员援愿缘	员援愿园	员援源缘	员援猿愿	员援猿缘	员援员员	员援园圆	员援园远	员援园怨
援缘	员援愿员	员援愿猿	员援远缘	员援远远	员援远员	员援源缘	员援猿猿	员援源缘	员援圆缘
援园缘	圆援远远	圆援园缘	员援愿缘	员援愿园	员援远远	员援怨怨	员援猿猿	员援猿猿	员援缘员
援怨	圆援源苑	圆援源源	圆援愿怨	圆援苑猿	员援怨缘	员援苑远	员援远远	员援源猿	员援源愿
援园缘	圆援远员	圆援远源	圆援苑苑	圆援愿怨	圆援园怨	员援怨愿	员援怨缘	员援远员	员援源猿
摇 援怨怨	猿援愿源	猿援远圆	圆援远愿	圆援源猿	圆援猿园	圆援园远	员援怨缘	员援苑苑	员援缘源
肆 援园	园援愿缘源	园援愿圆缘	园援苑缘远	园援远苑苑	园援远员圆	园援远苑愿	园援愿怨怨	园援愿怨源	员援园园
援园	员援园圆	员援园缘	员援园怨	员援园圆	员援园愿	员援园源	员援园源	员援园苑	员援园园
援缘	员援猿猿	员援猿缘	员援猿苑	员援猿苑	员援猿圆	员援猿远	员援圆圆	员援圆圆	员援园园
援园缘	圆援园缘	员援怨源	员援愿猿	员援远员	员援缘源	员援源苑	员援猿怨	员援圆苑	员援园园
援怨	圆援缘圆	圆援猿愿	圆援圆源	员援怨愿	员援愿怨	员援苑园	员援远苑	员援缘圆	员援园园
援怨缘	圆援怨圆	圆援远远	圆援源怨	圆援圆园	圆援园园	员援愿怨	员援苑猿	员援远远	员援园园
摇 援怨怨	圆援猿远	圆援源源	圆援源员	圆援猿苑	圆援猿猿	圆援员怨	员援远远	员援缘缘	员援园园

附录 源摇相关系数的临界值

灶原圆	缘豫	员豫	灶原圆	缘豫	员豫	灶原圆	缘豫	员豫
员	[illegible]	[illegible]	员远	[illegible]	[illegible]	猿缘	[illegible]	[illegible]
圆	[illegible]	[illegible]	员苑	[illegible]	[illegible]	源园	[illegible]	[illegible]
猿	[illegible]	[illegible]	员愿	[illegible]	[illegible]	源缘	[illegible]	[illegible]
源	[illegible]	[illegible]	员怨	[illegible]	[illegible]	缘园	[illegible]	[illegible]
缘	[illegible]	[illegible]	圆园	[illegible]	[illegible]	远园	[illegible]	[illegible]
远	[illegible]	[illegible]	圆员	[illegible]	[illegible]	苑园	[illegible]	[illegible]
苑	[illegible]	[illegible]	圆圆	[illegible]	[illegible]	愿园	[illegible]	[illegible]
愿	[illegible]	[illegible]	圆猿	[illegible]	[illegible]	怨园	[illegible]	[illegible]
怨	[illegible]	[illegible]	圆源	[illegible]	[illegible]	员园园	[illegible]	[illegible]
员园	[illegible]	[illegible]	圆缘	[illegible]	[illegible]	员圆缘	[illegible]	[illegible]
员员	[illegible]	[illegible]	圆远	[illegible]	[illegible]	员缘园	[illegible]	[illegible]
员圆	[illegible]	[illegible]	圆苑	[illegible]	[illegible]	圆园园	[illegible]	[illegible]
员猿	[illegible]	[illegible]	圆愿	[illegible]	[illegible]	猿园园	[illegible]	[illegible]
员源	[illegible]	[illegible]	圆怨	[illegible]	[illegible]	源园园	[illegible]	[illegible]
员缘	[illegible]	[illegible]	猿园	[illegible]	[illegible]	员园园园	[illegible]	[illegible]

参 考 文 献

1. 刘来福,曾文艺. 数学模型与数学建模. 北京: 北京师范大学出版社,1997
2. 谭永基等. 数学模型. 上海: 复旦大学出版社,1997
3. 李尚志. 数学建模竞赛教程. 南京: 江苏教育出版社,1996
4. 王朝瑞. 图论. 北京: 北京工业学院出版社,1986
5. 王树禾. 图论及其算法. 合肥: 中国科技大学出版社,1990
6. 程民德主编. 中国数学发展的若干主攻方向. 南京: 江苏教育出版社,1994
7. 纪晓福等. 运筹学. 天津: 天津人民出版社,2000
8. 姜启源. 数学模型(第二版). 北京: 高等教育出版社,1993
9. 王树禾. 数学模型基础. 合肥: 中国科技大学出版社,1996
10. 杨启帆,边馥萍. 数学模型. 杭州: 浙江大学出版社,1990
11. 唐焕文. 数学模型引论. 第二版. 北京: 高等教育出版社,2001
12. 齐欢. 数学模型方法. 武汉: 华中理工大学出版社,1996
13. 周义仓. 数学建模实验. 西安: 西安交通大学出版社,199[illegible]
14. 陈义华. 数学模型. 重庆: 重庆大学出版社,1995
15. 费培之. 线性和非线性规划引论及应用. 成都: 四川大学出版社,1991
16. 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(一). 长沙: 湖南教育出版社,1993
17. 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(二). 长沙: 湖南教育出版社,1997
18. 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材(三). 长沙: 湖南教育出版社,1998
19. 李云. 应用数学模型. 武汉: 华中理工大学出版社,1993
20. 寿纪林. 数学建模—方法与范例. 西安: 西安交通大学出版社,1993
21. 沈继红等. 数学建模. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社,1996
22. 濮定国. 数学模型. 南京: 东南大学出版社,1994